Übungen zur Vorlesung "Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 27.05.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Man spiele mit zwei Würfeln und betrachte das Resultat als ein Paar (X, Y) auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum Ω. Betrachten Sie nun die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{X \text{ ist gerade}\} \\ B &= \{X + Y \text{ ist gerade}\} \\ C &= \{Y \text{ ist Primzahl}\} \\ D &= \{10X + Y \text{ ist Primzahl}\}. \end{aligned}$$

Untersuchen Sie die Ereignisse auf paarweise Unabhängigkeit und Unabhängigkeit.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Laplace-Verteilung und

(a) $|\Omega| = 6$ (echter Würfel),

(b) $|\Omega| = 7$.

Wie viele Paare (A, B) unabhängiger Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) < 1$ gibt es jeweils?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für unabhängige, diskrete $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt:

a) Für beliebige Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n$, sind die Zufallsvariablen $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig.

b) Für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind die Zufallvariablen $g(X_1, X_2), X_3, \ldots, X_n$ unabhängig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie für $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m + n$ die Identität

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

(b) Es seien $X_1 \sim B(n_1, p)$ und $X_2 \sim B(n_2, p)$ unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen mit $p \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Summe $X_1 + X_2$ ebenfalls binomialverteilt ist mit den Parametern $n_1 + n_2$ und p.

Weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stoch-inf-ss-2019`