# Übungen zur Vorlesung
# "Stochastik für Studierende der Informatik"

## Blatt 6

**Abgabetermin:** Montag, 17.06.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable auf $\Omega$. Ferner sei $X = 1_{\{0,2,4,6,\dots\}} \circ N$. Man zeige, dass $X$ eine Bermoulli-verteilte Zufallsvariable auf $\Omega$ ist mit

$$\mathbb{P}(X = 1) = p = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}) = 1 - \mathbb{P}(X = 0).$$

b) Die Zufallsvariablen $X_1$ und $X_2$ seien unabhängig und Poisson-verteilt mit positiven Parametern $\lambda_1$ und $\lambda_2$. Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(X_1 = k | X_1 + X_2 = n)$ für $k, n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $X_1 + X_2 \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir werfen $n$ Mal unabhängig voneinander eine $p$-Münze, das heißt eine Münze, bei der mit Wahrscheinlichkeit $p$ eine 1 und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = q$ eine 0 fällt. Dies liefert uns ein Ergebnis $X = (X_1, \dots, X_n)$. Für einen solchen Vektor definieren wir die Anzahl der Runs $r(X)$ durch

$$r(X) := 1 + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \neq X_{i-1}\}},$$

das heißt es gilt zum Beispiel $r((0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1)) = 6$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $R = r(X)$.

(bitte wenden)

**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Gegeben sei folgender Algorithmus:

**Algorithm 1** FindMax

**INPUT:** Unsortierter Vektor von $n$ Zahlen $x_1, ..., x_n$
**OUTPUT:** $\max(x_1, ..., x_n)$

```
1: max ← x_1
2: for i ← 2, ..., n do
3:     if x_i > max then max ← x_i
4:     end if
5: end for
```

Berechnen Sie die erwartete Anzahl an Überschreibungen $\max \leftarrow x_i$ in Zeile 3 bei zufälligem Input $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ für $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Hierbei bezeichne $\mathcal{S}_n$ die Menge der Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Indikator-Zufallsvariable, sodass die Anzahl an Überschreibungen als Summe dieser Zufallsvariablen darstellbar ist.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Es seien $X$ und $Y$ zwei Zufallsvariablen mit identischer Verteilung.

(a) Zeigen Sie, dass $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert sind.

(b) Gibt es ein Beispiel für unabhängige Zufallsvariablen $X$ und $Y$, in dem $X + Y$ und $X - Y$ nicht unabhängig sind?

**Aufgabe 5** (4 Bonuspunkte)

Vor Ihnen steht ein Teller mit $n \geq 1$ gekochten Spaghetti. Sie verknoten nun immer zwei zufällig ausgewählte Spaghetti-Enden miteinander, bis alle Enden verknotet sind. Wie viele abgeschlossene Spaghetti-Ringe erhalten Sie im Mittel, d.h. was ist der Erwartungswert der Anzahl der Ringe aus einem oder mehreren zusammengeknoteten Spaghetti?

**Aufgabe 6** (4 Bonuspunkte)

Zehn Räuber haben gemeinsam einen Safe geknackt und verstauen das gestohlene Geld in einem Versteck in einer großen Truhe.
Die Räuber misstrauen einander. Daher beschließen sie, die Truhe so zu verschließen, dass nur vier beliebige Räuber gemeinsam die Truhe öffnen können. Sind weniger als vier Räuber anwesend, darf sich die Truhe nicht aufschließen lassen.
Wie viele verschiedene Vorhängeschlösser müssen an der Truhe angebracht werden, damit das gelingt? Und wie viele Schlüssel werden benötigt?

Hinweis: Zwei Schlösser sind offenbar zu wenig, weil dann ja nicht ausgeschlossen werden kann, dass zwei zufällig ausgewählte Räuber gemeinsam die beiden erforderlichen Schlüssel besitzen und zu zweit an das Geld kommen. Man beachte auch, dass jeder Räuber mehr als einen Schlüssel erhalten kann.

Weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stoch-inf-ss-2019`