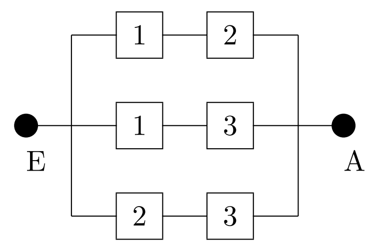
Übungen zur Vorlesung "Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 7

Abgabetermin: Montag, 24.06.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben ist das abgebildete Netzwerk mit jeweils zwei gekoppelten Elementen vom Typ 1, 2, 3. Das System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft. Alle Elemente unterschiedlichen Typs funktionieren unabhängig voneinander. Die Elemente gleichen Typs fallen immer gleichzeitig aus. Beide Elemente vom Typ i, $i \in \{1, 2, 3\}$, sind mit Wahrscheinlichkeit p_i intakt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ defekt, wobei $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.4$ und $p_3 = 0.3$ ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System?



Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es seien zwei Zufallsvariablen X und Y gegeben. Es sei X eine Exponential-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Die Zufallsvariable Y sei Poisson-verteilt mit Parameter $\mu > 0$.

a) Zeigen Sie $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 0.2)$ und $\mathbb{P}(Y = 2)$.

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \geq Y)$ unter den Annahmen, dass X und Y unabhängig sind und $\lambda = \mu$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Studenten Hans und Franz verabreden sich zwischen 12 und 13 Uhr in der Mensa. Sie erscheinen unabhängig voneinander, wobei sich die Zeitpunkte ihres Eintreffens im verabredeten Zeitraum durch unabhängige, uniformverteilte stetige Zufallsvariablen beschreiben lassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(a) beide vor 12 Uhr 30 eintreffen?

(b) Hans vor Franz eintrifft?

(c) Hans und Franz sich treffen, wenn Hans maximal 20 und Franz maximal 10 Minuten zu warten bereit ist?

Hinweis: Auch eine begründete graphische Lösung wird akzeptiert.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ihr Computerprogramm kann eine uniform auf $[0,1]$-verteilte Zufallsvariable U simulieren.

(a) Zeigen Sie: Für $\lambda > 0$ ist $-\frac{\log(U)}{\lambda}$ eine Exponential-verteilte Zufallsgröße mit Parameter λ.

(b) Geben Sie eine Vorschrift an, sodass Sie aus U eine Poisson-verteilte Zufallszahl mit Parameter $\lambda > 0$ erhalten. Diese soll sich implementieren lassen, ohne eine vorgefertige Quantilsfunktion der Poissonverteilung zu nutzen.

(c) Seien X, Y unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{X}{X+Y}$$

auf $[0,1]$ uniform verteilt ist.

(d) Seien U, V unabhängig und uniform auf $[0,1]$ verteilt. Berechnen Sie die Verteilung von

$$\frac{\log(U)}{\log(U \cdot V)}.$$