

Übungen zur Vorlesung “Stochastik für Studierende der Informatik“

Blatt 1

Abgabetermin: Montag, 06.05.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Es werden drei faire Würfel gleichzeitig geworfen.

- (a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} für dieses Zufallsexperiment an.

Ein französischer Edelmann namens Chevalier de Méré wunderte sich einmal Blaise Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit drei Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet habe als die Augensumme 12, obwohl doch 11 durch die Kombinationen $6-4-1$, $6-3-2$, $5-5-1$, $5-4-2$, $5-3-3$, $4-4-3$ und die Augensumme 12 durch ebenso viele Kombinationen erzeugt werde.

- (b) Durch welche Kombinationen wird die 12 dargestellt und was ist der Fehler in de Mérés Argument?
- (c) Geben Sie die Ereignisse *Augensumme 11* und *Augensumme 12* als Teilmengen des Grundraums an.
- (d) Berechnen Sie die korrekten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- (a) Zeigen Sie die *Siebformel* für zwei Mengen $A, B \subset \Omega$, welche gegeben ist durch

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- (b) Folgern Sie durch vollständige Induktion die Siebformel für Mengen $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \right).$$

Aufgabe 3

(2 Punkte)

Von 1000 befragten Studierenden der Informatik gaben 409 an, eine separate Festplattenpartition auf ihrem Rechner zur Datensicherung zu verwenden, 724 nutzen dazu einen USB-Stick, und 504 sichern ihre Daten in der Cloud. 317 machen sowohl auf der Festplatte als auch auf dem USB-Stick eine Datensicherung, 388 auf dem USB-Stick und in der Cloud, 295 auf der Festplatte und in der Cloud. 224 Studierende gehen auf Nummer Sicher und nutzen alle drei Möglichkeiten zur Datensicherung.

Wie viele Leichtsinnige gab es unter den 1000 Studierenden, die gar kein Backup ihrer Daten machen?

(bitte wenden)

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Sei L_n eine geordnete Liste mit $2^n - 1$ paarweise verschiedenen Einträgen ($n \in \mathbb{N}$). Wir möchten untersuchen, wo ein Element A in L_n vorkommt. Dabei gehen wir wie folgt vor (binäre Suche): die Liste wird halbiert und das mittlere Element M_1 wird mit dem gesuchten Element A verglichen. Es können drei Fälle auftreten (man beachte, dass die Einträge geordnet sind):

- 1.) $M_1 = A$: Das gesuchte Element ist in der Liste L_n enthalten und der Algorithmus bricht ab.
 - 2.) $M_1 < A$: Man verfährt wie oben mit der ersten Hälfte der Liste.
 - 3.) $M_1 > A$: Man verfährt wie oben mit der zweiten Hälfte der Liste.
-
- (a) Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} für dieses Zufallsexperiment an.
 - (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man das gesuchte Element A in genau k Schritten?
 - (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man das gesuchte Element A in weniger oder gleich k Schritten?
 - (d) Zeigen Sie: $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$.