Stochastik für Studierende der Informatik

Dr. Ernst August v. Hammerstein

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Mathematische Stochastik

Sommersemester 2018

Organisatorisches

Übungsgruppen

Gruppe 1: Do 16–18 Uhr, SR 00-034 (Geb. 51),	(Ulysses Hucke)
Gruppe 2: Do 16–18 Uhr, SR 01-018 (Geb. 101),	(Rabea Turon)
Gruppe 3: Fr 08–10 Uhr, SR 00-006 (Geb. 51),	(Ulysses Hucke)
Gruppe 4: Fr 08–10 Uhr, SR 00-031 (Geb. 51),	(Lorenz Denk)
Gruppe 5: Fr 14–16 Uhr, SR 01 009/013 (Geb. 101),	(Michaela Freitag)

Anmeldung: über **HISinOne**, möglichst bis Ende der ersten Semesterwoche

In der ersten Semesterwoche finden bereits Übungen statt, in denen Anwesenheitsaufgaben bearbeitet und besprochen werden.

Für die an Christi Himmelfahrt und Fronleichnam ausfallenden Übungen wird es Ersatztermine an den jeweils folgenden Freitagen geben.

Übungsaufgaben, Klausur und Klausurzulassung

Übungsaufgaben und ggf. weitere Vorlesungsmaterialien werden über ILIAS zur Verfügung gestellt.
Zugangspasswort für ILIAS: SfIvHBs18s#

Neue Übungsblätter werden montags auf ILIAS hochgeladen,
Lösungen sind jeweils bis spätestens am Montag der Folgewoche **vor der Vorlesung** in die Briefkästen im EG Geb. 51 einzuwerfen.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben, dabei sollten die Abgabepartner sich in derselben Übungsgruppe befinden.

Zulassungsvoraussetzungen für die Abschlussklausur:

- regelmäßige Teilnahme an den Übungsgruppen
- Vorrechnen mindestens einer Übungsaufgabe an der Tafel
- Mindestens **50%** der erreichbaren Punkte der Übungsaufgaben

Voraussichtlicher Klausurtermin: Freitag, 21.09.2018,
HS 00 026 und 00 036, Geb. 101

Literatur (Auswahl)

- **Dümbgen, L.** (2003), *Stochastik für Informatiker*, Springer
- **Henze, N.** (2017), *Stochastik für Einsteiger*, 11. Aufl., Springer
- **Kersting, G., Wakolbinger, A.** (2010), *Elementare Stochastik*, 2. Aufl., Birkhäuser

Kontakt

Fragen, Anregungen, Kritik (positive oder negative) können Sie neben den Übungsgruppen auch richten an

ernst.august.hammerstein@stochastik.uni-freiburg.de
johannes.brutsche@stochastik.uni-freiburg.de

oder persönlich in den Sprechstunden:

E.A. v. Hammerstein: Mi, 10–11 Uhr, Raum 248, Eckerstraße 1
J. Brutsche: Mi, 14–15 Uhr, Raum 228, Eckerstraße 1

Zur Einführung

Was ist Stochastik?

Stochastik ist der Oberbegriff für Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. -Theorie und mathematische Statistik.

In der Stochastik werden mathematische Modelle von Zufallserscheinungen konstruiert, deren Gesetzmäßigkeiten studiert und ihre Anwendbarkeit auf reale Daten untersucht. Die Modelle basieren auf Zufallsbegriffen, wie z.B. dem der „Wahrscheinlichkeit“.

Diese werden durch mathematische Axiome beschrieben (Kolmogorov 1933). Die Axiome erklären jedoch nicht das Wesen des Zufalls.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \boxed{\text{Modell}} \arrow[r, shift left, "\text{Wahrscheinlichkeitstheorie}"] & \boxed{\text{Daten}} \arrow[l, shift left, "\text{mathematische Statistik}"] \end{tikzcd}$$

Stochastik im Alltag

Entscheiden	Auswahl von Kapitalanlagemöglichkeiten Spiele, z.B. Schere-Stein-Papier ($\rightarrow$ Spieltheorie in den Wirtschaftswissenschaften)
Schätzen	jährliches Steueraufkommen, Inflationsraten Krankheitsaufkommen in der Bevölkerung (Inzidenzrate)
Vergleichen/Testen	Ist eine Münze oder ein Würfel fair? Ist ein Medikament besser/wirksamer als ein anderes? Sind zwei Merkmale unabhängig oder korreliert?
Vorhersagen	Wetter Tippen: Toto, Lotto,. . . Zukünftiger Kurs eines Wertpapiers
Messen	physikalischer Größen (Messfehler $\rightarrow$ Fehlerausgleichs-rechnung, Fehlergrenzen) Quantenmechanik, Heisenbergsche Unschärferelation

Stochastik im Alltag (Forts.)

Mustererkennung, Fehlerkorrektur Stochastische Algorithmen zur Signalentstörung (Funk, Radar, DVD-Player)
Bildverschärfung
Gesichtserkennung in Fotoprogrammen

Verschlüsselungsverfahren stochastische Primzahltests

Analyse von Netzwerken und Algorithmen Graphentheorie, Netzwerkmodelle, Suchbäume, Quicksort

Versicherungsmathematik Prämienkalkulation in z.B. Haftpflicht-, Kranken- und Lebensversicherung (Aktuare)

Finanzmathematik Berechnung von Derivatpreisen (Optionen, Zertifikate, Swaps,. . .)
Optimale Handelsstrategien und Portfolios
Quantifizierung von Risiken (Markt-, Kredit-, Liquiditätsrisiken sowie operational risk)
Risikokapitalberechnung (Basel II, Basel III)

Genereller Ansatz und Verfahren

- Präzisiere, welche Ereignisse man betrachten will $\longrightarrow$ Modellbildung
- Ordne jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ zu.
  Mögliche Prinzipien zur Festsetzung von $\mathbb{P}(A)$:
  1. **subjektiv:** Maß des persönlichen Glaubens, dass A eintritt
  2. **frequentistisch:** Relative Häufigkeit bzw. deren Grenzwert bei beliebig vielen unabhängigen Wiederholungen
  3. **Gleichverteilung:** Quotient aus Anzahl der günstigen durch Anzahl der möglichen Fälle

Problem: Alle o.g. Festsetzungsmöglichkeiten für $\mathbb{P}(A)$ führen zu Schwierigkeiten

Ausweg: Axiomatischer Ansatz (Kolmogorov 1933)

Keine Hinterfragung der genauen Bedeutung von $\mathbb{P}(A)$ bzw. dessen Erhalt durch ein konkretes Zufallsexperiment.
Fordere lediglich gewisse (konsistente) Regeln, die für Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A)$ gelten sollen.
Leite daraus Wahrscheinlichkeiten komplexerer Ereignisse ab.

3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Definition 3.1 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** *ist ein Tripel* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *bestehend aus einer nicht-leeren, höchstens abzählbaren Menge* Ω *(Grundraum), der Potenzmenge* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ *und einer Abbildung* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ *(Wahrscheinlichkeitsmaß oder -Verteilung), die die folgenden Eigenschaften erfüllen muss:*

a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \quad$ (Normierung),

b) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für jede Folge $(A_i)_{i \geq 1}$ paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ (d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) $\quad$ (σ-Additivität).

Sprechweisen:

- Teilmengen $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ von Ω heißen *Ereignisse*,
- $A = \Omega$ heißt *sicheres Ereignis*,
- $A = \emptyset$ heißt *unmögliches Ereignis*,
- $A = \{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ heißt *Elementarereignis*,

- $A \cup B$ bedeutet, dass A oder B (oder beide) eintreten,
- $A \cap B$ bedeutet, dass sowohl A als auch B eintreten.

Einfache Folgerungen:

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ($\mathbb{P}$ ist nulltreu)

b) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ (endliche Additivität)
$\implies \mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$ und $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$,

c) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Monotonie),

d) Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, so gilt die sog. *Sieb- oder Einschluss-Ausschluss-Formel*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots \pm \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Speziell: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$,

e) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ (Sub-σ-Additivität).

Satz 3.2 (Eindeutige Festlegung von $\mathbb{P}$)

Sei Ω eine nicht-leere, höchstens abzählbare Menge und $(p_n)_{n\geq 1}$ eine Folge nicht-negativer Zahlen (d.h. $p_n \geq 0$ für alle n), für die gilt $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.
Dann gibt es auf dem Grundraum Ω genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$, d.h. das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ist durch Angabe der **Elementarwahrscheinlichkeiten** *$\mathbb{P}(\{\omega_n\})$, $n \geq 1$, bereits eindeutig festgelegt.*

Beweis: Übungsaufgabe

Einfache Beispiele: Würfel und Münzwurf

Einmaliger Würfelwurf: Grundraum der möglichen Ergebnisse $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Bei einem fairen Würfel sollten alle möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sein

Laplace-Ansatz: *Bei endlichem Grundraum Ω sollen alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.*

Im Fall des Würfels bedeutet das

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{6}\{i\}\right) = \sum_{i=1}^{6}\mathbb{P}(\{i\}) \overset{\text{Laplace}}{=} \sum_{i=1}^{6} p = 6p, \text{ d.h. } p = \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}.$$

Sei A_g das Ereignis, eine gerade Zahl zu würfeln, dann ist $A_g = \{2,4,6\}$ und

$$\mathbb{P}(A_g) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Allgemein gilt unter dem Laplace Ansatz: Ist $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ und somit $|\Omega| = \#\Omega = n$, dann ist $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}$ für $1 \leq k \leq n$, und für $A \subseteq \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A}\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega_k \in A}\frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}.$$

Anderes Modell: Manipulierter Würfel

Bei diesem fällt die 6 mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{6\}) = p$ für ein $0 < p < 1$ und die anderen Zahlen mit $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1-p}{5}$, $1 \leq i \leq 5$.

Zweimaliger Würfelwurf:
$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\} = \{(\omega_1,\omega_2) \mid \omega_1,\omega_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$
Hier ist offensichtlich $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$. Damit ergibt sich mit dem Laplace-Ansatz z.B. für die Wahrscheinlichkeit eines Paschs

$$\mathbb{P}(\{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{(i,i)\}) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

n-maliger Münzwurf:
Mögliche Ergebnisse bei einmaligem Wurf: Kopf $= 1$, Zahl $= 0$
Grundraum: $\Omega = \{(\omega_1,\ldots,\omega_n) \mid \omega_i \in \{0,1\},\ 1 \le i \le n\} \implies |\Omega| = 2^n$
Laplace: $\mathbb{P}(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\}) = \frac{1}{2^n}$

Allgemeiner: p-Münze, d.h. $\mathbb{P}(\{1\}) = p$, $0 < p < 1$, $\mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$.

Für das n-malige Würfeln mit einem manipulierten Würfel bzw. das n-malige Werfen einer p-Münze sind die Grundräume Ω dieselben wie zuvor, jedoch ist hier die Laplace-Annahme zur Festsetzung der Wahrscheinlichkeiten offensichtlich nicht gerechtfertigt. Hierzu benötigt man andere Annahmen (z.B. Unabhängigkeit).

Ziehen aus einer Urne

Eine Urne enthalte m weiße und n schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

Grundraum: $\Omega = \{1, \dots, n+m\}$, wobei $W = \{1, \dots, m\}$ die weißen und $S = \{m+1, \dots, n+m\}$ die schwarzen Kugeln seien.
Mit Laplace-Annahme gilt $\mathbb{P}(W) = \frac{|W|}{|\Omega|} = \frac{m}{m+n}$ und analog $\mathbb{P}(S) = \frac{n}{n+m}$.

Geburtstagsproblem

In einem Raum befinden sich N Personen. Mit wecher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei der Anwesenden am gleichen Tag Geburtstag?

Grundraum: $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_N) \mid \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\} \implies |\Omega| = 365^N$

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Mind. 2 Personen haben am gleichen Tag Geburstag}\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \exists\, i \neq j : \omega_i = \omega_j\} \end{aligned}$$

Unter der Laplace-Annahme gilt $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
Problem: Bestimmung von $|A|$ kompliziert!

Ausweg: Nutze $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{|A^C|}{|\Omega|}$.

$$\text{Es ist } \ |A^C| = \begin{cases} \prod_{i=1}^{N}(366 - i), & N \leq 365, \\ 0, & N > 365. \end{cases}$$

Damit erhält man

N	10	20	23	30	40	50	60	100
$\mathbb{P}(A)$	0.1169	0.4114	0.5073	0.7063	0.8912	0.9704	0.9941	0.9999997

(Un)Faire Wetten

Man wettet mit einem Einsatz von 1€ auf ein Ereignis E, das mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ eintritt.
Prinzip des fairen Wettens: Der (Netto-)Gewinn G muss gerade so groß sein, dass man im Mittel nichts gewinnt, d.h. der mittlere Gewinn MG is gleich Null:

$$MG = G \cdot \mathbb{P}(E) - 1 \cdot \mathbb{P}(E^C) = G \cdot p - 1 \cdot (1 - p) \stackrel{!}{=} 0 \implies G = \frac{1}{p} - 1$$

Auflösen nach p ergibt $p = \frac{1}{G+1}$, d.h. bei einer fairen Wette ist die Erfolgswahrscheinlichkeit der Kehrwert der Wettquote $(G+1):1$.

Solche Wettquoten werden u.a. bei Sportwetten (z.B. b-win, tipico) angegeben, z.B. für das Spiel FSV Mainz 05 gegen den SC Freiburg

	Heimsieg	Unentschieden	Auswärtssieg
Mainz vs Freiburg	2.2	3.3	3.4

Aus den obigen Quoten erhält man

$$\mathbb{P}(\text{Sieg Mainz}) = \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11} \approx 0.4545,\ \mathbb{P}(\text{Sieg Freiburg}) = \frac{1}{3.4} = \frac{5}{17} \approx 0.2941,$$

$$\mathbb{P}(\text{Unentsch.}) = \frac{1}{3.3} = \frac{10}{33} \approx 0.303,$$

$$\text{Wegen } \mathbb{P}(\text{Sieg M}) + \mathbb{P}(\text{U}) + \mathbb{P}(\text{Sieg F}) = \frac{5}{11} + \frac{5}{17} + \frac{10}{33} \approx 1.051693 > 1$$

ist das Spiel nicht ganz fair (da der Wettanbieter Gewinn machen will). Die tatsächlichen (vermuteten) Wahrscheinlichkeiten erhält man hier durch Renormierung, z.B. $\mathbb{P}(\text{Sieg Freiburg}) = \frac{0.2941}{1.051693} \approx 0.2796$.