

翻译：

第一章：

趋势与交易

1.1 介绍

金融中的高频交易数据总是有着快波动性和噪声性的特点，（见例【7】），而这恰恰是一个使得数据反复无常，难以估计的特点。（见例【13】）。尽管这个特点使得建模过程中出现许多挑战，它自己也需要需要把真实信号从噪音中分离出来的方法，而这也是极速探测这个有趣领域的话题之一。极速探测中使用得最广泛的一个算法是 cumulative sum (CUSUM) 停止法则，这最先在本书第 24 页引入。在这个工作中，我们使用了一系列 CUSUM 停止法则去构建一个在线交易策略。这个策略利用了 CUSUM 停时可能在应用到高频数据的高波动结果时，可以提供的相对频繁的警报频率。这个已经实现的交易策略频繁下沉，并因此消除了大仓位的风险。这使得这个策略实际上可实现。之前的工作已经由 Lam 和 Yam 在画出 CUSUM 技术与过滤交易策略之间的联系，但是不管是过滤策略（见【2, 3】）还是它的等价物，购买和保留策略（see 【12】），承担着主要取决于和下沉有关的随机性的高风险的大量损失。这个著名的已经被彻底研究过其属性的策略拖尾停止策略（见例【15】或【1】）也和过滤策略有关，因此会遭遇相似的风险。

就最小化大仓位的风险来说，尽管我们利用高波动频率数据使得提议的规则表现出了清晰的术语特性，这章的主要目的还是要展现并阐述检测技术（在这里指CUSUM）在高频金融领域中的应用。特别地，所提出得这个技术是基于两个平行的CUSUM停止规则的：一个用于检测观察到得均值上升的变化，而另一个检测下降的变化。一旦上升\下降CUSUM警报（称作“信号”）拉响，就会有一个单位潜在资产的的买或者卖空。在那个时候，我们重复一个CUSUM停止规则，并且对于每个相同信号的警报，我们继续买或卖空一个单位的潜在资产直到相反信息的警报被发出，而这个时候我们已经卖光了我们买过的或者买完了我们曾经卖空的。这种高频数据的CUSUM警报的高频特性保证了这个规则实际的实现，因为大的单方暴露，不管是买方还是卖方，都被相对快地下沉了

这些被提出的算法策略，被应用在真实的临时数据（三十年的资产和五年的国债）中，这些数据在各种各样的个人日上被拍卖。可以看出，即使在噪声存在的情况下，该算法也是在向上或向下趋势（我们称之为“子周期”）情况下获利最高的的，不过在价格稳定的时期会不那么有用。实际上，这个提出的策略是一种趋势跟踪的算法。

为了量化提出的这个算法

策略的效果，我们通过一个随机游走模型计算了它的期望回报。我们的诊断计划表明随机游走的偏差越大，它的获利性越强，这和当策略实际运用到真实情况中得到的发现是吻合的。这是因为相比无偏差的情况而言，在偏差存在的情况下，更有可能形成某种趋势。

我们采取用离散数据和一个线性随机游走分析的方式，而不是像几何布朗运动模型那样的连续方法，因为我们是分析个体的价格信号（比如在1美分、 $1/32$ 美分、 $1/64$ 美分的水平）。我们的模型集中于通过这些信号来跟踪一个资产价格，因此短期利率效应处在最小值的时候，线性方法也是更贴合实际情况的设定。

通过描述一个基于没有针对策略的具体时间机制的情况下，在数据流中追踪上升或下降趋势的一个整体算法，我们在1.2节将开始我们的分析。之后，我们会自然形成一个个体趋势的观点（？）。在1.3节中，我们建立了一个考虑到要最快检测速度的时间计划，并给予了一个应用到真实数据上的策略的全面表现评估。接着，在1.4节，我们分析了一个基于随机游走数据的具体案例，并且给出了一个明确的公式，针对聚焦于资产信号改变的非对称随机游走模型这种的一个特例。之后，在1.5节中，我们给出了用蒙特卡洛模拟得到的，即这个非对称的偷懒的简单例子的模拟结果。在1.6节，我们讨论了交易策略中CUSUM阈值参数的效应。我们在1.7节中通过对这些被提出策略的可能未来的改良方式的讨论，得到了我们的初步结论。

1.2 基于趋势的交易策略

假设 $\{S_n\}$ ($n=0, 1, 2 \dots$) 为一个数据点序列；为了达成我们的目的，它们将成为资产价格的样本数据。我们假设 $S_0=s$ 是一个常量，并且如果对某个 k 满足 $S_k=0$ ，那么对于所有的 $n>k$ ，都有 $S_n=0$ 满足。假设 $T_0=0$ ，并且定义 T_k ($k=1, 2, \dots$) 作为一个递增的停止时间序列，称作信号，记录了某种序列中的趋势。我们称 T_k 为 k 信号 (k -th signal)。

1.21 发信号与趋势

在这个子章节，基于有两种类型信号的情况，我们构建了一个交易策略，这两种信号分别是“+ 信号”（表明检测到数据中的上升趋势），与“- 信号”（表明检测到数据中的下降趋势）。假设“属性 + (k)”为导致一个像 k 信号一样的“+ 信号”产生的属性，并且用 $\{T_k=T_k^+\}$ 表示这种事件的发生。类似的，用“属性 - (k)”为导致一个像 k 信号一样的“- 信号”产生的属性，并且用 $\{T_k=T_k^-\}$ 表示这种事件的发生。某个时间点，只可能检测到一种趋势，所以我们像以下这样正式定义 T_k^+ 与 T_k^- ：

$$T_k^+ := \begin{cases} T_k & \text{if Property } + (k) \text{ occurs} \\ \infty & \text{if Property } - (k) \text{ occurs} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$T_k^- := \begin{cases} T_k & \text{if Property } - (k) \text{ occurs} \\ \infty & \text{if Property } + (k) \text{ occurs} \end{cases} \quad (1.2)$$

因此， $T_k = T_k^+ \wedge T_k^-$ (?) 对于所有 $k=1, 2, \dots$

接下来，我们表述说“数据处在一种趋势中”的含义。我们定义信号指数序列 α (1) 如下：假设 $\alpha(0)=0$ ，那么 $T_{\alpha(0)}=0$ ，并且对于 $l>1$ 且 $k>2$ 的情况，定义属性

“Property + (l, k)”： $T_j = T_j^-$ for every $\alpha(l-1) < j < k$ and $T_k = T_k^+$

“Property - (l, k)”： $T_j = T_j^+$ for every $\alpha(l-1) < j < k$ and $T_k = T_k^-$.

接着，我们定义 1 变换点为，对于 $l=1, 2 \dots$

$$\alpha(l) := \inf \{k \geq \alpha(l-1) + 2: \text{Property } + (l, k) \text{ or Property } - (l, k) \text{ holds}\}. \quad (1.3)$$

注意 $T_{\alpha(0)}$ 与 $T_{\alpha(l-1)}$ 之间至少隔着两个信号。定义 (1.3) 等价于

$$\alpha(l) := \inf \{k \geq \alpha(l-1) + 2: T_k \text{ has different sign than } T_j, \alpha(l-1) < j < k\}. \quad (1.4)$$

一个由同样类型信号构成的序列被称为一个样本点的子时期。一个转换点表示一个同类型信号构成的子时期的结束。

假设 Δ_n 在时间 n 处，资产 S 占有的股份的数量。令 $\Delta_0=0$. 注意，对于每个 $n \in (T_{\alpha(0)}, T_{\alpha(l+1)})$ ， Δ_n 信号是不变量，也就是说，要么 $\Delta_n > 0$ 对于所有 $n \in (T_{\alpha(0)}, T_{\alpha(l+1)})$ 成立，要么 $\Delta_n < 0$ 对于所有 $n \in (T_{\alpha(0)}, T_{\alpha(l+1)})$ 成立。

我们的交易策略如下：

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n & \text{if no signal at time } n, \text{ i.e. } n \neq T_j \forall j \text{ (no change)} \\ \Delta_n + 1 & \text{if } n = T_j = T_j^+ \text{ for some } j, \alpha(l) < j < \alpha(l+1) \\ & \text{for some } l \text{ (buy one during a + subperiod)} \\ \Delta_n - 1 & \text{if } n = T_j = T_j^- \text{ for some } j, \alpha(l) < j < \alpha(l+1) \quad (1.5) \\ & \text{for some } l \text{ (sell one during a - subperiod)} \\ 0 & \text{if } n = T_{\alpha(l)} \text{ for some } l \geq 1 \\ & \text{(buy-up if } T_{\alpha(l)}^+; \text{ sell-off if } T_{\alpha(l)}^-\text{).} \end{cases}$$

我们假设一个所有订单都是即时执行的市场。这个策略的目的是从紧接着的+或者-信号来获利（这个信号来自一句老谚语“低买高卖”）。这个策略的成功主要依靠于这种子时期的持续时间。

1. 2. 2 整个子时期收获

我们希望分析这个交易策略在 $(T_{\alpha(l-1)}, T_{\alpha(l)})$ 这个子时期可以为我们带来的收益 G_l ($l=1, 2, \dots$)。或者说从依照信号 $T_{\alpha(l-1)+1}, \dots, T_{\alpha(l)-1}$ 进行的这些交易中赚的钱或亏的钱的清算。

注意，某一个子时期由该回合的第一个信号决定。如果 $T_1=T_1^+$ ，那么对从信号 1 到信号 $\alpha(l)-1$ 被称为一个个体购买订单的“牛回合”子周期，随后就会是 $T_{\alpha(l)}=T_{\alpha(l)}^-$ 时期的一个资产跌价。如果 $T_1=T_1^-$ ，那么这个回合被称为一个个体短期抛售的“熊回合”子周期，随后就会是 $T_{\alpha(l)}=T_{\alpha(l)}^\mp$ 时期的一个购买上升（？）。定义 G_l 为子时期 1 的收益。因此，第一个时期从信号 $T_{\alpha(0)+1}=T_1$

开始，并结束于信号 $T_{\alpha(l)}$ ，而 G_1 就是这个子时期的利润。作为条件，我们需要第一个子时期信号的符号（?）。令 $C>0$ 为每次交易的成本百分比，并定义

$$A_l := \mathbf{1}_{\{T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^-\}}, \quad Y_l := \alpha(l) - \alpha(l-1) - 1. \quad (1.6)$$

子时期的利润用如下方式计算：

$$G_l := \begin{cases} (1-c) \sum_{j=\alpha(l-1)+1}^{\alpha(l)-1} S_{T_j} - (1+c)(\alpha(l) - \alpha(l-1) - 1)S_{T_{\alpha(l)}} \\ \quad \text{if } T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^-, \\ (1-c)(\alpha(l) - \alpha(l-1) - 1)S_{T_{\alpha(l)}} - (1+c) \sum_{j=\alpha(l-1)+1}^{\alpha(l)-1} S_{T_j} \\ \quad \text{if } T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^+ \end{cases}$$

$$:= \begin{cases} (1-c) \sum_{j=1}^{Y_l} S_{T_{j+\alpha(l-1)}} - (1+c)(Y_l)S_{T_{\alpha(l)}} & \text{if } T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^-, \\ (1-c)(Y_l)S_{T_{\alpha(l)}} - (1+c) \sum_{j=1}^{Y_l} S_{T_{j+\alpha(l-1)}} & \text{if } T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^+. \end{cases} \quad (1.7)$$

举例来说，如果 $c=0.01$, $T_1=T_1^+$ 并且 $\alpha(1)=4$, 那么 $T_{\alpha(l)}=T_4=T_4^-$ 。假设买信号对应的时期价格为 $S_{T_1}=5$, $S_{T_2}=7$, $S_{T_3}=9$, 并且我们在 S_{T_4} 卖掉所有的东西。接着 $\Delta_{T_0}=0$, $\Delta_{T_1}=1$, $\Delta_{T_2}=3$, 并且我们在 T_4 到 $\Delta_{T_4}=0$ 的时期进行清算。第一个子时期的利润将为 $G_1=0.99*3*8-1.01*(5+7+9)=2.25$ 。

结合 $1-c$ 条件（?）并加总随机变量 $2cY_lS_{\alpha(l)}$, 在进行一些对价格增量总和的代数运算后，我们可以得到：

$$\begin{aligned} G_l + 2cY_lS_{\alpha(l)} &= (c + (-1)^{A_l}) \left[Y_l S_{T_{\alpha(l)}} - \sum_{j=1}^{Y_l} S_{T_{j+\alpha(l-1)}} \right] \\ &= (c + (-1)^{A_l}) \sum_{j=1}^{Y_l} (S_{T_{\alpha(l)}} - S_{T_{j+\alpha(l-1)}}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

我们可以重写叠缩（?）总和中的每个差异之处：设

$$Z_k := S_{T_{k+1}} - S_{T_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

为信号 k 与 $k+1$ 之间的增量价格变化，我们有

$$S_{T_{\alpha(l)}} - S_{T_{j+\alpha(l-1)}} = \sum_{k=j+\alpha(l-1)}^{\alpha(l)-1} (S_{T_{k+1}} - S_{T_k}) = \sum_{k=j+\alpha(l-1)}^{\alpha(l)-1} Z_k = \sum_{k=j}^{Y_l} Z_{k+\alpha(l-1)}.$$

把这个式子带回 (1.8) 的收益量中

$$G_l + 2cY_l S_{\alpha(T_l)} = (c + (-1)^{A_l}) \sum_{j=1}^{Y_l} \left[\sum_{k=j+\alpha(l-1)}^{\alpha(l)-1} Z_k \right] = (c + (-1)^{A_l}) \sum_{j=1}^{Y_l} j Z_{j+\alpha(l-1)}. \quad (1.10)$$

因此，通过 (1.11)，整个子时期 1 的利润为：

$$G_l = (c + (-1)^{A_l}) \sum_{j=1}^{Y_l} j Z_{j+\alpha(l-1)} - 2cY_l S_{\alpha(T_l)}. \quad (1.11)$$

注意，在没有交易成本（即 $c=0$ ）的情况下，期望的利润 G_l 完全由价格增量以及子时期的第一个信号符号决定。

1.3 CUSUM 定时

接下来，我们描述 CUSUM 统计过程的一个版本，以及它的相关 CUSUM 停止法则，我们将利用这些来设计一个基于最快趋势检测的定时计划，并且把这个计划就加入到我们的交易策略中。

1.3.1 CUSUM 过程与停止时间

在这个部分，我们将通过引入可测空间 (Ω, \mathcal{F}) ，此处 $\Omega = R^\infty$, $\mathcal{F} = \cup_n \mathcal{F}_n$ ，并且 $\mathcal{F}_n = \sigma \{Y_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}\}$ 。序列 Y_i ($i=1 \dots$) 的法则，由可能性测度 $\{P_v\}$ ， $v \in N^*$ 描述。换言之，对一个给定的 $v > 0$ ，起着转变点作用的可能性测度 P_v ，是 Y_i 的分布在时间 v 变化的情况下，通过序列 Y_i 在 Ω 上生成的测度。当可能性测度和 P_∞ 有相同的分布时，它们都是在在 Ω 上由随机变量 Y_i 生成的。或者说，在转变点 v ，由序列 Y_i 定义的系统经历了一种由分布 P_0 到分布 P_∞ 的“方法转变”。

CUSUM 统计量被定义为：测度 P_0 到测度 P_∞ 的极大似然函数在 α 代数 \mathcal{F}_n 上的最大值。

$$C_n := \max_{0 \leq v \leq n} \log \frac{dP_v}{dP_\infty} \Big|_{\mathcal{F}_n} \quad (1.12)$$

为 CUSUM 在 α 代数 \mathcal{F}_n 上的统计量。CUSUM 统计量过程于是成为 (1.12) 中 CUSUM 量的集合 $\{C_n\}$ ($n=1, \dots$)。那么 CUSUM 停止法则就是：

$$T(h) := \inf \left\{ n \geq 0 : \max_{0 \leq v \leq n} \log \frac{dP_v}{dP_\infty} \Big|_{\mathcal{F}_n} \geq h \right\}, \quad (1.13)$$

对于某个临界值 $h > 0$ 。在 CUSUM 停止法则 (1.13), (1.12) 中的 CUSUM 统计量过程在此初始化:

$$C_0 = 0. \quad (1.14)$$

CUSUM 统计量首先在 24 页被引入, 引入的形式是在随机变量序列 Y_i 是独立的, 且符合高斯分布 (is Gaussian?) 的时候; 也就是, $Y_i \sim N(\mu, 1)$ ($i=1, 2, \dots$), 且当 $i < v$ 时 $\mu = \mu_0$, 而当 $i > v$ 时, $\mu = \mu_1$. 既然它是在 21 页引入, (1.12) 中的 CUSUM 统计量过程, 和与它有联系的 (1.13) 中的 CUSUM 停止时间已经在大量的有趣的实时统计行为中的突变探测中得到应用。一个这种应用的例子是信号处理 (见【10】), 该应用检测了流行病的爆发 (见【29】), 金融疾病 (financial surveillance?) 调查, 和更多最近的计算机版本。(见【19】或【30】)。CUSUM 停止时间的流行主要得益于它的低复杂性和最优化特性, 且不管是离散时间模型还是连续时间模型, 都是如此。(例子可见【21】,【22, 23】,【6】,【27】或【26】)。

作为一个具体的例子, 我们现在生成一个类似于 24 页引入 CUSUM 的形式 (form?)。在这个效应中, 令 $Y_i \sim N(\mu_0, \sigma^2)$ 在转变点时间 v 转变为 $Y_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ 。我们现在来导出 CUSUM 统计过程 (1.12) 的形式, 以及与之相关的 (1.13) 中的 CUSUM 停止时间, 这些都将在本节的例子中用到。在这个效应中, 我们现在用 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 表示高斯核。对于更早给出的随机变量序列 Y_i , 我们现在可以计算 (可见【28】或【25】):

$$\begin{aligned} C_n &= \max_{0 \leq v \leq n} \log \left. \frac{dP_v}{dP_\infty} \right|_{F_n} = \max_{0 \leq v \leq n} \log \frac{\prod_{i=1}^{v-1} \phi\left(\frac{Y_i - \mu_0}{\sigma}\right) \prod_{i=v}^n \phi\left(\frac{Y_i - \mu_1}{\sigma}\right)}{\prod_{i=1}^n \phi\left(\frac{Y_i - \mu_0}{\sigma}\right)} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \max_{0 \leq v \leq n} (\mu_1 - \mu_0) \sum_{i=v}^n \left[Y_i - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

在看过 (1.14) 之后, 我们在 $Y_0 = \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}$ 处初始化 (1.15) 序列, 并且要区分以下两种情况:

- Case 1: $\mu_1 > \mu_0$: divide out $\mu_1 - \mu_0$, multiply by the constant σ^2 in (1.15), and use (1.13) to obtain the CUSUM stopping rule T^+ :

$$T^+(h^+) = \inf \left\{ n \geq 0 : \max_{0 \leq v \leq n} \sum_{i=v}^n \left[Y_i - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right] \geq h^+ \right\} \quad (1.16)$$

for an appropriately scaled threshold $h^+ > 0$.

- Case 2: $\mu_1 < \mu_0$: divide out $\mu_1 - \mu_0$, multiply by the constant σ^2 in (1.15), and use (1.13) to obtain the CUSUM stopping rule T^- :

$$T^-(h^-) = \inf \left\{ n \geq 0 : \max_{0 \leq v \leq n} \sum_{i=v}^n \left[\frac{\mu_1 + \mu_0}{2} - Y_i \right] \geq h^- \right\} \quad (1.17)$$

for an appropriately scaled threshold $h^- > 0$.

如【24】或【11】中研究所表现出的那样，我们可以重新用递推形式来表述停止时间 (1.16) 和 (1.17) 的含义：

$$u_0 = 0; \quad u_n := \max \left\{ 0, u_{n-1} + \left(Y_n - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right) \right\} \quad (1.18)$$

$$d_0 = 0; \quad d_n := \max \left\{ 0, d_{n-1} - \left(Y_n - \frac{\mu_1 + \mu_0}{2} \right) \right\}, \quad (1.19)$$

这可以导出

$$T^+(h^+) = \inf \{n > 0 : u_n \geq h^+\}, \quad (1.20)$$

$$T^-(h^-) = \inf \{n > 0 : d_n \geq h^-\}. \quad (1.21)$$

根据监控序列观察值序列 Y_n 改变前后的平均值偏差, (1.18) 和 (1.19) 中的 u_n 和 d_n 分别形成了一个 CUSUM。这些序列中的一个首先到达阈值时 (在 (1.20) 或 (1.21)), 不同信号的警报 T^+ 或 T^- 分别被触发。

尽管停止时间 (1.16) 和 (1.17) 以及它们分别的等价关系 (1.20) 与 (1.21), 都可以通过使用本节将要阐释的例子, 以正规 CUSUM 方法变化考虑来导出。

(【Page9】formal CUSUM regime change considerations?, 它们也可能被当作无参数的停止规则以直接应用到序列观测值上, 就如在 Brodsky 和 Darkhovsky[8]或 Devore[11]的研究中所展现的那样。前者可以被当作一个一般化的停止规则来探测上涨变化, 同样, 后者可以探测下跌变化。在很多应用中, 通过序列观察值来同时监测上涨或下跌变化是非常有意思的。这也促成了双边 CUSUM (2-CUSUM), 这首先由 Barnard[4]引进, 而该方法的最优化特性则首先被

Hadjiliadis[17] 建立起来， Hadjiliadis 和 Moustakides [16]， and Hadjiliadis et al[18]。在这节的上下文中， 2-CUSUM 停止时间以以下形式呈现：

$$T^+(h^+) \wedge T^-(h^-), \quad (1.22)$$

$T^+(h^+)$ 出现在 (1.20)，而 $T^-(h^-)$ 出现在 (1.21)。2-CUSUM 停止时间的对称版是在满足 $h^+=h^- = h$ 的条件时(1.22)这样的式子

1.3.2 一种 CUSUM 定时模式

我们现在应用上述提到的 (1.22) 中的 CUSUM 停止规则，在没有任何模型假设的情况下，来对一个代表着资产潜在价值的数据流进行处理。换言之，潜在资产不一定被假设为独立或正态分布的。也就是说，我们使用 (1.16) 和 (1.17) 那种模式，但是是符合一种无参数的规范。令 $M>0$ 代表被监控的资产的“最小报价单位”(假设 S 随着 M 的增加而增加;我们不知道这些变化的概率分布),并且 $h>0$ 作为以一个给定的阈值。考虑到 $S_0=s$ ，回想前述内容可知，此时 $T_0=0$ 。通过观察个体资产，我们监控该过程当中，潜在物 (the underlying?) 的价格 S_n 的向上或向下调整。

根据之前的 T_k 时的子部分 (subsection?)， μ_0 被设置为潜在资产在 T_k 时的价值，也就是说 $\mu_0=S_{T_k}$ ，且 $\mu_1^u=S_{T_k}+M$ 和 $\mu_1^d=S_{T_k}-M$ 为将被监测的“新的”平均水平。因此，正如计算了被监测序列变化前后平均值偏差的 (1.18) 与 (1.19) 等式中所展现的那样，我们现在再来监测潜在序列 S_n ($n=1, 2\dots$)，从大量数据中可以得到 (from the quantities?)

$$\begin{aligned} m_k^u &:= \frac{(S_{T_k} + M) + S_{T_k}}{2} = S_{T_k} + \frac{M}{2}, \\ m_k^d &:= \frac{(S_{T_k} - M) + S_{T_k}}{2} = S_{T_k} - \frac{M}{2}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

此处 $k\geq 0$ 。对于这个效应，设 $u_0^k=d_0^k=0$ 并且当 $n\geq 1$ 时，定义 CUSUM 统计量为：

$$\begin{aligned} u_n^k &:= \max\{0, u_{n-1}^k + (S_{n+T_k} - m_k^u)\}, \\ d_n^k &:= \max\{0, d_{n-1}^k - (S_{n+T_k} - m_k^d)\}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

因此，当 $k\geq 0$ 时，针对我们所想要的趋势追踪型的交易策略的 CUSUM 定时模式，就得以通过 (1.20) 和 (1.21) 式来定义。(且从 (1.1) 和 (1.2) 也可以得到启发)

$$\begin{aligned}
\text{Property } + (k+1) : u_n^k \geq h; \quad \text{Property } - (k+1) : d_n^k \geq h \\
j_k^* := \min\{n > 0 : \text{Property } + (k+1) \text{ or } - (k+1) \text{ occurs}\} \quad (1.25) \\
T_{k+1} := T_k + j_k^*.
\end{aligned}$$

换言之，每个 T_k 都是(1.22)中的以 k 为周期的对称的 $2 - \text{CUSUM}$ 停止时间。最终，在“一天结束的时候”，为了算法的需求，在最后一次的价位变化中，我们关仓，而这个过程中也一定包括了终结了当天交易的一个转变点。

1.3.3 我们的珍贵笔记，CUSUM 定时

以下的数据和图表描述了(1.25)中的 CUSUM 定时模式，这个模式被应用于交易策略(1.5)，而这个策略在 2011 年的美国国债拍卖中被应用。当时报价收益的增量为 \$1000。在图 1.1 中，我们列出资产价格，以及被持有股份的数量，每个子时期的收益，和总的策略运行收益。图表 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 和 1.6 展现了五年期债券与 30 年期债券的单个子时期的收益，以信号点的数量来标明。图表 1.7 是将图表 1.3, 1.4, 1.5 和 1.6 中的 30 年期债券数据合并后所得。

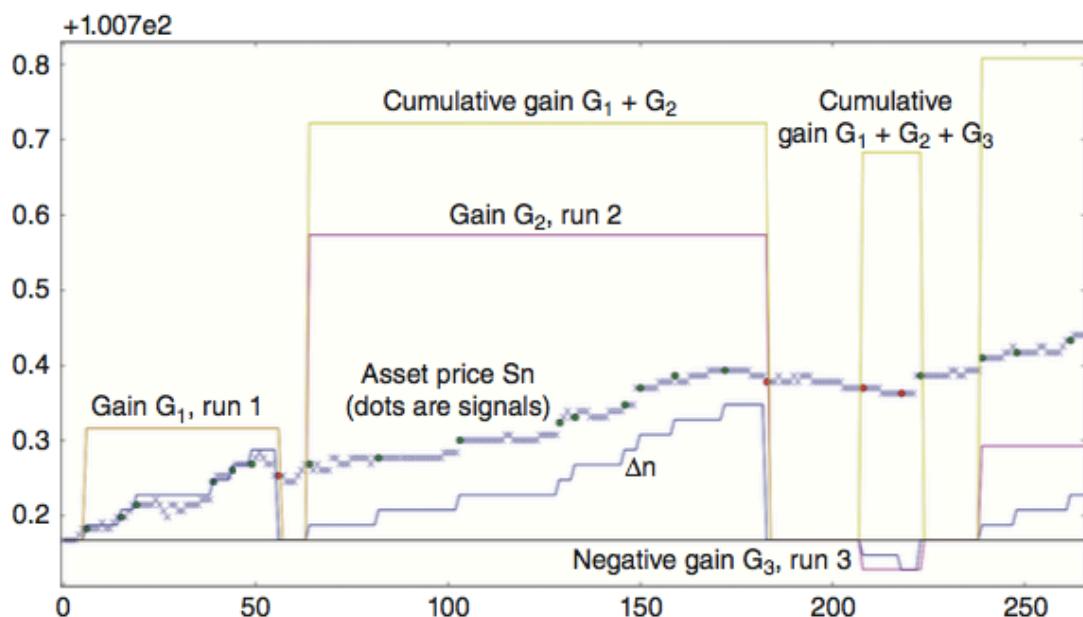


FIGURE 1.1 Plot of the first subperiods, and cumulative gain, for the CUSUM strategy, August 2, 2011, US 5-year treasury note.

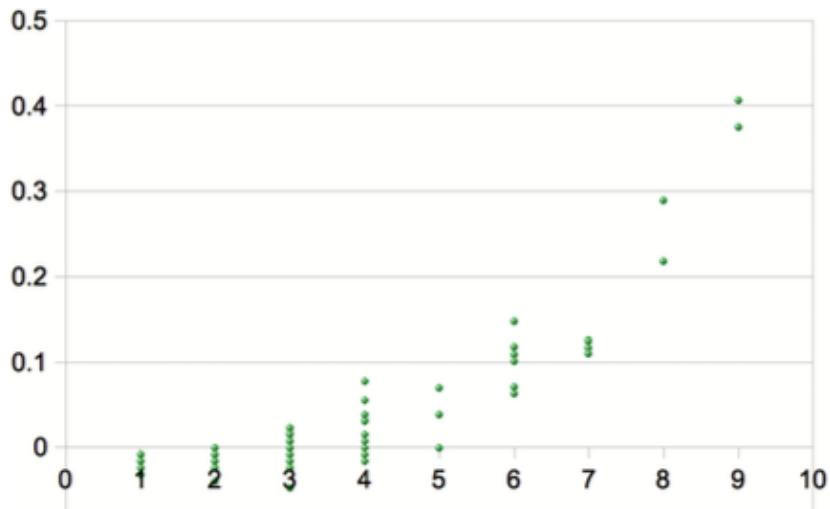


FIGURE 1.2 Lengths of subperiods versus gains, August 2, 2011, US 5-year treasury note.

1.4 例子：最小变动价位的随机游走

现在我们通过描述一个简单的模型，来对资产价格变化进行建模。假设 $\exists N > 0$ 使得序列 $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ 为一个随机游走模型的步数，这个模型的值在 $-N$ 在 N 之间的整数上来回跳跃。也就是说， $|X_j| \leq N$ 对所有的 $j \in \mathbb{N}$ 成立，并且对每个 j ，以及 $p_k = P(X_j = k) \geq 0$ 与 $\sum_{k=-N}^N p_k = 1$ ，有 $X_j \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$ 。再令 $S_n = s + \sum_{j=1}^n X_j$ 。我们将考虑 S_n 为最小变动价位的一个随机游走，而不是价格本身的随机游走，并且因此使得最小变动价位的大小为 $M=1$ 。

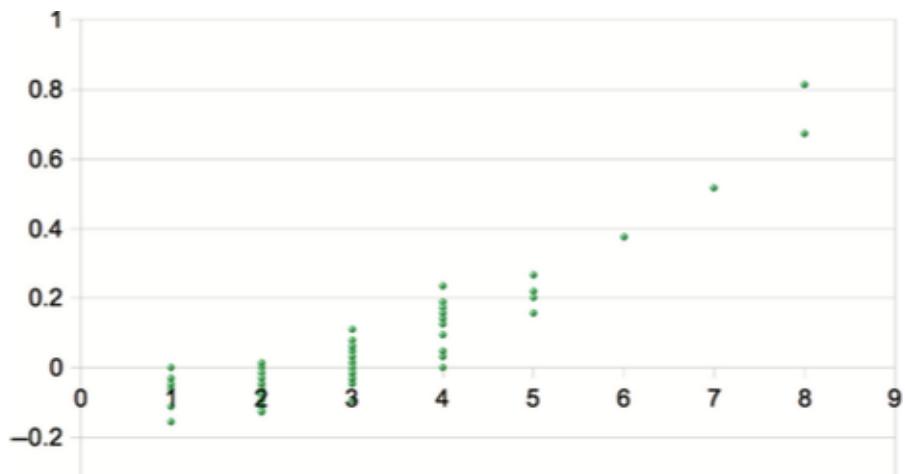


FIGURE 1.3 Subperiod length versus gain, July 29, 2011, US 30-year treasury note.

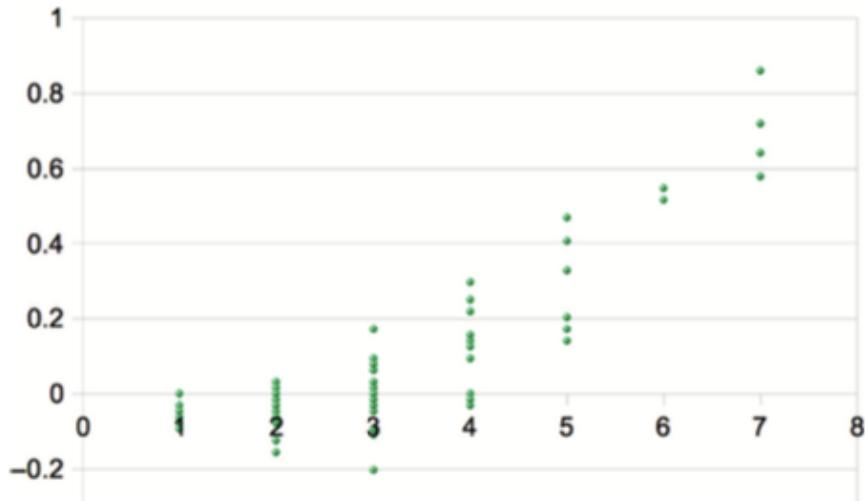


FIGURE 1.4 Subperiod length versus gain, August 1, 2011, US 30-year treasury note.

注意，因为对 $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ， $\Delta_n=0 \Leftrightarrow n=\alpha(1)$ ，一个子时期的期望收益就是某次 Δ_n 上的偏移为 0 的期望收益，因此我们可以简单地考虑在时间间隔 $(T_{\alpha(0)} = 0, T_{\alpha(l)})$ 上的第一种偏移（独立于其他偏移）。同样，要注意，在这种情况下，是否交易成本 $c=0$ ，且 (1.11) 中的 G_i 为 IID 随机变量。

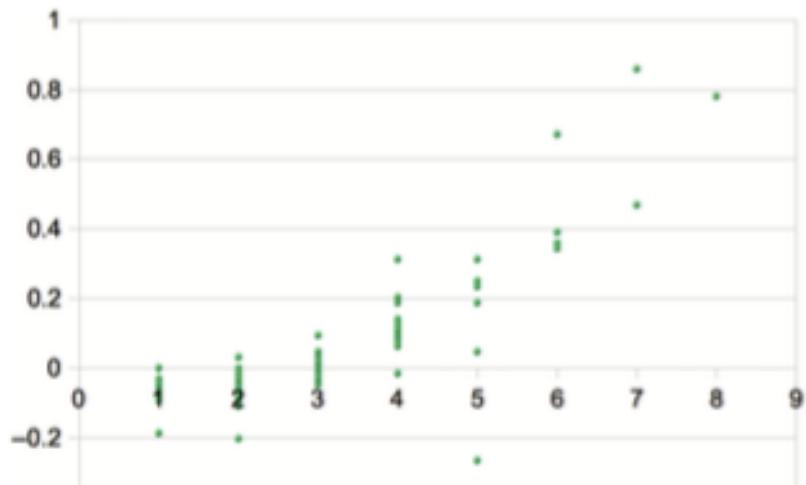


FIGURE 1.5 Subperiod length versus gain, August 2, 2011, US 30-year treasury note.

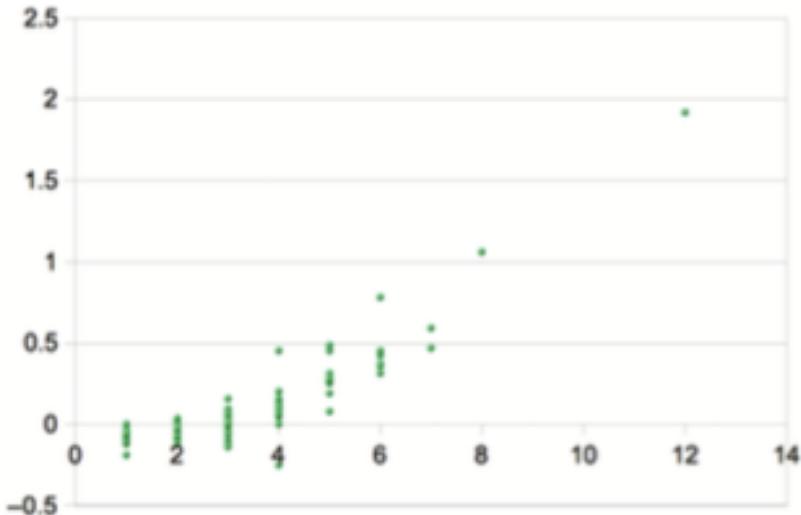


FIGURE 1.6 Subperiod length versus gain, August 3, 2011, US 30-year treasury note.

设

$$p^+ := P(T_1 = T_1^+), \quad p^- := 1 - p^+ = P(T_1 = T_1^-), \quad (1.26)$$

并且注意信号定时增量是独立的。条件是信号符号 $\alpha_{(l-1)+1}$ 在 $T_{\alpha(l-1)+1}$, Y_i 是一个几何随机变量 (起始于1), 这个随机变量给出了子时期1中相同符号的信号数。 Y_i 的分布是以 $F_{T_{\alpha(l-1)+1}}$, 也就是

$$Y_l \sim \begin{cases} \text{geom}(p^-) & \text{if } T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^+, \\ \text{geom}(p^+) & \text{if } T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^-. \end{cases} \quad (1.27)$$

为了解释这个问题, 考虑 $T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^+$ 的情况 (牛市子时期的第一个+信号): 一个+信号的子时期拥有 p^+ 的“失败率” (一个+信号会一直持续直到子时期内出现了另一次买入), 并且有 p^- 的“成功率” (一个-信号会一直持续直到子时期内出现了另一次卖出)。

A_l 是一个 $F_{T_{\alpha(l-1)+1}}$ -可测随机变量, 每个 (1.11) 中的总量上的增量都独立于时间 $T_{\alpha(l-1)+1}$ 。最终, 要注意 Y_l 是独立于游走本身直到时间 $T_{\alpha(l-1)}$ 之前的。而如果 $c=-$, 那么 G_l 也是如此。

1.4.1 一个子时期的随机游走期望收益

我们希望去检验子时期1的期望收益 $E(G_1)$ 。为了初始分析的简单性考虑，设 $c=0$ 。因为 G_l 是独立同分布的，我们将计算 $E(G_l)$ 。也就是说，因为 $\alpha(0)=0$ ，且 $Y_l = \alpha(1) - \alpha(0) - 1 = \alpha(1) - 1$ （由(1.11)可知），

$$E(G_1) = E \left[(-1)^{A_1} \sum_{j=1}^{Y_1} j Z_j \right]. \quad (1.28)$$

我们以 Y_l 和 A_l 的可能取值为条件。注意到， T_l 的符号也决定了 Z_j 的可能性（ $j=1, 2, \dots, Y_l - 1$ ）。 Z_j 取决于它所驻留的子时期种类，所以基于事件 $\{Y_l = n\} \in F_{T_{\alpha(l)}}$ ，且根据设定，对于 $j = \alpha(l-1)+1, \dots, \alpha(l)$ ，

$$\begin{aligned} B_{j,l,n}^+ &:= E(Z_j \mid T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^+, Y_l = n), \\ B_{j,l,n}^- &:= E(Z_j \mid T_{\alpha(l-1)+1} = T_{\alpha(l-1)+1}^-, Y_l = n), \end{aligned} \quad (1.29)$$

接着，对于 $n=1, 2, \dots$ ，我们有

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{j=1}^{Y_1} j Z_j \mid T_1 = T_1^+, Y_1 = n \right] &= E \left[\sum_{j=1}^n j Z_j \mid T_1 = T_1^+, Y_1 = n \right] \\ &= \sum_{j=1}^n j E \left[Z_j \mid T_1 = T_1^+, Y_1 = n \right] = \sum_{j=1}^n j B_{j,1,n}^+. \end{aligned} \quad (1.30)$$

因为 $B_{j,1,n}^+$ 上的条件($B_{j,1,n}^-$ 也类似)是仅基于时间增量(T_0, T_1)和 $(T_{\alpha(l)-1}, T_{\alpha(l)})$ 上的游走。对于 $n>1$ ， $B_{j,1,n}^+$ 和 $B_{j,1,n}^-$ 是对 $j=1, 2, \dots, n-1$ 时的数量。同样，对于这些 j ，因为 T_j 上的符号全部为 $+$ ， $B_{j,1,n}^+$ 也由于具有强马尔科夫性而保持在 T_{j-1} 不变。然而，因为信号 $T_{\alpha(l)}=T_{n+1}$ 相对 T_n 有不同的符号， $B_{j,1,n}^+$ 也就有一个不同的分布。实际上，因为

这个条件暗示了 $T_{n+1} = T_{\alpha(1)} = T^-$, $B_{j,1,n}^+$ 由于强马尔科夫性, 在 $T_n = T_{\alpha(1)-1}$ 时可被写作:

$$\begin{aligned} B_{n,1,n}^+ &= E \left[Z_n \mid T_1 = T_1^+, Y_1 = n \right] = E \left[Z_n \mid T_1 = T_1^+, T_{\alpha(1)=n+1} = T_{\alpha(1)}^- \right] \\ &= E \left[Z_n \mid T_{\alpha(1)=n+1} = T_{\alpha(1)}^- \right] = B_{1,1,n}^- \end{aligned}$$

为了简化记号, 我们重写 $B_{j,1,n}^+ = B^+$ 和 $B_{j,1,n}^- = B^-$, 因为他们不依赖于 n 。在 $n=1$ 的时候, 我们仅有 $B_{1,1,1}^+ = B^-$ 和 $B_{1,1,1}^- = B^+$, 并注意到 $B^+ \geq 0$ 且 $B^- \leq 0$ 。因此, 我们(1.30)中的总量为:

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{j=1}^{Y_1} j Z_j \mid T_1 = T_1^+, Y_1 = n \right] &= \sum_{j=1}^n j B_{j,1,n}^+ = \sum_{j=1}^{n-1} j B_{j,1,n}^+ + n B_{n,1,n}^+ \\ &= \frac{n(n-1)}{2} B^+ + n B^- . \end{aligned} \quad (1.31)$$

唯一需要为 $B_{j,1,n}^-$ 的可比参数改变的东西就是那些符号; 因此, 我们也有

$$E \left[\sum_{j=1}^{Y_1} j Z_j \mid T_1 = T_1^-, Y_1 = n \right] = \frac{n(n-1)}{2} B^- + n B^+ . \quad (1.32)$$

接着, 基于 T_1 的符号的条件假设, 我们给出概率 $Y_1=n$ 。这很好理解, 因为我们知道, 基于 T_1 的符号的条件假设, Y_1 是一个集合随机变量。由 (1.27) 可知, 对 $n=1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} P(Y_1 = n \mid T_1 = T_1^+) &= (p^+)^{n-1} (p^-) \\ P(Y_1 = n \mid T_1 = T_1^-) &= (p^-)^{n-1} (p^+) . \end{aligned} \quad (1.33)$$

通过 (1.31), (1.32) 和 (1.33), 并回忆上文的 $p^- = 1 - p^+$, 再考虑到子时期由一次清算前的 n 个符号构成, 一个子时期的期望收益即为

$$\begin{aligned}
E(G_1 | Y_1 = n) &= p^+ E \left[\sum_{j=1}^{Y_1} j Z_j \mid T_1 = T_1^+, Y_1 = n \right] \\
&\quad - p^- E \left[\sum_{j=1}^{Y_1} j Z_j \mid T_1 = T_1^-, Y_1 = n \right] \\
&= p^+ \left(\frac{n(n-1)}{2} B^+ + nB^- \right) - p^- \left(\frac{n(n-1)}{2} B^- + nB^+ \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} (B^+ p^+ - B^- p^-) + n(B^- - B^+). \tag{1.34}
\end{aligned}$$

由 (1.27) 和 (1.33)，在忽略符号的情况下，可得一个子时期持续 n 个信号的概率，

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = n) &= P(Y_1 = n | T_1 = T_1^+) P(T_1 = T_1^+) + P(Y_1 = n | T_1 = T_1^-) P(T_1 = T_1^-) \\
&= (p^+)^n (p^-) + (p^-)^n (p^+), \tag{1.35}
\end{aligned}$$

这也给出了一个子时期相同符号的信号的期望数

$$E(Y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(Y_1 = n) = \frac{p^+}{p^-} + \frac{p^-}{p^+}. \tag{1.36}$$

注意到，这一定符合通过对 s 的符号作出假设所算出的结果，也就是通过 (1.33)，

$$E(Y_1) = E(Y_1 | T_1 = T_1^+) p^+ + E(Y_1 | T_1 = T_1^-) p^- = \frac{p^+}{p^-} + \frac{p^-}{p^+}.$$

我们能够加总所有 (1.34) 中的可能取值 n ，并用 (1.35) 在给定 p^- , p^+ , B^- 与 B^+ 的情况下，得到一个子时期的期望收益：

$$\begin{aligned}
E(G_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} E(G_1 | Y_1 = n) P(Y_1 = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(n+1)}{2} (B^+ p^+ - B^- p^-) + n(B^- - B^+) \right] \\
&\quad \times ((p^+)^n (p^-) + (p^-)^n (p^+)) \\
&= B^+ p^+ \left(\left(\frac{p^+}{p^-} \right)^2 - 1 \right) - B^- p^- \left(\left(\frac{p^-}{p^+} \right)^2 - 1 \right).
\end{aligned} \tag{1.37}$$

注意到，如果 $p^+ = 0.5$ （这对任何对称随机游走都满足），那么 $E(G_l) = 0$ ，且随着 p^+ 下降到 0，或 p^+ 上升到 1， $E(G_l)$ 会趋于无穷大。

1.4.2 简单随机游走，CUSUM 定时

通过应用 CUSUM 定时，我们现在计算出了对于一个资产价格的简单游走模型，它在第一个子时期的期望回报。设置我们的 CUSUM 阈值为 $h=1$ ，我们对于简单非对称的最小价位变动随机游走的概率测度，也就是， $N=1$ ，此时有 $p_l=p$, $p_{-l}=1-p$ ($0 < p < 1$)。当 $M=1$ ，对于每个 $k>0$ ，我们由 (1.23) 可得

$$m_k^u = S_{T_k} + \frac{1}{2}, \quad m_k^d = S_{T_k} - \frac{1}{2}.$$

因为 $X_j \in \{-1, 1\}$ 对每个 $0 \leq j < T_1$, u_j^0 与 d_j^0 的可能值，由 (1.24) 可知，为 $\{0, 0.5, 2\}$ ，取值为 2 的情况仅出现在两个连续同类型的最小价位变动发生（结束于一个偶数次游走步）。 T_1 是当第一次出现满足 u_{2j}^0 和 d_{2j}^0 的 2j 的时候。因此，

$$\begin{aligned}
T_1 = T_1^+ = 2j &\iff X_{k+1} = -X_k \quad \forall k, 1 \leq k < 2j-1, X_{2j-1} = X_{2j} = 1; \\
T_1 = T_1^- = 2j &\iff X_{k+1} = -X_k \quad \forall k, 1 \leq k < 2j-1, X_{2j-1} = X_{2j} = -1.
\end{aligned}$$

考虑到 $S_0=s>0$, S_{T_1} 只能取两个可能的值，从之前描述的路径来看。对 $j=1, 2, \dots$, 每个概率以几何随机变量的形式出现，且基于最后两个游走步 X_{T_1-1} , X_{T_1} ，在这个情况下，一次所谓的“失败”就是一个相反方向的两个游走步的序列；也就是 +1 之后是 -1，或者 -1 之后是 +1.

$$\begin{aligned}
\{T_1 = T_1^+\} &\iff \{S_{T_1} = s + 2\}; \\
P(S_{T_1} = s + 2, T_1^+ = 2j) &= [2p(1-p)]^{j-1} p^2 \quad (1.38) \\
\{T_1 = T_1^-\} &\iff \{S_{T_1} = s - 2\}; \\
P(S_{T_1} = s - 2, T_1^- = 2j) &= [2p(1-p)]^{j-1} (1-p)^2.
\end{aligned}$$

一种对于导向一个“+”信号 T_1^+ 的路径在图表 1.8 中展示出来。 S_{T_1} 取每个值的概率是

$$\begin{aligned}
P(S_{T_1} = s + 2) &= \sum_{j=1}^{\infty} [2p(1-p)]^{j-1} p^2 = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)} \\
P(S_{T_1} = s - 2) &= \sum_{j=1}^{\infty} [2p(1-p)]^{j-1} (1-p)^2 = \frac{(1-p)^2}{1 - 2p(1-p)}.
\end{aligned}$$

因为现在对于每个信号类型只有一个可能的结果，所以这些结果与每种信号类型发生的概率也是匹配的：

$$\begin{aligned}
p^+ &:= P(T_1 = T_1^+) = P(S_{T_1} = s + 2) = \frac{p^2}{1 - 2p(1-p)}; \quad (1.39) \\
p^- &:= P(T_1 = T_1^-) = P(S_{T_1} = s - 2) = \frac{(1-p)^2}{1 - 2p(1-p)}.
\end{aligned}$$

于是，增量 $Z_k = S_{T_{k+1}} - S_{T_k}$ 会在 $\{-2, 2\}$ 之间取值，并且取哪个值将取决于 T_{k+1} 时信号的符号。由于是以信号符号为条件，并且由于 T_k 时的强马尔科夫性，我们得到条件期望

$$B^+ = E(Z_k | T_{k+1} = T_{k+1}^+) = 2P(S_{T_1} = s + 2 | T_1 = T_1^+) = 2, \quad (1.40)$$

$$B^- = E(Z_k | T_{k+1} = T_{k+1}^-) = -2P(S_{T_1} = s - 2 | T_1 = T_1^-) = -2. \quad (1.41)$$

因此，由 (1.34) (1.40) (1.41) 和 (1.37)，我们可得到期望收益

$$E(G_1) = \frac{2(p^4 - (1-p)^4)}{1 - 2p(1-p)} \left[\frac{p^2}{(1-p)^4} - \frac{(1-p)^2}{p^4} \right], \quad (1.42)$$

这个结果可以被证明是关于它的最小值 $p=0.5$ 对称的（在 $E(G_1)=0$ 时），且 $\lim_{p \downarrow 0} E(G_1) = \lim_{p \uparrow 1} E(G_1) = \infty$ 。

在一个信号出现前，我们也一直有一个期望时间值：由 (1.38) 和 (1.39)，

$$\begin{aligned}
E(T_1 | T_1 = T_1^+) &= \sum_{j=1}^{\infty} (2j)P(T_1 = 2j | T_1 = T_1^+) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{P(T_1 = 2j, T_1 = T_1^+)}{P(T_1 = T_1^+)} = \frac{2p^2}{p^+} \sum_{j=1}^{\infty} j[2p(1-p)]^{j-1} \\
&= \frac{2p^2}{p^+(1-[2p(1-p)])^2} = \frac{2}{1-[2p(1-p)]}; \\
E(T_1 | T_1 = T_1^-) &= \frac{2}{1-[2p(1-p)]}; \\
E(T_1) &= E(T_1 | T_1 = T_1^+)p^+ + E(T_1 | T_1 = T_1^-)p^- \\
&= \frac{2}{1-[2p(1-p)]}. \tag{1.43}
\end{aligned}$$

最后，同符号信号出现在一个子时期的期望数量可由 (1.36) 和 (1.39) 得，

$$E(Y_1) = \frac{p^+}{p^-} + \frac{p^-}{p^+} = \frac{p^2}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{p^4 + (1-p)^4}{p^2(1-p)^2}. \tag{1.44}$$

1.4.3 懒惰简单随机游走，CUSUM 定时

引入一个步骤分布 (with step distribution) 更加复杂的随机游走分布，比如像本节标题中所提到的“懒惰随机游走”

$$X_j = \begin{cases} +1 & \text{with probability } p_1 \\ 0 & \text{with probability } p_0 \\ -1 & \text{with probability } p_{-1}, \end{cases} \tag{1.45}$$

此时 $p_{-1} + p_0 + p_1 = 1$ 条件的成立，为 CUSUM 策略概率的分析，以及期望收益的计算分析更增添了一些复杂度。我们将维持 $h=1$ 与 $M=1$ 。

通过引入一个零最小变动价位，我们扩张了“失败”的可能情况，以触发一个 CUSUM 信号。我们将懒惰随机游走路径分解成七个有区别的合理组件。首先，有三个可能的模式是可能触发信号失败的，这三个分别是“up-down”（拥有概率 $p_1 p_{-1}$ ），“down-up”（拥有概率 $p_{-1} p_1$ ），与“zero”（一个拥有概率 p_0 的一步模式）。注意到前两个是

(1.38) 中的可能失败模式。接着，还有四个“成功”模式：

- (1.38) 中的两种形式：“up-up”(拥有概率 p_1^2) 与 “down-down”(拥有概率 p_{-1}^2)
- 还有两个零最小变动价位的模式：“up-zero”(拥有概率 $p_1 p_0$) 和 “down-zero”(拥有概率 $p_{-1} p_0$)。

像这样的发生在一个信号时间的模式的数量是呈几何增长的。定义

$$S^* := p_1^2 + p_{-1}^2 + p_1 p_0 + p_{-1} p_0 \quad (1.46)$$

$$F^* := 1 - S^* = 2p_1 p_{-1} + p_0 \quad (1.47)$$

分别为信号模式成功与失败概率。接着，定义 V_j 为直到信号 $j=0,1,2\cdots$, $V_j \sim geom(S^*)$ (开始于 0) 前失败模式的数量，并且，以 V_j 为条件，我们定义 W_j 为发生在这个时间框架中的零最小变动价位模式的数量。因为 W_j 零最小变动价位可以在 V_j 的任何模式中发生， $W_j|_{V_j} \sim bin(V_j, \frac{p_0}{F^*})$ 。注意到如果 $p_0=0$ ，这就归结到之前章节所讲的情况中去。

我们可以在一个信号出现之前计算期望时间：如果有 V_j 个失败模式(在长度为 1 或 2 的最小变动价位中)在信号 j 之前，其中一个模式 W_j 为 1-tick 0-tick 失败，并且最终我们得到一个 2-tick 成功模式，那么，第一个信号之前的最小变动价位的数量就是

$$T_1 := W_1 + 2(V_1 - W_1) + 2 = 2V_1 - W_1 + 2. \quad (1.48)$$

那么由(1.48)和(1.47)，直到一个信号出现之前的期望时间就是，

$$\begin{aligned} E(T_1) &= 2E(V_1) - E(W_1) + 2 = 2E(V_1) - \sum_{v=0}^{\infty} E(W_1 | V_1 = v) P(V_1 = v) + 2 \\ &= 2E(V_1) - \frac{p_0}{F^*} \sum_{v=0}^{\infty} v P(V_1 = v) + 2 \\ &= \frac{2(1 - S^*)}{S^*} \left(1 - \frac{p_0}{F^*} \right) + 2 = \frac{2 - p_0}{S^*}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

在 $p_0=0$ ，(1.49) 可归结到(1.43)所对应的情况。

0-tick 成功模式增加了一个信号上的潜在资产价值。在 (1.40) 和 (1.41) 中, 唯一的价格变化增量 (1.9) 中的 Z_k 的可能值为 {-2,2}。在这里, Z_k 的可能值为 {-2,-1,1,2}, 并且因此, 由 $j-2$ 时的马尔科夫性, 并定义 $P_j^T = P(T_1 = j) / S^*$ ($j > 2$) , 我们得到如下概率

$$\begin{aligned} P(S_{T_1} = s+2) &= \sum_{j=2}^{\infty} P(S_{T_1} = s+2, T_1^+ = j) \\ &= p_1^2 \sum_{j=2}^{\infty} P(S_{j-2} = s, T_1 > j-2) = p_1^2 \sum_{j=2}^{\infty} P_j^T, \\ P(S_{T_1} = s+1) &= p_1 p_0 \sum_{j=2}^{\infty} P_j^T, \quad P(S_{T_1} = s-1) = p_{-1} p_0 \sum_{j=2}^{\infty} P_j^T, \\ P(S_{T_1} = s-2) &= p_{-1}^2 \sum_{j=2}^{\infty} P_j^T, \end{aligned} \quad (1.50)$$

由 $\sum_{j=2}^{\infty} P_j^T = \frac{1}{S^*}$ 可知, 这些概率总和为 1。(1.50) 中的等式也可导出条件概率

$$\begin{aligned} P(S_{T_1} = s+2 | T_1 = T_1^+) &= \frac{p_1^2}{p_1^2 + p_1 p_0}, \\ P(S_{T_1} = s+1 | T_1 = T_1^+) &= \frac{p_1 p_0}{p_1^2 + p_1 p_0}, \\ P(S_{T_1} = s-1 | T_1 = T_1^-) &= \frac{p_{-1} p_0}{p_{-1}^2 + p_{-1} p_0}, \\ P(S_{T_1} = s-2 | T_1 = T_1^-) &= \frac{p_{-1}^2}{p_{-1}^2 + p_{-1} p_0}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

在图表 1.9 中可以找到一种对可以触发一个“+”信号的路径的阐释。延续 p^+ 与 p^- 在 (1.26) 中的定义, 我们可以得到

$$p^+ = \frac{p_1 p_0 + p_1^2}{S^*}; \quad p^- = \frac{p_{-1} p_0 + p_{-1}^2}{S^*}, \quad (1.52)$$

这使得我们可以去计算出一个子时期的信号的期望数。由 (1.52) 和 (1.36),

$$E(Y_1) = \frac{p^+}{p^-} + \frac{p^-}{p^+} = \frac{p_1 p_0 + p_1^2}{p_{-1} p_0 + p_{-1}^2} + \frac{p_{-1} p_0 + p_{-1}^2}{p_1 p_0 + p_1^2}, \quad (1.53)$$

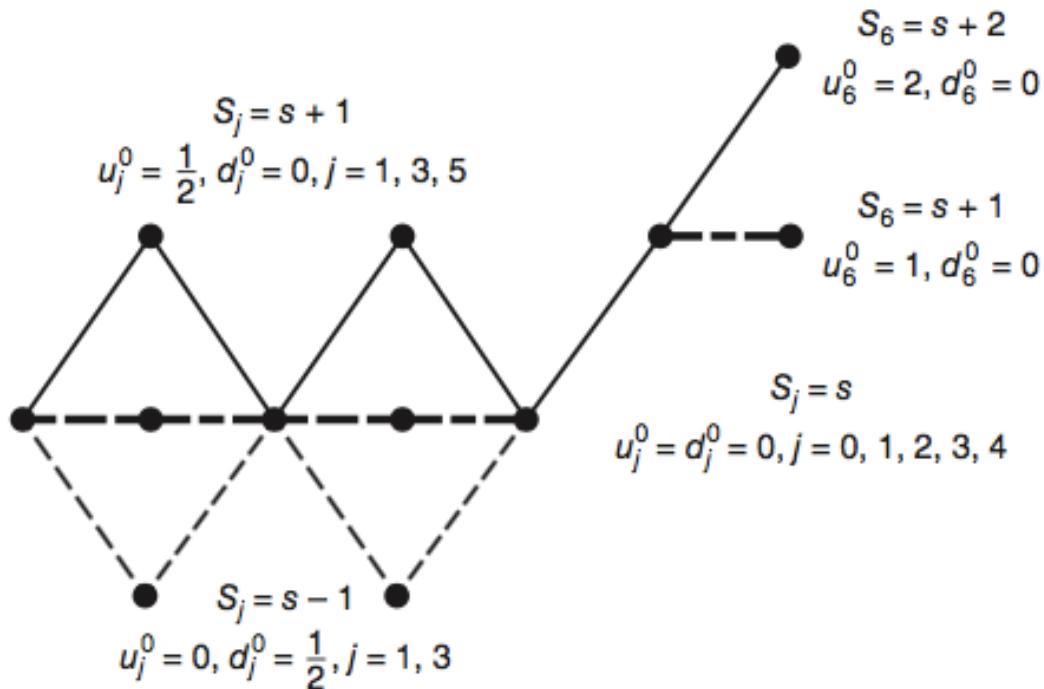


FIGURE 1.9 The 12 possible LSRW paths for $T_1^+ = 6$.

如果 $p_0=0$, 那么期望值会下降。同样, 如果游走是对称的, 也就是, 如果 $p_1=p_{-1}$, 那么 $E(Y_1)=2$ 。

接着, 我们找到 B^+ 和 B^- , 它们正式增量变化 Z_k 的期望尺寸(expected size), 且依赖于子时期的类型。概览一下(1.40)与(1.41)(此处 $p_{0=0}$), 我们可以得到(1.51)

$$\begin{aligned}
B^+ &= 2P(S_{T_1} - s = 2 \mid T_1 = T_1^+) + P(S_{T_1} - s = 1 \mid T_1 = T_1^+) \\
&= 1 + \frac{p_1^2}{p_1 p_0 + p_1^2},
\end{aligned} \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
B^- &= -2P(S_{T_1} - s = -2 \mid T_1 = T_1^-) - P(S_{T_1} - s = -1 \mid T_1 = T_1^-) \\
&= -1 - \frac{p_{-1}^2}{p_{-1} p_0 + p_{-1}^2}.
\end{aligned} \tag{1.55}$$

最终，通过结合 (1.37) 与 (1.52) 以及 (1.55) 式，可以得到一个子时期末尾阶段的期望收益 $E(G_1)$ ，这也推广了(1.42)中 $p_0=0$ 的情况。

1.5 CUSUM 策略蒙特卡洛模拟

现在我们在将要使用蒙特卡洛方法，去模拟在之前部分提到的最小变动价位的随机游走的集合（collection）。

我们模拟的两种类型的随机游走都是(1.45)的子集：他们都是懒惰对称简单随机游走

$$X_j = \begin{cases} +1 & \text{with probability } p_1 = \frac{1-p_0}{2} \\ 0 & \text{with probability } p_0 \in \{0, 0.05, 0.1, \dots, 0.35\} \\ -1 & \text{with probability } p_{-1} = \frac{1-p_0}{2}, \end{cases} \tag{1.56}$$

以及带有向上偏移的懒惰非对称简单随机游走。

$$X_j = \begin{cases} +1 & \text{with probability } p_1 = 0.5 - \frac{p_0}{2} + 0.05j, j \in \{0, 1, \dots, 6\} \\ 0 & \text{with probability } p_0 \in \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\} \\ -1 & \text{with probability } p_{-1} = 1 - p_1 - p_0, \end{cases} \tag{1.57}$$

在这里， j 允许 $p_{-1}>0$ 的情况。每个游走的类型在一天内交易 $N=5000$ 的最小变动价位，且每天的初始价格 $s=10,000$ 最小变动价位（为了保证一天的交易不会使所有资产亏空），并且像这样运行了 200 个模拟交易日。

我们定义一个交易策略的“空闲时间”这个概念为：子时期之间的（随机）最小变动价位的次数集合，也就是，当我们的算法表明我们的投资组合为空时(declares that our portfolio be empty)。如果某日由 N

个最小变动价位构成，那么该日的空闲时间就定义为

$$\text{idle time} := \{n \in \{1, 2, \dots, N\} : \Delta_n = 0\}.$$

该日的空闲时间百分比就是 $\frac{|\text{idle time}|}{N}$ 。如果一天内有 R 个子时期，那么就有

$$|\text{idle time}| = \sum_{l=0}^{R-1} (T_{\alpha(l)+1} - T_{\alpha(l)}) + (N - T_{\alpha(R)}),$$

此处如果最后一个子时期的结果是由当日结束时的算法要求推导出来的(induced by the end-of-day settling the algorithm requires)，那么就有 $T_{\alpha(R)} = N$ 。我们可以通过 $\frac{N}{E(T)[E(Y)+1]}$ 来估计每天的子时期的平均数目，

并且，因为已经有了子时期之间信号的长度信息，我们可以天真地(naively)估计一下一天的空闲时间的平均总量，只要将一个信号的平均时间乘上某日子时期的平均数目，也就是 $\frac{N}{E(T)[E(Y)+1]} \cdot E(T_1) = \frac{N}{E(Y)+1}$ 。

另外，某日的空闲时间百分比，也可以简单地用被该日最小变动价位数目划分的值来估计，简言之，即 $\frac{1}{E(Y)+1}$ 。

在 1.7 节附录中可以找到包含模拟结果的表格。表格 1.A.1 包含以下懒惰对称随机游走实验平均值，可以用(1.56)表示为：

□ 每个子时期的平均收益(1.37)。可以看出在所有的对称情况下，它与 $E(G_1)=0$ 是非常接近的。

□ 平均子时期长度，接近于 (1.49) 和 (1.53) 的 $E(T_1)E(Y_1)$: 举例来说， $p_0 = 0.1$ 有 $7.670 \approx (\frac{2-0.1}{1-2(0.45)^2-0.1})(2) = 3.\overline{83}(2) = 7.\overline{67}$ ；

□ 每个子时期的平均信号数，接近于(1.53)的 $E(Y_1)+1$: 举例来说， $p_0=0.1$ 有 $2.998 \approx 2+1=3$ ；

□ 每日子时期的平均数目，接近于 R 以上的数(本身估计在 $\frac{N}{E(T)[E(Y)+1]}$ 之上)；对于 $p_0 = 0.1$ ，也就是 $435.185 \approx \frac{5000}{3.\overline{83}(3)} \approx 434.21$ ；

□ 还有空闲时间百分比；对 $p_0 = 0.1$ 的情况，也就是 $33.2\% \approx$

$$\frac{1}{E(Y)+1} = \frac{1}{3}.$$

剩余的表格包含对来自 1.4.3.部分的不同类型的懒惰简单随机游走的近似实验数据。在表格 1.6,1.7 和 1.8 中展示了使用从 5 年期, 与 30 年期债券的真实数据生成的频率分布的模拟结果。

表格 1.A.2 包含这些游走的子时期的一些细节:

□包含改期信号具体数目的这类子时期的平均数目; 举例来说, 使用(1.52)式, 对来自于(1.35)的数据将会有: $p_0 = 0.1$, 子时期长度 $n=4$ 有 27.31, 当被表格 1.A.1 中的平均总子时期数 435.185 划分时, 会表现出(gives) $\frac{27.31}{435.185} \approx 0.06275 \approx P(Y_1 = 4) = 0.0625$ 。

□还有可以使用(1.52),(1.54)和(1.55), 从(1.34)式推出: 在一个长度 $n=4$ 的子时期里的平均收益, 即 $3.64 \approx E(G_1|Y_1 = 4) = 4.378$ 。

表格 1.A.3 和 1.A.4 包含一样的结果值(来自 1.4.2.部分的简单随机游走), 就像表 1.A.1 和 1.A.2 一样。举例来说, 在表 1.A.3, 估计 $p_1=0.65$, 我们有

- 每个子时期的平均收益 $\approx E(G_1) = 16.481$ (来自(1.42)) ;
- 平均子时期长度 $13.749 \approx E(Y_1) \cdot E(T_1) \approx 3.7389 \cdot 3.6697 = 13.7208$ (来自(1.44)和(1.43));
- 每个子时期的平均信号数量 $4.746 \approx E(Y_1) + 1 = 4.7389$ (来自(1.44));
- 子时期平均数量 $288.120 \approx \frac{N}{E(T)[E(Y)+1]} = \frac{5000}{3.6697(4.7389)} = 287.516$;
- 空闲时间平均百分比 $20.8\% \approx \frac{1}{E(Y)+1} = \frac{1}{4.7389} = 21.10\%$ 。

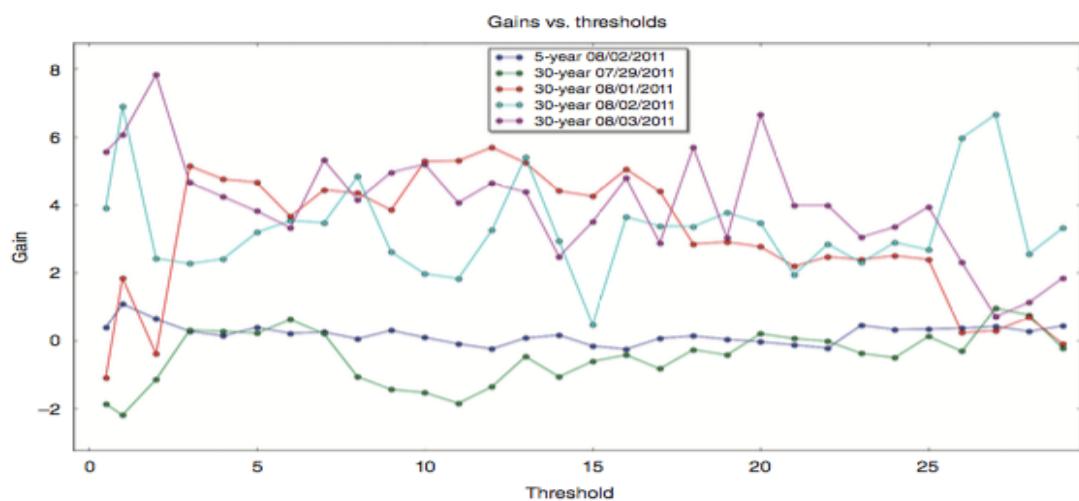
注意到, 对于无“懒惰”概率 p_0 的简单游走, 当游走变得更非对称时, 每次模拟的平均空闲时间总量(子时期之间的最小变动价位百分比)会下降, 而得到一个信号(1.43)的期望时间总量(在一个子时期中也是这样(and so be in a subperiod)) 也会下降。在表 1.A.4, 当 $p=p_1$ 时, 每个区块的第一行近似于(1.35)乘上表 1.A.3 中的子时期的平均数量, 而第二行近似于(1.34), 即 $n^2 - 3n$ 对 n 个同符号信号。

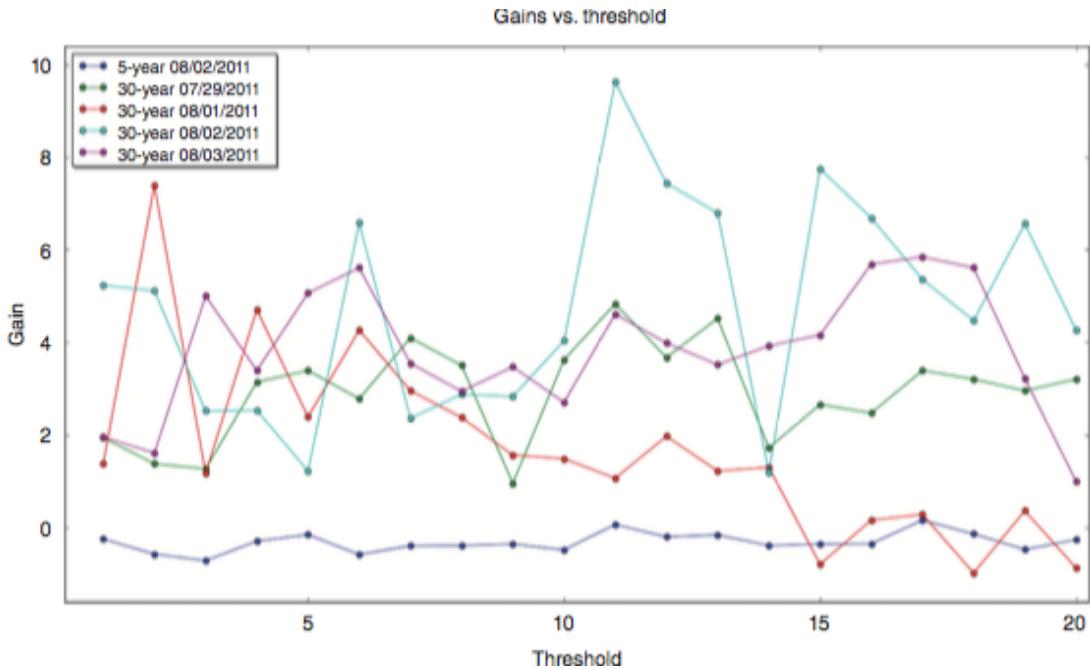
1.6 阈值参数的作用

在这个部分，我们讨论改变前述的交易策略中的阈值参数 h 的效用。我们首先利用 1.3.3. 部分的真实数据估计一下这个效用。特别地，图标 1.10 总结了改变参数对 1.3.3. 中的五个 US Treasury 证券的收益的影响。在这个图表中展示出变化的阈值不改变收益的符号。实际上，变化的阈值 5 年期的 note 的日收益几乎不变。而在 30 年期的债券中，尽管观察到一个更随机的偏差，但也没观察到一个收益的上升或下降的效果。这表现了作为一个阈值函数(a function of the threshold) 上述策略的收益的健壮性层级。一个更接近的估计表明：不考虑阈值尺寸 (size) 的情况下，如表 1.1-1.5 的“每个子时期信号的平均#”栏中所示，每个子时期的信号数量几乎是恒定的。但是，每个交易日的子时期的数量会随着阈值增加而减少。这在图表 1.11 中体现了出来，我们也注意到每个交易日的信号数会以阈值的平方根的速率减少。当阈值增加，那么在给定交易日的子时期数目的减少是可以预期的(is to be expected)，因为会随阈值变化而变化的数量就是最小变动价位的数量，或等价地，即用最小变动价位来衡量的，在一个给定子时期完成之前的时间总量。这是正确的，因为一个更小的阈值会促使一个更敏感的 CUSUM 停止时间。实际上，当阈值增加，一个信号的期望时间 (CUSUM 警报)，会以大约阈值的平方根的速率增加，即，

$$E[T_1(h)] \approx E[T_1(1)]\sqrt{h}. \quad (1.58)$$

为了验证(1.58)，需要注意的是，在一种趋势上，来自(1.24)的 CUSUM 统计数据中的某一个会以二次方的速率增加，而无论阈值 h 如何变化。举例来说，





图表 1.10 五年期债券和 30 年期债券的总收益 VS 阈值。上面的图：按如下趋势变化的小阈值:0.5*tick,tick,2*tick,3*tick,etc。(最高到 29*tick)。下面的图：按如下趋势变化的大阈值：50*tick,2*50*tick,,3*50*tick,etc。(最高到 20*50*tick)。

在一个向上的趋势中， $u_n^k=O(n^2)$ ，因此需要耗费以打破这个阈值的时间 n ，即使得最小的 n 值可以满足 $u_n^k \geq h$ ，可通过观察 $O(n^2) \approx h \Rightarrow n \approx O(\sqrt{h})$ 。而系数也可以在这之后通过检查阈值基准线 $h=1$ 来获得。我们也为此提供来自蒙特卡洛模拟出的债券数据实验依据。

TABLE 1.1 5-year 08/02/2011 note. Tick size is $M = 0.0078125$, the number of ticks is $N = 17,074$. Each threshold h in column 1 is actually hM .

Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
0.5	488	1468	0.001	23.340	3.008	33.290	0.385
1	412	1259	0.003	28.488	3.056	31.258	1.074
2	331	1030	0.002	36.332	3.112	29.565	0.637
3	278	864	0.001	43.209	3.108	29.647	0.279
4	241	744	0.001	50.440	3.087	28.804	0.147
5	210	662	0.002	58.895	3.152	27.562	0.389
6	197	609	0.001	60.675	3.091	29.993	0.217
7	187	575	0.001	63.588	3.075	30.356	0.256
8	178	540	0.000	65.157	3.034	32.072	0.054
9	158	500	0.002	74.911	3.165	30.678	0.304
10	155	484	0.001	76.729	3.123	30.344	0.093
50	70	197	-0.004	154.271	2.814	36.752	-0.249
100	44	131	-0.013	245.205	2.977	36.810	-0.577
150	38	111	-0.019	287.921	2.921	35.920	-0.718
200	29	79	-0.010	356.862	2.724	39.387	-0.297
250	27	76	-0.006	397.074	2.815	37.209	-0.157

TABLE 1.2 30-year 07/29/2011 note. Tick size is $M = 0.015625$, the number of ticks is $N = 4588$. Each threshold h in column 1 is actually hM .

Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
0.5	467	1334	-0.004	6.503	2.857	33.806	-1.865
1	335	988	-0.007	8.931	2.949	34.786	-2.191
2	233	681	-0.005	13.309	2.923	32.411	-1.142
3	192	565	0.002	15.901	2.943	33.457	0.311
4	174	504	0.002	17.632	2.897	33.130	0.282
5	146	430	0.001	20.651	2.945	34.285	0.218
6	127	375	0.005	24.055	2.953	33.413	0.624
7	123	360	0.002	24.894	2.927	33.261	0.204
8	113	331	-0.009	26.186	2.929	35.506	-1.062
9	104	306	-0.014	28.471	2.942	35.462	-1.436
10	103	302	-0.015	28.573	2.932	35.854	-1.530
50	34	115	0.057	97.676	3.382	27.616	1.937
100	23	75	0.060	145.391	3.261	27.114	1.375
150	18	59	0.070	180.778	3.278	29.076	1.266
200	13	50	0.242	278.077	3.846	21.207	3.140
250	14	47	0.242	229.714	3.357	29.904	3.390

TABLE 1.3 30-year 08/01/2011 bond. Tick size is $M = 0.015625$, the number of ticks is $N = 3244$. Each threshold h in column 1 is actually hM .

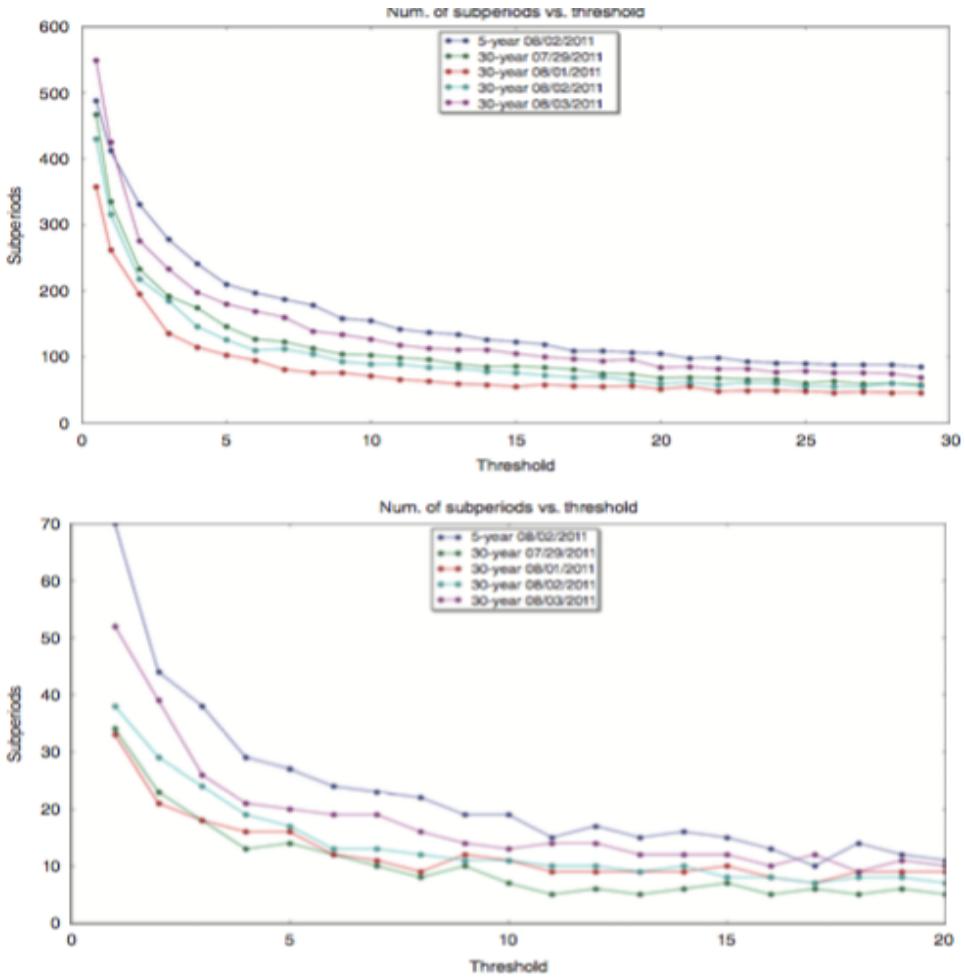
Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
0.5	358	1036	-0.003	6.095	2.894	32.737	-1.100
1	262	792	0.007	8.531	3.023	31.104	1.839
2	195	582	-0.002	11.031	2.985	33.693	-0.392
3	136	457	0.038	17.669	3.360	25.925	5.140
4	115	393	0.041	19.826	3.417	29.716	4.750
5	103	356	0.045	22.136	3.456	29.716	4.656
6	95	324	0.038	23.579	3.411	30.949	3.655
7	81	291	0.055	28.815	3.593	28.052	4.437
8	76	268	0.057	30.500	3.526	28.545	4.344
9	76	254	0.051	30.039	3.342	29.624	3.844
10	71	251	0.074	32.338	3.535	29.223	5.280
50	33	111	0.042	76.818	3.364	21.856	1.375
100	21	70	0.352	112.333	3.333	27.281	7.390
150	18	57	0.065	114.500	3.167	36.467	1.172
200	16	52	0.294	142.312	3.250	29.809	4.703
250	16	46	0.149	139.750	2.875	31.073	2.391

TABLE 1.4 30-year 08/02/2011 bond. Tick size is $M = 0.015625$, the number of ticks is $N = 4349$. Each threshold h in column 1 is actually hM .

Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
0.5	430	1291	0.009	6.802	3.002	32.743	3.901
1	316	982	0.022	9.497	3.108	30.996	6.888
2	218	704	0.011	13.298	3.229	33.341	2.421
3	185	604	0.012	16.411	3.265	30.191	2.264
4	146	509	0.016	20.856	3.486	29.984	2.404
5	126	444	0.025	24.397	3.524	29.317	3.186
6	110	393	0.032	28.391	3.573	28.190	3.531
7	112	382	0.031	26.804	3.411	30.973	3.468
8	104	354	0.046	28.577	3.404	31.662	4.829
9	93	321	0.028	33.269	3.452	28.857	2.609
10	89	298	0.022	32.921	3.348	32.628	1.967
50	38	129	0.138	80.763	3.395	29.432	5.233
100	29	90	0.176	105.207	3.103	29.846	5.110
150	24	75	0.105	128.375	3.125	29.156	2.516
200	19	61	0.133	179.895	3.211	21.407	2.531
250	17	54	0.072	178.706	3.176	30.145	1.219

TABLE 1.5 30-year 08/03/2011 note. Tick size is $M = 0.015625$, the number of ticks is $N = 5153$. Each threshold h in column 1 is actually hM .

Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
0.5	549	1674	0.010	6.342	3.049	32.428	5.556
1	425	1311	0.014	8.169	3.085	32.622	6.058
2	276	900	0.028	12.641	3.261	32.292	7.827
3	233	741	0.020	14.670	3.180	33.670	4.654
4	198	634	0.021	17.662	3.202	32.137	4.232
5	180	576	0.021	19.444	3.200	32.078	3.810
6	169	532	0.020	20.604	3.148	32.428	3.325
7	160	507	0.033	22.331	3.169	30.662	5.311
8	139	457	0.030	25.612	3.288	30.914	4.141
9	134	438	0.037	26.560	3.269	30.933	4.953
10	127	414	0.041	28.307	3.260	30.235	5.187
50	52	172	0.038	68.404	3.308	30.972	1.953
100	39	125	0.041	92.282	3.205	30.157	1.609
150	26	92	0.192	150.077	3.538	24.277	5.001
200	21	73	0.161	185.571	3.476	24.374	3.391
250	20	68	0.253	194.600	3.400	24.471	5.063



图表 1.11 子时期数量 VS 五年期与 30 年期债券的阈值。上面的图：按如下趋势变化的小阈值:0.5*tick,tick,2*tick,3*tick,etc。(最高到 29*tick)。下面的图：按如下趋势变化的大阈值： 50*tick,2*50*tick,,3*50*tick,etc。(最高到 20*50*tick)。

表 1.1-1.5 的第五栏代表子时期的平均长度 $E[T_{\alpha(1)}(h)]$; 第六栏代表每个子时期的平均信号# $E[Y_1] + !$ 。因此，一个信号的期望时间可以被求得

$$E [T_1(h)] = \frac{E[T_{\alpha(1)}(h)]}{E [Y_1]} \quad (1.59)$$

TABLE 1.6 Average gains and lengths of subperiods, asymmetric random walk. $P(-3) = 0.00012$, $P(-1) = 0.00141$, $P(-1) = 0.05348$, $P(0) = 0.88619$, $P(1) = 0.05670$, $P(2) = 0.00182$, and $P(3) = 0.00029$, for various thresholds. These probabilities were computed from the 5-year 08/02/2011 bond. Tick size is 1, the number of ticks is 5000 and starting price 10,000. The number of simulations is 1000.

Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
1	162.401	488.191	0.030	20.648	3.006	32.936	4.9
2	125.799	378.175	0.036	26.665	3.006	32.913	4.5
3	103.358	310.196	0.041	32.508	3.001	32.801	4.3
4	88.207	264.402	0.034	38.121	2.998	32.749	3.0
5	77.574	232.413	0.037	43.390	2.996	32.681	2.9
6	69.419	208.576	0.052	48.530	3.005	32.623	3.6
7	63.469	190.459	0.066	53.123	3.001	32.566	4.2
8	58.775	176.465	0.077	57.408	3.002	32.517	4.5
9	54.911	164.795	0.072	61.455	3.001	32.509	4.0
10	51.568	154.781	0.062	65.533	3.001	32.411	3.2
11	48.860	146.595	0.077	69.171	3.000	32.406	3.8
12	46.511	139.607	0.078	72.754	3.002	32.323	3.6
13	44.562	133.657	0.085	75.995	2.999	32.270	3.8
14	42.796	128.334	0.108	79.217	2.999	32.197	4.6
15	41.267	123.685	0.084	82.236	2.997	32.127	3.5
100	14.414	43.619	0.588	245.445	3.026	29.243	8.5
200	9.628	29.632	1.451	381.445	3.078	26.549	14.0
300	7.636	23.615	2.119	489.755	3.093	25.205	16.2
400	6.477	20.074	2.487	588.740	3.099	23.735	16.1
500	5.672	17.819	3.057	687.449	3.142	22.016	17.3

TABLE 1.7 Average gains and lengths of subperiods, asymmetric random walk. $P(-4) = 0.00494$, $P(-3) = 0.00997$, $P(-2) = 0.03732$, $P(-1) = 0.12561$, $P(1) = 0.62919$, $P(0) = 0.12747$, $P(2) = 0.04575$, and $P(3) = 0.01279$, $P(4) = 0.00697$, for various thresholds. These probabilities were computed from the 30-year 07/29/2011 and 08/02/2011 bonds after a best fit that was verified by chi-square test. The p -value for 07/29/2011 is 0.87 and for 08/02/2011, 0.815. Tick size is 1, the number of ticks is 5000, and the starting price 10,000. The number of simulations is 1000.

Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
1	443.934	1336.262	0.083	7.535	3.010	33.099	37.0
2	299.194	903.318	0.161	11.208	3.019	32.935	48.3
3	241.959	731.714	0.240	13.879	3.024	32.838	58.0
4	204.308	618.324	0.289	16.452	3.026	32.776	59.1
5	181.312	549.742	0.352	18.563	3.032	32.684	63.8
6	164.086	498.442	0.421	20.548	3.038	32.569	69.1
7	150.539	457.415	0.453	22.410	3.039	32.529	68.2
8	139.256	423.863	0.507	24.255	3.044	32.446	70.6
9	130.517	397.679	0.549	25.909	3.047	32.369	71.6
10	122.775	374.570	0.617	27.547	3.051	32.358	75.8
11	115.983	354.361	0.683	29.171	3.055	32.333	79.2
12	110.395	337.981	0.775	30.676	3.062	32.269	85.6
13	105.205	322.336	0.848	32.226	3.064	32.194	89.2
14	100.997	309.365	0.902	33.602	3.063	32.127	91.1
15	96.980	297.191	0.927	34.964	3.064	32.183	89.9
100	30.065	96.746	5.522	117.792	3.218	29.172	166.0
200	19.133	63.974	10.603	190.220	3.344	27.210	202.9
300	14.566	50.358	16.365	258.656	3.457	24.648	238.4
400	11.936	42.703	22.771	323.669	3.578	22.734	271.8
500	10.217	37.682	28.222	388.293	3.688	20.656	288.3

TABLE 1.8 Average gains and lengths of subperiods, asymmetric random walk. $P(-4) = 0.01023$, $P(-3) = 0.01460$, $P(-2) = 0.04601$, $P(-1) = 0.13666$, $P(0) = 0.58916$, $P(1) = 0.12914$, $P(2) = 0.04548$, $P(3) = 0.01772$, and $P(4) = 0.01100$, for various thresholds. These probabilities were computed from the 30-year 08/01/2011 and 08/03/2011 bonds after a best fit that was verified by chi-square test. The p -value for 08/01/2011 is 0.80 and for 08/03/2011, 0.48. Tick size is 1, the number of ticks is 5000 and starting price 10,000. The number of simulations is 1000.

Threshold	# subperiods	# signals	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # of signals per subperiod	% of idle time	Total gain
1	488.364	1463.672	-0.014	6.834	2.997	33.249	-7.0
2	333.138	998.589	-0.017	10.031	2.998	33.169	-5.6
3	271.557	813.925	-0.015	12.306	2.997	33.162	-4.0
4	229.944	688.463	-0.043	14.532	2.994	33.170	-9.9
5	204.761	613.066	-0.039	16.340	2.994	33.085	-7.9
6	185.382	555.241	-0.034	18.050	2.995	33.077	-6.4
7	170.343	509.950	-0.055	19.636	2.994	33.102	-9.4
8	157.385	471.073	-0.049	21.245	2.993	33.127	-7.7
9	147.463	441.897	-0.020	22.710	2.997	33.022	-3.0
10	138.931	416.129	-0.012	24.127	2.995	32.960	-1.6
11	131.472	393.089	-0.049	25.474	2.990	33.018	-6.5
12	125.161	374.424	-0.053	26.768	2.992	32.993	-6.6
13	119.276	356.992	-0.026	28.096	2.993	32.976	-3.0
14	114.317	341.780	-0.075	29.313	2.990	32.980	-8.5
15	109.788	328.314	-0.068	30.509	2.990	33.009	-7.5
100	35.056	104.634	0.031	96.983	2.985	32.003	1.1
200	22.908	68.150	-0.009	149.200	2.975	31.642	-0.2
300	17.932	53.188	-0.089	192.092	2.966	31.108	-1.6
400	14.932	44.283	-0.198	232.382	2.966	30.602	-3.0
500	13.070	38.673	-0.084	267.170	2.959	30.162	-1.1

为了看到平方根的效果(To see the square-root effect), 我们可以检查一下一下行:

□在表 1.2 的行 2 和行 4, 我们可以计算出 $E[T_1(1)] = \frac{8.931}{1.949} = 4.582$

以及 $E[T_1(4)] = \frac{17.632}{1.897} = 9.295$ 。我们可以注意到 $E[T_1(4)] \approx E[T_1(1)] \sqrt{4}$ 。

□在表 1.2 的行 4, 我们可以计算出 $E[T_1(3)] = \frac{15.901}{1.943} = 8.184$ 和 $E[T_1(3)] \approx E[T_1(1)] \sqrt{3}$ 。

□在表 1.3 的行 2 和行 8, 我们可以计算出 $E[T_1(1)] = \frac{8.531}{2.023} = 4.217$ 和 $E[T_1(7)] = \frac{28.815}{2.593} = 11.113$ 。这也推出了 $E[T_1(7)] \approx E[T_1(1)] \sqrt{7}$ 。

我们也对于每个债券都生成了相应的模拟数据, 从这些数据中我们可以再次发掘出相同的平方根效应。为了阐述得更具体一点, 我们已经将一个懒惰随机游走和 30 年期债券系列数据 (07/29/2011 和 08.02.2011) 匹配了起来, 并给予了合适的参数 (已在表 1.7 的说明文字中指明)。一个简单的良好拟合测试(simple goodness-of-fit test)展现了所选模型的有效性。剩下的 30 年期债券数据也经历了同样的过程处理。在表 1.7 和 1.8 中分别总结了模拟的结果。我们再次阐述对在以下观测数据中使用的相同的阈值中体现的平方根效应。

□在表 1.7 的行 1, 4 和 3, 我们可以计算出 $E[T_1(1)] = \frac{7.535}{2.01} = 3.749$, $E[T_1(4)] = \frac{16.452}{2.026} = 8.12$ 还有 $E[T_1(3)] = \frac{13.879}{2.024} = 6.857$. 再一次, 我们分别观测到近似值 $E[T_1(4)] = E[T_1(1)] \sqrt{4}$ 和 $E[T_1(3)] = E[T_1(1)] \sqrt{3}$ 。

□在表 1.8 的行 1 和 7, 我们可以计算出 $E[T_1(1)] = \frac{6.834}{1.997} = 3.422$ 和 $E[T_1(7)] = \frac{19.636}{1.994} = 9.847$, 从此中我们也又发现了近似值 $E[T_1(7)] \approx E[T_1(1)] \sqrt{7}$ 。

平方根效应表明增加阈值会减少在给定的任何交易日的完整子时期数量 R , 并且因此也导致此期间的完成的交易数下降。因此, 尽管改变阈值不会对缺少交易成本情况下的收益有一个对称的效应, 但增加阈值会减少交易的数量而增加交易策略的“风险”。一个对于策略整日全部运行成果的好的测度(measure)为 $\sum_{l=1}^R G_l$, 而该测度在满足独立同分布的 G_l 的零交易成本模型中, 通过 Wald 的方程可得到期望值

为 $E(R)E(G_l)$ 。在不同的资产价格概率模型下来检查这个作为 h 的函数的结果是很有趣的，特别是基于 h 的值来最大化当日的总收益。然而，在交易成本存在的情况下，Wald 的方程式会失效，并且分析偏差会变得极其有挑战性。(and analytical derivations are extremely challenging)。而且，交易成本经常随公司的不同而变化，因此最优的阈值设置也将不仅仅取决于选择一个“风险”的测度，也决定于和具体产品或公司相关的交易成本。

1.7 结论与未来的工作

1.3.3 部分的图表 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 和 1.6 展示出：前面提到的 CUSUM 交易策略，在出现一个相反符合的信号之前的同符号多信号子时期中表现良好。这在与 1.4 部分的随机游走模型的模拟结果相关的表 1.3, 1.5, 1.7, 1.A.1 和 1.A.3 中也有非常明显的体现。这样的子时期的标志就是持续上升或下降的价格趋势。相反地，提出的策略在相同符号的信号数量很少，且紧接着出现相反符号的信号的情况下，运行效果是亏损的。这个观察结果说明 CUSUM 交易策略可以通过在线“稳定方法(regimes of stability)”检测，而被继续被改进(和趋势方法有差异)。这也表明新的在线算法的创造可能会受计算机视觉的启发(比如可见 Hadjiliadis 和 Stamos[19]，或者 Stamos et al.(30))。

另一个可以表明稳定时间与不稳定时间差异的统计量是 CUSUM 的反应速度，它衡量了 CUSUM 统计过程最后被重置为 0 和 CUSUM 警报之间的时长(可见实例[31])。我们想要探索这些研究的方向，通过限制稳定时期的交易，改进所提出算法的表现。

一个需要深入研究的参数是交易成本 c 。[\(1.11\)](#) 中给出的一个子时期的收益的形式可以被写作

$$G_l = (-1)^{A_l} \sum_{j=1}^{Y_l} j Z_{j+\alpha(l-1)} + c \left(\sum_{j=1}^{Y_l} j Z_{j+\alpha(l-1)} - 2 Y_l S_{T_{\alpha(l)}} \right). \quad (1.60)$$

这个第二项应该作为一个尺度上滑动的固定概率来分析(be analyzed as a fixed percentage, and on a sliding scale)(比如，考虑到大量的回扣/折扣)。此外，交易成本应该通过蒙特卡洛模拟来研究，因为它需要资产在那个子时期的清算价格信息。

一个和交易成本紧密练习的参数是在 CUSUM 定时里使用的阈值

h。一个更小的阈值表明更频繁的交易，但是会减少策略在给定任何交易日的“风险”。最优的阈值应该是基于一个合适的对策略的“风险”度量，以及策略所应用的市场的交易成本。

另外，应该注意到的是随机游走例子（包括此处的），并不是确切的资产价格模型（我们不想产生一个 Bachelierian 谬论那样的错误）。这些模型仅仅用来阐述策略和为基本的运算提供条件。在未来的工作中，去检验与实际高频资产数据拟合得最优的随机游走模型会是很有意思的（考虑到这种现实的如买卖差价的因素(taking into account such real-world considerations as the bid-ask spread)）。另外，还有一些公共的问题包括拓展策略的分析，以适用于其他的资产价格移动模型——主要地，建立一个二项式模型（在该模型里，我们的随机游走是最简单的那种情况），并限定一个连续的几何的布朗运动。注意到，我们的两套随机游走研究了不同类型的“时间”： $p_0=0$ 的情况研究的是“tick time”，这种情况下的时间(clock time)仅当价格移动时才移动。而懒惰游走，也就是 $p_0>0$ 的情况，研究的就是真实时间(因为有价格不变化的样本)。这个简单的矛盾导致了额外可能进入 CUSUM 定时过程的路径(induce extra possible paths into the CUSUM timing process)。一般化的二项式模型在每个样本上的价格上可能变化多个最小变动价位，并且会维持保持不变的概率，这也是很有趣的。

最后，我们希望检验设置了 m_k^u 和 m_k^d 以等待多个最小变动价位的出现，而不是单个的 CUSUM 策略(比如， $m_k^u=S_{T_k} + \frac{bM}{2}$ ($b>1$))。

附录：表格

此处是 1.5 部分描述的表格。

TABLE 1A.1 Average gains and lengths of subperiods, lazy simple symmetric random walk.

p_1	Average total gain	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # signals per subperiod	Average # subperiods	Average % idle time
0.000	-0.864	-0.002	7.995	2.998	417.472	33.2
0.050	-5.379	-0.013	7.824	2.999	426.918	33.2
0.100	-3.204	-0.007	7.670	2.998	435.185	33.2
0.150	1.720	0.004	7.579	3.001	440.642	33.2
0.200	4.417	0.010	7.505	3.002	445.020	33.2
0.250	7.205	0.016	7.492	3.003	446.076	33.2
0.300	-3.728	-0.008	7.465	2.996	446.920	33.3
0.350	-0.144	-0.000	7.527	3.000	443.581	33.2

TABLE 1.A.2 Number of subperiods of a specified length, and average gain over those subperiods, lazy simple symmetric random walk.

p_0	0.000	0.050	0.100	0.150	0.200	0.250	0.300	0.350
# 1-subperiods	209.05	213.37	218.10	220.11	222.32	223.14	223.83	222.24
average gain, 1-subperiod	-1.99	-1.90	-1.81	-1.73	-1.66	-1.60	-1.53	-1.48
# 2-subperiods	104.61	106.94	108.50	110.43	111.67	111.18	111.86	110.48
average gain, 2-subperiod	-1.99	-1.90	-1.81	-1.74	-1.66	-1.59	-1.53	-1.48
# 3-subperiods	51.87	53.50	54.30	54.94	55.27	55.98	56.05	55.32
average gain, 3-subperiod	0.01	0.01	0.01	0.01	-0.01	0.01	0.01	0.02
# 4-subperiods	26.12	26.60	27.31	27.88	27.95	27.92	27.73	27.80
average gain, 4-subperiod	4.01	3.82	3.64	3.50	3.36	3.23	3.09	2.97
# 5-subperiods	12.81	13.33	13.50	13.64	13.91	13.80	13.62	13.99
average gain, 5-subperiod	10.02	9.55	9.11	8.80	8.36	7.99	7.74	7.44
# 6-subperiods	6.49	6.66	6.79	6.86	6.97	6.88	6.94	6.87
average gain, 6-subperiod	18.01	17.26	16.47	15.71	14.99	14.44	13.87	13.26
# 7-subperiods	3.30	3.33	3.36	3.38	3.40	3.67	3.48	3.45
average gain, 7-subperiod	28.03	26.55	25.50	24.37	23.35	22.48	21.71	20.72
# 8-subperiods	1.58	1.60	1.67	1.65	1.83	1.77	1.68	1.74
average gain, 8-subperiod	40.04	38.00	36.13	34.79	33.05	31.75	30.97	29.57
# 9-subperiods	0.81	0.76	0.86	0.88	0.85	0.86	0.84	0.83
average gain, 9-subperiod	54.03	51.29	48.82	47.12	45.01	43.09	41.67	39.80
# 10 + -subperiods	0.83	0.82	0.81	0.88	0.87	0.88	0.89	0.85
average gain, 10 + -subperiods	2091.33	1393.27	1852.19	1524.21	1230.49	1715.07	1220.75	1318.50

TABLE 1A.3 Average gains and lengths of subperiods, asymmetric random walk, $p_0 = 0.0$.

p_1	Average total gain	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # signals per subperiod	Average # subperiods	Average % idle time
0.500	-1.005	-0.002	8.014	3.001	417.140	33.1
0.550	414.950	1.039	8.572	3.165	399.230	31.6
0.600	1,818.090	5.170	10.413	3.705	351.630	26.8
0.650	4,718.815	16.378	13.749	4.746	288.120	20.8
0.700	10,597.510	48.681	19.612	6.667	217.695	14.6
0.750	22,358.635	144.829	29.404	10.181	154.380	9.2
0.800	47,017.940	468.563	47.264	17.080	100.345	5.1

**TABLE 1.A.4 Number of subperiods of a specified length, and average gain over those runs, asymmetric random walk.
 $p_0 = 0.0$.**

p_1	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750	0.800
# 1-subperiods	209.12	192.44	149.00	100.33	56.83	27.99	11.00
average gain, 1-subperiod	-1.99	-1.99	-1.99	-1.99	-1.99	-1.99	-1.98
# 2-subperiods	103.48	95.11	75.41	50.27	29.31	13.47	5.46
average gain, 2-subperiod	-1.99	-2.00	-1.99	-1.99	-1.98	-1.96	-1.94
# 3-subperiods	51.97	49.91	43.08	32.50	20.64	11.08	5.09
average gain, 3-subperiod	0.01	0.01	0.01	0.01	0.03	0.03	0.06
# 4-subperiods	26.20	26.66	27.11	24.35	17.00	10.82	4.56
average gain, 4-run	4.02	4.02	4.02	4.03	4.03	4.08	4.13
# 5-runs	13.76	14.95	17.92	17.76	14.63	9.12	4.30
average gain, 5-run	10.02	10.02	10.02	10.02	10.03	10.08	10.13
# 6-runs	6.18	8.39	11.95	14.38	12.02	8.35	4.28
average gain, 6-run	18.02	18.03	18.04	18.05	18.07	18.13	18.22
# 7-runs	3.29	4.87	8.50	10.80	10.24	7.50	3.98
average gain, 7-run	28.01	28.03	28.00	28.05	28.12	28.10	28.21
# 8-runs	1.70	2.85	5.97	8.47	8.98	6.49	3.79
average gain, 8-run	40.02	40.00	40.03	40.01	40.08	40.08	40.17
# 9-runs	0.69	1.59	3.98	6.70	7.41	5.95	3.31
average gain, 9-run	54.00	54.00	54.05	54.11	54.07	54.14	54.19
# 10 + -runs	0.75	2.44	8.73	22.56	40.63	53.60	54.59
average gain, 10 + -runs	1356.00	2688.00	5096.28	18,888.69	68,970.76	198,829.18	63,3281.20

TABLE 1A.5 Average gains and lengths of runs, asymmetric random walk, $p_0 = 0.1$.

p_1	Average total gain	Average gain per subperiod	Average subperiod length	Average # signals per subperiod	Average # subperiods	Average % idle time
0.450	7.485	0.017	7.683	3.005	434.700	33.2
0.500	428.825	1.032	8.251	3.173	415.625	31.4
0.550	1,825.045	4.979	9.972	3.705	366.535	26.9
0.600	4,729.605	15.804	13.254	4.767	299.270	20.7
0.650	10,741.020	47.569	18.924	6.727	225.800	14.5
0.700	22,858.345	144.381	28.694	10.364	158.320	9.1
0.750	50,243.475	504.478	47.822	17.994	99.595	4.7

TABLE 1A.6 Number of subperiods of a specified length, and average gain over those runs, asymmetric random walk.
 $p_0 = 0.1$.

p_1	0.450	0.500	0.550	0.600	0.650	0.700	0.750
# 1-runs	217.16	199.44	156.22	104.08	58.37	27.67	10.54
avg gain, 1-run	-1.81	-1.81	-1.80	-1.80	-1.78	-1.77	-1.74
# 2-runs	108.08	99.44	78.25	51.39	29.41	14.06	5.47
avg gain, 2-run	-1.81	-1.79	-1.76	-1.69	-1.63	-1.51	-1.34
# 3-runs	54.92	51.84	44.15	34.02	21.74	11.57	4.70
avg gain, 3-run	0.01	0.04	0.14	0.31	0.47	0.64	0.94
# 4-runs	27.02	28.05	28.40	25.00	18.00	10.38	4.34
avg gain, 4-run	3.61	3.73	3.88	4.12	4.29	4.58	4.96
# 5-runs	14.05	15.66	18.58	19.49	15.38	9.06	4.29
avg gain, 5-run	9.02	9.27	9.48	9.82	10.07	10.51	11.06
# 6-runs	6.57	8.90	12.41	14.54	13.19	8.81	4.07
avg gain, 6-run	16.28	16.64	16.96	17.45	17.66	18.25	18.87
# 7-runs	3.58	4.81	8.80	11.25	10.62	7.71	3.69
avg gain, 7-run	25.49	25.62	26.25	26.72	27.38	27.79	28.72
# 8-runs	1.64	2.96	6.07	8.87	8.64	6.85	3.26
avg gain, 8-run	36.23	36.95	37.57	37.91	38.84	39.49	40.15
# 9-runs	0.85	1.78	4.13	6.91	7.64	6.20	3.40
avg gain, 9-run	49.42	50.21	50.84	50.91	51.87	52.39	53.87
# 10 + -runs	0.83	2.73	9.52	23.73	42.81	56.00	55.85
avg gain, 10 + -runs	1119.42	2305.77	6948.10	15,781.54	61,048.80	178,378.58	711,759.83

References

1. Abramov, V., Khan, M. K., and Khan, R. A., A probabilistic analysis of the trading the line strategy, *Quantitative Finance*, Vol. 8, No. 5, pp. 499–512, 2008.
2. Alexander, S. S., Price movements in speculative markets: trends or random walk, *Industrial Management Review*, Vol. 2, No. 2, pp. 7–26, 1961.
3. Alexander, S. S., Price movements in speculative markets: trends or random walk no. 2, *Industrial Management Review*, Vol. 5, No. 2, pp. 338–372, 1964.
4. Barnard, G., Control charts and stochastic processes, *Journal of the Royal Statistical Society B*, Vol. 11, No. 1, pp. 239–271, 1959.
5. Basseville, M., and Nikiforov, I., *Detection of abrupt changes: Theory and applications*, 1993 (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ).
6. Beibel, M., A note on Ritov's Bayes approach to the minimax property of the CUSUM procedure, *Annals of Statistics*, Vol. 24, No. 2, pp. 1804–1812, 1996.
7. Bozdog, B., Florescu, I., Khashanah K., and Wang, J., A study of persistence in price movement using high-frequency financial data. In *Handbook of modeling high-frequency data in finance*, edited by F. Viens, M. Mariani, and I. Florescu, pp. 27–46, 2012 (John Wiley & Sons, Hoboken, NJ).
8. Brodsky, B. E., and Darkhovsky, B. K., *Nonparametric Methods in Change-Point Problems* (Kluwer, Dordrecht), 1993.
9. Broemling, L. D., and Tsurumi, H., *Econometrics and Structural Change*, 1987 (Marcel Dekker, New York).
10. Cohen, A., *Biomedical Signal Processing*, 1987 (CRC Press, Boca Raton, FL).
11. Devore, J., *Probability and Statistics for Engineering and the Science, 8th edition*, 2012 (Brooks/Cole, Boston, MA).
12. Fama, B., and Blum, M., Filter rules and stock market trading, *Journal of Business*, Vol. 40, pp. 226–241, 1966.
13. Figueroa-Lopez, J. E., Lancette, S., Lee, K., and Yanhun, M., Estimation of NIG and VG models for high-frequency financial data. In *Handbook of modeling high-frequency data in finance*, edited by

- F. Viens, M. Mariani, and I. Florescu, pp. 3–26, 2012 (John Wiley & Sons, Hoboken, NJ).
14. Frisen, M., (Ed.), *Financial surveillance*, 2008 (John Wiley and Sons, Hoboken, NJ).
 15. Glynn, P. W., and Iglehart, D. L., Trading securities using trailing stops, *Management Science*, Vol. 41, No. 6, pp. 1096–1106, 1995.
 16. Hadjiliadis, O., and Moustakides, G. V., Optimal and asymptotically optimal CUSUM rules for change point detection in the Brownian motion model with multiple alternatives, *Theory of Probability and Its Applications*, Vol. 50, No. 1, pp. 131–144, 2006.
 17. Hadjiliadis, O., Optimality of the 2-CUSUM drift equalizer rules for detecting two-sided alternatives in the Brownian motion model, *Journal of Applied Probability*, Vol. 42, No. 4, pp. 1183–1193, 2005.
 18. Hadjiliadis, O., Hernandez-del-Valle, G., and Stamos, I., A comparison of 2-CUSUM stopping rules for quickest detection of two-sided alternatives in a Brownian motion model, *Journal of Sequential Analysis*, Vol. 28, No. 1, pp. 92–114, 2009.
 19. Hadjiliadis, O., and Stamos, I., Sequential classification in point clouds of urban scenes, In *Proceedings of 5th International Symposium on 3D Data Processing Visualization and Transmission*, Paris, France, May 17–20, 2010.
 20. Lam, K., and Yam, H. C. CUSUM techniques for technical trading in financial markets, *Financial Engineering and the Japanese Markets*, Vol. 4, pp. 257–274, 1997.
 21. Lorden, G., Procedures for reacting to a change in distribution, *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 42, No. 6, pp. 1897–1908, 1971.
 22. Moustakides, G. V., Optimal stopping times for detecting changes in distributions, *Annals of Statistics*, Vol. 14, No. 4, pp. 1379–1387, 1986.
 23. Moustakides, G. V., Optimality of the CUSUM procedure in continuous time, *Annals of Statistics*, Vol. 32, No. 1, pp. 302–315, 2004.
 24. Page, E. S., Continuous inspection schemes, *Biometrika*, Vol. 41, Nos. 12, pp. 100–115, 1954.
 25. Poor, H. V., and Hadjiliadis, O., *Quickest Detection*, 2008 (Cambridge University Press, Cambridge, UK).

26. Shiryaev, A. N., On optimum methods in quickest detection problems, *Theory of Probability and Its Applications*, Vol. 8, No. 1, pp. 22–46, 1963.
27. Shiryaev, A. N., Minimax optimality of the method of cumulative sums (CUSUM) in the continuous case, *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 51, No. 4, pp. 750–751, 1996.
28. Siegmund, D., *Sequential Analysis*, 1985 (Springer-Verlag, New York).
29. Sonesson, C., and Bock, D., A review and discussion of prospective statistical surveillance in public health, *Journal of the Royal Statistical Society: Series A*, Vol. 166, No. 1, pp. 5–21, 2003.
30. Stamos, I., Hadjiliadis, O., Zhang, H., and Flynn, T., Online algorithms in the classification of urban objects in 3D point clouds, *Proceedings of the 2nd 3D Imaging Processing Visualization and Transmission Conference*, Zurich, Switzerland, October 13–15, 2012.
31. Zhang, H., and Hadjiliadis, O., Drawdowns and the speed of a market crash, *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 14, No. 3, pp. 739–752, 2012.