Übungen zur Vorlesung
"Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 03.06.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Lebensmittelhersteller fügt zu Werbezwecken seinen Müslipackungen jeweils eine von zehn Figuren aus den Asterix-Comics hinzu. Wieviele Packungen müssen Sie im Schnitt kaufen, bis Sie einen kompletten Satz mit zehn verschiedenen gallischen Dorfbewohnern zusammengesammelt haben?

HINWEIS: Betrachten Sie $Y_i := X_i - X_{i-1}$, wobei X_i die Anzahl der gekauften Packungen sei, bis Sie i verschiedene Figuren beisammen haben, und begründen Sie, dass Y_i geometrisch verteilt sein muss.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die Anzahl X der Tanker, die täglich eine Raffinerie anlaufen, sei Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda = 3$. Die Raffinerie kann täglich bis zu 4 Tanker abfertigen. Weitere Tanker müssen abgewiesen werden und andere Raffinerien anlaufen.

(a) Welche Anzahlen von Tankern, die innerhalb eines Tages versuchen, die Raffinerie anzulaufen, sind am wahrscheinlichsten – d.h. für welche $i \in \mathbb{N}$ wird $\mathrm{P}(X = i)$ maximal?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss an einem beliebigen Tag mindestens ein Tanker abgewiesen werden?

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Tanker, die täglich abgefertigt werden.

(d) Wie groß sollte die Kapazität der Raffinerie mindestens sein, damit an einem Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 kein Tanker abgewiesen werden muss?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Hypergeometrischen Verteilung.

HINWEIS: Zeigen und verwenden Sie die Gleichung

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Berechnen Sie zunächst $\mathbb{E}[X^2 - X]$ um die Varianz zu bestimmen.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Unter jouer à la martingale versteht man beim Roulette folgende Spielstrategie: Sie spielen über mehrere Runden und setzen jedes Mal auf „Rot“, bis zum ersten Mal tatsächlich „Rot“ kommt. (Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{18}{37}$). Dann beenden Sie das Spiel. Die Höhe Ihres Einsatzes beträgt in der ersten Runde 1 Euro, in der zweiten (ggf.) 2 Euro, allgemein in der n-ten Runde (falls Sie so lange spielen müssen) 2^{n-1} Euro. Beim Roulette-Spiel bekommt man beim Setzen auf „Rot“ den doppelten Einsatz zurück, falls „Rot“ auch kommt, andernfalls verfällt der Einsatz.

(a) Was sind die Verteilung und der Erwartungswert Ihres Gesamtgewinnes X, wenn Sie die Strategie bis zum Ende durchhalten? Wie lange müssen Sie im Mittel spielen? Welchen Betrag haben Sie im Mittel in der letzten Runde gesetzt?

(b) Wenn Sie über 1,1 Milliarden Euro verfügen, können Sie die Verdoppelungsstrategie höchstens bis zur 30. Runde durchhalten. Wie sieht die Verteilung und der Erwartungswert Ihres Gesamtgewinnes $\tilde{X}$ aus, wenn das Spiel nach der 30. Runde abgebrochen wird?