- 02 矩阵 (2 2
  - 定义 运算(3
    - 定义(2
      - 矩阵 (0+2type
      - ⭐ ..秩$r(A)$(3definition + 2性质:r不变,r(A*)与r(A)
    -
    - 运算(group:4
      - basic(=,+
      - 数乘 (2+1:分配 结合,$|kA|=k^n|A|$| **矩阵乘法** (3:分配 结合,**不**交换 | A^T (3A 2AB
      -
      - △ 向量' 内积与正交 | 施密特正交化
      - 矩阵'幂 (A^m,$(AB)^m$:1+3不可换| 方阵乘积 '行列式($|AB|$:1同阶可提
    -
    - △.**特殊矩阵**(1+3
      - basic(4
      -
      - 对称 ($A^T=A$:1对 1反| 正交($A^TA=E$:1规范正交基
      - 分块..(1定义,3+1运算:+,数乘,乘 | 幂
  - [2]..'**逆**A^{-1}| **伴随..** A^*
    - ..逆A^{-1}($AB=E$:1definition 1充要 3+1性质 3求逆
    - 伴随..A^*(algebraic余子式
  -
  - [2]**初等变换**(3 **..矩阵**(3count+1求逆
  - [3]**等价矩阵**($P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n}=B_{m\times n}$ ..'**等价标准形** (

    $$PAQ=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

    | **矩阵方程**($AX=B$

02 矩阵 (2 2

定义 运算(3

定义(2

矩阵 (0+2type

a. 基本定义
- 形如
  - $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
- 矩阵 由 若干 行/列向量组成

b. n阶方阵
- m=n

c. 同型矩阵
- 行 列对应相等

⭐ ..秩$r(A)$(3definition + 2性质:r不变,r(A*)与r(A)

a. **1)定义**
- a.$A_{m\times n}$ 的 最高阶**非零**子式 的 阶数 =矩阵A 的秩
  - 记为$r(A)$
  - 最高阶**非零**子式
    - a.理解
      - 子式：从矩阵中任意选取一部分元素组成的方阵
      - 非零子式：行列式值不为0的式子

        - 最高阶：行数 和 列数 最高
    - b.求法
        - 将矩阵 化简为 最简 阶梯型
- b.存在 **k阶** 子式 ≠零，任意k+1阶子式=0 $\rightarrow r(A)=k$
    - 且$r(A_{n\times n})=n \longleftrightarrow$|A|≠0 $\longleftrightarrow$ A可逆
- c.本质是 组成该矩阵的**线性无关**的 向量 的个数

---

b. **2)性质**

- a.初等变换 不改变 A 的 r
    - A是m×n矩阵，P,Q 分别为m阶、n阶可逆矩阵
    - $r(A_{m\times n})$=$r(P_{m\times m}A_{m\times n})$=$r(A_{m\times n}Q_{n\times n})$ = $r(P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n})$

- b. A是m×n矩阵，B 是满足相关要求的矩阵
    - ①单A
        - $0\leqslant r(\mathbf{A})\leqslant \min\{m,n\}$
        - $r(k\mathbf{A})=r(\mathbf{A})(k\neq 0)$
        - $$r(\mathbf{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\mathbf{A})=n, \\ 1, & r(\mathbf{A})=n-1,\text{其中 } \mathbf{A} \text{ 为 } n \text{ 阶方阵} \\ 0, & r(\mathbf{A})<n-1, \end{cases}$$

情况一：当 $r(A)=3$ 时, $r(A^*)=3$

- $$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- - $$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
- **当** $r(A) = n - 1 = 2$ **时,** $r(A^*) = 1$
  - $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  - - $C_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
    - $C_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
    - $C_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
    - ... 经过计算，你会发现只有 C_{33} 不为零 ...
    - $C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

    所有其他的代数余子式都因为包含至少一个零行或零列而等于 0。所以：

    $$A^* = (\text{Cofactor Matrix})^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- **情况三：当** $r(A) < n - 1 = 2$ **时,** $r(A^*) = 0$
  - $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  - $$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- ②A与B
  - $r(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\}$
  - $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$

运算(group:4

basic(=,+

a. 相等

- 同型矩阵，且 对应元素都相等

  $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s\times k}$,
  - - 需

      $m = s, n = k$, 且 $a_{ij} = b_{ij}$

b. 加法

- 两矩阵为 同型矩阵时 ，对应元素进行相加
- 矩阵 加法的 交换 结合律
  - 交换律 $A+B=B+A$;
    结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$;

数乘 (2+1:分配 结合,$|kA| = k^n|A|$| 矩阵乘法 (3:分配 结合,不交换 | A^T (3A 2AB

a. 数乘矩阵

- A的每个元素 都乘以k
- △数乘 和 加法 统称为矩阵的 线性运算
  - 数乘 满足 数的 分配、结合律
    - 分配
      $k(A+B)=kA+kB,(k+l)A=kA+lA$;
    - 结合
      $k(lA)=(kl)A=l(kA)$
      - k l为任意常数
    - $(kA_{m\times s})B_{s\times n}=A_{m\times s}(kB_{s\times n})=k(A_{m\times s}B_{s\times n})$
- △用n阶方阵A 计算行列式 时，记为$|A|$
  - $\boxed{|kA| = k^n|A|}$

---

b. 矩阵的乘法

- 前行×后all列
- 规律
  - 结合
    $(A_{m\times s}B_{s\times r})C_{r\times n}=A_{m\times s}(B_{s\times r}C_{r\times n})$
  - 分配
    $A_{m\times s}(B_{s\times n}+C_{s\times n})=A_{m\times s}B_{s\times n}+A_{m\times s}C_{s\times n}$,
    $(A_{m\times s}+B_{m\times s})C_{s\times n}=A_{m\times s}C_{s\times n}+B_{m\times s}C_{s\times n}$

- 两 矩阵 一般不满足 交换律，因为 左右乘 值 与 含义不同

---

c. 转置矩阵A^T

- $A_{m\times n}$ 转置为 $A_{n\times m}$ //行列互换
- 规律
  - A 本身
    - $(A^T)^T=A$
    - $(kA)^T=kA^T$

      当 $m=n$ 时，$|A^T|=|A|$

    - - 行列式 行列互换 值不变
  - A和B
    - $(A+B)^T$ = A^T+B^T
    - $(AB)^T$ =$B^T A^T$

△ 向量' 内积与正交 | 施密特正交化

a. 1)向量的内积与正交

- a.内积
- b.正交

b. 2)施密特正交化

矩阵'幂 (A^m,$(AB)^m$:1+3不可换| 方阵乘积 '行列式($|AB|$:1同阶可提

a. 矩阵的幂

- A^m (m个A 相乘)
- 规律(不可交换)
  - $(AB)^m$ =$(AB)(AB)\ldots(AB)$ ≠A B 的分别幂//不可交换
  - $(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$
  - $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$
  - $(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$

b. 若 $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_mx_m$

- 则 $f(x) = a_0E + a_1A + \ldots + a_mA_m$

---

c. 方阵乘积的**行列式**

- A, B 是**同阶**方阵
- 则 $|AB|$=$|A|$ $|B|$

△.特殊矩阵(1+3

basic(4

- O
- E
- kE
- Λ
  - 对角线

对称 ($A^T = A$:1对 1反| 正交($A^TA = E$:1规范正交基

- $\boxed{A^T = A}$
- $A^T = -A$
  - 反对称矩阵

- $A^TA = E$
  - 正交矩阵
    - A是由 两两正交的**单位向量**组(规范正交基) 组成
    - $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\alpha}\|=1$

  $b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\beta}\|=1$,

  $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\gamma}\|=1$,
- $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交

  $a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \Rightarrow (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 正交

  $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \Rightarrow (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\gamma}$ 正交，

分块..(1定义,3+1运算:+,数乘,乘 | 幂

a. 定义
- 将矩阵分成若干小块
- 每一块称为原矩阵的子块
- 将子块看作原矩阵的一个元素

b. 基本运算(以2×2为例)
- 按照一般矩阵运算规则进行运算即可
  - 加法：同型，且分法一致，则 $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{bmatrix}$.

    数乘：$k\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$.

    乘法：$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}$，要可乘、可加.
  - 对于 乘法，子块内部 矩阵不变 // 由外到内
  - 分块对角矩阵的幂
    - $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} A^n & O \\ O & B^n \end{bmatrix}$

---

[2]..'逆A^{-1} | 伴随.. A^*

..逆A^{-1}($AB=E$:1definition 1充要 3+1性质 3求逆

a. 定义
- 1)基本定义
  - A, B是n阶方阵，E是n阶单位矩阵

- $AB=BA=E$
- 称
  - A 是可逆矩阵
  - B是A的逆矩阵
    - 逆矩阵是**唯一**的
      - 记为
        - A^{-1}
- 2)A可逆的充要条件
  - $|A|\neq 0$
    - 此时 A可逆，且
    - A^{-1}=
      - $\frac{1}{|A|}A^*$

---

b. 性质与公式
- 设 A,B是同阶可逆矩阵
  - 1)单A
    - $(A^{-1})^{-1}=A$

      A^T 也可逆，且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
    -
      - 穿衣原则：无论哪件衣服在外，都是那个人
    - $|A^{-1}|=|A|^{-1}$
      - $|A|^{-1}$：表示 A 的行列式的倒数（即 $\frac{1}{|A|}$）

  - 2)A与B

      AB 也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
    -
      - A+B不一定可逆
        - 且$(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$.

---

c. 用定义求逆矩阵A^{-1}
- 1)直接求A^{-1}
  - 令$AA^{-1}=E$
- 2)分解为 若干个可逆矩阵 的积

- 令$A=BC$
- $$A^{-1}=(BC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}$$

- 3)分块矩阵的逆
  - $$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$$

伴随..A^*(algebraic余子式

a. A.定义

- 将n^2个元素的**代数余子式** 按次序排列成矩阵
  - $$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$
- 称为A的伴随矩阵
  - 注意：
    - 定义矩阵A是**方阵**。
    - **余子式**：伴随矩阵的每个元素的余子式是除去当前元素行列，剩下的元素构成的行列式。
    - **代数余子式**：取行列式的值，符号由当前行标和列标的值决定（-1的i+j次幂）。
    - **位置关系**为转置
- 有 $AA^*=A^*A=|A|E$

b. B.*性质与公式 //待补充

c. C.用伴随矩阵求逆矩阵

- $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$

---

[2]初等变换(3 ..矩阵(3count+1求逆

i. (1)初等变换
- 倍乘
- 互换
- 倍加

---

ii. (2)初等矩阵
- a.定义
  - i.单位矩阵E经过**一次** 初等变换 得到的矩阵
  - ii.运算
    - 倍乘~
      - 第 i 行(或第 i 列)乘以非零常数 k
    - 互换~
      - 交换第 i 行与第 j 行(或交换第 i 列与第 j 列)
    - 倍加~
      - 第 j 行的 k 倍加到第 i 行(或第 i 列的 k 倍加到第 j 列)
- b.*性质与公式 // *表示待补充
- c.△用初等变换（初等矩阵）求逆矩阵
  - $$[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1}],$$
    $$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{A}^{-1} \end{bmatrix}.$$

---

[3]等价矩阵($P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n} = B_{m\times n}$ ..'等价标准形 (

$$PAQ=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

矩阵方程($AX = B$

i. 等价**矩阵**
   - A, B均是m×n矩阵，$P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$ 是可逆矩阵
   - 使得 $\boxed{P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n} = B_{m\times n}}$
   - 称A, B是等价矩阵
     - 记作

       $$A \cong B.$$

ii. 等价**标准形**
   - 形如

     $$\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

     - - **等价标准形** $\boxed{\text{唯一}}$
       - r = r(A)
         - 即 若r(A)=r则存在可逆矩阵P,Q，使得
           - $$PAQ=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$
           - ↑

举例说明

假设有一个 3×4 的矩阵 A，且它的秩 $r(A) = 2$。

那么，它的等价标准形一定是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

或者，如果行列顺序调整过，也可能是：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

无论 A 的具体数字是什么，只要它的秩是2，通过初等变换最终都能化成这个形式（左上角是一个2阶单位阵 E_2，其余地方全是0）。

---

iii. C.**矩阵方程**
   - $AX = B$
   - $XA = B$
   - $AXB = C$