Chapter 2　Limits and Continuity 極限與連續

2.1　Rates of Change and Tangents to Curves　變化率及曲線的切線　移到第 3 章

2.2　Limit of a Function and Limit Laws 函數的極限與極限法則

以直覺檢視極限觀念

定義：當 x 足夠接近 c 時(但 $x \neq c$)，若函數值 $f(x)$ 可任意接近唯一的實數值 L，則稱函數 f 在 c 極限值為 L。常用 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ 或 $f(x)\to L$ as $x\to c$ 表示。

注意：$x\to c$ 但 $x\neq c$，如果允許 $x=c$，那 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$，趨近一詞變的無意義。

這裡求極限著重在直覺的概念。

例 1： $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，討論極限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$。

說明：

$x\to 1$ 過程中，$x\neq 1$，

化簡 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1}=x+1$

函數圖形是直線 $y=x+1$ 但移除一點 $(1,2)$

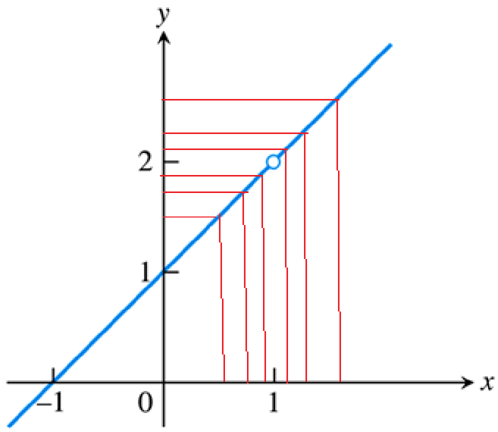
$f(1)$ 不存在(分母不能為 0)，點 $(1,2)$ 以空洞表示

從圖形或式子可以看出：

x 軸上只要所取的 x 值足夠靠近 1

y 軸上 $f(x)$ 的值可以任意地趨近 2

我們說 f 在 $x=1$ 的極限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$。



$x\neq 1$， $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$

從表格數據可以看出：

只要所取的 x 值足夠靠近 1， $f(x)$ 的值可以任意地趨近 2。

我們說 f 在 $x=1$ 的極限 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$。

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.9	0.99	0.999	0.999999	…	1.000001	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	1.999999	…	2.000001	2.001	2.01	2.1

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

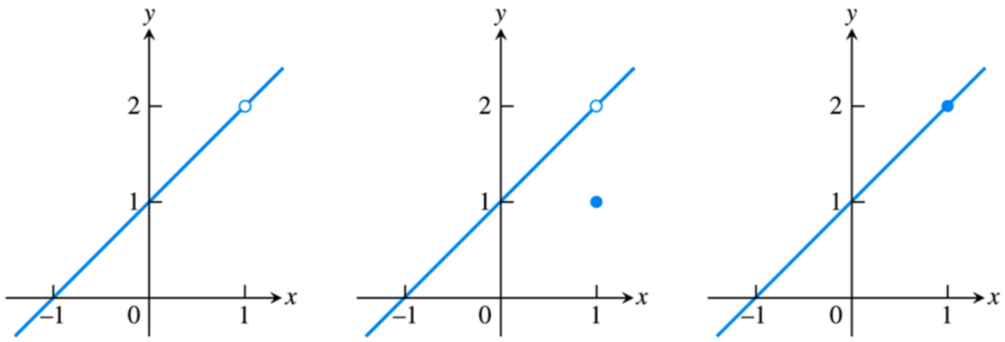
例 2：極限強調過程中逼近的趨勢，函數在某點極限值存在否與函數在該點函數值如何定義無關，而與函數在該點附近的函數值如何定義有關。

例如

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ， (b) $g(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$ ， (c) $h(x)=x+1$

這三個函數除在 $x=1$ 之外，在其他點的定義方式相同，故在 $x=1$ 的極限同為 2。

說明：



(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ (b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ (c) $h(x)=x+1$

函數在 $x=1$ 的值如下： $f(1)$ 沒定義， $g(1)=1$ 有定義， $h(1)=2$ 有定義

函數在 $x=1$ 的極限討論如下：

$x\to 1$ 過程中， $x\neq 1$ ，從圖形或式子可以看出：

只要所取的 x 值足夠靠近 1，三個函數的值可以任意地趨近 2 。

故三個函數在 $x=1$ 的極限為 2。

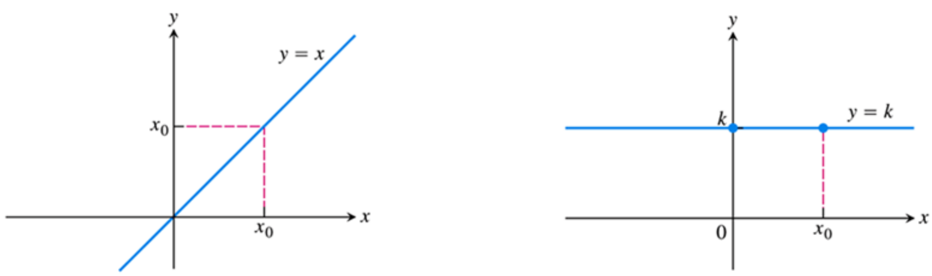
函數在 $x=1$ 的極限為 2 與函數在 $x=1$ 的值無關。

例 3：(a) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ ， (b) $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$

解 ： 我們要觀察當 x 值趨近於 x_0 的過程中(但 $x\neq x_0$)，函數值的變化情形。

(a) $x\to x_0$ 的過程中 $f(x)=x\to x_0$ ，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ ，例如 $\lim\limits_{x\to 3} x = 3$

(b) $x\to x_0$ 的過程中 $f(x)=k\to k$ ，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} k = k$ ，例如 $\lim\limits_{x\to 2} 4 = 4$



(a) Identity function (b) Constant function

註：極限不存在的可能情形：左右極限不同，或發散到正負無窮大，或來回震盪。

例題 4a～4c 是說極限不存在的可能情形

例 4a：討論單位階梯函數(unit step function) $U(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的極限。 後面仍用到

解：

我們要觀察當 x 值趨近於 0 的過程中(但 $x\neq 0$)，

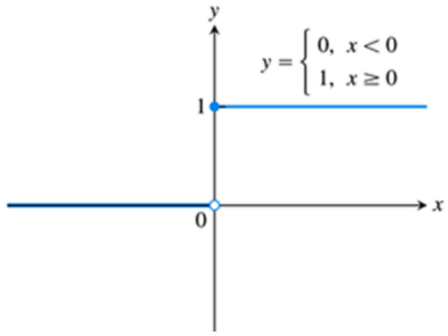
函數值的變化情形。

當 x 值從 0 的左側趨近於 0 ，函數值 $U(x)\to 0$

當 x 值從 0 的右側趨近於 0 ，函數值 $U(x)\to 1$

$x\to 0$ 時 $U(x)$ 無法任意地趨近唯一的值 L

所以 $U(x)$ 在 $x=0$ 的極限不存在。



例 4b：討論函數 $g(x)=\begin{cases}1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的極限。

解：

當 x 值從 0 的左側趨近於 0 ，

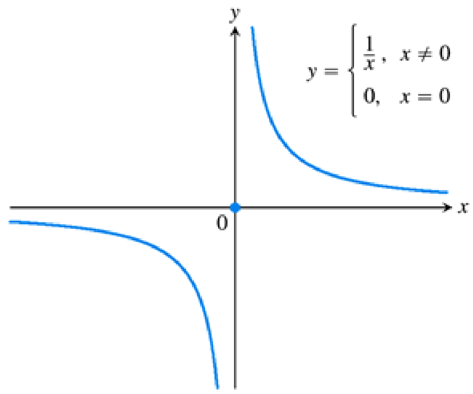
函數值 $g(x)\to -\infty$ (發散到 $-\infty$)

當 x 值從 0 的右側趨近於 0 ，

函數值 $g(x)\to \infty$ (發散到 ∞)

$x\to 0$ 時 $g(x)$ 無法任意地趨近任一的實數 L

所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 的極限不存在。



(b) $g(x)$

例 4c：討論函數 $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ \sin(1/x) & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 的極限。 後面仍用到

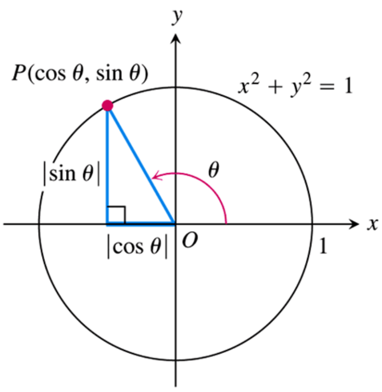
解：

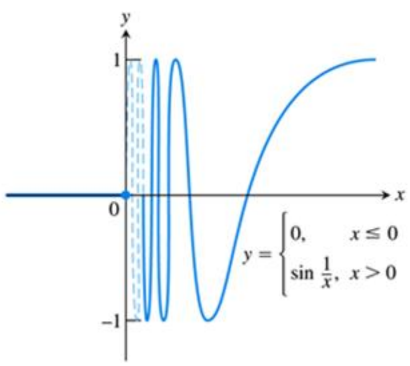
當 x 值從 0 的左側趨近於 0 ，函數值 $f(x)\to 0$ (看右圖)

當 x 值從 0 的右側趨近於 0 ， $\theta=1/x\to+\infty$ ， (重複繞圈，左側輔助圖)

函數值 $y=\sin\theta$ 在 -1 到 1 之間來回震盪，不會趨近任一的實數，(看右圖)

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的極限不存在。





將極限概念以定理來實際計算

定理 1：Limit Laws　L, M, c 及 k 是實數，$\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ 及 $\lim\limits_{x\to c} g(x)=M$ 。則

(1) 和法則(sum rule) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]=L+M$

(2) 差法則(difference rule) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]=L-M$

(3) 常數倍法則(constant multiple rule) $\lim\limits_{x\to c}[k\cdot f(x)]=k\cdot L$

(4) 積法則(product rule) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=L\cdot M$

(5) 商法則(quotient rule) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)/g(x)]=L/M$, $M\neq 0$

(6) 冪法則(power rule) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n=L^n$ ， n 是正整數

(7) 根法則(root rule) $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}=L^{1/n}$ ， n 是正整數，當 n 是偶數時， $L>0$

例 5a：多項式 $P(x)=x^3+4x^2-3$ ，求 $\lim\limits_{x\to c} P(x)$ 。

解 ： $\lim\limits_{x\to c} P(x)=\lim\limits_{x\to c}(x^3+4x^2-3)=\lim\limits_{x\to c} x^3+\lim\limits_{x\to c} 4x^2-\lim\limits_{x\to c} 3$　　和差法則

$=\lim\limits_{x\to c} x^3+4\lim\limits_{x\to c} x^2-\lim\limits_{x\to c} 3$　　常數倍法則

$=c^3+4c^2-3=P(c)$　　冪法則

定理 2 的證明仿照例題 5a。

定理 2：若 $P(x)$ 是多項式函數，則 $\lim\limits_{x\to c} P(x)=P(c)$ 。

註：多項式的極限值等於函數值，以 $x=c$ 直接帶入計算。定理 2 的證明仿照例題 5a。

例 5b：有理函數 $R(x)=\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2+5}$ ，求 $\lim\limits_{x\to c} R(x)$ 。

解 ： $\lim\limits_{x\to c} R(x)=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{x^4+x^2-1}{x^2+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to c}(x^4+x^2-1)}{\lim\limits_{x\to c}(x^2+5)}$　　商法則

$=\dfrac{c^4+c^2-1}{c^2+5}=R(c)$　　定理 2

定理 3 的證明仿照例題 5b。

$P(x)$，$Q(x)$ 是多項式函數，$P(x)/Q(x)$ 稱為有理函數(rational function)。

定理 3：若 $Q(c)\neq 0$，則 $\lim\limits_{x\to c} P(x)/Q(x)=P(c)/Q(c)$。

註：當分母不為 0，有理函數的極限值等於函數值，以 $x=c$ 直接帶入計算。

例 5c：$\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{4x^2-3}=\sqrt{\lim\limits_{x\to -2}(4x^2-3)}$ 　根法則

$=\sqrt{4(-2)^2-3}=\sqrt{13}$ 　定理 2

不定形式 (Indeterminate Forms)

(1) ∞ 非實數，是一個概念符號，它無法做四則運算，但仍給予下列運算概念。

設 a 是正實數，則

$$\infty+\infty=\infty,\ \ \infty\cdot\infty=\infty,\ \ \infty\pm a=\infty,\ \ a\cdot\infty=\infty,\ \ (-a)\cdot\infty=-\infty,\ \ \frac{\infty}{a}=\infty,\ \ \frac{a}{\infty}=0$$

(2) $0/0$、∞/∞、$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、1^∞、∞^0、0^0 為極限的不定形式。

為何稱為不定形式？

這些符號原本是沒有意義的，只是表達極限的形式。

例如

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}$、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}$，若直接以 $x=0$ 帶入計算，分母及分子為 0，無意義。

這三個極限都是為 $0/0$ 的不定形式，但無法只從外在形式而得出極限值。

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}1=1、\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x^2}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0}x=0、\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\pm\infty$$

Q：$0/0=1$、$\infty/\infty=1$、$0\cdot\infty=0$、$\infty-\infty=0$，對嗎？..........，答案是否定的，原因同(2)的說明。

(3) $\frac{\infty}{\infty}=\frac{1/\infty}{1/\infty}=\frac{0}{0}$ 、$0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{1/\infty}=\frac{0\cdot 1}{0}=\frac{0}{0}$，所以 $\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、$0\cdot\infty$ 可視為相同形式。

(4) 微積分常見不定形式的極限，例如導數定義 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 也是 $\frac{0}{0}$ 形式，

所以我們比較著重於如何處理不定形式極限。

求極限遇到不定形式時請先用代數運算化簡，避開無意義地寫法。

例 7： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$ 　　若直接 $x=1$ 帶入計算，分母及分子為 0，出現 $0/0$，

表示分子分母皆有因式 $x-1$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}$ 　　分子分母因式分解，找出因式 $x-1$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x}$ 　　$x\neq 1$，$x-1\neq 0$，過程中分子分母可約掉可約掉 $x-1$

$=\dfrac{1+2}{1}=3$ 　　分母不再為 0，根據定理這時可直接以 $x=1$ 代入求值

寫法二：先用代數運算化簡，避開分母為 0，再計算極限

$$x\neq 1，\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x}\quad；\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3$$

錯誤：$\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{1+2}{1}=3$ ； 有沒有符號 $\lim\limits_{x\to 1}$，意思不同

錯誤：$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}=\dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}=\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{1+2}{1}=3$

錯誤：$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\dfrac{x+2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}}\dfrac{1+2}{1}=3$；符號 $\lim\limits_{x\to 1}$ 何時不需再寫？

3.1 例 1： $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ 　　以 $x=a$ 帶入計算，分母及分子為 0，出現 $0/0$，

表示分子分母皆有因式 $x-a$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a})$ 　　為方便計算，分子移下來，並且

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}(\dfrac{a}{xa}-\dfrac{x}{xa})$ 　　分子通分，找出因式 $x-a$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{x-a}\dfrac{a-x}{xa}$ 　　$x\neq a$，$x-a\neq 0$，過程中分子分母可約掉 $x-a$

$=\lim\limits_{x\to a}-\dfrac{1}{xa}=-\dfrac{1}{a^2}$ 　　分母不再為 0，可直接以 $x=a$ 代入求值

寫法二：先用代數運算化簡，避開分母為 0，再計算極限

$$x \neq a,\ \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\frac{\frac{a}{xa}-\frac{x}{xa}}{x-a}=\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a}=\frac{-1}{xa}\ ;\ \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-1}{xa}=-\frac{1}{a^2}$$

例 9： $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$

以 $x=0$ 帶入計算，分母及分子為 0，出現 $0/0$ ，表示分子分母皆有因式 $x-0$ ，

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+100}-10)(\sqrt{x^2+100}+10)}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}$$

對分子有理化，找出因式 x

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+100-100)}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}$$

$x\to 0$ ， $x\neq 0$ ，分子分母可約掉 x^2

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{1}{\sqrt{100}+10}=\frac{1}{20}$$

分母不再為 0，可直接以 $x=0$ 代入求值

寫法二：先用代數運算化簡，避開分母為 0，再計算極限

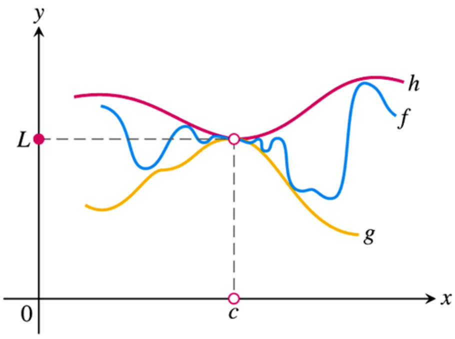
$$\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\frac{(\sqrt{x^2+100}-10)(\sqrt{x^2+100}+10)}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}=\frac{(x^2+100-100)}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}$$

$$=\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+100}+10)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{1}{\sqrt{100}+10}=\frac{1}{20}$$

夾擠定理(The Squeeze Theorem) 或 三明治定理(The Sandwich Theorem)

定理 4：在 c 的附近，若 $g \le f \le h$ 且 $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$，則 $\lim_{x\to c} f(x) = L$

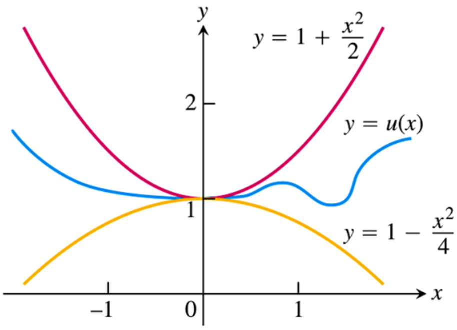


例 10：當 $x \ne 0$ 時，$1-\frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1+\frac{x^2}{2}$，試求 $\lim_{x\to 0} u(x)$。

解：

$$\lim_{x\to 0}(1-\frac{x^2}{4}) = \lim_{x\to 0}(1+\frac{x^2}{2}) = 1$$

依據夾擠定理得到 $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$。



例：試證 $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ (這題用夾擠定理求極限，為何？)

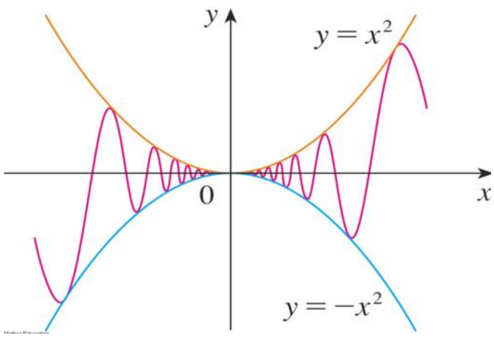
解：$-1 \le \sin\theta \le 1$

假設 $x \ne 0$，$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$，

但 $x^2 \ge 0$，所以 $-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$

$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$，

依據夾擠定理得到 $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$。



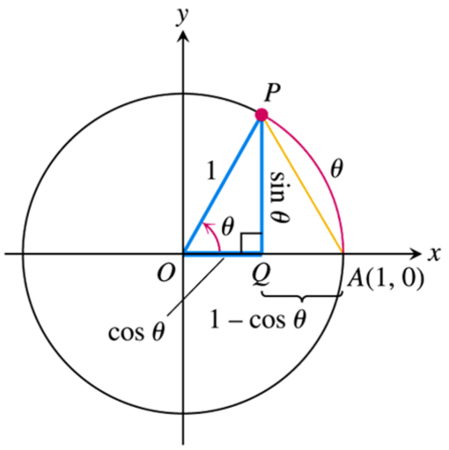
注意：因為 $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，Product Rule 不能用，$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} \ne (\lim_{x\to 0} x^2)\left(\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right)$

您可否敘述一下還有哪些類型的題目需要用夾擠定理求極限？

第 27 頁，1.3 節，

從圖示得知

(1) 若標準位置角 θ 的終邊與單位圓 $x^2+y^2=1$ 之交點為 $P_\theta=(x,y)$，則 $\cos\theta=x$ 、 $\sin\theta=y$ 。



(2) $-|\theta|\le\sin\theta\le|\theta|$ ， $-|\theta|\le 1-\cos\theta\le|\theta|$

下列例題結果明顯成立但不見得容易證明，
證明用到夾擠定理。

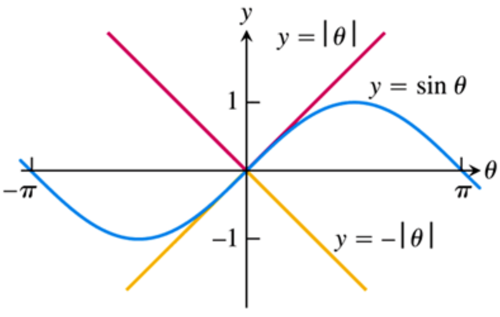
例 11a： 試證 $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$ 。

解 ： 從上述說明知 $-|\theta|\le\sin\theta\le|\theta|$ 成立

已知 $\lim_{\theta\to 0}|\theta|=0$ ， 依據夾擠定理得到 $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=0$

右側 $y=\sin\theta$, $y=-|\theta|$ 及 $y=|\theta|$ 圖形

幫助我們確信 $-|\theta|\le\sin\theta\le|\theta|$ 成立，可用夾擠定理。



(a)

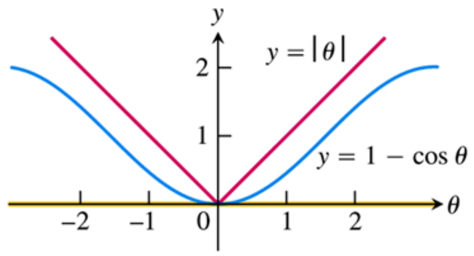
例 11b： 試證 $\lim_{x\to 0}\cos\theta=1$ 。

解 ： 從上述說明知 $0\le 1-\cos\theta\le|\theta|$ 成立，已知 $\lim_{\theta\to 0}|\theta|=0$

依據夾擠定理得到 $\lim_{x\to 0}(1-\cos\theta)=0$ ，即 $\lim_{x\to 0}\cos\theta=1$

右側 $y=1-\cos\theta$, $y=0$ 及 $y=|\theta|$ 圖形

幫助我們確信 $0\le 1-\cos\theta\le|\theta|$ 成立，可用夾擠定理。



(b)

例 11c： 若 $\lim_{x\to c}|f(x)|=0$ ， 試證 $\lim_{x\to c}f(x)=0$ 。

解 ： 從 $-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|$ 及 $\lim_{x\to c}|f(x)|=0$ ， 依據夾擠定理得到 $\lim_{x\to c}f(x)=0$

不看解答，請完整作答

Q：$0/0=1$、 $\infty/\infty=1$、 $0\cdot\infty=0$ 、 $\infty-\infty=0$，對嗎？

例 2：(a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ，(b) $g(x)=\begin{cases}x+1 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ ，(c) $h(x)=x+1$ ，求在 $x=1$ 的極限。

例 ： $y=f(x)$ 的圖形如下， 求下列各值。 來自 Paul's Online Math Notes

(a) $f(-4)=?$

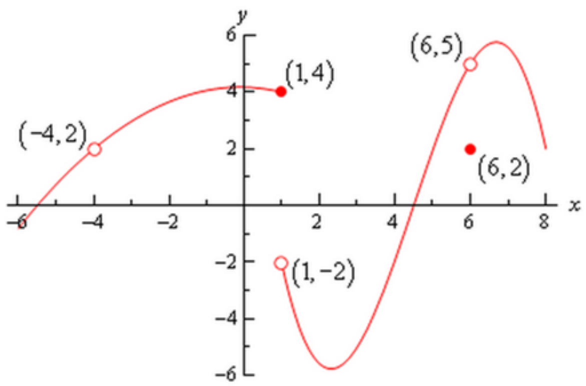
(b) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=?$

(c) $f(1)=?$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=?$

(e) $f(6)=?$

(f) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=?$



解 ：

(a) $f(-4)$ doesn't exist ，(b) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=2$ ，(c) $f(1)=4$ ， (d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ doesn't exist

(e) $f(6)=2$ ，(f) $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=5$

例 4：a. $U(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ ， b. $g(x)=\begin{cases}1/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ ， c. $f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \sin(1/x) & x>0\end{cases}$

求在 $x=1$ 的極限。在 $x=0$ 的極限。

例 7：求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}$ ， 3.1 例 1：求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a}$ ， 例 9：求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$

例 10：當 $x\neq 0$ 時，$1-\dfrac{x^2}{4}\leq u(x)\leq 1+\dfrac{x^2}{2}$ ，試求 $\lim\limits_{x\to 0}u(x)$ 。

例 ：試證 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0$

2.4　One-sided Limits　單邊極限

單邊極限

註：減號 $-$ 唸成 minus，加號 $+$ 唸成 plus，　c^-, c^+ 無關 c 是正值或是負值。

$x \to c^-$ 表示 x 從點 c 的左邊趨近 c，

$x \to c^+$ 表示 x 從點 c 的右邊趨近 c，

例如 $x \to 3^-$ 表示 x 從點 3 的左邊趨近 3，$x \to -3^+$ 表示 x 從點 -3 的右邊趨近 -3。

左極限 $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$：$x$ 從左向右趨近 c 之極限。　右極限 $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$：$x$ 從右向左趨近 c 之極限。

定理 6：$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$　　(極限存在 $\Leftrightarrow$ 左右極限存在且相等)

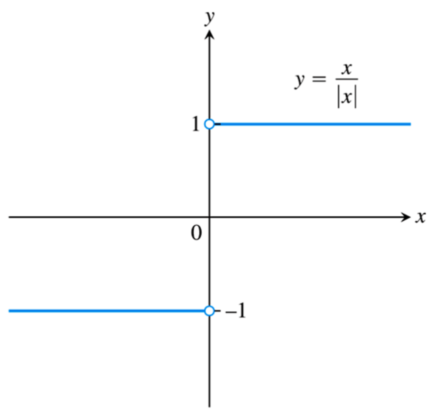
註：求分段函數(piecewise)在分段點的極限，要考慮單邊極限。

例：$f(x) = x/|x|$，求極限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$。

解：$x \to 0$ 時出現 $0/0$，表示分子分母皆有因式 x，先整理 f

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x/(x) & x > 0 \\ x/(-x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$ 是一分段函數

求在分段點 0 的極限，用單邊極限討論



$x \to 0^-$ 時，$x \neq 0$，x 趨近 0 且小於 0；

左極限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-}(-1) = -1$

$x \to 0^+$ 時，$x \neq 0$，x 趨近 0 且大於 0；

右極限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0^+ \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}(1) = 1$

所以極限值 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在(左右極限不同)。

正確：$\lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0^- \\ x<0}} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-}(-1) = -1$；$\frac{-x}{x}$ 先化簡為 -1，表示 $x \to 0^-$ 時，$\frac{|x|}{x}$ 已經是函數 $y = -1$ 了

錯誤： $\lim\limits_{\substack{x\to0^-\\x<0}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0^-\\x<0}}\dfrac{-x}{x}=-1$，因為 $\dfrac{0}{0}$ 是未知的不定形式極限，不可直接寫答案

錯誤： $\lim\limits_{\substack{x\to0^-\\x<0}}\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{0^+}{0^-}=-1$，因為 $\dfrac{0}{0}$ 是未知的不定形式極限，沒有這寫法

註：求函數在某區間的左右端點的極限，要考慮單邊極限。

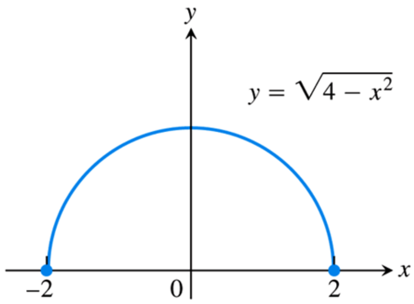
例 1： 討論 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在 $x=\pm2$ 的極限。

解 ：

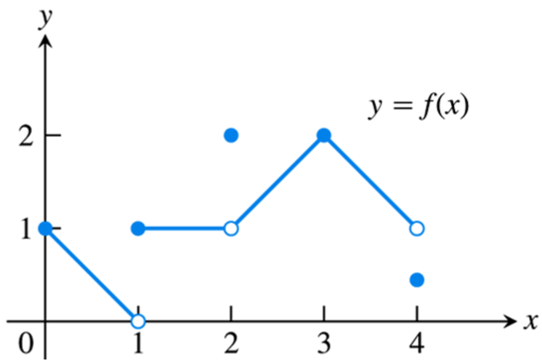
定義域為 $[-2,2]$

在右端點 $x=2$ 只有左極限 $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2^-\\1.9<x<2}}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4}=0$

在左端點 $x=-2$ 只有右極限 $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2^+\\-2<x<-1.9}}\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4}=0$



例 2： 求極限。



$f(0)=1$， $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ doesn't exist， $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$

$f(1)=1$， $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$， $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ doesn't exist

$f(2)=2$， $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$

$f(3)=2$， $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=2$， $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=2$， $\lim\limits_{x\to3}f(x)=2$

$f(4)=0.5$， $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)$ doesn't exist

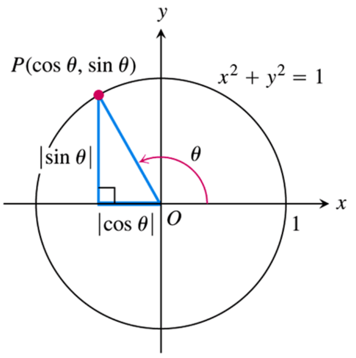
---

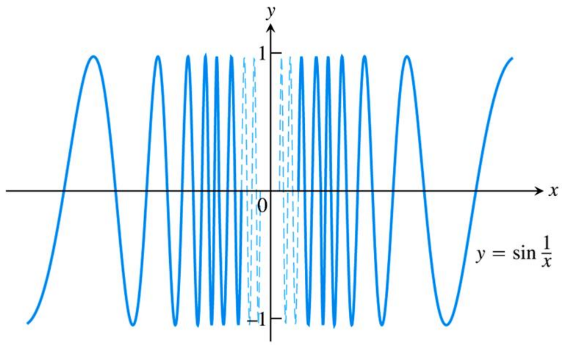
例 4： 試證函數 $y=\sin(1/x)$ 在 $x=0$ 的極限不存在。　請參考 2.2 例 4c，後面用到

解 ：

當 $x\to 0$ 時， $\theta=1/x\to\pm\infty$ ，函數值 $y=\sin\theta$ 在 -1 到 1 之間來回震盪

不會趨近任一的實數，所以函數在 $x=0$ 的極限不存在。



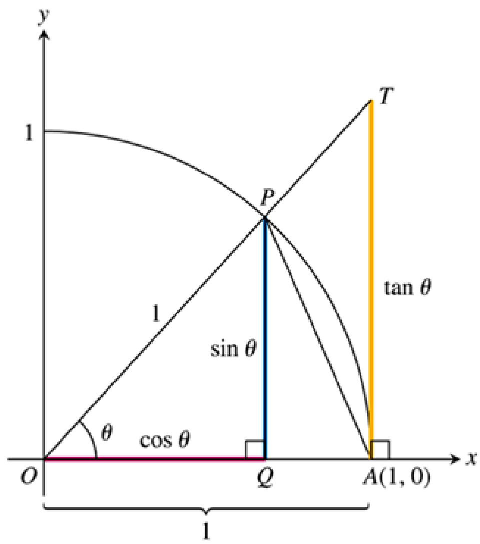


定理 7： $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$　　(這個結果說明了 $\theta\approx 0$ 時 $\sin\theta\approx\theta$)

說明：

看圖，半徑 $\overline{OP}=\overline{OA}=1$ ，假設 $\theta\to 0^+,\theta>0$

由定義知 $PQ=\sin\theta,\ OQ=\cos\theta$ 及 $\theta=AP$ 弧長



看圖， 三角形$OAT\simeq$三角形OQP

$$\frac{OQ}{OA}=\frac{PQ}{AT}\Rightarrow\frac{\cos\theta}{1}=\frac{\sin\theta}{AT}\Rightarrow AT=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

三角形面積等於底乘高的一半，扇形面積等於 $(1/2)r^2\theta$

看圖知，

三角形OAP面積 $<$ 扇形OAP面積 $<$ 三角形OAT面積

也就是　$\dfrac{1}{2}\sin\theta<\dfrac{1}{2}\theta<\dfrac{1}{2}\tan\theta$

同乘正數 $2/\sin\theta$ ，大小關係不變，

$1<\dfrac{\theta}{\sin\theta}<\dfrac{1}{\cos\theta}$　　（ $\tan\theta\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$ ）

$\cos\theta<\dfrac{\sin\theta}{\theta}<1$　　（正數的倒數，大小關係改變，例如 $2<3\Rightarrow\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$ ）

但 $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta=1$，由夾擠定理得到 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$

若 $\theta\to 0^-$ ，則 $\theta<0$ ， $\lim\limits_{\theta\to 0^-}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\overset{h=-\theta}{=}\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sin(-h)}{(-h)}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{-\sin h}{-h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\sin h}{h}=1$

例 5a：$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta-1}{\theta}=0$

說明：

半角公式：$\sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ 或 $\cos\theta=1-2\sin^2(\theta/2)$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=-\lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2(\theta/2)}{\theta}=-\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2(\theta/2)}{\theta/2}\underset{x=\theta/2}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{\theta\to 0}\sin x=-(1)\cdot(0)=0$$

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$應用

例 5b：試證$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2}{5})=\dfrac{2}{5}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\overset{\theta=2x}{=}\dfrac{2}{5}\cdot\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\dfrac{2}{5}\cdot(1)=\dfrac{2}{5}$

例 6：試求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t\cdot\sec 2t}{3t}$

解：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t\cdot\sec 2t}{3t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\sin t/\cos t)\cdot(1/\cos 2t)}{3t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{3\cos t\cdot\cos 2t}=(1)(\dfrac{1}{3})=\dfrac{1}{3}$

不看解答，請完整作答

口頭敘述哪類函數的特殊點要考慮單邊極限。

口頭敘述雙邊極限與單邊極限有何關係。

例：$f(x)=x/|x|$，求極限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

例 4：試證函數$y=\sin(1/x)$在$x=0$的極限不存在。 請參考 2.2 例 4c，後面用到

$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$應用。

例 5b：試證$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$

例 6：試求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t\cdot\sec 2t}{3t}$

2.5　Continuity　連續性

函數在某一點連續的意思是說函數在這個點其圖形不會間斷。
或是說，
繪製函數圖形時可以筆不離開紙張而通過該點。

初學者對這一節的內容會覺得：理論抽象、繁瑣。
這一節的基本要求：瞭解連續的定義及意涵、幾何意義及連續函數有哪些？

例 1：函數圖形除了在 $x=1,\ x=2,\ x=4$ 不連續外，在區間 $[0,4]$ 中的其他每個點都連續。
我們直覺觀察函數的連續點及不連續點其代數上的現象，從此引出連續的定義。

在 $x=0$ 函數右連續， $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$

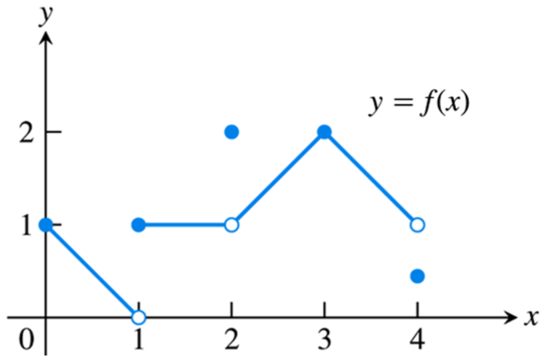
在 $x=3$ 函數連續， $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)=2$

在 $0<c<4,\ c\neq 1,\ 2$ 函數連續， $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

在 $x=1$ 函數不連續， $\lim_{x\to 1} f(x)$ 不存在

在 $x=2$ 函數不連續， $\lim_{x\to 2} f(x)=1\neq 2=f(2)$

在 $x=4$ 函數不連續， $\lim_{x\to 4^-} f(x)=1\neq 0.5=f(4)$



連續性只需考慮函數定義域中的點，我們分開討論內點和端點處的連續性。
得到：連續 $\Leftrightarrow$ 極限值等於函數值
所以給出連續定義如下

定義： f 在內點 c 連續 $\Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ 。

若 $\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$ 則稱 f 在 c 右連續。

若 $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$ 則稱 f 在 c 左連續。

f 在內點 c 連續 $\Leftrightarrow$ f 在 c 同時右連續及左連續。

此外，

$\lim_{x\to c} f(x)=f(c)=f(\lim_{x\to c} x)$ 表示 f 在 c 連續時 $\lim_{x\to c}$ 對 f 可提進提出。-----重要

2.2 定理 2：若 $P(x)$ 是多項式函數，則 $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$ 。

2.2 定理 3：有理函數 $P(x)/Q(x)$ ，若 $Q(c)\neq 0$ ，則 $\lim_{x\to c}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$ 。

故多項式及有理函數在定義域中的每一點連續，極限值可以 $x=c$ 直接帶入計算。

例 2,3 課本是看圖形說明連續性，這裡強調連續性定義及端點處的連續性的討論。

例 2： $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 在定義域 $[-2,2]$ 的每個點都連續。　參考 2.4 例題 1。

解：

f 在左端點 -2 右連續，

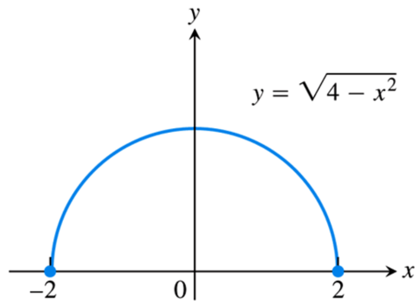
因為

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+}\sqrt{4-x^2} = 0 = f(-2)$$

$-2<c<2$ 時， f 在內點 c 連續，

因為

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-c^2} = f(c)$$



在右端點 2 左連續，

因為

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2} = 0 = f(2)$$

所以 f 在其定義域上每一點都連續。

例 3：單位階梯函數 $U(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 是否連續？　參考 2.2 例題 4a。

解：

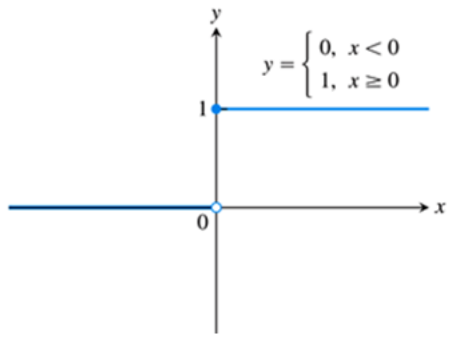
$U(0)=1$

$\lim_{x\to 0^-} U(x) = 0 \neq 1 = U(0)$ ， $U(x)$ 在點 0 不是左連續，

$\lim_{x\to 0^+} U(x) = 1 = U(0)$ ， $U(x)$ 在點 0 是右連續，

所以 $U(x)$ 在 $x=0$ 不連續。

這種不連續點 $x=0$ 稱為跳躍不連續點(jump discontinuity)



複習第 5 頁，1.1 節，最大整數函數(the greatest integer function)符號為 $\lfloor x \rfloor$

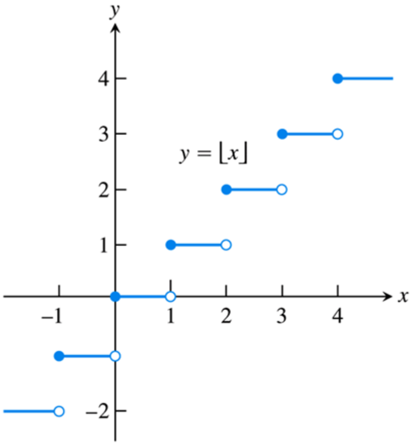
$\lfloor x \rfloor = n$, if $n \le x < n+1$ 　小於或等於 x 的最大整數

$\lfloor 2.4 \rfloor = 2$,$\because 2 < 2.4 < 3$，$\lfloor 1.9 \rfloor = 1$,$\because 1 < 1.9 < 2$

$\lfloor 0 \rfloor = 0$,$\because 0 \le 0 < 1$，$\lfloor -1.2 \rfloor = -2$,$\because -2 < -1.2 < -1$

$\lfloor 2 \rfloor = 2$,$\because 2 \le 2 < 3$，$\lfloor 0.2 \rfloor = 0$,$\because 0 < 0.2 < 1$

$\lfloor -0.3 \rfloor = -1$,$\because -1 < -0.3 < 0$，$\lfloor -2 \rfloor = -2$,$\because -2 \le -2 < -1$



連續性判定法(Continuity Test)

f 在內點 c 連續等價於下列三條件

1. f 在 c 有定義。　　($f(c)$ 有值)

2. $\lim_{x \to c} f(x)$ 存在。　　(左右極限存在且相等)

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ 。　(極限值等於函數值)

連續性判定法適用於檢查函數在某一點連續性，特別是分段點。

例 4：最大整數函數 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 在整數點 $x = n$ 不連續，因為依照連續三條件

1. $f(n) = \lfloor n \rfloor = n$

2. $\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to n^- \\ n-1<x<n}} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to n^-} (n-1) = n-1$；$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to n^+ \\ n<x<n+1}} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to n^+} n = n$，

$\lim_{x \to n} f(x)$ 不存在，故 $\lim_{x \to n} f(x) \ne f(c)$，$f$ 在 $x = n$ 不連續，

不連續點 $x = n$ 稱為跳躍不連續點(jump discontinuity)。

最大整數函數 $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 在非整數點 $x = c$ 連續，因為

1. 若 $n-1 < c < n$，則 $f(x) = \lfloor c \rfloor = n-1$

2.3. $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ n-1<x<n}} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to c} (n-1) = n-1 = f(c)$ 極限值等於函數值

註：不連續點的情形大致上有

可移動的不連續點、跳躍不連續點、無窮大不連續點或震盪不連續點。

下列例題改寫自課本，課本是看圖形說明連續性，這裡強調用連續三要件來檢驗連續。

例： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 是否連續？

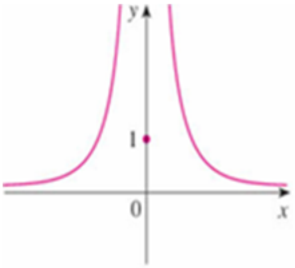
解：

(i) $f(0)=1$ 有定義

(ii) 極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} 1/x^2=\infty$ 不存在。

所以 f 在 $x=0$ 不連續。

這種不連續點 $x=0$ 稱為無窮大不連續點(infinite discontinuity)



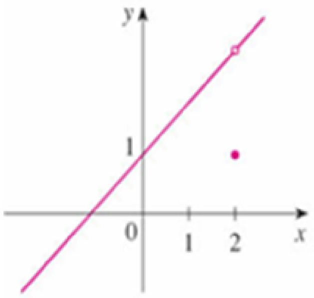
例： $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2\\ 1 & ,x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 是否連續？

解：

(i) $f(2)=1$ 有定義

(ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)=3$ 存在

(iii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$ ；所以 f 在 $x=2$ 不連續。



這種不連續點 $x=2$ 稱為可移動的不連續點(removable discontinuity)，

因為我們可以移動不連續點，重新定義函數值使其變成連續。

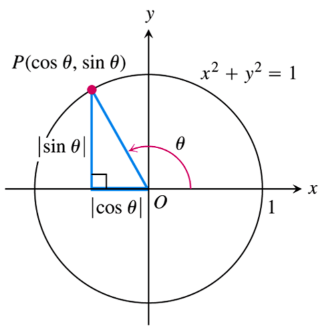
例：函數 $f(x)=\sin(1/x)$ 在 $x=0$ 不連續。 請參考 2.2 例 4c，2.4 例 4

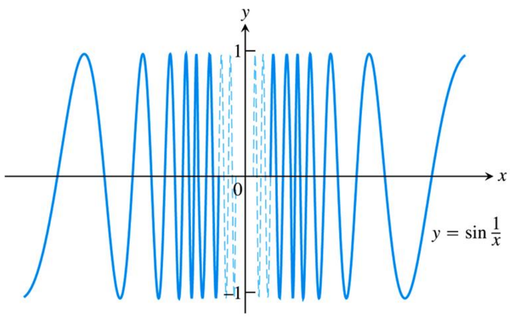
解：

(i) $f(0)$ 沒有定義；所以 f 在 $x=0$ 不連續。

已經說明過，當 $x\to 0$ 時，函數值 $f(x)$ 在 -1 到 1 之間來回震盪

不會趨近任一的實數，這種不連續點 $x=0$ 稱為震盪不連續點(oscillating discontinuity)。





連續函數

複習：所有使函數 f 之值有意義的實數集合稱為 f 的自然定義域。例如 $f(x)=\sqrt{x}$ 的定義域為 $[0,\infty)$ 。

> 定義： f 在區間上連續 $\Leftrightarrow$ f 在區間上的每一點為連續。
> f 是一連續函數 $\Leftrightarrow$ f 在定義域上的每一點連續。 (整個圖形不一定會連續)

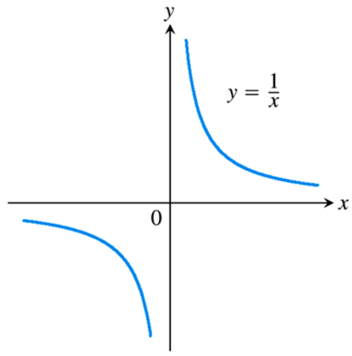
注意：要說明 f 是一連續函數，要先找出定義域，再說明 f 在定義域上的每一點連續。

例 5a：試證 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是一連續函數

f 是一有理函數，定義域為 $\{x \mid x \neq 0\}$

在定義域上的每一點連續，故 f 是一連續函數。

但 f 在 $x=0$ 沒定義， f 不是 $(-\infty,\infty)$ 上的連續函數。



連續函數整個圖形不一定會連續

……

哪些熟悉的函數是連續函數呢？(敘而不證)

> 定理：下列函數在其定義域上連續
> 多項式函數、有理函數、根式函數、三角函數、絕對值函數、指數函數、對數函數

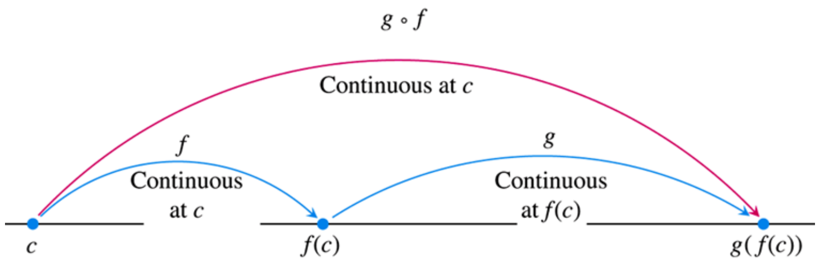
哪些函數運算(有配合條件)會保持連續函數的連續性呢？(敘而不證)

> 定理 8： k 是一常數，若函數 f 與 g 在 c 連續，則下列函數在 c 仍連續。
> **1.** $f\pm g$ ， **2.** $f\cdot g$ ， **3.** $k\cdot f$ ， **4.** $f/g,\ g(c)\neq 0$ ， **5.** f^n
> **6.** $\sqrt[n]{f}$, 當 n 是偶數時， $\sqrt[n]{f}$ 在 c 的附近要有意義 ， **7.** 反函數 f^{-1}

函數與其反函數兩者圖形對稱於直線 $y=x$ ，故知在 c 若 f 連續則 f^{-1} 也連續

……

> 定理 9：若 g 在 $f(c)$ 連續且 f 在 c 連續，則合成函數 $g(f(x))$ 在 c 連續。



要說明是一連續函數，要先找出定義域，再來說明函數在定義域上的每一點連續。

例 8： 根據定理說明下列函數是連續函數(在定義域上的每一點連續)。

(a) $y=\sqrt{x^2-2x-5}$

根式函數 $g(t)=\sqrt{t}$ 在其定義域 $[0,\infty)$ 連續，

多項式函數 $f(x)=x^2-2x-5$ 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續。

依據定理

合成函數 $g(f(x))=\sqrt{x^2-2x-5}$ 在其定義域 $(-\infty,1-\sqrt{6}],\ [1+\sqrt{6},\infty)$ 連續，是一連續函數。

註： x 要滿足 $x^2-2x-5\geq 0$，從而解得 $(-\infty,1-\sqrt{6}],\ [1+\sqrt{6},\infty)$

(b) $y=\dfrac{x^{2/3}}{1+x^4}$

根式函數 $f(x)=x^{2/3}$ 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續，

多項式函數 $g(x)=1+x^4$ 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續。

依據定理 $\dfrac{f}{g}=\dfrac{x^{2/3}}{1+x^4}$ 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續，是一連續函數。

(c) $y=\left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$

有理函數 $\dfrac{x-2}{x^2-2}$ 在其定義域 $\{x \mid x\neq\pm\sqrt{2}\}$ 連續。

絕對值函數 $|x|$ 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續。

依據定理合成函數 $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$ 在其定義域 $\{x \mid x\neq\pm\sqrt{2}\}$ 連續，是一連續函數。

(d) $y=\dfrac{x\sin x}{x^2+2}$

三角函數 $\sin x$ 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續。

多項式函數 x 及 x^2+2 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續。

依據定理 $\dfrac{f\cdot g}{h}=\dfrac{x\sin x}{x^2+2}$ 在其定義域 $(-\infty,\infty)$ 連續，是一連續函數。

---

f 在內點 c 連續， $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = f(\lim_{x\to c} x)$ 表示 f 在 c 連續時 $\lim_{x\to c}$ 對 f 可提進提出。

推廣成下述定理

定理 10：若 g 在 b 連續且 $\lim_{x\to c} f(x) = b$ ，則合成函數 $g(f(x))$ 在 c 極限

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x\to c} f(x))$$ 。

例 9：求極限。

(a) $\lim_{x\to\pi/2} \cos[2x + \sin(\frac{3\pi}{2} + x)]$

$\cos x, \sin x$ 是連續函數，

故 $\lim_{x\to\pi/2} \cos[2x + \sin(\frac{3\pi}{2} + x)] = \cos[\lim_{x\to\pi/2} 2x + \lim_{x\to\pi/2} \sin(\frac{3\pi}{2} + x)]$

$= \cos[\pi + \sin \lim_{x\to\pi/2} (\frac{3\pi}{2} + x)]$

$= \cos[\pi + \sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2})] = \cos(\pi + \sin 2\pi) = \cos\pi = -1$

(b) $\lim_{x\to 1} \sin^{-1} \frac{1-x}{1-x^2}$

$\sin^{-1} x$ 是連續函數，故

$\lim_{x\to 1} \sin^{-1} \frac{1-x}{1-x^2} = \sin^{-1}(\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^2}) = \sin^{-1}(\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x}) = \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

(c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+1} e^{\sin x}$

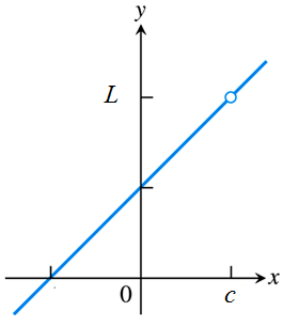
根式函數、三角函數、指數函數是連續函數，

故

$\lim_{x\to 0} \sqrt{x+1} e^{\sin x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x+1} \cdot \lim_{x\to 0} e^{\sin x} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(x+1)} \cdot \lim_{x\to 0} e^{\lim_{x\to 0}\sin x} = \sqrt{1} \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$

Continuous Extension　連續延展

複習：f 在 $x=c$ 連續 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$　極限值等於函數值



若 f 在 $x=c$ 沒有值，則 f 在 $x=c$ 不連續。

這種不連續點能變成連續點嗎？

關鍵在 f 在 $x=c$ 的極限值 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 必須存在，

定義 f 在 $x=c$ 的新函數值為極限值 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ 可讓新函數在 $x=c$ 連續。

> 定義：f 在 $x=c$ 沒有值，但 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ 存在。
>
> 則新函數 $F(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq c \\ L & x=c \end{cases}$ 在 $x=c$ 連續，稱為 f 在 $x=c$ 的連續延展

例：試證 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 有 continuous extension。

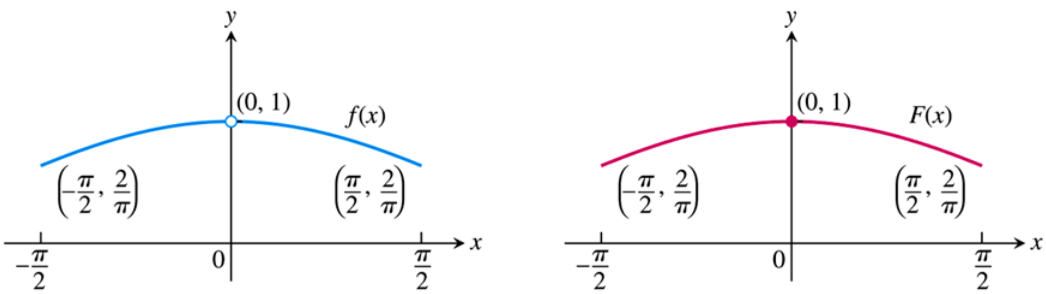
解：依照定義說明

$f(0$ 無值(無定義)，則 f 在 $x=0$ 不連續。

已知 $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}=1$，即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ 存在。

可重新定義 f 在 $x=0$ 的值等於極限值 1，讓新函數在 $x=0$ 連續。

故 f 在 $x=1$ 的連續延展可取為 $F(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$



(a)　　(b)

例 10： 試證 $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 在 $x=2$ 有連續延展。

解： $f(\pm 2)$ 無定義，則 f 在 $x=\pm 2$ 不連續。

這裡只關注在 $x=2$ 有沒有連續延展。

依照定義說明

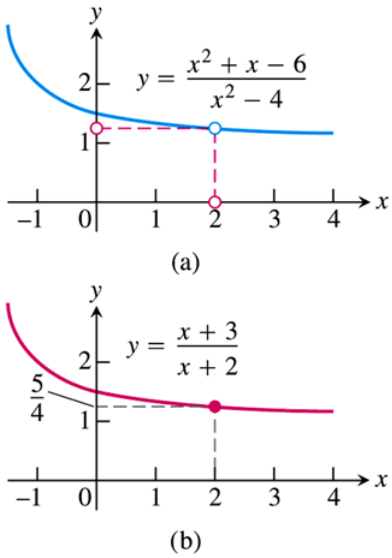
$$x\neq 2 \text{時 } f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x+3}{x+2}$$

事實上 $f(x)=\dfrac{x+3}{x+2},\ x\neq \pm 2$

易知 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5/4$ 存在，

f 在 $x=2$ 的連續延展可取為 $F(x)=\dfrac{x+3}{x+2},\ x\neq -2$

因為 $\lim\limits_{x\to 2} F(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{5}{4}=F(2)$ ，新函數 F 在 $x=2$ 連續



(a)
(b)

中間值定理及其應用

中間值定理：(The Intermediate Value Theorem)

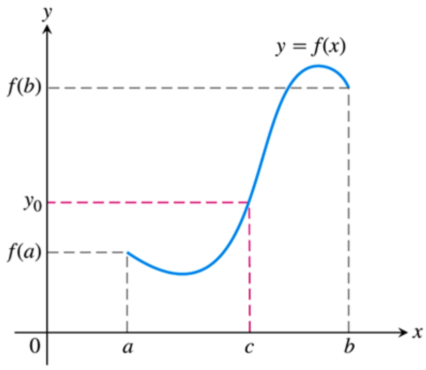
若 f 在閉區間 $[a,b]$ 連續，且 y_0 介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間，

則在開區間 (a,b) 上至少有一數 c 使得 $y_0=f(c)$

連續性的應用。

看圖，滿足定理條件的函數 f

至少存在一數 c 使得 $y_0=f(c)$



例 11：試證 $x^3-x-1=0$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 之間有一根。

解：

中間值定理裡取

$y_0=0$ 、 $f(x)=x^3-x-1$ 、 $[a,b]=[1,2]$

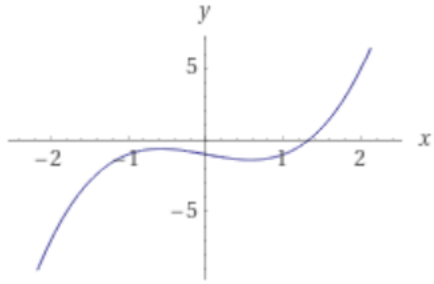
$f(1)=1-1-1=-1$ ； $f(2)=8-2-1=5$

則 f 在 $[1,2]$ 連續且 $f(1)<0<f(2)$

由中間值定理知

在 $x=1$ 與 $x=2$ 間內至少有一數 c 使得 $f(c)=0$

即 c 是 $x^3-x-1=0$ 的解。



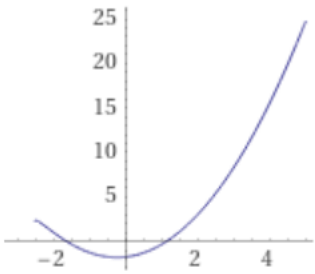
例 12：試證 $\sqrt{2x+5}=4-x^2$ 有一根。

解：

改寫方程式為 $\sqrt{2x+5}-4+x^2=0$，仿照上例中間值定理裡取

$y_0=0$、$f(x)=\sqrt{2x+5}-4+x^2$、$[a,b]=[0,2]$

$f(0)=\sqrt{5}-4<0$；$f(2)=3-4+4>0$



則 f 在 $[0,2]$ 連續且 $f(0)<0<f(2)$

由中間值定理知在 $x=0$ 與 $x=2$ 間內至少有一數 c 使得 $f(c)=0$

即 c 是 $\sqrt{2x+5}=4-x^2$ 的解。

不看解答，請完整作答

例 4：最大整數函數 $\lfloor x \rfloor$ 在整數點 $x=n$ 不連續　(依照 f 在點 c 連續的定義)

這裡強調用連續性判定法(三條件)來檢驗連續。

例：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$　在 $x=0$ 是否連續？

例：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & ,x\neq 2\\ 1 & ,x=2\end{cases}$　在 $x=2$ 是否連續？

例 5a：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 是一連續函數嗎？

例 8：根據定理說明下列函數是連續函數(在定義域上的每一點連續)。

(a) $y=\sqrt{x^2-2x-5}$　　(b) $y=\dfrac{x^{2/3}}{1+x^4}$

例 9：求極限 $\lim\limits_{x\to 1}\sin^{-1}\dfrac{1-x}{1-x^2}$

例 11：試證 $x^3-x-1=0$ 在 $x=1$ 與 $x=2$ 之間有一根。

2.6 Limits Involving Infinity ; Asymptotes of Graphs 無窮遠處極限、無窮大極限；漸近線

無窮遠處極限與水平漸近線

例 1： $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

考慮 $x\to\infty$

$\frac{1}{100}=0.01,\ \frac{1}{10,000}=0.0001,\ \frac{1}{1,000,000}=0.000001\ldots$

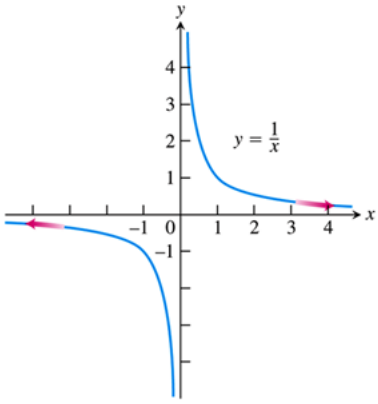
故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在正無窮遠處極限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

同理在負無窮遠處極限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ 。

幾何上， $x\to\pm\infty$ 時

圖形會貼著水平線 $y=0$ (x 軸)一直向左右兩邊延伸。

$y=0$ (x 軸)是 $f(x)=1/x$ 之水平漸近線。



定義

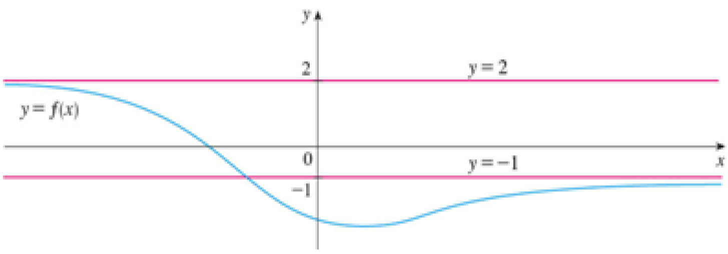
$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ 稱為 f 在無窮遠處極限(limits at infinity)，因為 $x\to\infty$ or $-\infty$

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ ，則 $y=L$ 是 f 之一水平漸近線(horizontal asymptote； $H.A.$)

幾何意義上， $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$ 意指 $x\to\infty$ 時圖形會貼著水平線 $y=L$ 一直向右延伸。

＊水平漸近線是否存在，要看 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 是否存在。

看 f 的圖形得知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-1$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$ ， $y=-1$ 及 $y=2$ 是 f 之水平漸近線。



例 2： (a) $\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{1}{x})=5+0=5$

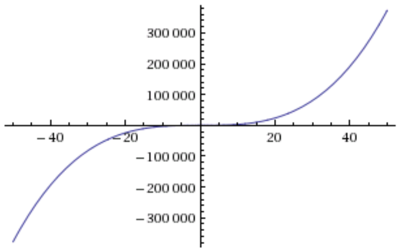
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2}=\pi\sqrt{3}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\pi\sqrt{3}\cdot(0)=0$

註：多項式在無窮遠處之極限是發散到 $+\infty$ 或 $-\infty$，完全看最高次的項。多項式沒有水平漸近線。

例：(a) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^3-x^2+2)=\lim\limits_{x\to\infty}x^3(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3})=\infty$

($x\to\infty$ 時，答案不是 $\infty-\infty=0$ 不要誤解喔)

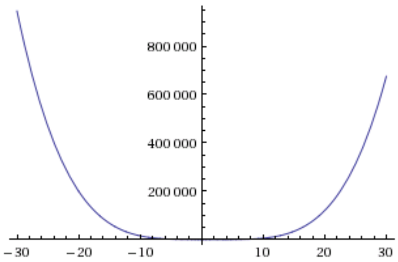
(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^3-x^2+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(3-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3})=-\infty$



(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4-5x^3-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x^4(1-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3})=\infty$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-5x^3-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4(1-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3})=\infty$

($x\to\infty$ 時，最高次項決定了多項式的極限是 ∞ 還是 $-\infty$)



例 3a：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ (不定形式 ∞/∞ 的極限)

解：

分子及分母同時除以分母的最高次之項 x^2（如此可避開分母為為 0）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2+8x-3}{x^2}}{\frac{3x^2+2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}$$

(分子次數等於分母次數時，這題答案 5/3 是分子與分母最高次項係數 5 與 3 的比值)

$y=5/3$ 是函數的水平漸近線。

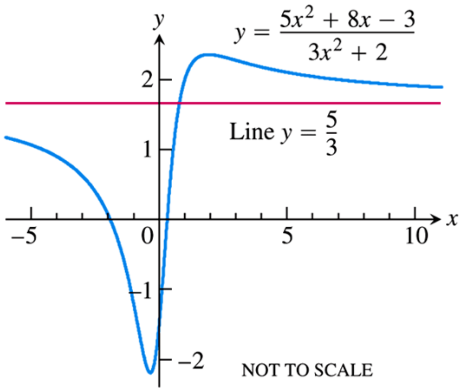
另解：非正統但很方便，只限於 $x\to\pm\infty$ 且 ∞/∞ 形式。

$x=10^5$ (10 萬)時，$x^2=10^{10}$ (百億)

從上例及由此可推知

當 $x\to\infty$ 時分子 $5x^2+8x-3$ 中

$8x,-3$ 這兩項的值比起 $5x^2$ 的值微不足道可以忽略

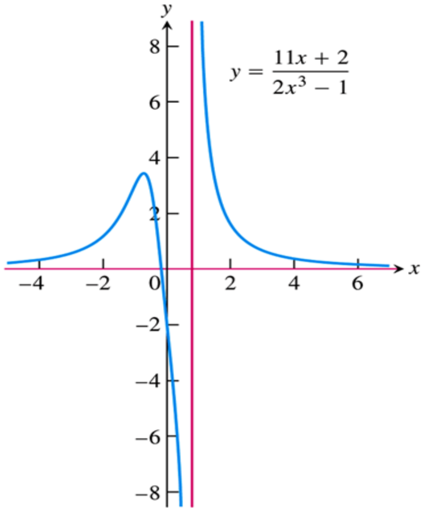


當 $x\to\infty$ 時分母 $3x^2+2$ 中 2 這項的值也可以忽略

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

答案就是分子 $5x^2$ 項與分子 $3x^2$ 項的比值 5/3

例 3b：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x+2}{2x^3-1}$ (不定形式 ∞/∞ 的極限)



解：

分子及分母同時除以分母的最高次之項 x^3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11x+2}{x^3}}{\frac{2x^3-1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}}=\frac{0+0}{2-0}=0$$

(分子次數小於分母次數，答案 0)

$y=0$ 是函數的水平漸近線

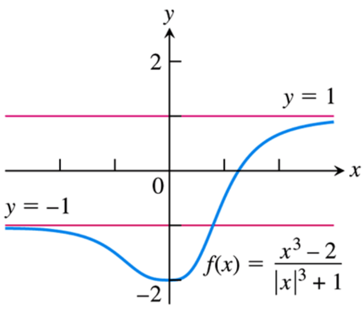
另解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x+2}{2x^3-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11}{2x^2}=0$

例 4：求 $f(x)=\dfrac{x^3-2}{|x|^3+1}$ 的水平漸近線

解：水平漸近線要考慮無窮遠處之極限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$

不定形式 ∞/∞ ，分子及分母同時除以分母的最高次之項 x^3

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2}{-x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-2}{x^3}}{\frac{-x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{2}{x^3}}{-1+\frac{1}{x^3}}=\frac{1-0}{-1+0}=-1$$



$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-2}{x^3}}{\frac{x^3+1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

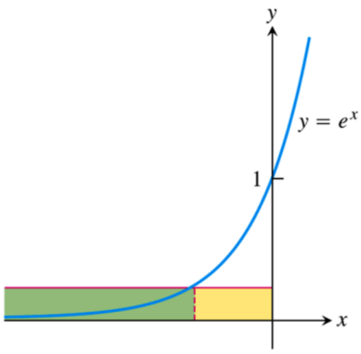
故函數有水平漸近線 $y=-1,\ y=1$

例 5： $y=0$ 是 $y=e^x$ 的水平漸近線

$\lim\limits_{x\to\infty}e^x=\infty$ ，發散到無窮大

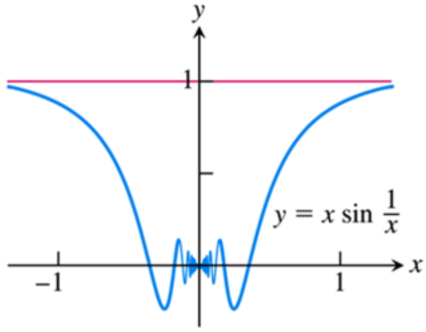
但 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\ \underset{t=-x}{=}\ \lim\limits_{t\to\infty}e^{-t}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{1}{e^t}=0$

故函數有水平漸近線 $y=0$



例 6a：求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}$ (非不定形式)

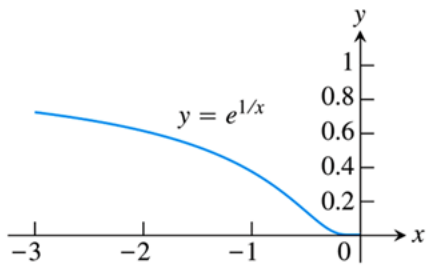
解： $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\sin t=0$



例 6b：求 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$ (不定形式 $\infty\cdot 0$ ，化為 $0/0$)

解： $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\sin t=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

例 7：求 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{1/x}$



解： $t=\dfrac{1}{x}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0^-}e^{1/x}=\lim\limits_{t\to-\infty}e^{t}\underset{m=-t}{=}\lim\limits_{m\to\infty}e^{-m}=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{e^{m}}=0$

或 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{1/x}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{\infty}}=0$

例 8：求 $y=2+\dfrac{\sin x}{x}$ 的水平漸近線

解：水平漸近線要考慮無窮遠處之極限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$

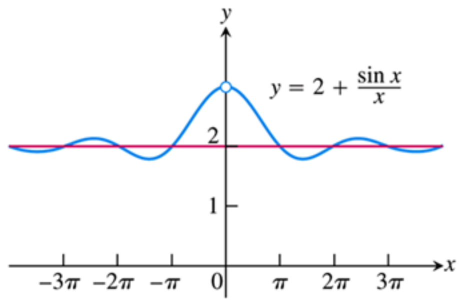
依據夾擠定理

$0\le|\sin x|\le 1\Rightarrow 0\le\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\dfrac{1}{|x|}\Rightarrow 0\le\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|\le\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{|x|}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{|x|}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(2+\dfrac{\sin x}{x})=2+0=2$ (非不定形式)

故函數有水平漸近線 $y=2$ 。



注意： $a\ge 0,\ \sqrt{a}$ 一定不為負

若不知 x 是正還是負，不可以寫 $\sqrt{x^2}=x$ ，要寫成 $\sqrt{x^2}=\sqrt{|x|^2}=|x|$

例如 $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$ 或 $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$

$\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{x^2(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})}=|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$

習題 34：求 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

注意： $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{x+1}{x}} \neq \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$ 　　x 為負時，$x \neq \sqrt{x^2}$

....

解：正式

求極限時出現 ∞/∞ 形 式 ，先化簡整理函數。

$x \to -\infty$, x is negative 為負

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ x<0}} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{-\sqrt{1+0}}{1+0} = -1$

....

另解：$t = -x$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t^2+1}}{-t+1}$ 　　$\dfrac{\infty}{\infty}$ ，分子及分母同時除以 t

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{(t^2+1)/t^2}}{(-t+1)/t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{1+(1/t^2)}}{-1+(1/t)} = \frac{\sqrt{1+0}}{-1+1} = -1$$

....

Quick solution： $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ x<0}} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}(-1) = -1$

....

例 9：求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+16})$　　(這題不像例題 3 一樣可用直觀，小心)

解：

不定形式 $\infty-\infty$ 的極限，先根式有理化成 ∞/∞ 形式

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+16})=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+16})(x+\sqrt{x^2+16})}{(x+\sqrt{x^2+16})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+16)}{(x+\sqrt{x^2+16})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-16}{x+\sqrt{x^2+16}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{16}{x}}{\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{16}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{16}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{16}{x^2}}}=\frac{0}{2}=0$$

例：求 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$　　$\infty+\infty$，不是 $\infty-\infty$

解：

$x\to-\infty$

$-x\to+\infty$ 且 $x^2+x=x(x+1)\to\infty$

故 $\sqrt{x^2+x}-x\to\infty+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\infty$

注意：這題是 $\infty+\infty$ 的形式而不是不定形式 $\infty-\infty$，不需根式有理化。

另解：$x=-t$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t}+t)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t(t-1)}+t)=\infty$$

無窮極限與斜漸近線

定義： $y=ax+b$ 是 f 之一斜漸近線(oblique , slant asymptote，O.A.)

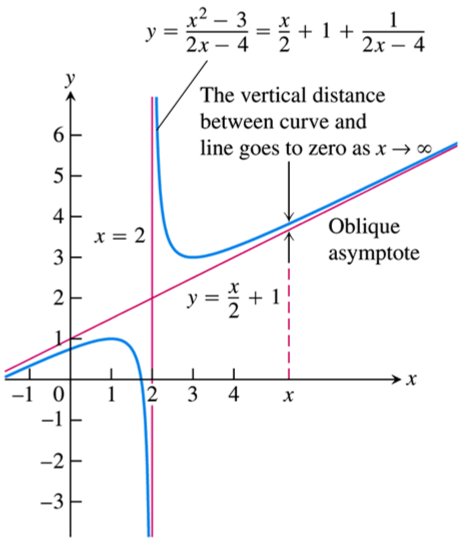
若 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

有理函數的分子次數比分母次數恰好多 1 則有斜漸近線。

例 10：求 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$ 之斜漸近線。

解：

$$\begin{array}{r|l} & \frac{x}{2}+1 \\ \hline 2x-4 & x^2-3 \\ & x^2-2x \\ \hline & 2x-3 \\ & 2x-4 \\ \hline & 1 \end{array}$$



$f(x)=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{2x-4}$ ，$y=\dfrac{x}{2}+1$是一斜漸近線

按照定義驗證：

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(x/2+1)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}1/(2x-4)=0$$

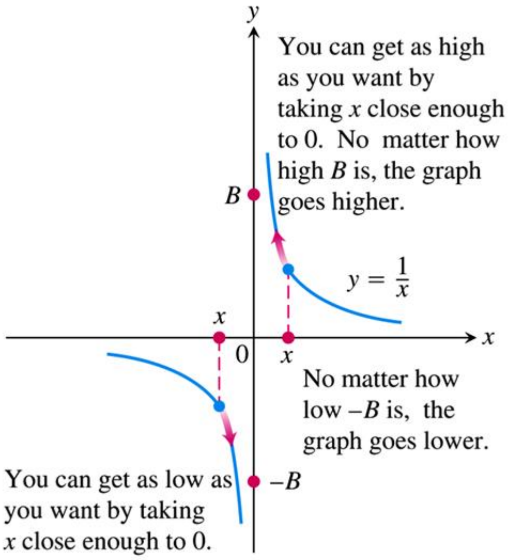
的確 $y=\dfrac{x}{2}+1$是一斜漸近線。

無窮大極限與垂直漸近線

當 $x\to a$時 ($x\neq a$)，若 $f(x)$ 趨向於∞
則稱 f 在 $x=a$ 的極限值發散到∞ 。

方便記成 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$

實際上極限值是不存在的。



例如 $f(x)=1/x$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\infty$$

圖形沿著鉛垂線 $x=0$ 發散到∞

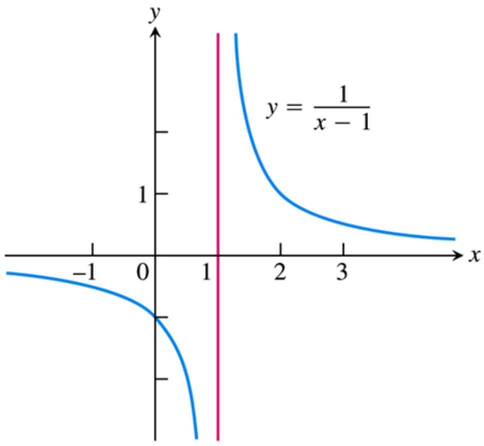
$x=a$ 是 f 之一垂直漸近線(vertical asymptote；V.A.)，若

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ 四個中至少有一成立。

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\infty$ 意指 x 從 a 的左邊趨近 a 時圖形會貼著垂直線 $x=a$ 向上延伸。

例 11： $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，求 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 與垂直漸近線。

解：



$$x=1.01 \Rightarrow y=\frac{1}{0.01}=100$$

$$x=1.0001 \Rightarrow y=\frac{1}{0.0001}=10,000$$

$$x=1.000001 \Rightarrow y=\frac{1}{0.000001}=1,000,000$$

……..

$x\to 1^+\,(x\neq 1)$，$\dfrac{1}{x-1}$ 發散到 ∞，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$

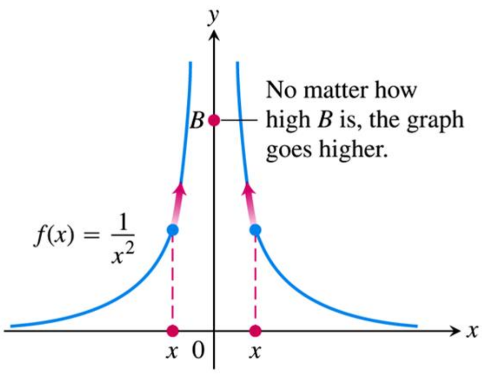
同理 $x\to 1^-\,(x\neq 1)$，$\dfrac{1}{x-1}$ 發散到 $-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

$x=1$ 是 f 之垂直漸近線。

註：有理函數之垂直漸近線發生在分母為 0 但分子不為 0 的地方。

例 12： $f(x)=1/x^2$，求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 與垂直漸近線。

解：



$$x=0.1 \Rightarrow y=\frac{1}{(0.1)^2}=100$$

$$x=0.01 \Rightarrow y=\frac{1}{(0.01)^2}=10,000$$

$$x=0.001 \Rightarrow y=\frac{1}{(0.001)^2}=1000,000$$

……..

$x\to 0^+\,(x\neq 0)$，$\dfrac{1}{x^2}$ 發散到 ∞，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

同理 $x\to 0^-\,(x\neq 0)$，$\dfrac{1}{x^2}$ 發散到 ∞，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ (不存在)，$x=0$ 是 f 之垂直漸近線。

例 13： 有理函數在分母為 0 處的可能情形。

(a) $(0/0)$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{0}{4}=0$

(b) $(0/0)$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

(c) $(-1/0)$ $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}}\dfrac{x-3}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$ (不存在)

(d) $(-1/0)$ $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}\dfrac{x-3}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ (不存在)

(e) $(-1/0)$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{(x+2)(x-2)}=\pm\infty$ (不存在)

(f) $(0/0)$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{(x-2)^3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)}{(x-2)(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{(x-2)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$ (不存在)

由例 11 知道下列結論

註：這裡 $\deg P=$多項式 $P(x)$ 的次數(degree)。

(1) 多項式函數無漸近線。

(2) $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 為有理函數，

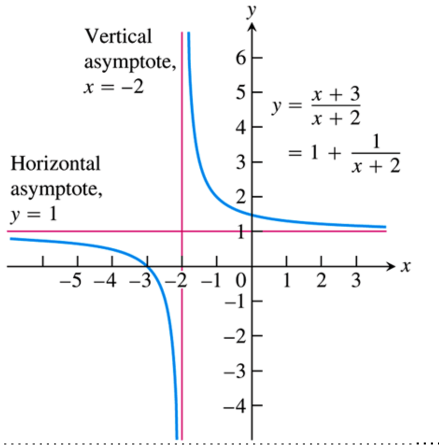
(a) 在 $Q(a)=0$ 但 $P(a)\neq 0$ 時有垂直漸近線 $x=a$。

(b) 若 $\deg P<\deg Q$，則 f 有水平漸近線 $y=0$。
若 $\deg P=\deg Q$，則 f 有水平漸近線 $y=L$。 L 是分子分母最高次項係數的比值。
若 $\deg P>\deg Q$，則 f 沒有水平漸近線。

(c) 若 $\deg P=1+\deg Q$，則 f 有斜漸近線。

(3) 其他函數可按定義求之。

例 15：求 $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ 的水平與垂直漸近線。



解：

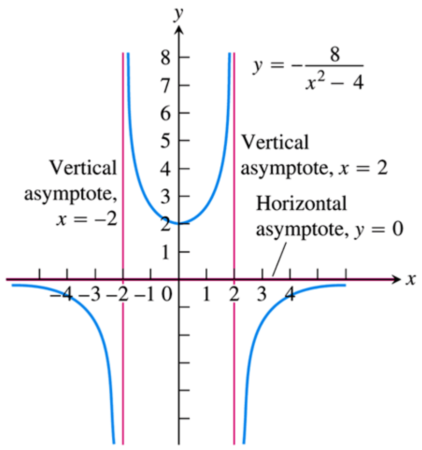
先化為 $y=\dfrac{x+3}{x+2}=\dfrac{(x+2)+1}{x+2}=1+\dfrac{1}{x+2}$

目測答案或依照定義

$y=1$是水平漸近線，

$x=-2$是垂直漸近線。

例 16：求 $y=-\dfrac{8}{x^2-4}$ 的水平與垂直漸近線。



解：

目測答案或依照定義

$y=0$是水平漸近線，

$x=-2,\ x=2$是垂直漸近線。

例 17：求 $y=\sec x$ 及 $y=\tan x$ 的水平與垂直漸近線。

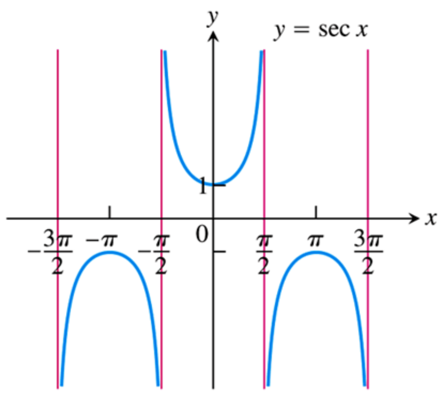
解：

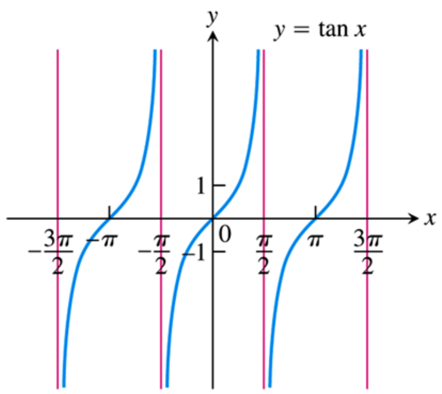
$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$ 目測答案或依照定義，

沒有水平漸近線，$x=\pm\dfrac{\pi}{2},\ x=\pm\dfrac{3\pi}{2},\ x=\pm\dfrac{5\pi}{2},\cdots$是垂直漸近線。

$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 目測答案或依照定義，

沒有水平漸近線，$x=\pm\dfrac{\pi}{2},\ x=\pm\dfrac{3\pi}{2},\ x=\pm\dfrac{5\pi}{2},\cdots$是垂直漸近線。

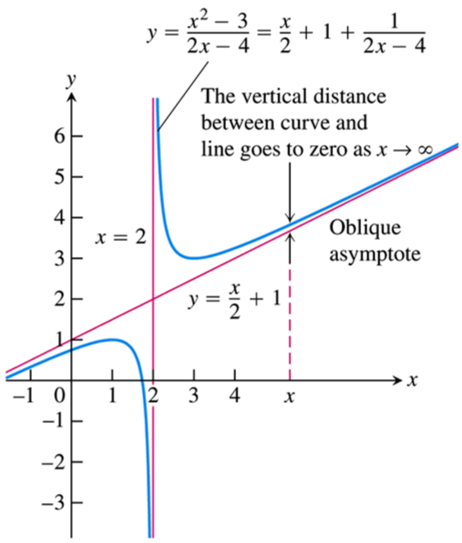




Dominant Term 主要項

在例 10，請參閱講義 32 頁

$f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$ 寫為 $f(x)=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{2x-4}$



當 $x\to\pm\infty$ 時，$\dfrac{x}{2}+1\to\pm\infty$ ，$\dfrac{1}{2x-4}\to 0$

換句話說

當 $x\to\pm\infty$ 時，$f(x)\approx\dfrac{x}{2}+1$

f 的大小主要是由 $\dfrac{x}{2}+1$ 來決定。

我們稱

當 $x\to\pm\infty$ 時 f 的主要項(dominant term)就是 $\dfrac{x}{2}+1$

或說，當 $x\to\pm\infty$ ，$\dfrac{x}{2}+1$ 主控了(dominates) f

$f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$ 寫為 $f(x)=\dfrac{x}{2}+1+\dfrac{1}{2x-4}$

當 $x\to 2$ 時，$\dfrac{x}{2}+1\to 2$ ，$\dfrac{1}{2x-4}\to\pm\infty$

換句話說

在 $x=2$ 附近，$f(x)\approx\dfrac{1}{2x-4}$

f 的大小主要是由 $\dfrac{1}{2x-4}$ 來決定。

我們稱

f 在 $x=2$ 附近的主要項(dominant term)就是 $\dfrac{1}{2x-4}$

或說，在 $x=2$ 附近，$\dfrac{1}{2x-4}$ 主控了(dominates) f

例 19： $f(x)=3x^4-2x^3+3x^2-5x+6$ ， $g(x)=3x^4$

當 $x\to\pm\infty$ 時 $g(x)$ 主控了(dominates) $f(x)$ ，說明有兩種寫法

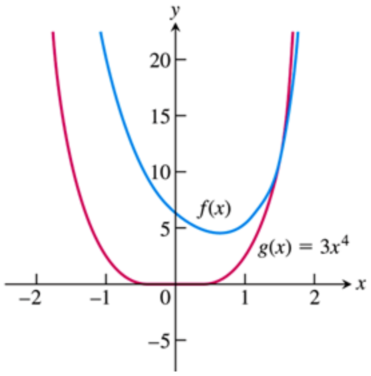
一是

$$f(x)=3x^4-2x^3+3x^2-5x+6=3x^4(1-\frac{2}{3x}+\frac{3}{3x^2}-\frac{5}{3x^3}+\frac{6}{3x^4})\approx g(x)=3x^4$$

二是

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^4-2x^3+3x^2-5x+6}{3x^4}=\lim_{x\to\pm\infty}(1-\frac{2}{3x}+\frac{3}{3x^2}-\frac{5}{3x^3}+\frac{6}{3x^4})=1$$

這表示當 $x\to\pm\infty$ 時 $g(x)\approx f(x)$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

我們可以解釋這速解法的原理如下

當 $x\to\infty$時

$5x^2$ 主控了(dominates) $5x^2+8x-3$ ， $3x^2$ 主控了 $3x^2+2$

所以 $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{3x^2}$ 成立，瞭解？

不看解答，請完整作答

無窮遠處極限、無窮大極限，兩者如何計算，計算方式一樣嗎？

口頭敘述三種漸近線其定義及幾何意義。

會用定義求這三種漸近線嗎？

會用目測觀察法求這三種漸近線嗎？

例 ：(a) $\lim_{x\to\infty}(3x^3-x^2+2)$ 　　(b) $\lim_{x\to-\infty}(3x^3-x^2+2)$

例 3a： 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}$ (不定形式∞/∞的極限)

例 3b： 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x+2}{2x^3-1}$ (不定形式∞/∞的極限)

例 4： 求 $f(x)=\dfrac{x^3-2}{|x|^3+1}$ 的水平漸近線

習題 34： 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

例 9： 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+16})$ (這題不可像例題 3 用直觀，小心)

例 10：求 $f(x)=\dfrac{x^2-3}{2x-4}$ 之斜漸近線。

例 15： 求 $y=\dfrac{x+3}{x+2}$ 的水平與垂直漸近線。

例 16： 求 $y=-\dfrac{8}{x^2-4}$ 的水平與垂直漸近線。