multi integral

第16讲 多元函数积分学

Triple积分 (三重积分)

- **1. 概念与对称性**
  - **概念**: $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$ 表示空间物体 Ω 的某种<u>物理量</u>（如质量)。
  - **对称性 ($\boxed{\text{轮换对称性}}$)**: 若积分区域 Ω 关于变量 x, y 轮换对称 (即 $(\underline{x}, \boxed{y}, z) \in \Omega \iff (\boxed{y}, \underline{x}, z) \in \Omega$), 且被积函数满足 $f(x,y,z) = f(y,x,z)$, 则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$ 可以通过变量轮换来简化。例如 $\iiint_{\Omega} x^2 dV = \iiint_{\Omega} y^2 dV$。
- **2. 计算**
  - **(1) 直角坐标系 (投影穿线法)**
    - **适用场合**: 积分区域是长方体、棱柱、或由几个平面/柱面围成的简单区域。
    - **通式通法**: “先一后二”，将三重积分化为一次定积分和一次二重积分。
    - **做题步骤**:
      a. **投影**: 将空间体 Ω 投影到一个坐标面 (如 xoy面) 上，得到投影区域 D_{xy}。
      b. **定限**: 确定 D_{xy} 的范围。然后，在 D_{xy} 内任取一点 (x, y)，沿 z 轴方向作直线穿过空间体 Ω，穿入的曲面为 z 的下限 $z_1(x, y)$，穿出的曲面为 z 的上限 $z_2(x, y)$。
      c. **计算**: 将三重积分写成累次积分形式 $\iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$，然后计算。
  - **(2) 柱..**
    - **适用场合**: 积分区域 Ω 的形状是柱体、锥体，或其在 xoy 面上的投影 D_{xy} 是圆形或扇形。被积函数含 $x^2 + y^2$。
    - **通式通法**: 坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$。体积微元 $dV = \boxed{r} dzdrd\theta$。
    - **做题步骤**:
      a. **画图定限**: 画出 Ω 及 D_{xy} 的图。用极坐标的方式确定 D_{xy} 中 r 和 θ 的范围。
      b. **穿线定限**: 确定 z 的上下限 $z_1(r, \theta), z_2(r, \theta)$。
      c. **代入计算**: 写出累次积分 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} dr \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \cdot \boxed{r} dz$ 并计算。
  - **(3) 球..**
    - **适用场合**: 积分区域 Ω 是球体、锥体或其一部分。被积函数含 $x^2 + y^2 + z^2$。

- **通式通法**: 坐标变换 $x = \rho\sin\phi\cos\theta, y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi$。体积微元 $dV = \boxed{\rho^2\sin\phi} d\rho d\phi d\theta$。
- **做题步骤**:
  a. **画图定限**: 画出区域 Ω 的草图。
  b. **定各变量范围**:
    - ρ (到原点的距离): 从原点引射线，穿入界的 ρ 为下限，穿出界的 ρ 为上限。
    - ϕ (与 z 轴正向的夹角): 范围是 $[0, \pi]$。
    - θ (投影到 xoy 面的极角): 范围是 $[0, 2\pi]$。
  c. **代入计算**: 写出累次积分 $\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\dots) \cdot \rho^2 \sin\phi d\rho$ 并计算。

I Line积分 & II Line积分 (第一类与第二类曲线积分)

第一类曲线积分 (对弧长的积分): $\int_L f(x, y) ds$

- **概念**: 几何意义是变密度曲线的质量，或以 L 为准线、母线平行于 z 轴、高为 $f(x, y)$ 的柱面侧面积。
- **通式通法**: 化为定积分。
- **做题步骤**:
  i. **参数化**: 将曲线 L 写成参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$)。
  ii. **计算弧长微元**: $ds = \boxed{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} dt$。
  iii. **代入计算**: $\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$。

第二类曲线积分 (对坐标的积分): $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

- **概念**: 物理意义是变力 $\vec{F} = (P, Q)$ 沿路径 L 所做的功。
- **通式通法**: 方法一：化为定积分。方法二：格林公式。
- **做题步骤 (方法一：化为定积分)**:
  i. **参数化**: 将曲线 L 写成参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$)。**注意积分方向**，参数 t 的起始点要与 L 的方向一致。
  ii. **计算坐标微元**: $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$。
  iii. **代入计算**: $\int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$。
- **做题步骤 (方法二：格林公式)**:
  i. **判断条件**: 检查曲线 L 是否为**封闭**的，且方向为**正向**(逆时针)。P, Q 在 L 所围区域 D 内是否具有一阶连续偏导数。

ii. **应用公式**: $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$。如果 L 是顺时针，则公式右边加负号。
iii. **计算二重积分**: 用直角坐标或极坐标计算右侧的二重积分。如果 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，则积分与路径无关，可以直接找一个方便的路径。

I Surface积分 & II Surface积分 (第一类与第二类曲面积分)

第一类曲面积分 (对面积的积分): $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$

- **概念**: 几何意义是变密度曲面的质量。
- **通式通法**: "一投二代三计算"，化为二重积分。
- **做题步骤**:
  i. **投影**: 将空间曲面 Σ (方程为 $z = z(x,y)$) 投影到 xoy 面上，得到投影区域 D_{xy}。
  ii. **计算面积微元**: $dS = \boxed{\sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}} dxdy$。
  iii. **代入计算**: $\iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy$。

第二类曲面积分 (对坐标的积分): $\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

- **概念**: 物理意义是向量场 $\vec{F} = (P,Q,R)$ 穿过曲面 Σ 的**通量**。
- **通式通法**: 方法一：化为二重积分。方法二：高斯公式。方法三：斯托克斯公式。
- **做题步骤 (方法一：化为二重积分)**:
  i. **定侧与投影**: 确定曲面 Σ 的指定侧（法向量方向）。将积分拆为三部分，例如计算 $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$。
  ii. **代入换元**: 将曲面方程 $z = z(x,y)$ 代入 $R(x,y,z)$。
  iii. **加负号判断**: 投影到 xoy 面。判断曲面法向量的 z 分量符号。若为正（指向z轴正向，称为“上侧”），则 $\iint_\Sigma Rdxdy = +\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$；若为负（称为“下侧”），则加负号。
- **做题步骤 (方法二：高斯公式)**:
  i. **判断条件**: 检查曲面 Σ 是否为**封闭**的，且方向为**外侧**。P, Q, R 在 Σ 所围空间体 Ω 内是否具有一阶连续偏导数。
  ii. **应用公式**: $\oiint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_\Omega (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dV$。如果 Σ 是内侧，则公式右边加负号。
  iii. **计算三重积分**: 用直角、柱面或球面坐标计算右侧的三重积分。

- **做题步骤 (方法三：斯托克斯公式)**:
    i. **判断条件**: 检查曲面 Σ 是否为 **不封闭** 的。
    ii. **应用公式**: 将对**不封闭曲面**的第二类曲面积分，转化为沿其**边界曲线 L** 的第二类曲线积分。$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+\cdots=\oint_{L}Pdx+Qdy+Rdz$。**注意 L 的方向与 Σ 的法向量方向要符合右手定则**。
    iii. **计算曲线积分**: 用参数法计算右侧的第二类曲线积分。

---

differential equation&series

第17讲 微分方程

一、一阶微分方程的求解

题型1: 可分离变量的方程: $y'=f(x)g(y)$

- **通式通法**: 分离变量，两边积分。
- **做题步骤**:
    i. **分离**: 将方程写成 $\frac{\boxed{dy}}{g(y)}=f(x)\boxed{dx}$ 的形式。
    ii. **积分**: 两边同时积分 $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C$。
    iii. **求解**: 化简得到 y 与 x 的关系。

题型2: 一阶线性微分方程: $y'+\underline{p(x)}y=\boxed{q(x)}$

- **通式通法**: 公式法。
- **做题步骤**:
    i. **套公式**: 通解为 $y=e^{-\int \underline{p(x)}dx}\left[\int\boxed{q(x)}e^{\int \underline{p(x)}dx}dx+C\right]$。
    ii. **计算积分**: 依次计算公式中的两个积分。
    iii. **整理**: 化简得到最终通解。

二、二阶可降阶..

题型1: $y'' = f(x)$ 型

- **通式通法**: 逐次积分。
- **做题步骤**: 对方程两边连续积分两次即可。

题型2: $y'' = f(x, \boxed{y'})$ 型 (不显含y)

- **通式通法**: 换元法。
- **做题步骤**:
    i. **换元**: 令 $\boxed{p = y'}$, 则 $y'' = p'$。方程化为一阶方程 $p' = f(x, p)$。
        a. **解一阶方程**: 解出 $p = \phi(x, C_1)$。
    ii. **还原**: 代回 $y' = \phi(x, C_1)$, 再积分一次得到 y。

题型3: $y'' = f(\underline{y}, y')$ 型 (不显含x)

- **通式通法**: 换元法。
- **做题步骤**:
    i. **换元**: 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$。方程化为 $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$。
    ii. **解一阶方程**: 解出 p 与 y 的关系 $p = \psi(y, C_1)$。
    iii. **还原**: 代回 $y' = \psi(y, C_1)$, 分离变量 $\frac{dy}{\psi(y,C_1)} = dx$, 再积分一次。

三、高阶常系数线性..

方程形式: $y'' + py' + qy = f(x)$

- **通式通法**: 通解 = 齐次方程通解 + 非齐次方程特解 ($y = y_c + y_p$)。
- **做题步骤**:
    i. **求齐次通解** y_c:
        - 写出特征方程 $\boxed{\lambda}^2 + p\boxed{\lambda} + q = 0$。
        - 根据特征根的情况写出 y_c:
            - 两不等实根 λ_1, λ_2: $y_c = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$。
            - 两相等实根 $\lambda_1 = \lambda_2$: $y_c = (C_1 + C_2\underline{x})e^{\lambda_1 x}$。
            - 共轭复根 $\alpha \pm i\beta$: $y_c = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$。
    ii. **求非齐次特解** y_p (**待定系数法**):
        - 观察右侧 $f(x)$ 的形式。

- $f(x) = \boxed{P_m(x)} e^{ax}$ 型: 设 $y_p = x^k Q_m(x) e^{ax}$，其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式，k 是 a 作为特征根的重数（0, 1, 或 2）。
- $f(x) = e^{ax}[\boxed{P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x}]$ 型: 设 $y_p = x^k e^{ax}[R_N(x)\cos\omega x + S_N(x)\sin\omega x]$，其中 $N = \max\{l, n\}$, k 是 $a + i\omega$ 作为特征根的重数（0 或 1）。

iii. **组合**: 将 y_c 和 y_p 相加得到最终通解。

第18讲 无穷级数

一、数项级数的判敛

- **通式通法**: 正项级数判敛法为主, 任意项级数看绝对收敛。
- **做题步骤**:
    i. **首步：检查必要条件**: 计算通项 $\lim_{n\to\infty} \boxed{u_n}$ 是否等于 0。若不等于 0, 则级数必发散。
    ii. **次步：选择判别法 (正项级数)**:
        - **比值法/根值法**: 若通项含 $n!$, a^n 等, 优先用比值法 ($\lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$) 或根值法 ($\lim_{n\to\infty} \boxed{\sqrt[n]{u_n}}$)。若极限 < 1 收敛, > 1 发散, $= 1$ 失效。
        - **比较判别法**: 若通项是多项式分式, 用极限形式的比较判别法, 与 p-级数 $\sum \frac{1}{\boxed{n^p}}$ 比较。
        - **积分判别法**: 若通项 $u_n = f(n)$ 对应的函数 $f(x)$ 易于积分, 可用 $\boxed{\int_1^\infty} f(x)dx$ 的敛散性判断。
    iii. **最终：处理交错/任意项级数**:
        - 对交错级数, 用莱布尼茨判别法。
        - 对任意项级数, 先判断其绝对值构成的正项级数 $\sum |u_n|$ 是否收敛。若收敛, 则原级数绝对收敛(从而也收敛)。若不收敛, 再判断原级数是否条件收敛。

二、$\boxed{\text{幂}}$级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛域

- **通式通法**: 先求收敛半径, 再单独判断端点。
- **做题步骤**:

i. **求收敛半径 R**: 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 计算极限 $\rho = \lim_{n\to\infty} \boxed{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}$ (或 $\lim_{n\to\infty} \boxed{\sqrt[n]{|a_n|}}$)。收敛半径 $R = \frac{1}{\boxed{\rho}}$。

ii. **写出开区间**: 得到开的收敛区间 $(-R, R)$。

iii. **判断端点**: 将 $x = R$ 和 $x = -R$ 分别代入原级数, 得到两个数项级数, 用数项级数的判别法单独判断其敛散性, 最终确定完整的收敛域。

三、函数展开为幂级数

- **通式通法**: 间接展开法：利用已知的基本展开式, 通过代换、四则运算、逐项求导、逐项积分得到。
- **重要公式**:
  - $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{\boxed{n}}}{\boxed{n}!}, x \in (-\infty, +\infty)$
  - $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\boxed{2n+1}}}{\boxed{(2n+1)}!}, x \in (-\infty, +\infty)$
  - $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{\boxed{2n}}}{\boxed{(2n)}!}, x \in (-\infty, +\infty)$
  - $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1, 1)$
  - $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1, 1]$
- **做题步骤**:

  i. **变形**: 将目标函数通过代数变形, 凑成某个基本展开式的形式。

  ii. **代换/运算**:
    - 例如, 求 e^{-x^2} 的展开, 就在 e^u 的展开式中令 $u = -x^2$。
    - 例如, 求 $\frac{x}{1+x^2}$, 就在 $\frac{1}{1-u}$ 中令 $u = -x^2$ 再整体乘以 x。

  iii. **求导/积分**: 例如, 求 $\arctan x$ 的展开式, 可以先求其导数 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 的展开式, 然后再逐项积分回来。

四、幂级数求和函数

- **通式通法**: 逐项求导or逐项积分, 将未知的数项级数或幂级数凑成已知和函数的幂级数形式。
- **做题步骤**:

  i. **观察结构**: 观察级数通项, 看它像哪个基本展开式的通项求导或积分后的结果。例如, 看到分母有 $n+1$, 想到可能是积分得到的; 看到分子有系数 n, 想到可能是求导得到的。

  ii. **构造辅助函数**: 写出该幂级数的和函数 $S(x)$。对 $S(x)$ 进行逐项求导或积分, 得到一个新的、更容易求和的幂级数 $S_1(x)$。

iii. **求和并还原**: 求出 $S_1(x)$ 的和函数 (通常是某个初等函数), 然后再通过积分或求导的逆运算, 还原出 $S(x)$ (注意处理积分常数)。