Übungen zur Vorlesung "Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 1

Abgabetermin: Montag, 23.04.2018, bis 12.00 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 werden in zufälliger Reihenfolge aufgeschrieben. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils dafür, dass die so gebildete Zahl durch

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

teilbar ist? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es werden drei faire Würfel gleichzeitig geworfen.

(a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ für dieses Zufallsexperiment an.

Ein französischer Edelmann namens Chevalier de Méré wunderte sich einmal Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit drei Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet habe als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen $6-4-1$, $6-3-2$, $5-5-1$, $5-4-2$, $5-3-3$, $4-4-3$ und die Augensumme 12 durch ebensoviele Kombinationen erzeugt werde.

(b) Durch welche Kombinationen wird die 12 dargestellt und was ist der Fehler in de Mérés Argument?

(c) Geben Sie die Ereignisse *Augensumme* 11 und *Augensumme* 12 als Teilmengen des Grundraums an.

(d) Berechnen Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei eine Folge von Zahlen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Zeigen Sie, dass auf dem Grundraum $\Omega = \mathbb{N}$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ gibt, sodass $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie die *Siebformel* für zwei Mengen $A, B \subset \Omega$, welche gegeben ist durch

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

(b) Folgern Sie durch vollständige Induktion die Siebformel für Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)\right).$$