Chapter 1　Functions　函數

微積分處理的對象是函數，這章主要內容包括函數(三角函數)、圖形與函數運算。

1.1　Functions and Their Graphs　函數與圖形

Intervals　區間

不等式	區間符號	圖形
$a<x<b$	(a,b)	
$a\le x\le b$	$[a,b]$	
$a<x\le b$	$(a,b]$	
$a\le x<b$	$[a,b)$	
$a<x$	(a,∞)	
$x<b$	$(-\infty,b)$	
$x\le b$	$(-\infty,b]$	
$a\le x$	$[a,\infty)$	
$-\infty<x<\infty$	$(-\infty,\infty)$	

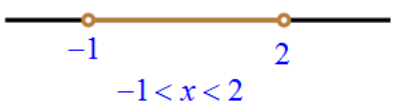
注意：符號 ∞ 表示實數線右方無限遠處的意思，並不是一個實數。

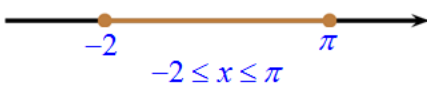
$(a,\infty]$, $[-\infty,b]$, $[-\infty,\infty]$ 無意義，$-\infty$ 與 ∞ 不可能是端點。

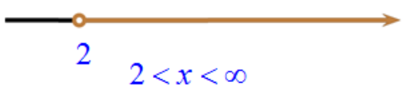
例：將區間符號以圖形及不等式的集合來表示。

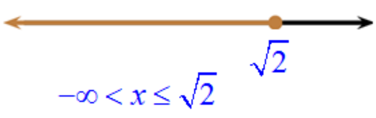
(a) $(-1,2)$　　(b) $[-2,\pi]$　　(c) $(2,\infty)$　　(d) $(-\infty,\sqrt{2}]$

解：

(a)


(b)


(c)


(d)


Functions, Domain and Range　函數，定義域及值域

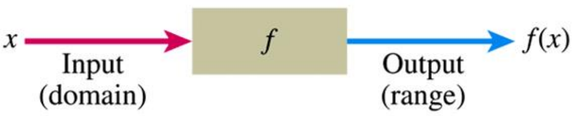
定義：若集合 D 中每個元素 x，在集合 Y 中有唯一的元素 $f(x)$ 與之對應，則稱 f 是從 D 到 Y 的函數。

[$f(x)$ 唸為 " f of x"]

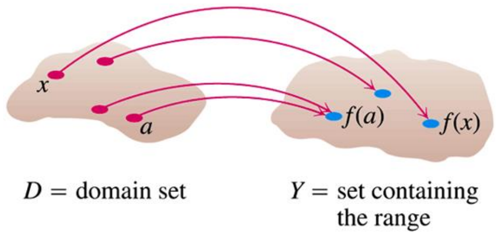
x 稱為自變數(independent variable)，$y = f(x)$ 稱為因變數(dependent variable)。

這指定集合 D 稱為函數的定義域。 若無特別指定集合，則所有使得 $f(x)$ 有意義的自變數 x 所成的集合稱為函數的自然定義域(natural domain)。這裡有意義的意思是使 y 為實數值。所有因變數 y 所成的集合稱為函數的值域。

將函數看成機器輸入及輸出的運作



將函數看成兩集合間的對應關係



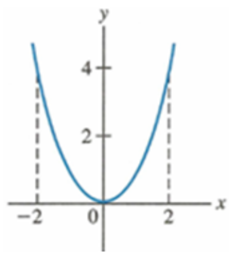
函數的呈現方法有四種：表格數據法、幾何圖示法、代數公式法與文字敘述法。

例 1：求下列函數的自然定義域及值域。

(a) $y = x^2$

定義域為 $(-\infty, \infty)$

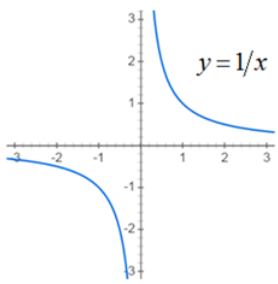
值域為 $\{y \mid y \geq 0\}$ 或 $[0, \infty)$ 。



(b) $y = 1/x$　$(xy = 1)$

分母不為 0，定義域為 $\{x \mid x \neq 0\}$ 或 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

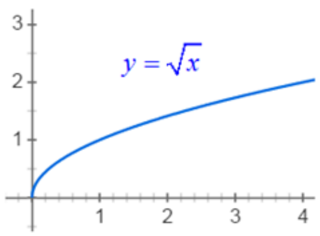
值域為 $\{y \mid y \neq 0\}$ 或 $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ 。



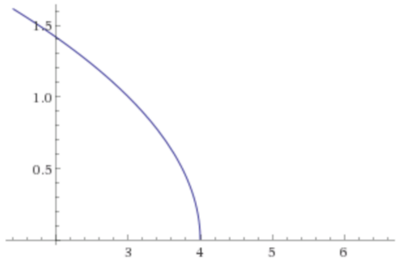
(c) $y = \sqrt{x}$

平方根內不為負，定義域為 $\{x \mid x \geq 0\}$ 或 $[0, \infty)$

平方根的值不為負，值域為 $\{y \mid y \geq 0\}$ 或 $[0, \infty)$ 。



(d) $y=\sqrt{4-x}$



平方根內不為負，定義域為 $\{x \mid x \le 4\}$ 或 $(-\infty, 4]$

平方根的值不為負，值域為 $\{y \mid y \ge 0\}$ 或 $[0, \infty)$ 。

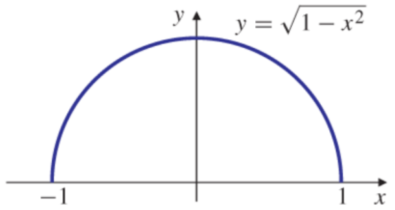
(e) $y=\sqrt{1-x^2}$

平方根內不為負，$1-x^2 \ge 0$ 時 y 才有定義，
所以定義域的 x 要滿足不等式 $x^2-1 \le 0$ 或 $(x-1)(x+1) \le 0$ 。
$(x-1)(x+1)=0 \Rightarrow x-1=0,\ x+1=0 \Rightarrow x=1,\ x=-1$

x		-1		1	
x^2-1	+	0	−	0	+

定義域為 $x^2-1 \le 0$ 的解集合 $-1 \le x \le 1$ 或記成 $[-1, 1]$ 。
y 值不為負而且最小值是 0、最大值是 1，
值域為 $0 \le y \le 1$ 或記成 $[0, 1]$ 。

$y=\sqrt{1-x^2}$ 是單位圓 $x^2+y^2=1$ 的上半圓

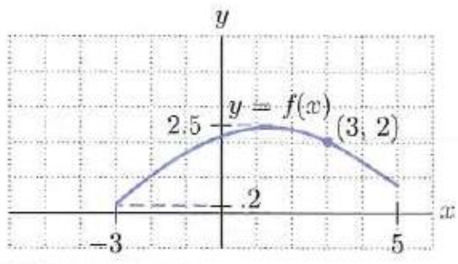


Graphs of Functions 圖形

有序對 $(x, f(x))$ 所成的集合稱為函數的圖形(graph)。

圖形的描繪：定義域在 x 軸及值域在 y 軸。
目前考慮的函數大都是可微分的(連續平滑的)，所以可先描點然後平滑地連接起來。

例：$y=f(x)$ 的圖形如下圖所示。



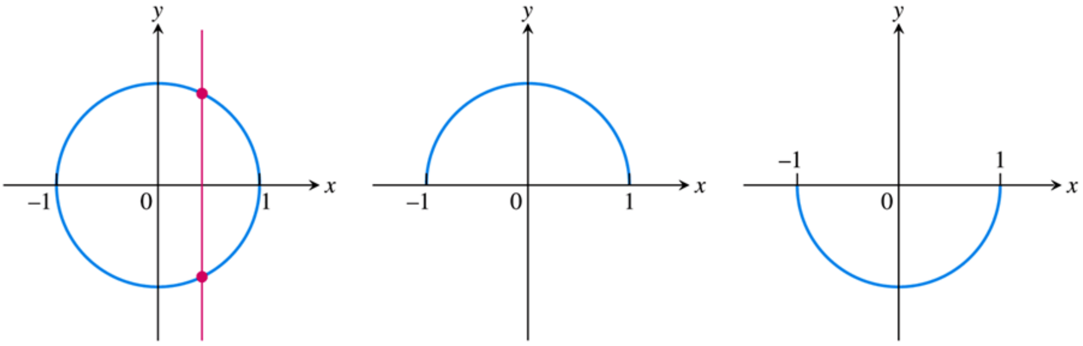
$f(3)=2,\ f(-2)=1$
f 的定義域：$-3 \le x \le 5$ 或 $[-3, 5]$
f 的值域：$0.2 \le y \le 2.5$ 或 $[0.2, 2.5]$

函數的對應關係：能多個 x 對一個 y ，但不能一個 x 對多個 y 。

所以有函數圖形的判定

$\boxed{\text{垂直線檢驗法(Vertical Line Test)：圖形是一函數} \Leftrightarrow \text{任一垂直線與圖形至多交於一點。}}$

例：曲線為函數的圖形嗎？



(a) $x^2+y^2=1$　(b) $y=\sqrt{1-x^2}$　(c) $y=-\sqrt{1-x^2}$

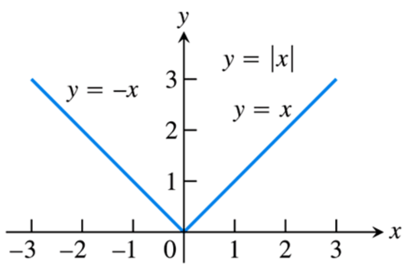
(a) 垂直線與圖形可能交於二點，不是唯一對應，曲線不是函數的圖形。

(b)(c) 任一垂直線與圖形至多交於一點，曲線是函數的圖形。

Piecewise Functions 分段函數

分段函數是指不同部分的 x 值對應的方程式不一樣。

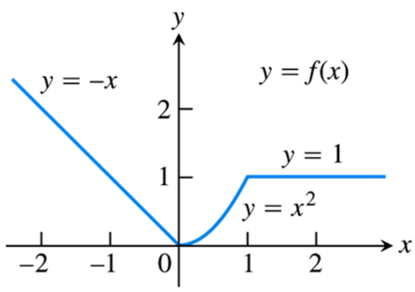
例：絕對值函數 $|x|=\begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$



當 $x\ge 0$ 時 $|x|=x$　不為負值

當 $x<0$ 時 $|x|=-x$ 是正值，負負為正

例 4： $f(x)=\begin{cases} -x & x<0 \\ x^2 & 0\le x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$



當 $x>1$ 時 $f(x)=1$　是常數值

當 $0<x\le 1$ 時 $f(x)=x^2$

當 $x\le 0$ 時 $f(x)=-x$

例 5：最大整數函數(the greatest integer function)符號為 $\lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \rfloor = n$, if $n \le x < n+1$　小於或等於 x 的最大整數

$\lfloor 2.4 \rfloor = 2$, $\because 2 < 2.4 < 3$

$\lfloor 1.9 \rfloor = 1$, $\because 1 < 1.9 < 2$

$\lfloor 0 \rfloor = 0$, $\because 0 \le 0 < 1$

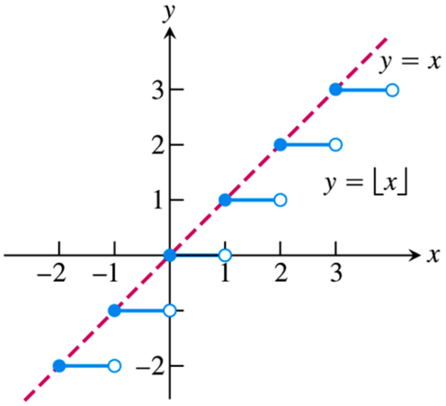
$\lfloor -1.2 \rfloor = -2$, $\because -2 < -1.2 < -1$

$\lfloor 2 \rfloor = 2$, $\because 2 \le 2 < 3$

$\lfloor 0.2 \rfloor = 0$, $\because 0 < 0.2 < 1$

$\lfloor -0.3 \rfloor = -1$, $\because -1 < -0.3 < 0$

$\lfloor -2 \rfloor = -2$, $\because -2 \le -2 < -1$



例 6：最小整數函數(the least integer function)符號為 $\lceil x \rceil$

$\lceil x \rceil = n+1$, if $n < x \le n+1$　大於或等於 x 的最小整數

$\lceil 2.4 \rceil = 3$, $\because 2 < 2.4 < 3$

$\lceil 1.9 \rceil = 2$, $\because 1 < 1.9 < 2$

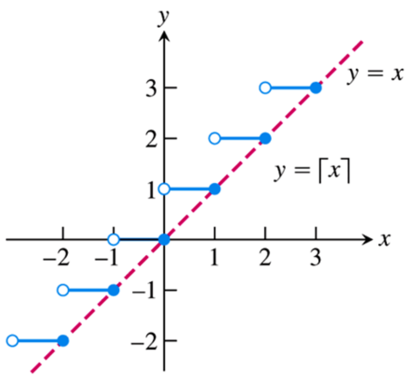
$\lceil 0 \rceil = 0$, $\because -1 < 0 \le 0$

$\lceil -1.2 \rceil = -1$, $\because -2 < -1.2 < -1$

$\lceil 2 \rceil = 2$, $\because 1 < 2 \le 2$

$\lceil 0.2 \rceil = 1$, $\because 0 < 0.2 < 1$

$\lceil -0.3 \rceil = 0$, $\because -1 < -0.3 < 0$ ， $\lceil -2 \rceil = -2$, $\because -3 < -2 \le -2$

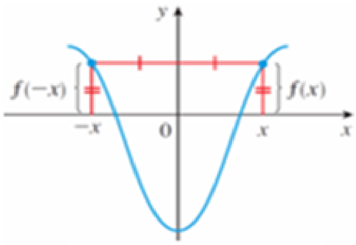


Odd/Even Functions and Symmetry　奇偶函數及對稱性

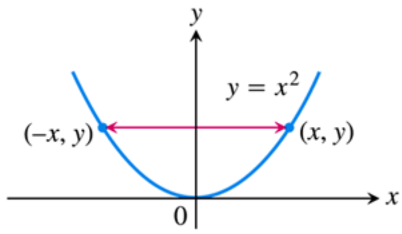
$\boxed{f \text{ 是偶函數} \Leftrightarrow f(-x)=f(x) \Leftrightarrow \text{圖形對稱於 } y \text{ 軸}}$

例如

$f(x)=x^2$，$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，圖形對稱於 y 軸



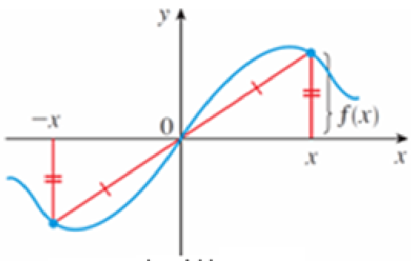
偶函數



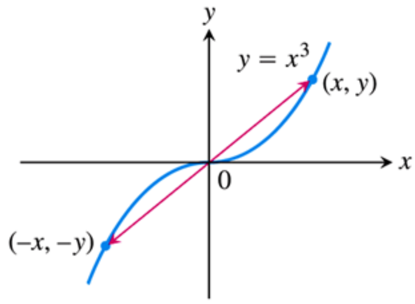
$\boxed{f \text{ 是奇函數} \Leftrightarrow f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow \text{圖形對稱於原點}(0,0)}$

例如

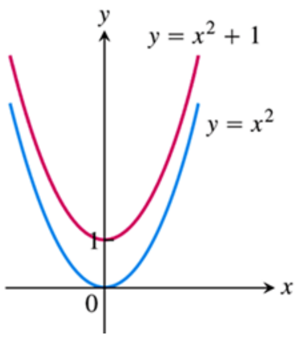
$f(x)=x^3$，$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，圖形對稱於原點 $(0,0)$



奇函數



例 8：檢查對稱性，下列各函數是偶函數還是奇函數，抑是兩者皆非。

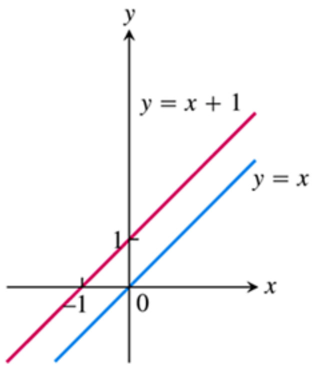


(a-1) $f(x)=x^2$

$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，偶函數，圖形對稱於 y 軸

(a-2) $f(x)=x^2+1$

$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$，偶函數，圖形對稱於 y 軸



(b-1) $f(x)=x$

$f(-x)=(-x)=-x=-f(x)$，奇函數，圖形對稱於原點 $(0,0)$

(b-2) $f(x)=x+1$

$f(-x)=(-x)+1=-x+1$，

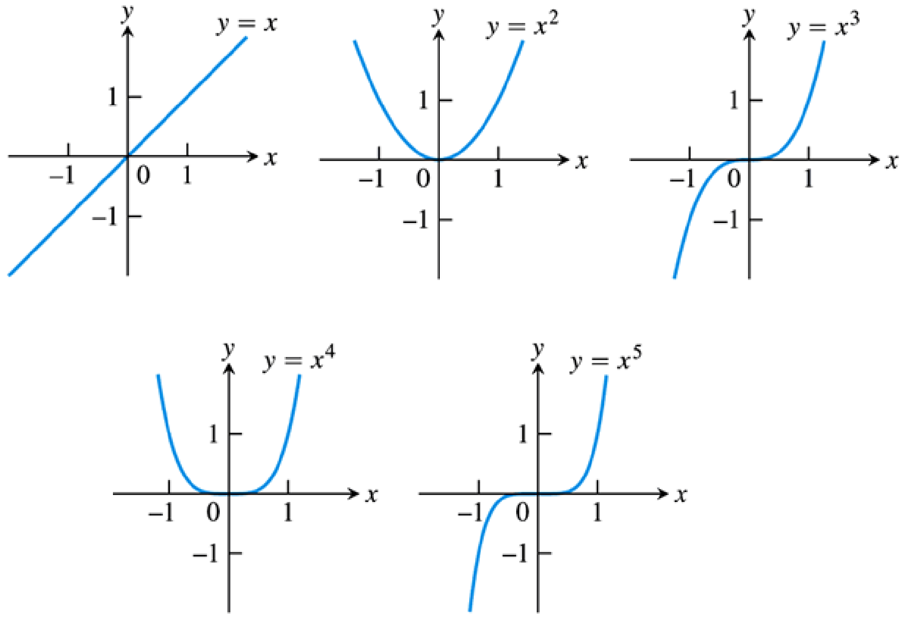
$f(-x)\neq f(x)$ 且 $f(-x)\neq -f(x)$，兩者皆非。

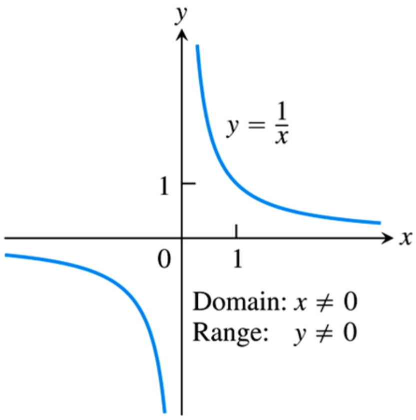
Common Functions 常用函數

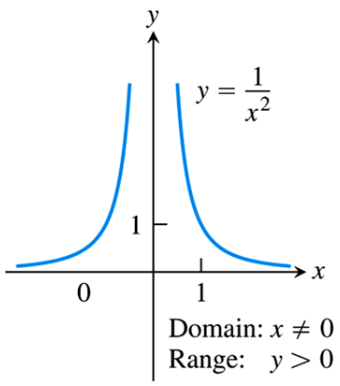
三角函數、指數函數、對數函數及超越函數在後續章節介紹。
線性函數、常數函數、冪次函數、多項式函數及有理函數在高中數學學過，
這裡強調圖形的認識，因為後續章節裡某些性質或定理可從函數圖形來理解。

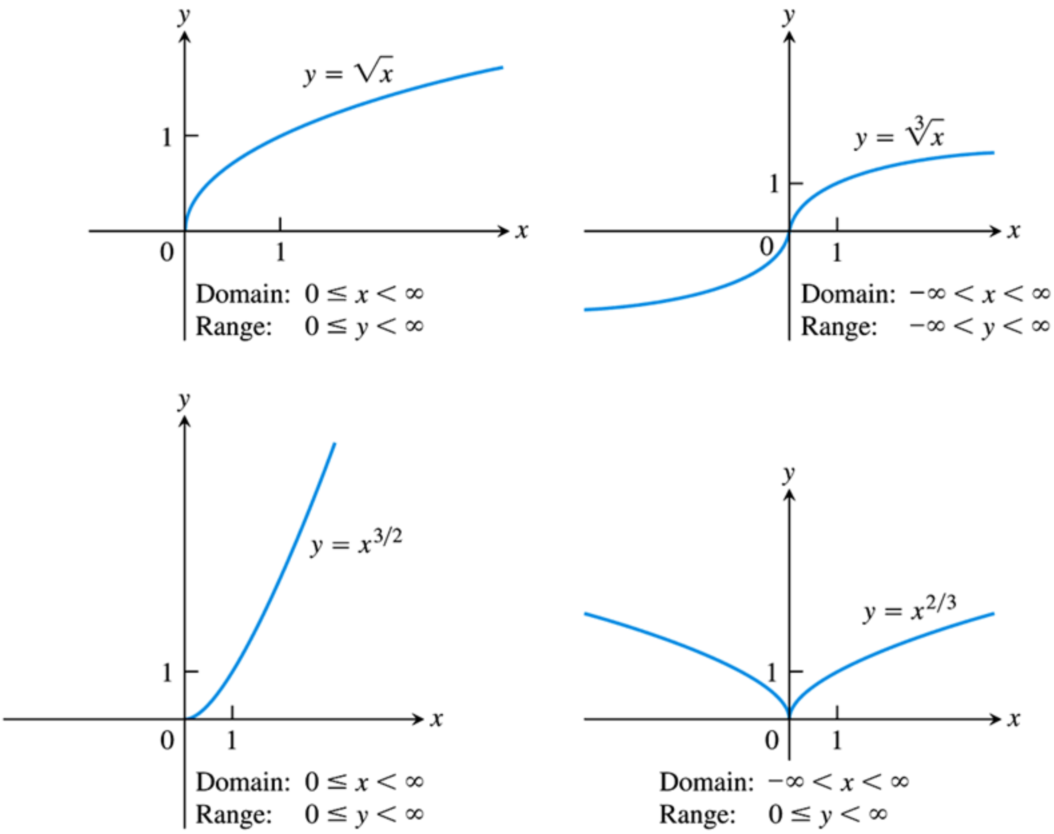
只有線性函數(一次式) $y=mx+b$ 及常數函數 $y=k$ 的圖形是直線。

冪次函數(power) $y=x^n$ 的圖形









多項式函數(polynomial) $y=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ，n 為非負整數

若 $p(x)$ 與 $q(x)$ 是多項式函數，則 $f(x)=p(x)/q(x)$ 是有理函數(rational function)。
我們用微積分方法繪其圖形。

不看解答過程，請完整地作答。

絕對值函數的圖形 $y=|x|$

最大整數函數 $\lfloor x \rfloor$ 的圖形

冪函數的圖形： $y=x,\ y=x^2,\ y=x^3,\ y=x^4$

根函數的圖形： $y=x^{1/3},\ y=x^{2/3},\ y=\sqrt{x}$

倒轉(reciprocal)函數的圖形： $y=1/x,\ y=1/x^2$

驗證判定 $f(x)=\dfrac{x}{x^3+1}$ ， $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ 是奇函數或偶函數。

1.2 Combining Functions 組成的函數

Sum, Difference, Product, Quotient 函數的加減乘除(和差積商)

以例子來說明。

例 1： $f(x)=\sqrt{x}$ ，定義域$[0,\infty)$ ， $g(x)=\sqrt{1-x}$ ，定義域$(-\infty,1]$

新函數	新函數運算式	新定義域：兩者交集且有意義
和 $(f+g)(x)$	$f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,\infty)\cap(-\infty,1]=[0,1]$
差 $(f-g)(x)$	$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,\infty)\cap(-\infty,1]=[0,1]$
積 $(f\cdot g)(x)$	$f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,\infty)\cap(-\infty,1]=[0,1]$
商 $(f/g)(x)$	$f(x)/g(x)=\sqrt{x}/\sqrt{1-x}$	$[0,\infty)\cap(-\infty,1)=[0,1)$ ，分母不為 0

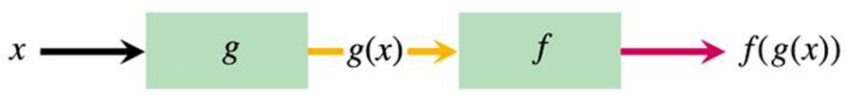
例：有理函數的和： $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)}+\dfrac{3x}{x(x-1)}=\dfrac{5x-2}{x(x-1)}$

Note: $\dfrac{a/b}{c/d}=\dfrac{a/b}{c/d}\cdot\dfrac{bd}{bd}=\dfrac{ad}{bc}$ ； $(4\div2=4\cdot\dfrac{1}{2}$ ，同理) $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$

例：有理函數的商： $\dfrac{x}{x^2-1}\div\dfrac{x-5}{x+1}=\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{x+1}{x-5}=\dfrac{x}{(x-1)(x-5)}$

Composition 合成函數

定義：函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的合成為 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$



口訣：合成函數 $f(g(x))$ 是以 $g(x)$ 替換 $f(x)$ 裡的 x 。

注意：看上圖，合成函數 $f(g(x))$ 的定義域為在 $g(x)$ 定義域中的 x 滿足 $g(x)$ 會落在 $f(x)$ 的定義域。
以例子來說明。

例 2： $f(x)=\sqrt{x}$，定義域$[0,\infty)$， $g(x)=x+1$，定義域$(-\infty,\infty)$

合成函數	合成函數運算式	新定義域：在 $g(x)$ 定義域中的 x 滿足 $g(x)$ 會落在 $f(x)$ 的定義域。
$(f\circ g)(x)$	$f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x+1}$	$[-1,\infty)$
$(g\circ f)(x)$	$g(f(x))=f(x)+1=\sqrt{x}+1$	$[0,\infty)$
$(f\circ f)(x)$	$f(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$	$[0,\infty)$
$(g\circ g)(x)$	$g(g(x))=g(x)+1=(x+1)+1=x+2$	$(-\infty,\infty)$

例：若 $f(x)=x^2+3x+1$與 $g(x)=x-5$，則

$f(g(x))=[g(x)]^2+3g(x)+1=(x-5)^2+3(x-5)+1=x^2-7x+11$ (用 $g(x)$ 替換 $f(x)$ 裡的 x)

$g(f(x))=f(x)-5=x^2+3x+1-5=x^2+3x-4$ (用 $f(x)$ 替換 $g(x)$ 裡的 x)

Note：一般情形而言， $f(g(x))\neq g(f(x))$

例：若 $L(x)=(2x-1)^3$，試找 $f,\ g$ 滿足 $L(x)=f(g(x))$。

解： $f(g(x))=(2x-1)^3$，則內函數 $g(x)=2x-1$，外函數 $f(\ )=(\quad)^3$，即 $f(x)=x^3$

驗證 $L(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)^3$。

註：取 $f(x)=(x-1)^3$與 $g(x)=2x$，

雖可的得到相同結果 $L(x)=f(g(x))=f(2x)=(2x-1)^3$，但這不是最自然的方式。

圖形平移及縮小放大(shifting and scaling)，省略。

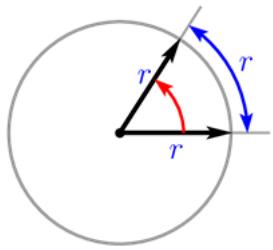
不看解答過程，請完整地作答。

例：若 $f(x)=x^2+3x+1$與 $g(x)=x-5$，求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$

例：若 $L(x)=(2x-1)^3$，試找 $f,\ g$ 滿足 $L(x)=f(g(x))$。

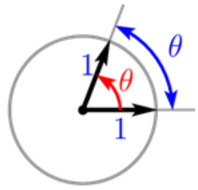
1.3 Trigonometric Functions 三角函數

角度量的弳單位與度單位

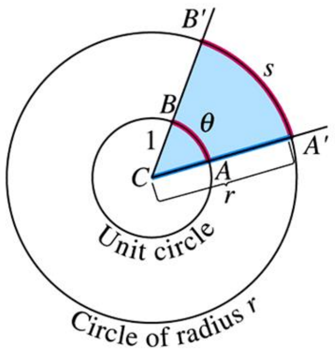


弳度制：一圓之弧長等於半徑時所對應的角度量稱為 1 弳(radian, rad)。
圓周長等於 2π 個半徑，所以繞圓一圈的角度量為 2π 弳。

常將弳省略，例如 2π 弳簡記為 2π 。
因此 2π rad $= 360^\circ$ （ $2\pi = 360^\circ$ ）或 $\pi = 180^\circ$ 。



在單位圓(半徑為 1 的圓)，
當我們說到角度為 θ 弳，即指弧長為 θ 時所對應的角度。



角 ACB 及角 $A'CB'$ 是同一個角度量 θ 弳，

角度量不要產生前小後大的錯覺。

是半徑及弧長不同，依照相似形的比例計算，

$$\frac{\text{半徑}1}{\text{半徑}r} = \frac{\text{弧長}\theta}{\text{弧長}s} \Rightarrow s = r\theta$$

依據 $2\pi = 360^\circ$ ，得到角度量的弳單位與度單位的換算如下

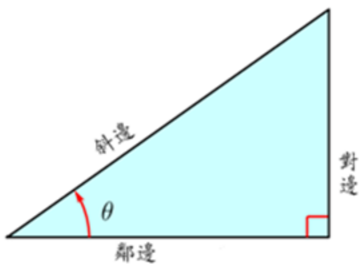
TABLE 1.2 Angles measured in degrees and radians

Degrees	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

三角函數

當 $0 < \theta < 90^\circ$ 時，可利用直角三角形來定義六個角 θ 的三角函數，如下

正弦(sine)	$\sin\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$	餘弦(cosine)	$\cos\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$
正切(tangent)	$\tan\theta = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$	餘切(cotangent)	$\cot\theta = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$
正割(secant)	$\sec\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$	餘割(cosecant)	$\csc\theta = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$

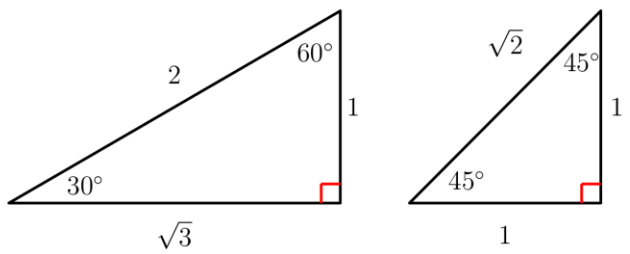


$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

常用的三角函數值

θ°	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\cos\theta$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\tan\theta$	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

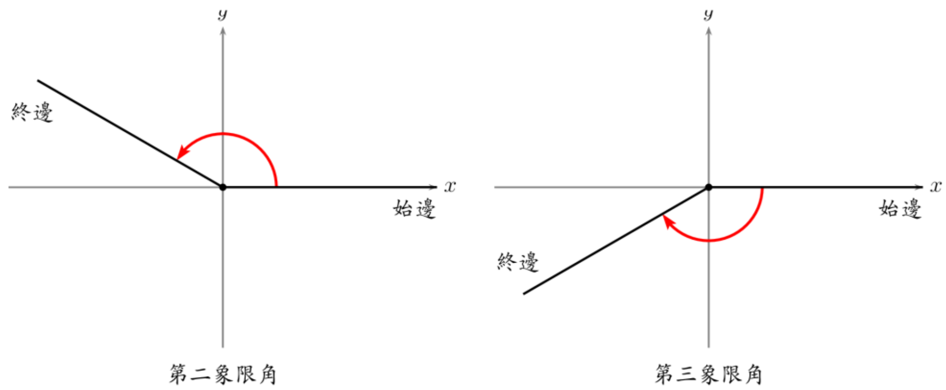


三角函數要如何拓展到任意角 θ 呢？

將一個角的頂點設定在直角座標的原點，始邊設定在正向的 x 軸，則稱此角在一標準位置(standard position)。

從始邊逆時針方向旋轉到終邊的角稱為正角；而從始邊順時針方向旋轉到終邊的角稱為負角。

正角　　負角

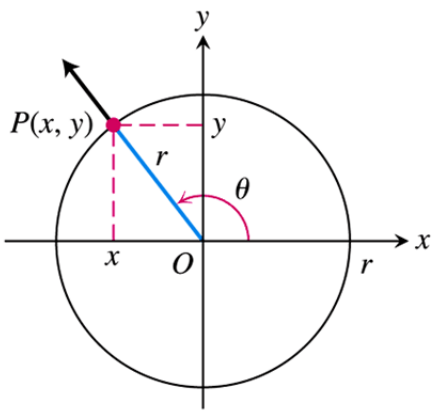


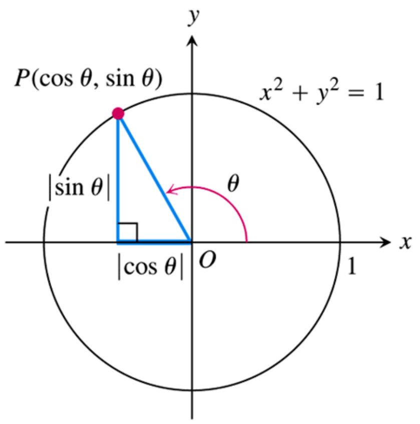
三角函數定義

$P(x,y)$ 為標準位置角 θ 的終邊上的一點，$r=\sqrt{x^2+y^2}$ 是點 P 與原點的距離。

定義 $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$、$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ ；或 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

若取半徑為 $r=1$，則 $x=\cos\theta,\ y=\sin\theta$

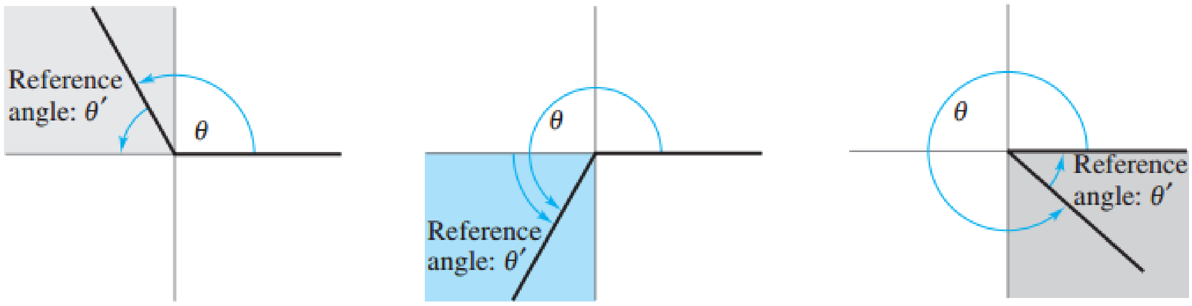




其他一樣，$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ ，$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$ ，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ，$\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\tan\theta}$

手算時經常仰賴使用輔助三角形。輔助三角形是啥呢？

θ 角的輔助角(reference angle) θ' 如圖示，是 θ 角終端射線與 x 軸所夾的銳角(正向角)。



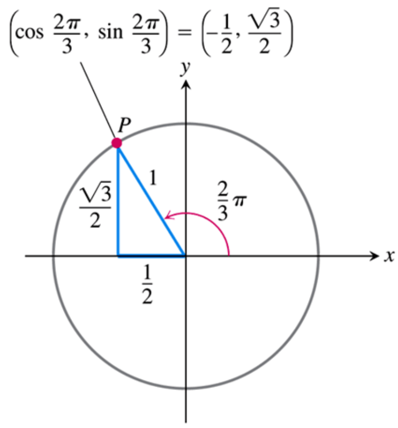
Quadrant II
$\theta'=\pi-\theta$ (radians)

Quadrant III
$\theta'=\theta-\pi$ (radians)

Quadrant IV
$\theta'=2\pi-\theta$ (radians)

無論角 θ 落在那個象限，輔助三角形的斜邊在終端射線，鄰邊在 x 軸。
斜邊長 r 恆為正，鄰邊方向長 x 及對邊方向長 y 視角 θ 所在象限考慮正負。
計算角 θ 三角函數值時就求輔助角的三角函數值。

例：求角 $\theta=2\pi/3$ 的三角函數值。
解：



作輔助三角形，鄰邊方向長 $x=-1/2$ 及對邊方向長 $y=\sqrt{3}/2$

所以 $\cos\theta=x=-\dfrac{1}{2}$ 、$\sin\theta=y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}=-\dfrac{2}{1}=-2$ 、$\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\sqrt{3}$ 、$\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$

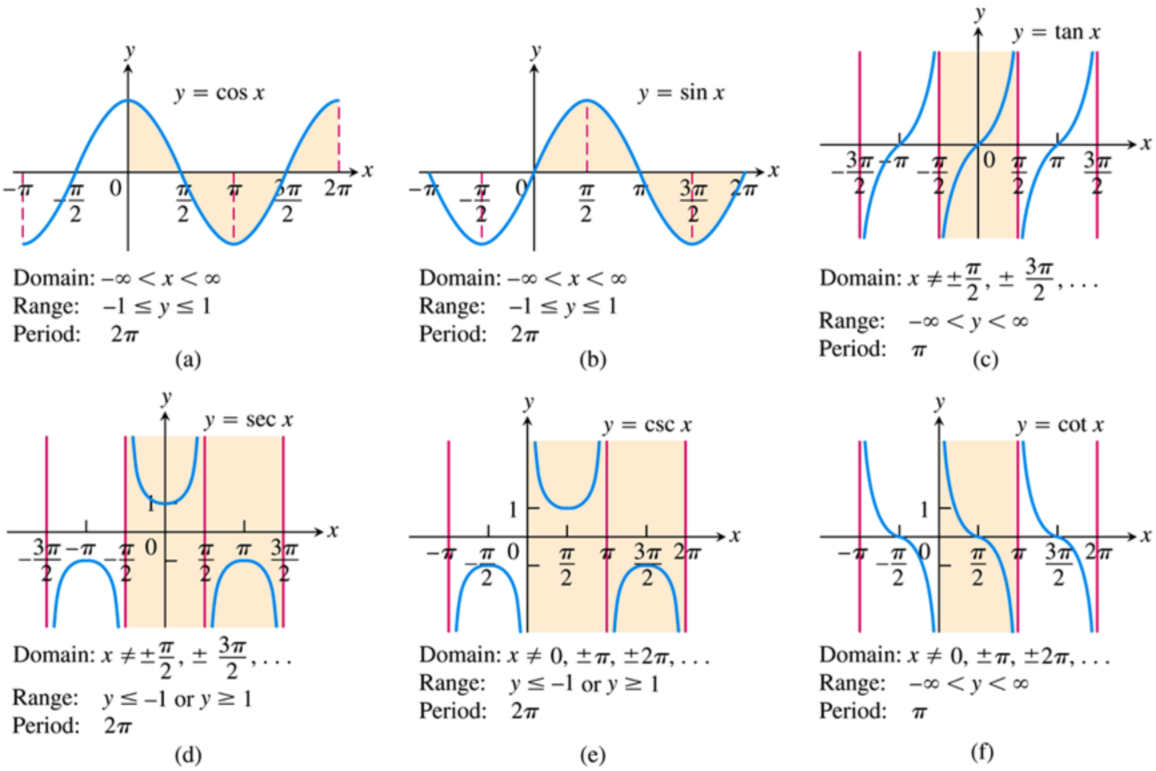
TABLE 1.3 Values of $\sin\theta$, $\cos\theta$, and $\tan\theta$ for selected values of θ

Degrees	−180	−135	−90	−45	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
θ (radians)	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\cos\theta$	−1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
$\tan\theta$	0	1		−1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0		0

三角函數的性質

若對所有定義域中 x 恆有 $f(x+p)=f(x)$，則 f 是週期為 p 的週期性函數。

$\sin x$ 和 $\cos x$ 的最小週期為 2π 或 360°，每間隔 2π 或 360° 就重複循環出現相同的圖形。
$\sec x$ 和 $\csc x$ 的最小週期也是 2π 或 360°，但 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的最小週期為 π 或 180°。
三角函數圖形如下



性質 (1) $-1\le\cos t\le 1$ ， $-1\le\sin t\le 1$ (2) $\sin^2 t+\cos^2 t=1$

(3) $\cos(t+2\pi)=\cos t$ ， $\sin(t+2\pi)=\sin t$ ， $\cos t,\ \sin t$ 的週期為 2π 。

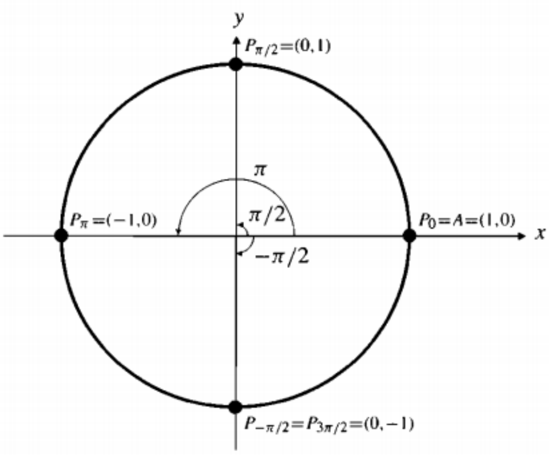
例：

$P_0=(1,0)\Rightarrow\cos 0=1,\ \sin 0=0$

$P_{\pi/2}=(0,1)\Rightarrow\cos\dfrac{\pi}{2}=0,\ \sin\dfrac{\pi}{2}=1$

$P_\pi=(-1,0)\Rightarrow\cos\pi=-1,\ \sin\pi=0$

$P_{3\pi/2}=(0,-1)\Rightarrow\cos\dfrac{3\pi}{2}=0,\ \sin\dfrac{3\pi}{2}=-1$



性質(4) $\cos t$ 是偶函數，$\sin t$ 是奇函數

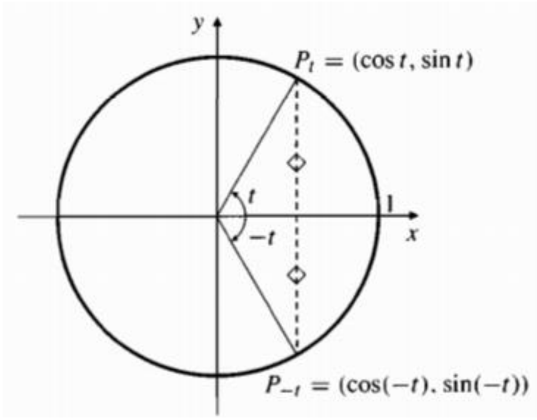
$P_t=(\cos t,\sin t)$ 及 $P_{-t}=(\cos(-t),\sin(-t))$

這兩點對稱於 x 軸，

有相同的 x 分量值，而 y 分量值差個負號

所以

$\cos(-t)=\cos t$，$\sin(-t)=-\sin t$



性質(5) 餘角公式(Complementary angle identities)

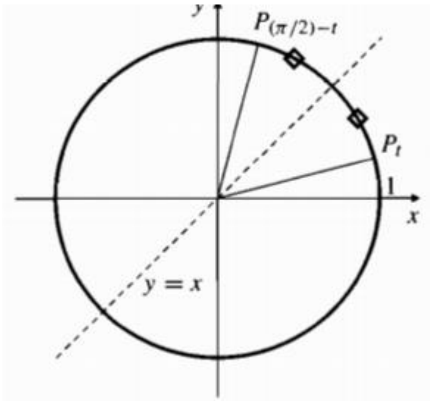
$P_t=(\cos t,\sin t)$ 及 $P_{\pi/2-t}=(\cos(\frac{\pi}{2}-t),\sin(\frac{\pi}{2}-t))$

這兩點對稱於直線 $y=x$，

彼此 x 分量值恰為對方的 y 分量值，

所以

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$，$\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$



性質(6) 補角公式(Supplementary angle identities)

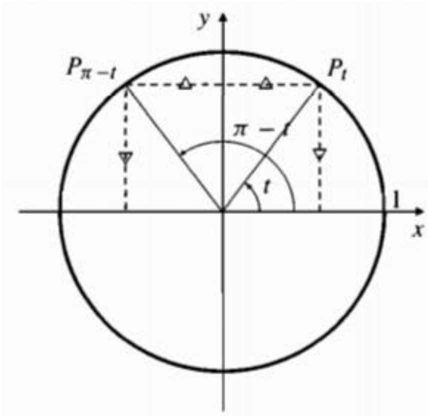
$P_t=(\cos t,\sin t)$ 及 $P_{\pi-t}=(\cos(\pi-t),\sin(\pi-t))$

這兩點對稱於 y 軸，

有相同的 y 分量值，而 x 分量值差個負號，

所以

$\cos(\pi-t)=-\cos t$，$\sin(\pi-t)=\sin t$



$\boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \tan^2\theta+1=\sec^2\theta \qquad \cot^2\theta+1=\csc^2\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，同除 $\cos^2\theta$ 得到 $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$，即 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，同除 $\sin^2\theta$ 得到 $\dfrac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$，即 $\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$。

下列和差角公式的證明，請參考相關的三角學。

和(差)公式　$\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B$
$\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B$

由和差角公式可推導下列倍角公式。

倍角公式　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

例：試證 $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$。
解：

$$\begin{aligned}\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)&=\cos\theta\cdot\cos\theta-\sin\theta\cdot\sin\theta\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta &&(\sin^2\theta=1-\cos^2\theta)\\&=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta &&(\cos^2\theta=1-\sin^2\theta)\end{aligned}$$

由倍角公式可推導下列公式。

半角公式　$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$　，　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

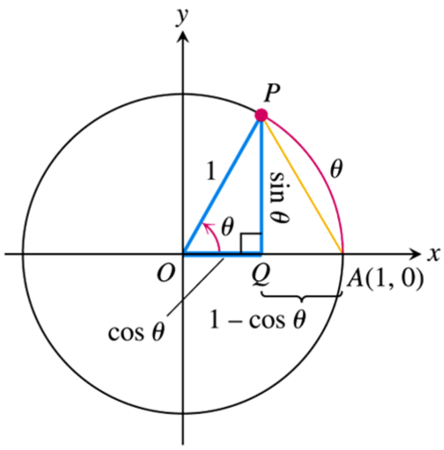
半角公式可以將 Cosine 及 Sine 的偶次式來降冪次

重要不等式：$-|\theta|\le\sin\theta\le|\theta|$　，　$-|\theta|\le 1-\cos\theta\le|\theta|$

假設 $\theta>0$，

直觀說明：弧長 $AP>$ 線段 $AP>$ 線段 $PQ\Rightarrow\theta>\sin\theta$

弧長 $AP>$ 線段 $AP>$ 線段 $AQ\Rightarrow\theta>1-\cos\theta$



正規證明：

終邊與單位圓 $x^2+y^2=1$ 之交點為 $P_\theta=(x,y)$，

則 $\cos\theta=x$、$\sin\theta=y$。

$$(AQ)^2+(PQ)^2=(AP)^2\le\theta^2$$

$$\Rightarrow(1-\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2\le\theta^2\Rightarrow(\sin\theta)^2\le\theta^2,\ (1-\cos\theta)^2\le\theta^2$$

$$\Rightarrow -|\theta|\le\sin\theta\le|\theta|,\ -|\theta|\le 1-\cos\theta\le|\theta|$$

若 $\theta<0$，可同理得證。

不看解答過程，請完整地作答。

敘述 $\sin x$ ，$\cos x$ ，$\sec x$ 及 $\tan x$ 的定義。

例：求角 $\theta = 2\pi/3$ 的三角函數值。

描繪 $\sin x$ ，$\cos x$ ，$\sec x$ 及 $\tan x$ 圖形。

$\sin x$ ，$\cos x$ ，$\sec x$ 及 $\tan x$ 哪些是偶函數？哪些是奇函數？

敘述倍角公式及半角公式。

………

指數與對數函數的講法，大致上有兩種

第一種，沿用高中數學方式，

先介紹一般指數 a^x 的定義方式與指數律，從而引伸出一般對數 $\log_a x$ 的定義方式與對數律。

微積分課本要的是自然指數 e^x 及自然對數 $\ln x$ 。
通常用極限與斜率等方式介紹 Euler number： $e \approx 2.718281828\cdots$

然後定義自然指數 e^x 及自然對數 $\ln x = \log_e x$ 。

最終要討論與自然指數及對數有關的微分及積分，並引伸出一般指數及對數的微分及積分。
這種講法雖然不是很嚴謹，但比較容易懂。

………

第二種，嚴謹的數學方式，在第 7 章。
乍看之下，覺得莫名其妙。

先用定積分定義自然對數 $x > 0,\ \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ ，導出對數律，與對數有關的微分及積分。

介紹 Euler number e ：滿足 $\ln e = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$

利用反函數概念，定義自然指數 e^x ，導出指數律，與指數有關的微分及積分。

最後利用自然指數 e^x 及自然對數 $\ln x$ ，來定義我們較為熟悉的一般指數 a^x 及對數 $\log_a x$ ，

並推導其微分及積分。
微積分課本要的是自然指數 e^x 及自然對數 $\ln x$ 。

………

只要能理解，用哪種方法都可。我們在第一章用高中數學講法。

………

1.5 Exponential Functions 指數函數

一般指數函數

$a>0$，$f(x)=a^x$ 稱為以 a 為底及 x 為次方的指數函數，定義域 $(-\infty,\infty)$

指數律：(i) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$ (ii) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ (iii) $(a^x)^y=a^{xy}$ (iv) $a^x\cdot b^x=(ab)^x$ (v) $\dfrac{a^x}{b^x}=(\dfrac{a}{b})^x$

指數 a^x 的定義方式，a 是正實數，下列指數的推廣，仍滿足指數律。

step 1： $x=n$ 是正整數，$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{ 個}}$，例如 $5^3=5\cdot5\cdot5$。

step 2： $x=0$ 規定 $a^0=1$，例如 $(0.5)^0=1$。

step 3： $x=-n$ 是負整數，規定 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，例如 $4^{-2}=\dfrac{1}{4^2}=\dfrac{1}{16}$。

step 4： a 是正實數，$\sqrt[q]{a^p}$ 是滿足方程式 $\sqrt[q]{x}=a^p$ 的正數解，

例如 $\sqrt{10}$ 是滿足方程式 $x^2=10$ 的正數解，$\sqrt{4}$ 是滿足方程式 $x^2=4$ 的正數解

$x=p/q$ 是有理數，規定 $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$，$p,\ q$ 是整數，$q>0$

例如 $8^{1/3}=\sqrt[3]{8}=2$，$4^{-3/2}=\dfrac{1}{4^{3/2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}^3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$。

step 5： x 是無理數可以用有理數數列 $r_1,\ r_2,\ r_3,\ \cdots$ 逼近，即 $x=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$，則定義指數 $a^x=a^{\lim\limits_{n\to\infty}r_n}$。

例如，無理數 $\sqrt{3}=1.732050808\cdots$

是有理數列 $r_1=1,\ r_2=1.7,\ r_3=1.73,\ r_4=1.732,\ r_5=1.7320,\ r_5=1.73205,\ \cdots$ 的極限，

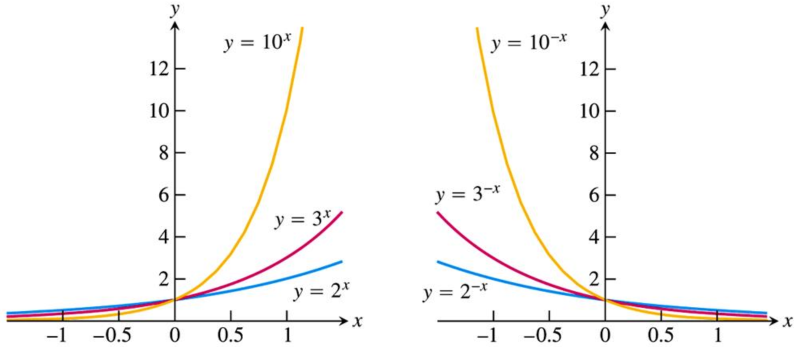
即 $\sqrt{3}=\lim\limits_{n\to\infty}r_n$

則指數 $2^{\sqrt{3}}$ 是有理數列 $2^1,\ 2^{1.7},\ 2^{1.73},\ 2^{1.732},\ 2^{1.7320},\ 2^{1.73205}\cdots$ 的極限，即 $2^{\sqrt{3}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}r_n}$

例 2：應用上列公式與指數律，化簡各題。

$3^{1.1}\cdot3^{0.7}=3^{1.1+0.7}=3^{1.8}$ ， $\dfrac{\sqrt{10}^3}{\sqrt{10}}=(\sqrt{10})^{3-1}=\sqrt{10}^2=10$

$(5^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=5^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=5^2=25$ ， $7^\pi\cdot8^\pi=(7\cdot8)^\pi=56^\pi$ ， $(\dfrac{4}{9})^{1/2}=\dfrac{4^{1/2}}{9^{1/2}}=\dfrac{2}{3}$



(a) $y = 2^x, y = 3^x, y = 10^x$　　(b) $y = 2^{-x}, y = 3^{-x}, y = 10^{-x}$

$a > 1$

圖形 $y = a^x$ 遞增且過點 $(0,1)$

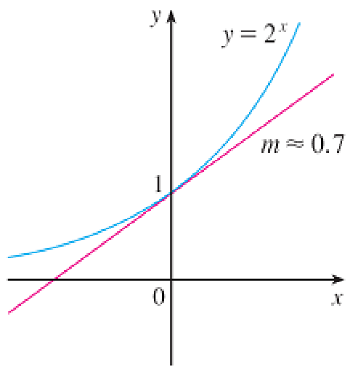
$0 < a < 1$

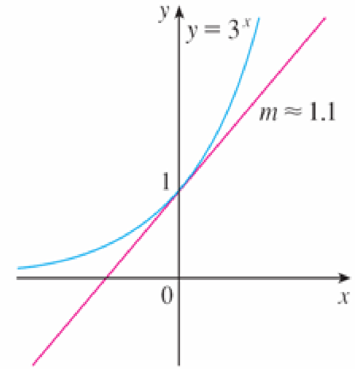
圖形 $y = a^x$ 遞減且過點 $(0,1)$

自然指數函數

$e \approx 2.718281828$ 是一無理數，稱為 Euler number， e^x 稱為自然指數函數。

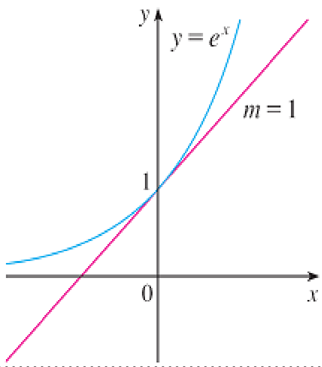
e 怎麼來？

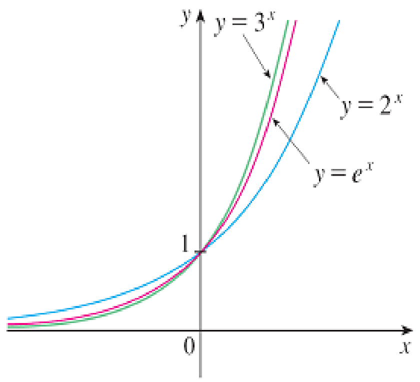




$y = 2^x$ 在 $(0,1)$ 的斜率 $m \approx 0.7$　　$y = 3^x$ 在 $(0,1)$ 的斜率 $m \approx 1.1$

存在一個數 e 滿足 $y = e^x$ 在 $(0,1)$ 的斜率 $m = 1$，如圖示， $2 < e < 3$ 。





自然指數函數也滿足指數律 (i) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$　(ii) $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$　(iii) $(e^x)^y = e^{xy}$

其他介紹方式：$e=\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}$，或 $e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$

x	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000
$(1+1/x)^x$	2.7169	2.7176	2.7178	2.7179	2.7180	2.7181	2.7181

不看解答過程，請完整地作答。

敘述 Euler number e 的定義及近似值

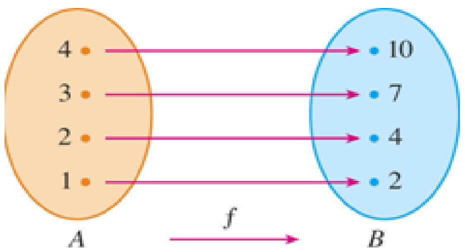
敘述 e^x 自然指數律。

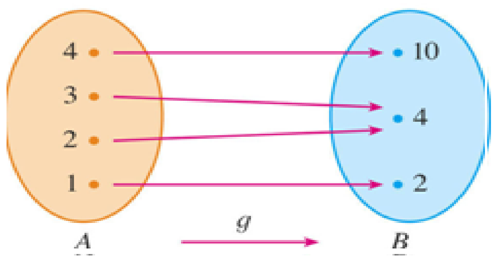
1.6 Inverse Functions and Logarithms 反函數及對數

1-1 函數

$\boxed{\text{定義：若對所有定義域中的 } x_1, x_2 \text{，} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{，則 } f \text{ 是 } 1-1 \text{ (one to one)函數}}$

定義是說 $1-1$ 函數的不同自變數對應到不同的因變數。下列圖示，f 是 $1-1$ 而 g 不是 $1-1$。





邏輯上，(若 P 則 Q)與(非 Q 則非 P)是等價的。

例如，

在戶外，(若 $\underset{P}{\text{下雨}}$ ，則 $\underbrace{\text{地面是濕的}}_{Q}$) 與 (若 $\underbrace{\text{地面是乾的}}_{\text{非}Q}$ ，則 $\underbrace{\text{沒下雨}}_{\text{非}P}$)是等價的。

$\boxed{\text{要證明 } f \text{ 是 } 1-1 \text{，通常用定義的等價敘述：} f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$

也就是假設定義域中的任兩個元素若有相同的函數值，證得這兩個元素是同一個。

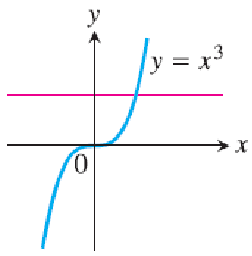
例：試證 $f(x)=x^3$ 是 $1-1$ 的函數。

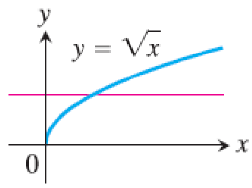
證： 假設 $f(x_1)=f(x_2)$，則 $x_1^3=x_2^3$，$(x_1^3)^{1/3}=(x_2^3)^{1/3}$，$x_1=x_2$，故 f 是 $1-1$。

判斷函數是1−1的幾何方法

水平線判定法(Horizontal Line Test)：
f 是1−1 $\Leftrightarrow$ 任一水平線與 f 的圖形至多交於一點 (不能多個 x 對一個 y ，只能一個 x 對一個 y)

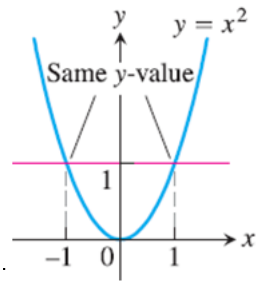
例 1： $y=x^3$ 在自然定義域 $(-\infty,\infty)$ 是1−1

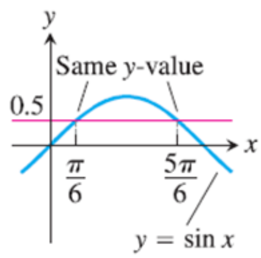




$y=\sqrt{x}$ 在自然定義域 $[0,\infty)$ 是1−1

$y=x^2$ 在自然定義域 $(-\infty,\infty)$ 不是1−1
但在 $[0,\infty)$ 是1−1 。

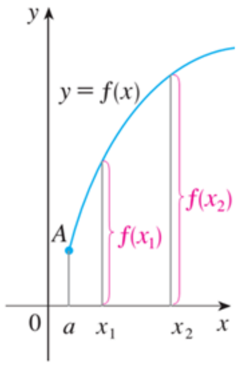




$y=\sin x$ 在自然定義域 $(-\infty,\infty)$ 不是1−1
但在 $[0,\pi/2]$ 是1−1 。

第 6 頁
定義：若對所有定義域中的 x_1,x_2 ，
$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ，則 f 是遞增(increasing)函數。

若對所有定義域中的 x_1,x_2 ，
$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ ，則 f 是遞減(decreasing)函數。



＊遞增函數是1−1 。遞減函數也是1−1 。

說明：若 $x_1\neq x_2$ ，不妨假設 $x_1<x_2$ ，已知 f 遞增，故 $f(x_1)<f(x_2)$

得證 $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ ， f 是1−1 。

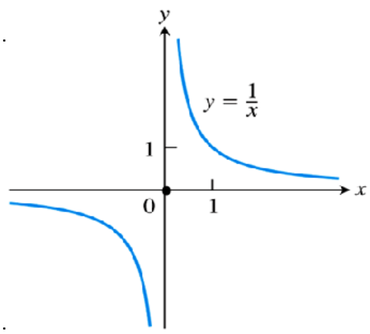
第 4 章：若導數 f' 恆正，則 f 遞增
例：試證 $f(x)=x^3$ 在自然定義域 $(-\infty,\infty)$ 是1−1 。

證： $x\neq 0$ 時 $f'(x)=3x^2>0$ ，則 遞增，故 f 是1−1 。

注意：1−1的函數不一定是遞增或遞減函數，

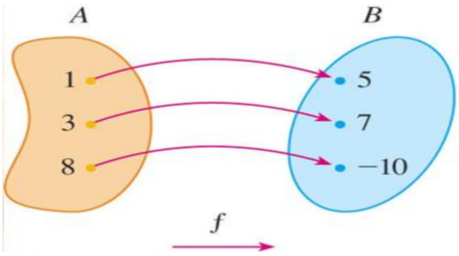
例如 $f(x)=\begin{cases} 1/x\,,\ x\neq 0 \\ 0\ ,\ \ x=0 \end{cases}$

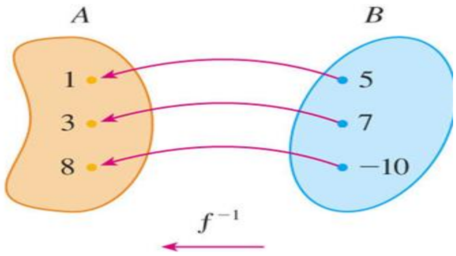
從水平線判定法知函數是1−1 ，
但不是遞增或遞減函數，注意原點 $(0,0)$ 。

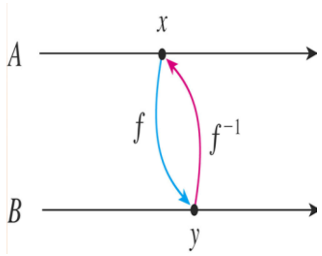


反函數 Inverse

f 是$1-1$，其逆對應稱為 f 的反函數，記為 f^{-1}。即 $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$。







$x\in A$，x 被 f 運到 y ，y 又被 f^{-1}運回到 x，所以 $f^{-1}(f(x))=x$

$y\in B$，y 被 f^{-1}運到 x，x 又被 f 運回到 y ，所以 $f(f^{-1}(y))=y$

也就是說，

一元素同時經過一函數及其反函數的運算，回到自己本身。

注意： $f(x)=x^3:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$ 是$1-1$，$y=x^3 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y}$，

故反函數為 $f^{-1}(y)=y^{1/3}:(-\infty,\infty)\to(-\infty,\infty)$；

滿足

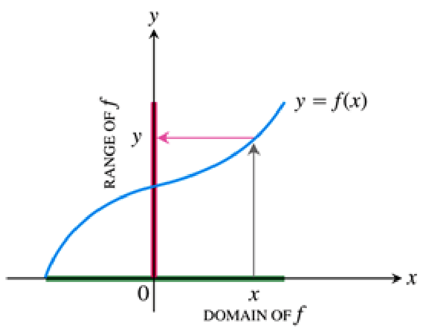
$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(x^3)=(x^3)^{1/3}=x$， $f(f^{-1}(y))=f(y^{1/3})=(y^{1/3})^3=y$

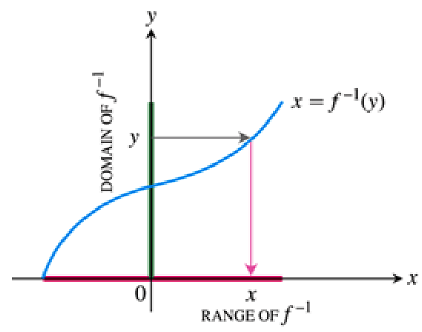
符號： f 的反函數(inverse) $f^{-1}(x)\neq\dfrac{1}{f(x)}$，$f$ 的倒數(reciprocal)才是$[f(x)]^{-1}=\dfrac{1}{f(x)}$。

---

f 及 f^{-1}的圖形對稱於直線 $y=x$。 $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$

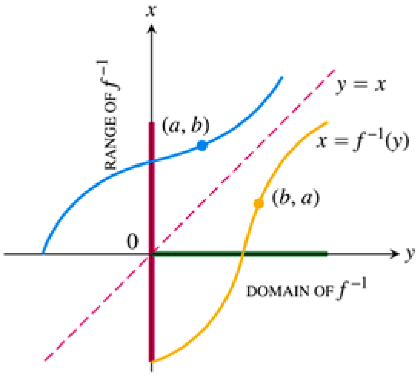
(1) $y=f(x)$ 的定義域在 x 軸，值域在 y 軸。 (2)反函數 $x=f^{-1}(y)$ 的定義域在 y 軸，值域在 x 軸。

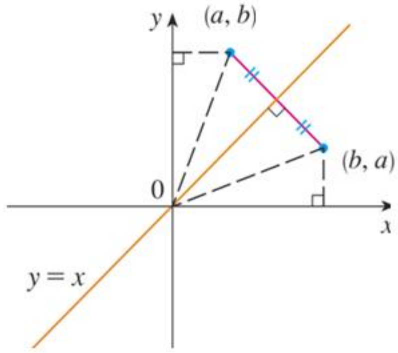




(3)我們習慣自變數寫為 x ，故將反函數 $x=f^{-1}(y)$ 寫成 $y=f^{-1}(x)$。

(4) (a,b) 是圖形 f 的點 $\Leftrightarrow$ (b,a) 是圖形 f^{-1} 的點，故 f 及 f^{-1} 的圖形對稱於直線 $y=x$ 。





找反函數

找的反函數步驟：

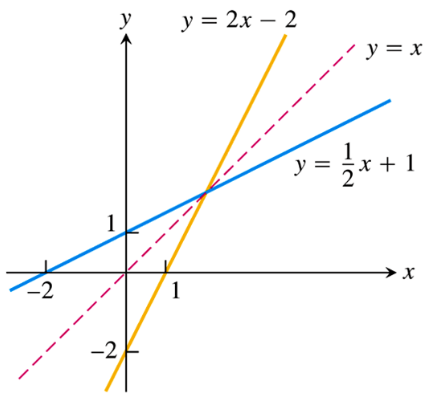
Step 1：證明函數是 $1-1$ ，故反函數存在。

Step 2：從 $y=f(x)$ 中解出 x 用 y 表示，得到反函數 $x=f^{-1}(y)$ 。

Step 3：反函數 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 與 y 互換，得到自變數為 x 因變數為 y 的反函數 $y=f^{-1}(x)$ 。

除了簡單的函數，在 Step 2 一般函數的反函數不容易求得。

例 3：試證 $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ 是 $1-1$ ，求反函數 f^{-1} 。



解：

Step 1： $f'(x)=1/2>0$ ， f 是遞增，
故 f 是 $1-1$ ，反函數 f^{-1} 存在。

Step 2： $y=\dfrac{1}{2}x+1 \Rightarrow 2y=x+2 \Rightarrow x=2y-2$ 反函數。

Step 3：反函數 $x=2y-2$ 中的 x 與 y 互換， $y=2x-2$
所以反函數 $f^{-1}(x)=2x-2$

答案對否？

直接驗證 $f^{-1}(f(x))=x$ 與 $f(f^{-1}(x))=x$ 是否成立即知。

$f^{-1}(f(x))=2f(x)-2=2(\dfrac{1}{2}x+1)-2=x+2-2=x$ ；

$f(f^{-1}(x))=\dfrac{1}{2}f^{-1}(x)+1=\dfrac{1}{2}(2x-2)+1=x-1+1=x$ ，正確。

例 4：試證 $y=x^2,\ x\ge 0$ 是 $1-1$，求反函數 f^{-1}。

解：

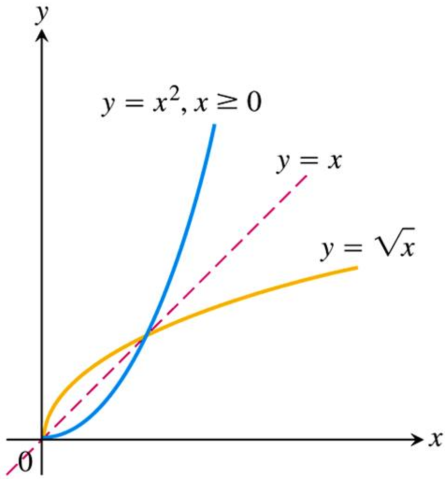
Step 1： $y'=2x,\ x>0$， $y'>0$， y 是遞增，故 y 是 $1-1$。

Step 2： $y=x^2,\ x\ge 0 \Rightarrow x=\sqrt{y},\ y\ge 0$ 反函數。

Step 3：反函數 $x=\sqrt{y},\ y\ge 0$ 中的 x 與 y 互換，

$y=\sqrt{x},\ x\ge 0$，所以反函數 $f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\ge 0$

答案對否？請自行驗證。



對數怎麼來？

通常只是知道反函數存在，但不容易將反函數表示為顯函數形式。

$a>0$, $a\ne 1$， $x>0$

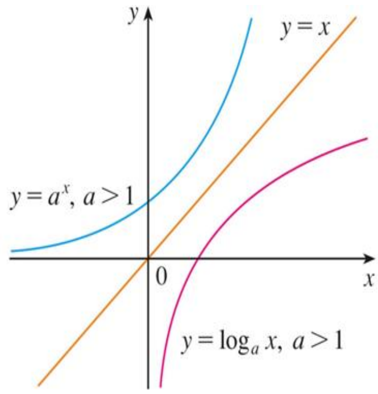
指數 $f(x)=a^x$ 的反函數稱為對數並記為 $g(x)=\log_a x$

互為反函數故滿足 $f(g(x))=a^{\log_a x}=x$ 及 $g(f(x))=\log_a a^x=x$

即

(1) $a^{\log_a x}=x$, $x>0$ ， (2) $\log_a a^x=x$, $x\in(-\infty,\infty)$

幾何上： $y=\log_a x$ 與 $y=a^x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。



對數另一介紹方式

方程式 $10^y=100$ 的解 $y=2$；那方程式 $10^y=3$ 的解呢？...記為 $y=\log_{10}3$。

定義：$a>0$ 且 $a\ne 1$，若 $x>0$ 已知，則方程式 $a^y=x$ 的解 $y=\log_a x$ 稱為以 a 為底(base)的對數函數，

即 $y=\log_a x \Leftrightarrow a^y=x$

也滿足(1) $a^{\log_a x}=x,\ x>0$ ， (2) $\log_a a^x=x,\ x\in(-\infty,\infty)$

故兩定義方式是相通的。

例：求 $\log_3 81$

解： $3^4=81$， $\log_3 81$ 是方程式 $3^y=81$ 的解，所以 $\log_3 81=4$。或 $\log_3 81=\log_3 3^4=4$。

對數律：(對應於指數律) $x>0,\ y>0$

(i) $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ (ii) $\log_a \dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ (iii) $\log_a x^r = r\log_a x$

證明(i)：

切記：從原函數的性質來瞭解反函數的性質。回到對應的指數，

令 $m=\log_a x$，$n=\log_a y$； 兩邊取以 a 為底的指數 則 $a^m=a^{\log_a x}=x$，$a^n=a^{\log_a y}=y$

依據指數律可得 $xy=a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

兩邊取以 a 為底的對數，則 $\log_a xy=\log_a a^{m+n}=m+n=\log_a x+\log_a y$

例：(a) 合併化簡 $\log_4 2+\log_4 32=\log_4(2\times 32)=\log_4 64=\log_4 4^3=3$

(b) 合併化簡 $\log_2 80-\log_2 5=\log_2\dfrac{80}{5}=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

定義：$\log x=\log_{10}x$ 稱為常用對數(common logarithm)

定義：以 e 為底的對數 $\ln x=\log_e x$ 稱為自然對數(natural logarithm)

指數與對數互為反函數故滿足 $e^{\ln x}=x,\ x>0$，$\ln e^x=x$

因為 $\ln e^x=\log_e e^x=x$，$e^{\ln x}=e^{\log_e x}=x$

例：$\ln 1=\log_e e^0=0$，$\ln e=\log_e e^1=1$，$\ln e^6=\log_e e^6=6$

$e^{\ln 1}=e^{\log_e 1}=1$，$e^{\ln e}=e^{\log_e e}=e$，$e^{\ln 6}=e^{\log_e 6}=6$

對數律：(對應於指數律) $b>0,\ x>0$

(i) $\ln bx=\ln b+\ln x$ (ii) $\ln\dfrac{b}{x}=\ln b-\ln x$ (iii) $\ln x^r=r\ln x$

例 5：(a) 合併化簡 $\ln 4+\ln\sin x=\ln(4\sin x)$

(b) 展開化簡 $\ln\dfrac{x+1}{2x-3}=\ln(x+1)-\ln(2x-3)$

(c) 展開化簡 $\ln\dfrac{1}{8}=\ln 1-\ln 8=0-\ln 2^3=-3\ln 2$

例：(a) 展開化簡 $y=\ln(x\sqrt{x^2+1})=\ln x+\ln(x^2+1)^{1/2}=\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

(b) 展開化簡 $y=\ln\dfrac{(1-x)^{1/3}}{(1+5x)^{4/5}}=\ln(1-x)^{1/3}-\ln(1+5x)^{4/5}=\dfrac{1}{3}\ln(1-x)-\dfrac{4}{5}\ln(1+5x)$

例：(a) 一般指數化成自然指數 $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$，注意 $\ln x$ 是函數而 $\ln a$ 是常數

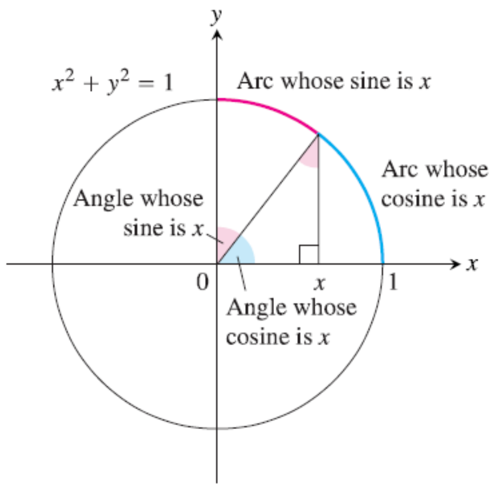
(b) 一般對數化成自然對數 $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$，因為 $\log_a x=\dfrac{\log_e x}{\log_e a}=\dfrac{\ln x}{\ln a}$

反三角函數 Inverse Trigonometric Functions

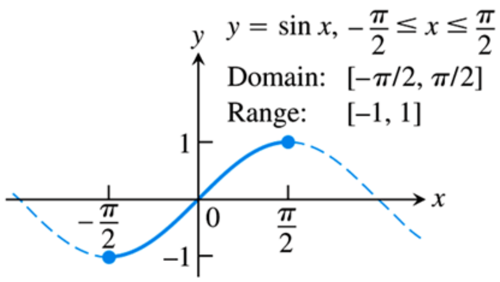
六個反三角函數，這裡只討論 $\sin^{-1}x,\ \tan^{-1}x,\ \sec^{-1}x$，
其他三個反三角函數請自行參閱講義後面的公式。

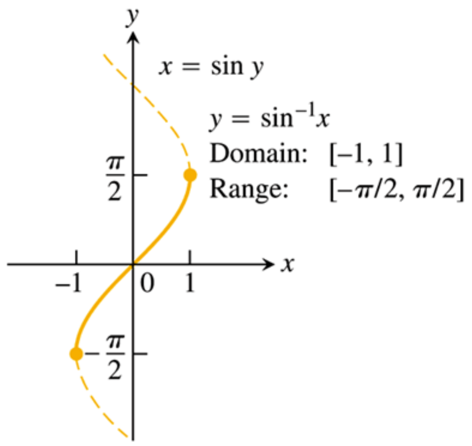
受限於時間，課堂上只講解常用到的 $\sin^{-1}x,\ \tan^{-1}x$，
懂這兩個反三角函數微分及積分，其餘類推。

$\sin^{-1}x$ 唸為 Arc sine，
是因為 $\sin^{-1}x=\theta$ 是一角度值，
θ 可以看成單位圓的弧長，弧唸為 Arc。



$\sin x$ 的反函數





$\sin x:(-\infty,\infty)\to[-1,1]$ 不是 1−1

但 $\sin x:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\to[-1,1]$ 是 1−1

反函數 $\sin^{-1}x:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 存在

$$\boxed{\sin^{-1}(\sin x)=x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\quad,\quad \sin(\sin^{-1}x)=x,\ -1\le x\le 1}$$

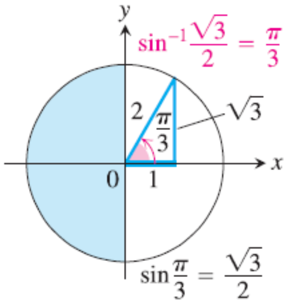
切記：從原函數的性質來瞭解反函數的性質

例 8：(a) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$

因為 $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{2}$

或令 $\theta=\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\theta=\sin\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

回到較為熟悉的 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得到 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$



(b) $\sin^{-1}(\dfrac{-1}{\sqrt{2}})=-\dfrac{\pi}{4}$，因為 $\sin(-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}\le-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}$

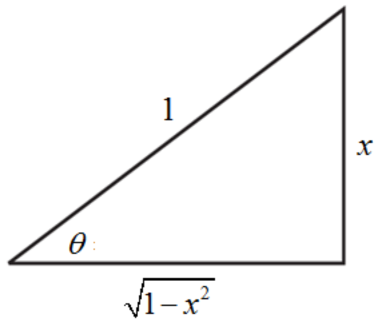
例：$\sin^{-1}(\sin 0.3)=0.3$，因為 $-\dfrac{\pi}{2}\le 0.3\le\dfrac{\pi}{2}$

例：$\tan\sin^{-1}x=?$

解：

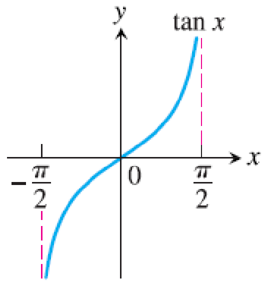
設 $\theta=\sin^{-1}x$，$\sin\theta=\sin\sin^{-1}x=x=\dfrac{x}{1}$，$-1<x<1$

(作三角形參考圖)，$\tan\sin^{-1}x=\tan\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$



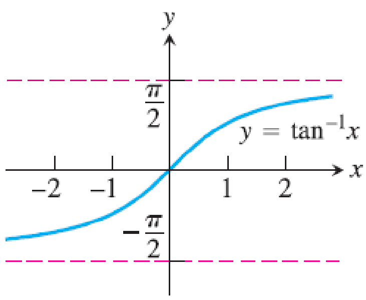
---

tan x 的反函數



$y=\tan x$
Domain: $(-\pi/2,\ \pi/2)$
Range: $(-\infty,\ \infty)$

Domain: $-\infty<x<\infty$
Range: $-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$

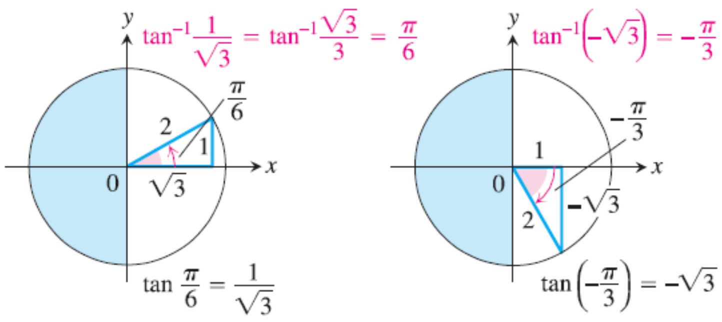


$$\boxed{\tan^{-1}(\tan x)=x,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\ ,\quad \tan(\tan^{-1}x)=x,\ -\infty<x<\infty}$$

切記：從原函數的性質來瞭解反函數的性質

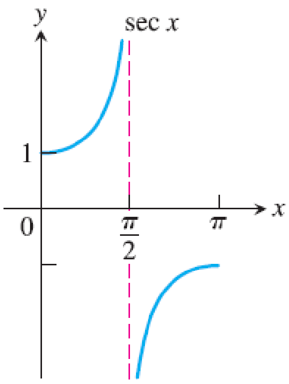
例：圖示及計算下列兩個 $\tan^{-1} x$ 的值。

(a) $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=?$ 因為 $\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$



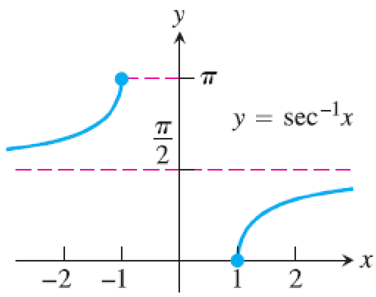
(b) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=?$ 因為 $\tan(-\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$，$-\dfrac{\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\tan^{-1}(-\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$

$\sec x$ 的反函數



$y=\sec x$
Domain: $[0,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$
Range: $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

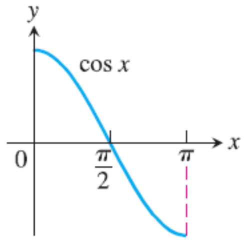
Domain: $x\le -1$ or $x\ge 1$
Range: $0\le y\le \pi,\ y\ne \dfrac{\pi}{2}$



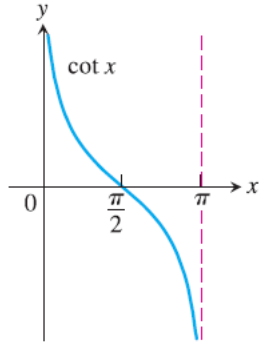
$$\boxed{\sec^{-1}(\sec x)=x,\quad 0\le x\le \pi,\ x\ne\frac{\pi}{2}\quad,\quad \sec(\sec^{-1}x)=x,\quad x\le -1,\ x\ge 1}$$

其他的反三角函數

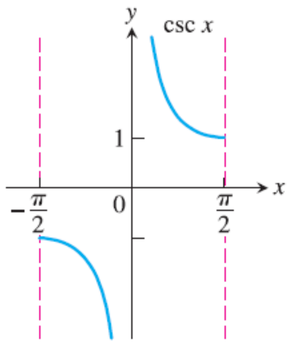
其他的反三角函數的定義方式，可仿照上述三個。請參考下列簡要說明，比較少用。



$y = \cos x$
Domain: $[0, \pi]$
Range: $[-1, 1]$

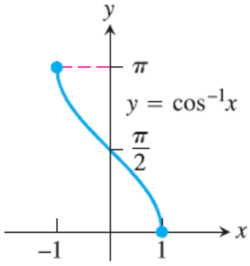


$y = \cot x$
Domain: $(0, \pi)$
Range: $(-\infty, \infty)$

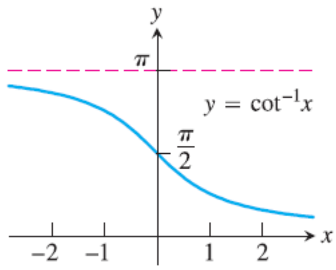


$y = \csc x$
Domain: $[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$
Range: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

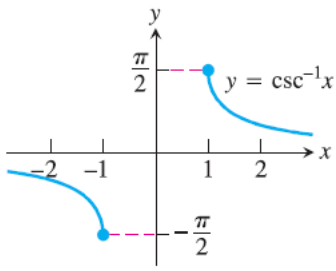
Domain: $-1 \le x \le 1$
Range: $0 \le y \le \pi$



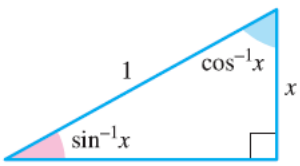
Domain: $-\infty < x < \infty$
Range: $0 < y < \pi$



Domain: $x \le -1$ or $x \ge 1$
Range: $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}, y \ne 0$



$$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad ， \quad \cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} \quad ， \quad \csc^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$



給定斜邊長 1，另一邊長 x ，為何 $\sin^{-1} x,\ \cos^{-1} x$ 分別表示如圖示的角度呢？

已知 $\sin \sin^{-1} x = x$ ，令 $\theta = \sin^{-1} x$ ，則 $\sin\theta = x = \frac{x}{1}$ ，角度 $\theta = \sin^{-1} x$ 如圖示。

同理，已知 $\cos \cos^{-1} x = x$ ，令 $\phi = \cos^{-1} x$ ，則 $\cos\phi = x = \frac{x}{1}$ ，角度 $\phi = \cos^{-1} x$ 如圖示。

所以得到 $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

如果想證明其他兩個恆等式，斜邊長及邊長需要調整。

不看解答過程，請完整地作答。

例 3：試證 $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ 是 $1-1$，求反函數 f^{-1}。

例：(a) 展開化簡 $y=\ln(x\sqrt{x^2+1})$　　(b) 展開化簡 $y=\ln\frac{(1-x)^{1/3}}{(1+5x)^{4/5}}$

例：(a) 一般指數化成自然指數 a^x　　(b) 一般對數化成自然對數 $\log_a x$

切記：從原函數的性質來瞭解反函數的性質

例 8：(a) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=?$

例： $\tan\sin^{-1}x=?$

例：(a) $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=?$

f 及 f^{-1} 的圖形對稱於哪一條直線呢？ 瞭解對稱的意思嗎？

....