Übungen zur Vorlesung
"Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 11

Abgabetermin: Montag, 22.07.2019, bis 10:15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

In zwei Urnen sind 3 weiße und 3 schwarze Bälle derart verteilt, dass jede Urne 3 Bälle enthält. Es wird bei jedem Schritt ein Ball aus jeder Urne gezogen und anschließend vertauscht wieder zurückgelegt. Sei X_n die Anzahl der weißen Bälle in der linken Urne zur Zeit n.

(a) Geben Sie die Übergangsmatrix $P = (P_{ij})_{0\le i,j\le 3} = (\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i))_{0\le i,j\le 3}$ der Markov-Kette $(X_n)_{n\ge 0}$ an.

(b) Untersuchen Sie, ob diese Markov-Kette irreduzibel und/oder aperiodisch ist.

(c) Untersuchen Sie, ob diese Markov-Kette eine stationäre Verteilung besitzt. Falls ja, berechnen Sie diese.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_5$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Es werden die folgenden Schätzstatistiken betrachtet.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)\\
T_2 &= X_1 + X_2\\
T_3 &= \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5\\
T_4 &= \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)
\end{aligned}$$

Welche dieser Schätzfunktionen sind unverzerrt für μ? Berechnen Sie für die unverzerrten Schätzer jeweils die mittlere quadratische Abweichung und erläutern Sie, mit welchem Schätzer Sie μ schätzen würden.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die Straßenbahnlinie 4, mit der Sie täglich fahren, kommt tagsüber regelmäßig alle θ Minuten, wobei Ihnen θ unbekannt ist. Sie gehen nun n Tage lang zu einem zufälligen Zeitpunkt zur Haltestelle und notieren sich Ihre Wartezeiten $X_1, ..., X_n$ bis zur Ankunft der Bahn. Zeigen Sie, dass

$$T := 2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ein unverzerrter Schätzer für θ ist, und berechnen Sie die erwartete quadratische Abweichung

$$E_\theta[(T-\theta)^2] = \mathrm{Var}_\theta[T].$$

Hinweis: Die Aufgabenstellung ist so zu verstehen, dass $X_1, ..., X_n$ unabhängige, auf $[0, \theta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, geometrisch verteilte Zufallsgrößen ($X_i \sim \text{Geo}(p)$) mit Zähldichte

$$\mathbb{P}[X_1 = k] = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{p}_{ML}$ für p.

(b) Ist dieser Schätzer unverzerrt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

Die Rotphase einer Ampel auf Ihrem Weg zur Uni dauert θ Sekunden. Jedes Mal, wenn sie an der roten Ampel warten müssen, stoppen Sie die Wartezeit, bis Grün erscheint, und erhalten so Stichproben $X_1, \ldots, X_n$. Zeigen Sie, dass unter der Annahme, dass die gestoppten Zeiten X_i unabhängige und auf $[0, \theta]$ gleichverteilte Zufallsvariablen sind, der Maximum-Likelihood-Schätzer für θ durch

$$\widehat{\theta}_{ML} = \max(X_1, \ldots, X_n)$$

gegeben ist. Zeigen Sie ferner durch Berechnung von $\mathbb{E}[\widehat{\theta}_{ML}]$, dass dieser Schätzer nicht unverzerrt ist.

Hinweise: Zur Berechnung des Erwartungswertes benötigen Sie die Dichte der Verteilung von $\widehat{\theta}_{ML}$. Berechnen Sie dazu zunächst $\mathbb{P}(\widehat{\theta}_{ML} \leq x)$, indem Sie sich überlegen, was für die X_i gelten muss, wenn ihr Maximum $\leq x$ ist, und deren Unabhängigkeit ausnutzen. Die Dichte erhalten Sie dann durch Ableiten des erhaltenen Ausdrucks nach x.