Übungen zur Vorlesung
"Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 08.07.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Als Alternative zur Varianz $\mathrm{Var}(X)$, die bekanntlich die mittlere quadratische Abweichung einer Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert angibt, betrachtet man gelegentlich auch die *mittlere absolute Abweichung* $\mathbb{M}[X] := \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|]$ einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{M}[X]$ für eine exponentialverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{M}[X]$ für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Poisson-Parameter $\lambda \in \mathbb{N}$.

Hinweise: Um den Absolutbetrag loszuwerden, teilen Sie die auszurechnende Summe in zwei Teile $\sum_{k=0}^{\lambda-1}(\lambda - k) \cdot \mathbb{P}(X = k) + \sum_{k=\lambda}^{\infty}(k - \lambda) \cdot \mathbb{P}(X = k)$ auf und ergänzen die unendliche Summe rechts so, dass Sie Ihnen bekannt vorkommt und Sie deren Wert angeben können; die Ergänzung müssen Sie natürlich danach auch wieder abziehen, um das Ergebnis nicht zu verfälschen! Die dann übrig bleibenden endlichen Summen lassen sich gut ausrechnen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise unkorrelierte, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mu_n := \mathbb{E}[X_n]$, $\sigma_n^2 := \mathrm{Var}(X_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0$.
Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)\right| \geq \varepsilon\right] = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

b) Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1$ und

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n \ln n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \ln n}, \qquad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a): (X_n) genügt dem schwachen Gesetz großer Zahlen, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| \geq \varepsilon\right] = 0.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $Y_n \sim B(n, p_n)$ und $\lim_{n\to\infty} np_n = 0$. Zeigen Sie, dass $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass die Inklusion $\{|Y_n| \geq \epsilon\} \subset \{|Y_n - np_n| \geq \epsilon/2\}$ für genügend große n gilt.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

An einen Server werden 10.000 Anfragen gesendet, wovon jede (unabhängig von den anderen) mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{3}{4}$ beantwortet wird. Bestimmen Sie eine möglichst kleine Zahl N, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% die Anzahl der beantworteten Anfragen im Intervall $[7500 - N, 7500 + N]$ liegen. Verwenden Sie hierfür einmal die Tschebychev-Ungleichung und einmal den zentralen Grenzwertsatz.