Chapter 3　Differentiation　微分

2.1　Rates of Change and Tangents to Curves　變化率及曲線的切線

3.1　Tangents and the Derivative at a Point 在某點的切線與導數

2.1 節說明為了處理瞬間變化率(速度)和曲線的斜率的問題，微積分需要考慮極限概念。第 2 章理解計算極限後，3.1 節自然地能解決 2.1 節的問題並引出微積分的導數。

變化率(Rate of Change)

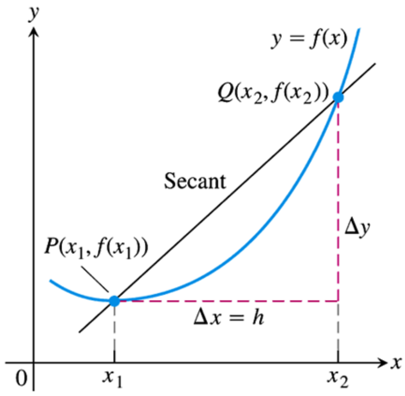
Δ 大寫希臘字母，小寫字母 δ ，唸成 delta

$\Delta x = x_2 - x_1 = h$ 是區間 $[x_1, x_2]$ 的長度，或稱為自變數 x 的改變量

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ 是函數 f 在區間 $[x_1, x_2]$ 的改變量，或稱為因變數 y 的改變量

f 在區間 $[x_1, x_2]$ 上之平均變化率(average rate of change)的定義

$$\frac{\text{change in } y}{\text{change in } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$



例如， 平均速率 $= \dfrac{\text{行經的距離}}{\text{經過的時間}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$

過曲線上任兩點之直線稱為割線(secant line)。
平均變化率的幾何意義是過 P , Q 兩點之割線斜率。

2.1 例 1：假設岩石從很高的懸崖頂部鬆脫。

(a) 落下的前 2 秒平均速率是多少？

(b) 落下的第一秒與第二秒之間這 1 秒區間的平均速率是多少？

解：

自由落下 t 秒後下降的距離為 $y = 4.9t^2$ 公尺或 $y = 16t^2$ 英尺，皆可。

平均速率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$

(a) 前 2 秒平均速率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(2)^2 - 16(0)^2}{2 - 0} = 32\,\text{ft/sec}$ (英尺/秒)

(b) 第一秒與第二秒之間的平均速率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{16(2)^2 - 16(1)^2}{2 - 1} = 48\,\text{ft/sec}$ (英尺/秒)

以例題 2 為例來說明瞬間變化率如何引向微積分的主要概念－極限。
Δx 或 h 趨近 0 時，平均變化率變成函數在某一點的瞬間變化率(instantaneous rate)

2.1 例 2：例 1 中求 $t=1$ 及 $t=2$ 時的瞬間速率。　這也是 3.1 節例 2。
解：

想知道 $t=t_0$ 這一個時間點的瞬間速率，
$t=t_0$ 是一個點，沒有時間區間可供我們計算。怎麼辦呢？

$$平均速率 \frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$

我們先計算從 $t=t_0$ 至 $t=t_0+h$ 的平均速率

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{16(t_0+h)^2-16(t_0)^2}{h}=\frac{16(t_0{}^2+2t_0h+h^2)-16t_0{}^2}{h}=\frac{16(2t_0h+h^2)}{h}=16(2t_0+h)$$

時間區間的長度 h	在時間 $[1,1+h]$ 的平均速率 $16(2+h)$	在時間 $[2,2+h]$ 的平均速率 $16(4+h)$
1	48	80
0.1	33.6	65.6
0.01	32.16	64.16
0.001	32.016	64.016
0.0001	32.0016	64.0016

觀察在愈來愈小的時間間隔裡岩石的平均速率
則可合理地令 h 趨近 0，所以 $t=t_0$ 這一個時間點的瞬間速率 $16(2t_0)$ 英尺/秒
$t=1$ 時的瞬間速率是 $16(2\cdot 1)=32$ 英尺/秒
$t=2$ 時的瞬間速率是 $16(2\cdot 2)=64$ 英尺/秒

2.1 節時尚未知道如何處理極限，只能列表直觀答案，懂得極限後，3.1 節能以極限計算解決上述問題。

3.1 例 2：2.1 節例 2，假設岩石從很高的懸崖頂部鬆脫。求 $t=1$ 時的瞬間速率。
解：

在 $t=1$ 的瞬間速率是平均速率 $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 當 h 趨近 0 的極限

從第 2 章已知如何計算極限，所以在 $t=1$ 的瞬間速率可直接計算如下

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{16(1+h)^2-16(1)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{16(1+2h+h^2)-16}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{16(2h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}16(2+h)=16(2)=32 英尺/秒$$

從瞬間速率引伸出一般函數的瞬間變化率定義

3.1 節，f 在 x_0 上之瞬間變化率(rate of change)的定義：$\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

瞬間變化率的幾何意義是啥呢？

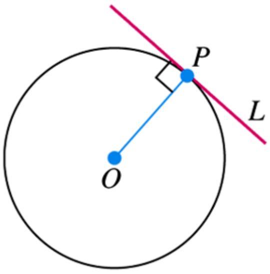
曲線之切線斜率

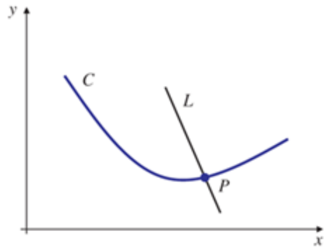
直線的斜率是衡量直線傾斜的程度，如何衡量一曲線在某點的傾斜的程度？

引入曲線之切線的概念。

與一圓交於一點之直線稱為此圓的切線，但這種觀念不適用於一般的曲線。

右圖，直線 L 雖然只與圖形相交於一點但 L 不是曲線在點 P 之切線。





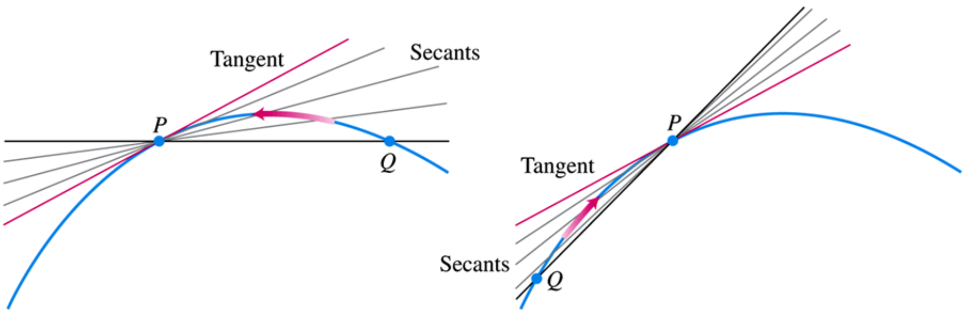
連續曲線在點 P 之切線：

曲線上任一過點 P 之割線 PQ，若點 Q 沿曲線趨近點 P 時，

這些過點 P 之割線有一極限位置的直線，此直線稱為曲線在點 P 之切線(tangent line)。

圖顯示過點 P 右側之割線有一極限位置的直線，

過點 P 左側之割線之極限位置的直線也是同一直線。



開啟網頁顯示動態觀察。https://www.youtube.com/watch?v=DWTKQFsjIPg

定義：我們以曲線在點 P 之切線斜率作為曲線在點 P 之斜率。

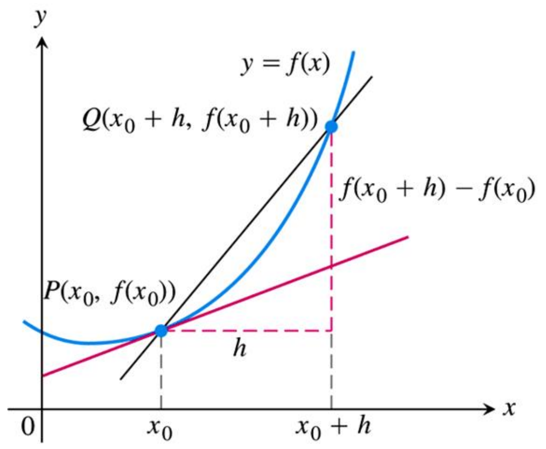
2.1 重點回顧

1. 口頭敘述平均變化率與瞬間變化率的定義。　2. 口頭敘述曲線在某點之切線定義。

3.1 節

f 在 x_0 之瞬間變化率 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 的幾何意義是過 P 點之切線斜率，

看圖



如何計算切線斜率呢？

切線是從割線的極限得到，先求割線斜率。

割線 PQ 斜率

$$m_{PQ}=\frac{y\text{分量差}}{x\text{分量差}}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

點 Q 沿曲線趨近點 P 時 $h\to 0$ ，
所以
切線斜率就是割線斜率的極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

定義： f 在 x_0 連續，則通過點 $P(x_0, f(x_0))$ 斜率為 $m=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (若存在)。

2.1 例 3：求 $f(x)=x^2$ 在點 $(2,4)$ 的斜率及切線方程式。

解：

$f(x)=x^2$ 中的 x 用 $2+h$ 替代，得到 $f(2+h)=(2+h)^2$

(割線斜率)

$$m_{PQ}=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$ $x_0=2$ 代入 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$=\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$$ $f(2)=2^2=4$

$$=\frac{(4+4h+h^2)-4}{h}$$ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 展開

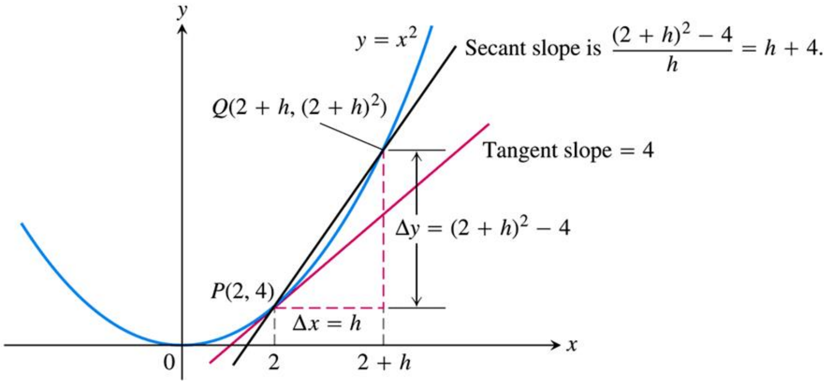
$$=\frac{4h+h^2}{h}$$ 分子化簡

$$=\frac{h(4+h)}{h}$$ 分子各項提出因式 h

$$=4+h$$ 分子分母消去共同因式 h

在點 $(2,4)$ 的切線斜率 $m=\lim\limits_{h\to 0}(4+h)=4$ ，

在點 $(2,4)$ 的切線方程式 $y-4=4(x-2)$ 或 $y=4x-4$



2.1 節例 4,5 應用題大致上融合說明瞬間變化率及斜率是相同概念。可以省略。

3.1 例 1：

(a) 求曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 在點 $x=a\neq 0$ 及 $x=-1$ 的斜率。

解：

在點 $x=a$ 的斜率

$m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 　　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 中的 x 用 $a+h$ 替代，得到 $f(a+h)=\dfrac{1}{a+h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$ 　　$f(a)=\dfrac{1}{a}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}(\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a})$ 　　改寫

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[\dfrac{a}{(a+h)a}-\dfrac{a+h}{(a+h)a}]$ 　　兩個分母化成共同因式 $(a+h)a$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[\dfrac{a-(a+h)}{(a+h)a}]$ 　　通分相減

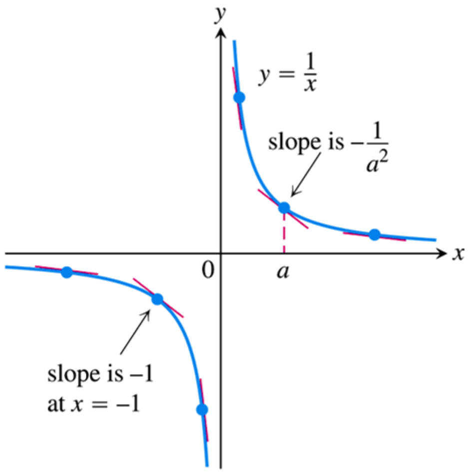
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[-\dfrac{h}{(a+h)a}]$ 　　分子化簡

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{(a+h)a}$ 　　分子分母消去共同因式 h

$=-\dfrac{1}{a^2}$ 　　$h=0$ 代入計算極限

$$m=-\frac{1}{a^2}$$

$$\text{在點 } x=-1 \text{ 的斜率} -\frac{1}{(-1)^2}=-1$$



(b) 何處的斜率為 $-1/4$。

解：

$$-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow a^2=4\Rightarrow a=\pm 2$$

在點 $(2,1/2)$ 及 $(-2,-1/2)$ 的斜率為 $x=-1/4$

(c) 討論曲線在不同點 $(a,1/a)$ 斜率的變化。

解：

若 $a\to 0$，斜率 $-1/a^2\to-\infty$。

若 $a\to\pm\infty$，斜率 $-1/a^2\to 0$。

補充

切線另一觀點，設定為 IE 瀏覽器，開啟網頁顯示動態。

http://www.ima.umn.edu/~arnold/calculus/tangent/tangent-g.html

下圖裡大圈內的圖形是小圈內圖形放大倍數(zoom)顯微觀察。

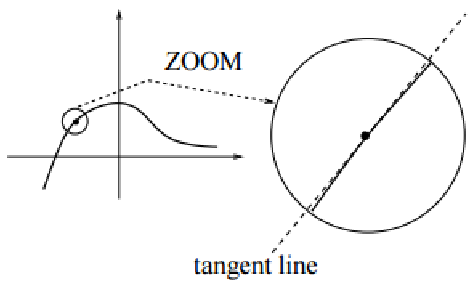
若放大倍數顯微觀察，在平滑曲線的點附近(足夠靠近時)，曲線看起來會像是一直線，

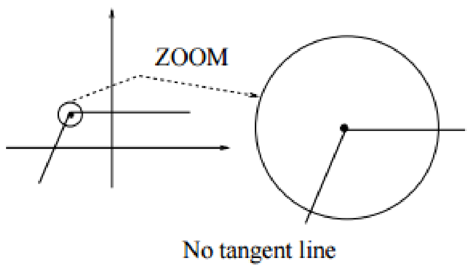
此直線即為曲線在該點之切線。

換言之，

可以找到一個大小適當的圓跟曲線在該點附近貼合，圓在該點的切線就是曲線在該點的切線。

平滑曲線的點才會有切線，尖角轉折點不會有切線。





3.1 節

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 稱為差商(difference quotient)。 2.1 節，差商表示割線斜率及平均變化率。

定義： $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 稱為 f 在 x_0 之導數(derivative)。($f'(x_0)$ 唸為 f prime x_0)

函數斜率及變化率的數學式子定義一樣，其定義在數學統稱為導數一詞。
導數是源自函數的變化率及曲線的切線斜率。

$f'(x_0)$ 這極限有下列 4 種意涵：
1. 曲線 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的斜率。
2. 曲線 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的切線斜率。
3. 函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的變化率。
4. f 在 $x=x_0$ 之導數 $f'(x_0)$ 。

簡言之，導數＝斜率＝變化率

不看解答，請完整作答

2.1 例 3：求 $f(x)=x^2$ 在點 $(2,4)$ 的斜率及切線方程式。

3.1 例 1：(a) 求曲線 $y=1/x$ 在點 $x=a\neq 0$ 及 $x=-1$ 的斜率。

3.2 The Derivative as a Function 導函數

導函數定義

定義： $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 稱為 f 的導函數，定義域為 $\{x\,|\,f'(x)\text{ exists}\}$ 。

註：1. 令 $\Delta x=h$ ，則導數寫為 $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 。此為符號 $\dfrac{dy}{dx}$ 的由來。

令 $z=x+h$ ，則導數寫為 $f'(x)=\lim_{z\to x}\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x}$ 。

2. 符號：導函數 $f'=Df=\dfrac{d}{dx}f=\dfrac{df}{dx}$

在 $x=c$ 的導數值 $f'(c)=Df\big|_{x=c}=\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=c}$ ，導函數或導數值常混稱為導數

3. 微分的微是指量愈來愈小的意思，導數的極限形式恆為 $0/0$ ，
這是前面討論極限的原因之一。

導(函)數 $f'(x)$ 的定義計算方式跟上一節相同。計算極限時 x 是常數而 h 是變數。

例 1： $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ，求導數 $f'(x)$ 。

解：

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 中的 x 用 $x+h$ 替代，得到 $f(x+h)=\dfrac{x+h}{x+h-1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x+h}{x+h-1}-\dfrac{x}{x-1}}{h} \qquad f(x)=\frac{x}{x-1}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}\right) \qquad \text{改寫}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{(x+h)(x-1)}{(x+h-1)(x-1)}-\frac{x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}\right] \qquad \text{兩個分母化成共同因式}(x+h-1)(x-1)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \text{通分相減}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(x^2+xh-x-h)-(x^2+xh-x)}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \text{分子展開}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \text{分子化簡}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)} \qquad \text{分子分母消去共同因式}h$$

$$=\frac{-1}{(x-1)^2} \qquad h=0\text{ 代入計算極限}$$

....

例 2a： $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$，求 f 的導數。

解：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$f(x)=\sqrt{x}$ 中的 x 用 $x+h$ 替代，得到 $f(x+h)=\sqrt{x+h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ 分子分母同乘有理化因式 $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ 分子相乘 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$ 分子化簡

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ 分子分母消去共同因式 h

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ $h=0$ 代入計算極限

....

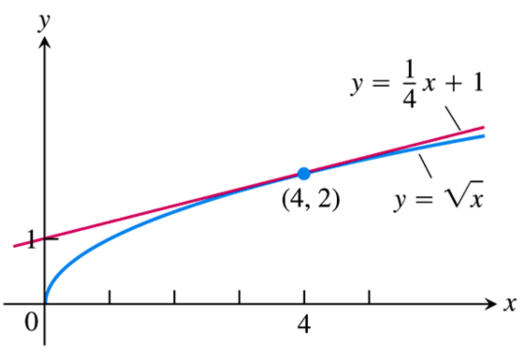
例 2b：求 $y=\sqrt{x}$ 在點 $x=4$ 之切線方程式。

解：

斜率 $m=\left.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=4}=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$

$x=4\Rightarrow y=2$，點斜式 $y-y_0=m(x-x_0)$

切線方程式 $y-2=\dfrac{1}{4}(x-4)$



....

Differentiable on Interval ; One-sided Derivatives 可微分性與單邊導數

定義： f 在點 x 之導數 $f'(x)$ 存在，則稱 f 在點 x 可微分(differentiable)。

註：可微分 $\Leftrightarrow$ 導數存在 $\Leftrightarrow$ 斜率存在。 圖形是平滑的。

定義： f 在開區間 (a,b) 可微分 $\Leftrightarrow$ f 在區間內每一點可微分。

定義： f 在閉區間 $[a,b]$ 可微分 $\Leftrightarrow$ f 在開區間 (a,b) 可微分且下列單邊導數存在。

$$f'(a^{+})=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ 稱為在點 a 的右導數

$$f'(b^{-})=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$ 稱為在點 b 的左導數

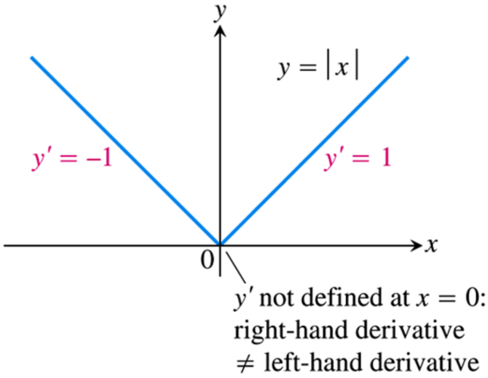
例 4：求 $f(x)=|x|$ 的導數。

解：在 $x=0$ 的導數

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

左導數 $f'(0^{-})=\lim\limits_{\substack{h\to 0^{-}\\ h<0}}\frac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^{-}}\frac{-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^{-}}-1=-1$

右導數 $f'(0^{+})=\lim\limits_{\substack{h\to 0^{+}\\ h>0}}\frac{|h|}{h}=\lim\limits_{h\to 0^{+}}\frac{h}{h}=\lim\limits_{h\to 0^{+}}1=1$



導數 $f'(0)$ 不存在，在點 $(0,0)$ 沒有切線，斜率不存在。
曲線在 $(0,0)$ 有一轉角點(corner)或扭結點(kink)。
導數是曲線的切線斜率，所以

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x\ ,\ x\ge 0\\ -x\ ,\ x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}1\ ,\ x>0\\ -1\ ,\ x<0\end{cases}$$，$f'(0)$ 不存在。

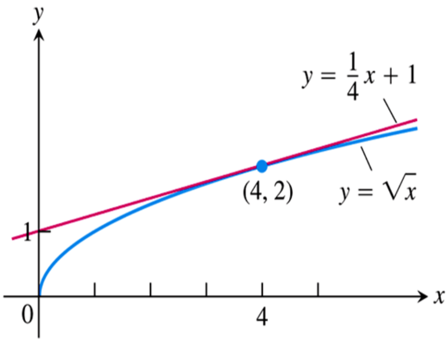
例 5： $f(x)=\sqrt{x}$ ，求在 $x=0$ 的導數。

解：

$x>0$ ，在 $x=0$ 只有右導數

$$f'(0^{+})=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0^{+}\\ h>0}}\frac{\sqrt{0+h}+\sqrt{0}}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty$$



導數 $f'(0)$ 不存在，在點 $(0,0)$ 有垂直切線，斜率不存在。

When does a function not have a derivative at a point ?

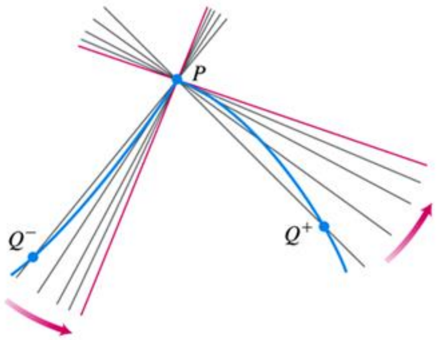
何時函數在某一點導數不存在呢？

複習：可微分 ⇔ 導數存在 ⇔ 斜率存在。 圖形是平滑的。

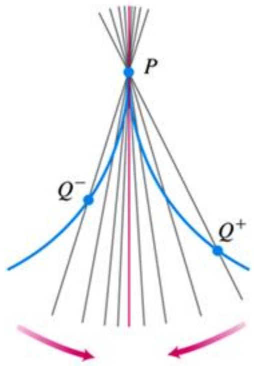
複習：曲線上任一過點 P 之割線 PQ ，若點 Q 沿曲線趨近點 P 時，
這些過點 P 之割線有一極限位置的直線，此直線稱為曲線在點 P 之切線。

導數不存在的情形如下：

1. 曲線在 P 是一轉角點(corner)，
左切線右切線沒重合，沒有切線。
左右導數(斜率)不同，導數(斜率)不存在。



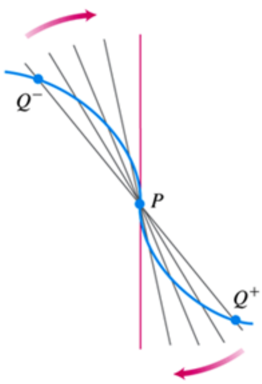
2. 曲線在 P 是一尖點(cusp)，
切線是一垂直線。
垂直線沒斜率，導數(斜率)不存在。



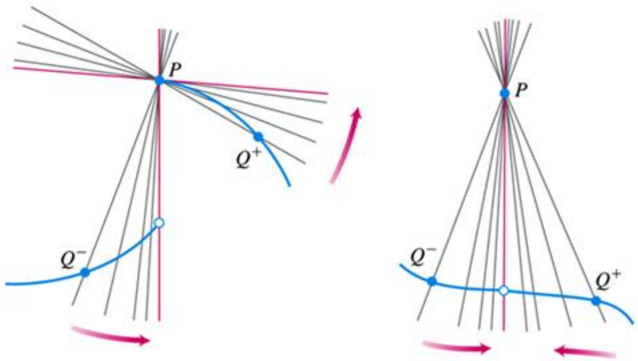
注意：有作者定義左切線右切線斜率 $\lim\limits_{x\to x_0}|f'(x)|=\infty$ 時， $x=x_0$ 是垂直切線。(老師認同)

有作者要求左切線斜率與右切線斜率同為 ∞ 或同為 $-\infty$ 時， $x=x_0$ 才是垂直切線。

3. 曲線在 P 是垂直切線處，
導數(斜率)不存在。



4. 曲線在 P 是一斷點，
可能沒有切線或有一垂直切線，
導數(斜率)不存在。



結論：轉角點、尖點、垂直切線處及斷點是不可微分。

Differentiable Functions Are Continuous 可微分函數是連續

定理 1：若 f 在 $x=c$ 可微分，則 f 在 $x=c$ 連續。

證明：

先瞭解連續與可微分的定義

f 在 $x=c$ 連續 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ 或 $\lim\limits_{h\to 0} f(c+h)=f(c)$

f 在 $x=c$ 可微分 $\Leftrightarrow$ $f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ 存在

$h\neq 0$ ， $f(c+h)=f(c)+\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}\cdot h$

$\lim\limits_{h\to 0} f(c+h)=f(c)+(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(x)}{h})\cdot(\lim\limits_{h\to 0} h)=f(c)+f'(c)\cdot(0)=f(c)$ ，

故 $\lim\limits_{h\to 0} f(c+h)=f(c)$ ， f 在 $x=c$ 連續。

結論：可微分(斜率存在)函數圖形是連續平滑的(smooth)。

可微分(斜率存在)函數圖形不會有尖點、轉角點、垂直切線處或斷點。

注意：連續不一定可微分。

不看解答，請完整作答

例 1： $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ，求導數 $f'(x)$ 。

例 2a： $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$ ，求 f 的導數。

例 4：求 $f(x)=|x|$ 的導數。

f 在點 x 可微分的意義。可微分點及不可微分點幾何上有啥特徵。

3.3 Differentiation Rules 微分公式

Derivatives of Constant and Power Functions 常數及冪函數的導數公式

用定義計算導數很困難，需要簡單有力的計算公式。公式的證明在節尾。

常數法則(constant rule) $\frac{d}{dx}c=0$	口訣：常數函數的斜率為 0
冪法則(power rule) $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$	口訣：次方提到前面，再次方減 1

註：$x^0=1$，$x^{-1}=\frac{1}{x}$，$x^{-n}=\frac{1}{x^n}$，$x^{n/2}=\sqrt{x^n}$，$x^{n/m}=\sqrt[m]{x^n}$，$x^{-n/m}=\frac{1}{x^{n/m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$。

例：(a) $\frac{d}{dx}2^{100}=0$ ； (b) $\frac{d}{dx}1=0$ ； (c) $\frac{d}{dx}\sqrt{2}=0$

例：(a) $\frac{d}{dx}x=\frac{dx}{dx}=1$ 或 $\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}x^1=1x^0=1$ ； (b) $\frac{d}{dt}x=0$ (對變數 t 而言，x 是常數)

例 1：(a) $(x^3)'=3x^2$ (c) $Dx^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

(b) $f(x)=x^{2/3}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

(d) $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^4}=\frac{d}{dx}x^{-4}=-4x^{-4-1}=-4x^{-5}=-\frac{4}{x^5}$

(e) $\frac{d}{dx}x^{-4/3}=-\frac{4}{3}x^{(-4/3)-1}=-\frac{4}{3}x^{-7/3}=-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$

(f) $\frac{d}{dx}\sqrt{x^{2+\pi}}=\frac{d}{dx}(x^{2+\pi})^{\frac{1}{2}}=\frac{d}{dx}x^{1+\frac{\pi}{2}}=(1+\frac{\pi}{2})x^{\frac{\pi}{2}}=(1+\frac{\pi}{2})\sqrt{x^{\pi}}$

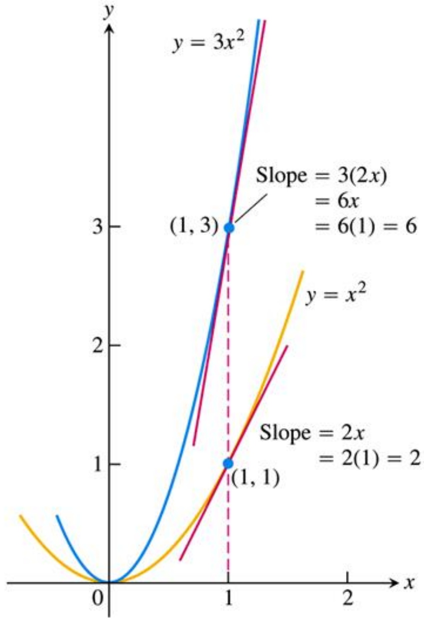
Constant Multiple Rule and Sum / Difference Rule 函數常數倍及和差的導數公式

假設 u, v 是 x 可微分函數。

常數倍法則(constant multiple rule) $\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$ 　　口訣：常數倍可提到前面再微分

和差法則(sum / difference rule) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

直線的斜率 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y\text{ 分量差}}{x\text{ 分量差}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



例 2： $\frac{d}{dx}3x^2 = 3\frac{d}{dx}x^2 = 3(2x) = 6x$

看圖

y 分量而言， $y = 3x^2$ 是 $y = x^2$ 的 3 倍

因為導數是斜率，故

斜率 $y = 3x^2$ 是 $y = x^2$ 的 3 倍

例 3： $\frac{d}{dx}(x^3 - \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1)$

$= (x^3)' - (\frac{4}{3}x^2)' - (5x)' + (1)'$ 　　和差法則

$= (x^3)' - \frac{4}{3}(x^2)' - 5(x)' + (1)'$

$= 3x^2 - \frac{4}{3}(2x) - 5(1) + 0 = 3x^2 - \frac{8}{3}x - 5$

例 4：曲線 $y = x^4 - 2x^2 + 2$ 有水平切線嗎？若有，在何處呢？

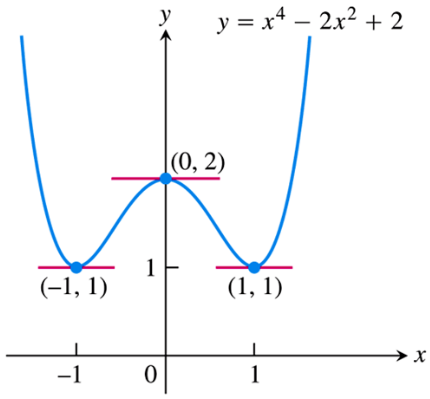
解：

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

有水平切線處斜率為 0

$4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$

在 $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ 有水平切線



1.5 節，Euler 數 e 滿足指數曲線 $y=e^x$ 在點 $(0,1)$ 的斜率 $m=1$， $2<e<3$ 。

斜率＝導數，依照定義， $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 的導數

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\text{，故}\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1}$$

自然指數函數的導數： $\dfrac{d}{dx}e^x=e^x$

說明：

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x\cdot 1=e^x$$

例 5：某直線通過點 $(0,0)$ 且與 $y=e^x$ 相切，求此切線方程式。

解：

看圖，通過原點的直線可設為 $y=mx$ 。

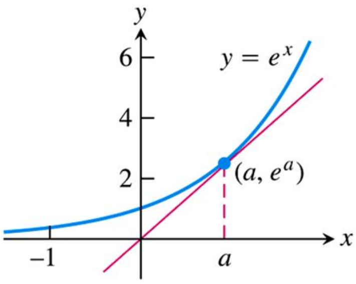
設此切線與 $y=e^x$ 在 (a,e^a) 相切，此切線通過 (a,e^a) 及 $(0,0)$，

其斜率 $m=\dfrac{e^a-0}{a-0}=\dfrac{e^a}{a}$

$y=e^x$ 的導數為 e^x ，故在 (a,e^a) 的切線斜率為 $m=e^a$

解 $m=\dfrac{e^a}{a}=e^a$ ， $e^a=ae^a$ ， $ae^a-e^a=0$ ， $(a-1)e^a=0$ ，故 $a=1$

$m=e^1=e$，故切線方程式 $y=ex$ 。



Product Rule and Quotient Rule 函數積商的導數公式

我們很期待 $\dfrac{d}{dx}(u\cdot v)=u'\cdot v'$ 及 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{v}=\dfrac{u'}{v'}$ ，但事與願違。

例如 $u=x$, $v=x$

$u\cdot v=x^2$ ， $\dfrac{d}{dx}(u\cdot v)=\dfrac{d}{dx}x^2=2x$ 而 $u'\cdot v'=(1)(1)=1$，故 $\dfrac{d}{dx}(u\cdot v)\neq u'\cdot v'$ 。

$\dfrac{u}{v}=\dfrac{x}{x}=1$ ， $\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{v}=(1)'=0$ 而 $\dfrac{u'}{v'}=\dfrac{1}{1}=1$，故 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{v}\neq\dfrac{u'}{v'}$ 。

積法則(product rule) $\dfrac{d}{dx}(uv)=u'\cdot v+u\cdot v'$ 　　口訣：(前微)(後不微)＋(前不微)(後微)

商法則(quotient rule) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{u}{v}=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ 　　口訣： $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\text{子}}{\text{母}}=\dfrac{\text{子}'\cdot\text{母}-\text{子}\cdot\text{母}'}{\text{母}^2}$

倒數法則(reciprocal rule) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{v}=-\dfrac{v'}{v^2}$ 　　口訣： $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\text{母}}=-\dfrac{\text{母}'}{\text{母}^2}$

$\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{d}{dx}\frac{u\cdot v}{v^2}=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ 這樣比較好記，但記得分子部分，原分子要先微分且式子相減。

例題是積法則計算的練習，不要先展開再微分。

例 6a：$\frac{d}{dx}[\frac{1}{x}(x^2+e^x)]=\underbrace{(\frac{1}{x})'}_{}{}^{(前)'}\cdot\overbrace{(x^2+e^x)}^{(後)}+\underset{}{\overset{(前)}{\frac{1}{x}}}\cdot\overbrace{(x^2+e^x)'}^{(後)'}=-\frac{1}{x^2}(x^2+e^x)+\frac{1}{x}(2x+e^x)$

$=-1-\frac{e^x}{x^2}+2+\frac{e^x}{x}=1+\frac{e^x}{x^2}(x-1)$

例 6b：$\frac{d}{dx}e^{2x}=\frac{d}{dx}(e^x\cdot e^x)=\overset{(前)'}{(e^x)'}\cdot\overset{(後)}{(e^x)}+\overset{(前)}{e^x}\cdot\overset{(後)'}{(e^x)'}=e^xe^x+e^xe^x=e^{2x}+e^{2x}=2e^{2x}$

例 7：$\frac{d}{dx}[(x^2+1)(x^3+3)]$

$=(x^2+1)'\cdot(x^3+3)+(x^2+1)\cdot(x^3+3)'$ 　　口訣：(前)′(後)+(前)(後)′

$=(2x)\cdot(x^3+3)+(x^2+1)\cdot(3x^2)$

$=(2x^4+6x)+(3x^4+3x^2)=5x^4+3x^2+6x$

例：倒數法則 $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}=-\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

商法則 $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1'\cdot(x^2+1)-1\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{0\cdot(x^2+1)-(2x)}{(x^2+1)^2}=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

例 8：商法則 $\frac{d}{dt}\frac{t^2-1}{t^3+1}=\frac{(t^2-1)'\cdot(t^3+1)-(t^2-1)\cdot(t^3+1)'}{(t^3+1)^2}$ 　　口訣：$\frac{d}{dx}\frac{子}{母}=\frac{子'\cdot母-子\cdot母'}{母^2}$

$=\frac{2t\cdot(t^3+1)-(t^2-1)\cdot 3t^2}{(t^3+1)^2}$

$=\frac{2t^4+2t-3t^4+3t^2}{(t^3+1)^2}=\frac{-t^4+3t^2+2t}{(t^3+1)^2}$

與其直接用積法則及商法則求導數，不如先整理式子再微分。

例 9：求 $y=\dfrac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$ 的導數

解：

先整理式子 $y=\dfrac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}=\dfrac{x^3-2x^2-x^2+2x}{x^4}=\dfrac{x^3}{x^4}-\dfrac{3x^2}{x^4}+\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{1}{x}-3\dfrac{1}{x^2}+2\dfrac{1}{x^3}$

$$y'=(x^{-1})'-3(x^{-2})'+2(x^{-3})'=-x^{-2}-3(-2x^{-3})+2(-3x^{-4})=-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$

Higher-Order Derivatives　高階導數

階乘(factorial)

規定 $0!=1$ ， $1!=1$ ， $n!=n\cdot[(n-1)!]=(n)(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$

則

$2!=(2)(1)=2$ ， $3!=(3)(2)(1)=6$ ， $4!=(4)(3)(2)(1)=24$ ， $5!=(5)(4)(3)(2)(1)=120$

高階導數符號： 一階導數 $y'=\dfrac{dy}{dx}=Dy$

二階導數， $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=D^2y$

注意： $y''=(y')'$ ， $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{d}{dx}y)=\dfrac{d^2}{(dx)^2}y=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ， $D(Dy)=D^2y$

三階導數， $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}=D^3y$

四階以上的導數，$n\geq 4$ ， $y^{(n)}=\dfrac{d}{dx}y^{(n-1)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}=D^ny$

例 8： $f(x)=x^3-3x^2+2$ ，求各階導數。

解：

計算高階導數，整理歸納一般式。

$f'(x)=3x^2-6x$ ， $f''(x)=3\cdot 2x-6$ ， $f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1=3!$ ， $f^{(n)}(x)=0$, $n\geq 4$ 。 #

微分公式證明

常數法則(constant rule)： $\dfrac{d}{dx}c=0$

證明： $f(x)=c$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0\Rightarrow f'(x)=0$$

冪法則(power rule)：$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

冪法則需要用到對數化微分法證明，這裡只考慮n是自然數。

證明：$f(x)=x^n$

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{z^n-x^n}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{(z-x)(z^{n-1}+z^{n-2}x+\cdots+zx^{n-2}+x^{n-1})}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}(z^{n-1}+z^{n-2}x+\cdots+zx^{n-2}+x^{n-1})=x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}+x^{n-1}=nx^{n-1}$$

常數倍法則(constant multiple rule)：$\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}$

證明：

令 $f(x)=c\cdot u(x)$，則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c\cdot u(x+h)-c\cdot u(x)}{h}=c\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=c\cdot u'(x)$$

和差法則(sum / difference rule)：$\frac{d}{dx}(u\pm v)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$

證明：

令 $f(x)=u(x)+v(x)$，則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]+[v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)+v'(x)$$

積法則(product rule)： $\frac{d}{dx}(uv)=u'\cdot v+u\cdot v'$

證明：

令 $f(x)=u(x)v(x)$ ，(利用導數定義，配合公式形式，拼湊所要的答案) 則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[u(x+h)\cdot v(x+h)-u(x)v(x+h)\right]+\left[u(x)\cdot v(x+h)-u(x)v(x)\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)-u(x)]\cdot v(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x)\cdot[v(x+h)-v(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}v(x+h)+\lim_{h\to 0}u(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

倒數法則(reciprocal rule)： $\frac{d}{dx}\frac{1}{v}=-\frac{v'}{v^2}$

證明：令 $f(x)=1/v(x)$ ，(利用導數定義，配合公式形式，拼湊所要的答案) 則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{v(x+h)}-\frac{1}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{v(x)}{v(x+h)\cdot v(x)}-\frac{v(x+h)}{v(x+h)\cdot v(x)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\frac{v(x+h)-v(x)}{v(x+h)\cdot v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[-\frac{1}{v(x+h)\cdot v(x)}\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h}]$$

$$=-\frac{1}{v(x)\cdot v(x)}\cdot v'(x)=-\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$$

商法則(quotient rule) $\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

證明：

$$\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{d}{dx}(u\cdot\frac{1}{v})=u'\cdot\frac{1}{v}+u\cdot(\frac{1}{v})'=u'\cdot\frac{1}{v}-u\cdot\frac{v'}{v^2}=\frac{u'\cdot v}{v^2}-\frac{u\cdot v'}{v^2}=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

微分公式的計算，要如同九九乘法一樣的熟悉。
(不定積分是微分逆運算，微分若不熟悉，則積分學習會很困難。)
不看解答，請完整作答

例：$\frac{d}{dx}\sqrt{2}$ ， $\frac{d}{dx}x$ ， $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^4}$ ， $\frac{d}{dx}\sqrt{x^{2+\pi}}$

....

例 6a：$\frac{d}{dx}[\frac{1}{x}(x^2+e^x)]$ ， 例：$\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}$ ， 例 8：$\frac{d}{dt}\frac{t^2-1}{t^3+1}$

....

例 9：求 $y=\frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$ 的導數

....

3.5 Derivatives of Trigonometric Functions 三角函數的導數

2.4 節定理 7：$\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$，$\lim\limits_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$

$\sin x$, $\cos x$ 的導數

(1) $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ；	(2) $\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$

證明：

(1) 只能利用導數定義，令 $f(x)=\sin x$ ，則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cdot\cos h+\cos x\cdot\sin h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\cdot\sin h}{h}$$
$$=\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x$$

(2) 令 $f(x)=\cos x$ ，則

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\cdot\sin h}{h}$$
$$=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(\cos h-1)}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

....

例 1：(a) $\dfrac{d}{dx}(x^2-\sin x)=2x-\cos x$

(b) 口訣：(前微)(後不微)＋(前不微)(後微)

$$\frac{d}{dx}(e^x\sin x)=(e^x)'\cdot\sin x+e^x\cdot(\sin x)'=e^x\cdot\sin x+e^x\cdot\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$

(c) 口訣：$\dfrac{d}{dx}\dfrac{子}{母}=\dfrac{子'\cdot母-子\cdot母'}{母^2}$

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{x}=\frac{(\sin x)'\cdot x-\sin x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{\cos x\cdot x-\sin x\cdot 1}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

例 2：(a) $\dfrac{d}{dx}(5e^x+\cos x)=5e^x-\sin x$

(b) 口訣：(前微)(後不微)＋(前不微)(後微)

$$\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)=(\sin x)'\cdot\cos x+\sin x\cdot(\cos x)'=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)=\cos^2 x-\sin^2 x$$

(c) 口訣：$\dfrac{d}{dx}\dfrac{子}{母}=\dfrac{子'\cdot母-子\cdot母'}{母^2}$

$$\frac{d}{dx}\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{(\cos x)'\cdot(1-\sin x)-\cos x\cdot(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}\qquad \sin^2 x+\cos^2 x=1$$

其他三角函數的導數

(3) $\dfrac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$ ；	(4) $\dfrac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$
(5) $\dfrac{d}{dx}\cot x=-\csc^2 x$ ；	(6) $\dfrac{d}{dx}\csc x=-\csc x\cot x$

證明：

(3) 口訣：$\dfrac{d}{dx}\dfrac{子}{母}=\dfrac{子'\cdot母-子\cdot母'}{母^2}$

$$\frac{d}{dx}\tan x=\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$=\frac{(\cos x)\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}=\sec^2 x$$

(4) 倒數法則 $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{v}=-\dfrac{v'}{v^2}$

$$\frac{d}{dx}\sec x=\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}=-\frac{(\cos x)'}{(\cos x)^2}=-\frac{-\sin x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x$$

其他2個三角函數的導數類推。

例 6： $y=\sec x$，求 y''

解：

$$y'=\sec x\cdot\tan x$$

$$\begin{aligned} y''&=(\sec x)'\cdot\tan x+\sec x\cdot(\tan x)' \\ &=(\sec x\cdot\tan x)\cdot\tan x+\sec x\cdot(\sec^2 x) \\ &=\sec x\cdot\tan^2 x+\sec^3 x \end{aligned}$$

口訣：(前微)(後不微)＋(前不微)(後微)

例 7： $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)}=\frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)}=\frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)}=\frac{\sqrt{3}}{\cos\pi}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$

不看解答，請完整作答

例 1： $\dfrac{d}{dx}(e^x\sin x)$　　　　$\dfrac{d}{dx}\dfrac{\sin x}{x}$　　　　例 6： $y=\sec x$，求 y''

證明： $\dfrac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$　　　　$\dfrac{d}{dx}\sec x=\sec x\tan x$

3.6 The Chain Rule 連鎖律

合成函數與連鎖律

連鎖律可用來求合成(composite)函數的導數。

合成函數： $x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f\circ g(x)=f(g(x))$

例如

$y=f(u)=u^2$ 與 $u=g(x)=3x^2+1$，則 f 與 g 的合成 $y=f(g(x))=[g(x)]^2=(3x^2+1)^2$ 。

例：$y=\frac{3}{2}x$是$y=\frac{1}{2}u$與$u=3x$的合成 (不是乘積)，

易知$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}$，$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}$，$\frac{du}{dx}=3$

$(y$對x的變化率$)=(y$對u的變化率$)$ $(u$對x的變化率$)$，

這就是下述的連鎖律$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$。

例 1：$y=(3x^2+1)^2$是$y=u^2$及$u=3x^2+1$的合成

一方面$\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=2u\cdot 6x=2(3x^2+1)\cdot 6x=36x^3+12x$

另一方面$y=(3x^2+1)^2=9x^4+6x^2+1$，$\frac{dy}{dx}=36x^3+12x$

公式$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$仍成立。

微分符號區別：(a) 先合成後再求其導數：$(f\circ g)'=[f(g(x))]'=\frac{d}{dx}f(g(x))$

(b) 導數f'與g的合成：$f'\circ g=f'(g(x))$

連鎖律：若$y=f(u)$在u可微分且$u=g(x)$在x可微分，則$y=f(g(x))$在x可微分

且 Type 1：$\frac{d}{dx}f(g(x))=f\,'(g(x))\cdot g\,'(x)$

Type 2：$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

說明：

比對 Type 1、Type 2 相同，

視y為x的函數$y=f(g(x))$，$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(g(x))$

視y為u的函數$y=f(u)$，$\frac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$

視u為x的函數$u=g(x)$，$\frac{du}{dx}=g'(x)$。

注意：這時y'的意思不夠明確，因為$y'=\frac{dy}{dx}$或$y'=\frac{dy}{du}$都有可能，請避免用y'。

Type 2 的口訣：$(y$對x的變化率$)=(y$對u的變化率$)$ $(u$對x的變化率$)$

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(u)\cdot g'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

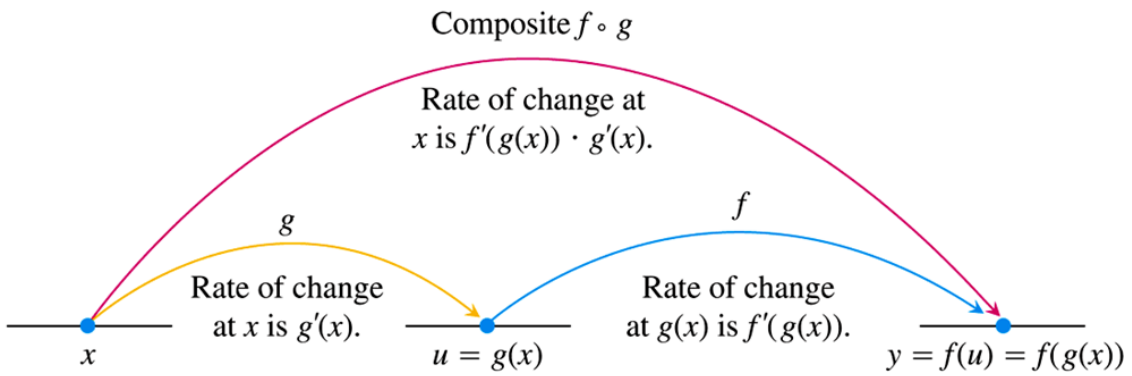


FIGURE 3.26 Rates of change multiply: The derivative of $f \circ g$ at x is the derivative of f at $g(x)$ times the derivative of g at x.

連鎖律 Type 1 $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$ 可以圖示如上

口語化如下

(合成函數($f(g(x))$ 在 x 的導數) = (f 在 $g(x)$ 的導數) (g 在 x 的導數)

連鎖律 Type 1 的口訣：Outside-Inside Rule

合成函數 $f(g(x))$ 中， f 是外函數(outside)， g 是內函數(inside)。

連鎖律 $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

連鎖律的口訣：外函數 f 微分，其內函數 g 保留，再乘內函數的導數 g'

例 2： $y = \cos(x^2+1)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

解：先明白 $y = \cos(x^2+1)$ 是 $y = \cos u$ 及 $u = x^2+1$ 的合成

Type 2： $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -\sin u \cdot 2x = -\sin(x^2+1)\cdot 2x = -2x\sin(x^2+1)$

Type 2'： $\underbrace{\frac{d}{dx}\cos(x^2+1)}_{\frac{dy}{dx}} = \underbrace{\frac{d\cos(x^2+1)}{d(x^2+1)}}_{\frac{dy}{du}}\underbrace{\frac{d(x^2+1)}{dx}}_{\frac{du}{dx}} = -\sin(x^2+1)\cdot 2x = -2x\sin(x^2+1)$ 少用

Type 1： $\cos(x^2+1)$ 是 $f(u)=\cos u$ 及 $g(x)=x^2+1$ 的合成，

易知 $f'(u)=-\sin u$ 及 $g'(x)=2x$

$$\frac{d}{dx}\cos(x^2+1)=\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)=-\sin(g(x))\cdot(2x)=-2x\sin(x^2+1)$$

Type 1 口訣： $\frac{d}{dx}\underbrace{\cos}_{外}\underbrace{(x^2+1)}_{內}=\underbrace{-\sin}_{外微}\underbrace{(x^2+1)}_{內留}\cdot\underbrace{(x^2+1)'}_{內微}=-\sin(x^2+1)\cdot(2x)=-2x\sin(x^2+1)$

Type 2：常用於三角函數的合成. 微分公式證明及實際應用題，例如習題 61 $y=\sin(\cos(2t-5))$

Type 2'：這寫法比較少人用，除非熟練者及特殊題型。

Type 1：常用於微分公式證明。

Type 1 口訣：熟練者最方便快速，口訣只是原公式的口語化。

另外，針對不同函數合成，也會附上微分口訣，方便記憶公式。

例 3：求 $\frac{d}{dx}\sin(x^2+e^x)$

解：

Type 1： $\sin(x^2+x)$ 是 $f(u)=\sin u$ 及 $g(x)=x^2+e^x$ 的合成，易知 $f'(u)=\cos u$ 及 $g'(x)=2x+e^x$

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2+e^x)=\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)=\cos(g(x))\cdot(2x+e^x)=(2x+e^x)\cos(x^2+e^x)$$

Type 1 口訣：

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\sin}_{外}\underbrace{(x^2+e^x)}_{內}=\underbrace{\cos}_{外微}\underbrace{(x^2+e^x)}_{內留}\cdot\underbrace{(x^2+e^x)'}_{內微}=\cos(x^2+e^x)\cdot(2x+e^x)=(2x+e^x)\cos(x^2+e^x)$$

Type 2： $\sin(x^2+x)$ 是 $y=\sin u$ 及 $u=x^2+e^x$ 的合成

$$\frac{d}{dx}\sin(x^2+e^x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}=\cos u\cdot(2x+e^x)=(2x+e^x)\cos(x^2+e^x)$$

自然指數函數的導數　　　下列公式是連鎖律的特例

(1) $\frac{d}{dx}e^{u}=e^{u}\cdot\frac{du}{dx}$ 或 (2) $\frac{d}{dx}e^{g(x)}=e^{g(x)}\cdot g'(x)$. 口訣：原整個自然指數照抄，乘次方的導數

說明：

(1) 由連鎖律 Type 2 得證 $\frac{de^{u}}{dx}=\frac{de^{u}}{du}\frac{du}{dx}=e^{u}\frac{du}{dx}$

(2) 由連鎖律 Type 1 得證，令 $f(u)=e^{u}$，則 $f'(u)=e^{u}$

$$\frac{d}{dx}e^{g(x)}=\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$$

例 4：口訣：$\frac{d}{dx}e^{\cos x}=\underbrace{e^{\cos x}}_{\text{指數照抄}}\cdot\underbrace{(\cos x)'}_{\text{次方微分}}=-\sin x\cdot e^{\cos x}$

連鎖律 Type 1 口訣：$\frac{d}{dx}\underbrace{e}_{\text{外}}^{\overbrace{\cos x}^{\text{內}}}=\underbrace{e^{\cos x}}_{\text{外微內留 仍然是}e^{\cos x}}\cdot\underbrace{(\cos x)'}_{\text{內微}}=-\sin x\cdot e^{\cos x}$

例：應用口訣計算。

(a) $\frac{d}{dx}e^{kx}=e^{kx}\cdot\frac{d}{dx}(kx)=ke^{kx}$

(b) $\frac{d}{dx}e^{x^2}=e^{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2)=2xe^{x^2}$

(c) $\frac{d}{dx}(e^{x}+x^{e}+e^{e}+e^{-x})=e^{x}+ex^{e-1}+0+e^{-x}(-x)'=e^{x}+ex^{e-1}-e^{-x}$

例 5：求 $\frac{d}{dt}\tan(5-\sin 2t)$ 。

解：連鎖律就像拆禮盒，逐層地拆(微分)，這裡要拆三層。重複使用連鎖律。

公式：$\overbrace{\frac{d}{dt}\tan(5-\sin 2t)=\frac{d\tan(5-\sin 2t)}{d(5-\sin 2t)}\underbrace{\frac{d(5-\sin 2t)}{dt}}_{\text{再用連鎖律}}}^{\text{連鎖律 }\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}=\sec^{2}(5-\sin 2t)\cdot(0-\cos 2t\cdot 2)$

口訣：$\frac{d}{dt}\underset{\text{外}}{\tan}\underbrace{(5-\sin 2t)}_{\text{內}}=\underset{\text{外微}}{\sec^{2}}\underbrace{(5-\sin 2t)}_{\text{內留}}\cdot\underbrace{(5-\sin 2t)'}_{\text{內微}}=\sec^{2}(5-\sin 2t)\cdot(0-\cos 2t\cdot 2)$

廣義冪法則(General Power Rule)。也是連鎖律的特例。

廣義冪法則： $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$ 或 $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$

說明：

設 $f(u)=u^n$、$u=g(x)$ 則 $f'(u)=nu^{n-1}$、$u'=g'(x)$，

連鎖律 $\frac{d}{dx}[g(x)]^n = \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x) = n[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$

或

$$\frac{d}{dx}u^n = \frac{du^n}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$$

注意：能用廣義冪法則計算的題目一定是冪次函數$(\quad)^n$的合成形式，也能用連鎖律。但很多題目例如$\sin(x^2+e^x)$等等，只能用連鎖律計算。

例題 6 是強調應用連鎖律口訣或廣義冪法則計算。

例 6a： $\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)^7$

解：

口訣：外函數$(\qquad)^7$，外函數微分為$7(\qquad)^{7-1}$。(如同u^7的微分結果為$7u^{7-1}$)

$$\frac{d}{dx}\overbrace{\underbrace{(5x^3-x^4)}_{\text{內}}{}^7}^{\text{外}} = \overbrace{7\underbrace{(5x^3-x^4)}_{\text{內留}}{}^{7-1}}^{\text{外微}}\cdot\underbrace{(5x^3-x^4)'}_{\text{內微}} = 7(5x^3-x^4)^6\cdot(15x^2-4x^3)$$

廣義冪法則：
$$\overbrace{\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)^7}^{\frac{d}{dx}[g(x)]^n} = \overbrace{7(5x^3-x^4)^{7-1}}^{n[g(x)]^{n-1}}\cdot\overbrace{(5x^3-x^4)'}^{g'(x)} = 7(5x^3-x^4)^6\cdot(15x^2-4x^3)$$

例 6b： $\frac{d}{dx}\frac{1}{3x-2}$　　$\frac{1}{3x-2}=(3x-2)^{-1}$

解：

口訣：
$$\frac{d}{dx}\overbrace{\underbrace{(3x-2)}_{\text{內}}{}^{-1}}^{\text{外}} = \overbrace{-\underbrace{(3x-2)}_{\text{內留}}{}^{-1-1}}^{\text{外微}}\cdot\underbrace{(3x-2)'}_{\text{內微}} = -(3x-2)^{-2}\cdot(3) = -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

廣義冪法則：
$$\overbrace{\frac{d}{dx}(3x-2)^{-1}}^{\frac{d}{dx}[g(x)]^n} = \overbrace{-(3x-2)^{-1-1}}^{n[g(x)]^{n-1}}\cdot\overbrace{(3x-2)'}^{g'(x)} = -(3x-2)^{-2}\cdot 3 = -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

倒數法則 $\frac{d}{dx}\frac{1}{v}=-\frac{v'}{v^2}$ ， $\frac{d}{dx}\frac{1}{3x-2}=-\frac{(3x-2)'}{(3x-2)^2}=-\frac{3}{(3x-2)^2}$

例 6c： $\frac{d}{dx}\sin^5 x$ $\qquad \sin^5 x=(\sin x)^5$

解：口訣： $\frac{d}{dx}\underbrace{\overbrace{(\sin x)^5}^{外}}_{內}=\underbrace{\overbrace{5(\sin x)^{5-1}}^{外微}}_{內留}\cdot\underbrace{(\sin x)'}_{內微}=5\sin^4 x\cdot\cos x=5\cos x\cdot\sin^4 x$

廣義冪法則： $\overbrace{\frac{d}{dx}(\sin x)^5}^{\frac{d}{dx}[g(x)]^n}=\overbrace{5(\sin x)^{5-1}}^{n[g(x)]^{n-1}}\cdot\overbrace{(\sin x)'}^{g'(x)}=5\sin^4 x\cdot\cos x=5\cos x\cdot\sin^4 x$

例 6 d ： $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{3x+1}}=\underbrace{e^{\sqrt{3x+1}}}_{指數照抄}\cdot\underbrace{\frac{d}{dx}(3x+1)^{1/2}}_{次方微分}=e^{\sqrt{3x+1}}\cdot\frac{1}{2}(3x+1)^{-1/2}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}e^{\sqrt{3x+1}}$

$\sqrt{4}\neq\pm 2$ ， $\sqrt{4}=2$ 是正值，注意 $\sqrt{x^2}=\sqrt{|x|^2}=|x|$ ，例如 $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{2^2}=2=|-2|$

例 7：試證 $\frac{d}{dx}|x|=\frac{x}{|x|}$ ， $\frac{d}{dx}|g(x)|=\frac{g(x)}{|g(x)|}\cdot g'(x)$

解：

口訣： $\frac{d}{dx}|x|=\frac{d}{dx}\underbrace{\overbrace{(x^2)^{1/2}}^{外}}_{內}=\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2}(x^2)^{-1/2}}^{外微}}_{內留}\cdot\underbrace{(x^2)'}_{內微}=\frac{1}{2(x^2)^{1/2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\frac{x}{|x|},\ x\neq 0$

廣義冪法則： $\frac{d}{dx}|x|=\overbrace{\frac{d}{dx}(x^2)^{1/2}}^{\frac{d}{dx}[g(x)]^n}=\overbrace{\frac{1}{2}(x^2)^{-1/2}}^{n[g(x)]^{n-1}}\cdot\overbrace{(x^2)'}^{g'(x)}=\frac{1}{2(x^2)^{1/2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\frac{x}{|x|},\ x\neq 0$

例 8：試證 $y=\frac{1}{(1-2x)^3}$ 的斜率恆為正。

解： $\frac{1}{(1-2x)^3}=(1-2x)^{-3}$

斜率 $m=\frac{d}{dx}\underbrace{\overbrace{(1-2x)^{-3}}^{外}}_{內}=\underbrace{\overbrace{-3(1-2x)^{-3-1}}^{外微}}_{內留}\cdot\underbrace{(1-2x)'}_{內微}=-3(1-2x)^{-4}\cdot(-2)=\frac{6}{(1-2x)^4}>0,\ x\neq\frac{1}{2}$

例：$\overbrace{\frac{d}{dx}[3x+(2x+1)^{-3}]^{1/4}}^{\frac{d}{dx}[g(x)]^n} = \overbrace{\frac{1}{4}[3x+(2x+1)^{-3}]^{-3/4}}^{n[g(x)]^{n-1}} \cdot \overbrace{[3x+(2x+1)^{-3}]'}^{g'(x)}$

$$= \frac{1}{4}[3x+(2x+1)^{-3}]^{-3/4}\cdot[3-3(2x+1)^{-4}(2)] = \frac{3}{4}[3x+\frac{1}{(2x+1)^3}]^{-3/4}[1-\frac{2}{(2x+1)^4}]$$

例：$\overbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9}^{\frac{d}{dx}[g(x)]^n} = \overbrace{9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8}^{n[g(x)]^{n-1}} \cdot \overbrace{\frac{d}{dx}\frac{x-2}{2x+1}}^{g'(x)}$ 開始看到是 $[g(x)]^n$ 形式，先用廣義冪法則或連鎖律

$$= 9\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^8 \cdot \frac{5}{(2x+1)^2} = \frac{45(x-2)^8}{(2x+1)^{10}}$$

分開處理不同階段的求導，旁邊以商法則計算 $g'(x)$

$$\frac{d}{dx}\frac{x-2}{2x+1} = \frac{(x-2)'\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot(2x+1)'}{(2x+1)^2} = \frac{1\cdot(2x+1)-(x-2)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

例：$\frac{d}{dx}[(2x+1)^5(x^3+2)^4] = [\frac{d}{dx}(2x+1)^5]\cdot(x^3+2)^4+(2x+1)^5\cdot[\frac{d}{dx}(x^3+2)^4]$. 積法則

$$=10(2x+1)^4\cdot(x^3+2)^4+(2x+1)^5\cdot 12x^2(x^3+2)^3$$

$$=10A^4B^4+12A^5B^3C = 2A^4B^3[5B+6AC]$$

$$=2(2x+1)^4\cdot(x^3+2)^3[5(x^3+2)+6(2x+1)\cdot x^2]$$ 合併整理

$$=2(2x+1)^4\cdot(x^3+2)^3(17x^3+6x^2+10)$$

旁邊計算

$$\frac{d}{dx}(2x+1)^5 = 5(2x+1)^{5-1}\cdot 2 = 10(2x+1)^4$$

$$\frac{d}{dx}(x^3+2)^4 = 4(x^3+2)^3(3x^2) = 12x^2(x^3+2)^3$$

---

(1) $\frac{d}{dx}\sin u(x) = \cos u(x)\cdot u'(x)$ (2) $\frac{d}{dx}\cos u(x) = -\sin u(x)\cdot u'(x)$

(3) $\frac{d}{dx}\tan u(x) = \sec^2 u(x)\cdot u'(x)$ (4) $\frac{d}{dx}\cot u(x) = -\csc^2 u(x)\cdot u'(x)$

(5) $\frac{d}{dx}\sec u(x)=\sec u(x)\cdot\tan u(x)\cdot u'(x)$ (6) $\frac{d}{dx}\csc u(x)=-\csc u(x)\cdot\cot u(x)\cdot u'(x)$

連鎖律 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ 概略證明：

對應於增量 Δx ，$u=g(x)$ 的增量為 $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$ ，

$y=f(u)$ 的增量為 $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$

$u=g(x)$ 連續， $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta u\to 0$ ，這裡假設 $\Delta u\neq 0$ ，

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ，所以

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

不看解答，請完整作答

例 2： $\frac{d}{dx}\cos(x^2+1)$

例 3：求 $\frac{d}{dx}\sin(x^2+e^x)$

例 5：求 $\frac{d}{dt}\tan(5-\sin 2t)$

例 6： $\frac{d}{dx}e^{\sqrt{3x+1}}$

例 6a： $\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)^7$

例 6b： $\frac{d}{dx}\frac{1}{3x-2}$

例： $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-2}{2x+1}\right)^9$

例： $\frac{d}{dx}[(2x+1)^5(x^3+2)^4]$

3.7 Implicit Differentiation 隱微分

顯函數與隱函數

形式為 $y=f(x)$ 的函數稱為顯函數(explicit function)。

例如 $y=3x-2$ 及 $y=\sin(2x+3)$ 是顯函數形式。

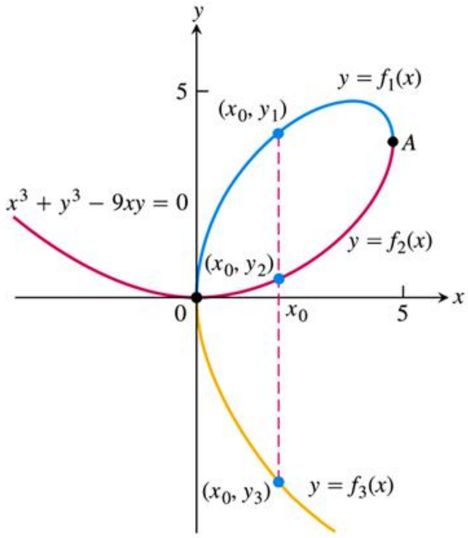
函數關係以方程式來定義，y 與 x 隱藏有函數關係，y 是 x 的隱函數(implicit function)。

例如

方程式 $x^3+y^3=9xy$，y 與 x 有函數關係，

但只能分段圖示為 $y=f_1(x),\ y=f_2(x),\ y=f_3(x)$，

無法將 y 表明為 x 單一函數式子。



方程式的求導技巧---隱微分

對方程式中隱函數求導數的過程稱為隱微分(implicit differentiation) 。

y' , $\dfrac{dy}{dx}$ 都是 y 的導數，$\dfrac{d}{dx}$ 是微分符號，不同意思。

例：導數的計算，比較差異。

(a) $\dfrac{d}{dx}x^3=3x^2$ ，(b) $\dfrac{d}{dy}y^3=3y^2$ ，(c) $\dfrac{d}{dx}y^3=3y^2y'$

(c) 設 $y=g(x)$，則依據廣義冪法則 $\dfrac{d}{dx}y^3=\overbrace{\dfrac{d}{dx}[g(x)]^3=3[g(x)]^2\cdot g'(x)}^{\text{chain rule or general power rule}}=3y^2\cdot y'$

或依據連鎖律 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$，得到 $\dfrac{d}{dx}y^3=\dfrac{dy^3}{dy}\dfrac{dy}{dx}=3y^2y'$ (有 y，微分後就一定有導數項 y')

例：導數的計算，比較差異。

(a) $\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ，(b) $\dfrac{d}{dy}\sin y=\cos y$ ，(c) $\dfrac{d}{dx}\sin y=\cos y\cdot y'$

(c) 設 $y=u(x)$，則 $\dfrac{d}{dx}\sin y=\overbrace{\dfrac{d}{dx}\sin u(x)=\cos u(x)\cdot u'(x)}^{\text{chain rule or formula}}=\cos y\cdot y'$

或依據連鎖律 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}\sin y=\dfrac{d\sin y}{dy}\dfrac{dy}{dx}=\cos y\cdot y'$

例 1： $y^2 = x$，以隱微分求 $\frac{dy}{dx}$。

解： $\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} x$　　　　$\frac{d}{dx} \neq \frac{dy}{dx}$，不可寫為 $\frac{dy}{dx}(x^2+y^2) = \frac{dy}{dx} 25$

$2y\frac{dy}{dx} = 1$　　　　連鎖律，有 y 就有 $\frac{dy}{dx}$

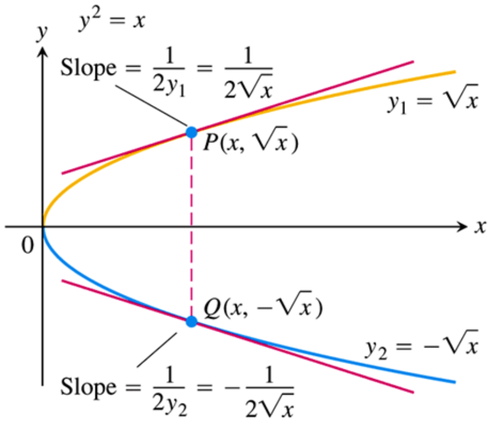
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$　　　　$\frac{dy}{dx}$ 常以 x 與 y 項表示

比較顯函數形式的微分結果：

$$y^2 = x \rightarrow y_1 = \sqrt{x},\ y_2 = -\sqrt{x}, \cdots$$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$$

$$y = -\sqrt{x} \rightarrow \frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} - \sqrt{x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$$



例 2：以隱微分求圓 $x^2 + y^2 = 25$ 在 $(3,-4)$ 的斜率。

解： $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}\ 2$　　　　$\frac{d}{dx} \neq \frac{dy}{dx}$，不可寫為 $\frac{dy}{dx}(x^2+y^2) = \frac{dy}{dx} 25$

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$　　　　連鎖律，有 y 就有 $\frac{dy}{dx}$

$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$　　　　含 $\frac{dy}{dx}$ 的項移到左邊，不含 $\frac{dy}{dx}$ 的項移到右邊

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$　　　　$\frac{dy}{dx}$ 常以 x 與 y 項表示

在 $(3,-4)$ 的斜率 $m = \left.\frac{-x}{y}\right|_{(3,-4)} = \frac{3}{4}$

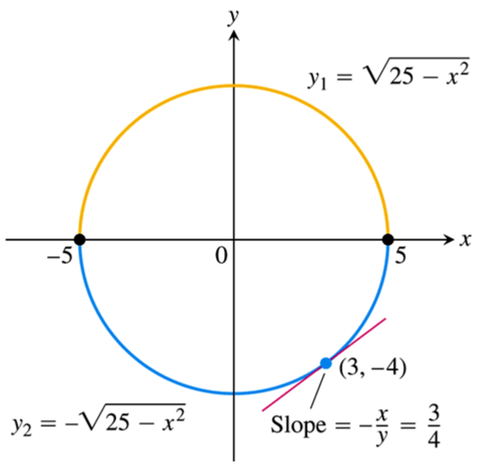
比較顯函數形式的微分結果：

$(3,-4)$ 在下半圓

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = -\sqrt{25 - x^2}$$

$$\frac{d}{dx} y = -\frac{d}{dx}\sqrt{25 - x^2} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

在 $(3,-4)$ 的斜率 $m = \left.\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\right|_{x=3} = \frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = \frac{3}{4}$



例 3： $y^2 = x^2 + \sin xy$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

解：

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin xy)$$ 方程式兩邊求導

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)\frac{d}{dx}(xy)$$ 左式用連鎖律，右式用和法則、連鎖律與積法則

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos xy)(1\cdot y + x\cdot\frac{dy}{dx})$$

$$2y\frac{dy}{dx} - x\cos xy\cdot\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$ 含 $\dfrac{dy}{dx}$ 的項移到左邊，不含 $\dfrac{dy}{dx}$ 的項移到右邊

$$(2y - x\cos xy)\frac{dy}{dx} = 2x + y\cos xy$$ 提出 $\dfrac{dy}{dx}$ ，因式整理

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos xy}{2y - x\cos xy}$$

例 5：求曲線 $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ 在 $(2,4)$ 的切線及法線方程式。

解：

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3 - 9xy) = \frac{d}{dx}0$$ 方程式兩邊求導

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - (9y + 9x\frac{dy}{dx}) = 0$$ 利用連鎖律與積法則

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 9x\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$ 含 $\dfrac{dy}{dx}$ 的項移到左邊，不含 $\dfrac{dy}{dx}$ 的項移到右邊

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 3(3y - x^2)$$ 提出 $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

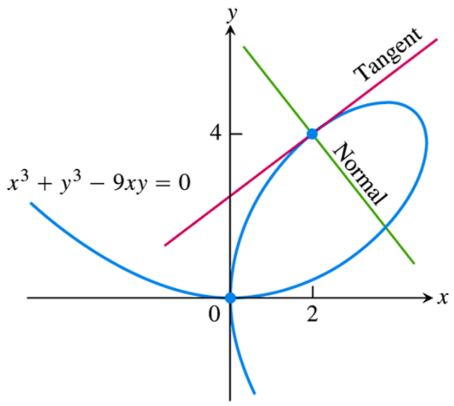
在 $(2,4)$ 的斜率 $m = \left.\dfrac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \dfrac{12-4}{16-6} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$

在 $(2,4)$ 的切線方程式 $y - 4 = \dfrac{4}{5}(x-2)$ 或 $y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{12}{5}$

兩直線若相互垂直，則兩直線斜率乘積為 -1 。

法線垂直切線，在 $(2,4)$ 的法線斜率 $m = -\dfrac{5}{4}$

在 $(2,4)$ 的法線方程式 $y - 4 = -\dfrac{5}{4}(x-2)$ 或 $y = -\dfrac{5}{4}x + \dfrac{13}{2}$



用隱微分求二階導數

例 4： $2x^3-3y^2=8$ ，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

解：

$\dfrac{d}{dx}(2x^3-3y^2)=\dfrac{d}{dx}8$ 方程式兩邊求導

$6x^2-6y\dfrac{dy}{dx}=0$ 利用連鎖律

$-6y\dfrac{dy}{dx}=-6x^2$ 含 $\dfrac{dy}{dx}$ 的項移到左邊，不含 $\dfrac{dy}{dx}$ 的項移到右邊

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y}$ 一階導數

$\dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^2}{y}$ 再次兩邊求導

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2xy-x^2\dfrac{dy}{dx}}{y^2}$ 商法則

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2xy-x^2\dfrac{x^2}{y}}{y^2}$ 帶入 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{y}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{2xy^2-x^4}{y^3}$ 同乘 $\dfrac{y}{y}$

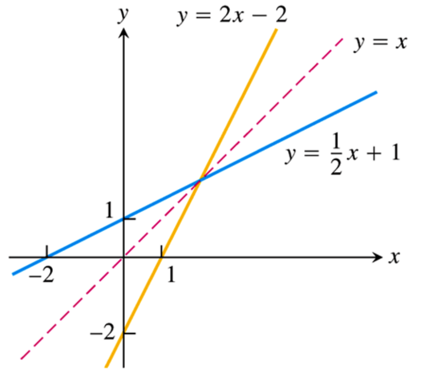
不看解答，請完整作答

例 3： $y^2=x^2+\sin xy$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 。

例 5：求曲線 $x^3+y^3-9xy=0$ 在 $(2,4)$ 的切線及法線方程式。

3.8 Derivatives of Inverse Functions and Logarithms 反函數及對數的導數

反函數的導數　　請先複習 1.6 節



The slopes are reciprocals of each other.

例： $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ 及其反函數 $f^{-1}(x)=2x-2$

兩者圖形對稱於直線 $y=x$

$f'(x)=\frac{1}{2}$ ， x 在 f 的定義域

$(f^{-1})'(x)=2$ ， x 在 f^{-1} 的定義域

函數及其反函數的導數(斜率)互為彼此的倒數(reciprocal)
此即定理 3。

定理 3：設 $f(a)=b$ ，若 $f'(a)\neq 0$ 存在，則 $(f^{-1})'(b)$ 存在且

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}=\frac{1}{f'(a)} \quad \text{或} \quad \left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b}=\frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}}$$

口訣：若 $f(a)=b$ ，兩導數 $(f^{-1})'(b)$ 及 $f'(a)$ 互為彼此的倒數(reciprocal)

說明：

要懂得透過合成，從原函數 f 來瞭解反函數 f^{-1}。

$f(f^{-1}(x))=x$ ，連鎖律 Type 1 $\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x))=\frac{d}{dx}x$ ， $f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1$

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ， $b=f(a)$ ，所以 $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}=\frac{1}{f'(a)}$

這例題是驗證定理 3 正確性。

例 1a： $f(x)=x^2,\ x\geq 0$ 及其反函數 $f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$

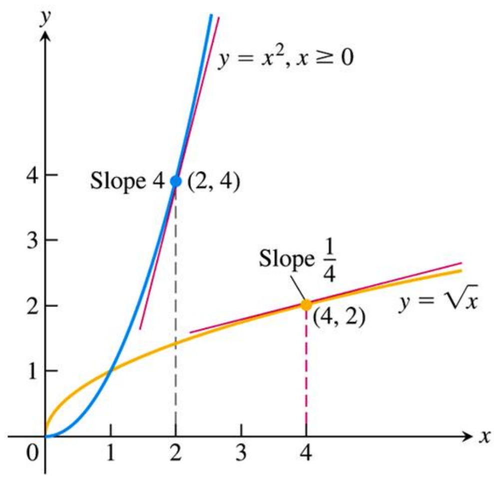
易知 $f'(x)=2x,\ x>0$

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$$

另一方面根據定理 3

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{f'(\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

兩者一樣。



例 1b 及例 2，這裡不求 f^{-1}，只根據定理 3 計算。

例 1b： $f(x)=x^2,\ x\ge 0$，根據定理 3 計算 $(f^{-1})'(4)$。

解： $f(a)=b$，$(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$， $f'(x)=2x,\ x>0$

$f(2)=$ ，$(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{2(2)}=\dfrac{1}{4}$

例 2： $f(x)=x^3-2$，求 df^{-1}/dx 在點 $x=6=f(2)$ 的值。

解：

$$\frac{df}{dx}=3x^2,\quad \left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=6}=\frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=2}}=\frac{1}{12}$$，因為 $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=2}=3x^2\Big|_{x=2}=3(4)=12$

即求 $(f^{-1})'(6)$，只是換個符號。

自然對數的導數

(1) $\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x},\ x>0$ 　(口訣： x 倒過來)

(2) $\dfrac{d}{dx}\ln g(x)=\dfrac{1}{g(x)}\cdot g'(x)=\dfrac{g'(x)}{g(x)},\ g(x)>0$ 　簡易口訣： $\dfrac{d}{dx}\ln(\text{內})=\dfrac{(\text{內})'}{\text{內}}$

說明：

(1) $e^{\ln x}=x$，$\dfrac{d}{dx}e^{\ln x}=\dfrac{d}{dx}x$，連鎖律 $e^{\ln x}\cdot\dfrac{d}{dx}\ln x=1$， $x\cdot\dfrac{d}{dx}\ln x=1$，得證 $\dfrac{d}{dx}\ln x=\dfrac{1}{x}$

(2) 令 $u=g(x)$，連鎖律 Type 2 $\dfrac{d}{dx}\ln u=\dfrac{d\ln u}{du}\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

或 　令 $f(u)=\ln u\Rightarrow f'(u)=\dfrac{1}{u}$

連鎖律 Type 1 $\dfrac{d}{dx}\underset{\text{外}}{\ln}\underset{\text{內}}{g(x)}=\dfrac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)=\underset{\text{外微內留}}{\dfrac{1}{g(x)}}\cdot\underset{\text{內微}}{g'(x)}$

例 3：(a) $\dfrac{d}{dx}\underbrace{\ln(2x)}_{\ln g(x)}=\underset{1/g(x)}{\dfrac{1}{2x}}\cdot\underset{g'(x)}{(2x)'}=\dfrac{1}{2x}\cdot 2=\dfrac{1}{x}$ 　口訣： $\dfrac{d}{dx}\ln(\text{內})=\dfrac{(\text{內})'}{\text{內}}$

(b) $\dfrac{d}{dx}\underbrace{\ln(x^2+3)}_{\ln g(x)}=\underset{1/g(x)}{\dfrac{1}{x^2+3}}\cdot\underbrace{(x^2+3)'}_{g'(x)}=\dfrac{1}{x^2+3}\cdot 2x=\dfrac{2x}{x^2+3}$ 　口訣： $\dfrac{d}{dx}\ln(\text{內})=\dfrac{(\text{內})'}{\text{內}}$

自然對數的導數

(3) $\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x},\ |x|\neq 0$　　(4) $\dfrac{d}{dx}\ln|g(x)|=\dfrac{g'(x)}{g(x)},\ |g(x)|\neq 0$

說明：

(3) $x>0$時即是公式 1。

$x<0$，$\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{d}{dx}\ln(-x)=\dfrac{1}{-x}\dfrac{d}{dx}(-x)=\dfrac{1}{-x}(-1)=\dfrac{1}{x}$

(4) 公式 3 與連鎖律口訣

例：$\dfrac{d}{dx}\ln|\cos x|=\dfrac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'=\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$

例 4：某一斜率m的直線通過點$(0,0)$且與$y=\ln x$相切，求此斜率m。

解：

看圖，通過原點的直線(切線)可設為$y=mx$。

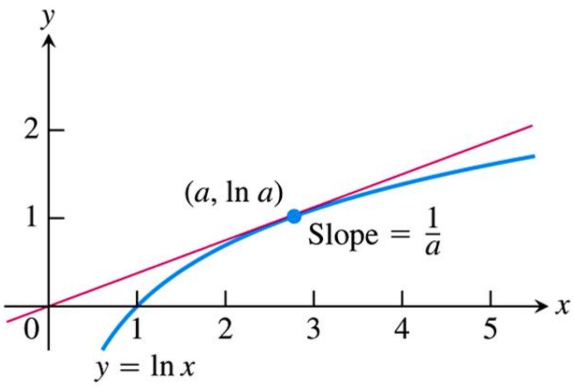
設此切線與$y=\ln x$在$(a,\ln a)$相切，此切線通過$(a,\ln a)$及$(0,0)$，其斜率$m=\dfrac{\ln a-0}{a-0}=\dfrac{\ln a}{a}$

$y=\ln x$的導數為$\dfrac{1}{x}$

故在$(a,\ln a)$的切線斜率為$m=\dfrac{1}{a}$

解$m=\dfrac{\ln a}{a}=\dfrac{1}{a}$，$\ln a=1$，故$a=e$

$m=\dfrac{1}{e}$



例：以對數性質先展開化簡，再求導數。(a) $y=\ln(x\sqrt{x^2+1})$　(b) $y=\ln\dfrac{(1-x)^{1/3}}{(1+5x)^{4/5}}$

解：

(a) $\ln(x\sqrt{x^2+1})=\ln x+\ln(x^2+1)^{1/2}=\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$

$y'=\dfrac{d}{dx}\ln x+\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\ln(x^2+1)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}$，　口訣：$\dfrac{d}{dx}\ln(\text{內})=\dfrac{(\text{內})'}{\text{內}}$

(b) $\ln\dfrac{(1-x)^{1/3}}{(1+5x)^{4/5}}=\ln(1-x)^{1/3}-\ln(1+5x)^{4/5}=\dfrac{1}{3}\ln(1-x)-\dfrac{4}{5}\ln(1+5x)$

$y'=\dfrac{1}{3}\dfrac{d}{dx}\ln(1-x)-\dfrac{4}{5}\dfrac{d}{dx}\ln(1+5x)=\dfrac{1}{3}\dfrac{-1}{1-x}-\dfrac{4}{5}\dfrac{5}{1+5x}=\dfrac{-1}{3(1-x)}-\dfrac{4}{1+5x}$，　$\dfrac{d}{dx}\ln(\text{內})=\dfrac{(\text{內})'}{\text{內}}$

一般指數的導數

(1) $\frac{d}{dx}a^x = a^x \cdot \ln a$　　(2) $\frac{d}{dx}a^{g(x)} = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

口訣：兩導數 $\frac{d}{dx}a^x$ 與 $\frac{d}{dx}e^x$ 差個 $\ln a$ 倍

註：當 $a=e$，$\frac{d}{dx}e^x = e^x \cdot \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$

說明：$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$；　$\ln a$ 是常數

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a} \cdot \frac{d}{dx}(x\ln a) = a^x \cdot \ln a \cdot \frac{d}{dx}x = a^x \cdot \ln a \cdot 1 = a^x \cdot \ln a$$

例 5a：$\frac{d}{dx}(3^x + 3^{-x}) = 3^x \cdot \ln 3 + 3^{-x} \cdot \ln 3 \cdot (-x)' = 3^x \cdot \ln 3 - 3^{-x} \cdot \ln 3$

例 5c：$\frac{d}{dx}3^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot (\sin x)' = 3^{\sin x} \cdot \ln 3 \cdot \cos x$

一般對數的導數

(1) $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$　　(2) $\frac{d}{dx}\log_a g(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{g'(x)}{g(x)}$

口訣：兩導數 $\frac{d}{dx}\log_a x$ 與 $\frac{d}{dx}\ln x$ 差個 $\frac{1}{\ln a}$ 倍

說明：換底 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$　；$\ln a$ 是常數

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

例：$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3x+1} \cdot (3x+1)' = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$

對數化微分法 (Logarithmic Differentiation)

函數在求導前，取對數用自然對數的性質先化到最簡項再求導，最後才整理答案。

注意： $\frac{d}{dx}\ln y=\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{y'}{y}$ 或 $\frac{d}{dx}\ln y=\frac{d\ln y}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\cdot y'$

例 6：對數化微分法求 $y=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1},\ x>1$ 的導數。

解：

step1：先對數化，用對數性質化簡

$$\ln y=\ln\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}=\ln[(x^2+1)(x+3)^{1/2}]-\ln(x-1)$$

$$=\ln(x^2+1)+\ln(x+3)^{1/2}-\ln(x-1)=\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(x+3)-\ln(x-1)$$

Step2： $\frac{y'}{y}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}$ ， $y'=y(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1})$

step3：整理答案 $y'=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1})$

例：證明冪法則 $\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$ 。

解： $x^n=e^{\ln x^n}=e^{n\ln x}$

$$\frac{d}{dx}x^n=\frac{d}{dx}e^{n\ln x}=e^{n\ln x}\cdot\frac{d}{dx}(n\ln x)=x^n\cdot n\frac{d}{dx}\ln x=x^n\cdot n\frac{1}{x}=nx^{n-1}$$

注意： $y=x^x$ 的微分不適用公式 $\frac{d}{dx}x^r=rx^{r-1}$ 、 $\frac{d}{dx}a^x=\ln a\cdot a^x$ 或 $\frac{d}{dx}e^x=e^x$

例 7： $f(x)=x^x,\ x>0$ ，求 $f'(x)$ 。

解： $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}e^{x\ln x}=e^{x\ln x}\cdot(x\ln x)'=e^{\ln x^x}(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=x^x(1+\ln x)$$

定理 4：Euler number $e=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$

證明：

已知 $\ln x$ 可微分，故也連續，極限可提進提出，且 $\ln 1=0$

令 $f(x)=\ln x$，$f'(x)=1/x$，$f'(1)=1$，

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+h)=\lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}=\ln\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$\ln\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=1$，兩邊同時取指數得到 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

不看解答，請完整作答

例 1b：$f(x)=x^2,\ x\ge 0$，根據定理 3 計算 $(f^{-1})'(4)$。

例 2：$f(x)=x^3-2$，求 df^{-1}/dx 在點 $x=6=f(2)$ 的值。

例 3：$\frac{d}{dx}\ln(2x)$　　$\frac{d}{dx}\ln(x^2+3)$　　例：$\frac{d}{dx}\ln|\cos x|$

例：以對數性質先展開化簡，再求導數。

(a) $y=\ln(x\sqrt{x^2+1})$　　(b) $y=\ln\frac{(1-x)^{1/3}}{(1+5x)^{4/5}}$

例 5a：$\frac{d}{dx}(3^x+3^{-x})$　　例 5c：$\frac{d}{dx}3^{\sin x}$

例：$\frac{d}{dx}\log_{10}(3x+1)$

例 6：對數化微分法求 $y=\frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1},\ x>1$ 的導數。

例 7：$f(x)=x^x,\ x>0$，求 $f'(x)$。

3.9 Inverse Trigonometric Functions 反三角函數

反三角函數請自行複習 1.6 節。

(1) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{du}{dx}$

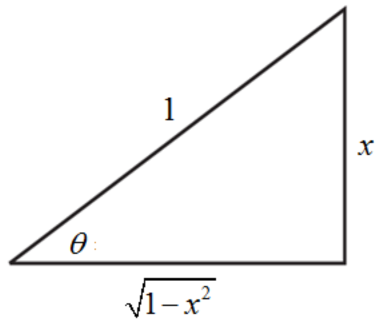
口訣：$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\text{內}=\frac{\text{內}'}{\sqrt{1-\text{內}^2}}$

說明：

設 $\theta=\sin^{-1}x$， $\sin\theta=x$，(作參考圖)

$$\frac{d}{dx}\sin\theta=\frac{d}{dx}x \quad (\text{隱微分})\Rightarrow \frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow \cos\theta\cdot\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=1\Rightarrow\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



例 2：$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\underbrace{(x^2)}_{\text{內}}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{內}^2}}\text{內}'=\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}(x^2)'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

例：$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{內}^2}}\text{內}'=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2}}}(\frac{1}{a})=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(1) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$ (2) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}u=\frac{1}{1+u^2}\cdot\frac{du}{dx}$

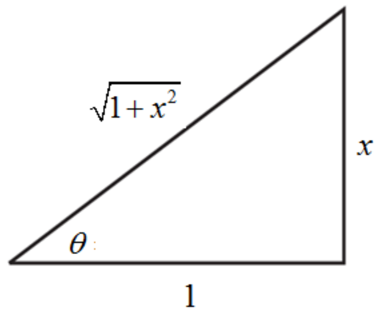
口訣：$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\text{內}=\frac{\text{內}'}{1+\text{內}^2}$

說明：

設 $\theta=\tan^{-1}x$， $\tan\theta=x$，(作三角形參考圖)

$$\frac{d}{dx}\tan\theta=\frac{d}{dx}x \quad (\text{隱微分})\Rightarrow \frac{d\tan\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow \sec^2\theta\cdot\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=1\Rightarrow\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{\sec^2\theta}=\cos^2\theta=\frac{1}{1+x^2}$$



習 34：$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\ln x)=\frac{1}{1+\text{內}^2}\text{內}'=\frac{1}{1+(\ln x)^2}(\ln x)'=\frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}$

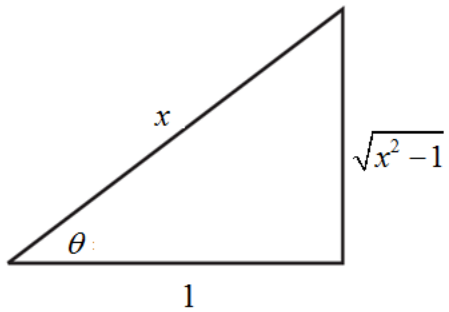
例：$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{1+\text{內}^2}\text{內}'=\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}(\frac{1}{a})=\frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}}\frac{1}{a}=\frac{a}{a^2+x^2}$

(1) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}},\ |x|>1$ (2) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}u=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\cdot\frac{du}{dx},\ |u|>1$

口訣：$\frac{d}{dx}\sec^{-1}\text{內}=\frac{\text{內}'}{|\text{內}|\sqrt{\text{內}^2-1}}$

說明：

設 $x>1$ 與 $\theta=\sec^{-1}x$，$\sec\theta=x$，(作三角形參考圖)



$$\frac{d}{dx}\sec\theta=\frac{d}{dx}x\ \text{(隱微分)}\Rightarrow\frac{d\sec\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}=\frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=1$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{\sec\theta\cdot\tan\theta}=\cos\theta\cdot\cot\theta=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

例 3：$\frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4)=\frac{1}{|\text{內}|\sqrt{\text{內}^2-1}}\text{內}'=\frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}(5x^4)'=\frac{20x^3}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}=\frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}$

例：$\frac{x}{a}>1,\ \frac{d}{dx}\sec^{-1}\frac{x}{a}=\frac{1}{\text{內}\cdot\sqrt{\text{內}^2-1}}\text{內}'=\frac{1}{\frac{x}{a}\cdot\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}}\left(\frac{x}{a}\right)'=\frac{1}{\frac{x}{a^2}\cdot\sqrt{x^2-a^2}}(\frac{1}{a})=\frac{a}{x\cdot\sqrt{x^2-a^2}}$

其他的反三角函數

$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$，$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{1+x^2}$，$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

不看解答，請完整作答

例 2： $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x^2)$

例： $\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}$

....

習 34： $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(\ln x)$

例： $\frac{d}{dx}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

....

例 3： $\frac{d}{dx}\sec^{-1}(5x^4)$

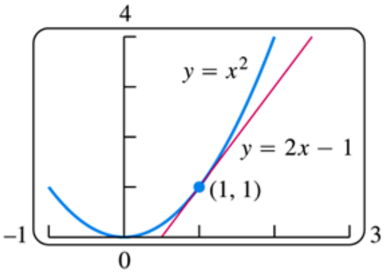
例： $\frac{x}{a}>1,\ \frac{d}{dx}\sec^{-1}\frac{x}{a}$

....

3.11　Linearization and Differentials 線性化與微分量

這節的內容想法，多變數函數也有類似推廣。要理解內容想法，不要只是背公式而已。

切線函數近似原函數 (2.1 曲線的切線)



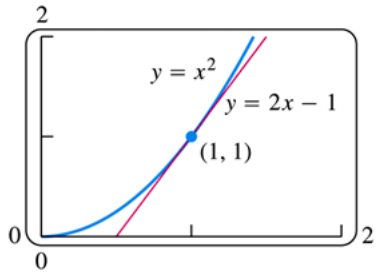


圖 1， $y=2x-1$是曲線 $y=x^2$ 在點 $(1,1)$ 的切線方程式

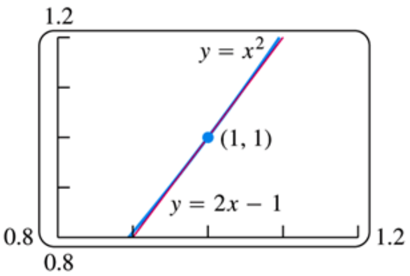
圖 2，在點 $(1,1)$ 的附近，將圖形顯微放大

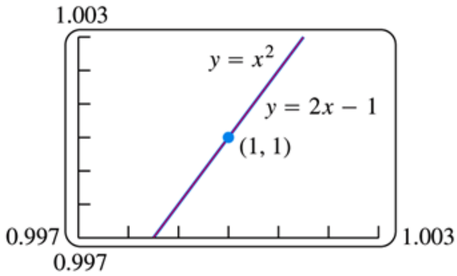
圖 3，在更接近點 $(1,1)$ 的附近，將圖形再度顯微放大

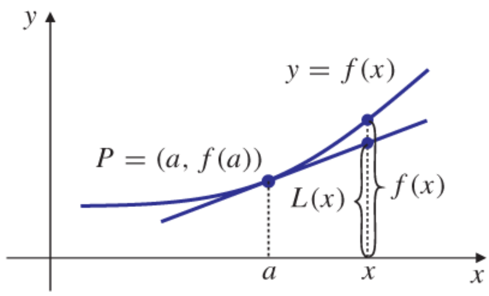
圖 4，在又更接近點 $(1,1)$ 的附近，將圖形又再度顯微放大，

切線 $y=2x-1$跟曲線 $y=x^2$ 幾乎重合而無法分辨，

此時想以切線 $y=2x-1$近似曲線 $y=x^2$







在點 $P(a, f(a))$ 的附近，切線貼合曲線，我們可用切線高度估計原函數 f 在 a 附近的值。

切線方程式 $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ 是線性的， f 在 a 附近的線性化就是 f 在 a 的切線函數。

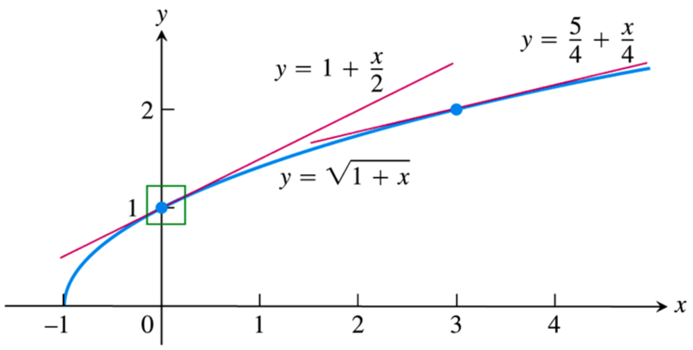
> 定義： $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ 稱為 f 在 a 的線性化(linearization)。
>
> $f(x)\approx L(x)$ 稱為 f 在 a 的線性近似(linear approximation)。

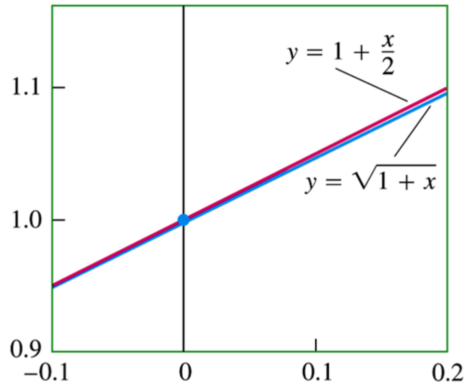
例 1：求 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 在點 $x=0$ 的線性化。

解：

$f'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ ； f 在 $x=0$ 的線性化為 $L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)=1+\dfrac{1}{2}x$

右圖是將左邊小框框圖形顯微放大的結果。





下表是 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 在點 0 附近的線性化估計值 $L(x)$ 、原函數實際值 $f(x)$ 及兩者之間誤差。

Approximation	**True value**	**|True value − approximation|**
$\sqrt{1.2}\approx 1+\dfrac{0.2}{2}=1.10$	1.095445	$<10^{-2}$
$\sqrt{1.05}\approx 1+\dfrac{0.05}{2}=1.025$	1.024695	$<10^{-3}$
$\sqrt{1.005}\approx 1+\dfrac{0.005}{2}=1.00250$	1.002497	$<10^{-5}$

例 2：求 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 在點 $x=3$ 的線性化。

解： $f'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ ； f 在 $x=3$ 的線性化為 $L(x)=f(3)+f'(3)(x-3)=2+\dfrac{1}{4}(x-3)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$

求 f 在 $x=3.2$ 的近似值，應該用 f 在 $x=3$ 的線性化 $L(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ 估計，即

$$f(3.2)\approx L(3.2)=\frac{1}{4}(3.2)+\frac{5}{4}=2.050$$

看上圖，從切線近似來看， $x=3.2$ 離 $x=0$ 太遠，

不應該用 f 在 $x=0$ 的線性化 $L(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ 估計。

模仿例題 1，可算出 $f(x)=(1+x)^k$ 在點 0 的線性化 $L(x)=1+kx$ 。即

$\boxed{x\approx 0 \text{時，} (1+x)^k \approx 1+kx \cdots (*)}$

例：利用線性近似 $(1+x)^k \approx 1+kx\cdots(*)$ ，可得到下列函數在點 0 附近的近似公式。

$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$ ，說明：$(*)$裡取 $k=1/2$ ，則 $\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}\approx 1+\frac{1}{2}x$

$\frac{1}{1-x}\approx 1+x$ ，說明：$(*)$裡取 $k=-1$ ，$-x$ 替代 x ，則 $\frac{1}{1-x}=(1+(-x))^{-1}\approx 1+(-1)(-x)=1+x$

$\sqrt[3]{1+5x^4}\approx 1+\frac{5}{3}x^4$ ，說明：取 $k=1/3$ ，$5x^4$ 替代 x ，則 $\sqrt[3]{1+5x^4}=(1+5x^4)^{1/3}\approx 1+\frac{1}{3}(5x^4)=1+\frac{5}{3}x^4$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\approx 1+\frac{x^2}{2}$ ，說明：取 $k=-1/2$ ，$-x^2$ 替代 x ，則

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1+(-x^2))^{-1/2}\approx 1+(\frac{-1}{2})(-x^2)=1+\frac{x^2}{2}$$

微分量(Differential)

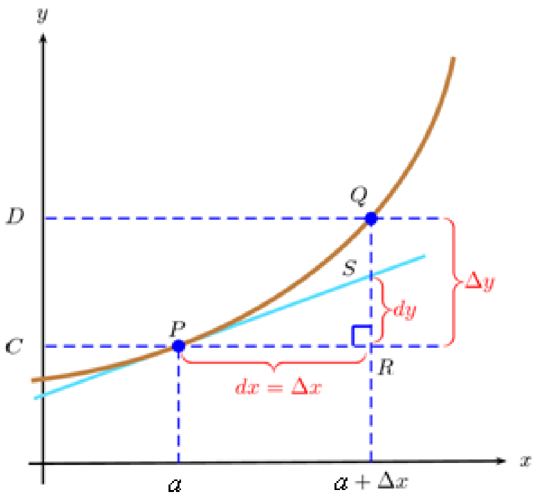
定義：x 的微分量 $dx=\Delta x$ 。

$y=f(x)$ ，y 的微分量 $dy=f'(x)dx$ 。 (dy 隨 x 與 dx 變動)

現賦予微分量 dy 、 dx 幾何上的意義，

如圖過點 P 的切線斜率 $\frac{dy}{dx}=\frac{RS}{PR}$ ；

直接令 $dx=\Delta x=PR$ ， $dy=RS$



例 4： $y=x^5+37x,\ x=1,\ dx=0.2$ ，求微分量 dy 。

解： $\frac{dy}{dx}=f'(x)=5x^4+37$

所以

$dy=f'(1)dx=(5\cdot 1^4+37)(0.2)=(42)(0.2)=8.4$

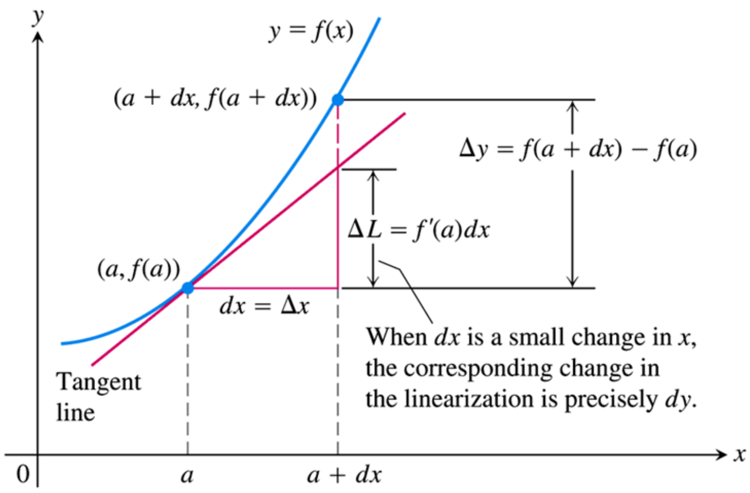
例 5a： $d\tan x=(\tan x)'\cdot dx=\sec^2 x\cdot dx$

例 5b： $d\,\frac{x}{x+1}=(\frac{x}{x+1})'\cdot dx=\frac{(x)'\cdot(x+1)-x\cdot(x+1)'}{(x+1)^2}\cdot dx=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot(1)}{(x+1)^2}\cdot dx=\frac{1}{(x+1)^2}\cdot dx$

微分量的應用

x 從 $x=a$ 變動到 $x=a+dx$ 時，原函數改變量 $\Delta y = f(a+dx)-f(a)$

線性化(切線函數)改變量 $\Delta L = L(a+dx)-L(a)$ ＝微分量 dy



近似公式： dx 夠微小時，

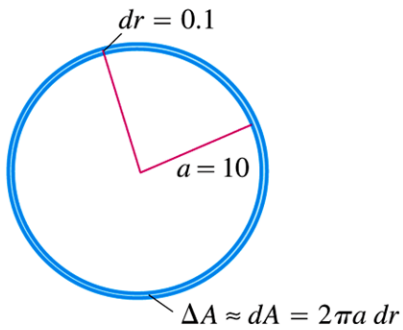
(1) $\Delta y \approx dy$ 或 $f(a+dx)-f(a)\approx f'(a)(x-a)$

(2) $f(a+dx)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$

你發覺近似公式與 f 在 a 的線性化講的是同一件事？用切線貼合曲線。

例6：一圓盤半徑從10m增為10.1m時，試以微分量 dA 估計面積 A 的改變量。
比較半徑10.1m時，面積的估計值及實際值。

解：



微分量近似公式的應用

面積 $A=\pi r^2$ ， $A'=2\pi r$ ，微分量 $dA = A'\cdot dr = (2\pi r)dr$

已知 $r=10,\ dr = 10.1-10 = 0.1$

以微分量估計面積的改變量 $\Delta A \approx dA = (2\pi\cdot 10)(0.1) = 2\pi\ m^2$

面積的估計值 $A(r+dr)\approx A(r)+A'(r)\cdot dr$ 或 $A(r+dr)\approx A(r)+d$

半徑 10.1m 時，面積的估計值 $A(10.1)\approx A(10)+2\pi = \pi(10)^2+2\pi = 102\pi\ m^2$

半徑 10.1m 時，面積的實際值 $A(10.1)=\pi(10.1)^2 = 102.1\pi\ m^2$ 。

例：利用 $\dfrac{df}{dg}=\dfrac{f'(x)dx}{g'(x)dx}$ ，得到 $\dfrac{d(x^3-3x+1)}{d(x^2+3x)}=\dfrac{(3x^2-3)dx}{(2x+3)dx}=\dfrac{3x^2-3}{2x+3}$

或用 $\dfrac{df}{dg}=\dfrac{df/dx}{dg/dx}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ，得到 $\dfrac{d(x^3-3x+1)}{d(x^2+3x)}=\dfrac{3x^2-3}{2x+3}$

微分量與可微分

3.2 節定義：導數 $f'(a)$ 存在，則稱為 f 在點 $x=a$ 可微分(differentiable)。
也就是在點 $P(a, f(a))$ 的切線貼合曲線 $y=f(x)$ 。

為銜接多變數函數的導數及可微分的觀念，這裡我們介紹下列結果。

> 若 f 在 $x=a$ 可微分，
> 則存在一數 ε 滿足 $\Delta f = f'(a)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x\cdots *$ ，這裡 $\varepsilon\to 0$ as $\Delta x\to 0$

ε 是什麼呢？ 我們從定義出發，找出 $\Delta f = f(a+\Delta x)-f(a)$ 與 $f'(a)$ 的關連性。

回顧定義： f 在 $x=a$ 可微分 $\Leftrightarrow$ 導數 $f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ 存在

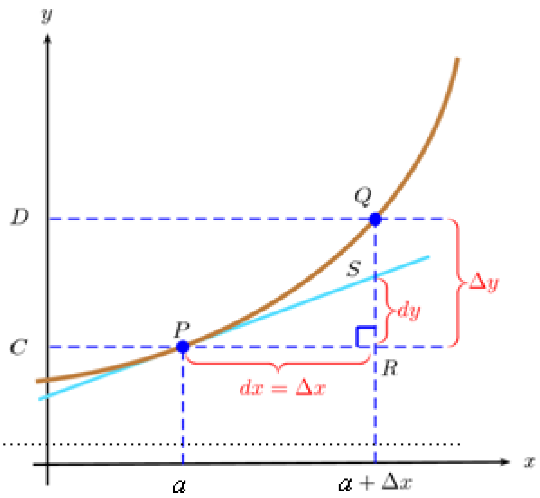
$\Delta x\approx 0$ 時，

存在一數 ε 滿足 $f'(a)+\varepsilon=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

移項得到

$$\varepsilon=\underbrace{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}}_{\text{割線}PQ\text{斜率}}-\underbrace{f'(a)}_{\text{切線斜率}}$$

故 ε 是割線 PQ 的斜率與切線斜率的差值



$$f'(a)+\varepsilon=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

整理得到

$$f(a+\Delta x)-f(a)=f'(a)\cdot\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x$$

$$\underbrace{f(a+\Delta x)-f(a)}_{\Delta f,\text{真正改變量}}=\underbrace{f'(a)\cdot\Delta x}_{df,\text{微分量}}+\underbrace{\varepsilon\cdot\Delta x}_{\Delta f-df}$$ ， $\varepsilon\cdot\Delta x$ 是曲線與切線的垂直距離差(Error) SQ

得到 $\Delta f = f'(a)\Delta x+\varepsilon\cdot\Delta x\cdots(*)$ ， $\varepsilon\to 0$ as $\Delta x\to 0$

可微分的意思就是 $\Delta x\to 0$ 時割線 PQ 的斜率與切線斜率的差值 $\varepsilon\to 0$ ，瞭解？

Sensitivity in Change 變化量的敏感度

變化量的敏感度是指 x 從 a 變動到 $a+dx$ 時如何衡量 f 變化量，有三種方式：

	True	Estimated
Absolute change	$\Delta f = f(a+dx) - f(a)$	$df = f'(a)\,dx$
Relative change	$\dfrac{\Delta f}{f(a)}$	$\dfrac{df}{f(a)}$
Percentage change	$\dfrac{\Delta f}{f(a)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(a)} \times 100$

有時候只看變化量是無法完整地瞭解變化量對函數有何意涵，需要配合函數值的大小來觀察。

例如，年度調薪時，某甲的時薪從 100 元調漲為 110 元，某乙時薪從 500 元調漲為 510 元；

兩人的時薪變化量同樣是 10 元，但若與原來薪資相比較時，甲是增加 $\dfrac{10}{100}=0.1$ 倍或 10%，

而乙只有微幅地增加 $\dfrac{10}{500}=0.02$ 倍或 2%。以調薪的幅度而言，甲是乙的 5 倍，意義不同。

這種相對的比例觀念，產生相對變化量(relative change)與百分變化量(percentage change)。

....

例 7：利用公式 $s=4.9t^2$ 計算井的深度。將一個沉重的石頭，自由掉落井裡，目測石頭飛濺進入水面的時間，若測量時間有 0.1 秒的誤差，試問對計算井的深度如何敏感呢？

解：

若測量時間誤差為 $dt=0.1$ 秒，

則井的深度誤差也就是絕對變化量 $ds=s'(t)dt=(9.8t)(0.1)=0.98t$ 公尺。

時間誤差為 $dt=0.1$ 秒，測量時間 t 愈大，則井的深度誤差也愈大。

井的深度百分變化量 $\dfrac{ds}{s}\times 100\% = \dfrac{0.98t}{4.9t^2}\times 100\% = \dfrac{1}{50t}\times 100\% = \dfrac{2}{t}\%$

時間誤差為 $dt=0.1$ 秒，測量時間 t 愈大，則井的深度百分變化量反而愈小。

例如

測量時間 t (秒)	井的深度 s (公尺)	絕對變化量 ds (公尺)	百分變化量 ds/s (%)
2	19.6	1.96	10%
5	122.5	4.9	4%

....

例 8：在 1830 年，法國生理學家 Jean Poiseuille 發現動脈每單位時間流過一橫截面的血液總容量V與血管半徑r的 4 次方成比例，公式$V = k \cdot r^4$，k是常數。

若半徑r減小 10%，試問對V的影響為何？

解：

沒指明哪一個變化量，但題意指明半徑r減小 10%，跟著採用百分變化量。

$$V = k \cdot r^4 \Rightarrow V' = 4kr^3 \Rightarrow dV = 4kr^3 \cdot dr$$

相對變化量 $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{4kr^3 \cdot dr}{kr^4} = 4\dfrac{dr}{r}$

百分變化量 $\dfrac{dV}{V} \times 100\% = 4\dfrac{dr}{r} \times 100\% = 4(\dfrac{dr}{r} \times 100\%) = 4(10\%) = 40\%$

若半徑r減小 10%，則動脈每單位時間流過一橫截面的血液總容量V減小 40%。

不看解答，請完整作答

例 1：求 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 在點 $x = 0$ 的線性化。

例 2：求 $f(x) = \sqrt{1+x}$ 在點 $x = 3$ 的線性化。

例 4：$y = x^5 + 37x,\ x = 1,\ dx = 0.2$，求微分量 dy。

例 5a：$d\tan x$

例 5b：$d\dfrac{x}{x+1}$

例6：一圓盤半徑從10m增為10.1m時，試以微分量dA估計面積A的改變量。

比較半徑10.1m時，面積的估計值及實際值。

例：$\dfrac{d(x^3 - 3x + 1)}{d(x^2 + 3x)}$

例 8：法國生理學家 Jean Poiseuille 發現動脈每單位時間流過一橫截面的血液總容量V與血管半徑r的 4 次方成比例，公式$V = k \cdot r^4$，k是常數。

若半徑r減小 10%，試問對V的影響為何？
