# 03 向量

## 向量 | 向量组'线性相关性

- 概念
  - 向量
  - 线性表出 ..相关 (3表达式:

    $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

    $$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

    $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$$
- 判别 线性相关
  - 单$\alpha$(3充要: 表 非零 部分
  - $\alpha$与$\beta$

## 1 极大线性无关组 | 等价向量组 | 向量组'秩

- 极大线性无关组 - "代表"
  - 定义
  - 求法
- 等价向量组
  - 定义
  - 判别
  - 与等价矩阵的区别
- 向量组'秩
  - 定义
  - 重要定理和公式(3性质:3r 行 s≤t

-

## 2 向量空间

- 概念(2:基 维
- 基变换($[\eta_1,\ldots,\eta_n]$ =$[\xi_1,\ldots,\xi_n]$ $\mathbf{C}$ → 坐标..(
  $[\xi_1,\ldots,\xi_n]x=[\eta_1,\ldots,\eta_n]y\to x=Cy$)

---

---

# 向量 | 向量组'线性相关性

## 概念

### 向量

a. 1)n维向量：
  - n个数 构成的 有序数组

b. 2)运算
  - 相等：对应元素都相等
  - 加法：
    - 对应相加即可
      - $\alpha+\beta \overset{def}{=\!=} [a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n]$（$\alpha,\beta$ 同上）
  - 数乘：
    - $k\alpha \overset{def}{=\!=} [ka_1, ka_2, \cdots, ka_n]$

---

### 线性表出 ..相关 (3表达式:

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$,

a. 0)线性**组合**
  - 针对 一组向量组而言
    - m个n维向量$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$，m个数 $k_1, \ldots, k_m$
    - 形如
      - $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$
    - 称 其为 向量组 的 线性组合

b. 1)线性表出
  - 一个向量+一组向量组

- 向量$\beta$ 能 表示成 n维向量 $\alpha_1,...,\alpha_m$ 的 线性组合
- 形如
  - $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$
- 称 向量$\beta$ 能 被 n维向量 $\alpha_1,...,\alpha_m$ 线性表出

---

c. 2)线性相关

- 针对 一组向量组而言 //拆一个 就是线性表出
  - a.相关
    - m个n维向量$\alpha_1,...,\alpha_m$，若 存在一组不全为零的数 $k_1,...,k_m$
    - 使得 线性组合为**0**
      - 即
        $\boxed{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},}$
    - 称 向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$ 线性相关
      - 含 0向量 or 成比例的 向量组必 线性相关

---

  - b.无关
    - m个n维向量$\alpha_1,...,\alpha_m$，不存在一组不全为零的数 $k_1,...,k_m$
      - 使得 线性组合为0
        - 即
          $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0},$
    - 称 向量组$\alpha_1,...,\alpha_m$ 线性无关
      - 即 单个非0向量，两个不成比例的向量均 线性无关

## 判别 线性相关

### 单$\alpha$(3充要: 表 非零 部分

a. 向量组$\alpha_1, \dots, \alpha_m$

- 1)**线性相关** 充要条件
  - ①向量组中 至少有一个向量 可由 其余的 **n—1** 个向量 线性表出
  - ②齐次线性方程组$Ax = 0$，有 非零解。其中 $A = [\alpha_1, \dots, \alpha_m]$
    - 同理，线性无关 的充要 即为 only零解
    - //针对m个n维向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$
      - 其中
        - $$\boldsymbol{\alpha}_1 = [a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}]^{\mathrm{T}},$$
          $$\boldsymbol{\alpha}_2 = [a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}]^{\mathrm{T}},$$
          ……
          $$\boldsymbol{\alpha}_m = [a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm}]^{\mathrm{T}}.$$
  - ③部分向量 **线性相关**，整个向量组 **线性相关**

---

### $\alpha$与$\beta$

a. 1)线性表出

- a. $\beta$可由$\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出 的 充要条件
  - 非齐次方程组 $\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_s\beta_s = \beta$ 有解
  - $\boxed{r[\alpha_1, \dots, \alpha_s] = r[\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta]}$
- b.向量组$\beta_1, \dots, \beta_t$ 可由$\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表示
  - ①t≤s， $\beta_1, \dots, \beta_t$ 线性无关

- ②t>s，$\beta_1, ..., \beta_t$ 线性相关
- c.$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性无关，$\beta, \alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性相关
  - $\beta$ 可由 $\alpha_1, ..., \alpha_s$，线性表出，且 表示法唯一

---

---

# 1 极大线性无关组 | 等价向量组 | 向量组'秩

## 极大线性无关组 - "代表"

### 定义

a. 1)数学定义

- ①向量组$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 中存在 部分组 $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_s}$
- ② 向量组中的 任一向量$\alpha_i$均可由此 部分组 线性表出

b. 2)理解：

- a.其 能够代表向量组中 所有成员 的一组向量(彼此 线性无关)
  - 即 向量组 中的 任一向量都能够由其 线性表出
  - 线性相关 的 有一组即可
- b.极大线性无关组 一般不唯一 (线性相关 向量 的选取 不唯一)
- c.特殊：
  - 只由 一个0向量 组成的 向量组 不存在~
  - 一个 线性无关向量组 的~ 就是其本身

### 求法

---

# 等价向量组

## 定义

a. 1)基本定义：
    - 设定：
        - 两个向量组(Ⅰ)$\alpha_1,...,\alpha_s$，(Ⅱ) $\beta_1,...,\beta_t$
    - 若
        - 1)$\alpha$中 每个向量$\alpha_i$ $\boxed{\text{均可}}$由$\beta$ 中的向量 线性表出
            - 称 向量组$\alpha$可由向量组$\beta$ 线性表出
        - 2)向量组(Ⅰ)与 向量组(Ⅱ)可相互线性表出
            - 称 向量组(Ⅰ)与 向量组(Ⅱ)是 等价 向量组
                - 记作
                    - (Ⅰ)≅(Ⅱ)

b. 2)性质
    - 反身
        - (Ⅰ)≅(Ⅰ)
    - 对称
        - 若(Ⅰ)≅(Ⅱ),则(Ⅱ)≅(Ⅰ)
    - 传递
        - 若(Ⅰ)≅(Ⅱ),(Ⅱ)≅(Ⅲ),则(Ⅰ)≅(Ⅲ)

c. 3)向量组 与 其 **极大线性无关组** 是 等价向量组

---

## 判别

## 与等价矩阵的区别

---

### 向量组'$\boxed{秩}$

#### 定义

a. 向量组 的**极大线性无关组**中 所含向量的个数 r
   - 记作 $rank(\alpha_1,...,\alpha_s)$ = r 或 $r(\alpha_1,...,\alpha_s)$ = r

b. 等价向量组 具有相等的 r
   - r 相等 不一定 是等价向量组

#### 重要定理和公式(3性质:3r 行 s≤t

a. 1)三r相等:
   - 矩阵$A$的秩 = $A$ 的 行/列 向量组 的秩

b. 2)若 $A$ 初等行变换 $\rightarrow B$
   - $A$ 与$B$
     - 行向量组 是 等价向量组
     - 部分列向量组 具有 相同的 线性相关性

c. 3)$r(\alpha_1,...,\alpha_s)$≤ $r(\beta_1,...,\beta_t)$
   - 每个向量$\alpha_i$ 均可由$\beta$ 中的向量 线性表出

---

---

# 2 向量空间

---

### 概念(2:基 维

a. n维向量空间$R^n$ 中
   - 有 线性无关 的有序向量组 $\xi_1,...,\xi_n$
   - 任意 $\alpha \in R^n$ 均可由 $\xi_1,...,\xi_n$ 线性表出
     - 记为$\boxed{\alpha = a_1\xi_1,...,a_n\xi_n}$

- 称
  - 有序向量$\xi_1,...,\xi_n$ 为$R^n$的一个**基**
  - 基向量 的个数 n 称为 向量空间的**维数**
  - $[a_1,...,a_n]([a_1,...,a_n]^T)$称为向量$\alpha$在基$\xi$下的 **坐标**
    - 或称 $\alpha$的 **坐标**行(列)向量

---

## 基变换($[\eta_1,...,\eta_n]$ =$[\xi_1,...,\xi_n]$ C $\rightarrow$ 坐标..($[\xi_1,...,\xi_n]x = [\eta_1,...,\eta_n]y \rightarrow x = Cy$)

a. 基变换

- n维向量空间$R^n$ 中
  - 两个基 为$\eta_1,...,\eta_n$ , $\xi_1,...,\xi_n$
  - 其 满足 $[\eta_1,...,\eta_n]$ =$[\xi_1,...,\xi_n]$ $\boxed{C}$
    - $$=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$
  - 称 上式 为 由基$\xi$ 到基$\eta$ 的 基变换公式
  - 称 矩阵$C$ 为 **过渡矩阵**，且$C$ 为可逆矩阵
    - $C$ 的第 i 列 即 是$\eta_i$ 在基$\xi$下的坐标

b. 坐标变换

- $\alpha$ 在基 $\xi_1,...,\xi_n$ 和 基$\eta_1,...,\eta_n$ 下
- 坐标分别是 $x = [x_1,...,x_n]^T$ , $y = [y_1,...,y_n]^T$
  - 即 $\alpha$=
    $\boxed{[\xi_1,...,\xi_n]x = [\eta_1,...,\eta_n]y}$
  - 由 基变换公式得

    - $\alpha=[\xi_1,\ldots,\xi_n]\,Cy$
- 得 $x=Cy$ 或 $y=C^{-1}x$
    - 称 之为 坐标变换公式