Superturingmaschinen

Felix Karg

27. Januar 2018

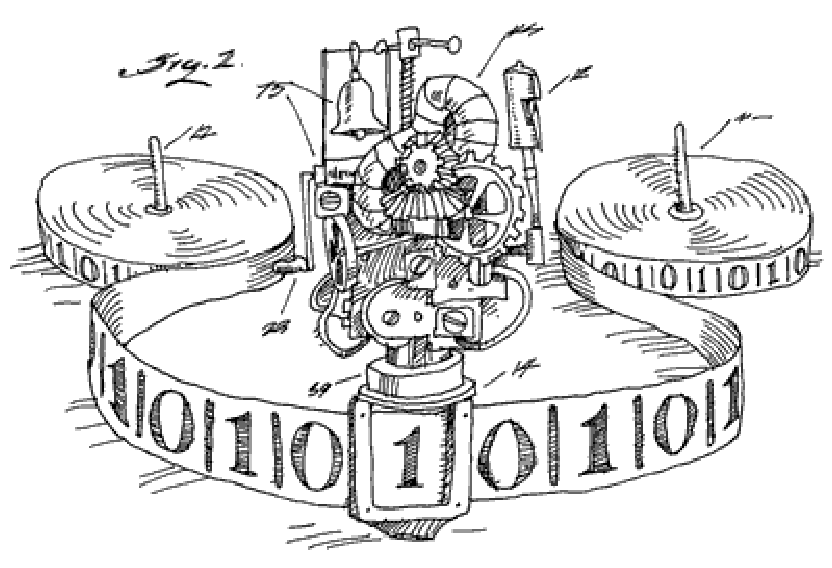
University of Freiburg

Inhalt

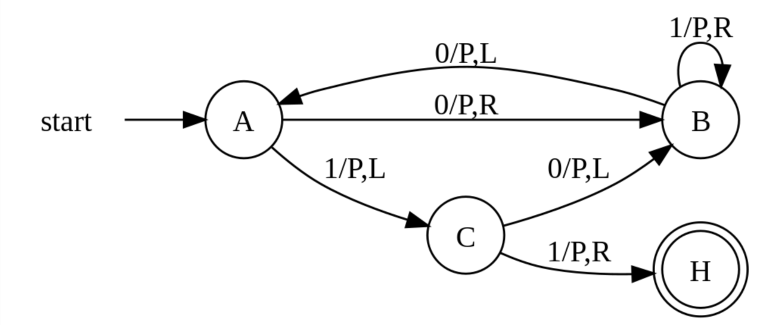
Disclaimer

Inhalt

Turingmaschine: Einführung



Turingmaschine: Beispiel



Schreibt 6 1er auf ein leeres Band.

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- Turingmaschine ist Codierbar

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- Turingmaschine ist Codierbar
- Kann andere Turingmaschinen Simulieren

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- Turingmaschine ist Codierbar
- Kann andere Turingmaschinen Simulieren
- Gibt abzählbar unendlich viele

Inhalt

Aussagentypen - Einführung

Eine Σ_1-Aussage ist eine Aussage der Form:

„Es existieren $n \in \mathbb{N}$ mit $\heartsuit$.“, Eine Σ_1-Aussage ist eine Aussage der Form:

$$\text{„Es existieren } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \heartsuit.\text{“},$$

wobei in der Teilaussage $\heartsuit$ nur noch *beschränkte Quantoren* vorkommen dürfen, also Formeln wie:

Aussagentypen - Einführung

Eine Σ_1-Aussage ist eine Aussage der Form:

„Es existieren $n \in \mathbb{N}$ mit $\heartsuit$.“,

wobei in der Teilaussage $\heartsuit$ nur noch *beschränkte Quantoren* vorkommen dürfen, also Formeln wie:

„Für alle Zahlen m kleiner .. gilt ...“

oder

„Es gibt eine Zahl m kleiner .. mit ...“

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N};$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$;

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$;

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N};$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1..\exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1..\exists n_k : \forall m_1..\forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1..\forall n_k : \heartsuit$ (Π_1)

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}; f_1, .., f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1 .. \forall n_k : \heartsuit$ (Π_1)
- $\phi = \exists f_1 .. \exists f_k : \heartsuit$ (Σ^1_1)

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$; $f_1, .., f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1 .. \forall n_k : \heartsuit$ (Π_1)
- $\phi = \exists f_1 .. \exists f_k : \heartsuit$ (Σ_1^1)
- $\phi = \forall f_1 .. \forall f_k : \heartsuit$ (Π_1^1)

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$; $f_1, .., f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1..\exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1 $=$ NP)
- $\phi = \exists n_1..\exists n_k : \forall m_1..\forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1..\forall n_k : \heartsuit$ (Π_1 $=$ co-NP)
- $\phi = \exists f_1..\exists f_k : \heartsuit$ (Σ_1^1)
- $\phi = \forall f_1..\forall f_k : \heartsuit$ (Π_1^1)

Inhalt

Unendlichkeit allgemein

Unterschied:

Unendlichkeit allgemein

Unterschied:

- Abzählbar Unendlich

Unendlichkeit allgemein

Unterschied:

- Abzählbar Unendlich
- Überabzählbar Unendlich

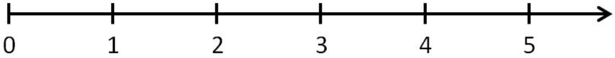
Unendlichkeit allgemein

Unterschied:

- Abzählbar Unendlich ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$)
- Überabzählbar Unendlich ($\mathbb{R}$)

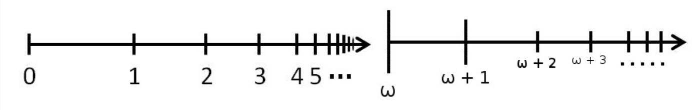
Problem des Ordinalen Zahlenstrahls

Normaler Zahlenstrahl:

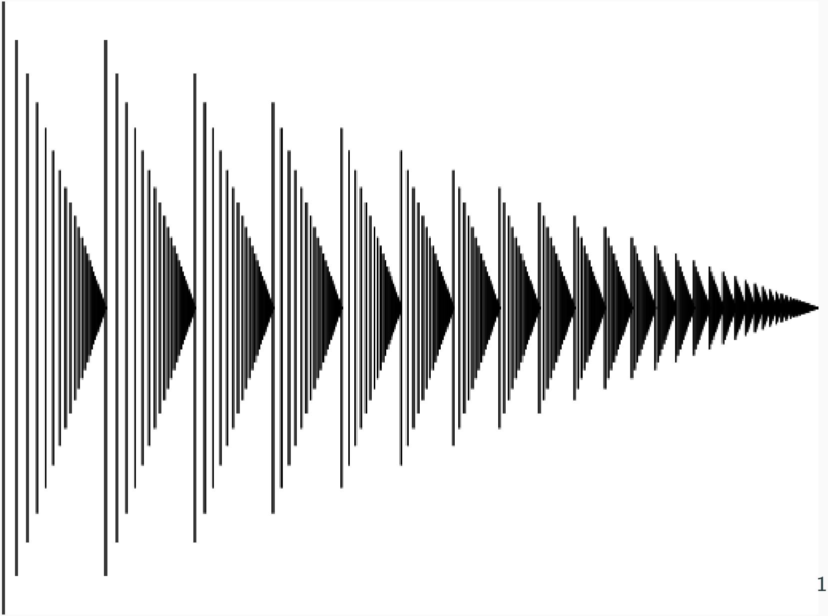


Problem des Ordinalen Zahlenstrahls

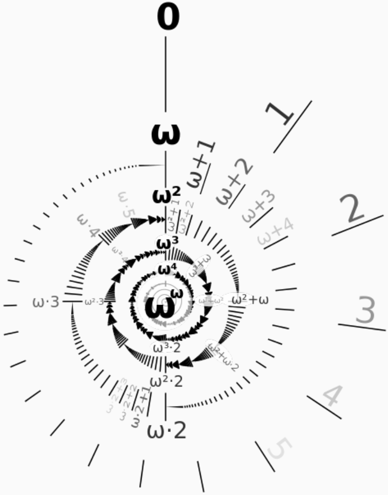
Normaler Zahlenstrahl mit ersten Ordinalen Zahlen:



Problem des Ordinalen Zahlenstrahls



Problem des Ordinalen Zahlenstrahls



Inhalt

Superturingmaschinen: Intro

Eigentlich eine Normale Turingmaschine.

Superturingmaschinen: Intro

Eigentlich eine Normale Turingmaschine.

Wir haben als Zeitschritte Ordinalzahlen.

Inhalt

Grenzverhalten - Unklarheiten

Offene Fragen sind:

Grenzverhalten - Unklarheiten

Offene Fragen sind:

- In welchem Zustand sind wir?

Grenzverhalten - Unklarheiten

Offene Fragen sind:

- In welchem Zustand sind wir?
- Wie sieht das Band aus?

Grenzverhalten - Unklarheiten

Offene Fragen sind:

- In welchem Zustand sind wir?
- Wie sieht das Band aus?
- Was bedeutet das?

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten.

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten. Das ist einfach :)

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten. Das ist einfach :)
- Wir halten nicht.

Grenzverhalten - Erklärung

Grenzverhalten - Erklärung

Es ist echt verdammt schwer GIFs in PDFs zu bekommen ...

Grenzverhalten - Erklärung

Es ist echt verdammt schwer GIFs in PDFs zu bekommen ...

Demotime.

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne zu halten nach rechts.

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne zu halten nach rechts.

Scheint sich zu wiederholen, hält aber nach Schritt ω^2.

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne zu halten nach rechts.

Scheint sich zu wiederholen, hält aber nach Schritt ω^2.

Eine Superturingmaschine wiederholt sich genau dann, wenn

- die Aufnahmen zu zwei Limesordinalzahlen gleich sind und
- zwischen diesen Zeiten keine Zellen, die Null waren zu eins werden.

Inhalt

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden
- Funktionen mit gewissen Eigenschaften finden

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden
- Funktionen mit gewissen Eigenschaften finden
- Die Klasse der Wohlordnungen entscheiden

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebig komplexe Aussagen entscheiden

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebig komplexe Aussagen entscheiden
- Kaffe kochen

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebig komplexe Aussagen entscheiden
- Kaffe kochen
- ...

Inhalt

Wohlordnungen

Eine Wohlordnung ist eine total fundierte Ordnungsrelation.

Wohlordnungen

Eine Wohlordnung ist eine total fundierte Ordnungsrelation.

Was heißt das?

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$

Wohlordnung: Beispiel

$$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, ..\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, ..\}$

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, .., -1, -2, -3, ..\}$

Wohlordnung: Beispiel

$$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, ..\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, .., -1, -2, -3, ..\}$$

$$\left\{ \begin{array}{|llllll} \hline 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & .. \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & .. \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & .. \\ 9 & 13 & 18 & 24 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{array} \right\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, ..\}$

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, .., -1, -2, -3, ..\}$

$$\left\{ \begin{array}{|llllll} \hline 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & .. \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & .. \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & .. \\ 9 & 13 & 18 & 24 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{array} \right\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, ..\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, .., -1, -2, -3, ..\}$

$$\left\{ \begin{array}{|llllll} \hline 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & .. \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & .. \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & .. \\ 9 & 13 & 18 & 24 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{array} \right\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, ..\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, .., -1, -2, -3, ..\}$

(Order-Type: $2 * \omega$)

$$\left\{ \begin{array}{|cccccc} \hline 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & .. \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & .. \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & .. \\ 9 & 13 & 18 & 24 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{array} \right\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, ..\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, ..\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, .., -1, -2, -3, ..\}$

(Order-Type: $2 * \omega$)

$$\left\{ \begin{array}{|cccccc} \hline 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & .. \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & .. \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & .. \\ 9 & 13 & 18 & 24 & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \end{array} \right\}$$ (Order-Type: ω^2)

Inhalt

Können wir zu jeder Natürlichen Zahl halten?

Können wir zu jeder Ordinalen Zahl halten?

Inhalt

Stempelbare Ordinalzahlen

Stempelbare Ordinalzahlen

Lese das Band.

- Bei einer 1, halte.
- Bei einer 0, schreibe eine 1 und gehe ohne anzuhalten nach rechts.

Stempelbare Ordinalzahlen

Lese das Band.

- Bei einer 1, halte.
- Bei einer 0, schreibe eine 1 und gehe ohne anzuhalten nach rechts.

$\rightarrow$ Wir halten im Schritt ω.

Stempelbare Ordinalzahlen

Lese das Band.

- Bei einer 1, halte.
- Bei einer 0, schreibe eine 1 und gehe ohne anzuhalten nach rechts.

$\rightarrow$ Wir halten im Schritt ω.

(wir haben bereits gesehen dass wir im Schritt ω^2 halten können.)

Erkenntnisse

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.

Erkenntnisse

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.

Erkenntnisse

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.
- Sind α und β Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$

Erkenntnisse

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.
- Sind α und β Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$ und $\alpha * \beta$.

Erkenntnisse

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.
- Sind α und β Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$ und $\alpha * \beta$.

Sind das nicht bereits alle?

Speed-Up Lemma

Wenn $\alpha + n$ Stempelbar ist, so auch α.

Inhalt

Lücken-Existenz-Theorem

Es gibt nicht-Stempelbare Lücken in den Ordinalzahlen. Um genau zu sein ist die erste Lücke genau ω groß.

Lücken-Existenz-Theorem

Es gibt nicht-Stempelbare Lücken in den Ordinalzahlen. Um genau zu sein ist die erste Lücke genau ω groß.

Beweis:

Lücken-Existenz-Theorem

Es gibt nicht-Stempelbare Lücken in den Ordinalzahlen. Um genau zu sein ist die erste Lücke genau ω groß.

Beweis:

Alle Turingmaschinen Simulieren und halten, sobald kein anderes gehalten hat.

Alle Turingmaschinen

Alle Turingmaschinen Simulieren und halten, sobald kein anderes gehalten hat.

Hat es Bedeutung, davon zu sprechen?

Alle Turingmaschinen Simulieren und
halten,
sobald kein anderes gehalten hat.

Hat es Bedeutung, davon zu sprechen?

Alle Turingmaschinen

Alle Turingmaschinen Simulieren und halten, sobald kein anderes **gehalten** hat.

Hat es Bedeutung, davon zu sprechen?

Große-Lücken-Theorem

Die Lücken werden Groß. Für jede Stempelbare Ordinalzahl gibt es mindestens eine genausogroße Lücke.

Große-Lücken-Theorem

Die Lücken werden Groß. Für jede Stempelbare Ordinalzahl gibt es mindestens eine genausogroße Lücke.

Beweis.

Viele-Lücken-Theorem

Es gibt für jede schreibbare Zahl α mindestens α viele mindestens α große Lücken in den stempelbaren Ordinalzahlen.

Viele-Lücken-Theorem

Um genau zu sein: ist α Stempelbar oder Schreibbar, ist die Anzahl der Lücken mit der Größe mindestens α weder Stempelbar noch Schreibbar.

Inhalt

Ausblick

Weiterführend:

- Keine Lücken in den Schreibbaren Ordinalzahlen
- Große Blöcke an stempelbaren Ordinalzahlen

Ausblick

Weiterführend:

- Keine Lücken in den Schreibbaren Ordinalzahlen
- Große Blöcke an stempelbaren Ordinalzahlen
- Es gibt Bandinhalte die gelesen und akzeptiert aber nicht geschrieben werden können
- Viel Größere Zusammenhänge mit Wohlordnungen

Ausblick

Weiterführend:

- Aussagentypen
- Orakel

Ausblick

Weiterführend:

- Aussagentypen
- Orakel
- 'Infinite time halting problems'
- 'Infinite time degrees'
- 'Infinite time lambda calculus'

Inhalt

Quellen I

Die Folien sind zu finden unter:

https://github.com/blueburningcoder/things-to-talk-about/tree/master/proseminar

Das Paper, aus dem ich den Vortrag gebastelt hab:

Joel David Hamkins and Andy Lewis
Infinite Time Turing Machines
https://arxiv.org/pdf/math/9808093.pdf

Quellen II

Bilder

Nach erscheinen:

1 https://github.com/iblech/mathezirkel-kurs/tree/master/superturingmaschinen/images/turing-machine.png

2 https://en.wikipedia.org/wiki/File:State_diagram_3_state_busy_beaver_2B.svg

3 https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_number#/media/File:Omega-exp-omega-labeled.svg

Quellen III

Wikipedia
Arithmetische hierarchie
https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetical_hierarchy

Wikipedia
Ordinalzahlen
https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_number
https://de.wikipedia.org/wiki/Ordinalzahl

Quellen IV

Wikipedia
Wohlordnung
https://en.wikipedia.org/wiki/Well-order
https://de.wikipedia.org/wiki/Wohlordnung

(Leere Folie um exakt 42 zu haben :))