

Superturingmaschinen

Felix Karg

26. August 2019

University of Freiburg



	Wohlordnungen
Turingmaschinen	
	Stempelbarkeit
Aussagentypen	
	Ausblick
Unendlichkeit	
	Quellen
Superturingmaschinen	

Disclaimer

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

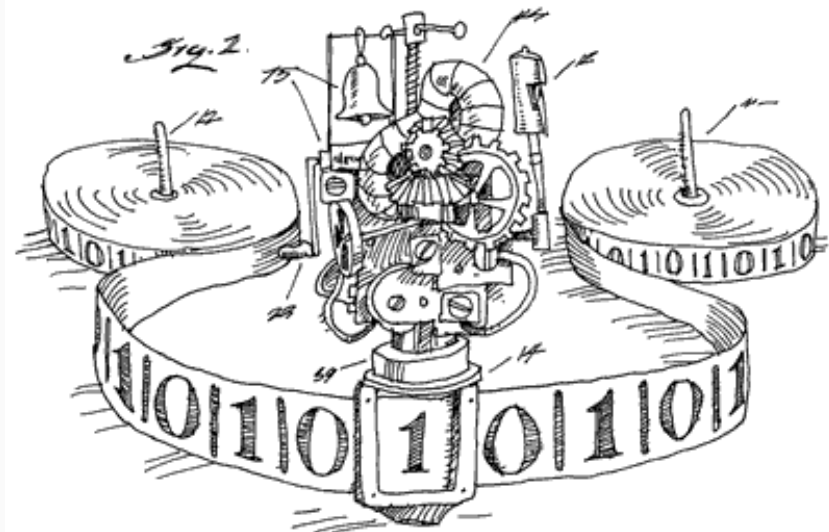
Einführung

Lücken-Theoreme

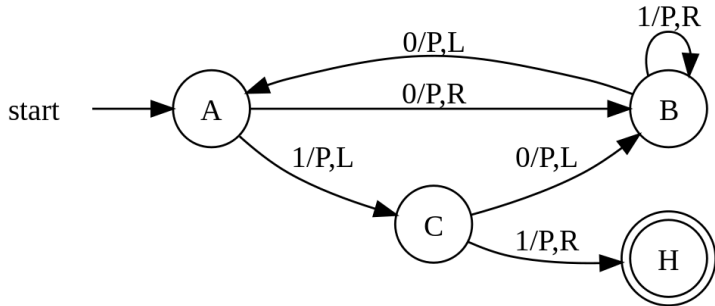
Ausblick

Quellen

Turingmaschine: Einführung



Turingmaschine: Beispiel



Schreibt 6 1er auf ein leeres Band.

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- Turingmaschine ist Codierbar

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- Turingmaschine ist Codierbar
- Kann andere Turingmaschinen Simulieren

Eigenschaften von Turingmaschinen

Relevant:

- Äquivalent zu TM mit mehreren Spuren
- Äquivalent zu TM mit mehreren Bändern
- Beliebiges Alphabet (häufig nur Binär)
- Andere Berechenbarkeitsmodelle gleichmächtig
- Turingmaschine ist Codierbar
- Kann andere Turingmaschinen Simulieren
- Gibt abzählbar unendlich viele

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Aussagentypen - Einführung

Eine Σ_1 -Aussage ist eine Aussage der Form:

„Es existieren $n \in \mathbb{N}$ mit \heartsuit .“,

Eine Σ_1 -Aussage ist eine Aussage der Form:

„Es existieren $n \in \mathbb{N}$ mit \heartsuit .“,

wobei in der Teilaussage \heartsuit nur noch *beschränkte Quantoren* vorkommen dürfen, also Formeln wie:

Aussagentypen - Einführung

Eine Σ_1 -Aussage ist eine Aussage der Form:

„Es existieren $n \in \mathbb{N}$ mit \heartsuit .“,

wobei in der Teilaussage \heartsuit nur noch *beschränkte Quantoren* vorkommen dürfen, also Formeln wie:

„Für alle Zahlen m kleiner .. gilt ...“

oder

„Es gibt eine Zahl m kleiner .. mit ...“

Aussagentypen - Beispiele

$$n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N};$$

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$$

Aussagen der Form:

Aussagentypen - Beispiele

$$n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N};$$

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \heartsuit (\Sigma_1)$

Aussagentypen - Beispiele

$$n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N};$$

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \heartsuit (\Sigma_1)$
- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \forall m_1 \dots \forall m_k : \heartsuit (\Sigma_2)$

Aussagentypen - Beispiele

$$n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N};$$

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \heartsuit (\Sigma_1)$
- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \forall m_1 \dots \forall m_k : \heartsuit (\Sigma_2)$
- $\phi = \forall n_1 \dots \forall n_k : \heartsuit (\Pi_1)$

Aussagentypen - Beispiele

$$n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}; f_1, \dots, f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \heartsuit (\Sigma_1)$
- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \forall m_1 \dots \forall m_k : \heartsuit (\Sigma_2)$
- $\phi = \forall n_1 \dots \forall n_k : \heartsuit (\Pi_1)$
- $\phi = \exists f_1 \dots \exists f_k : \heartsuit (\Sigma_1^1)$

Aussagentypen - Beispiele

$$n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}; f_1, \dots, f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \heartsuit (\Sigma_1)$
- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \forall m_1 \dots \forall m_k : \heartsuit (\Sigma_2)$
- $\phi = \forall n_1 \dots \forall n_k : \heartsuit (\Pi_1)$
- $\phi = \exists f_1 \dots \exists f_k : \heartsuit (\Sigma_1^1)$
- $\phi = \forall f_1 \dots \forall f_k : \heartsuit (\Pi_1^1)$

Aussagentypen - Beispiele

$n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}; f_1, \dots, f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n)\}$

Aussagen der Form:

- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \heartsuit (\Sigma_1 = \text{NP})$
- $\phi = \exists n_1 \dots \exists n_k : \forall m_1 \dots \forall m_k : \heartsuit (\Sigma_2)$
- $\phi = \forall n_1 \dots \forall n_k : \heartsuit (\Pi_1 = \text{co-NP})$
- $\phi = \exists f_1 \dots \exists f_k : \heartsuit (\Sigma_1^1)$
- $\phi = \forall f_1 \dots \forall f_k : \heartsuit (\Pi_1^1)$

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Unterschied:

Unterschied:

- Abzählbar Unendlich

Unterschied:

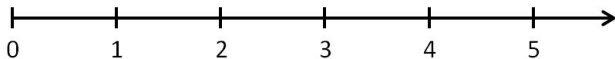
- Abzählbar Unendlich
- Überabzählbar Unendlich

Unterschied:

- Abzählbar Unendlich ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$)
- Überabzählbar Unendlich (\mathbb{R})

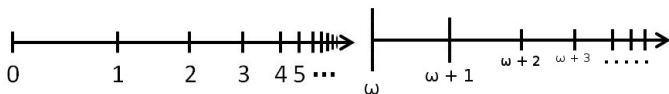
Problem des Ordinalen Zahlenstrahls

Normaler Zahlenstrahl:

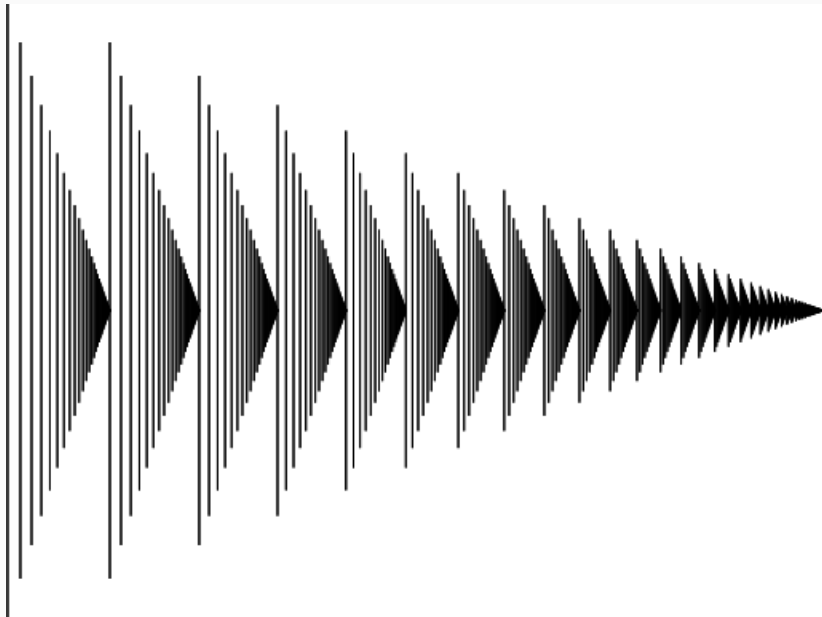


Problem des Ordinalen Zahlenstrahls

Normaler Zahlenstrahl mit ersten Ordinalen Zahlen:



Problem des Ordinalen Zahlenstrahls



Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Eigentlich eine Normale Turingmaschine.

Eigentlich eine Normale Turingmaschine.
Wir haben als Zeitschritte Ordinalzahlen.

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Offene Fragen sind:

Offene Fragen sind:

- In welchem Zustand sind wir?

Offene Fragen sind:

- In welchem Zustand sind wir?
- Wie sieht das Band aus?

Offene Fragen sind:

- In welchem Zustand sind wir?
- Wie sieht das Band aus?
- Was bedeutet das?

Zwei Möglichkeiten:

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten.

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten. Das ist einfach :)

Zwei Möglichkeiten:

- Wir halten. Das ist einfach :)
- Wir halten nicht.

Es ist echt verdammt schwer GIFs in PDFs zu bekommen ...

Es ist echt verdammt schwer GIFs in PDFs
zu bekommen ...
Demotime.

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne zu halten nach rechts.

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne zu halten nach rechts.

Scheint sich zu wiederholen, hält aber nach Schritt ω^2 .

Grenzverhalten - Beispiel

Prüfe im Start- und Limeszustand, ob die aktuelle Zelle eine Eins enthält.

- Wenn Ja, dann halte.
- Wenn nein, dann lass die Zelle aufleuchten und laufe ohne zu halten nach rechts.

Scheint sich zu wiederholen, hält aber nach Schritt ω^2 .

Eine Superturingmaschine wiederholt sich genau dann, wenn

- die Aufnahmen zu zwei Limesordinalzahlen gleich sind und
- zwischen diesen Zeiten keine Zellen, die Null waren zu eins werden.

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

- Alles was Normale Turingmaschinen können

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheoretische Aussagen entscheiden

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheoretische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheoretische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden
- Funktionen mit gewissen Eigenschaften finden

- Alles was Normale Turingmaschinen können
- Das Klassische Halteproblem lösen
- Gewisse Zahlentheoretische Aussagen entscheiden
- Turingmaschinen mit gewissen Fähigkeiten finden
- Funktionen mit gewissen Eigenschaften finden
- Die Klasse der Wohlordnungen entscheiden

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebige komplexe Aussagen entscheiden

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebig komplexe Aussagen entscheiden
- Kaffee kochen

Was Superturingmaschinen dennoch nicht können:

- Beliebige 0/1-Folgen auf das Band schreiben
- Ihr eigenes Halteproblem lösen
- Beliebige komplexe Aussagen entscheiden
- Kaffee kochen
- ...

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Eine Wohlordnung ist eine fundiert totale Ordnungsrelation.

Eine Wohlordnung ist eine fundiert totale Ordnungsrelation.

Was heißt das?

Wohlordnung: Beispiel

$$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & \dots \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & \dots \\ 9 & 13 & 18 & 24 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & \dots \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & \dots \\ 9 & 13 & 18 & 24 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & \dots \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & \dots \\ 9 & 13 & 18 & 24 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}$$

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$
(Order-Type: $2 * \omega$)

{	0	1	3	6	10	..	}
	2	4	7	11	16	..	
	5	8	12	17	23	..	
	9	13	18	24	
	

Wohlordnung: Beispiel

$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, \dots\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ (Order-Type: ω)

$\mathbb{Z} : \{0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots\}$

(Order-Type: $2 * \omega$)

$\left\{ \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\ 2 & 4 & 7 & 11 & 16 & \dots \\ 5 & 8 & 12 & 17 & 23 & \dots \\ 9 & 13 & 18 & 24 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\}$ (Order-Type: ω^2)

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

**Können wir zu jeder
Natürlichen Zahl halten?**

**Können wir zu jeder
Ordinalen Zahl halten?**

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Lese das Band.

- Bei einer 1, halte.
- Bei einer 0, schreibe eine 1 und gehe ohne anzuhalten nach rechts.

Lese das Band.

- Bei einer 1, halte.
- Bei einer 0, schreibe eine 1 und gehe ohne anzuhalten nach rechts.

→ Wir halten im Schritt ω .

Lese das Band.

- Bei einer 1, halte.
- Bei einer 0, schreibe eine 1 und gehe ohne anzuhalten nach rechts.

→ Wir halten im Schritt ω .

(wir haben bereits gesehen dass wir im Schritt ω^2 halten können.)

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.
- Sind α und β Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.
- Sind α und β Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$ und $\alpha * \beta$.

- Alle Ordinalzahlen bis ω^2 sind Stempelbar.
- Ist α Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$; $\beta \leq \omega^2$.
- Sind α und β Stempelbar, so auch $\alpha + \beta$ und $\alpha * \beta$.

Sind das nicht bereits alle?

Wenn $\alpha + n$ Stempelbar ist, so auch α .

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Es gibt nicht-Stempelbare Lücken in den Ordinalzahlen. Um genau zu sein ist die erste Lücke genau ω groß.

Es gibt nicht-Stempelbare Lücken in den Ordinalzahlen. Um genau zu sein ist die erste Lücke genau ω groß.

Beweis:

Es gibt nicht-Stempelbare Lücken in den Ordinalzahlen. Um genau zu sein ist die erste Lücke genau ω groß.

Beweis:

Alle Turingmaschinen Simulieren und halten, sobald kein anderes gehalten hat.

Alle Turingmaschinen Simulieren und halten,
sobald kein anderes gehalten hat.

Hat es Bedeutung, davon zu sprechen?

Alle Turingmaschinen Simulieren und halten,
sobald kein anderes gehalten hat.

Hat es Bedeutung, davon zu sprechen?

Alle Turingmaschinen Simulieren und halten,
sobald kein anderes gehalten hat.

Hat es Bedeutung, davon zu sprechen?

Die Lücken werden Groß. Für jede Stempelbare Ordinalzahl gibt es mindestens eine genausogroße Lücke.

Die Lücken werden Groß. Für jede Stempelbare Ordinalzahl gibt es mindestens eine genausogroße Lücke.

Beweis.

Es gibt für jede schreibbare Zahl α
mindestens α viele mindestens α große
Lücken in den stempelbaren Ordinalzahlen.

Um genau zu sein: ist α Stempelbar oder Schreibbar, ist die Anzahl der Lücken mit der Größe mindestens α weder Stempelbar noch Schreibbar.

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Weiterführend:

- Keine Lücken in den Schreibbaren Ordinalzahlen
- Große Blöcke an stempelbaren Ordinalzahlen

Weiterführend:

- Keine Lücken in den Schreibbaren Ordinalzahlen
- Große Blöcke an stempelbaren Ordinalzahlen
- Es gibt Bandinhalte die gelesen und akzeptiert aber nicht geschrieben werden können
- Viel Größere Zusammenhänge mit Wohlordnungen

Weiterführend:

- Aussagentypen
- Orakel

Weiterführend:

- Aussagentypen
- Orakel
- 'Infinite time halting problems'
- 'Infinite time degrees'
- 'Infinite time lambda calculus'

Turingmaschinen

Aussagentypen

Unendlichkeit

Superturingmaschinen

Grenzverhalten

Fähigkeiten

Wohlordnungen

Stempelbarkeit

Einführung

Lücken-Theoreme

Ausblick

Quellen

Die Folien sind zu finden unter:

[https://github.com/blueburningcoder/
things-to-talk-about/tree/master/
proseminar](https://github.com/blueburningcoder/things-to-talk-about/tree/master/proseminar)

Das Paper, aus dem ich den Vortrag gebastelt hab:



Joel David Hamkins and Andy Lewis

Infinite Time Turing Machines

<https://arxiv.org/pdf/math/9808093.pdf>



Bilder

Nach erscheinen:

1 <https://github.com/iblech/mathezirkel-kurs/tree/master/superturingmaschinen/images/turing-machine.png>

2 https://en.wikipedia.org/wiki/File:State_diagram_3_state_busy_beaver_2B.svg

3 https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_number#/media/File:Omega-exp-omega-labeled.svg



Wikipedia

Arithmetische hierarchie

`https:`

`//en.wikipedia.org/wiki/Arithmetical_hierarchy`



Wikipedia

Ordinalzahlen

`https://en.wikipedia.org/wiki/Ordinal_number`

`https://de.wikipedia.org/wiki/Ordinalzahl`



Wikipedia

Wohlordnung

<https://en.wikipedia.org/wiki/Well-order>

<https://de.wikipedia.org/wiki/Wohlordnung>

(Leere Folie um exakt 42 zu haben :))