

定义 设 α , β 是同一过程中的两个无穷小,且 $\alpha \neq 0$.

- (1) 如果 $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = 0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作
- $\beta = o(\alpha);$
 - (2) 如果 $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = \infty$,则称 β 是比 α 的低阶无穷小;
 - (3) 如果 $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = C(C \neq 0)$,则称 β 与 α 是同阶的无穷小;特殊地 如果 $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = 1$,则称 β 与 α 是等价的无穷小;

记作 $\alpha \sim \beta$;

如果 $\lim_{\alpha^k} \frac{\beta}{\alpha^k} = C(C \neq 0, k > 0)$,就说 β 是关于 α 的

k阶的无穷小.

1 已知极限
$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{x^k} = c$$
, 其中 k,c 为常数,

解由于

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1 + x^2}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2(1 + x^2)} = \frac{1}{3}$$

于是
$$x \to 0$$
 时, $x - \arctan x$ 关于 x 为三阶无

穷小,因此
$$k=3$$
 ,利用罗比达法则可求出 $c=\frac{1}{3}$

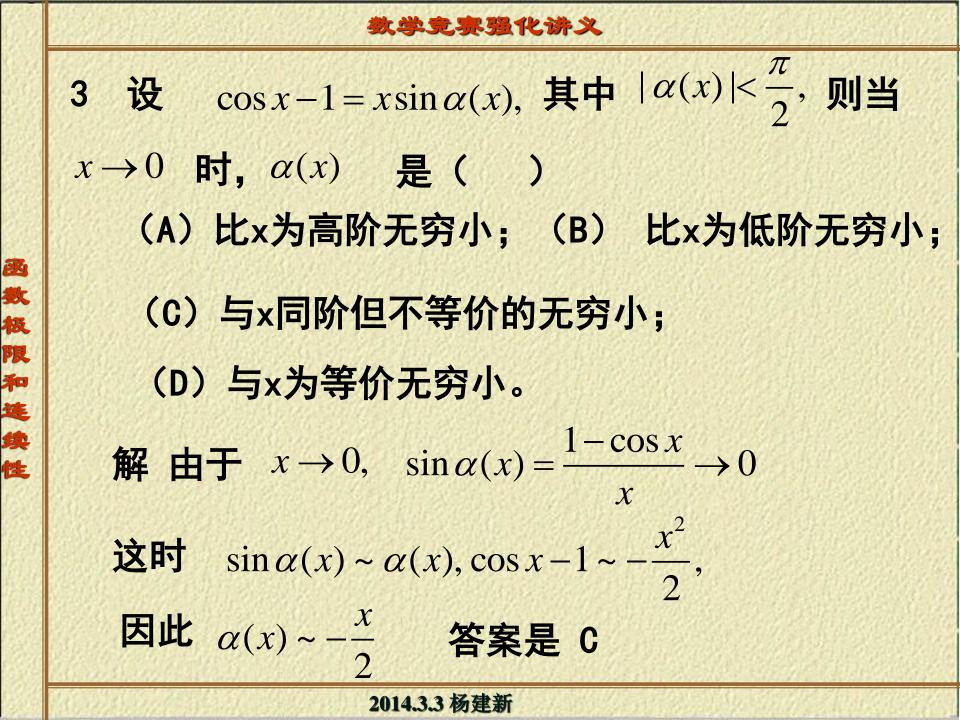
无穷小,则下列式子中错误的是(

A $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$. **B** $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

C $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$. **D** $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

2 当 $x \to 0$ 时,用 o(x) 表示比x为高阶的

答案是 D



4 当 $x \to 0$ 时, $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小,求 n 与 a 的值。

$$\mathbf{fil} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{ax^n} =$$

 nax^{n-1}

 $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos 2x \cos 3x + 2\cos x \sin 2x \cos 3x}{nax^{n-1}}$$

$$3\cos x \cos 2x \sin 3x$$

由于当
$$n=2$$
 时, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos 2x \cos 3x}{nax^{n-1}} = \frac{1}{2a}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\cos x \sin 2x \cos 3x}{nax^{n-1}} = \frac{4}{2a}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\cos x \cos 2x \sin 3x}{nax^{n-1}} = \frac{9}{2a}$$

于是
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{ax^n} = \frac{7}{a}$$

故
$$a=7$$
 ax^n a

当
$$n \neq 2$$
 时,不合题意,于是 $a = 7, n = 2$.

5 设
$$\alpha(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{\sin x} (1+t)^{-t} dt$$

则当 $x\to 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的().

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5}{(1 + \sin x)^{\frac{1}{\sin x}} \cdot \cos x} = \frac{5}{e}$$

6 当 $x \to 0$ 时,无穷小量

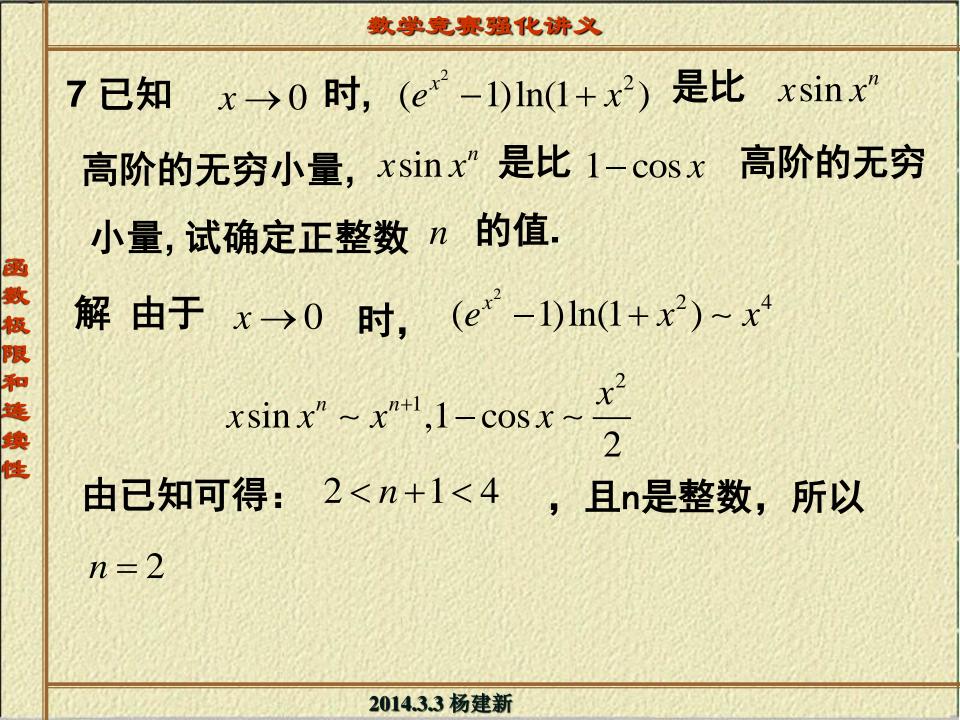
$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 + \sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2 + \sqrt[5]{x}}$$
 关于x的阶为_____。

#:
$$\sqrt[5]{x^2 + \sqrt[3]{x}} = x^{\frac{1}{15}} \left(1 + x^{\frac{5}{3}} \right)^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{1}{15}} \left[1 + \frac{1}{5} x^{\frac{5}{3}} + o\left(x^{\frac{5}{3}}\right) \right]$$

$$\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[5]{x}} = x^{\frac{1}{15}} \left(1 + x^{\frac{9}{5}} \right)^{\frac{3}{3}} = x^{\frac{1}{15}} \left[1 + \frac{1}{3} x^{\frac{9}{5}} + o \left(x^{\frac{9}{5}} \right) \right]$$

$$\therefore f(x) = x^{\frac{1}{15}} \left[\frac{1}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3} x^{\frac{9}{5}} + o \left(x^{\frac{5}{3}} \right) - o \left(x^{\frac{9}{5}} \right) \right]$$

是关于x的
$$\frac{1}{15} + \frac{5}{3} = \frac{26}{15}$$
 阶



8 已知函数
$$f(x) = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x}$$
, 记 $a = \lim_{x \to 0} f(x)$

(II) 当
$$x \to 0$$
 时, $f(x) - a$ 与 x^k 为同阶无穷小,

求常数 k 的值.

$$\mathbf{R} \qquad a = \lim_{x \to 0} \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x+x^2 - \sin x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2x - \cos x}{2x} = 1$$

(II) 因为
$$f(x) - a = \frac{1+x}{\sin x} - \frac{1}{x} - 1 = \frac{x+x^2 - \sin x - x \sin x}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a}{x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 - \sin x - x \sin x}{x^{k+2}}$$

$$1 + 2x - \cos x - \sin x - x \cos x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2x - \cos x - \sin x - x \cos x}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 + \sin x - 2\cos x + x\sin x}{(k+2)(k+1)x^k} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 3\sin x + x\cos x}{(k+2)(k+1)kx^{k-1}}$$

所以当
$$k=1$$
 时,有 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-a}{x^k} = \frac{1}{6}$ 此时 $x\to 0$,

f(x)-a 与 x 为同阶无穷小



利用两个重要极限公式
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$$

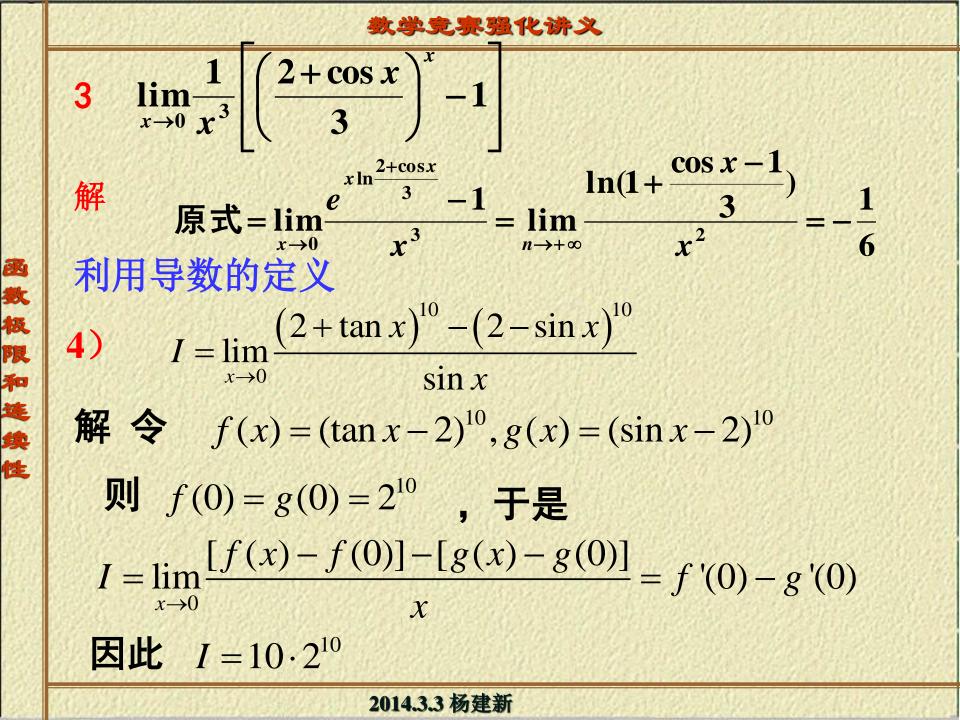
$$\lim_{x \to +\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^x = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)^{\frac{1}{\cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \cdot (\cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1) \cdot x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1) \cdot x = \lim_{x \to +\infty} (-\frac{1}{2x}) \cdot x = -\frac{1}{2} \quad \therefore \text{ if } \vec{x} = e^{-\frac{1}{2}}$$

2 设常数
$$a \neq \frac{1}{2}$$
 ,则

$$\lim_{n \to \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \underline{\hspace{1cm}}$$

原式=
$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \left[1 + \frac{1}{n(1-2a)} \right]^{n(1-2a)\cdot \frac{n}{n(1-2a)}} \right\} = \frac{1}{1-2a}$$



5) 设函数f(x)在x = a可导,

$$I = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}{f(a)} \right]^{\frac{f(a)}{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}}$$

$$= e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

$$= e^{\frac{f(a)}{f(a + \frac{1}{n}) - f(a)}}$$

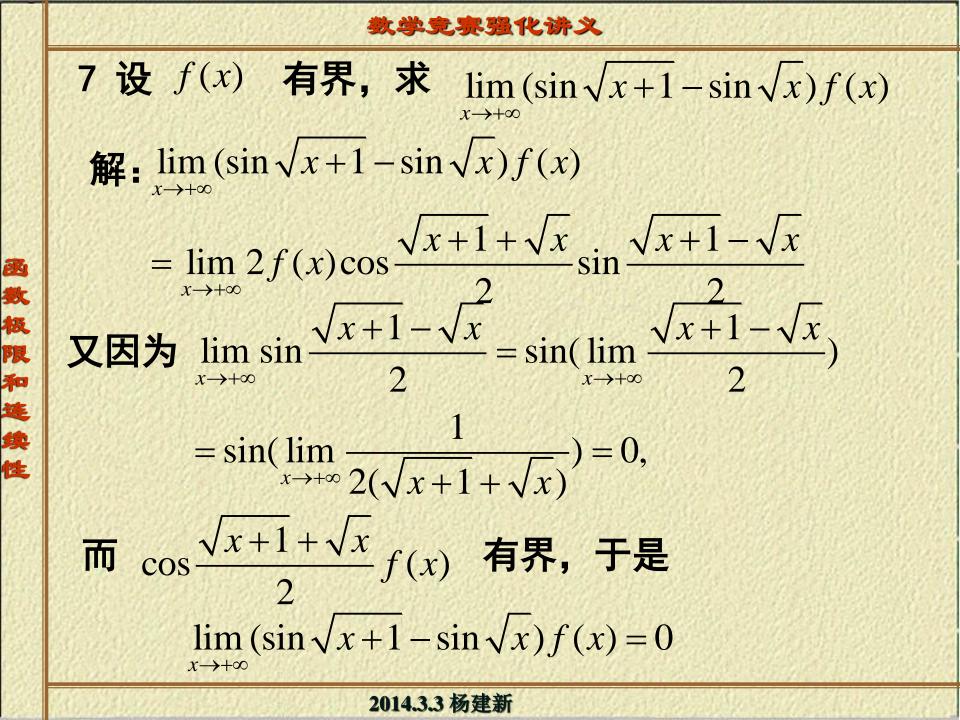
分子或分母有理化, 罗必达法则等

6
$$\Re \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$$

P
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x \ln(1 + x) - x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{[x \ln(1+x) - x^2][\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}]}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x) - x} \qquad = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{1 + x} - 1} = -\frac{1}{2}$$



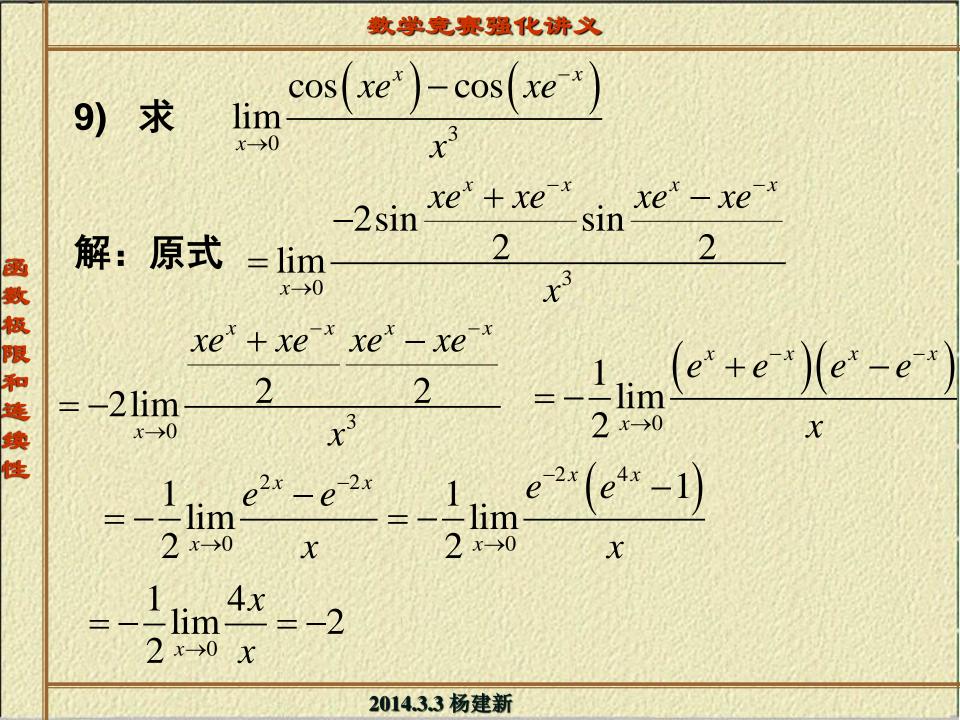
8) 求 $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}$ $2\sin\frac{(x+\sin x)}{2}\sin\frac{(x-\sin x)}{2}$

解: 原式= $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{(x+\sin x)}{2}\sin\frac{(x-\sin x)}{2}}{x^4}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{(x+\sin x)}{2} \cdot \frac{(x-\sin x)}{2}}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} (1 + \frac{\sin x}{x}) (\frac{x-\sin x}{x^3})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2 \cdot 3x^2} = \frac{1}{6}$$

注意 使用三角变换公式



$$\mathbf{10)} \ \ \mathbf{x} \lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

解: 由拉格朗日定理得 $e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\xi} (\tan x - \sin x)$. 其中 ξ 在 $\sin x$ 与 $\tan x$ 之间,当 $x \to 0$ 时 $\xi \to 0, e^{\xi} \to 1$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\xi} \left(\tan x - \sin x\right)}{x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x (1 - \cos x)}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \frac{x^2}{2}}{x - \sin x} = 3$$

方法二 使用等价无穷小和洛比达法则

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\tan x} - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} \left(e^{\tan x - \sin x} - 1\right)}{x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} =$$

泰勒公式求极限:

解: 由麦克劳林公式得:

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\tan(\tan x) = \tan x + \frac{(\tan x)^3}{3} + o(x^3)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \left(x + \frac{x^3}{3} \right)^3 + o(x^3) = x + \frac{2}{3} x^3 + o(x^3)$$

是票强化讲义

2014.3.3 杨建新

数学克赛强化讲义「1

12)
$$\mathbf{x} \lim_{x \to 0} \left[\frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{\sin x} + \left(\frac{3 - e^x}{2 + x} \right)^{\csc x} \right]$$

$$\text{#: } \because \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x^2} \right) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{3 - e^x}{2 + x} \right)^{\csc x} = \lim_{x \to 0} \exp \left(\csc x \cdot \ln \frac{3 - e^x}{2 + x} \right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x \to 0} \frac{\frac{-e^x}{3 - e^x} - \frac{1}{2 + x}}{\cos x}\right) = \frac{1}{e} \qquad \qquad \boxed{\mathbb{R}} \vec{\Xi} = \frac{1}{e}$$

2014.3.3 杨建新

14) 求
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + ... + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$$
 , 其中n是自然数。

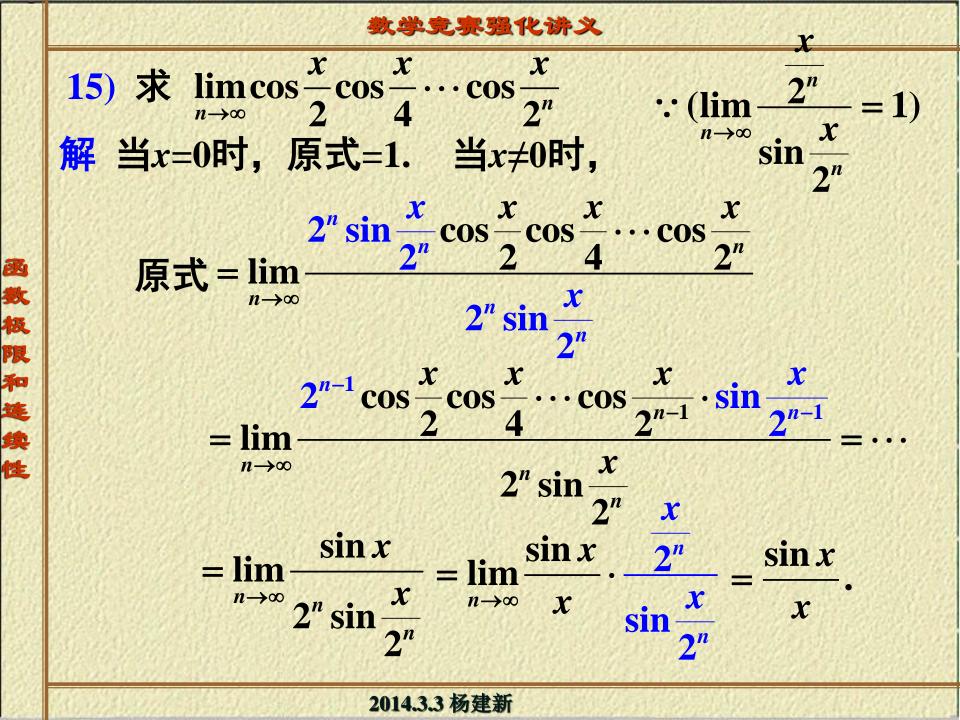
解: 原式 =
$$\lim_{x \to 0} e^{\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}) - \ln n}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}) - \ln n}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + ... + e^{nx}) - \ln n}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}} = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

原式 =
$$e^{\frac{n+1}{2}}$$



16
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^{-}} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{-x} \right) = 2 - 1 = 1,$$

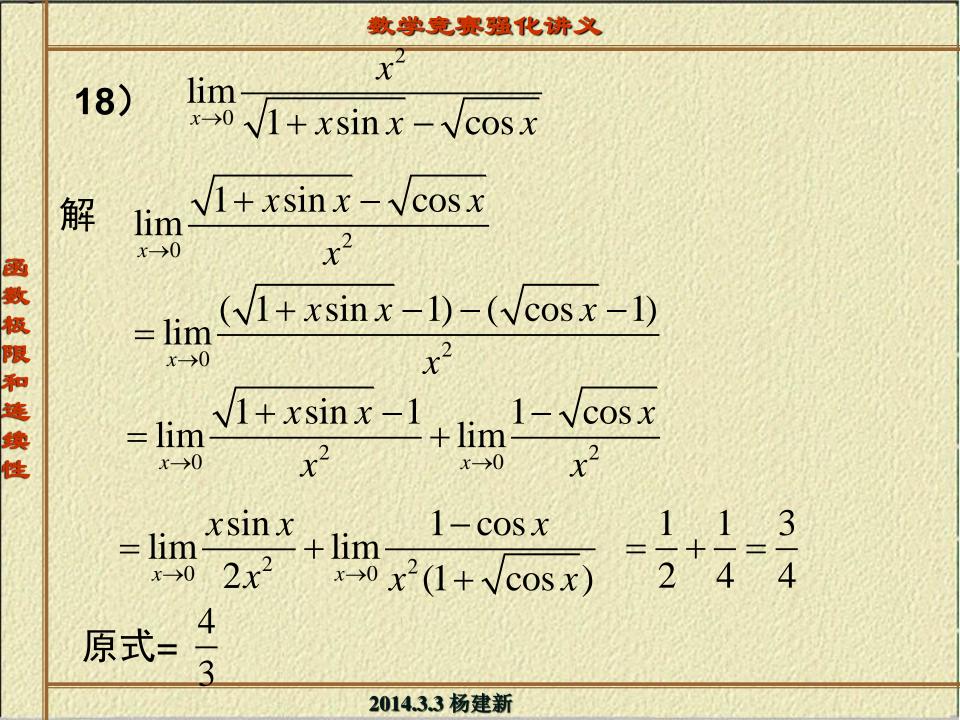
$$\lim_{x \to 0^{+}} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 0 + 1 = 1.$$

17) 求 $\lim_{n\to\infty} \left[n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right] e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6}$.

$$\frac{1}{2}e^t - \frac{3t}{\sqrt{1+46}}$$

 $t\rightarrow 0^+$

$$I = \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\left(1 - t + \frac{1}{2}t^{2}\right)e^{t} - \sqrt{1 + t^{6}}}{t^{3}} = \lim_{t \to 0^{+}} \frac{\frac{1}{2}t^{2}e^{t} - \frac{3t^{5}}{\sqrt{1 + t^{6}}}}{3t^{2}}$$



19 设函数 f(x) 连续,且 $f(0) \neq 0$,求

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}.$$

解 原式= $\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du} (分母令x - t = u)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)} \quad (应用洛必达法则)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)}$$
(应用洛必达法则)

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ (\xi \to 0)}} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)}$$

$$\xi$$
在 0 和 x 之间)

(用积分中值定理:

$$= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

20)
$$\Re \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)\ln^q(x+1) - x\ln^q x}{\ln^q x}$$

$$\mathbf{f} \mathbf{f} \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)\ln^q(x+1) - x\ln^q x}{\ln^q x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x[\ln^q(x+1) - \ln^q x]}{\ln^q x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^q(x+1)}{\ln^q x}$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x[\ln^q(x+1)-\ln^q x]}{\ln^q x}$$

$$\ln^{q}(x+1) - \ln^{q} x = \left[\ln(1+\frac{1}{x}) + \ln x\right]^{q} - \ln^{q} x$$

$$= \ln^{q} x \left[\left[1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x} \right]^{q} - 1 \right] = \ln^{q} x \left[e^{q \ln(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x})} - 1 \right]$$

$$\sim q \ln^{q} x \ln(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x}) \sim q \ln^{q} x \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln x} \sim \frac{q \ln^{q} x}{x \ln x}$$

等价代换得
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)\ln^q(x+1) - x\ln^q x}{\ln^q x}$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^q x}\frac{q\ln^q x}{x\ln x} =1+\lim_{x\to+\infty}\frac{q}{\ln x}=1$$

2014.3.3 杨建新

1+e^x
(A) 可去间断点; (B) 跳跃间断点; (C) 无穷间断点; (D) 震荡间断点.

 $f(0+0) = (-2) \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi, f(0-0) = -\frac{\pi}{2}$

1 设 $f(x) = \frac{1 - 2e^{\frac{1}{x}}}{1} \arctan \frac{1}{x}$, 则 x = 0 是 f(x) 的___B

2 求下面函数的间断点并指出其类型.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - 4)}{\sin \pi x} & x \le 0\\ \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} & x > 0 \end{cases}$$

解 因为初等函数在其定义域内是连续的,所以函数 f(x) 只能在 $x=1, x=0, x=-1, -2, -3\cdots$, 这些没定义点 处间断,显然这些点都是间断点.

因为 $x \rightarrow -1, -3, -4, \dots, -n, \dots$ 时, $f(x) \rightarrow \infty$,

所以它们为无穷间断点; 即第二类间断点。

2014.3.3 杨建新

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = 2,$$

故 x=1 为可去间断点;

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x(x^2 - 4)}{\sin \pi x} = \frac{8}{\pi},$$

故 x = -2 为可去间断点;

曲于
$$\lim_{x \to 0^{+}} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^{2} - 1)}{x - 1} = 0.$$

$$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x(x^{2} - 4)}{\sin \pi x} = -\frac{4}{\pi}.$$

$$x=0$$
 为跳跃间断点.



3 求函数 $f(x) = (1+x)^{\tan(x-\frac{\pi}{4})}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的

间断点,并判断其类型.

解: f(x) 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点是使 $\tan(x-\frac{\pi}{4})$

为0或为 ∞ 的点即 $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

因为 $f(\frac{\pi}{4}+) = f(\frac{5\pi}{4}+) = \infty$ 而 $\lim_{x \to \frac{3}{4}\pi} f(x) = \lim_{x \to \frac{7}{4}\pi} f(x) = 1$

因此 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ 是第二类间断点. $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ 为可去间断点

4 函数
$$f(x) = \frac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$$
 的可去间断点的

个数是()

解 函数的间断点为 x = 0, x = -1, x = 1,

$$\lim_{x \to 0+} |x|^x = \lim_{x \to 0+} x^x = e^{\lim_{x \to 0+} x \ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^{-}} |x|^{x} = \lim_{x \to 0^{-}} (-x)^{x} = e^{\lim_{x \to 0^{-}} x \ln(-x)} = e^{0} = 1$$

于是 $\lim_{x\to 0} |x|^x = 1$

$$x \to 0, |x|^x - 1 = e^{x \ln|x|} - 1 \sim x \ln|x|$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \ln|x|}{x(x+1) \ln|x|} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$x \to 1, |x|^{x} - 1 = e^{x \ln|x|} - 1 \sim x \ln|x|$$

于是
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1) \ln|x|} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow -1, |x|^{x} - 1 = e^{x\ln|x|} - 1 \sim x \ln|x|$$

$$x \ln|x|$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x \ln|x|}{x(x+1) \ln|x|} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$

因此可去间断点有两个。

5 设函数
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1 - \cos x}}, & x < 0 \\ \frac{1}{x} [\ln x - \ln(x + x^2)], & x > 0 \end{cases}$$

sinax

当x→0时的极限存在,求a的值.

解
$$f(0-) = -\sqrt{2}a$$
, $f(0+) = -1$, 故 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$$\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} \sim \frac{ax}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}} \to -\sqrt{2}a$$

$$\frac{1}{x}[\ln x - \ln(x+x^2)] = -\frac{1}{x}\ln(1+x) \to -1$$

45

是票强化讲义 6 设 f(x) 在 x=0 处具有二阶导数,且有 $\lim_{x \to 0} \frac{x^4 f(x) + \ln(1 + x^2) - x^2}{x^6} = \frac{2}{3}, \quad$ 解: 因 $\frac{x^4 f(x) + \ln(1+x^2) - x^2}{x^6} = \frac{2}{3} + \alpha$, 其中 $\lim_{x \to 0} \alpha = 0$ **D** $f(x) = -\frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4} + \frac{2}{3}x^2 + \alpha x^2,$ **于是,** $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = -\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4} = \frac{1}{2},$ $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x^2 + \frac{1}{2}x^4}{x^5}$ **枚** $f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 2\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = \frac{2}{3}$ 2014.3.3 杨建新

7 求满足方程 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$

的函数 f(x) ,其中 $f(0) = a, f(\frac{\pi}{2}) = b$

解以 $(x,y) = (0,u), (u + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, u + \frac{\pi}{2})$ 分别

代入原方程,可得含 $f(u), f(-u), f(u+\pi)$ 的方程组

 $\begin{cases} f(u) + f(-u) = 2a\cos u &$ **然后解出** $\\ f(u+\pi) + f(u) = 0 & f(u) = a\cos u + b\sin u \\ f(u+\pi) + f(-u) = -2b\sin u &$ **即** \end{cases}

 $f(x) = a\cos x + b\sin x$

8 设 f(x) 在(0,1)上有定义,且 $e^x f(x)$ 与 $e^{-f(x)}$

在(0,1)上都是单调不减,求证: f(x) 在(0,1)上连续.

证明 首先对任意 $a \in (0,1)$,及 a < x < 1,因

 $e^a f(a) \le e^x f(x) \Leftrightarrow e^{a-x} f(a) \le f(x),$

又 $e^{-f(a)} \le e^{-f(x)}$. 有 $f(a) \ge f(x)$. 因此

 $e^{a-x}f(a) \le f(x) \le f(a),$

而 $\lim_{x\to a+} e^{a-x} f(a) = f(a)$,由夹逼准则得 f(a+) = f(a)

同理, f(a-)=f(a). 由此推出 f(x) 在(0,1)上连续.

(有界)闭区间上连续函数性质

有界性、最值性、介值性与根的存在(零点)定理.

关于根的存在性证明问题,一般考虑三种方法:

- (1)直接运用最大值最小值定理与介值定理;
- (2)先将结论(或满足条件的等式)中的ξ(或根)换成变

量x,再移项使一边为0,作辅助函数 f(x)

然后运用零点定理导出结论;

(3)用反证法证明.

1 设 f(x) 在R上连续,且 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$,求证: $\exists \xi \in R$ 使得 $f(\xi) + \xi = 0$

证明: 令 F(x) = f(x) + x , 则

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} x \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} x \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right] = +\infty$$

 $\therefore \exists N > 0$ 使得 F(N) > 0, F(-N) < 0, 由零点定理得: $\exists \xi \in R$ 使得 $F(\xi) = 0$

即 $f(\xi)+\xi=0$

证明:任取一点 a_{i} 若 $f(a) = a_{i}$ 则已满足要求. 现设

 $f(a) = b \neq a$, f(b) = a . g(x) = f(x) - x 连续,

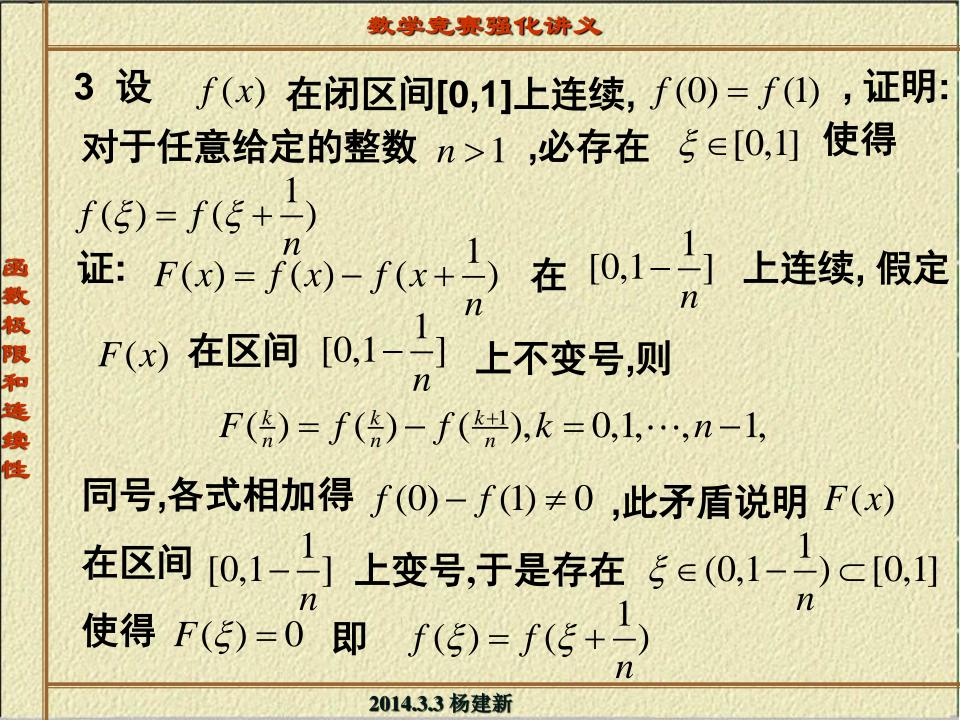
2 设函数 f(x) 在(- ∞ ,+ ∞)内连续,且 f(f(x)) = x.

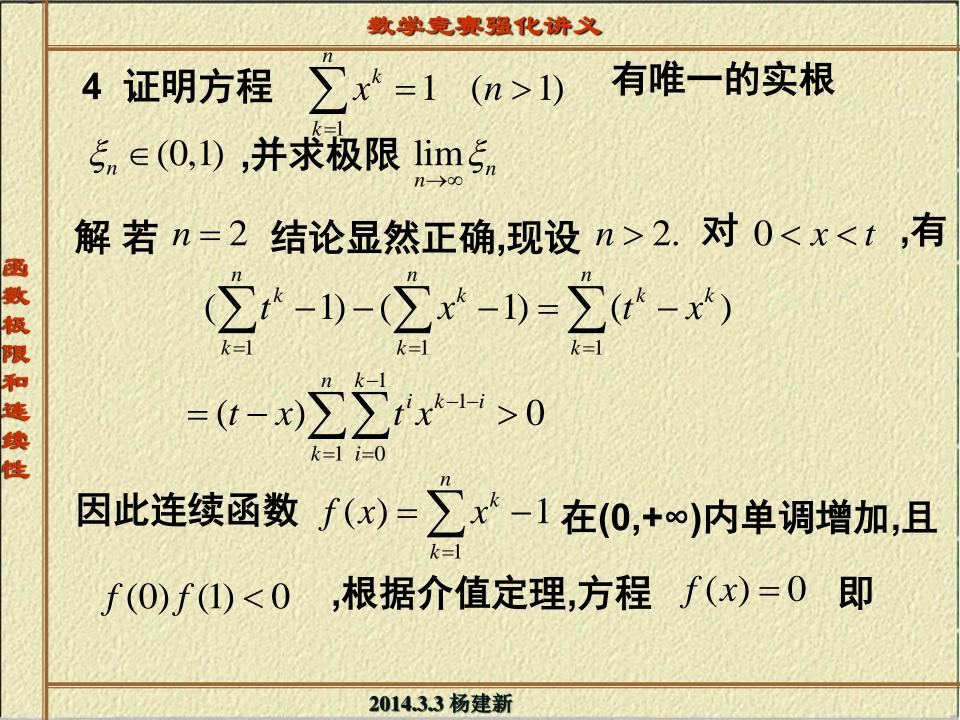
证明 在(- ∞ ,+ ∞)内至少有一个 x_0 满足 $f(x_0) = x_0$

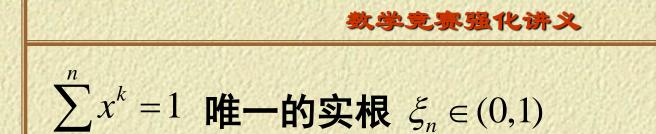
且 g(a)=b-a 与 g(b)=a-b 异号,根据介值定理,

在a与b之间至少有一点 x_0 使得 $g(x_0)=0$ 即

 $f(x_0) = x_0$ 命题得证.





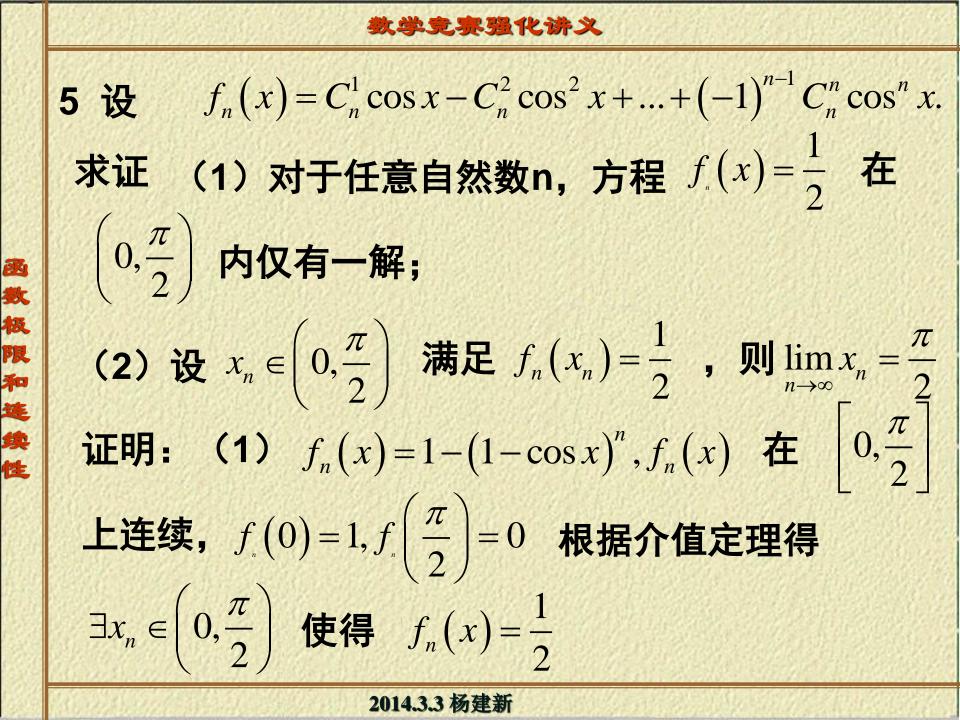


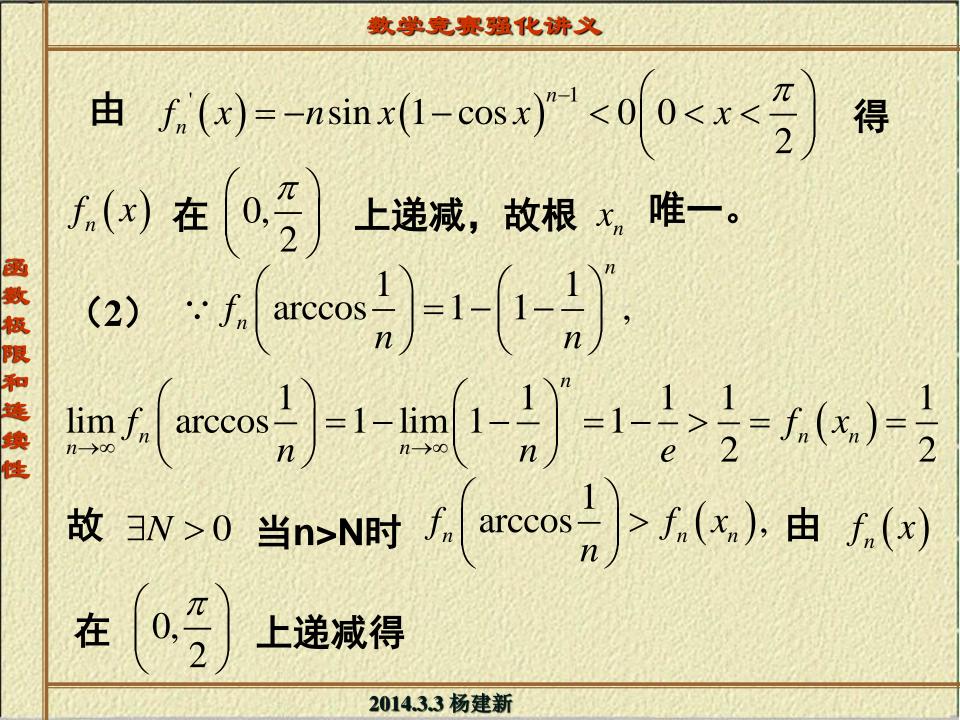
少的数列,事实上 $\sum_{k=1}^{n} \xi_{n}^{k} = 1, \sum_{k=1}^{n+1} \xi_{n+1}^{k} = 1$, 两式相减得 $\xi_{n+1}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\xi_{n+1}^{k} - \xi_{n}^{k})$ $= \xi_{n+1}^{n+1} + (\xi_{n+1} - \xi_{n}) \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{k-1} \xi_{n+1}^{k} = 0,$

其次,数列 $\{\xi_n\}$ 显然是有界数列.下证 $\{\xi_n\}$ 是单调减

最后由 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\xi_{n}^{k}=1$ 得 $\frac{a}{1-a}=1$,于是 $a=\frac{1}{2}$ 2014.3.3 核建新

由此得 $\xi_{n+1} - \xi_n < 0$.





$$\arccos \frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$$

$$1 \qquad \pi \qquad \pi$$

$$\sum_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} : \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$$

6 求函数
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$$
 的表达式。

解: 当
$$|x| < 1$$
 时, $f(x) = 1$;

当
$$|x| > 2$$
 时, $f(x) = \frac{x^2}{2} \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n} = \frac{x^2}{2};$

当
$$1 < x < 2$$
 时, $f(x) = x \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x;$

当 -2 < x < -1 时,若n为偶数

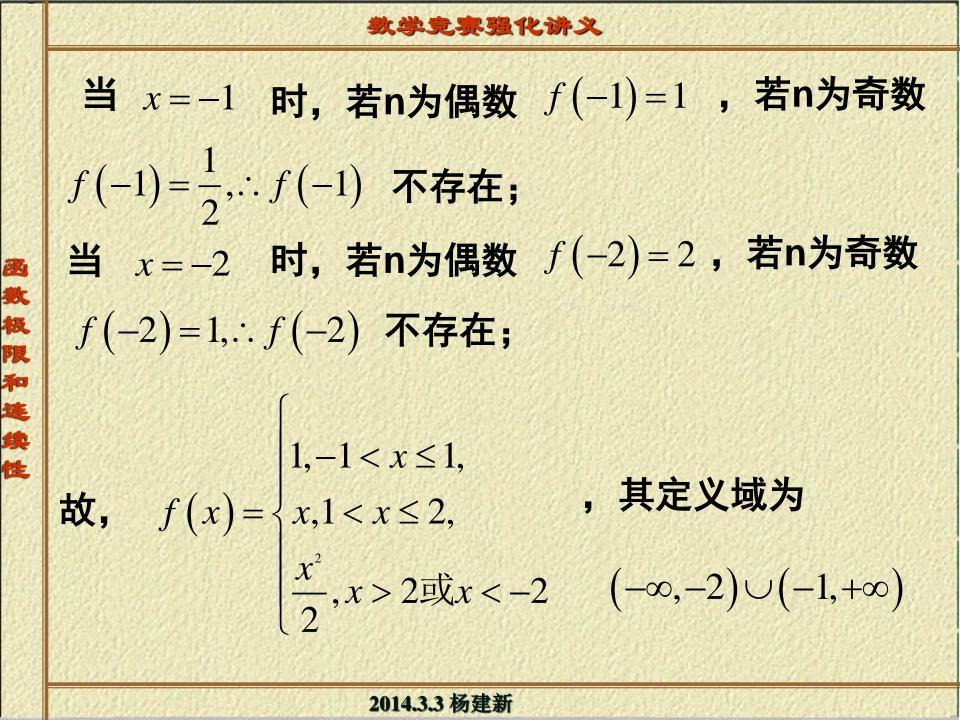
$$f(x) = -x \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = -x,$$

若n为奇数
$$f(x) = x \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n} + \left(\frac{x}{2}\right)^n} = x,$$

2014.3.3 杨建新

当 -2 < x < -1 时该极限不存在,即 f(x) 不存在;

$$\chi$$
 $f(1) = 1, f(2) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{n+1}} = 2$



7 求函数 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2n+1} + 1}{x^{2n+1} - x^{n+1} + x}$

(n 为正整数)的间断点,并判别其类型.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < |x| < 1; \\ 2, & x = 1; \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

x=0 为第二类(无穷间断点).

x=-1 为第一类(跳跃)间断点,

x=1 为第一类间断点(可去)

数学竞赛强化讲义 $\frac{2\arctan x - \ln\frac{1+x}{1-x}}{x^n} = C \neq 0$, 试确 8 已知极限 lim $x\rightarrow 0$ 定常数 n,C 的值。 $\mathbf{R} \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ $= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right] + \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]$ $=2x+\frac{2}{3}x^{3}+o(x^{3})$ $\therefore \arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ 2014.3.3 杨建新

原式
$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3))}{x^n}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x^n} = C$$

可知:
$$n=3, c=-\frac{4}{3}$$

9 设
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt, & x \neq 0 \\ c & x = 0 \end{cases}$$
, 其中 $f(x)$

有连续导数, f(0) = 0 (1) 确定, 使 F(x) 连续;

(2) 在F(x) 连续时, F'(x) 是否连续?

解: (1)
$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2} = \frac{1}{2}f(0) = 0$$
 $c = 0$ 时, $F(x)$ 连续;

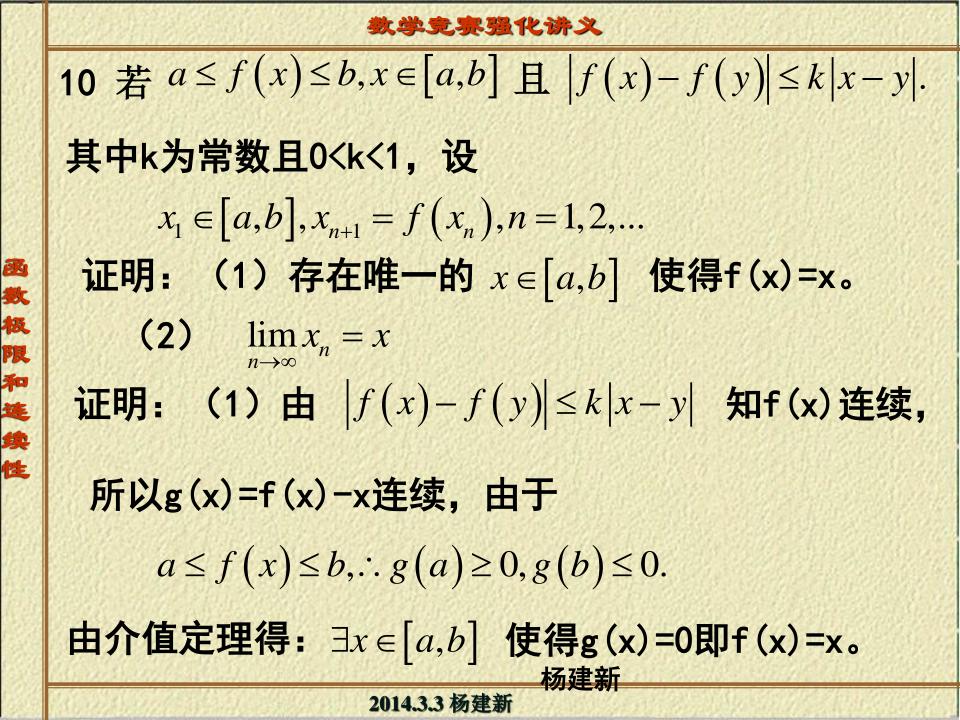
(2)
$$\exists x \neq 0$$
 $\exists f'(x) = \frac{x^2 f(x) - 2 \int_0^x t f(t) dt}{x^3}$

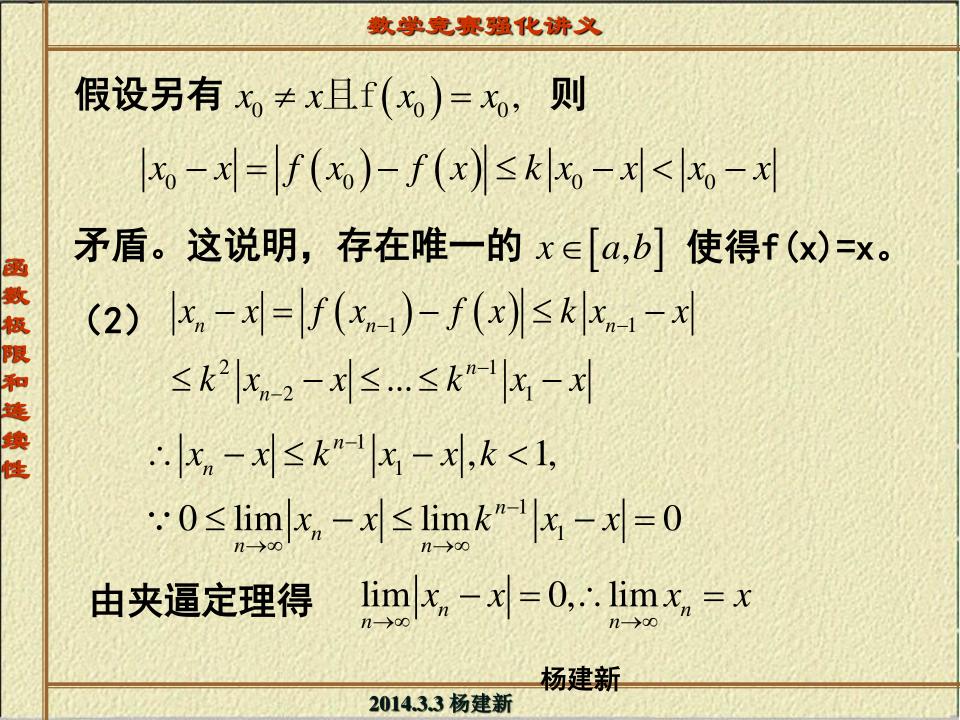
$$\lim_{x \to 0} F'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{3} = \frac{1}{3} f'(0)$$

$$X \quad F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{3x} = \frac{1}{3}f'(0)$$

所以F'(x)也连续.





是票强化讲义 11 若函数f(x) 单调,并且 $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$ 证明 对于

任何实数 C > 0 都有 $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(Cx)}{f(x)} = 1$

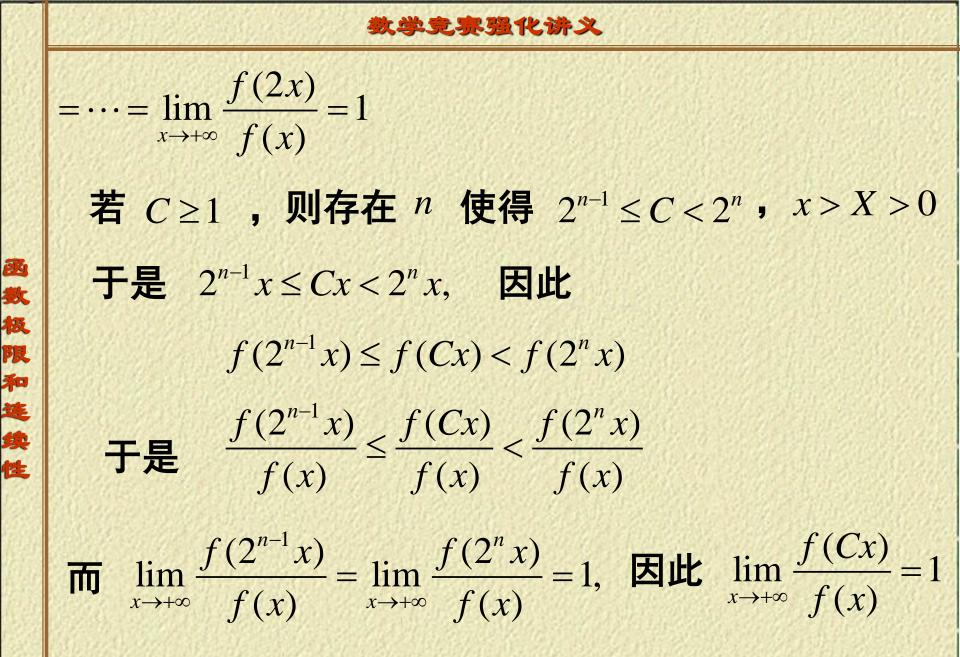
证明 不妨设 f(x) 严格单调增加。则存在X>0, 使得 f(x) 在 $[X,+\infty)$ 上不改变符号。因此不妨设 f(x)>0

若 $C=2^n$,则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1} x)} \frac{f(2^{n-1} x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(22^{n-1}x)}{f(2^{n-1}x)} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)}$$

2014.3.3 杨建新



2014.3.3 杨建新

当
$$0 < C < 1$$
 , 令 $x = \frac{y}{C}$, 于是

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(Cx)}{f(x)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{f(y)}{f(\frac{1}{C}y)} = \frac{1}{\lim_{y \to +\infty} \frac{f(\frac{1}{C}y)}{f(y)}} = 1$$