

# Stochastik für Studierende der Informatik

Dr. Ernst August v. Hammerstein

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg  
Abteilung für Mathematische Stochastik

Sommersemester 2018

# Organisatorisches

## Übungsgruppen

<b>Gruppe 1: Do 16–18 Uhr, SR 00-034 (Geb. 51),</b>	(Ulysses Hucke)
<b>Gruppe 2: Do 16–18 Uhr, SR 01-018 (Geb. 101),</b>	(Rabea Turon)
<b>Gruppe 3: Fr 08–10 Uhr, SR 00-006 (Geb. 51),</b>	(Ulysses Hucke)
<b>Gruppe 4: Fr 08–10 Uhr, SR 00-031 (Geb. 51),</b>	(Lorenz Denk)
<b>Gruppe 5: Fr 14–16 Uhr, SR 01 009/013 (Geb. 101),</b>	(Michaela Freitag)

**Anmeldung:** über **HISinOne**, möglichst bis Ende der ersten Semesterwoche

In der ersten Semesterwoche finden bereits Übungen statt, in denen Anwesenheitsaufgaben bearbeitet und besprochen werden.

Für die an Christi Himmelfahrt und Fronleichnam ausfallenden Übungen wird es Ersatztermine an den jeweils folgenden Freitagen geben.

# Übungsaufgaben, Klausur und Klausurzulassung

Übungsaufgaben und ggf. weitere Vorlesungsmaterialien werden über ILIAS zur Verfügung gestellt.

**Zugangspasswort für ILIAS:** SflvHBs18s#

Neue Übungsblätter werden montags auf ILIAS hochgeladen,  
Lösungen sind jeweils bis spätestens am Montag der Folgewoche **vor der Vorlesung** in die Briefkästen im EG Geb. 51 einzuwerfen.

Sie dürfen maximal zu zweit abgeben, dabei sollten die Abgabepartner sich in derselben Übungsgruppe befinden.

## **Zulassungsvoraussetzungen für die Abschlussklausur:**

- ▶ regelmäßige Teilnahme an den Übungsgruppen
- ▶ Vorrechnen mindestens einer Übungsaufgabe an der Tafel
- ▶ Mindestens **50%** der erreichbaren Punkte der Übungsaufgaben

**Voraussichtlicher Klausurtermin:** Freitag, 21.09.2018,  
HS 00 026 und 00 036, Geb. 101

## Literatur (Auswahl)

- ▶ **Dümbgen, L.** (2003), *Stochastik für Informatiker*, Springer
- ▶ **Henze, N.** (2017), *Stochastik für Einsteiger*, 11. Aufl., Springer
- ▶ **Kersting, G., Wakolbinger, A.** (2010), *Elementare Stochastik*, 2. Aufl., Birkhäuser

## Kontakt

Fragen, Anregungen, Kritik (positive oder negative) können Sie neben den Übungsgruppen auch richten an

[ernst.august.hammerstein@stochastik.uni-freiburg.de](mailto:ernst.august.hammerstein@stochastik.uni-freiburg.de)  
[johannes.brutsche@stochastik.uni-freiburg.de](mailto:johannes.brutsche@stochastik.uni-freiburg.de)

oder persönlich in den Sprechstunden:

**E.A. v. Hammerstein:** Mi, 10–11 Uhr, Raum 248, Eckerstraße 1

**J. Brutsche:** Mi, 14–15 Uhr, Raum 228, Eckerstraße 1

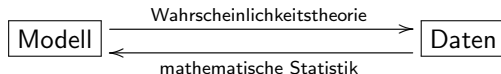
# Zur Einführung

# Was ist Stochastik?

Stochastik ist der Oberbegriff für Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. -Theorie und mathematische Statistik.

In der Stochastik werden mathematische Modelle von Zufallserscheinungen konstruiert, deren Gesetzmäßigkeiten studiert und ihre Anwendbarkeit auf reale Daten untersucht. Die Modelle basieren auf Zufallsbegriffen, wie z.B. dem der „Wahrscheinlichkeit“.

Diese werden durch mathematische Axiome beschrieben (Kolmogorov 1933). Die Axiome erklären jedoch nicht das Wesen des Zufalls.



# Stochastik im Alltag

**Entscheiden** Auswahl von Kapitalanlagemöglichkeiten  
Spiele, z.B. Schere-Stein-Papier  
(→ Spieltheorie in den Wirtschaftswissenschaften)

**Schätzen** jährliches Steueraufkommen, Inflationsraten  
Krankheitsaufkommen in der Bevölkerung (Inzidenzrate)

**Vergleichen/Testen** Ist eine Münze oder ein Würfel fair?  
Ist ein Medikament besser/wirksamer als ein anderes?  
Sind zwei Merkmale unabhängig oder korreliert?

**Vorhersagen** Wetter  
Tippen: Toto, Lotto, . . .  
Zukünftiger Kurs eines Wertpapiers

**Messen** physikalischer Größen (Messfehler → Fehlerausgleichs-  
rechnung, Fehlergrenzen)  
Quantenmechanik, Heisenbergsche Unschärferelation

# Stochastik im Alltag (Forts.)

**Mustererkennung, Fehlerkorrektur** Stochastische Algorithmen zur  
Signalentstörung (Funk, Radar, DVD-Player)  
Bildverschärfung  
Gesichtserkennung in Fotoprogrammen

**Verschlüsselungsverfahren** stochastische Primzahltests

**Analyse von Netzwerken und Algorithmen** Graphentheorie,  
Netzwerkmodelle, Suchbäume, Quicksort

**Versicherungsmathematik** Prämienkalkulation in z.B. Haftpflicht-,  
Kranken- und Lebensversicherung (Aktuare)

**Finanzmathematik** Berechnung von Derivatpreisen (Optionen,  
Zertifikate, Swaps, . . . )  
Optimale Handelsstrategien und Portfolios  
Quantifizierung von Risiken (Markt-, Kredit-,  
Liquiditätsrisiken sowie operational risk)  
Risikokapitalberechnung (Basel II, Basel III)



## Genereller Ansatz und Verfahren

- ▶ Präzisiere, welche Ereignisse man betrachten will  $\rightarrow$  Modellbildung
- ▶ Ordne jedem Ereignis  $A$  eine Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$  zu.  
Mögliche Prinzipien zur Festsetzung von  $\mathbb{P}(A)$ :
  1. **subjektiv:** Maß des persönlichen Glaubens, dass  $A$  eintritt
  2. **frequentistisch:** Relative Häufigkeit bzw. deren Grenzwert bei beliebig vielen unabhängigen Wiederholungen
  3. **Gleichverteilung:** Quotient aus Anzahl der günstigen durch Anzahl der möglichen Fälle

**Problem:** Alle o.g. Festsetzungsmöglichkeiten für  $\mathbb{P}(A)$  führen zu Schwierigkeiten

**Ausweg:** Axiomatischer Ansatz (Kolmogorov 1933)

Keine Hinterfragung der genauen Bedeutung von  $\mathbb{P}(A)$  bzw. dessen Erhalt durch ein konkretes Zufallsexperiment.

Fordere lediglich gewisse (konsistente) Regeln, die für Wahrscheinlichkeiten  $\mathbb{P}(A)$  gelten sollen.

Leite daraus Wahrscheinlichkeiten komplexerer Ereignisse ab.

## 3 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

### Definition 3.1 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** ist ein Tripel  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , bestehend aus einer nicht-leeren, höchstens abzählbaren Menge  $\Omega$  (Grundraum), der Potenzmenge  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  und einer Abbildung  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  (Wahrscheinlichkeitsmaß oder -Verteilung), die die folgenden Eigenschaften erfüllen muss:

- a)  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$  (Normierung),
- b)  $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$  für jede Folge  $(A_i)_{i \geq 1}$  paarweise disjunkter Mengen  $A_i \in \mathcal{A}$  (d.h.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ ) ( $\sigma$ -Additivität).

#### Sprechweisen:

- ▶ Teilmengen  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  von  $\Omega$  heißen *Ereignisse*,
- ▶  $A = \Omega$  heißt *sicheres Ereignis*,
- ▶  $A = \emptyset$  heißt *unmögliches Ereignis*,
- ▶  $A = \{\omega\}$  mit  $\omega \in \Omega$  heißt *Elementarereignis*,

- ▶  $A \cup B$  bedeutet, dass  $A$  oder  $B$  (oder beide) eintreten,
- ▶  $A \cap B$  bedeutet, dass sowohl  $A$  als auch  $B$  eintreten.

### Einfache Folgerungen:

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$  ( $\mathbb{P}$  ist nulltreu)
- $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$  für paarweise disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  (endliche Additivität)  
 $\implies \mathbb{P}(A^C) = 1 - \mathbb{P}(A)$  und  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$ ,
- $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  (Monotonie),
- Seien  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , so gilt die sog. *Sieb- oder Einschluss-Ausschluss-Formel*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \dots \pm \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Speziell:  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ ,

- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \implies \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$  (Sub- $\sigma$ -Additivität).

## Satz 3.2 (Eindeutige Festlegung von $\mathbb{P}$ )

Sei  $\Omega$  eine nicht-leere, höchstens abzählbare Menge und  $(p_n)_{n \geq 1}$  eine Folge nicht-negativer Zahlen (d.h.  $p_n \geq 0$  für alle  $n$ ), für die gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ .

Dann gibt es auf dem Grundraum  $\Omega$  genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  mit  $\mathbb{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ , d.h. das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  ist durch Angabe der **Elementarwahrscheinlichkeiten**  $\mathbb{P}(\{\omega_n\})$ ,  $n \geq 1$ , bereits eindeutig festgelegt.

**Beweis:** Übungsaufgabe

### Einfache Beispiele: Würfel und Münzwurf

**Einmaliger Würfelwurf:** Grundraum der möglichen Ergebnisse

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Bei einem fairen Würfel sollten alle möglichen Ergebnisse gleich wahrscheinlich sein

**Laplace-Ansatz:** Bei endlichem Grundraum  $\Omega$  sollen alle Elementarereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Im Fall des Würfels bedeutet das

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^6 \{i\}\right) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(\{i\}) \stackrel{\text{Laplace}}{=} \sum_{i=1}^6 p = 6p, \text{ d.h. } p = \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}.$$

Sei  $A_g$  das Ereignis, eine gerade Zahl zu würfeln, dann ist  $A_g = \{2, 4, 6\}$  und

$$\mathbb{P}(A_g) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Allgemein gilt unter dem Laplace Ansatz: Ist  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  und somit  $|\Omega| = \#\Omega = n$ , dann ist  $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n}$  für  $1 \leq k \leq n$ , und für  $A \subseteq \Omega$  gilt

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega_k \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}.$$

Anderes Modell: Manipulierter Würfel

Bei diesem fällt die 6 mit Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(\{6\}) = p$  für ein  $0 < p < 1$  und die anderen Zahlen mit  $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1-p}{5}$ ,  $1 \leq i \leq 5$ .

**Zweimaliger Würfelwurf:**

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 6)\} = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Hier ist offensichtlich  $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ . Damit ergibt sich mit dem Laplace-Ansatz z.B. für die Wahrscheinlichkeit eines Paschs

$$\mathbb{P}(\{(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)\}) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(\{(i, i)\}) = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{36} = \frac{1}{6}.$$

**n-maliger Münzwurf:**

Mögliche Ergebnisse bei einmaligem Wurf: Kopf = 1, Zahl = 0

Grundraum:  $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\} \implies |\Omega| = 2^n$

Laplace:  $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = \frac{1}{2^n}$

Allgemeiner:  $p$ -Münze, d.h.  $\mathbb{P}(\{1\}) = p, 0 < p < 1, \mathbb{P}(\{0\}) = 1 - p$ .

*Für das  $n$ -malige Würfeln mit einem manipulierten Würfel bzw. das  $n$ -malige Werfen einer  $p$ -Münze sind die Grundräume  $\Omega$  dieselben wie zuvor, jedoch ist hier die Laplace-Annahme zur Festsetzung der Wahrscheinlichkeiten offensichtlich nicht gerechtfertigt. Hierzu benötigt man andere Annahmen (z.B. Unabhängigkeit).*

## Ziehen aus einer Urne

Eine Urne enthalte  $m$  weiße und  $n$  schwarze Kugeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen?

Grundraum:  $\Omega = \{1, \dots, n+m\}$ , wobei  $W = \{1, \dots, m\}$  die weißen und  $S = \{m+1, \dots, n+m\}$  die schwarzen Kugeln seien.

Mit Laplace-Annahme gilt  $\mathbb{P}(W) = \frac{|W|}{|\Omega|} = \frac{m}{m+n}$  und analog  $\mathbb{P}(S) = \frac{n}{n+m}$ .

## Geburtstagsproblem

In einem Raum befinden sich  $N$  Personen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei der Anwesenden am gleichen Tag Geburtstag?

Grundraum:  $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_N) \mid \omega_i \in \{1, 2, \dots, 365\}\} \implies |\Omega| = 365^N$

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Mind. 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \exists i \neq j : \omega_i = \omega_j\} \end{aligned}$$

Unter der Laplace-Annahme gilt  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

Problem: Bestimmung von  $|A|$  kompliziert!

Ausweg: Nutze  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^C) = 1 - \frac{|A^C|}{|\Omega|}$ .

$$\text{Es ist } |A^C| = \begin{cases} \prod_{i=1}^N (366 - i), & N \leq 365, \\ 0, & N > 365. \end{cases}$$

Damit erhält man

$N$	10	20	23	30	40	50	60	100
$\mathbb{P}(A)$	0.1169	0.4114	0.5073	0.7063	0.8912	0.9704	0.9941	0.9999997

## (Un)Faire Wetten

Man wettet mit einem Einsatz von 1€ auf ein Ereignis  $E$ , das mit Wahrscheinlichkeit  $p$  ( $0 < p < 1$ ) eintritt.

Prinzip des fairen Wettens: Der (Netto-)Gewinn  $G$  muss gerade so groß sein, dass man im Mittel nichts gewinnt, d.h. der mittlere Gewinn  $MG$  ist gleich Null:

$$MG = G \cdot \mathbb{P}(E) - 1 \cdot \mathbb{P}(E^C) = G \cdot p - 1 \cdot (1 - p) \stackrel{!}{=} 0 \implies G = \frac{1}{p} - 1$$



Auflösen nach  $p$  ergibt  $p = \frac{1}{G+1}$ , d.h. bei einer fairen Wette ist die Erfolgswahrscheinlichkeit der Kehrwert der Wettquote  $(G + 1) : 1$ .

Solche Wettquoten werden u.a. bei Sportwetten (z.B. b-win, tipico) angegeben, z.B. für das Spiel FSV Mainz 05 gegen den SC Freiburg

	Heimsieg	Unentschieden	Auswärtssieg
Mainz vs Freiburg	2.2	3.3	3.4

Aus den obigen Quoten erhält man

$$\mathbb{P}(\text{Sieg Mainz}) = \frac{1}{2.2} = \frac{5}{11} \approx 0.4545, \quad \mathbb{P}(\text{Sieg Freiburg}) = \frac{1}{3.4} = \frac{5}{17} \approx 0.2941,$$

$$\mathbb{P}(\text{Unentsch.}) = \frac{1}{3.3} = \frac{10}{33} \approx 0.303,$$

$$\text{Wegen } \mathbb{P}(\text{Sieg M}) + \mathbb{P}(\text{U}) + \mathbb{P}(\text{Sieg F}) = \frac{5}{11} + \frac{5}{17} + \frac{10}{33} \approx 1.051693 > 1$$

ist das Spiel nicht ganz fair (da der Wettanbieter Gewinn machen will).

Die tatsächlichen (vermuteten) Wahrscheinlichkeiten erhält man hier durch Renormierung, z.B.  $\mathbb{P}(\text{Sieg Freiburg}) = \frac{0.2941}{1.051693} \approx 0.2796$ .

## Urnenmodelle

Zur Anwendung des Laplace-Ansatzes muss man insbesondere die Mächtigkeit des Grundraumes  $\Omega$  bestimmen, wozu häufig kombinatorische Überlegungen notwendig sind.

### Fall 1: Anordnungen von $m$ aus $N$ Elementen mit Wiederholung

$A = \{a_1, \dots, a_N\}$  sei endliche Menge mit unterscheidbaren Objekten

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \mid \omega_i \in A, 1 \leq i \leq m\} = A^m \implies |\Omega| = N^m$$

*Äquivalentes Urnenmodell:*  $m$ -faches Ziehen mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit  $N$  unterscheidbaren Kugeln

Für  $A = \{1, 2, \dots, 6\}$  entspricht dies dem  $m$ -maligen Würfeln.

Weitere Anwendung: Belegung von Zellen/Schachteln mit unterscheidbaren Objekten

*Beispiel:* Für  $m$  verschiedene Elementarteilchen stehen  $N$  verschiedene Energiezustände zur Auswahl. Belegung der Energiezustände wird beschrieben durch  $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ , wobei  $\omega_i$  den Energiezustand von Teilchen  $i$  angibt (mehrere Teilchen können denselben Energiezustand haben, Modell ohne Pauli-Prinzip)

*Verallgemeinerung:*  $m$  verschiedene Mengen  $A_i$  (Ziehen aus verschieden gefüllten Urnen)

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \mid \omega_i \in A_i, 1 \leq i \leq m\}, \quad |\Omega| = \prod_{i=1}^m |A_i|$$

## Fall 2: Anordnungen von $m$ aus $N$ Elementen ohne Wiederholung

$A = \{a_1, \dots, a_N\}$  sei endliche Menge mit unterscheidbaren Objekten

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \mid \omega_i \in A \text{ und } \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

$$\Rightarrow |\Omega| = \prod_{i=1}^m (N - i + 1) = \frac{N!}{(N - m)!}, \text{ wobei } n! := n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$$

*Äquivalentes Urnenmodell:*  $m$ -faches Ziehen ohne Zurücklegen, aber mit Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit  $N$  unterscheidbaren Kugeln

**Spezialfall Permutation ( $m = N$ ):** Als *Permutation* bezeichnen wir eine bijektive Abbildung einer Menge  $A$  auf sich selbst. Bei einer endlichen Menge  $A = \{a_1, \dots, a_N\}$  entspricht eine Permutation einer Umordnung der Elemente von  $A$ .

Die Menge aller möglichen Permutationen von  $A$  ist damit

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \mid \omega_i \in A, \omega_i \neq \omega_j\} \implies |\Omega| = N!$$

Nach Obigem muss ferner  $|\Omega| = N! = \frac{N!}{0!}$  sein, d.h. man setzt  $0! := 1$ .

### Fall 3: Kombinationen von $m$ aus $N$ Elementen ohne Wiederholung

*Äquivalentes Urnenmodell:*  $m$ -faches Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit  $N$  unterscheidbaren Kugeln

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49“. Hier kommt es nur darauf an, welche Zahlen gezogen werden, aber nicht auf die Ziehungsreihenfolge (Zahlen werden später aufsteigend sortiert).

#### Satz 4.1

Sei  $A = \{a_1, \dots, a_N\}$  eine endliche Menge unterscheidbarer Objekte.

Dann gibt es

$$\frac{N!}{m!(N-m)!} =: \binom{N}{m}$$

verschiedene  $m$ -elementige Teilmengen von  $A$  ( $m \leq N$ ). Man bezeichnet die (ungeordneten) Teilmengen als **Kombinationen (ohne Wiederholungen) der Größe  $m$  aus  $N$  Elementen**.

**Beweis:** Wählt man nacheinander  $m$  Elemente aus  $A$  unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus, erhält man als mögliche Ergebnisse die Menge

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in A^m \mid \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

mit  $|\Omega| = \frac{N!}{(N-m)!}$  (vgl. Fall 2). Da es auf die Reihenfolge/Ordnung *nicht* ankommen soll, sind sämtliche möglichen Anordnungen/Permutationen derselben  $m$  gezogenen Objekte als äquivalent anzusehen.

Für ein  $m$ -Tupel  $(\omega_1, \dots, \omega_m)$  gibt es  $m!$  verschiedene Anordnungen. Zusammenfassung aller Tupel, die die gleichen Objekte in unterschiedlicher Anordnung enthalten („Äquivalenzklassen“), ergibt  $\frac{|\Omega|}{m!} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$ .

Für jede Äquivalenzklasse kann man einen *Repräsentanten*, d.h. ein Tupel mit spezieller Anordnung, auswählen, z.B. mit aufsteigender Reihenfolge (sofern auf  $A$  eine Ordnungsrelation existiert). Damit lässt sich die Menge  $\Omega_m$  der  $m$ -elementigen Teilmengen von  $A$  darstellen als

$$\Omega_m = \{\omega \in A^m \mid \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m\}, \quad |\Omega_m| = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \binom{N}{m}. \quad \square$$

## Bemerkung 4.2

Die Zahlen  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , heißen **Binomialkoeffizienten**.

Man setzt  $\binom{n}{k} = 0$  für  $k > n$ .

### Anwendungen:

- a) Zahlenlotto „6 aus 49“. Es gibt  $\binom{49}{6} = 13983816$  verschiedene mögliche Ziehungsergebnisse (ohne Superzahl).
- b) Belegung von  $N$  verschiedenen Energiezuständen durch  $m$  Elementarteilchen, wobei jeder Energiezustand nur von höchstens einem Teilchen angenommen werden darf (Pauli-Prinzip, gilt z.B. für Elektronen, Protonen und Neutronen).

## Bemerkung 4.3

Äquivalent zu „unterscheidbare Objekte ohne Anordnung“ (d.h. eine Auswahl verschiedener Objekte, bei der es nicht auf die Reihenfolge ankommt) ist, *ununterscheidbare (gleiche) Objekte* zu betrachten, die man mangels charakteristischer Eigenheiten nicht auseinander halten und somit auch nicht anordnen kann.

(Dies ist z.B. bei Anwendung b) oben der Fall.)

## Fall 4: Kombinationen von $m$ aus $N$ Elementen mit Wiederholung

*Äquivalentes Urnenmodell:*  $m$ -faches Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit  $N$  unterscheidbaren Kugeln

$A = \{a_1, \dots, a_N\}$  sei endliche Menge mit unterscheidbaren Objekten (o.B.d.A. mit Ordnungsrelation)

Analog zum Beweis von Satz 4.1 lässt sich die Menge  $\bar{\Omega}_m$  aller  $m$ -elementigen Auswahlen (Ziehungen) aus  $A$  mit Wiederholung, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, darstellen als

$$\bar{\Omega}_m = \{\omega \in A^m \mid \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_m\}$$

( $\leq$ , da nun Wiederholungen möglich sind). Es gilt  $|\bar{\Omega}_m| = \binom{N+m-1}{m}$ .

**Beweis:** O.B.d.A. sei  $A = \{1, \dots, N\}$ . Definiere ferner

$\bar{A} := \{1, \dots, N+m-1\}$  sowie  $\mathcal{P}_m(\bar{A}) = \{\bar{B} \subset \bar{A} \mid |\bar{B}| = m\}$  ( $m$ -elementige Teilmengen von  $\bar{A}$ ) und

$f : \bar{\Omega}_m \rightarrow \mathcal{P}_m(\bar{A})$  durch  $(\omega_1, \dots, \omega_m) \mapsto (\omega_1, \omega_2 + 1, \dots, \omega_m + m - 1)$ .

Beachte, dass  $f$  bijektiv ist (die Injektivität ist trivial)!

$f$  ist surjektiv, denn zu jeder  $m$ -elementigen Teilmenge  $\bar{B}$  von  $\bar{A}$  erhält man ein Urbild aus  $\bar{\Omega}_m$ , indem man die Elemente von  $\bar{B}$  zunächst nach aufsteigender Größe ordnet und dann vom  $i$ -ten Glied der geordneten Folge  $i - 1$  subtrahiert.

Da  $f$  bijektiv ist, muss gelten  $|\bar{\Omega}_m| = |\mathcal{P}_m(\bar{A})|$ .

Da  $\bar{A} = \{1, \dots, N + m - 1\}$   $N + m - 1$  verschiedene Elemente hat, ist die Anzahl der  $m$ -elementigen Teilmengen von  $\bar{A}$  nach Satz 4.1 gerade  $\binom{N+m-1}{m}$ , d.h.  $|\bar{\Omega}_m| = |\mathcal{P}_m(\bar{A})| = \binom{N+m-1}{m}$ .  $\square$

**Bemerkung:** Die Funktion  $f$  oben stellt eine 1:1-Beziehung zwischen Ziehen mit und ohne Zurücklegen (jeweils ohne Reihenfolge) her: Ziehen von  $m$  aus  $N$  Elementen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge (Elemente von  $\bar{\Omega}_m$ ) ist (vermöge der Abbildungsvorschrift  $f$ ) äquivalent zu Ziehen von  $m$  aus  $N + m - 1$  Elementen ohne Zurücklegen und ohne Reihenfolge, d.h. Bildung einer  $m$ -elementigen Teilmenge aus  $\bar{A}$  (Elemente von  $\mathcal{P}_m(\bar{A})$ )



## Korollar 4.4 (Binomischer Lehrsatz)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

**Beweis:**  $(x + y)^n = (x + y) \cdot \dots \cdot (x + y) = \sum_{A \subset \{1, \dots, n\}} x^{|A|} y^{|A^c|}$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{\substack{A \subset \{1, \dots, n\} \\ |A|=k}} x^k y^{n-k} \stackrel{\text{Satz 4.1}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \square$$

**Anwendung:** Ist  $|\Omega| = n$ , so gilt  $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$ .

**Beweis:** Sei  $\mathcal{P}_k(\Omega) := \{A \subset \Omega \mid |A| = k\}$  die Menge der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $\Omega$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = \sum_{k=0}^n |\mathcal{P}_k(\Omega)| \stackrel{\text{Satz 4.1}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \stackrel{\text{Kor. 4.4}}{=} (1 + 1)^n = 2^n.$$

# Zusammenfassung

## Anordnungen/Kombinationen von $m$ aus $N$ Elementen

Statistische Physik	unterscheidbare Objekte	ununterscheidbare (gleiche) Objekte	
ohne Pauliprinzip	$N^m$ „Maxwell-Boltzmann“	$\binom{N+m-1}{m}$ „Bose-Einstein“	mit Zurücklegen
mit Pauliprinzip	$\frac{N!}{(N-m)!}$	$\binom{N}{m}$ „Fermi-Dirac“	ohne Zurücklegen
	<b>geordnete Stichproben</b>	<b>ungeordnete Stichproben</b>	<b>Ziehen aus einer Urne</b>

## Beispiel 4.5 (Fixpunkte in Permutationen)

Sei  $\mathcal{S}_n$  die Menge aller Permutationen der Zahlen  $\{1, \dots, n\}$ . Eine Permutation  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  hat einen *Fixpunkt*, falls es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  gibt mit  $\sigma(i) = i$ . Wie wahrscheinlich ist es, dass eine (zufällig ausgewählte) Permutation  $\tau \in \mathcal{S}_n$  keinen Fixpunkt besitzt?

Sei  $A_i = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$  die Menge der Permutationen, die (mindestens) die Zahl  $i$  als Fixpunkt haben. Dann gilt (unter der Laplace-Annahme)

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

denn wenn  $i$  ein Fixpunkt ist, können effektiv nur noch  $n-1$  Zahlen permutiert werden, so dass  $|A_i| = (n-1)!$ .

Analog ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Permutation  $k$  Fixpunkte  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  hat

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Permutation  $\tau$  mindestens einen Fixpunkt hat, ist daher  $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ .

Nach Siebformel und Satz 4.1 erhält man diese Wahrscheinlichkeit durch (beachte:  $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1) \forall i$ , ebenso  $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$  usw.)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= n\mathbb{P}(A_1) - \binom{n}{2}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \binom{n}{3}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &\quad - \dots \pm \binom{n}{n}\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots \pm \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Permutation  $\tau$  keinen Fixpunkt besitzt, gegeben durch

$$\mathbb{P}((A_1 \cup \dots \cup A_n)^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \mp \frac{1}{n!}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhält man

$$\mathbb{P}((A_1 \cup \dots \cup A_n)^c) = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1}.$$

## Hypergeometrische und Binomialverteilung

Betrachte Urne mit  $s$  schwarzen und  $w$  weißen Kugeln,  $s + w = n$ .  
Ziehe  $m$  Kugeln mit einem Griff heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau  $k \leq \min(m, s)$  schwarze Kugeln zu ziehen?

Seien  $A = \{1, \dots, n\}$  die Menge aller Kugeln in der Urne,  
 $A_0 = \{1, \dots, s\}$  die schwarzen und  $A_0^C = \{s + 1, \dots, n\}$  die weißen Kugeln. Da es nur auf die Anzahlen der gezogenen schwarzen bzw. weißen Kugeln ankommt, aber nicht auf deren Reihenfolge innerhalb der Ziehung, liegt eine Ziehung ohne Anordnung und ohne Wiederholung vor bzw. eine Kombination von  $m$  aus  $n$  Elementen ohne Wiederholung.

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_m) \mid \omega_i \in A, \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m\}, \quad |\Omega| = \binom{n}{m}.$$

$$\begin{aligned} E &:= \text{„genau } k \text{ schwarze unter den } m \text{ gezogenen Kugeln“} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega_i \in A_0, 1 \leq i \leq k, \omega_i \in A_0^C, i > k\} \end{aligned}$$

Betrachte

$$\Omega' := \{\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_k) \mid \omega'_i \in A_0, \omega'_1 < \dots < \omega'_k\}, \quad |\Omega'| = \binom{s}{k},$$

$$\Omega'' := \{\omega'' = (\omega''_1, \dots, \omega''_{m-k}) \mid \omega''_i \in A_0^C, \omega''_1 < \dots < \omega''_{m-k}\}, \quad |\Omega''| = \binom{w}{m-k}.$$

Definiere

$$\varphi : E \rightarrow \Omega' \times \Omega'', \quad \varphi((\omega_1, \dots, \omega_m)) = ((\omega_1, \dots, \omega_k), (\omega_{k+1}, \dots, \omega_m))$$

Offensichtlich ist  $\varphi$  bijektiv, daher gilt  $|E| = |\Omega'| \cdot |\Omega''| = \binom{s}{k} \binom{w}{m-k}$ .

Unter der Laplace-Annahme gilt

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{s}{k} \binom{w}{m-k}}{\binom{n}{m}}.$$

## Definition 5.1 (Hypergeometrische Verteilung)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\mathbb{P}$  auf  $\{\max(0, m - w), \dots, \min(m, s)\}$ , gegeben durch

$$\mathbb{P}(\{k\}) = \frac{\binom{s}{k} \binom{w}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{\binom{s}{k} \binom{n-s}{m-k}}{\binom{n}{m}},$$

heißt **hypergeometrische Verteilung** zu den Parametern  $n$ ,  $s$  und  $m$ .

**Bemerkung:** Die Verteilung ist auch auf der u.U. größeren Menge  $\{0, \dots, m\}$  definiert, da für  $k < m - w$  und  $k > s$  jeweils ein Binomialkoeffizient im Zähler 0 wird.

### Anwendungen:

- a) Lotto „6 aus 49“:  $n = 49$  Kugeln,  $s = 6$  schwarze (Richtige, d.h. zuvor getippte Zahlen),  $m = 6$  Kugeln werden gezogen,  $k = 0, 1, \dots, 6$ .  $p_k$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau  $k$  der getippten Zahlen

gezogen werden:  $p_k = \frac{\binom{6}{k} \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$p_k$	0.4359	0.4130	0.1324	0.01765	$0.9686 \cdot 10^{-3}$	$0.1845 \cdot 10^{-4}$	$0.715 \cdot 10^{-7}$

- b) Qualitätskontrolle:  $n$  Werkstücke,  $s$  defekt,  $w = n - s$  ok. Für Stichprobe der Größe  $m$  kann mit hypergeom. Vert. die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass Stichprobe genau  $k$  defekte Stücke enthält.

Was passiert, wenn der Gesamtumfang  $n$  der Urne immer größer wird ( $n \rightarrow \infty$ ), dabei aber der relative Anteil der schwarzen Kugeln  $\frac{s_n}{n}$  nahezu konstant bleibt bzw. gegen ein festes Verhältnis strebt ( $\frac{s_n}{n} \rightarrow p$ )?

### Satz 5.2

Sei  $m \in \mathbb{N}$  beliebig, aber fest gewählt. Gilt  $\frac{s_n}{n} \rightarrow p$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $0 < p < 1$ , so folgt für  $0 \leq k \leq m$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{\binom{s_n}{k} \binom{n-s_n}{m-k}}{\binom{n}{m}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

**Interpretation:** Ist  $n$  (und damit auch  $s_n$ ) groß gegenüber  $m$ , besteht nahezu kein Unterschied zwischen Ziehen mit und ohne Wiederholung.  $p \approx \frac{s_n}{n}$  ist dann (nach Laplace-Annahme) die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen. Die rechte Seite entspricht somit der Wahrscheinlichkeit, bei  $m$  Ziehungen von einer Kugel aus der Urne mit jeweils anschließendem Zurücklegen genau  $k$  schwarze Kugeln zu erhalten.



## Definition 5.3 (Binomialverteilung)

Sei  $n \geq 1$  und  $0 \leq p \leq 1$ . Die auf  $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$  durch

$$p_k = b_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Binomialverteilung zu den Parametern  $n$  und  $p$** . Sie wird oft auch mit  $B(n, p)$  bezeichnet.

**Bemerkung:** Dass die  $p_k = b_{n,p}(\{k\})$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$  definieren, folgt aus Satz 3.2 und Korollar 4.4:

$$\sum_{k=0}^n b_{n,p}(\{k\}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \stackrel{\text{Kor. 4.4}}{=} (p + (1-p))^n = 1.$$

## Bemerkung 5.4

Bei der Definition von hypergeometrischen Verteilung kam es nur auf die Gesamtzahlen der gezogenen schwarzen und weißen Kugeln an, aber nicht auf die genaue Reihenfolge. Zieht man z.B. 3 Kugeln ohne Zurücklegen, aber *mit* Beachtung der Reihenfolge, so erhält man nach der Verallgemeinerung von Fall 1 und Fall 2 aus dem vorigen Abschnitt

$$\mathbb{P}(\{(S, W, S)\}) = \frac{s \cdot w \cdot (s-1)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}$$

Allgemeiner gilt, falls man  $m$  Kugeln zieht und sich darunter  $k$  schwarze (in einer bestimmten Reihenfolge) befinden sollen,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{(S, W, W, \dots, S)\}) &= \\ &= \frac{s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-k+1) \cdot w \cdot (w-1) \cdot \dots \cdot (w-(m-k)+1)}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)} \end{aligned}$$

Wird wie in Satz 5.2 der Umfang der Urne immer größer ( $n \rightarrow \infty$ ), wobei der relative Anteil der schwarzen Kugeln konstant bleibt ( $\frac{s_n}{n} \rightarrow p$ ), gilt für die obige Wahrscheinlichkeit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{(S, W, W, \dots, S)\}) = p^k (1-p)^{m-k}.$$

Im Vergleich zur Binomialverteilung fällt der Binomialkoeffizient  $\binom{m}{k}$  weg, da hier die Ziehungsreihenfolge berücksichtigt wird.

## Anwendungsbeispiele

### Beispiel 5.5

- a) In einer Keksdose befinden sich 20 Kekse, davon 6 mit und 14 ohne Schokolade. Wie wahrscheinlich ist es, bei Entnahme von 5 Keksen (ohne hinzusehen!) genau einen Schokokeks zu erwischen?

Ziehen ohne Zurücklegen, Gesamtgröße der Urne/Keksdose ist endlich  
 $\implies$  Hypergeometrische Verteilung

$$\mathbb{P}(\{1 \text{ Schokokeks bei 5 Ziehungen}\}) = \frac{\binom{6}{1} \binom{14}{4}}{\binom{20}{5}} \approx 0.387$$

- b) Erfahrungsgemäß sind bei der Produktion elektronischer Bauteile 3% der Teile fehlerhaft. Wenn man aus der Gesamtproduktion 10 Teile herausgreift, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist dann höchstens eines davon fehlerhaft?

Urne (Gesamtproduktion) sehr groß, daher Ziehen ohne Zurücklegen  
 $\approx$  Ziehen mit Zurücklegen  $\implies$  Binomialverteilung

„Höchstens eins“ bedeutet entweder kein oder genau ein fehlerhaftes Teil, also ist

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}(\{\text{höchstens eins von 10 Teilen fehlerhaft}\}) \\
 &= \mathbb{P}(\{0 \text{ Teile fehlerhaft}\}) + \mathbb{P}(\{1 \text{ Teil fehlerhaft}\}) \\
 &= \binom{10}{0} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^9 \approx 0.965
 \end{aligned}$$

- c) Von  $k$  Personen werden in einer anonymen Befragung die Geburtsmonate festgestellt. Wie viele verschiedene Ergebnisse sind bei einer solchen Befragung möglich?
- Durch die Anonymisierung hat man  $k$  ununterscheidbare Objekte (Personen), die auf 12 verschiedene Schachteln (Geburtsmonate) zu verteilen sind, wobei Mehrfachbelegungen (gleiche Geburtsmonate verschiedener Personen) möglich sind. Das entspricht einer Ziehung von  $k$  Elementen aus einer Menge von  $N = 12$  Elementen mit Wiederholung und ohne Reihenfolge (für jedes Objekt wird eine Schachtelnummer bzw. Geburtsmonat gezogen).
- Dafür gibt es nach Fall 4  $\binom{12+k-1}{k} = \binom{k+11}{k}$  Möglichkeiten.

## Satz 5.6

Zu einer endlichen Menge  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  und ganzen Zahlen  $n_1, \dots, n_r \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^r n_i = n$  gibt es genau  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}$  Zerlegungen von  $A$  in Teilmengen  $A_1, \dots, A_r$  derart, dass  $A_i$  genau  $n_i$  Elemente enthält. Die Zahlen  $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!} =: \binom{n}{n_1, \dots, n_r}$  heißen **Multinomialkoeffizienten**.

**Beweis:** Man erhält eine Partition von  $A$  mit den gewünschten Eigenschaften durch Auswahl der  $n_1$  Elemente für  $A_1$  ( $\binom{n}{n_1}$  Möglichkeiten nach Satz 4.1), dann der nächsten  $n_2$  Elemente von  $A_2$  ( $\binom{n-n_1}{n_2}$  Möglichkeiten nach Satz 4.1) usw. Die Gesamtzahl der möglichen Partitionen von  $A$  in Teilmengen der gewünschten Größe ist dann  $\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \dots \cdot \binom{n_r}{n_r} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{n_r!}{n_r!0!} = \frac{n!}{n_1!\dots n_r!}$   $\square$

## Korollar 5.7 (Multinomialsatz)

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ \sum_{i=1}^r n_i = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \cdot x_1^{n_1} \dots x_r^{n_r}, \quad x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}, \quad n, r \in \mathbb{N}.$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 (x_1 + \dots + x_r)^n &= \sum_{\substack{(A_1, \dots, A_r) \\ \text{Zerlegung} \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \prod_{i=1}^r x_i^{|A_i|} = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ \sum n_i = n}} \sum_{\substack{(A_1, \dots, A_r) \\ \text{Zerlegung} \\ \text{mit } |A_i| = n_i}} \prod_{i=1}^r x_i^{n_i} \\
 &\stackrel{\text{Satz 5.6}}{=} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ \sum n_i = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \prod_{i=1}^r x_i^{n_i}
 \end{aligned}$$

□

**Folgerung:** Für Parameter  $p_1, \dots, p_r \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$  und  $n, r \in \mathbb{N}$  ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\mathbb{P} = M(n, r, p_1, \dots, p_r)$  auf dem Raum  $\Omega = \{(n_1, \dots, n_r) \mid n_i \geq 0, \sum_{i=1}^r n_i = n\}$  gegeben durch

$$\mathbb{P}(\{(n_1, \dots, n_r)\}) = \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}.$$

Diese Verteilung heißt **Multinomialverteilung**.

**Beweis:**  $\sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 0 \\ \sum n_i = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r} \stackrel{\text{Kor. 5.7}}{=} (p_1 + \dots + p_r)^n = 1^n = 1.$

**Beispiel:** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei  $n$  Würfeln mit einem fairen Würfel  $n_1$ -mal die 1,  $n_2$ -mal die 2,  $\dots$ ,  $n_6$ -mal die 6 zu erhalten, wobei  $n_i \geq 0$  und  $\sum_{i=1}^6 n_i = n$ ?

Setze  $\Omega := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 6\}\}$

und  $A := \{\omega \in \Omega \mid |\{i \mid \omega_i = j\}| = n_j, 1 \leq j \leq 6\}$ .

Jedes  $\omega \in A$  definiert eine geordnete Zerlegung von  $\{1, \dots, n\}$  in 6 Teilmengen mit  $|A_1| = n_1, \dots, |A_6| = n_6$ :  $A_1$  enthält die Indizes aller  $\omega_i$  aus  $\omega$  mit  $\omega_i = 1$ ,  $A_2$  die Indizes aller  $\omega_i$  aus  $\omega$  mit  $\omega_i = 2$  usw.

Nach Satz 5.6 ist  $|A| = \frac{n!}{n_1! \dots n_6!}$  und nach dem Laplace-Ansatz somit

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!}{n_1! \dots n_6! \cdot 6^n}$$

Die entsprechende Verteilung auf  $\{(n_1, \dots, n_6) \mid n_i \geq 0, \sum_{i=1}^6 n_i = n\}$  ist also eine Multinomialverteilung mit den Parametern

$$n, 6, p_1 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}.$$

## Bedingte Wahrscheinlichkeit

**Einführendes Beispiel:** Dreimaliges Werfen einer fairen Münze

„Kopf“ = 1, „Zahl“ = 0. Dann ist  $\Omega = \{0, 1\}^3$ , und mit der Laplace-Annahme gilt  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$  für jedes  $\omega \in \Omega$ .

Betrachte Ereignis

$A = \{\text{„mindestens zweimal Kopf“}\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ ,

dann ist  $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ .

*Angenommen, wir wissen bereits, dass das Ergebnis des ersten Wurfs „Kopf“ ist. Wie ändert sich dann unsere Einschätzung für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A?*

Wir wissen also, dass eines der Ereignisse von

$B = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$  eintritt (und kein anderes!).

Daher können wir  $B$  als neuen Grundraum  $\tilde{\Omega}$  ansehen mit  $\tilde{\mathbb{P}}(\{\tilde{\omega}\}) = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|} = \frac{1}{4}$  für alle  $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} = B$  (Laplace-Annahme).

Auf dem neuen Grundraum ist

$\{\text{„mindestens zweimal Kopf“}\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\} = A \cap B$ .



Folglich ist

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{\text{„mindestens zweimal Kopf“}\}) = \frac{3}{4} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$\tilde{\mathbb{P}}$  kann als *bedingte Wahrscheinlichkeit* aufgefasst werden, die die Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen unter der Voraussetzung/Bedingung angibt, dass das Ereignis  $B$  in jedem Fall eintritt.

### Definition 6.1 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum,  $B \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(B) > 0$ , dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \quad (A \in \mathcal{A})$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$  gegeben  $B$** .

**Weiteres Beispiel: Zweimaliger Würfelwurf**

$\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega$  (Laplace-Annahme).

$A = \{6 \text{ im ersten Wurf}\} = \{(6, j) \mid 1 \leq j \leq 6\} \implies \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ .

$B = \{\text{Augensumme ist } 11\} = \{(6, 5), (5, 6)\} \implies \mathbb{P}(B) = \frac{1}{18}$ .

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(6, 5)\})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2}.$$

**Satz 6.2**

$\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$  ist eine auf  $B$  konzentrierte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

**Spezialfälle:**

$$A \supset B \implies \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1,$$

$$A \subset B^C \implies \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = 0,$$

$$B = \Omega \implies \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \mathbb{P}(A).$$

### Korollar 6.3 (Multiplikationsformel)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$  Ereignisse mit  $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$ , dann gilt

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

### Satz 6.4 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$  eine endliche oder abzählbare Zerlegung von  $\Omega$  (d.h.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  für  $i \neq j$  und  $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \Omega$ ) mit  $\mathbb{P}(B_i) > 0$  für alle  $i \geq 1$ . Dann gilt für jedes  $A \in \mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i).$$

### Satz 6.5 (Bayes'sche Regel)

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.4 gilt für jedes  $A \in \mathcal{A}$  mit  $\mathbb{P}(A) > 0$ , dass

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i) \cdot \mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j \geq 1} \mathbb{P}(A|B_j) \cdot \mathbb{P}(B_j)}.$$

## Anwendungsbeispiele

### Beispiel 6.6

- a) Ein elektronisches Gerät enthält zwei Schaltkreise I und II. Schaltkreis I fällt mit Wahrscheinlichkeit 0.1 aus. Fällt Schaltkreis I aus, so fällt Schaltkreis II mit Wahrscheinlichkeit 0.2 ebenfalls aus. Bleibt Schaltkreis I intakt, fällt Schaltkreis II mit Wahrscheinlichkeit 0.05 aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen beide Schaltkreise aus? Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt auch Schaltkreis I aus, wenn Schaltkreis II ausfällt?

Seien  $A = \{\text{Schaltkreis I fällt aus}\}$  und  $B = \{\text{Schaltkreis II fällt aus}\}$ , dann folgt aus obigen Angaben

$$\mathbb{P}(A) = 0.1, \quad \mathbb{P}(B|A) = 0.2, \quad \mathbb{P}(B|A^C) = 0.05.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall beider Schaltkreise

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02.$$

Die in der zweiten Frage gesuchte Wahrscheinlichkeit ist  $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ . Hierfür benötigen wir  $\mathbb{P}(B)$ . Nach Satz 6.4 ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C) \\ &= \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C) \cdot (1 - \mathbb{P}(A)) \\ &= 0.2 \cdot 0.1 + 0.05 \cdot 0.9 = 0.065. \\ \implies \mathbb{P}(A|B) &= \frac{0.02}{0.065} \approx 0.3078\end{aligned}$$

- b) Bei der Massenproduktion eines Computerchips ist erfahrungsgemäß 1% der Produktion fehlerhaft. Daher wird jeder einzelne Chip vor der Auslieferung überprüft; Chips, bei denen die Prüfung einen Fehler anzeigt, werden aussortiert, die anderen ausgeliefert. Da auch das Prüfverfahren nicht perfekt ist, zeigt es mit Wahrscheinlichkeit 0.1 bei an sich einwandfreien Chips fälschlich einen Defekt an. Umgekehrt wird bei tatsächlich fehlerhaften Chips mit Wahrscheinlichkeit 0.05 irrtümlich kein Defekt erkannt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein ausgelieferter Chip tatsächlich fehlerfrei? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein aussortierter Chip wirklich defekt?

Sei  $A = \{\text{Chip ist fehlerfrei}\}$  und  $B = \{\text{Prüfung zeigt Fehler an}\}$ , dann gilt n.V.

$$\mathbb{P}(A) = 0.99, \quad \mathbb{P}(B|A) = 0.1, \quad \mathbb{P}(B^C|A^C) = 0.05.$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein ausgelieferter Chip tatsächlich fehlerfrei ist, nach Satz 6.5

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|B^C) &= \frac{\mathbb{P}(B^C|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B^C|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B^C|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C)} \\ &= \frac{(1 - \mathbb{P}(B|A)) \cdot \mathbb{P}(A)}{(1 - \mathbb{P}(B|A)) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B^C|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C)} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.99}{0.9 \cdot 0.99 + 0.05 \cdot 0.01} \approx 0.999 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein aussortierter Chip tatsächlich defekt ist, beträgt

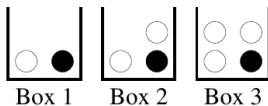
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^C|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C)}{\mathbb{P}(B|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C) + \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.1 \cdot 0.99} \approx 0.0876. \end{aligned}$$

b') Analoges Problem bei Feststellung von Krankheiten: In einer Bevölkerung sind durchschnittlich 0.8% aller Personen an einer bestimmten Krankheit erkrankt. Mit einem verfügbaren medizinischen Test werden kranke Personen in 90% der Fälle positiv getestet, bei gesunden Personen fällt der Test in 7% der Fälle positiv aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine positiv getestete Person tatsächlich diese Krankheit?

Seien  $A = \{\text{Person hat Krankheit}\}$  und  $B = \{\text{Test ist positiv}\}$ , dann berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(A|B)$  nach Satz 6.5 zu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^C) \cdot \mathbb{P}(A^C)} \\ &= \frac{0.9 \cdot 0.008}{0.9 \cdot 0.008 + 0.07 \cdot 0.992} \approx 0.0939\end{aligned}$$

- c) Von den unten abgebildeten Urnen wird eine zufällig ausgewählt und dann eine Kugel daraus gezogen.



Die gezogene Kugel wird anschließend gezeigt, aber nicht die Urne, aus der sie gezogen wurde. Angenommen, die gezogene Kugel sei weiß, mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie aus Urne 2, d.h. was ist  $\mathbb{P}(\text{Urne 2}|\text{weiß})$ ?

Aus der obigen Skizze folgt

$$\mathbb{P}(\text{Urne 2 und weiß}) = \mathbb{P}(\text{weiß}|\text{Urne 2}) \cdot \mathbb{P}(\text{Urne 2}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Analog folgt  $\mathbb{P}(\text{Urne 1 und weiß}) = \frac{1}{6}$ ,  $\mathbb{P}(\text{Urne 3 und weiß}) = \frac{1}{4}$ .

Damit ist

$$\mathbb{P}(\text{weiß}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{23}{36} \quad \implies \quad \mathbb{P}(\text{Urne 2}|\text{weiß}) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{23}{36}} = \frac{8}{23}.$$



## Unabhängigkeit

Intuitiv ist naheliegend, zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  als unabhängig anzusehen, wenn das Vorliegen des Ereignisses  $A$  die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von  $B$  nicht beeinträchtigt und umgekehrt, d.h. wenn gilt

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Daraus folgt aber wegen  $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

### Definition 6.7 (Unabhängigkeit)

- a) Zwei Ereignisse  $A, B \in \mathcal{A}$  eines Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  heißen **unabhängig**, falls  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ .
- b) Eine (endliche oder abzählbare) Folge von Ereignissen  $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$  heißt **paarweise unabhängig**, falls  $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j)$  für alle  $i, j \geq 1, i \neq j$ .

## Definition 6.7 (Forts.)

- c) Eine (endliche oder abzählbare) Folge von Ereignissen  $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$  heißt **unabhängig**, falls für jede endliche Teilmenge  $T \subset \mathbb{N}$  gilt, dass
- $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in T} A_j\right) = \prod_{j \in T} \mathbb{P}(A_j).$$

## Bemerkung 6.8

- a) Die Ereignisse  $A$  und  $\Omega$  bzw.  $A$  und  $\emptyset$  sind stets unabhängig, denn  
 $\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\Omega)$  und  
 $\mathbb{P}(A \cap \emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(\emptyset) \cdot \mathbb{P}(A).$
- b) Unabhängigkeit einer Folge von Ereignissen  $(A_n)_{n \geq 1}$  impliziert stets paarweise Unabhängigkeit (wähle speziell  $T = \{i, j\}$ ), aber die Umkehrung gilt i.A. nicht!

**Gegenbeispiel:**  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

$A = \{\omega_1, \omega_3\}$ ,  $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ ,  $C = \{\omega_3, \omega_4\}$ . Dann ist

$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$  und

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4}$ , also sind  $A, B, C$  paarweise unabhängig.

## Bemerkung 6.8 (Forts.)

Wegen  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{8}$  sind die drei Ereignisse jedoch nicht unabhängig.

### Beispiel: Zweimaliger Würfelwurf

$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$ ,  $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \frac{1}{36}$  (Laplace-Ann.)

$A_i^1 := \{(i, \omega_2) \mid \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$  (Ergebnis  $i$  im ersten Wurf),

$A_j^2 := \{(\omega_1, j) \mid \omega_1 \in \{1, \dots, 6\}\}$  (Ergebnis  $j$  im zweiten Wurf),

dann ist  $\mathbb{P}(A_i^1) = \mathbb{P}(A_j^2) = \frac{1}{6}$  und

$\mathbb{P}(A_i^1 \cap A_j^2) = \mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A_i^1) \cdot \mathbb{P}(A_j^2)$ , also sind die Ergebnisse des ersten und des zweiten Würfelwurfs unter der Laplace-Annahme voneinander unabhängig.

Das lässt sich vollkommen analog auch auf den  $n$ -maligen Würfelwurf und den  $n$ -maligen Münzwurf übertragen: Unter der Laplace-Annahme sind die Ausgänge verschiedener Würfel- oder Münzwürfe stets unabhängig.

## Korollar 6.9

*Sind die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  unabhängig, dann gilt*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i),$$

*wobei für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$   $B_i = A_i$  oder  $B_i = A_i^C$  sei.*

*Insbesondere sind auch die Komplemente  $A_1^C, \dots, A_n^C$  unabhängig.*

Betrachte  $n$  Experimente mit zufälligem Ausgang, wobei jedes Einzelexperiment durch einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , beschrieben werde. Bezeichne  $\Omega_i = \{\omega_{ij}, j \geq 1\}$  und  $\mathbb{P}_i(\{\omega_{ij}\}) = p_{ij}$ , so dass  $p_{ij} \geq 0$  und  $\sum_{j \geq 1} p_{ij} = 1$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

Das zusammengesetzte Experiment ist dann  $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i$  und  $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ .

$A_{ij} := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_{i-1} \times \{\omega_{ij}\} \times \Omega_{i+1} \times \dots \times \Omega_n$  ist dann das Ereignis, dass der Ausgang des  $i$ -ten Experiments  $\omega_{ij}$  ist.

## Satz 6.10 (Produktraum und Produktmaß)

*Es existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A}) = (\prod_{i=1}^n \Omega_i, \mathcal{P}(\prod_{i=1}^n \Omega_i))$ , so dass jede Familie  $\{A_{1j_1}, \dots, A_{nj_n}\}$  unabhängig ist.  $\mathbb{P}$  ist gegeben durch*

$$\mathbb{P}(\{(\omega_{1j_1}, \dots, \omega_{nj_n})\}) = \prod_{i=1}^n p_{ij_i}.$$

*Der so definierte diskrete Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  wird das **Produkt der  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)$**  genannt und das obige  $\mathbb{P}$  **Produktmaß**.*

**Spezialfall:**  $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1) = \dots = (\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbb{P}_n)$ , d.h. n-maliges Wiederholen desselben Experiments.

### Beispiel 6.11

a) **n-maliger Münzwurf:** Kopf = 1, Zahl = 0

$$\Omega_1 = \dots = \Omega_n = \{0, 1\}, \mathbb{P}_1 = \dots = \mathbb{P}_n,$$

$$\mathbb{P}_i(\{\omega_i\}) = \begin{cases} p, & \omega_i = 1, \\ 1 - p, & \omega_i = 0. \end{cases}$$

## Beispiel 6.11 (Forts.)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) &= p^{\text{Anzahl Einsen}} (1-p)^{\text{Anzahl Nullen}} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n \omega_i}\end{aligned}$$

- b) Seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)$  diskrete Wahrscheinlichkeitsräume mit Laplace-Verteilungen  $\mathbb{P}_i$ , dann ist auch die Produktverteilung wieder eine Laplace-Verteilung, denn:

$\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ ,  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ , dann ist

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) \underset{\text{Def. Prod.vert.}}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_i(\{\omega_i\}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{|\Omega_i|} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n |\Omega_i|} = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Umgekehrt folgt aus der obigen Gleichung: Sind die Verteilungen  $\mathbb{P}_i$  auf den einzelnen Komponenten  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$  Laplace-Verteilungen, und definiert man auf dem Produktraum  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  mittels Laplace-Annahme (sofern  $\Omega$  endlich ist), sind die einzelnen Komponenten unabhängig voneinander.

# Zufallsvariablen

## Definition 7.1 (Zufallsvariable)

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine (reellwertige, diskrete) Zufallsvariable ist eine Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

Mit  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$  wird der Wertebereich von  $X$  bezeichnet.

## Satz 7.2 (Verteilung einer Zufallsvariablen)

Durch die Festsetzung

$$\mathbb{P}_X(A) := \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\})$$

wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\mathbb{P}_X$  auf dem Wertebereich  $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$  von  $X$  definiert.  $\mathbb{P}_X$  wird die **Verteilung von  $X$**  oder auch **das Bildmaß von  $\mathbb{P}$  unter der Abbildung  $X$**  genannt.

**Beweis:** Für  $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$  ist  $\mathbb{P}_X(A) = \underbrace{\mathbb{P}(X^{-1}(A))}_{\in \mathcal{P}(\Omega)} \geq 0$ , ferner ist

$$\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X^{-1}(X(\Omega))) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Seien  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{P}(X(\Omega))$  paarweise disjunkt, so gilt weiterhin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \geq 1} \underbrace{X^{-1}(A_i)}_{\text{disjunkt!}}\right) \\ &= \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}_X(A_i)\end{aligned}\quad \square$$

**Notation:** Für die Urbildmenge von  $A \subset \mathbb{R}$  unter  $X$  schreibt man oft auch

$$\{X \in A\} := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

Falls  $A = (-\infty, x]$ , ist  $\{X \leq x\} := \{X \in A\}$  (analog sind  $\{X < x\}$ ,  $\{X \geq x\}$  und  $\{X > x\}$  zu verstehen).

Nach Definition von  $\mathbb{P}_X$  ist dann  $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$ .

Für  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  und  $X^{-1}(x_i) = \omega_i$  ist

$$\mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$



## Beispiel 7.3

- a) Für das zweimalige Werfen eines fairen Würfels ist  
 $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 6\}\}, \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$  (Laplace-Ann.).

Definiere  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$  (Augensumme beider Würfe),  
 dann ist offensichtlich  $X(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$  und

$$\mathbb{P}_X(\{2\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(2)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 2\}) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36},$$

$$\mathbb{P}_X(\{3\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(3))\mathbb{P}(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}, \dots$$

Analog ergibt sich damit die Verteilung  $\mathbb{P}_X$  zu

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}_X(\{k\})$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Das Bildmaß  $\mathbb{P}_X$  ist also im Gegensatz zu  $\mathbb{P}$  keine Laplace-Verteilung mehr!

- b)  $n$ -facher Münzwurf (vgl. Beispiel 6.11 a)), Kopf = 1, Zahl = 0,  
 $\Omega = \{0, 1\}^n$ ,  $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i}$ .

Definiere  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$  (Anzahl Auftreten „Kopf“ in  $n$  Würfeln), dann ist  $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$  und  
 $X^{-1}(k) = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

Da für alle  $\omega \in \Omega$  mit  $\sum_{i=1}^n \omega_i = k$  gilt  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^k (1-p)^{n-k}$  (s.o.), folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(\{k\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(k)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}) \\ &= \#\{\omega \in \Omega \mid \sum_{i=1}^n \omega_i = k\} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = b_{n,p}(\{k\}), \end{aligned}$$

denn es gibt  $\binom{n}{k}$  verschiedene Möglichkeiten,  $k$  Einsen auf  $n$  Plätze zu verteilen (vgl. Satz 4.1 und Bemerkung 4.3).

Die Anzahl des Auftretens von „Kopf“ (und analog von „Zahl“) in  $n$  Münzwürfen ist also binomialverteilt.

**Frage:** Wie verändert sich bzw. wohin strebt die Verteilung von  $X$  aus Beispiel 7.3 b), wenn die Anzahl der Würfe beliebig groß wird ( $n \rightarrow \infty$ ), aber gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit  $p$  für das Auftreten von „Kopf“ immer kleiner wird ( $p = p_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ )?

**Allgemeiner formuliert:** Wenn die Erfolgswahrscheinlichkeit in einem Versuch immer kleiner wird, man den Versuch aber beliebig oft wiederholen kann, wie sieht dann die Verteilung der Anzahl der Erfolge  $X$  aus?

### Satz 7.4 (Poissons Gesetz der kleinen Zahlen)

Falls  $0 < p_n < 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$  (was  $p_n \rightarrow 0$  impliziert!), dann gilt für jedes  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,p_n}(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} =: P_\lambda(\{k\}).$$

Die durch die  $P_\lambda(\{k\})$  auf  $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$  definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Poisson-Verteilung**.

Ist bei einer Binomialverteilung der Parameter  $n$  sehr groß und  $p$  ziemlich klein, kann man somit die (dann schwierig zu berechnenden) Binomialwahrscheinlichkeiten  $b_{n,p_n}(\{k\})$  durch die Poisson-Wahrscheinlichkeiten  $P_\lambda(\{k\})$  (mit  $\lambda = np$ ) approximieren.

## Definition 7.5 (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Die auf einem (diskreten) Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  definierten Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heißen **unabhängig**, falls für jede Auswahl von Ereignissen  $A_1 \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)), A_2 \in \mathcal{P}(X_2(\Omega)), \dots, A_n \in \mathcal{P}(X_n(\Omega))$  gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \in A_i),$$

d.h. die zugehörigen Urbilder  $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$  müssen stets unabhängig sein.

## Satz 7.6

Seien  $X_1, \dots, X_n$  Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit Wertebereichen  $X_i(\Omega) = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Dann sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig genau dann, wenn

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_{ij_i}\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_{ij_i}) \quad \text{für alle } j_1, \dots, j_n.$$

**Anwendung:** Betrachte den  $n$ -fachen Münzwurf aus Beispiel 6.11 a) und 7.3 b) mit  $\Omega = \{0, 1\}^n$ ,  $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i}$ .

Definiere  $X_1, \dots, X_n$  durch  $X_i(\omega) = \omega_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , (Ergebnis des  $i$ -ten Wurfs/ $i$ -te Projektion)

Dann sind die  $X_i$  unabhängig nach Satz 7.6, denn für ein beliebiges  $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_n) \in \Omega$  ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = \omega'_i\}\right) &= \mathbb{P}(\{(\omega'_1, \dots, \omega'_n)\}) = p^{\sum_{i=1}^n \omega'_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega'_i} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = \omega'_i). \end{aligned}$$

Satz 7.6 besagt also insbesondere, dass die Würfe bzw. Projektionen genau dann unabhängig sind, wenn das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  das Produktmaß ist.

## Wartezeitverteilungen

Wir betrachten noch einmal das Münzwurfmodell mit

$$\mathbb{P}(\text{Kopf im } i\text{-ten Wurf}) = \mathbb{P}(X_i = 1) = p < 1 \text{ und } \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p > 0.$$

Nun sei aber die Anzahl der Würfe nicht festgelegt, sondern die Münze wird unabhängig voneinander so oft geworfen, bis das erste Mal „Kopf“ erscheint. Wie sehen der Grundraum und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\mathbb{P}_X$  der „Wartezeit“  $X$  auf das erste Mal „Kopf“ aus?

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{n-1} = 0, \omega_n = 1, n \geq 1\},$$

die Wartezeit ist  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $X((\omega_1, \dots, \omega_n)) = n$ .

Wegen der Unabhängigkeit der Würfe ist

$$\mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = (1 - p)^{n-1} p.$$

Dadurch wird nach Satz 3.2 eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  definiert, denn

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}_X(\{n\}) = \sum_{n \geq 1} (1-p)^{n-1} p = p \sum_{n \geq 0} (1-p)^n \stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)} = 1.$$

Diese Verteilung heißt **geometrische Verteilung**  $\text{Geo}(p)$ .

**Verallgemeinerung:** Man wirft die Münze so lange unabhängig voneinander, bis das  $r$ -te Mal „Kopf“ erscheint ( $r \geq 1$ ). Dann ist  $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0, 1\}, \omega_n = 1, \sum_{i=1}^n \omega_i = r, n \geq 1\}$ , und die Wartezeit ist  $X : \Omega \rightarrow \{r, r+1, \dots\}$ ,  $X((\omega_1, \dots, \omega_n)) = n$ .

Sei  $A_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{0, 1\}, \omega_n = 1, \sum_{i=1}^n \omega_i = r\}$  für ein festes  $n \geq 1$ , dann gilt wegen der Unabhängigkeit der Würfe für alle  $\omega \in A_n$   $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p^r(1-p)^{n-r}$  ( $r$  Erfolge und  $n-r$  Misserfolge in  $n$  Würfen).

$$\implies \mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(A_n) = |A| \cdot p^r(1-p)^{n-r} = \binom{n-1}{r-1} p^r(1-p)^{n-r},$$

denn der  $r$ -te Erfolg muss im letzten ( $n$ -ten) Wurf auftreten, die übrigen  $r-1$  Erfolge können beliebig auf die ersten  $n-1$  Würfe verteilt werden, wofür es nach Satz 4.1 und Bemerkung 4.3  $\binom{n-1}{r-1}$  Möglichkeiten gibt.

Diese auf  $(\{r, r+1, \dots\}, \mathcal{P}(\{r, r+1, \dots\}))$  definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung wird **Pascalsche Verteilung** genannt.

In der Literatur findet man auch oft die auf  $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$  durch  $\mathbb{P}(\{k\}) = \binom{n+k-1}{k} p^n(1-p)^k$  definierte **negative Binomialverteilung**  $BN(n, p)$ , die die Wahrscheinlichkeit von  $n$  Erfolgen in  $n+k$  Würfen ( $k \geq 0$ ) angibt.

## Erwartungswert und Varianz

Im Folgenden sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit Wertebereich  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ .

### Definition 8.1 (Erwartungswert und Varianz)

a) Falls  $\sum_{i \geq 1} |x_i| \cdot \mathbb{P}(X = x_i) < \infty$ , heißt

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{i \geq 1} x_i \cdot \mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \sum_{i \geq 1} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \stackrel{(*)}{=} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \mathbb{P}(\{\omega\})$$

der **Erwartungswert von  $X$** .

b) Für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert man analog

$$\mathbb{E}[f(X)] := \sum_{i \geq 1} f(x_i) \mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \sum_{i \geq 1} f(x_i) \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}),$$

sofern  $\sum_{i \geq 1} |f(x_i)| \mathbb{P}(X = x_i) < \infty$ .

Speziell für  $f(x) = x^r$  bzw.  $f(x) = |x|^r$  heißt  $\mathbb{E}[X^r]$  ( $\mathbb{E}[|X|^r]$ )  **$r$ -tes (absolutes) Moment von  $X$** .



## Definition 8.1 (Forts.)

- c) Gilt  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ , so heißt die *mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert*

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

die **Varianz von  $X$**  (hier ist  $f(x) = (x - \mathbb{E}[X])^2$ ).

Die Wurzel  $\sigma_X := \sqrt{\text{Var}(X)}$  aus der Varianz wird **Standardabweichung** genannt.

## Bemerkung 8.2

- a) Die mit (\*) bezeichnete Gleichung in Teil a) von Definition 8.1 wird auch als *Transformationssatz* bezeichnet. Sie folgt ganz einfach aus der Tatsache, dass  $X(\omega) \equiv x_i$  für  $\omega \in \{X = x_i\}$  und  $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{\omega \in \{X=x_i\}} \mathbb{P}(\{\omega\})$ .
- b) Ist  $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  und  $\mathbb{P}_X(\{x_i\}) = \frac{1}{n}$  für alle  $1 \leq i \leq n$  (Laplace- Verteilung), so ist der Erwartungswert  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  das arithmetische Mittel der Werte von  $X$ . Allgemeiner ist der Erwartungswert ein gewichtetes Mittel der Werte von  $X$ , wobei die Gewichte die Elementarwahrscheinlichkeiten von  $\mathbb{P}_X$  sind.

- c) Nach Definition 8.1 hängen  $\mathbb{E}[X]$ ,  $\text{Var}(X)$  und  $r$ -te (absolute) Momente nur von der Verteilung  $\mathbb{P}_X$  der Zufallsvariablen ab. Sie sind Kenngrößen der Verteilung  $\mathbb{P}_X$ .

### Satz 8.3 (Eigenschaften des Erwartungswertes)

Seien  $X, Y$  Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit existierendem Erwartungswert, dann gilt:

- a) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , so ist  $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$  (Linearität).
- b) Gilt  $X \geq Y$  (punktweise, d.h.  $X(\omega) \geq Y(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ ), so ist  $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ . Insbesondere gilt  $\mathbb{E}[X] \geq 0$ , falls  $X \geq 0$ .
- c) Für alle  $A \in \mathcal{A}$  ist  $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$ .

### Satz 8.4 (Jensensche Ungleichung)

Sei  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion, so dass  $\mathbb{E}[X]$  und  $\mathbb{E}[f(X)]$  existieren, dann gilt

$$\mathbb{E}[f(X)] \geq f(\mathbb{E}[X]).$$

Ist die Funktion  $f$  konkav, gilt  $\mathbb{E}[f(X)] \leq f(\mathbb{E}[X])$ .

## Satz 8.5 (Eigenschaften der Varianz)

Ist  $X$  eine Zufallsvariable auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ , dann gilt:

- a)  $0 \leq \text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 < \infty$ .
- b)  $\text{Var}(X) = \text{Var}(X + c)$  für alle  $c \in \mathbb{R}$  (Translationsinvarianz).  
Insbesondere ist  $\text{Var}(X) = \text{Var}(X - \mathbb{E}[X])$ .
- c)  $\text{Var}(cX) = c^2 \cdot \text{Var}(X)$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ .

## Beispiel 8.6

- a) Sei  $X(\Omega) = \{k, \dots, \ell\}$  für  $k, \ell \in \mathbb{N}$ ,  $k < \ell$  und  $\mathbb{P}_X(\{i\}) = \frac{1}{\ell - k + 1}$  für  $i \in \{k, \dots, \ell\}$  (Laplace-Verteilung). Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &\stackrel{\text{Linearität}}{=} \mathbb{E}[X - k] + k = \frac{1}{\ell - k + 1} \cdot \sum_{i=0}^{\ell - k} i + k \\ &= \frac{(\ell - k)(\ell - k + 1)}{2(\ell - k + 1)} + k = \frac{\ell - k}{2} + k = \frac{\ell + k}{2}, \end{aligned}$$

wobei wir die Summenformel  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$  benutzt haben.

Für die Varianz erhalten wir aus Satz 8.5 b) und a), dass  $\text{Var}(X) = \text{Var}(X - k) = \mathbb{E}[(X - k)^2] - (\mathbb{E}[X - k])^2$ . Nun ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X - k)^2] &= \frac{1}{\ell - k + 1} \cdot \sum_{i=0}^{\ell-k} i^2 = \frac{(\ell - k)(\ell - k + 1)(2\ell - 2k + 1)}{6(\ell - k + 1)} \\ &= \frac{(\ell - k)(2\ell - 2k + 1)}{6} = \frac{(\ell - k)^2}{3} + \frac{\ell - k}{6},\end{aligned}$$

denn  $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Ferner ist nach der vorherigen Rechnung  $\mathbb{E}[X - k] = \frac{\ell - k}{2}$  und damit

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \frac{(\ell - k)^2}{3} + \frac{\ell - k}{6} - \frac{(\ell - k)^2}{4} = \frac{(\ell - k)^2}{12} + \frac{\ell - k}{6} \\ &= \frac{(\ell - k)^2 + (2\ell - 2k)}{12} = \frac{(\ell - k)(\ell - k + 2)}{12}.\end{aligned}$$