Übungen zur Vorlesung
"Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 15.07.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Zahl der Jungengeburten verhalte sich zur Zahl der Mädchengeburten wie 18 : 17.

(a) Berechnen Sie für den Fall von 14000 Geburten mit Hilfe des Satzes von de Moivre-Laplace näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens 7037 und höchstens 7363 Jungen sind.

(b) Wie groß muss die Zahl der Geburten mindestens sein, damit der Anteil der Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 15/35 und höchstens 19/35 ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Seien $X \sim B(m,p)$ und $Y \sim B(n,p)$ zwei unabhängige, binomialverteilte Zufallsvariablen zu den Parametern m bzw. n und p. Bestimmen Sie eine Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = k \mid X + Y = k + l)$.

Hinweis: Die Verteilung von $X + Y$ kennen Sie aus Aufgabe 4(b) von Blatt 4.

(b) Diskrete Zufallsvariablen X, Y heißen *unabhängig gegeben* Z, falls für alle möglichen Werte k, l gilt, dass

$$\mathbb{P}(X = k, Y = l \mid Z) = \mathbb{P}(X = k \mid Z) \cdot \mathbb{P}(Y = l \mid Z).$$

Seien X_1, X_2, X_3 unabhängige p-Münzwürfe (d.h. $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$ für $i = 1,2,3$). Sind X_1, X_2 auch unabhängig gegeben $X_1 + X_2$? Ist X_1 unabhängig von $X_1 + X_2 + X_3$ gegeben $X_1 + X_2$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird wiederholt geworfen. Welche der folgenden Fälle sind Markovketten:

(a) Die größte Augenzahl X_n, $n \geq 0$, bis zum n-ten Wurf mit $X_0 := 0$.

(b) Die Anzahl N_n, $n \geq 0$, der Sechsen in n Würfen mit $N_0 := 0$.

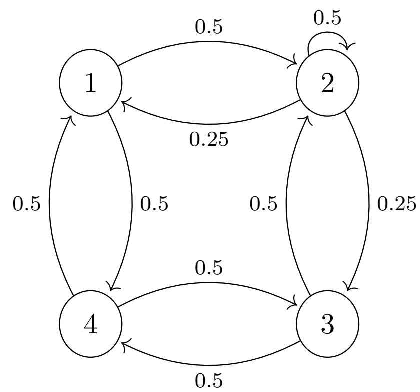
(c) Die Zeit B_n, $n \geq 0$, die zum Zeitpunkt n seit dem letzten Wurf einer Sechs vergangen ist mit $B_0 := 0$.

In den Fällen, in denen eine Markovkette vorliegt, geben Sie die Übergangsmatrix an.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei eine homogene Markovkette X mit dem dargestellten Übergangsgraphen.



Übergangsgraph von X

(a) Geben Sie die Übergangsmatrix an.

(b) Welche Periode besitzen die Zustände dieser Markovkette?

(c) Ist $\pi = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ eine stationäre Verteilung von X?

(d) Ist die Verteilung aus (b) reversibel?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 5 (5 Bonuspunkte)

Auf dem Jahrmarkt können Sie an folgendem Spiel teilnehmen: Es wird so lange eine faire Münze geworfen (Zahl=1, Kopf=0), bis entweder die Folge 1111 oder 0011 aufgetreten ist. Sie verdoppeln Ihren Einsatz, wenn zuerst 1111 auftritt, tritt jedoch zuerst 0011 auf, ist Ihr Einsatz verloren. Der Stand wirbt mit der Parole: *Jeder zweite Spieler gewinnt, denn beide Kombinationen haben die gleiche Wahrscheinlichkeit von* $\frac{1}{16}$. Stellen Sie zunächst den Spielverlauf (als Markovkette betrachtet) graphisch dar. Erläutern Sie, was an der Argumentation des Jahrmarktstandes falsch ist, und bestimmen Sie die tatsächliche Gewinnwahrscheinlichkeit.

Hinweis: Die ersten beiden Zustände (Resultate nach dem ersten Wurf) der Markov-Kette sind 0 und 1 (Kopf oder Zahl). Aufgrund der Formen der Gewinnfolge 1111 und der Verlustfolge 0011 kann die Markov-Kette nur acht verschiedene Zustände haben (warum?). Erreicht man einen der Zustände 1111 oder 0011, so verbleibt man jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1 auch im nächsten Schritt in diesen (absorbierende Zustände, Spielende).