

投资组合优化： 在量子计算中的应用

Michael Marzec

Stevens理工学院，霍博肯，新泽西州，美国

4.1 简介

传统的Markowitz均值-方差模型下的投资组合选择提供了一个框架，在此框架下可以找到可以持续几十年的投资组合（Markowitz, 1952, Fabozzi et al., 2013）。凭借这一框架，投资者或投资经理希望用一种特别的投资组合把所谓的风险最小化。对于这个模型而言，在一个投资组合中的风险的度量，是植根于关联风险的方差的度量，它将变化或变异的数据与其预期值的均值相比。多重资产下，投资组合的方差的表述包含着描述多资产共同变动的协方差的概念。数学表达式为二次的，资产的最优选择也成为二次函数下的最优化问题。它被转化为一个非线性规划问题，并可以使用各种合适的操作技术来解决（Hillier and Lieberman, 2010）。

有效边界是一个曲线、一个区域或者一个表面，它指出了不同投资组合下的风险与收益的相互作用。

Handbook of High-Frequency Trading and Modeling in Finance, First Edition.
Edited by Ionut Florescu, Maria C. Mariani, H. Eugene Stanley and Frederi G. Viens.
© 2016 John Wiley & Sons, Inc. Published 2016 by John Wiley & Sons, Inc.

(Elton et al., 2007)。随着资产组合资产数量增加——在数量和权重两个方面的投资——选择最优投资组合很快变得更加困难。传统上来解决这个问题的优化技术是所谓的依靠数学上被良好定义和约束的可微分的函数或者梯度下降/有向标志 (Gilli and Schumann, 2012)。

更多的现代探索性 (启发式的) 优化技术, 如随机局部搜索 (stochastic local search), 模拟退火 (simulated annealing), 阈值接收算法 (threshold accepting), 禁忌搜索算法 (tabu search)、遗传算法 (genetic algorithms)、粒子群算法 (particle swarm)、蚁群优化 (ant colony optimization) 提供了一种快速替代这些经典的优化技术 (Gilli et al., 2011)。这些新技术解决了以往难以解决的经典复杂问题。许多经典和启发式技术通常会产生这样的解决方案, 它包含着将所有的资产考虑在内的不同投资组合。我们如何找到一个适合投资组合? 换句话说, 我们怎样来从 n 种投资组合中找出一个合适的?

辅以合适的方法, 这可以逼近为二次无约束的二进制优化 (quadratic unconstrained binary optimization (QUBO)) 问题。这在本章中是核心并且将会被深入讨论。问题是二次的因为签名方程 (signature equation) 的混合条件: $V = X^T Q X$ 。最后的模型是不受约束的, 因为它的建立没有额外的限制方程。它二进制的性质是因为它被写作为一个二进制的决策问题 (是/不) (0/1) (包括/排除) 某一特定股票在最终投资组合中的。问题是一个优化, 因为目标是寻找最佳的股票投资组合。

具体而言, 这是一个组合优化问题, 因为制定的目标将用图表形式演示搜寻到的一组离散的资产投资分配集: 这个问题可以用图论的方法解决 (Boros et al., 2008; Jallo and Budai, 2010, Papadimitriou and Steiglitz, 1998)。

遍历所有资产、权重组合可以说是计算密集型的。探索性的新方法对传统的古典方法有所改善, 但是也不能运行太长的未达最佳标准的结果或是根本不可能得到一个解决方案。解决这类问题的一个范例是量子计算 (Choi, 2010; D-Wave, 2013b, 2013c)。这一范式使人们看到应对许多具有挑战性的计算性问题或目前的技术不可能解决问题的希望。

做一个二进制（包括/排除）资产组合选择的问题可以以一种基本的方式，使用最大独立集（maximum independent set (MIS)）图论的方法来解决量子计算模式下二次无约束的二进制优化（QUBO）问题（D-Wave, 2013b）。那么，这一技术是否能应用或扩展到解决Markowitz的均值-方差框架下的加权资产选择问题？

总体而言，本研究报告将有助于克服伴随金融工程研究课题的量子计算模式所遇到的障碍。并且，它将提供与金融工程概念相联系的量子计算问题领域的深入见解。本章的基本目标是演示这个框架如何在解决金融问题中应用。并将讨论有关金融建模考虑的社会环境限制。这将通过提出硬件范式情况下的金融投资组合优化来完成。本章提出并讨论了现有的样本工作（D-Wave, 2013B）。

研究的问题包括三个方面，反映在以下相关文献资料中：经典均值-方差组合理论；给以特定考虑的组合优化问题下的一般操作研究理论绝热（等熵adiabatic）量子计算的硬件实现。

本章的其余部分将深入探讨的背景文献、模型、实验方法、结果、相关讨论以及结论。背景文献部分，介绍了众多相关研究和应用论文的基本主题。模型部分，把涉及的投资组合优化模型表示与图论领域问题相联系，并且深入到目标硬件的基础伊辛（Ising）模型。方法部分，介绍了有关这项研究的具体实现的相关信息。结果部分，阐述了从研究调查中得到的内容。讨论部分，涉及基本结果，以及对调查的局限性和未来发展趋势等的思辨。结论部分，总结整个章节。

4.2 背景

考虑到本章主题的性质比较杂糅，牵扯的知识覆盖面广，涵盖多个学科。以下是一些相关材料，给出了一个学习路径，从经典的均值-方差投资组合理论，到一般操作的研究理论，组合优化问题，再到绝热量子计算的硬件实现。

4.2.1 投资组合优化

有关“介绍部分”开始的相关问题部分，均值方差投资组合理论历史性地为几十年来的方差-协方差投资组合模型奠定了基础（Markowitz, 1952, Fabozzi et al., 2013）。同时，投资组合优化理论已经从有着不同的目标或约束的工作中发展演进到现在。例如

，近年来更多的模型考虑条件性风险价值 (value-at-risk, VaR) 以及带约束的目标优化 (Krokhmal et al., 2001)。

在投资组合理论、投资组合优化理论和最优化理论与技术的广泛领域，有大量的文献资料。特别是，在投资组合优化领域，最近的一项调查说明了从1998到2008年间有很多的相关研究 (Floudas and Gournaris, 2009)。同样，以财务 (金融) 为主导 (finance-oriented) 的讨论被Gilli等人于2011提出，其中特别考虑启发探索式模型在金融中的运用。

其他 (非均值-方差 **non-mean-variance**) 的方法包括风险偏好和厌恶损失 (risk preferences and loss aversion) 考虑下利用 (Differential Evolution) 差分进化算法得到的探索性I启发式) 优化 (Maringer, 2006)。风险平价 (Risk parity)，相等的权重 (equal weighting)，和最小方差 (minimum variance) 在查韦斯等人2010年的研究中被讨论。

一些非常特别的均值-方差规划问题被使用现代的经典的最优化方法解决。使用拉格朗日松弛法 (Lagrangian relaxation) (Shaw et al., 2008)；一种混合的灰色关联分析方法研究 (Huang et al., 2011)；与遗传算法的制定 (“et al., 2009)，这些仅仅作作为几个例子。

所有这些方法都是为了找到更好的方法来解决优化问题。许多的问题是难以解决的问题，因为他们的模型具有多个局部最优或函数表达式中存在间断点 (Gilli and Schumann, 2012)。回顾基于的投资组合优化的基础上的均值方差模型是一个问题，它本质上是二次性质的方差和能表达一些这类性质的混合协方差。

从这些局部最优解中找到最佳的整体解决方案是全局优化的目标。对最近针对二次函数规划的论文进行抽取，包括：平衡的搜索技术 (equilibrium search techniques) (Pardalos et al., 2008)，屏障性功能规划 (barrier function formulations) (Dang and Xu, 2000)，内点算法 (an interior-point algorithm approach) (Akrotirianakis and Rustem, 2005)，和一个无约束的最大流方法 (an unconstrained max-flow approach) (Boros et al., 2008)。

一些研究在有约束的条件下考虑规划问题而另外一些把问题用无约束的方式表示约束问题有时会被使用不同的方法改写为无约束的规划问题 (eberman, 2010; Gilli et al., 2011)。在这个研究中许多无约束的表达被使用。

管理信息系统，派系以及股票市场数据之间的联系在Boginski等人的研究 (2005) 中被讨论，同时在这一方面，股票之间的交叉相

关性研究随着时间的推移广泛深入。Jallo和Budai (2010)的论文进一步阐述了市场分析图 (market graphs), 关于纯股票收益 (pure stock returns), 流动性加权回报率 (liquidity-weighted returns) 以及物量计算 (volume measures) 相关问题。

本文由Charpin和Lacaze (2007) 提出了一种将投资组合限制到一个特别的范围的方式, 即提供一种基数 (cardinality: Cardinality defines the numeric relationships between occurrences of the entities on either end of the relationship line), 同时也确定满足最小权重 (minimum weight) 条件的最优投资组合。他们在LINGO或商业应用环境 (CPLEX: commercial application environments) 使用分支定界方法解决了这个问题。问题的二元性在本章中被广泛考虑, 但模型有一个不同的形式, 本章的模型公式很快就会被转化为图论的表示。Bertsimas等人在1999年的论文使用混合整数模型, 来构造一个经典的具有二进制选择特性的约束优化。

4.2.2 算法的复杂性

算法复杂度是一个衡量新技术解决问题的一个重要的指标。既然本章的核心是解决困难问题的新方法的具体实现, 算法复杂度至少应有一个粗略的介绍。算法, 或者说用系统的方法描述解决问题的策略机制, 被用来解决特定的问题。在本章的所有方法的介绍、实现、分析过程中都会使用到算法。要在几个算法中权衡选取最优算法, 期中一个最重要 的指标是算法的效率。算法的效率主要是看一个算法能在多长时间内, 给出一个输入的特定问题的答案。

对于这个问题, 你可以去参考Cormen et al. (2009), Kozen (1992), Papadimitriou 以及 Steiglitz (1998) 等人的著作。

算法可大体分为三类: P, NP和NP-complete, 能在多项式时间 (polynomial time) 内解决的问题被归类到P类算法。这种算法的时间复杂度与输入数据量密切相关, 能算出确切的功率。在多项式时间内, 只能验证的问题但不能解决的问题, 被称为NP类。最后, 没有找到一个确切的算法的来解决的问题被归在NP-complete类, 它也被认为是最难的。通常情况下, 把算法应用到NP-完全问题中所找到的解决方案, 只能说是足够好或者近似足够好, 而非最好的或最佳的解决方案。还有另外一类, 被称为NP-Hard, 这正是这一章的目的。这类问题是指, 它至少和NP类问题一样难。然而, NP-Hard类问题, 不需要在多项式级别时间内可验证, 因此, 实际上它并不需

要是NP类的成员。这一点很重要，因为本章的一些模型被认为能应用到NP—complete或者NP-hard以及D—Weve量子计算机系统中。

4.2.3 性能

在4.2.2节提到过，算法的性能使得我们可以测量的算法的实用性。研究D-Wave（量子计算）系统的原因是它的初衷是帮助解决那些过于复杂，计算太慢的问题或者提高经典算法下的计算速度。换句话说，它使得现有的算法能从中得到性能改进而获益。

因此，了解D-Weve系统（量子计算）与当前的传统计算系统在解决特定问题时的区别就显得尤其重要。D-Wave系统已被实验性地同三种常规性软件相比，他们是IBM ILOG CPLEX，METSlib TABU search以及akmaxsat。NP-Hard领域的三个问题被研究：QUBO，weighted maximum 2-satisfiability (W2SAT) 和 quadratic assignment。不同规模的问题以及不同的实施情况在比较中被使用。问题在解决的质量、成功与否以及时间复杂度等方面同样被比较。结果表明D-Wave或许并不是一种理想的提高现有效率的办法。然而，结果表明，在硬件实现方面比起当前的速度，D-Wave可以将速度提升至当前的几千倍甚至10000倍以上。

4.2.4 伊辛模型 (ISING MODEL)

伊辛模型最初是用来帮助理解磁性材料的行为。在模型中的2个主要术语代表着集合中的每个分子和相邻分子之间的相互作用以及集合中的单个电场强度。伊辛表示了boixo (boixo et al., 2012)，在这里使用的形式，在Choi (2008)是能量函数 (energy function)

$$E = \sum_{i \in V(G)} h_i s_i + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} s_i s_j$$

在这里 $s_i \in \{-1, +1\}$ 代表一个系统，在外加磁场的分子旋转情况下， h_i 是在分子磁场的强度， J_{ij} 代表相邻分子之间的自旋相互作用的强度 i 和 j 。

后来人们认识到这个简单的模型能够被用到许多其他的条件中，这类问题的一般特点为，问题中给出独立的可分元素的集合以及他们之间的相互关系。经过Bian以及他的同事们的研究下，超过12000篇涉及Ising问题的论文在1969到1997年间相继发表。想必，现在这一数字会更高。

这是模型共享一个类似QUBO问题的结构，可以用来表示投资组合优化问题。与此同时，D-Wave设备给Ising问题的解决提供硬件支持(D-Wave, 2013b, 2013c; Bian et al., 2010)。

4.2.5 绝热量子计算 (ADIABATIC QUANTUM COMPUTING)

绝热量子计算是一种新的计算模式，它被用来解决一些NP-complete或NP-hard问题时，具有产生令人满意的结果的潜力。在量子计算方面它使用特殊的环境来充分发挥量子核心材料的特性与优点。这与我们目前的数字计算模式有很大的不同。绝热，在这个意义上讲，意味着底层材料的量子性质被保持在它的基态当系统解决问题的过程中。与此形成鲜明对比的术语是退火过程 (Farhi et al., 2000)。

然而，一个启发式的可以应用到解决困难的优化问题的方法——模拟退火，基于在过去的经典物理中的冷却过程，被纳入到公众的视线。

在这两种情况下，一种一般的想法是通过引入一个随机的组件，通过任一温度或量子过程，来帮助解决问题。在这个意义上，量子退火是概念上类似的，并使用量子的熵变化过程 (entropy of the quantum process) 来探索待解问题。在本章中讨论的环境中，量子退火 (quantum annealing) 被D-Wave硬件系统实现 (Farhi et al., 2000; Bian et al., 2010; Hillier and Lieberman, 2010; Gilli et al., 2011)。

D-Wave系统之最基本的量子性质是人们讨论的一个热点。近来的研究似乎表明，量子签名 (quantum signatures) 在系统中存在 (Boixo et al., 2012)。不管这场辩论如何解决，如果该系统最终能提供合理成本下的解决复杂问题的方案，那么它就是有用的。

总之，背景文献提出了各种模型和解决方案，他们有利于获得一个投资组合的组合。得到的投资组合可以用来代表一系列的财务目标。特别是，在QUBO问题中，前面提到的方法 (Boros et al., 2008)，是一种有特色的优化组合，被用以解决伊辛的物理问题 (Palubeckis, 2004, Chen and Zhang 2010, Boixo et al., 2012) 以及其他离散数学问题等的组合优化图论表示 (Choi, 2010)。这

些主题一同为我们提供了一个独特的投资组合问题的制定，并将在本章被研究。模型部分讨论了在本研究中所使用的具体表述。

4.3 模型

核心模型有金融（投资组合）、图论、组合优化、Ising/QUBO，以及最终得到的混合模型。每一种方法都被检验并且结合他们当下被使用的方式被讨论。

4.3.1 金融模型

原始模型基于 Markowitz 均值 - 方差范式（Markowitz mean-variance paradigm）。在这个模型中，用股票之间的方差和协方差表示的投资组合风险被考虑。
证券投资组合的方差公式为：

$$\sigma_p^2 = V = \sum_{j=1}^N \left(X_j^2 \sigma_j^2 \right) + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \left(X_j X_k \sigma_{jk} \right)$$

在第一部分中， $\sum_{j=1}^N (X_j^2 \sigma_j^2)$ 代表着个人资产 σ_j^2 的变

动加总，按照投资比例 X_j^2 的平方倍增。

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (X_j X_k \sigma_{jk})$$

在第二部分中， $\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (X_j X_k \sigma_{jk})$ 代表证券投资组合中个人资产间协方差的影响。
矩阵表示的方差， V ，等同于

$$V = X^T Q X$$

在表达式中 X^T 是投资组合中各股票投资比例的转置向量， Q 是方差协方差矩阵。

通常地，我们可以用一个简化的组合模型来代表投资组合的风险和回报，然后对此进行优化。这点从根本上看其实是

$$F = -R + V$$

此中的 R 代表投资组合的收益率， V 代表了投资组合的风险。在这一情况下，优化是一个最小化问题：我们希望找到

$$\min \{F\}$$

此优化因而能最大限度地减少风险并增加收益。然而，这种优化通常受约束条件的影响。更进一步的深入探讨，用一种易处理的方式（Bartholomew-Biggs, 2005），开发出一种复合函数形式的约束，把问题转化为一个无约束优化，在此基础上建立迭代，最终得到全局的无约束优化方案。抛开这个模型框架，我们开始考虑量子计算环境。

4.3.2 图论 (graph-theoretic) 组合优化模型

图论结构是组合优化问题的基础。组合优化用MIS (Management Information Systems) 和加权MIS (WMIS) 表示。MIS和WMIS为基本组合优化问题与现实可行的量子计算环境建立了一个桥接。

考虑到目前为止, 一直是二次式的形式, 但不是二次二元问题。然而, 论文 (Choi and Bian) 提供了一种连接伊辛/曲波形式与MIS或WMIS表示的方法, 可以用来表达可能在量子计算环境可解的问题 (Choi, 2008, 2010, Bian et al., 2010)。如上述提到的, 优化和决策问题是相关的。对于管理信息系统MIS而言, 决策问题 (寻找能否回答或者确认问题) 是NP-Complete的, 而优化版本 (寻找最小解) 是NP-Hard的。找到一个解决这些问题的办法是相当困难同时也要花很多时间的。量子计算环境解决了这些难题。

最初的适配模型在MIS中被使用。一个graph, $G(V, E)$, 包含着股票, V , 股票之间的边际联系, E , 用一个标准来确定选择。第一选择准则是风险表示为股票之间的相关性。因此, 当对应的两支股票某些临界值相关, 他们的两个边界点将会被连接。

在这里使用的相关性是不同于方差-协方差模型或者认股权证的快速审查。这个标准允许选择一个多元化的投资组合; 在这里, 多样化的指标是相关的但是其他指标也可以选择, 例如, 在投资组合中来自市场走势的风险。这样投资组合的性能技术由埃尔顿和他的同事所研究。他们关注这样的一种表示: 最小化 $V(R_p - R_b)$, 这是投资组合的回报差额变化率, R_p , 与一个基准 R_b (例如, 像道琼斯指数等) (Charpin and Lacaze, 2007)。因此, 将来也有可能产生其他的投资选择。值得注意的是, 用相关的选择参数将两支股票的边缘对应时, 股票的相关性应该高于一定的阈值。随着选择参数的变化, 用选择参数来绘制边缘或许不太直观易懂: 利用方差作为权重, 选择最小权重: 即最大权重优化函数的负函数——产生具有低方差的股票集。

强化的模型考虑了WMIS。在这里, 作为在初始适配模型, $G(V, E)$, 被收纳入股票集合的股票与股票符号集的顶点, V , 边缘连接, E , 由一个选择标准确定。每个顶点都有一个附加的参数: 权重。在这种情况下, 优化的是找到产生最大的总权重的MIS (在管理信息系统中选择的顶点)。权重, 在这一实施方案中, 将代表股票的历史回报, 残方差代表的顶点。

4.3.3 Ising模型和QUBO

Ising模型曾在早期的背景部分讨论，并反复在后续模型讨论过程中被重复。NP-Hard Ising Representation 讨论在研究中被涉及 (Boixo et al., 2012, Bian et al., 2010)，Choi等人 (2008) 用能量函数表示

$$E = \sum_{i \in V(G)} h_i s_i + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} s_i s_j$$

在这个模型中， $s_i \in \{-1, +1\}$ 代表分子的自旋系统内。在该系统中，分子的外加磁场强度 i 是 h_i 。相邻的微观粒子 i 、 j 之间绕转产生的相互作用的强度被用矩阵 J_{ij} 表示。

代表着工程流管理系统 (WMIS) 的QUBO在Choi等人的研究中涉及

$$Y(x_i, \dots, x_n) = \sum_{i \in V(G)} c_i x_i + \sum_{ij \in E(G)} J_{ij} x_i x_j$$

C_i 是顶点 i 处的权重，而 J_{ij} 将在进一步翻译的语境下深入讨论，详见 4.3.4。

4.3.4 混合模型

为实现能考虑到这里，问题必须转化（即映射），从WMIS（工程流管理系统）到Ising形式从而可以在D-Wave量子计算系统实现。以下的转述（D-wave, 2013b）。是Choi研究的进一步阐明（2010）。

映射表生成一个矩阵 J ，在本质上 J_{ij} 是通过不断地 $\text{constant} * \text{marketgraph}$ 来确定的；也就是说，市场图是多股线的恒定。常数为参数 $= 1.1$ ，即任何大于1的参数，在参考文献中讨论： J_{ij} 上的条件是它满足 $J_{ij} > \min(c_i, c_j)$ 并且如果它的权重 (C_i, C_j) 都是平等的权重值1，那么 $J = 1.1 > \min\{C_i, C_j\}$ 。市场图具有值为1的条目，表示对应的顶点之间的连接存在，否则值为0。

简化的MIS模型本质上是几个与 C_i （节点）的权重设置为1，即平均加权的WMIS。WMIS模型综合了股票的收益和方差作为市场图中每个节点的权重，即为每一个 c_i 表示在 H_i 的Ising向量。

4.4 方法

这个概念的证明遵循以下特定的方法步骤：认识到前面讨论的量子计算环境在解决金融问题的潜在用途；回顾了一般的联系二次和组合选择的模型；目光锁定在之前讨论过他们之间可分析、可论证的共同点——选择一种模型来表示；在这种情况下选择一个实现环境——MATLAB；收集真实的股票数据作为模型的输入——Dow Jones stocks的一个子集；调用底层的硬件实现编码从而使预处理后的模型适应所需的基本表示；分析评价结果；最后，考虑未来的研究主题在“讨论”部分。

4.4.1 模型的实现

前面讨论的模型表示，被通过一个积极性的实现手段来实现（D-Wave, 2013b），产生一个简化的、通过连接在市场图的两个股票的相关性高于某个阈值之间的股票组合分类来获得投资组合。然后一个图形表示的MIS是通过改写变成一个Ising问题。该问题被硬件优化引擎解决。参考性的实现是用Python写的，而这一章中我们将用MATLAB再现。同时，我们的实现将考虑在风险度量的阈值的变化和各股票的历史收益率为代表的权重WMIS的实现。要充分认识到

，有可能有替代品的权重分配，如在投资组合中的股票，最终与实际权重的股票在投资中的组合；见“讨论”部分。

再次，主要目的是利用一个已知的模型但是必须使量子计算机能运行它的语言表达。本次调查的设置既有理论上的解析，也有实际的：投资组合理论和量子计算理论，合理的实施可行性和对问题进行编程以在具体环境中运行。

4.4.2 输入数据

对于实施，数据检索来自雅虎金融并且存储在数组和结构中。下一步是计算个股的历史回报：对数方式衡量对应于股票价格 S_i 的日收益（从第 $i-1$ 天到第 i 天）

$$r_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right)$$

“这是计算历史周期性股票价值的样本空间。每个系列的日志返回值进行了计算然后被存储在新的数组。

4.4.3 主方差（MEAN-VARIANCE）计算

下一步方差-协方差矩阵在收集期确定。在代表性的实现中使用了相关矩阵，因此，我们也计算了相关矩阵。方差，协方差矩阵的值将根据样本区间和样本数量变化而变化。在这种情况下，在整个样本期间，从2012开始，对每天样品的值进行了测定。

4.4.4 实施风险度量

本章所采用的风险度量指标基于对股票的相关性和协方差值。其他合适的风险措施，可以选择为构建市场投资图的验收标准，只要它进行风险度量合格。相关性被用来作为一个边缘选择阈值：当相关方面顶点 $ij > \text{阈值}$ ，则在图中的2个顶点之间绘制一个边。这会产生市场图：当它们的相关性高于某些适用的阈值时，股票就被连接起来了。

例如，那些没有与其他股票的边缘连接的股票被视为独立。这个选择导致最多的独立股票——这些独立的股票组里包含着最好的投资

组合。对于每一个模型，风险阈值在 $\{0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65\}$ 范围内变动。0.05 的步长值是选择改变的，以适应研究参数。边界值的范围在相关性分布的观测的基础上被选择，因此，所得到的市场图将既不完全连接所有股票，也不会太稀疏或断开。

4.4.5 映射实现

为了解决在 D-Wave 系统的问题，它必须映射到硬件结构。D-Wave 系统的实现，讨论了 (Rose, 2008) 和 (D-Wave, 2013a)，务实的说，我们并不能提供边缘（链接）之间的所有量子位 (Qubit: 量子计算器中的最小的信息单位, 译者注)——详情请看 4.1 的说明图。找到一个非嵌合体来嵌入嵌合体本身就是一个很难的问题。如果找不到一个嵌入，这个问题就不能在系统中直接解决。

在调查的时间被限制的情况下，我们不得不把问题变成具有 128 个变量或更少的问题。大的问题必须被分解成子问题。本次调查中，对于量子计算机来说限制问题的变量不多于 17 个是有用的。我们找到了一个嵌入，这里标记作 K17_Q128_EMBEDDING，将 17 个变量与 128 量子位相联系，已经被量子计算机提供并解决。这个嵌入将适用于本章中使用的 10 只个股的情况——见本章附录中名为 K17_Q128_EMBEDDING 的 MATLAB 代码。下面的图（图 4.1），从量子计算的材料，说明什么系统的量子比特的连接可能看起来像一个特定的硬件实现（在灰度）和可能的嵌入图拟合的一个特殊问题（彩色）：

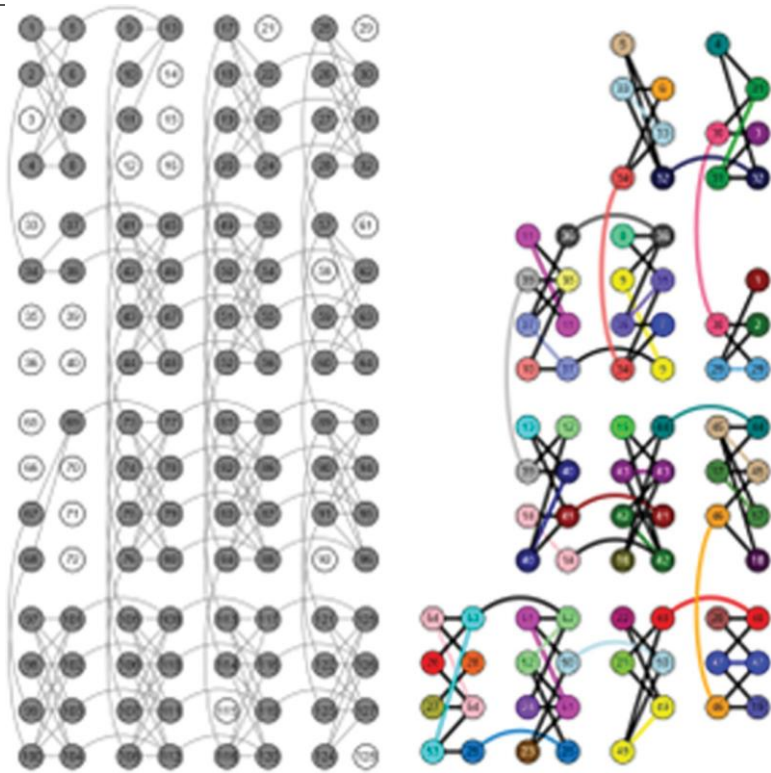


图4.1嵌入例子。

为了实现一个WMIS问题，我们用到 $h_i = Jd_i - 2c_i$ 这个映射，如前所述， c 是顶点的权重。

对几个问题的优化，应用于投资组合的过程，在这一章中规定，必须产生最大收益、最小风险阈值内的平均加权。对WMIS D-Wave应用编程接口实现是MATLAB代码在附录4中给出的：WMIS MATLAB Code。管理或实用程序脚本在这里不详细说明，例如执行实际的载入和预处理的数据，例如，排序算法。

4.5 结果

模拟运行的几个模型的变化进行了考虑。首先，一个简单的模型，在使用股票的相关性作为风险测度表明市场多元化水平的D-Wave开发者入口。在模拟中使用的下一个模型是更接近传统的平均方差公式使用方差-协方差矩阵，但仅考虑与协方差的股票对相互作用的限制；节点值与单位值保持相等的加权。最后的版本使用的

股票相互作用的协方差，代表占市场图的边缘选择标准的市场图节点的权重为代表的个人股票收益率。

4.5.1 简单相关模型

一个当前运行的股票处理程序，总结在了后续的图形（图4.2）中，从2012年初的数据到最新得到的数据，总共导致了314个样本。

相关性图表表示了10个股票中两两之间的相关性： $10 \times 10 = 100$ 的相关性。单位价值之间的关系是预期的股票价格与其本身的相关性。从相关性和随后的分析或解释的结果不是这里的重点：相关性被作为风险度量的代表被使用。自道琼斯指数中选择的股票代表性指数表明，这种相关性很小。

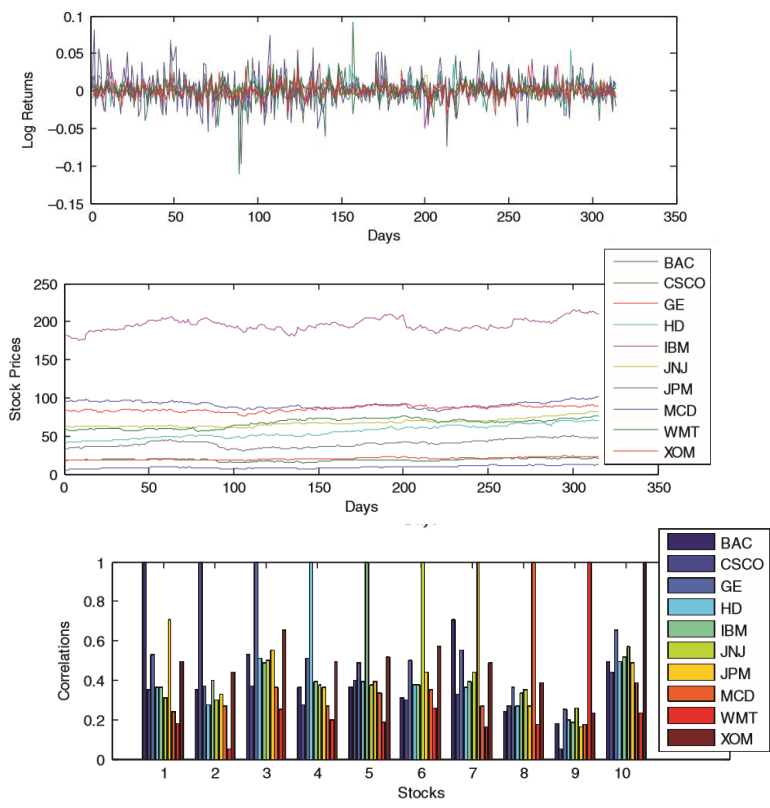


FIGURE 4.2 Summary of input data.

0.6和0.4之间的阈值应该是足够的，以产生一个有点稀疏的市场图的边缘连接是由一个固定的相关阈值，比如0.5确定的。代表的相关性如图4.3所示：

Market Graph for Minimum Risk Threshold 0.5										
	BAC	CSCO	GE	HD	IBM	JNJ	JPM	MCD	WMT	XOM
BAC			1				1			
CSCO										
GE	1			1		1	1			1
HD			1							
IBM										1
JNJ			1							1
JPM	1		1							
MCD										
WMT										
XOM			1		1	1				

FIGURE 4.5 Market graphs for increasing thresholds.

Market Graph for Minimum Risk Threshold 0.6 and 0.65										
	BAC	CSCO	GE	HD	IBM	JNJ	JPM	MCD	WMT	XOM
BAC							1			
CSCO										
GE										1
HD										
IBM										
JNJ										
JPM	1									
MCD										
WMT										

FIGURE 4.5 (Continued)

我们比较市场的图形表示，在各种阈值下，稀疏程度确实随着阈值的提高而增大。相反，阈值小于一个特定值的结果是市场图中所有股票完全连接。

随着风险的范围在 { 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65 } 变动，我们发现 {0.6, 0.65} 的阈值导致相同的市场图结果。

最后一组的投资组合，对应于每个风险设置如图4.6所示：

Resulting Portfolios for Correlation-based MIS							
Minimum Risk Threshold:	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65
Equal-weight Portfolio Per Threshold	BAC	BAC	BAC	BAC	BAC	BAC	BAC
		CSCO	CSCO	CSCO	CSCO	CSCO	CSCO
					GE	GE	GE
		HD	HD	HD	HD	HD	HD
	IBM	IBM	IBM	IBM	IBM	IBM	IBM
	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ
	JPM		JPM				
		MCD	MCD	MCD	MCD	MCD	MCD
	WMT	WMT	WMT	WMT	WMT	WMT	WMT
	XOM						

FIGURE 4.6 Portfolios for correlation-based MIS model.

4.5.2 限制性最小风险模型

这种模式更接近平均方差框架，但它已被限制。市场图的边缘选择标准是阈值范围：阈值=风险 $\in\{0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65\}$ 。然而，适当地缩放，选中状态检查是

$$\text{Covariance}(x_i, x_j) > \text{Threshold} * \sigma_i * \sigma_j$$

$$\sigma_i = \sqrt{\text{Variance}(x_i)}$$

上式中。这个模型的限制部分使用单位值相等的权重对所有节点。这有效地减少了对于MIS图优化的WMIS图优化。此外，个人收益不再使用。这可能被视为一个最小风险投资组合。

使用相同的输入数据集，图中示出了每个股票的方差和协方差（图4.7²：

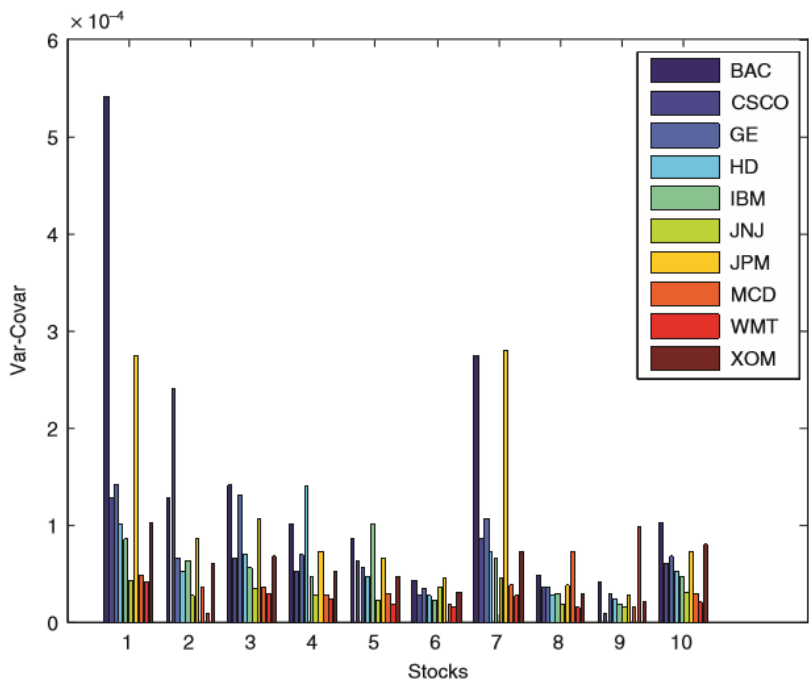


FIGURE 4.7 Variance-covariance of the input data.

由此产生的市场图的每个阈值与相关模型中相同。最后一组的投资组合，对应的风险设置如图4.8所示：

在图中，X轴数字对应股票名称（这是清单，BAC = 1, Cisco = 2, ...）

Resulting Portfolios for Restricted Minimum-risk MIS							
Minimum Risk Threshold:	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65
Equal-weight Portfolio Per Threshold	BAC	BAC	BAC	BAC	BAC	BAC	BAC
		CSCO	CSCO	CSCO	CSCO	CSCO	CSCO
					GE	GE	GE
		HD	HD	HD	HD	HD	HD
	IBM	IBM	IBM	IBM	IBM	IBM	IBM
	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ	JNJ
	JPM		JPM				
		MCD		MCD	MCD	MCD	MCD
	WMT	WMT	WMT	WMT	WMT	WMT	WMT
	XOM						

FIGURE 4.8 Portfolios for the restricted MIS model.

将限制最小风险模型结果与早期的相关模型进行比较，结果是相同的。这在意料之中，考虑到之前讨论过的这两个模型的方差相关联的方差-协方差缩放。

4. 5. 2. 1比较经典的最小风险的结果

使用MATLAB来运行经典典型的最小化平方差程序（在数据上使用MATLAB的quadprog函数），同时要牢记权重之和为1并且权重非负原则。

Minimum Variance - classical results:		
Stock	Portfolio Weight	Portfolio Basket
BAC	0.0000	
CSCO	0.0000	
GE	0.0000	
HD	0.0056	HD
IBM	0.0660	IBM
JNJ	0.5858	JNJ
JPM	0.0000	
MCD	0.1844	MCD
WMT	0.1582	WMT
XOM	0.0000	
Sum:	1.0000	

FIGURE 4.9 Classical results with minimum variance model.

在最小方差的经典结果中的零值的权重实际上是非零的，但远小于这里所示的有效位数。因此，如果非常小的权重的组合是被允许的，那么它可能会考虑所有的股票，这通常是不可行的，特别是一旦在模型中增加持有成本因素。

经典结果接近风险阈值0.35下的MIS结果，伴随着BAC和XOM在MIS结果中的加入。进一步的研究可能会揭示差异的微妙之处；然而，值得重申的是，采用MIS方法和经典方法的一个关键的区别是MIS权重建模为所有单元平等加权（单位价值）而经典的方法寻找最好的权重选项从而得到最优解的结果。

4.5.3 WMIS minimum-risk, 最大收益模型

该模型更接近平均方差框架。再次声明，它是在有限限制的基础上，从这个意义上讲，它不考虑任何混合条件的图形节点的权重。这也可以被认为是一个适应性的最大回报、最小风险模型。在这里，市场图的边缘选择标准的阈值范围，恰如在受限制的最小风险模型之中一样，具有相同的形式。这些结果是完全WMIS模型的典型代表。方差-协方差矩阵和所有的市场图与上一节中是相同的。

最终的WMIS组合以及对应的风险设置，如图4.10所示：

4.5.3.1 比较经典的最小风险，最大回报结果

使用MATLAB在现有数据上运行典型的最大回报-最小方差程序（使用到了MATLAB中quadprog函数），秉承着如前所述的 $F = -R + V$ ，同时要牢记权重之和为1并且权重非负原则（见图4.11）。

Optimal Mean-Variance - classical results:		
Stock	Portfolio Weight	Portfolio Basket
BAC	0.7270	BAC
CSCO	0.0000	
GE	0.0000	
HD	0.2730	HD
IBM	0.0000	
JNJ	0.0000	
JPM	0.0000	
MCD	0.0000	
WMT	0.0000	
XOM	0.0000	
Sum:	1.0000	

FIGURE 4.11 Classical results with mean-variance model.

以前的经典结果说明关于权重也适用于这里。在先前的比较结果也指出，权重被允许0和1之间连续变化这一事实隐含一个关键的区别于WMIS结果的等权重（equalweighting）。

4.6 讨论

简单地说，最重要的发现是，用一种简单的方式，一个投资组合问题可以表示于一个图形的理论范式，这可能会被翻译为在量子计算环境中执行所需的语言。在投资组合中的特定股票中一个二次性质的决定，可能会产生一个简化的最优投资组合。

模型和结果的解释是非常具体的，考虑到这里的实施：结果涉及到由图论的MIS或WMIS得到的股票组合，在这种情况下，结果是有意义的，但可能会受到挑战。挑战来自目前的行业在同一组数据上操作的其他方法，特别是考虑金融回报之时。

相对于以往的研究，本章具有增强的D-Wave（2013b）以及 通过在一个单一的设置D-Wave（2013C），应用Matlab软件，并考虑迭代范围的风险变量值以及混合股票收益。它提出了量子计算和金融的融合。因此，它提供了一个基础以使得金融工程研究者可以进一步探讨这些问题。

一对实验观察是值得注意的。首先，股票成为独立的，也就是说，在市场图中没有边缘连接到/从他们出发，由于阈值的选择，总是包括在最终的投资组合。其二，与前一条相联系，随着市场曲线图的稀疏化，投资组合的规模趋于增大。这两个特性都是基础的最大独立集组合优化的结果。

同时，最小化不一定必须要从使用相同的权重的节点相连接时的市场图的结果中选择，因为唯一值得注意的是参数，节点权重是绘制市场图的一个参量，在这里考虑的模型中，参量依赖于股票的回报和方差。在我们考虑MIS和WMIS几个模型中，优化只是说明包括或不包括在我们最后的投资组合中的股票，而非每一支股票的数量——从这一点来看，就像是一个饼上的不同部分，他们是平等的。确定如何为各股票的投资比例编码是我们未来进一步研究的方向之一。

这里仅仅作为猜想：最终，我们似乎将会得到一个具有不同的特性、从根本上与先前有所不同的模型。当然，包含个股汇报以及投资组合的权重等因素的模型和映射需要重新被考量。与此同时，在不适用MIS\WMIS表示的前提下得到一个能够更直接的表达Ising的模型，在将来是很值得进一步挖掘的。

4.6.1 硬件的局限性

现阶段尚存一些局限性，比如：量子比特目前可以用的数量是128（这一数据是在研究的初始阶段的量子计算机可以达到的）；需要把目前的问题在嵌合体表示，也就是说，将非嵌合体（non-Chimera）融合入嵌合体（Chimera）中；分治问题，即把待解问题转化为可以表示为嵌合体的更小的问题；寻找到问题到硬件的连接本身是一个很难的问题。对于本章中涉及的嵌合体的探索不具体论述，尽管它可能是进一步研究的一个有趣领域。这些讨论你可以在D-Wave, 2013a 或者其他的D-Wave程序指南中，进阶教程参见Ross的著作（Rose, 2008）。以下这些限制是可行但可能从根本上把问题复杂化的，如：如何在这样限制的情形下一一次性将数以百计的股票纳入考虑范围？

4.6.2 模型的局限性

WMIS模型并不是一种直接意义上的均值方差模型，这是因为在这里的实现方式，仅仅考虑相等（组合）权重股票而客观的 $\min \{F = -R + V\}$ 是找到最优投资组合权重以提供最佳组合。使一个均值

方差模型努力将非嵌合体问题转化为嵌合体已经超出了本章的讨论范围，而WMIS已经证明能够在计算机框架上实现。

另外，这里使用的几个解决方案并不考虑节点权值影响的混合效应，比如，在 $\min\{f\}$ 展开的观察。一个原始的映射是本章中在WMIS上使用的 $\min\{f = -R + V\}$ ，这个映射衡量市场

图中节点的权重值为复合的 $-R_i + V_i$ ， R_i 表示第*i*个股的回报， V_i 表示它回报的方差。

因此，节点的权重是股票的回报和他的方差共同决定：较大的方差减少了股票的回报，从而降低了它被最终选择的机会。这揭示了一个特征鲜明的管理信息系统或WMIS模型：最终阶段的优化发生在剩余的边缘连接的节点集。独立的、非连接的节点总会作为最终集合的一部分。

4.6.3 实施的局限性

D-Wave系统需不断的使用和调度需求。而不幸的是，在这一章中研究的实施仅仅能够使用的是D-Wave模拟器. 因此，所有的结果只能也必须被认为是在模拟的量子计算环境中的表现. 然而，力学知识和背景材料仍然是用未来的实现来简单地取代量子计算模拟器的硬件基础。

因此，本文中的结果不代表寻找最终解决方案的任何时间减少，我们也没有想要提供这样的比较. 量子计算环境的硬件性能特性的探索和以及相比传统软件的求解比较报告可以查阅相关资料（McGeoch and Wang, 2013）。正如在“背景”一部分所提到的量子计算系统相比现有的计算软件而言，在计算领域特别是金融模型的求解方面速度可以提升数以万倍。

4.6.4 未来研究方向

未来一个不得不考虑的方面是风险度量的变化（Gilli and Schumann, 2012），例如，优化投资组合的VaR，如果不 重写原有的函数通过传统的方式几乎无法解决。

加权最大独立集 (Weighted maximum independent set)：其他的选择标准或者简洁表述将为权重所选择，如加值型经销商（value-added reseller: VaR）控股，将适用于未来的调查研究。这将是一个有用的测试，来进一步描述这个模型的版本，并与目前的技术结果相比较。

对未来研究的建议包括但不限于进一步分析表示布尔可满足性的语言（language of Boolean satisfiability）下的组合优化问题；找到一个模型表示决定于股票的权重的组合优化；探索选择标准的更复杂的表示，使用顶点权重以及边缘，比如包含最小/最大权重边界或是交易/持有成本等；扩展问题在金融领域更加深入，如衍生工具，固定收益工具以及信用风险分析。在这一实现中使用的平均值超过了整个样本期：也许其他更典型的采样周期和平均（例如，加权或对数衰减）技术将是适当的研究方向。

因为诸如启发式的优化方法确实为解决问题提供了一种方案，方案使用商业上可行的计算机硬件和软件，对未来研究而言最有趣的方面是对金融问题的种类和数量进行分类能够离开当前的传统环境并且以新的模式解决。也有可能重新考虑这个问题的陈述，在这里，在QUBO形式，可能更容易理解并与其他关于QUBO的问题进行比较研究。同时，一个更一般的QUBO形式可以产生更大的灵活性，相对于本章中的具体的MIS / WMIS表示。

对这些模型的绩效考核在调查中是很有必要的。就是说，在与经典传统模型相同的运行条件环境下，经过一段特定的时间，对比得到的投资结果的效果。

值得注意的是，这里的分析已经与历史期望回报进行比较。事实上，在这个范例中，把时间序列模型的应用作为预测工具将是一个有趣的下一步。一般来说，如果股价收益率符合一个合适的预测模型的结果，例如，GARCH，那么这个环境就提供了提供了预测范围内的最佳组合约束。

该技术的二次决策方面是如此的诱人，以至于它提供了一个相当简单的手段来确定在一个股票投资组合中国是否包含的结果。剩下的，同时也是关键，未解问题是如何确定投资组合内各股票的实际控制比例：这里所使用的方法是等单位权重，即购买相同数量的每只股票以形成组合。因为这个框架产生的是二进制（是与非）的结果，所以确定权重的方法（不要把股票持有比例的权重属性与每个市场图节点混淆）将不得不另行考虑。我们猜想，可能是某种形式的多项式形式，涉及已知的特征变量，比如连接到一个节点的边缘的数目，方差以及每个节点的收益回报，协方差之类的边缘值等。这或许会导致多重线性多项式以及伪布尔函数来代表权重。在更广泛的优化背景下洞察这一领域，你可以在Boros和Hammer等人的研究中找到相关资料。就目前看来，这是我们未来将会涉足的领域，并任重道远。

4.7 结论

这个计算环境本身对解决金融工程问题有很大的优势。然而，MIS和WMIS模型，为本文的研究而言，可以说吸引力有限。我们尚且需要进一步的分析和实验研究，以改善现有的模型或其他可行的替代模型。

Acknowledgments

The author thanks D-Wave Systems Inc. for allowing to investigate this problem domain with the use of their simulation software. Zhengbing Bian (D-Wave) has been particularly valuable at helping me through the process of engaging D-Wave and in providing constructive feedback.

Thanks also go to supervising Professor David Starer, Stevens Institute of Technology, for his encouragement to take on this investigation.

Appendix 4.A: WMIS Matlab Code

```
%%% iteratedDWaveRuns_MeanVar_WMIS_compositeF
%
% PURPOSE: Perform iterations over the stock data using the D-Wave
%          hardware optimization engine.
%          Use Mean-Variance with WMIS optimizing F.
% Author: Michael Marzec, Stevens Institute of Technology

% the filename containing our stored data...
loadfile = 'myHistoricalStockData-20130408.mat';

% load the data from the file
load(loadfile, 'histData');
dataSize = size(histData(1).adjClse); % number of stocks retrieved

% Vector of our stock names...
% use Cell Array '{}'
Stocks = { ...
```

```

histData(1).symbol{1}; ...
histData(2).symbol{1}; ...
histData(3).symbol{1}; ...
histData(4).symbol{1}; ...
histData(5).symbol{1}; ...
histData(6).symbol{1}; ...
histData(7).symbol{1}; ...
histData(8).symbol{1}; ...
histData(9).symbol{1}; ...
histData(10).symbol{1} ...
};

% -----
% create a single Prices matrix from our structures
% -----
% For each column...
for k = 1:10
    % For each row...
    for i = 1:size(histData(k).adjClse)
        Prices(i,k) = histData(k).adjClse(i);
    end
end

% -----
% Need to calculate the log returns
% -----
logReturns = diff(log(Prices));

% Average log-return for each stock
avgLogReturns = mean(logReturns,1);

% -----
% Calculate the Variance-Covariance between pairs of stock log returns...
% -----
% Need the var/covar matrix...
covLogReturns = cov(logReturns);

% ...we'll use the Variance of the logReturns, as well...
varLogReturns = var(logReturns);

% ...also need the stdDev
stdDevLogReturns = sqrt(varLogReturns);

% a visualization of the Var-Covar...
bar(covLogReturns, xlabel('Stocks'), ylabel('Var-Covar'), legend(Stocks);

% -----
% Static variables/set-up for the D-Wave run
%
% Specify the embedding list...
% Adapted from D-Wave's K17_Q128_EMBEDDING
% -----
K10_Q128_EMBEDDING = cell(1,10);
K10_Q128_EMBEDDING{1} = [0 4 12 20 28];
K10_Q128_EMBEDDING{2} = [1 5 13 21 29];
K10_Q128_EMBEDDING{3} = [2 6 14 22 30];
K10_Q128_EMBEDDING{4} = [3 7 15 23 31];
K10_Q128_EMBEDDING{5} = [8 40 44 52 60];
K10_Q128_EMBEDDING{6} = [9 41 45 53 61];
K10_Q128_EMBEDDING{7} = [10 42 46 54 62];

```

```

K10_Q128_EMBEDDING{8} = [11 43 47 55 63];
K10_Q128_EMBEDDING{9} = [16 48 80 84 92];
K10_Q128_EMBEDDING{10} = [17 49 81 85 93];

% The J parameter used here; must be any real number > 1
% Note: this re-uses the normJ from the equal-weight example
% Actual condition for selecting normJ is: normJ > min{c_i, c_j}
normJ = 1.1;

% -----
% Here is the connectivity to the local or remote D-Wave solvers...
% -----
% Get a connection to the local solver...
conn=sapiLocalConnection();
% Get a list of solvers available locally...
solvers=sapiListSolvers(conn);
% Print the list of solvers available...
solvers

% create a handle to a particular solver
solver = sapiSolver(conn,'c4-sw_optimize');

% Create the embedding solver
embeddingSolver = sapiEmbeddingSolver(solver,K10_Q128_EMBEDDING);

% -----
% Re-used parameters from correlation-based runs:
% Iteration over various correlation threshold values
% from correlation = 0.35 to 0.65 by 0.05
% -----

% -----
% Generate a market graph...
% -----
isingSolutions = zeros(length(covLogReturns), 7);

% Init the optimumPortfolios array; this is a fast way - not the best.
optimumPortfolios = cell(10,7);

loopCount = 1;
for cThresh = 0.35 : 0.05 : 0.65

    % correlations are used to set up the graph
    marketGraph = covLogReturns;

    % iterate through our initial graph and determine Edges
    for m = 1:length(marketGraph)
        % determine connectivity using our threshold
        for n = 1:length(marketGraph)
            % connect or not connect pairs based on threshold
            if m==n
                marketGraph(m,n) = 0;
            elseif abs(marketGraph(m,n)) > cThresh*stdDevLogReturns(m)
                *stdDevLogReturns(n)
                marketGraph(m,n) = 1;
            else
                marketGraph(m,n) = 0;
            end
        end
    end
end

```

```

end
% print the market graph for each iteration
cThresh
marketGraph

% count the number of edges for each stock node
edgeCount = sum(marketGraph, 2);
% -----
% Calculate the Ising parameters...
% Note: Here, node weights are the (return - variance)
% values for each stock, ie node.
% -----
% the h_ij values
for p = 1:length(edgeCount)
    % This uses the variance handicapped returns expressed in F
    hValues(p) = normJ*edgeCount(p) - 2*(avgLogReturns(p) - varLogReturns(p));
end

% the J_ij values
JValues = normJ*marketGraph;

% Solve the Chimera-structured Ising problem
answerIsing = sapiSolveIsing(embeddingSolver, hValues, JValues);

for t = 1:length(answerIsing.solutions)
    if answerIsing.solutions(t) == 1
        %optimumPortfolios(t, loopCount) = Stocks(t);
        optimumPortfolios(t, loopCount) = java.lang.String(Stocks(t));
    else
        optimumPortfolios(t, loopCount) = java.lang.String('');
    end
end

% add to a matrix of solutions
isingSolutions(:, loopCount) = answerIsing.solutions;
loopCount = loopCount + 1;
%gplot(marketGraph, [1 1; 2 4; 3 2; 4 8; 5 5; 6 10; 7 7; 8 3; 9 9; 10 6], '-*')
end

% print the optimum portfolios
optimumPortfolios
% -----
% THE END
% -----

```

References

- Akrotirianakis, I., and B. Rustem. Globally convergent interior-point algorithm for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2005: v125n3: 497–521.
- Bartholomew-Biggs, M. *Nonlinear optimization with financial applications*. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 2005.

- Bertsimas, D., C. Darnell, and R. Soucy. Portfolio construction through mixed-integer programming at Grantham, Mayo, Van Otterloo and Company. *Interfaces*, 1999: 29: 49–66.
- Bian, Z., F. Chudak, W. Macready, and G. Rose. *The Ising model: Teaching and old problem new tricks*. D-Wave Systems, 2010.
- Boginski, V., S. Butenko, and P. M. Pardalos. *Mining market data: A network approach*. Elsevier Ltd., 2005.
- Boixo, S., T. Albash, F. Spedalieri, N. Chancellor, and D. Lidar. *Experimental signature of programmable quantum annealing*. University of Southern California, 2012.
- Boros, E., and P. Hammer. Pseudo-boolean optimization. *Discrete Applications in Applied Mathematics*, 2002: 123: 155–225.
- Boros, E., P. L. Hammer, R. Sun, and G. Tavares. A max-flow approach to improved lower bounds for quadratic unconstrained binary optimization (QUBO). *Discrete Optimization*, 2008: 5(2): 501–529.
- Charpin, F., and D. Lacaze. Using binary variables to obtain small optimal portfolios. *The Journal of Portfolio Management*, 2007: Fall: 68–72.
- Chaves, D., J. Hsu, F. Li, and O. Shakernia. *Risk parity portfolio vs. other asset allocation heuristic portfolios*. Research Affiliates, LLC, 2010.
- Chen, W., and L. Zhang. Global optimality conditions for quadratic 0-1 optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 2010: 46(2): 191–206.
- Choi, V. *Adiabatic quantum algorithms for the NP-complete maximum-weight independent set, exact cover and 3SAT problems*. Falls Church, VA: Department of Computer Science, Virginia Tech, 2010.
- Choi, V. *Minor-embedding in adiabatic quantum computation: I. The parameter setting problem*. D-Wave Systems Inc., 2008.
- Cormen, T., C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein. *Introduction to algorithms*. 3rd ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2009.
- Dang, C., and L. Xu. A barrier function method for the nonconvex quadratic programming problem with box constraints. *Journal of Global Optimization*, 2000: 18: 165–188.
- D-Wave. Programming with QUBOs. Programmer’s Guide. Burnaby, British Columbia (BC), Canada: D-Wave Systems Inc., 2013a.
- D-Wave. Quantitative finance tutorial: optimizing portfolios. *D-Wave Developer Portal*. Burnaby, British Columbia (BC), Canada:

- D-Wave Systems Inc., 2013b. <http://www.dwavesys.com/en/dev-tutorial-finance.html> (accessed January 2013).
- D-Wave. Solving weighted maximum independent set using D-wave blackbox. *D-Wave Developer Portal*. Burnaby, British Columbia (BC), Canada: D-Wave Systems Inc., 2013c. <http://www.dwavesys.com/en/dev-tutorial-wmis.html>.
- Elton, E., M. Gruber, S. Brown, and W. Goetzmann. *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- Fabozzi, F. J., H. M. Markowitz, P. N. Kolm, and F. Gupta. Mean-variance model for portfolio selection. In *Encyclopedia of Financial Models*, by Frank J. Fabozzi 2013. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/9781118182635.efm0003/full>.
- Farhi, E., J. Goldstone, S. Gutmann, and M. Sipser. Quantum computation by adiabatic evolution. 2000. <http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0001106.pdf>.
- Floudas, C., and C. Gournaris. A review of recent advances in global optimization. *Journal of Global Optimization*, 2009: 45: 3–38.
- Gilli, M., and E. Schumann. Heuristic optimisation in financial modelling. *Annals of Operations Research*, 2012: 193: 129–158.
- Gilli, M., D. Maringer, and E. Schumann. *Numerical methods and optimization in finance*. Waltham, MA: Academic Press, Elsevier Inc., 2011.
- Hillier, F., and G. Lieberman. *Introduction to operations research*, 9th ed. New York: McGraw-Hill, 2010.
- Huang, K. Y., C.-J. Jane, and T.-C. Chang. An enhanced approach to optimizing the stock portfolio selection based on Modified Markowitz MV Method. *Journal of Convergence Information Technology*, 2011: 6(2): 226–239.
- Jallo, D., and D. Budai. *The Market Graph: A study of its characteristics, structure and dynamics*. Master's thesis. The Royal Institute of Technology, December 2010.
- Kozen, D.. *The design and analysis of algorithms*. New York: Springer-Verlag, 1992.
- Krokhmal, P., J. Palmquist, and S. Uryasev. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *The Journal of Risk*, 2002: 4(2): 11–27 http://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/kro_CVaR.pdf.

- Maringer, Dr. *Risk preferences and loss aversion in portfolio optimization*. Colchester, UK: CCFEA, University of Essex, 2006.
- Markowitz, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 1952: 7(1): 77–91.
- McGeoch, C., and C. Wang. Experimental evaluation of an adiabatic quantum system for combinatorial optimization. In: Conference on Computing Frontiers, ACM, 2013.
- Palubeckis, G. Multistart tabu search strategies for the unconstrained binary quadratic optimization problem. *Annals of Operations Research*, 2004: 131: 259–282.
- Papadimitriou, C., and K. Steiglitz. *Combinatorial optimization: Algorithms and complexity*. Mineola, NY: Dover Publications, 1998.
- Pardalos, P. M., O. A. Prokopyev, O. V. Shylo, and V. P. Shylo. Global equilibrium search applied to the unconstrained binary quadratic optimization problem. *Optimization Methods and Software*, 2008: 23(1): 129–140.
- Rose, G. The 128-qubit Rainier chip: II. Graph embedding. 2008. <http://dwave.wordpress.com/2008/10/23/the-128-qubit-rainier-processor-ii-graph-embedding/>.
- Shaw, D., S. Liu, and L. Kopman. Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization. *Optimization Methods and Software*, 2008: June: 411–420.
- Soleimani, H., H. R. Golmakani, and M. H. Salimi. Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems With Applications*, 2009: 5058–5063.