Übungen zur Vorlesung
“Stochastik für Studierende der Informatik“

Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 01.07.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Eine reellwertige Zufallsvariable X heißt *gammaverteilt* zu den Parametern $a > 0$ und $b > 0$ (kurz: $X \sim \Gamma(a, b)$), falls sie die Dichte

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$

besitzt. Dabei ist die Gammafunktion Γ für $x > 0$ definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der obigen Funktion tatsächlich um eine Dichte handelt.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$ für $X \sim \Gamma(a, b)$.

(c) Bestimmten Sie $\mathrm{Var}[X]$ für $X \sim \Gamma(a, b)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Eine Zufallsvariable X heißt *symmetrisch um a verteilt*, wenn $X - a$ und $a - X$ die gleiche Verteilung besitzen. Es sei X symmetrisch um a verteilt. Zeigen Sie:

(a) Existiert der Erwartungswert von X, so gilt $\mathbb{E}[X] = a$.

(b) Ist X stetig mit Verteilungsfunktion F, so gilt $F(a) = \frac{1}{2}$.

(c) Die $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung ist symmetrisch um μ verteilt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit

$$\mathbf{E}[X_i] = \mu_i \qquad \text{und} \qquad \mathbf{Var}[X_i] = \sigma_i^2.$$

Weiter sei $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ das arithmetische Mittel dieser Zufallsvariablen.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\bar{X}$.

(b) Es sei nun $\mu_i = \mu$ und $\sigma_i^2 = \sigma^2$ für alle $1 \leq i \leq n$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_i - \bar{X}$ für ein beliebiges $i \in \{1, ..., n\}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda).$$

Dabei bezeichnet $\Gamma(n, \lambda)$ die Gammaverteilung von Aufgabe 1.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für $x, y > 0$ die folgende Identität gilt:

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Überlegen Sie sich außerdem, was für ein Zusammenhang zwischen der Exponentialverteilung und der Gammaverteilung besteht.