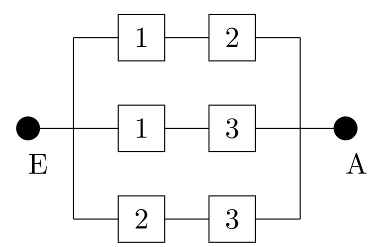
Übungen zur Vorlesung
"Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 28.05.2018, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Gegeben ist das abgebildete Netzwerk mit jeweils zwei gekoppelten Elementen vom Typ 1, 2, 3. Das System funktioniert, wenn ein Weg von E nach A existiert, der nur über funktionstüchtige Elemente verläuft. Alle Elemente unterschiedlichen Typs funktionieren unabhängig voneinander. Die Elemente gleichen Typs fallen immer gleichzeitig aus. Beide Elemente vom Typ i, $i \in \{1, 2, 3\}$, sind mit Wahrscheinlichkeit p_i intakt und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p_i$ defekt, wobei $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.4$ und $p_3 = 0.3$ ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System?



Aufgabe 2 (2 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige diskrete $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen und $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ beliebige Funktionen. Zeigen Sie, dass auch $f_1(X_1), \ldots f_n(X_n)$ unabhängig sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Beweisen Sie für $k, m, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m + n$ die Identität

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

(b) Es seien $X_1 \sim B(n_1, p)$ und $X_2 \sim B(n_2, p)$ unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen mit $p \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Summe $X_1 + X_2$ ebenfalls binomialverteilt ist mit den Parametern $n_1 + n_2$ und p.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei folgender Algorithmus:

Algorithm 1 FindMax

INPUT: Unsortierter Vektor von n Zahlen $x_1, ..., x_n$
OUTPUT: $\max(x_1, ..., x_n)$

max $\leftarrow x_1$
for $i \leftarrow 2, ..., n$ **do**
  if $x_i >$ max **then** max $\leftarrow x_i$
  end if
end for

Berechnen Sie die erwartete Anzahl an Überschreibungen max $\leftarrow i$ bei zufälligem Input $(\sigma(1), ..., \sigma(n))$ für $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Hierbei bezeichne $\mathcal{S}_n$ die Menge der Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$.

Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Indikator-Zufallsvariable, sodass die Anzahl an Überschreibungen als Summe dieser Zufallsvariablen darstellbar ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Wir werfen n Mal unabhängig voneinander eine p-Münze, das heißt eine Münze, bei der mit Wahrscheinlichkeit p eine 0 und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p = q$ eine 1 fällt. Dies liefert uns ein Ergebnis $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Für einen solchen Vektor definieren wir die Anzahl der Runs $r(X)$ durch

$$r(X) := 1 + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \neq X_{i-1}\}},$$

das heißt es gilt zum Beispiel $r((0,0,0,1,0,1,1,0,1,1,1)) = 6$. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $R = r(X)$.

Aufgabe 6 (4 Bonuspunkte)

30 Kugeln, die entweder die Farbe rot oder die Farbe schwarz haben, werden auf zwei Urnen verteilt, wobei jede Urne mindestens eine schwarze als auch mindestens eine rote Kugel enthält. Zieht man anschließend aus beiden Urnen jeweils eine Kugel, so sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% beide gezogenen Kugeln rot.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln stattdessen schwarz sind? Ist die Antwort eindeutig, oder gibt es mehrere Möglichkeiten?

(bitte wenden)

Aufgabe 7 (4 Bonuspunkte)

Zehn Räuber haben gemeinsam einen Safe geknackt und verstauen das gestohlene Geld in einem Versteck in einer großen Truhe.
Die Räuber misstrauen einander. Daher beschließen sie, die Truhe so zu verschließen, dass nur vier beliebige Räuber gemeinsam die Truhe öffnen können. Sind weniger als vier Räuber anwesend, darf sich die Truhe nicht aufschließen lassen.
Wie viele verschiedene Vorhängeschlösser müssen an der Truhe angebracht werden, damit das gelingt? Und wie viele Schlüssel werden benötigt?

Hinweis: Zwei Schlösser sind offenbar zu wenig, weil dann ja nicht ausgeschlossen werden kann, dass zwei zufällig ausgewählte Räuber gemeinsam die beiden erforderlichen Schlüssel besitzen und zu zweit an das Geld kommen. Man beachte auch, dass jeder Räuber mehr als einen Schlüssel erhalten kann.