Superturingmaschinen

Felix Karg

19. Januar 2018

University of Freiburg

Inhalt

Inhalt

Übersicht

- Turingmaschine
- Eigenschaften
- Aussagentypen

Übersicht

- Turingmaschine
- Eigenschaften
- Aussagentypen
- Unendlichkeit
- Ordinalzahlen

Übersicht

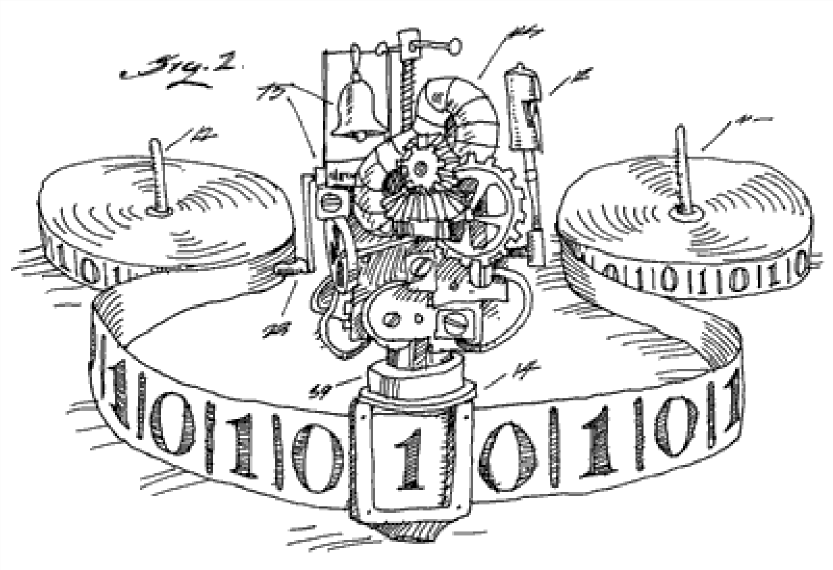
- Turingmaschine
- Eigenschaften
- Aussagentypen
- Unendlichkeit
- Ordinalzahlen
- Superturingmaschinen
- Grenzverhalten
- Fähigkeiten

Übersicht

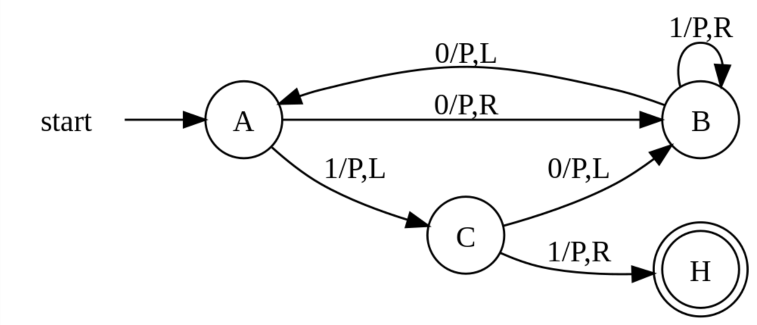
- Turingmaschine
- Eigenschaften
- Aussagentypen
- Unendlichkeit
- Ordinalzahlen
- Superturingmaschinen
- Grenzverhalten
- Fähigkeiten
- Halteverhalten
- Stempelbare Zahlen

Inhalt

Turingmaschine: Einführung



Turingmaschine: Beispiel



Schreibt 6 1er auf ein leeres Band.

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- TM ist Eindeutig Definiert

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- TM ist Eindeutig Definiert
- Kann andere Turingmaschinen Simulieren

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- TM ist Eindeutig Definiert
- Kann andere Turingmaschinen Simulieren
- Halteproblem

Inhalt

Aussagentypen - Einführung

Eine Σ_1-Aussage ist eine Aussage der Form:

$$„\text{Es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \heartsuit.\text{“},$$

Aussagentypen - Einführung

Eine Σ_1-Aussage ist eine Aussage der Form:

$$„\text{Es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \heartsuit.\text{“},$$

wobei in der Teilaussage $\heartsuit$ nur noch *beschränkte Quantifikatoren* vorkommen dürfen, also Formeln wie:

Aussagentypen - Einführung

Eine Σ_1-Aussage ist eine Aussage der Form:

„Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\heartsuit$.“,

wobei in der Teilaussage $\heartsuit$ nur noch *beschränkte Quantifikatoren* vorkommen dürfen, also Formeln wie:

„Für alle Zahlen m kleiner .. gilt ...“

oder

„Es gibt eine Zahl m kleiner .. mit ...“

Aussagentypen

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$;

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

Aussagentypen

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$;

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)

Aussagentypen

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$;

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)

Aussagentypen

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$;

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1 .. \forall n_k : \heartsuit$ (Π_1)

Aussagentypen

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}; f_1, .., f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1 .. \forall n_k : \heartsuit$ (Π_1)
- $\phi = \exists f_1 .. \exists f_k : \heartsuit$ (Σ_1^1)

Aussagentypen

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$; $f_1, .., f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ (Σ_1)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1 .. \forall n_k : \heartsuit$ (Π_1)
- $\phi = \exists f_1 .. \exists f_k : \heartsuit$ (Σ_1^1)
- $\phi = \forall f_1 .. \forall f_k : \heartsuit$ (Π_1^1)

Aussagentypen

$n_1, .., n_k, m_1, .., m_k \in \mathbb{N}$; $f_1, .., f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

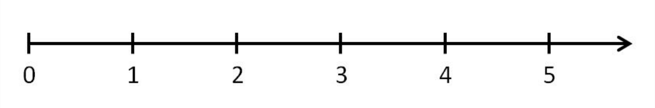
Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \heartsuit$ ($\Sigma_1 \ = \mathrm{NP}$)
- $\phi = \exists n_1 .. \exists n_k : \forall m_1 .. \forall m_k : \heartsuit$ (Σ_2)
- $\phi = \forall n_1 .. \forall n_k : \heartsuit$ ($\Pi_1 \ = \text{co-NP}$)
- $\phi = \exists f_1 .. \exists f_k : \heartsuit$ (Σ_1^1)
- $\phi = \forall f_1 .. \forall f_k : \heartsuit$ (Π_1^1)

Inhalt

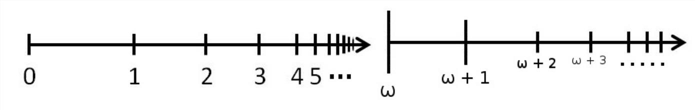
Problem des Ordinalen Zahlenstrahls

Normaler Zahlenstrahl:

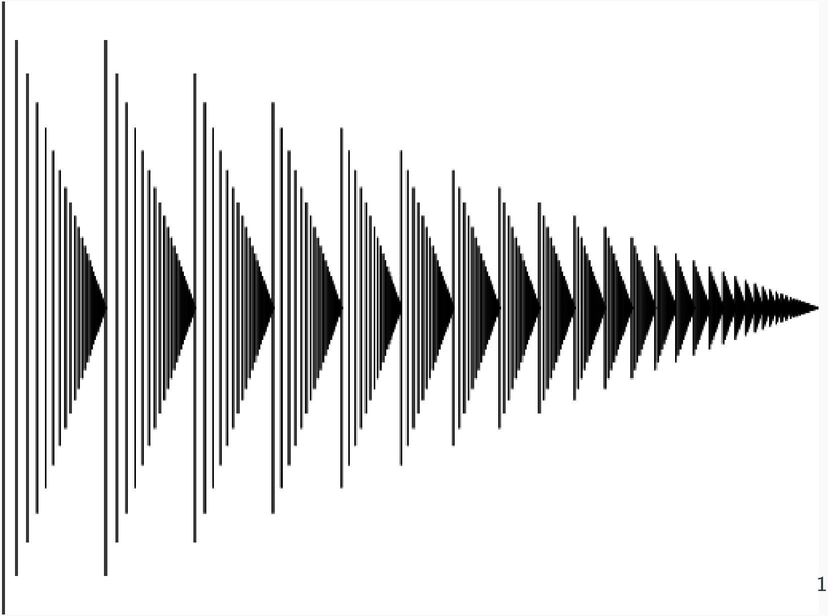


Problem des Ordinalen Zahlenstrahls

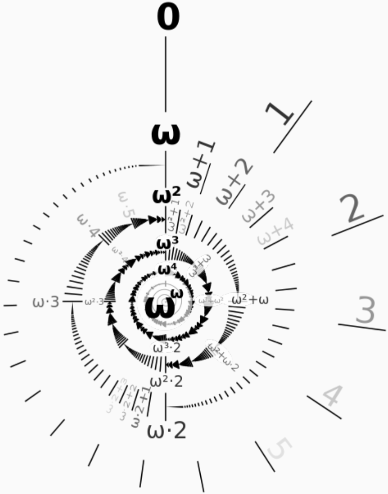
Normaler Zahlenstrahl mit ersten Ordinalen Zahlen:



Problem des Ordinalen Zahlenstrahls



Problem des Ordinalen Zahlenstrahls



Inhalt

Superturingmaschinen: Intro

Eigentlich eine Normale Turingmaschine.

Superturingmaschinen: Intro

Eigentlich eine Normale Turingmaschine.
Wir Rechnen nur auf einem Ordinalen Zahlenstrahl.

Inhalt

Grenzverhalten - Unklarheiten

Was nicht so ganz Klar ist:

Grenzverhalten - Unklarheiten

Was nicht so ganz Klar ist:

- In Welchem Zustand sind wir?

Grenzverhalten - Unklarheiten

Was nicht so ganz Klar ist:

- In Welchem Zustand sind wir?
- Wie sieht das Band aus?

Grenzverhalten - Unklarheiten

Was nicht so ganz Klar ist:

- In Welchem Zustand sind wir?
- Wie sieht das Band aus?
- Was bedeuted das?

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten.

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten. Das ist einfach :)

Grenzverhalten - Möglichkeiten

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten. Das ist einfach :)
- Wir halten nicht.

Grenzverhalten - Erklärung

Grenzverhalten - Erklärung

Es ist echt verdammt schwer GIFs in PDFs zu bekommen ...

Grenzverhalten - Erklärung

Es ist echt verdammt schwer GIFs in PDFs zu bekommen ...

Demotime.

Grenzverhalten - Erklärung

Es ist echt verdammt schwer GIFs in PDFs zu bekommen ...

Demotime.

(Hier werde ich anhand von externen Bildern erklären, wie das Grenzverhalten für Zellen zu verstehen ist)

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne Unterlass nach rechts.

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne Unterlass nach rechts.

Scheint sich zu wiederholen, hält aber nach Schritt ω^2.

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne Unterlass nach rechts.

Scheint sich zu wiederholen, hält aber nach Schritt ω^2.

Eine Superturingmaschine wiederholt sich genau

Inhalt

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden
- Funktionen mit gewissen Eigenschaften finden

Fähigkeiten

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheorethische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden
- Funktionen mit gewissen Eigenschaften finden
- Die Menge der Wohlordnungen entscheiden

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebig komplexe Aussagen entscheiden

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebig komplexe Aussagen entscheiden
- Kaffe kochen

Fähigkeiten II

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebig komplexe Aussagen entscheiden
- Kaffe kochen
- ...

Inhalt

Inhalt

Inhalt

Inhalt

Inhalt

Quellen I

Die Folien sind zu finden unter:

`https://github.com/blueburningcoder/things-to-talk-about/tree/master/proseminar`

Das Paper, aus dem ich den Vortrag gebastelt hab:

Infinite Time Turing Machines
Joel David Hamkins and Andy Lewis.
https://arxiv.org/pdf/math/9808093.pdf

Quellen II

Wikipedia
Arithmetical hierarchy
https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetical_hierarchy