Übungen zur Vorlesung "Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 14.05.2018, bis 10.15 Uhr in den Briefkästen im Gebäude 051
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird viermal geworfen. X_i sei das Ergebnis des i-ten Wurfes. Weiter definieren wir die Zufallsvariable $X := \min\{X_1, \ldots, X_4\}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir betrachten folgendes Spiel: Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Zahl fällt. Tritt dies nach dem ersten Wurf auf, erhalten Sie einen Euro. Geht das Spiel zwei Würfe lang, erhalten Sie zwei Euro und so weiter, das heißt tritt Zahl im k-ten Wurf auf, erhalten Sie 2^{k-1} Euro. Die Auszahlung sei mit der Zufallsvariablen X bezeichnet. Die Frage ist nun, wie viel Sie bereit sein sollten, für die Teilnahme an diesem Spiel zu bezahlen.

(a) Eine erste Herangehensweise wäre es, den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ des Gewinns zu bezahlen. Berechnen Sie diesen.

Um das in (a) auftretende Paradoxon zu lösen, nutzen Ökonomien die sogenannte *Erwartungsnutzentheorie*. Hierfür wählt man sich eine Nutzenfunktion $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, die typischerweise konkav ist, was die anschauliche Begründung darin hat, dass man davon ausgeht, dass der Nutzen eines zusätzlichen Euros geringer ist, je mehr Geld man bereits besitzt (Ökonomen sprechen von *abnehmendem Grenznutzen*) und berechnet den erwarteten Nutzen $\mathbb{E}[u(X)]$ des Gewinns. Der maximale Betrag B, den man für die Teilnahme zu zahlen bereit ist, ist dann durch die Gleichung $u(B) = \mathbb{E}[u(X)]$ charakterisiert.

(b) Es sei $u(x) = \ln(x)$. Berechnen Sie den erwarteten Nutzen $\mathbb{E}[\ln(X)]$ und den maximalen Teilnahmebetrag B in obigem Spiel.

(c) Kann man die Auszahlung des Spiel so abändern, dass das Paradoxon aus (a) auch in dem Falle des Erwartungsnutzens aus Aufgabenteil (b) auftritt?

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die Familie der *Panjer-Verteilungen* besteht aus allen Verteilungen auf $\mathbb{N}_0$, sodass für Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a + b \geq 0$, folgende Rekursionsvorschrift für die Zähldichten $p_k := \mathbb{P}(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt:

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad \text{für } k \geq 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X^n] = \sum_{k \geq 0} (k+1)^n \left(a + \frac{b}{k+1}\right) p_k$ gilt.

(b) Folgern Sie aus (a), dass

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{1-a} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir erinnern an die Definition der Panjer-Verteilung aus Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Binomialverteilung $B(n, p)$ um eine Panjer-Verteilung handelt, und folgern Sie aus Aufgabenteil 3(b) Erwartungswert und Varianz einer solchen.

(b) Eine Zufallsvariable der Panjer-Verteilung zu den Parametern $a = 0$ und $b = \lambda$ heißt *Poisson-verteilt* mit Parameter λ. Zeigen Sie

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

was auch der üblichen Definition der Poissonverteilung entspricht. Bestimmen Sie außerdem Erwartungswert und Varianz einer Poisson-verteilten Zufallsvariable X.