

Übungen zur Vorlesung “Stochastik für Studierende der Informatik“

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Reihen:

$$(a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \quad (c) \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - k)q^{k-2} \text{ für } |q| < 1.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$(a) \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$$
$$(b) \int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin(x) dx$$
$$(c) \int_e^{e^2} \frac{\log^2(x)}{x} dx$$
$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Aufgabe 3

Wir definieren die *Indikatorfunktion* $\mathbb{1}_A$ einer Menge A durch

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$ und $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x)$.

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{10} \mathbb{1}_{[2,7]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[4,8]}(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,3]}(x) x^2 dx, \quad \int_0^5 \int_0^7 \mathbb{1}_{[2,4]^2}(x, y) dx dy.$$

Aufgabe 4

Es sei A eine endliche Menge mit $|A| = n$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass in diesem Fall für die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5

Wir erinnern an die Definition der *Fakultät* einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$, die definiert ist durch $0! = 1$, und für $n \geq 1$ durch

$$n! := n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^n k.$$

Damit definieren wir den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$ durch $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$, und im Fall $n \geq k$ setzen wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(b) Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

$$\binom{120}{118}, \quad 3! \binom{10}{5}, \quad \frac{\binom{12}{10} \cdot \binom{11}{4}}{\binom{8}{7}}.$$

(c) Beweisen Sie folgende Summenformel für die alternierenden Binomialkoeffizienten:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$