1. 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 为收敛为 0 的正项数列. 求:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\alpha_n)-f(x_0-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$$

2. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在. 求:
$$\lim_{n\to\infty}[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})]$$

3. 设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, 且 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-\mathrm{e}^{-x}$, 若 x_0 和 0 都是它的极值点. 则它们是极大值还是极小值?

4. 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 具有连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=+\infty$以及$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=-\infty$.
$\forall x\in(a,b), f'(x)+f^2(x)\geqslant -1$, 则问 $b-a$ 与 π 的大小关系.

5. 设 $a>0, b>0$. 证明:
$$2ab\leqslant e^{a-1}+a\ln a+e^{b-1}+b\ln b$$

6. 设有实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 其中 $a_1<a_2<\cdots<a_n$. 函数 $f(x)$ 在 $[a_1,a_n]$ 上有 n 阶导数, 且 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$. 证:
$$\forall c\in[a_1,a_n],\text{存在}\xi\text{使得}f(c)=\frac{(c-a_1)(c-a_2)\cdots(c-a_n)}{n!}f^{(n)}(\xi)$$

7. 已知 $\varphi(x)$ 可导, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(x)$ 单调递减.
   (a) $\forall x\in(0,1), \varphi(1)x<\varphi(x)<\varphi'(0)x$.
   (b) 若 $\varphi(1)\geqslant 0, \varphi'(0)\leqslant 1, \forall x_0\in(0,1), x_n=\varphi(x_{n-1})$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 二阶可导, $|f(x)|\leqslant 1, f(-2)=f(0)=f(2), [f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$. 证明:
$$\exists\xi\in(-2,2)\text{使}f(\xi)+f''(\xi)=0$$

9. 已知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 有连续三阶导数. 证明:
$$\exists\xi\in(-1,1)\text{ 使 }\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0)$$