▼ 06 **二次型**($f(x)=x^TAx$: 1+2

- ▼ 定义 与 矩阵表示(1+3
  - 实**二次型**(上△
  - ▼ 完全展开式 | 和式 | 矩阵
    - base. 变换:
    - 完全展开式
    - 和式
    - **二次型f(x)'矩阵**(3:表达式 对称 变换
-
- ▼ 1 化为 标准形 与 **规范形**(2
  - ▼ 定义 性质(2*2 +1 n
    - 线性变换 //换元 ($x=Cy$
    - 矩阵合同($A\simeq B\leftarrow C^TAC=B$: 3 1 1性质:反 对 传
    - ▼ ..标准形(only x^2) $\rightarrow$ 规范形(only x^2 && 系数only ±1,0
      - 基本定义(2+1
      - **性质**
    - add.惯性定理
  - 方法
-
- ▼ 2 **正定..**($\forall x\neq 0, f(x)=x^TAx>0$: 1definition 2条件
  - 定义
  - 充要条件(3
  - 必要条件(结论)(2
  - add.**判定**

---

06 二次型($f(x)=x^TAx$: 1+2

定义 与 矩阵表示(1+3

实二次型(上△

a. n元变量$x_1, x_2, ..., x_n$的**二次 齐次**多项式

- $$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ &+a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ &+\cdots \\ &+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

b. 考研只研究 $a_{ij} \in R$ (i≤j; i,j=1,2,...,n)的情况，称此二次型f 为 **实二次型**

完全展开式 | 和式 | 矩阵

base. 变换:

则 $2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$

- 达到补齐 矩阵的目的
- $x_ix_j=x_jx_i$，若令 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$

完全展开式

- $$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\ &+\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

和式

- $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

二次型f(x)'矩阵(3:表达式 对称 变换

a. 二次型$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ 的 **矩阵表达式**

- $$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

        - $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

    b. notice: 矩阵A 必须是一个 **对称** 矩阵
        - cause: 一个二次型可以有不同的写法，eg.三元二次型
            - 拆分系数可以有不同的形式
              $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2,$$
              $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+3x_2x_1,$$
              $$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_1$$
                - 自然 对应的矩阵 也有多种形式
                  $$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \\ &=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&0\\3&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \\ &=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

    c. **变换**

    写出三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3+2x_1x_3$ 的二次型矩阵 $\mathbf{A}$.

        -
            - 对称转换
                - $$\begin{aligned} &2x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3 \\ &+2x_2^2-2x_2x_3 \\ &+2x_3^2 \end{aligned}$$

                  $$\begin{aligned} &2x_1^2-x_1x_2+x_1x_3 \\ &-x_2x_1+2x_2^2-x_2x_3 \\ &+x_3x_1-x_3x_2+2x_3^2 \end{aligned}$$
            - 行 和 列 相乘效果运用

- $$x_1(2x_1-x_2+x_3) + x_2(-x_1+2x_2-x_3) + x_3(x_1-x_2+2x_3)$$
  $$\Downarrow$$
  $$[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 2x_1-x_2+x_3 \\ -x_1+2x_2-x_3 \\ x_1-x_2+2x_3 \end{bmatrix}$$
  $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
- $$=x_1(2x_1-x_2+x_3)+x_2(-x_1+2x_2-x_3)+x_3(x_1-x_2+2x_3)$$
  $$=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 2x_1-x_2+x_3 \\ -x_1+2x_2-x_3 \\ x_1-x_2+2x_3 \end{bmatrix}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

---

1 化为 标准形 与 规范形(2

定义 性质(2*2 +1 n

线性变换 //换元 ($x = Cy$

a. 基本设定：

- 对于 n元二次型$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - 令
    - $$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases} \quad (*)$$
  - 记
    - $$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$
  - 可表示为
    - $\boxed{x = Cy}$

- (*)式 称为 从$y_i, y_2, y_3, ..., y_n$，到 $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ 的线性变换
- 若 系数矩阵C **可逆**，即$|C| \neq 0$，则称为 **可逆线性变换**

---

b. 对于二次型的矩阵表示
- $f(x) = x^TAx$, 令 $x = Cy$
  - ↓
  - 则 $f(x) = f(Cy) = (Cy)^T A(Cy)$
    - ↓
    - 即 $f(x) = y^T(\boxed{C^TAC})y$
    - 记$B = C^TAC$
    - ↓
  - 得 $f(x) = y^TBy$ 即 得到一个新二次型 $g(y) = y^TBy$

矩阵合同($A \simeq B \leftarrow C^TAC = B$: 3 1 1性质:反 对 传

a. 1)基本定义
- $f(x)$ 与 $g(y)$ 的系数矩阵关系:
  - $C^TAC = B$
- 则称 A与B 合同
  - 记为

    $A \simeq B$
- 称对应的二次型 $f(x)$ 与 $g(y)$ 为 合同二次型

---

b. 2)性质
- a.阐述:
  - A、B 实际 表征 同一事物 在不同参照系下 不同"形态"
    - 可以看出，**在二次型背景下**，$\boldsymbol{A}$ 表征的是 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的“形态”，$\boldsymbol{B}$ 表征的是 $g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 的“形态”，但是毕竟 $f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{y})$，是同一个东西，之所以 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别表征了不同的“形态”，无非是因为在 $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 的参照系下与在 $\boldsymbol{y}=[y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}}$ 的参照系下看到的是同一个事物的不同“形态”罢了.

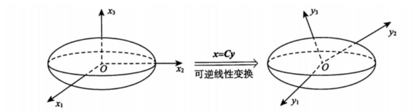
        - A与B的合同 就是指 同一个二次型在可逆线性变换下 两个不同状态的联系
            - 

              图 6-1 $f(x)=x^{T}Ax=$某常数 a 图 6-2 $g(y)=y^{T}By=$某常数 a
    - b.性质:
        - a. 反身 对称 传递
            - (1)$A\simeq A$(反身性);
              (2)若 $A\simeq B$,则 $B\simeq A$(对称性);
              (3)若 $A\simeq B$,且 $B\simeq C$,则 $A\simeq C$(传递性).
        - b. 不改变 秩
            - 若A与B合同 $\to$ $\boxed{r(A)=r(B)}$
                - 则 可逆线性变换 不会改变 **二次型的秩**
        - c. 与 对称A 合同的 矩阵也必定是 对称矩阵
            - $B^{T}=(C^{T}AC)^{T}=C^{T}A^{T}C=C^{T}AC=B.$
                - 若 $A\simeq B$,即存在可逆矩阵 C,使得 $C^{T}AC=B$.

..标准形(only x^2) $\to$ 规范形(only x^2 && 系数only ±1,0

基本定义(2+1

a. 标准形

- 二次型 中只含□平方项 不含交叉项(所有交叉项的系数为0)
    - 形如
        - $d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$
- ↓

b. 规范形

- 标准型中，系数d_i仅为 **1,-1,0**
    - 形如
        - $x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2$

c. 合同 标准形/规范形

- 二次型$f(x) = x^T Ax$ 合同于 标准型$d_1x_1^2 + \ldots + d_nx_n^2$ or 规范型
- 称 该 标准型/规范型 为 二次型的合同标准型/规范型

性质

a. 配方法
  - 任何 二次型 均可通过配方法 化成标准形/标准形
  - ↓
  - 任何 实对称矩阵A，必存在可逆矩阵C，
    - 使得
      - $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$
      - 其中
      - $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$ 或 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$.
        (标准形)　(规范形)

b. 正交变换**
  - 任何 二次型 均可通过配方法 化成标准形/标准形
  - ↓
  - 任何 实对称矩阵A，必存在 正交矩阵Q 使得
    - $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$,
    - 其中
    $$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

---

add.惯性定理

a. 1)基本定义
   - 在 可逆线性变换中， 正项个数p 负项个数q 始终不变
   - p : 正惯性指数
   - q: 负惯性指数

b. 2)性质
   - a. r = p+q
   - b.合同的充要条件：same p q or r

方法

- 配方法
- 正交变换法
- 合同
- 惯性定理

---

2 正定..($\forall x \neq 0, f(x) = x^T Ax > 0$: 1definition 2条件

定义

a. 设定：
   - n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$
   - 对任意的 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq \boldsymbol{0}$，均有 $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$

b. f 为 正定二次型，A 为 正定矩阵

充要条件(3

a. 定义

b. f 的正惯性指数

c. A

- A与E合同
- ..特征值$\lambda_i > 0$(i = 1,2,…,n)
- ..的全部顺序主子式 均$>$ 0
    - A的 **顺序主子式**
        - 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则
        - $$|\mathbf{A}_k| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$
        - 称为 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的 k 阶顺序(或左上角)主子式
        - 当 k 取 $1,2,\cdots,n$ 时，就得到 $\mathbf{A}$ 的 n 个顺序主子式

必要条件(结论)(2

- a. 主对角线 元素 >0
    - $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$
- b.$|A|$ >0

---

add.判定

- 具体型二次型
- 抽象型二次型