1. $\int_{\mathrm{e}^{-n\pi}}^{1}|[\cos(\frac{1}{x})]'|\ln\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$=________.

2. 设 $f(x)=x,g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$. 求 $F(x)=\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 连续, 在 $(0,\pi)$ 可导, 且 $\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\sin x\,\mathrm{d}x=0$, 证明:

$$\exists\xi\in(0,\pi)f'(\xi)=0$$

4. 设 $f(x)=\int_{-1}^x t|t|\,\mathrm{d}t$, 求曲线 $y=f(x)$ 和 x 轴所围图形的面积.

5. 证明:

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^\lambda x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cot^\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

6. 可微函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 处有定义, 其反函数 $g(x)$ 满足 $\int_1^{f(x)}g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$. 求 $f(x)$.

7. $f(x)$ 在 $(\infty,+\infty)$ 有界且导函数连续.$\forall x\in\mathbb{R},|f(x)+f'(x)|\leqslant 1$. 证明 $|f(x)|\leqslant 1$.

8. $f(x)$ 在 $[-L,L]$ 连续,$x=0$ 处可导,$f'(0)\neq 0$.

   (a) 证明:

$$\forall 0<x<L\exists 0<\theta<1\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$$

   (b) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

9. 证明:

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi^3}{4}$$

10. 证明:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$