Zusatzblatt
„Stochastik für Studierende der Informatik“

https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ss-2019/vorlesung-stoch-inf-ss-2019

Sommersemester 2019

Anmerkung: Diese Aufgabensammlung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit (im Sinne von Abdeckung der in der Vorlesung behandelten Themen) und soll lediglich zum Testen des Verständnisses zu einigen Theme der Vorlesung dienen. Als beste Übung für die Klausur empfehle ich nach wie vor die während des Semesters gestellten Übungsaufgaben.

Aufgabe 1

Es sei Ω ein diskreter Grundraum und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge von Ω. Außerdem seien von den Ereignissen $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ folgende Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(A \cup B) = \frac{11}{20}, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{20}, \quad P(B \setminus C) = \frac{1}{5}$$

Welche der nachstehenden Aussagen ist richtig?

(a) $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$,

(b) $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$,

(c) $P(B) = \frac{3}{20}$ und $P(A \cap B) = \frac{19}{20}$,

(d) $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(A \cap B) = \frac{6}{5}$

Aufgabe 2

Von einer Gruppe von Personen, die aus 3 Frauen und 3 Männern besteht, soll ein Gruppenfoto gemacht werden.

(a) Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es, wenn die 6 Personen nebeneinander stehen?

(b) Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es, wenn links die drei Männer und rechts die drei Frauen nebeneinanderstehen sollen?

(c) Bei den Personen handelt es sich um 3 Ehepaare. Wie viele unterschiedliche Fotos gibt es, auf denen die 6 Personen nebeneinanderstehen, wobei die Ehepartner aber nebeneinanderstehen?

Aufgabe 3

Ein Freemail-Anbieter möchte zum Schutz seiner Kunden einen Spam-Filter anbieten. Dazu wird zunächst eine Untersuchung durchgeführt, die typische Eigenschaften von Spam-Mails bestimmen soll:

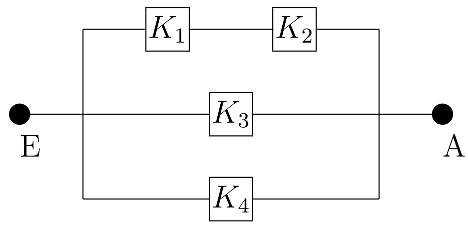
Es wurde festgestellt, dass Mails mit "XXX" in der Betreffzeile zu 95% Spam-Mails sind. Mails bei denen "XXX" nicht in der Betreffzeile auftaucht aber "Gewinnchance" im Mailtext steht, sind zu 68% Spam-Mails. Unter den Mails, bei denen weder "XXX" in der Betreffzeile noch "Gewinnchance" im Mailtext steht, sind noch 18% Spam-Mails.

Insgesamt enthalten 82% der Mails weder "XXX" in der Betreffzeile noch "Gewinnchance" im Mailtext, bei 13% steht zwar "Gewinnchance" im Text, aber nicht "XXX" in der Betreffzeile und bei den übrigen 5% steht "XXX" in der Betreffzeile.

Gegeben eine Spam-Mail liegt vor. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Spam-Mail weder "XXX" in der Betreffzeile noch "Gewinnchance" im Text stehen hat?

Aufgabe 4

Das unten skizzierte System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft, d.h. es fällt aus, falls beide Komponenten K_3 und K_4 sowie zusätzlich mindestens eine der Komponenten K_1 und K_2 ausfallen.



(a) Unter der Annahme unabhängiger Defekte an den einzelnen Komponenten berechne man die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb einer gewissen Betriebsdauer das System ausfällt, wenn mit Wahrscheinlichkeit $p_i = \frac{i}{5}$ innerhalb dieses Zeitraums an der Komponente K_i, $1 \leq i \leq 4$, ein Defekt auftritt.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das Bauelement K_3, wenn Sie wissen, dass das System funktioniert, also ein Weg von E nach A existiert? Die p_i seien dabei wie in Aufgabenteil (a).

(c) Nehmen Sie nun an, dass sie wissen, dass K_3 kaputt ist und das System funktioniert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert dann K_4? Die übrigen p_i seien wie in Aufgabenteil (a).

Aufgabe 5
Ein fairer Würfel werde n Mal geworfen. Die Zufallsvariable Y_n bezeichne die kleinste erhaltene Augenzahl in n Würfen.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[Y_2]$.

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] = 1$.
Hinweis: Schätzen Sie $\mathbb{E}[Y_n]$ nach oben durch eine Linearkombination aus $\mathbb{P}(Y_n = 1)$ und $\mathbb{P}(Y_n \geq 2)$ ab und überlegen Sie sich, wie sich der letzte Term für $n \to \infty$ verhält.

Aufgabe 6
Sie würfeln abwechselnd mit Ihrem Gegenspieler. Sie starten mit einem Anfangskapital von 1 Euro das folgende Spiel gegen Ihren Gegner, der mit 2 Euro startet. Jede Runde gewinnen Sie einen Euro von Ihrem Gegner, wenn eine der Zahlen 1, 2, 3, 4 erscheint. Bei 5 und 6 verlieren Sie einen Euro an Ihren Gegner. Sie haben gewonnen, falls Ihr Gegner kein Geld mehr hat, und verloren, falls Sie keines mehr haben.

(a) Skizzieren Sie den Übergangsgraph und geben Sie die Übergangsmatrix der Markovkette an.

(b) Was ist Ihre Gewinnwahrscheinlichkeit?

Aufgabe 7
Seien $n \in (0, \infty)$ und $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige, $N(\frac{\vartheta}{2}, \vartheta^3)$-verteilte Zufallsvariablen. Betrachten Sie den durch

$$\widehat{\vartheta}_n = \frac{1}{n-1}\left(X_1 + \left(\sum_{i=2}^{n-1} 2X_i\right) + X_n\right)$$

definierten Schätzer für $\vartheta \in (0, \infty)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\widehat{\vartheta}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\vartheta \in (0, \infty)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\widehat{\vartheta}_n$ ein konsistenter Schätzer ist.

Aufgabe 8

(a) Bei der Züchtung einer gewissen Blumensorte ergeben sich rote und weiße Exemplare. Bei einer dieser Farben handelt es sich um die dominante Farbe, die nach den Mendelschen Vererbungsregeln mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{3}{4}$ auftritt. Ein Kreuzungsversuch führt zu 7 Nachkommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit irrt man sich, wenn man die häufiger auftretende Farbe für dominant hält?

(b) Um zu testen, ob in einer Lieferung von 100 Computerakkus höchstens 10 defekt sind, prüft ein Händler jedes Mal 10 zufällig ausgewählte Akkus und nimmt die Lieferung nur dann an, wenn alle 10 in Ordnung sind. Beschreiben Sie das Verhalten des Händlers testtheoretisch (Nullhypothese, Ablehnbereich etc.) und erläutern Sie, was bei einem Fehler 1. Art und einem Fehler 2. Art passiert. Was ist die Verteilung der verwendeten Teststatistik?