第1讲 函数极限与连续

- 定义 使用
  - 使用
    - 是常数
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 等式脱帽法
- 计算
  - 化简先行
    - 等价无穷小替换
    - 恒等变形
    - 及时提出极限存在且不为 0 的因式
  - 洛必达法则
  - 泰勒公式
    - 常用公式
    - 展开原则
  - 比阶
- 存在性
  - 具体型(洛必达 失效,用夹逼)
  - 抽象 (单调有界)
- 应用 —— 连续与间断
  - 研究位置
    - 无定义点
    - 分段函数的分段点
  - 连续
    - 内点处
    - 端
  - 间断
    - 第一类间断点
      - 跳跃间断点
      - 可去
    - 二
      - 无穷
      - 振荡

第2讲 数列极限

- 定义、使用
  - 使用
    - 是常数
    - 唯一性
    - 有界性
    - 保号性
    - 收敛的充要条件
- 存在性与计算
  - 归结原则
  - 直接计算法
  - 定义法（“先斩后奏”）
  - 单调有界准则
    - 证什么
    - 怎么证
      - 用已知不等式
      - 题设给出条件来推证
  - 夹逼准则
    - 用基本放缩方法
  - 综合题总结
    - 用导数综合
    - 积分
    - 中值定理
    - 方程（列）
    - 区间（列）
    - 极限综合

第3讲

一元函数微分学的概念

- 定义（导数在一点的问题）
  - 分段函数（或含绝对值函数）在分段点
  - 抽象函数在一点
    - 特指点 x_0
    - 泛指点 x
  - 四则运算中的特殊点
    - 太复杂的函数
      - $f = f_1 + f_2$
      - $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$
    - 求导公式无定义的点
- 微分
  - 定义
  - 可微的充要条件
  - 一阶微分形式的不变性

第4讲
一元函数微分学的计算

- 基本求导公式
- 复合
- 隐
- 反
- 分段（含绝对值）
  - 在分段点用导数定义求导（定义法）
  - 在非分段点用导数公式求导（公式法）
- 对数
- 幂指
- 参数方程
- 高阶导数
  - 归纳法
  - 莱布尼茨公式
  - 泰勒展开式

第5讲 一元函数微分学的应用（一）——几何应用

- 对象
  -
    - $f(x)$
      - 具体
      - 抽象
      - $f_n(x)$（函数族）
      - $f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$
    - $f'(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}(x^2)}$，$f^{(n)}(x)$
    - $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
  - 用极限定义函数——$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} g(n,x)$ 或 $f(x)=\lim\limits_{t\to x} g(t,x)$
  - 分段函数（含绝对值）
  - 参
    - $x=x(t),y=y(t)$
    - $x=r(\theta)\cos\theta,y=r(\theta)\sin\theta$
  - 隐　$F(x,y)=0$
  - 微分方程的解 $y=y(x)$
  - 偏微分方程的解 $f(x,y)$
  - 和函数 $S(x)=\sum a_n x^n$
- 内容
  - 切线、法线、截距
  - 极值、单调性
    - 单调性的判别
    - 一阶可导点是极值点的必要条件
    - 判别极值的第一充分条件
    - 二
    - 三
  - 拐点、凹凸性
    - 凹凸性的定义
    - 拐点定义
    - 判别
      - 判别凹凸性的充分条件
      - 二阶可导点是拐点的必要条件
      - 判别拐点的第一充分条件
      - 二
      - 三

极值点与拐点的重要结论

渐近线
- 铅直渐近线
- 水平
- 斜

最值(值域)
- 求区间$[a,b]$上连续函数的最大值和最小值
- (a,b)内 最值或者取值范围

曲率　曲率半径

第6讲 一元函数微分学的应用（二）——中值定理、微分等式与微分不等式

- 中值定理
  - 区间
  - 辅助函数
    - 简单情形
    - 复杂
  - 定理
    - 零点定理
    - 介值
    - 费马
    - 罗尔
    - 拉格朗日中值定理
    - 泰勒公式
    - 柯西中值定理
  - 常见　关键点
- 微分等式问题（方程　根、函数　零点）
  - 理论依据
  - 考法
- 不等式问题
  - 用单调性
  - 最值
  - 凹凸性
  - 拉格朗日中值定理
  - 柯西中值定理
  - 带有拉格朗日余项的泰勒公式

第8讲 一元函数积分学的概念与性质

- $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$f(x)$，$f'(x)$ —— 7 条关系
- 奇偶性、周期性
- 积分比大小
  - 用公式或几何意义
  - 用保号性
    - 看正负
    - 作差
- 定义
  - 基本形（凑成$\frac{i}{n}$）
    - $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)\frac{1-0}{n}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
    - $\sum\limits_{i=0}^{n-1}$ $=$
  - 放缩（凑不成$\frac{i}{n}$）
    - 夹逼准则
    - 放缩后再凑$\frac{i}{n}$
  - 变量 —— $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{\boxed{x}-0}{n}i\right)\frac{\boxed{x}-0}{n}=\int_0^{\boxed{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$
- 反常积分的判敛
  - 概念
  - 判别

第9讲 一元函数积分学的计算

- 基本积分公式
- 不定　　计算
  - 凑微分法
  - 换元法
  - 分部积分法
  - 有理函数的积分
    - 定义
    - 思想
    - 方法
- 定
  - 对称区间上的积分问题
  - 周期性下
  - 区间再现下
  - 华里士公式
  - 定积分分部积分法中的“升阶”“降阶”问题
  - 分段函数的定积分
- 变限
  - 求分段函数的变限积分
  - 直接求导型
  - 换元
  - 拆分
  - 换序型
- 反常

第10讲 一元函数积分学的应用（一）——几何应用

- 对象
  -
    - $f(x)$
      - 具体
      - 抽象
      - $f_n(x)$（函数族）
      - $f_1 \cdot f_2 \cdot \cdots \cdot f_n$
    - $f'(x), \dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}(x^2)}, f^{(n)}(x)$
    - $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
  - 用极限定义函数——$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} g(n,x)$ 或 $f(x)=\lim\limits_{t\to x} g(t,x)$
  - 分段　（含绝对值）
  - 参　方
    - $x=x(t), y=y(t)$
    - $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$
  - 隐　$F(x,y)=0$
  - 微分方程　解 $y=y(x)$
  - 偏微分方程　解 $f(x,y)$
  - 和函数 $S(x)=\sum a_n x^n$
- 内容
  - 面积
  - 旋转体体积
  - 平均值
  - 平面曲线　弧长
  - 旋转曲面　面积（侧面积）
  - “平面上的曲边梯形”　形心坐标公式
  - 平行截面面积为已知　立体体积

第11讲 一元函数积分学的应用（二）——积分等式与积分不等式

等式
- 常用　　等式
- 通过证明某特殊积分等式求某特殊积分
- 积分法证明积分等式
- 中值定理

不等式
- 用函数的性态
- 处理被积函数
  - 已知 $f(x) \leqslant g(x)$，用积分保号性证得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$，$a < b$
  - 拉格朗日中值定理
  - 泰勒公式
  - 积分法

第12讲
一元函数积分学的应用（三）——物理应用与经济应用

- 微元法
  - 位移大小——$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$
  - 总路程——$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,\mathrm{d}t$
  - 变力沿直线做功——$W=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$
  - 压力——$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\,\mathrm{d}x$
  - 质心——$\bar{x}=\dfrac{\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}$

第13讲 多元函数微分学

- 概念
  - 极限
  - 连续
  - 偏导数
  - 全微分
  - 偏导数连续
- 复合函数求导法(链式求导　　　)
- 隐函数求导法
  - 存在定理
    - 一个方程的情形
    - 方程组
- 多元函数的极、最值
  - 定义
  - 极值存在的必要条件
  - 充分
  - 条件最值与拉格朗日乘数法
  - 有界闭区域上连续函数的最值问题
- 偏微分方程(含偏导数的等式)
  - 已知偏导数(或偏增量)的表达式,求 $z=f(x,y)$
  - 给出变换,化已知偏微分方程为常微分方程,求 $f(u)$
  - ，　　指定偏微分方程及其反问题

第14讲 二重积分

- 概念
  - 和式极限
  - 普通对称性
  - 轮换
  - 比大小
    - 用对称性
    - 保号性
  - 中值定理
  - 周期性
- 计算
  - 直角坐标系下的计算法
  - 极
  - 极　　与直　　　　互　化

第15讲 微分方程

- 一阶微分方程
  - 能写成 $y' = f(x) \cdot g(y)$
  - $y' = f(ax + by + c)$
  - $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
  - $\frac{1}{y'} = f\left(\frac{x}{y}\right)$
  - $y' + p(x)y = q(x)$
  - $y' + p(x)y = q(x)y^n (n \neq 0,1)$（伯努利方程）
- 二阶可降阶
  - 能写成 $y'' = f(x, y')$
  - $y'' = f(y, y')$
- 高阶常系数线性
  - 能写成 $y'' + py' + qy = f(x)$
  - $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$
  - $x^2y'' + pxy' + qy = f(x)$（欧拉　　）
  - n 阶常系数齐次线性微分方程的解
- 用换元法求解微分方程
  - 用求导公式逆用来换元
  - 用自变量、因变量或 x, y 地位互换来换元
- 应用题
  - 用极限、导数　积分等式建方程
  - 用几何应用
    - 用曲线切线斜率
      - 两曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公切线斜率
      - 截距
    - 用面积
      - 体积
      - 平均值
    - 用弧长
      - 侧面积
      - 曲率
      - 形心
  - 用变化率

第16讲 无穷级数

- 数项级数的判敛
  - 定义与 S_n
  - 判敛法
    - 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, u_n \geqslant 0$
    - 交错 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n, u_n > 0$
    - 任意项 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n, u_n$ 符号无限制
  - 常用结论
- 级数的收敛域
  - 概念
    - 函数项级数
    - 幂级数
    - 收敛点与发散点
    - 收敛域
  - 具体型
    - 不缺项幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
    - 缺 或一般函数项级数 $\sum u_n(x)$
  - 抽象
    - 阿贝尔定理
    - 结论 1
    - 结论 2
- 展开
  - 考法
    - 函数展开
    - 积分
    - 导数
    - 无穷小比阶
  - 工具
    - 先积后导
    - 导 积
    - 重要 公式

公式
用先积后导 先导后积求和函数
所给微分方程求

求和

建立微分方程并求
综合题

周期为 $2l$ 的傅 级
狄利克雷收敛定理

傅里叶级数

正弦级数 余弦级数
只在 $[0,l]$ 上有定义的函数的正弦级数和余弦级数展开

第17讲 多元函数积分学的预备知识

- 向量 运算及 应用
  - 数量积(内积、点积) 及 应用
  - 向量积(外积、叉积)
  - 混合积
  - 向量 方向角 方向余弦
- 平面、直线 位置关系
  - 平面
    - 一般式
    - 点法式
    - 三点式
    - 截距式
    - 平面束方程
  - 直线
    - 一般式
    - 点向式
    - 参数式
    - 两点式
  - 位置
    - 点到直线的距离
    - 平面
    - 直线 直线
    - 平面 平面
    - 平面 直线
- 空间曲线 切线与法平面
  - 由参数方程给出
  - 方程组
- 曲面 切平面与法线
  - 由隐式方程给出
  - 显式函数
- 空间曲线在坐标面上 投影
- 旋转曲面:曲线 Γ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面
- 场论
  - 方向导数
  - 梯度
  - 方向导数与梯度的关系
  - 散度
  - 旋度

第18讲 多元函数积分学

- 三重积分
  - 概念
  - 对称性
    - 普通对称性
    - 轮换
  - 计算
    - 直角坐标系
      - 先一后二法（先 z 后 xy ， 投影穿线法）
        - 适用场合
        - 计算方法
      - 二 一 （ xy z ， 定限截面 ）
    - 柱面 = 极坐标下二重积分 定积分
    - 球面
- 第一型曲线积分
  - 概念
  - 对称性
    - 普通对称性
    - 轮换
  - 计算
    - 空间情形
    - 平面情形
- 面
  - 概念
  - 对称性
    - 普通对称性
    - 轮换
  - 计算

- 二型 线
  - 概念 —— 做功
  - 计算
    - 基本方法 —— 一投二代三计算（ 定积分）
    - 格林公式
      - ① 曲线封闭且无奇点在其内部，直接用格林公式
      - 有 ，且除奇点外$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径（一般令分母等于常数作为路径，路径的起点和终点无需与原路径重合）
      - ③ 非封闭曲线且$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径（换简单路径，路径的起点和终点需与原路径重合）
      - $\neq$ ，可补线使其封闭（加线减线）
      - ⑤ 积分与路径无关
    - 两类 线 关系
    - 空间
      - 直接计算
        - 一投二代三计算
        - 用斯托克斯公式
      - 换路径再计算（若 **rot** $\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$（无旋场），可换路径）
- 面
  - 概念 —— 通量
  - 计算
    - 基 —— 一投二代三计算（ 二重积分）
    - 转换投影法
    - 高斯公式
      - ① 封闭曲面且内部无奇点，直接用高斯公式
      - 有 ，且除奇点外 div $\boldsymbol{F}=0$，可换个面积分（边界无需与原曲面重合）
      - ③ 非封闭曲面，且 div $\boldsymbol{F}=0$，可换个面积分（边界需与原曲面重合）
      - $\neq$ ，补面使其封闭（加面减面）
      - ⑤ 由 div $\boldsymbol{F}=0$，建方程求 $f(x)$
    - 两类 面积分 关系
- 应用
  - 长度
    - 曲杆长度（弧长）
    - 空间曲线
  - 面积
    - 平面面积
    - 曲面
  - 体积
    - 曲顶柱体体积
    - 空间物体
  - 总质量
  - 重心（质心）与形心
  - 转动惯量
  - 引力