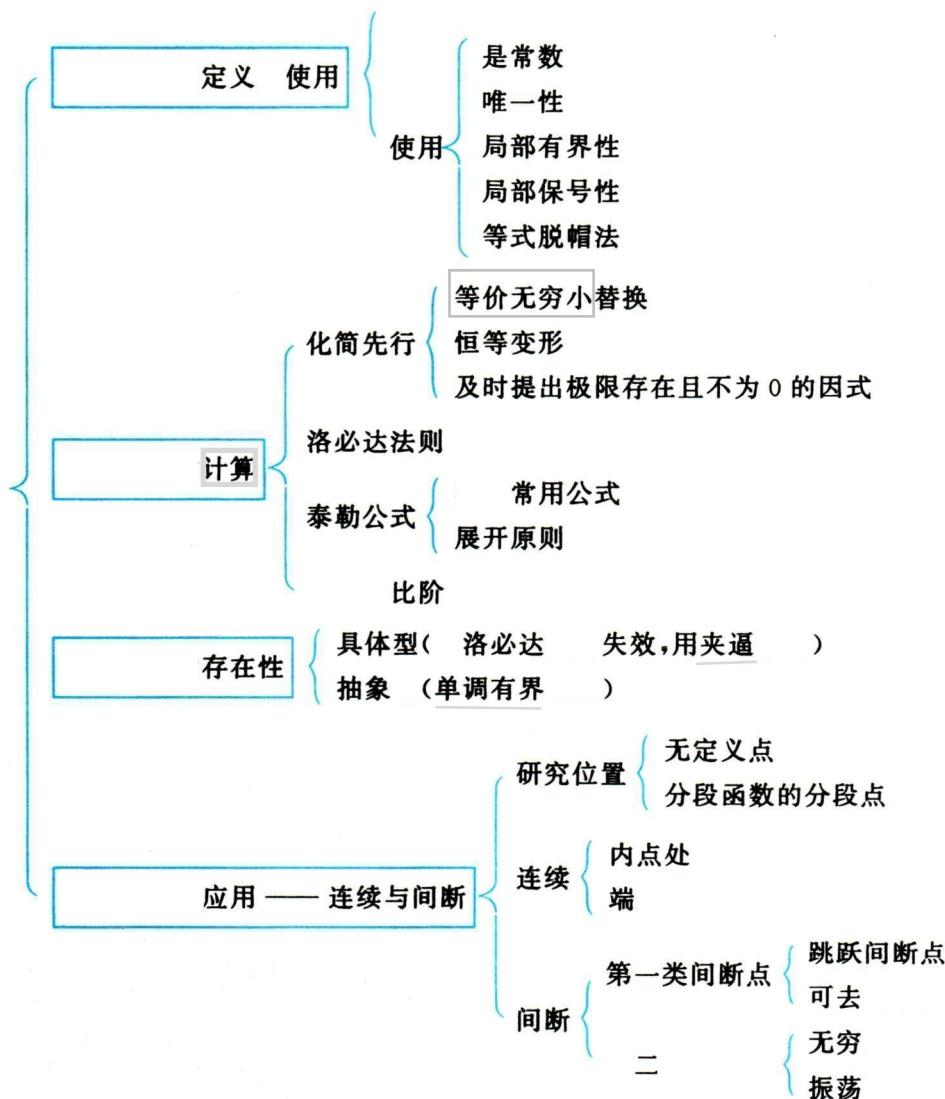
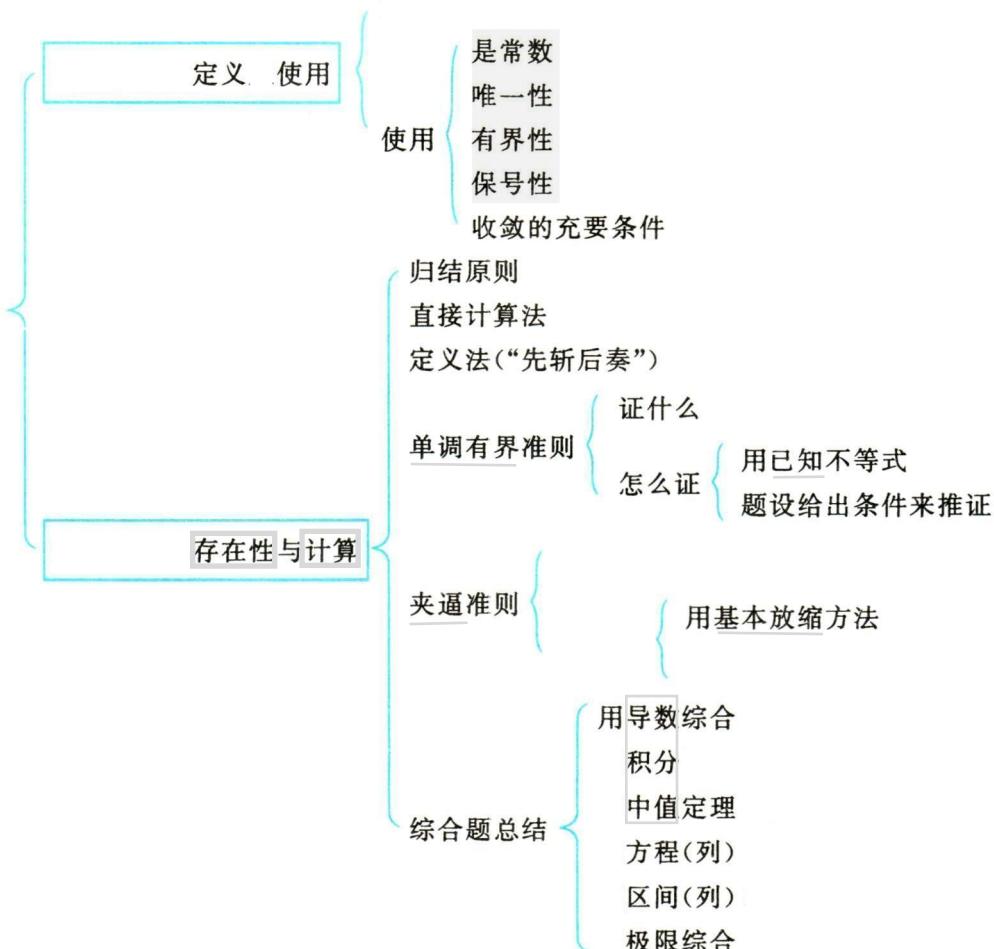


第1讲 函数极限与连续



第2讲 数列极限



第3讲

一元函数微分学的概念

定义(导数在一点的问题)

分段函数(或含绝对值函数)在分段点

抽象函数在一点
特指点 x_0
泛指点 x

四则运算中的特殊点

太复杂的函数
 $f = f_1 + f_2$
 $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n$
求导公式无定义的点

微分

定义

可微的充要条件

一阶微分形式的不变性

第4讲

一元函数微分学的计算

基本求导公式

复合

隐

反

分段

(含绝对值)

{ 在分段点用导数定义求导(定义法)
在非分段点用导数公式求导(公式法)

对数

幂指

参数方程

高阶导数

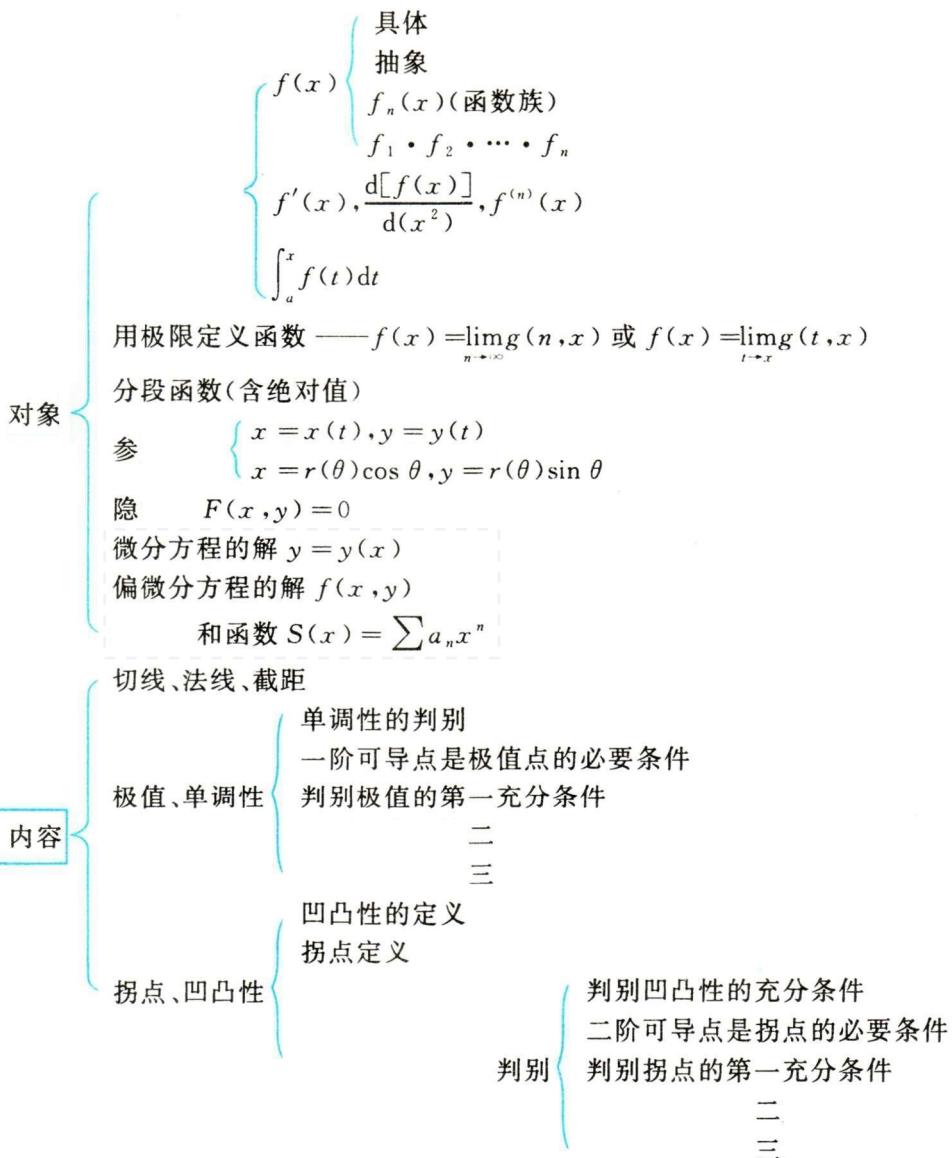
归纳法

莱布尼茨公式

泰勒展开式

第5讲

一元函数微分学的应用（一） ——几何应用



极值点与拐点的重要结论

渐近线 { 铅直渐近线

 水平

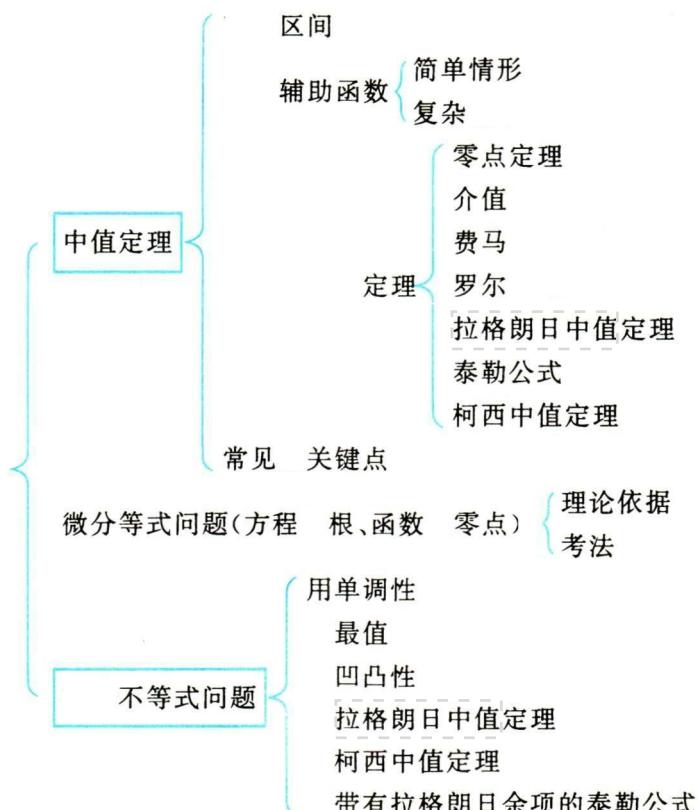
 斜

最值(值域) { 求区间 $[a,b]$ 上连续函数的最大值和最小值
 (a,b) 内 最值或者取值范围

曲率 曲率半径

第6讲

一元函数微分学的应用（二） ——中值定理、微分等式与 微分不等式



第7讲

一元函数微分学的应用（三） ——物理应用

物理应用

——以“ A 对 B 的变化率”为核心写 $\frac{dA}{dB}$ 的表达式

第8讲

一元函数和力学的概念与性质

奇偶性、周期性

7条关系

积分比大小

用公式或几何意义
用保号性 { 看正负作差

定义

基本形 (凑成 $\frac{i}{n}$) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{1-0}{n}i\right) \frac{1-0}{n} = \int_0^1 f(x) dx$
 $= \sum_{i=0}^{n-1}$

放缩 (凑不成 $\frac{i}{n}$)

夹逼准则
放缩后再凑 $\frac{i}{n}$

变量 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(0 + \frac{x-0}{n}i\right) \frac{x-0}{n} = \int_0^x f(t) dt$

反常积分的判敛

{ 概念
判别

第9讲

一元函数积分学的计算

基本积分公式

不定

计算

凑微分法

换元法

分部积分法

有理函数的积分

定义

思想

方法

对称区间上的积分问题

周期性下

区间再现下

华里士公式

定积分分部积分法中的“升阶”“降阶”问题

分段函数的定积分

求分段函数的变限积分

直接求导型

换元

拆分

换序型

变限

反常

第10讲

一元函数积分学的应用（一）

——几何应用

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \\ f_n(x) \text{ (函数族)} \\ f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \\ f'(x), \frac{d[f(x)]}{d(x^2)}, f^{(n)}(x) \\ \int_a^x f(t) dt \end{array} \right.$$

用极限定义函数 —— $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(n, x)$ 或 $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} g(t, x)$

对象 分段 (含绝对值)

参 方 $\begin{cases} x = x(t), y = y(t) \\ x = r(\theta) \cos \theta, y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$

隐 $F(x, y) = 0$

微分方程 解 $y = y(x)$

偏微分方程 解 $f(x, y)$

和函数 $S(x) = \sum a_n x^n$

面积

旋转体体积

平均值

平面曲线 弧长

旋转曲面 面积(侧面积)

“平面上的曲边梯形” 形心坐标公式

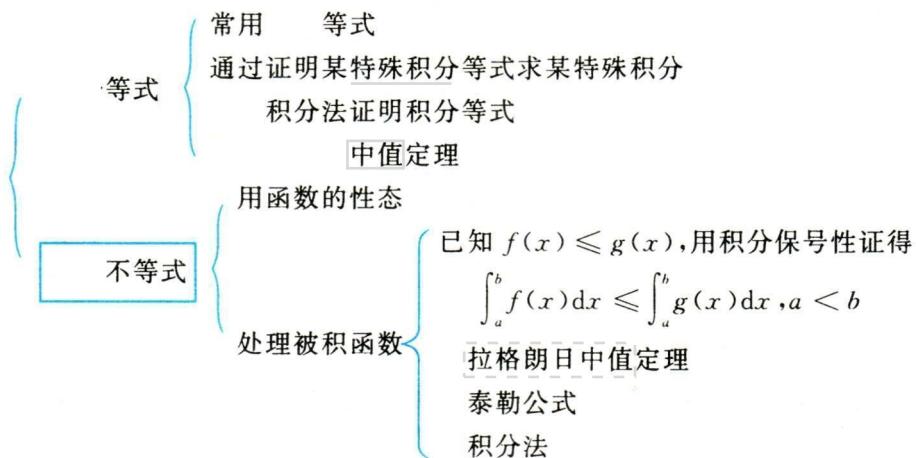
平行截面面积为已知 立体体积

内容

第11讲

一元函数积分学的应用（二）

——积分等式与积分不等式



第12讲

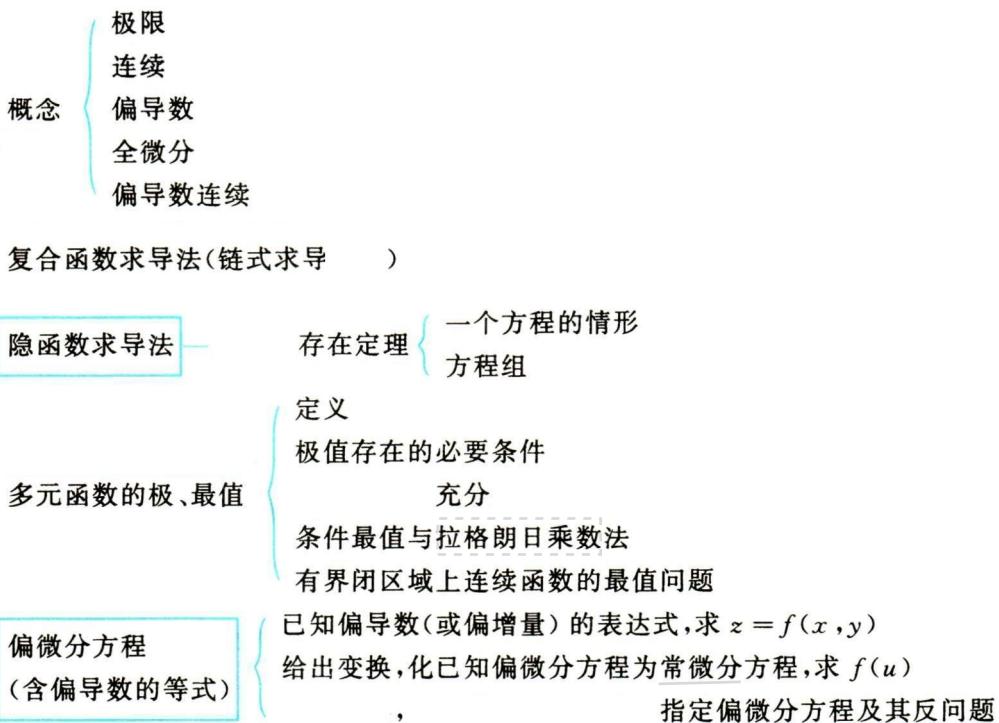
一元函数积分学的应用（三）

——物理应用与经济应用

微元法

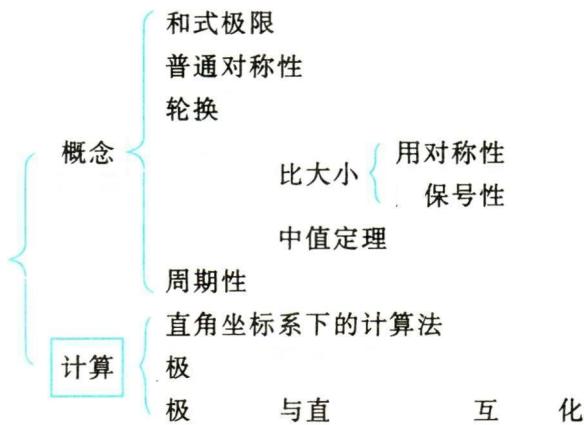
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{位移大小} = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \\ \text{总路程} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt \\ \text{变力沿直线做功} = W = \int_a^b F(x) dx \\ \text{压力} = P = \rho g \int_a^b x [f(x) - h(x)] dx \\ \text{质心} = \bar{x} = \frac{\int_a^b \bar{x} \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx} \end{array} \right.$$

第13讲 多元函数微分学



第14讲

二重积分



第15讲 微分方程

一阶微分方程

能写成 $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{1}{y'} = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$y' + p(x)y = q(x)y^n (n \neq 0, 1) \text{ (伯努利方程)}$$

二阶可降阶

能写成 $y'' = f(x, y')$

$$y'' = f(y, y')$$

能写成 $y'' + py' + qy = f(x)$

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

$$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x) \text{ (欧拉方程)}$$

n 阶常系数齐次线性微分方程的解

用换元法求解微分方程

用求导公式逆用来换元

用自变量、因变量或 x, y 地位互换来换元

用极限、导数

积分等式建方程

用曲线切线斜率

两曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公切线斜率

截距

用面积

体积

平均值

用弧长

侧面积

曲率

形心

应用题

用几何应用

用变化率

第16讲 无穷级数

定义与 S_n

数项级数的判敛

判敛法

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geq 0$

交错 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0$

任意项 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n$ 符号无限制

常用结论

函数项级数

幂级数

收敛点与发散点

收敛域

级数的收敛域

具体型

不缺项幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

缺 或一般函数项级数 $\sum u_n(x)$

抽象

阿贝尔定理

结论 1

结论 2

展开

考法

函数展开

积分

导数

无穷小比阶

先积后导

导 积

重要 公式

工具

求和

公式

用先积后导，先导后积求和函数

所给微分方程求

建立微分方程并求

综合题

傅里叶级数

周期为 $2l$ 的傅里叶级数

狄利克雷收敛定理

正弦级数 余弦级数

只在 $[0, l]$ 上有定义的函数的正弦级数和余弦级数 展开

第17讲

多元函数和力学的预备知识

向量 运算及 应用

数量积(内积、点积) 及 应用

向量积(外积、叉积)

混合积

向量 方向角 方向余弦

一般式

点法式

三点式

截距式

平面束方程

一般式

点向式

参数式

两点式

点到直线的距离

平面

直线 直线

平面 平面

平面 直线

由参数方程给出

方程组

由隐式方程给出

显式函数

空间曲线 切线与法平面

曲面 切平面与法线

空间曲线在坐标面上 投影

旋转曲面: 曲线 Γ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面

方向导数

梯度

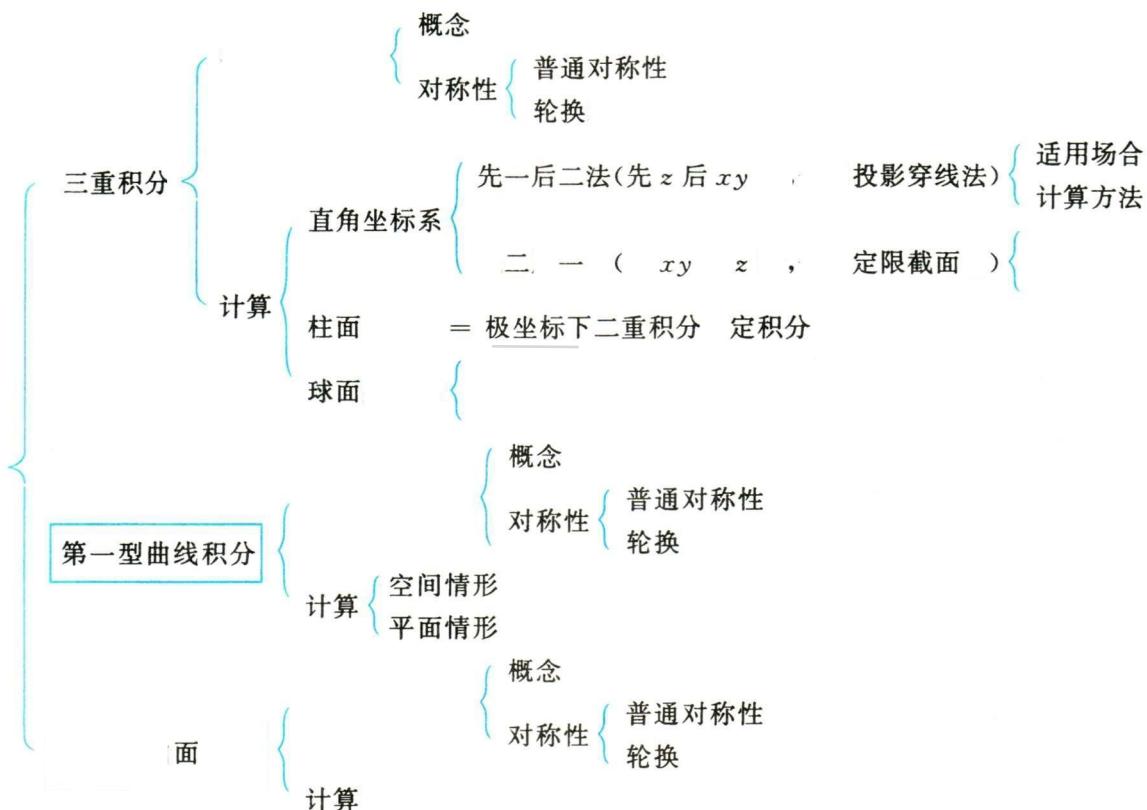
场论

方向导数与梯度的关系

散度

旋度

第18讲 多元函数积分学



概念 —— 做功

基本方法 —— 一投二代三计算(定积分)

① 曲线封闭且无奇点在其内部, 直接用格林公式
有 , 且除奇点外 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$,

则换路径(一般令分母等于常数作为路径, 路径的起点和终点无需与原路径重合)

③ 非封闭曲线且 $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$, 则换路径(换简单路径, 路径的起点和终点需与原路径重合)

\neq , 可补线使其封闭(加线减线)

⑤ 积分与路径无关
关系

两类 线

空间

直接计算 { 一投二代三计算
用斯托克斯公式

换路径再计算(若 $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (无旋场), 可换路径)

概念 —— 通量

基 —— 一投二代三计算(二重积分)

转换投影法

面

计算

高斯公式

① 封闭曲面且内部无奇点, 直接用高斯公式
有 , 且除奇点外 $\text{div } \mathbf{F} = 0$, 可换个面积分(边界无需与原曲面重合)

③ 非封闭曲面, 且 $\text{div } \mathbf{F} = 0$, 可换个面积分(边界需与原曲面重合)

\neq , 补面使其封闭(加面减面)

⑤ 由 $\text{div } \mathbf{F} = 0$, 建方程求 $f(x)$

两类 面积分 关系

长度 { 曲杆长度(弧长)

空间曲线

面积 { 平面面积

曲面

体积 { 曲顶柱体体积

空间物体

应用

总质量

重心(质心) 与 形心

转动惯量

引力

二型 线