第二章　高斯不等式和分级敏感度

2.1 简介
随着担保债务凭证市场的发展，建立一个更有熟知度的价格和风险管理的模型十分有必要。高斯copula函数模型虽然有明显的缺陷并且被技术资料（例如Hull和White的文献）和主流的出版物批评，但是它仍然是一个基础的初始模型。 在这一章中，我们将注意力集中在高斯copula函数中高斯不等式在分析分级损失敏感度对相关参数的适用性。这其中的一些方法同样适用于其他模型。详细的证明和适用于非高斯copulas模型的更有普遍性的结果在我们更长的论文中。

我们讨论在r维空间中高斯随机变量X=(X_1……X_n)其中Xj均值为0方差为1，并研究股票分级损失

$$L_{[0,a]} = \sum_{m=1}^{N} l_m 1_{[X_m \le c_m]} - \left\{ \sum_{m=1}^{N} l_m 1_{[X_m \le c_m]} - a \right\}_+ ,$$

其中l，……，l > 0 ，a >0,并且c_1，……，c_n 属于R，都是参数，我们的结论建立了一个关于敏感度$L_{[0,a]}$和相关性r_{jk}=[X_j,Xk]和参数c_j,c_k的恒等式。由此我们可以证明一下不等式：

$$\frac{\partial \mathbb{E}[L_{[0,a]}]}{\partial r_{jk}} \le 0. \qquad (2.1)$$

将这个恒等式应用于包含N个行为符合高斯变量X_j参与者的担保债务凭证模型中，显示随着参与者之间的相关性增强，预期的分级权益损失会下降。这是一个关于高斯copula函数一致相关性的一般化的结论。

我们的方法是Slepian不等式（Slepian[15]），我们这里的目标是关注在担保债务凭证损失的情景下高斯不等式。更局限形式的不等式（2.1）在Hillebrand等人［6，7］，Meng和Sengupta的论文中集中阐明。其他相关的论文包括Cousin和Laurent，他们利用了随机序的一般理论（见Muller和Stoyan［13］）Jarrow和van Deventer[9]探究了在不同情景和模型下权益分级的风险独立性的相关性分析。Agca 和Islam［1］阐明了相关性增强是如何影响市场暗含的违约概率，进而潜在增加分级损失。

2.2 分级损失函数
假定担保债务凭证包含N个参与者，τ_j表示第j个参与者的（随机）违约时间。令：

$$X_j = \Phi_j^{-1}(F_j(\tau_j)), \qquad (2.2)$$

F_j是τ_j的分布函数（与市场价格手段有关），假设它是连续并且严格单调递增的，Φ_j是标准的高斯分布函数。对于任意x属于R有：

$$\mathbb{P}[X_j \le x] = \mathbb{P}\left[\tau_j \le F_j^{-1}(\Phi_j(x))\right] = F_j\left(F_j^{-1}(\Phi_j(x))\right) = \Phi_j(x), \quad (2.3)$$

其中X_j有标准的高斯分布。高斯copula模型假定X_j的联合分布是符合高斯的，因此：

$$X = (X_1, \ldots, X_N) \tag{2.4}$$

是一个n维空间的高斯变量，它的边际值都是标准高斯的。相关性：

$$r_{jk} = \mathbb{E}[X_j X_k] \tag{2.5}$$

反映了j参与者和k参与者之间的违约相关性。令：

$$p_j = \mathbb{E}[\tau_j \le T] = \mathbb{P}[X_j \le c_j], \tag{2.6}$$

为第j个参与者在期限T（在整篇论文中T为固定值）内违约的可能性。

$$c_j = \Phi_j^{-1}(F_j(T)) \tag{2.7}$$

为第j个参与者的违约临界。

在示意模型中，我们探究基本的情况，当违约时间τ_jj在期限T内，有j个参与者违约，导致了在担保债务凭证组合中数量为l_j >0的损失。因此，在［0，T］时期内总损失为：

$$L = \sum_{m=1}^{N} l_m 1_{[X_m \le c_m]}. \tag{2.8}$$

在这个简化了的模型中，我们讨论了基本的单时期的担保债务凭证，忽略了来自实际随机违约时间的折扣，这些是对于初步分析来说适当的基本假设。
分级是在证券投资组合中一个简单的损失范围，它指定在一个极小的区间［a，b］（0<=a<=b）。如果损失x比a小，那么这个分级是不受影响的；当x>=b时，整体分级价值b－a都被损失耗尽；当a<=x<=b时，分级的损失为x－a。因此，分级损失函数$t_{[a,b]}$为：

$$t_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a; \\ x - a & \text{if } x \in [a, b]; \\ b - a & \text{if } x > b. \end{cases} \tag{2.9}$$

我们将它更简洁的表述为：

$$t_{[a,b]}(x) = (x-a)_+ - (x-b)_+. \tag{2.10}$$

由此，显然$t_{[a,b]}$在（a，b，x）内是连续的，从（2.9）可见这是一个关于x的单调不减函数。因此，权益分级损失［0，a］为：

$$t_{[0,a]}(L) = L - (L - a)_+, \qquad (2.11)$$

其中a>0。

2.3 敏感度恒等式

高斯不等式由Slepian在研究高斯过程的极值时率先提出。这个不等式在很多研究者的努力下不断发展，比如Joag-Dev等人［10］。这其中的一些不等式是基于下述非凡的恒等式（由Plackett第一个发现［14，方程式（3）］

命题2.1 令Q(R,x)为高斯密度

$$Q(R,x) = (\det(2\pi R))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\langle x, R^{-1}x\rangle}, \qquad (2.12)$$

R是一个d * d严格的正定矩阵$R=[r_{jk}]$，x属于R^d。有

$$\frac{\partial Q(R,x)}{\partial r_{jk}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 Q(R,x)}{\partial x_j^2} & if\, j = k; \\ \dfrac{\partial^2 Q(R,x)}{\partial x_j \partial x_k} & if\, j \neq k. \end{cases} \qquad (2.13)$$

上式的证明，参见我们的长论文（比如说［2］），其中我们运用了以下基本并且有效的恒等式，对于任意的高斯变量X和复数a：

$$\mathbb{E}[e^{aX}] = e^{a\mathbb{E}[X] + \frac{a^2}{2}\mathrm{var}(X)}, \qquad (2.14)$$

利用（2.13），我们在［2］中证明了以下等式适用于预期的分级损失敏感度：

定理2.1 令（X_1,……X_n）是n维空间中的高斯变量，每个X_m均值为0方差为1，协方差矩阵$R=[r_{jk}]$是严格正定的。令：

$$L = \sum_{m=1}^{N} l_m 1_{[X_m \le c_m]},$$

c_1，……，c_N属于R, l_1,……，l_n>0。有：

$$\partial_{r_{jk}} \mathbb{E}[(L-a)_+] = \partial_{c_j}\partial_{c_k} \mathbb{E}[(L-a)_+] \qquad (2.15)$$

对于任意a>=0,任意确切的j，k属于｛1，……，n｝成立

我们得出一个关于预期损失敏感度的重要的关系式：

$$\mathbb{E}[L-(L-a)_+]$$

2.4 相关敏感度

我们转向研究自然情况下分级损失的相关敏感度。我们在论文［2］中的结论来自于如下：

定理2.2 令(X_1,……,X_n)为n维空间中的高斯变量，每个X_m均值为0方差为1，协方差矩阵R=[r_{jk}]是严格正定的。令：

$$L=\sum_{j=1}^{N} l_j 1_{[X_j \leq c_j]},$$

c_1，……，c_n属于R,并且l_1，……，l_n>0，对于任意的a>=0

$$\partial_{r_{jk}} \mathbb{E}[(L-a)_+] = \partial_{c_j}\partial_{c_k}\mathbb{E}[(L-a)_+] \qquad (2.16)$$

对于任意确定的j，k属于｛1，……，N｝
我们在这里简述最基本的证明，更详细的证明见［2］

简述证明：预期的分级损失为：

$$\mathbb{E}[(L-a)_+] = \int_{\mathbb{R}^N} (l_N(x)-a)_+ Q(R,x)\,dx, \qquad (2.17)$$

Q(R,x)为高斯密度：

$$Q(R,x) = (\det(2\pi R))^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\langle x, R^{-1}x\rangle}, \qquad (2.18)$$

$$l_N(x) = \sum_{m=1}^{N} 1_{(-\infty,c_m]}(x_m). \qquad (2.19)$$

对r_{jk}求偏导数，并利用第二个高斯恒等式，有：

$$\begin{aligned}\partial_{r_{jk}} \mathbb{E}[(L-a)_+] &= \int_{\mathbb{R}^N} (l_N(x)-a)_+ \partial_{r_{jk}} Q(R,x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (l_N(x)-a)_+ \frac{\partial^2 Q(R,x)}{\partial x_j \partial x_k}\,dx.\end{aligned} \qquad (2.20)$$

利用分部积分法，我们将偏导数移到首项得到：

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial^2 (l_N(x)-a)_+}{\partial x_j \partial x_k} Q(R,x)\, dx.$$

这只是形式上的，因为我们没有给出导数的精确含义。精确含义可从两方面给出：一是从分配意义上，二是算出差商极限而不是偏导数的分布积分的过程。将偏导数∂_{x_j}视为差商的极限，利用控制收敛定理，并将此重复适用于x_k，我们有：

$$\partial_{r_{jk}} \mathbb{E}[(L-a)_+] = \lim_{\epsilon_j \downarrow 0, \epsilon_k \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon_j \epsilon_k} \int_{\mathbb{R}^N} (l_N(x)-a)_+ [*]\, dx, \qquad (2.21)$$

$$[*] = Q(R, x+\epsilon_j e_j + \epsilon_k e_k) - Q(R, x+\epsilon_j e_j) - Q(R, x+\epsilon_k e_k) + Q(R,x). \qquad (2.22)$$

我们将（2.21）右边的积分分为四个积分并于（2.22）保持一致，将$x_j-\epsilon_j$替换x，$x_k-\epsilon_k$替换x_k，我们利用：

$$1_{(-\infty,c]}(x-\epsilon) = 1_{(-\infty,c+\epsilon]}(x).$$

这个关系式让我们将x_j和x_k的差异转化为c_j和c_k的差异。将以上式子整合到一起，按照ϵ_j分类，并令ϵ_j减小，按照ϵ_k分类，并令ϵ_k减小，我们得到：

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}[(L-a)_+]}{\partial c_j \partial c_k}.$$

回到（2.21）我们总结出：

$$\partial_{r_{jk}} \mathbb{E}[(L-a)_+] = \partial_{c_j} \partial_{c_k} \mathbb{E}[(L-a)_+].$$

我们回到我们的几个重要不等式：

定理2.3
令$(X_1,\ldots\ldots,X_n)$为n维空间中的高斯变量，每个X_m均值为0方差为1，协方差矩阵$R=[r_{jk}]$是严格正定的。令：

$$L = \sum_{m=1}^{N} l_m 1_{[X_m \le c_m]},$$

c_1，……，c_n属于R,并且l_1，……，l_n>0，对于任意的a>=0

$$\frac{\partial \mathbb{E}[(L-a)_+]}{\partial r_{jk}} \geq 0, \tag{2.23}$$

对于任意确定的j，k属于｛1，……，N｝
 我们再一次在这里只展示论点的本质，细节内容参见［2］
从（2.21）我们得出

$$\frac{\partial \mathbb{E}[(L-a)_+]}{\partial r_{jk}}$$

上式是Q(R,x)集合的差商的极限。不同的是形式：

$$\{l_1 + l_2 + w\}_+ - \{l_1 + w\}_+ - \{l_2 + w\}_+ + \{w\}_+, \tag{2.25}$$

其中，l_1，l_2，w>=0。（2.25）式是非负的，这个得到了不等式（2.23）
接下来，我们再次利用（2.11）

$$t_{[0,a]}(L) = L - (L-a)_+.$$

整体证券投资组合损失**L**对相关性r_{jk}是不敏感的，因为它是单独的预期损失的加总。

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{j=1}^{N} l_j \mathbb{P}[X_j \leq c_j].$$

因此：

$$\frac{\partial \mathbb{E}[t_{[0,a]}(L)]}{\partial r_{jk}} = -\frac{\partial \mathbb{E}[(L-a)_+]}{\partial r_{jk}} \leq 0.$$

在［2］中，我们展示了延伸到copulas函数更为一般性的结论，而不仅仅是高斯copulas函数。（例如Gordon[5]探究的波浪形函数）