Übungen zur Vorlesung “Stochastik für Studierende der Informatik“

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Reihen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (k^2-k)q^{k-2}$ für $|q|<1$.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)\sin(x) dx$

(c) $\int_e^{e^2} \frac{\log^2(x)}{x} dx$

Aufgabe 3

Wir definieren die *Indikatorfunktion* $\mathbb{1}_A$ einer Menge A durch

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$ und $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\cdot \mathbb{1}_B(x)$.

(b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int_0^{10} \mathbb{1}_{[2,7]}(x)\cdot \mathbb{1}_{[4,8]}(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,3]}(x)x^2\,dx, \qquad \int_0^5\int_0^7 \mathbb{1}_{[2,4]^2}(x,y)\,dxdy.$$

Aufgabe 4

Es sei A eine endliche Menge mit $|A|=n$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass in diesem Fall für die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5

Wir erinnern an die Definition der *Fakultät* einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$, die definiert ist durch $0! = 1$, und für $n \geq 1$ durch

$$n! := n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Damit definieren wir den *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$ durch $\binom{n}{k} = 0$, falls $k > n$, und im Fall $n \geq k$ setzen wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(b) Berechnen Sie den folgenden Ausdruck:

$$3!\binom{10}{5}.$$

(c) Beweisen Sie folgende Summenformel für die alternierenden Binomialkoeffizienten:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Aufgabe 6

Es sei eine Folge von nicht-negativen Zahlen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$. Zeigen Sie, dass auf dem Grundraum $\Omega = \mathbb{N}$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ gibt, sodass $\mathbb{P}(\{n\}) = p_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.