# 高等数学竞赛讲义

## 数列极限

### 利用单调有界数列必有极限准则

准则I　　单调有界数列必有极限

单调增加有上界数列必有极限

单调减少有下界数列必有极限

2014 3.3 杨建新

极限与连续

1） 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，$n=1, 2, \cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

解 因 $0<x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}<2$，$n=1, 2, \cdots$，

又 $$x_{n+1}-x_n=1+\frac{x_n}{1+x_n}-x_n$$

$$=1+\frac{x_n}{1+x_n}-(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})}$$

表明$x_{n+1}-x_n$与$x_n-x_{n-1}$同号，即$x_{n+1}-x_n$定号，故$\{x_n\}$单调，由单调有界原理，$\{x_n\}$收敛。记

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\beta\geq 0$$

对 $x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$ 求极限，则有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{1+x_n}\right)=1+\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{1+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}$$

$$\beta=1+\frac{\beta}{1+\beta}\qquad\qquad \beta+\beta^2=1+2\beta$$

$$0\le\beta=\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

2） $0<x_1<1$， $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ ，$n=1, 2, \cdots$ ，

证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

解　因　$0<x_1<1$，$n=k$ 时仍有 $0<x_k<1$，

$$0<x_{k+1}=x_k(1-x_k)<1$$

由归纳法，数列$\{x_n\}$ 有界。

$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)-x_n=-x_n^2<0$ ，$n=1, 2, \cdots$ ，

数列$\{x_n\}$ 单调减。由单调有界原理，知$\{x_n\}$收敛，记

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\beta\geq 0$$

极限与连续

对 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n$=1, 2, ⋯，求极限，得

$$0\le\beta=\beta(1-\beta)$$

由此解得$\beta$ = 0，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta=0$

3） 设 $x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\sqrt{3+2x_n}$，$n$ =1, 2, ⋯，

证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限。

证 因 0<$x_1$< 3，设$n$ = $k$ 时有 0<$x_k$<3，于是

$$0<x_{k+1}=\sqrt{3+2x_k}<\sqrt{3+6}=3$$

由归纳法，数列$\{x_n\}$ 有界。又

$$x_2 - x_1 = \sqrt{3+2x_1} - \sqrt{2} = \frac{1+2x_1}{\sqrt{3+2x_1}+\sqrt{2}} > 0$$

设n =k 时，有$x_{k+1}-x_k>0$，则有

$$x_{k+2} - x_{k+1} = \sqrt{3+2x_{k+1}} - \sqrt{3+2x_k} > 0$$

数列$\{x_n\}$ 单调增。由单调有界原理，知$\{x_n\}$收敛，记

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta \ge 0$$

对 $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}$ 即 $x_{n+1}^2 = 3+2x_n$ 求极限，得

$$\beta^2 = 3+2\beta$$

由此解得$\beta=3$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

4) 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1=1$ 和 $a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$ 给出,讨论数列的敛散性, 若收敛则求出极限.

证明 $a_1=1, a_2=2, a_3=\dfrac{3}{2}, a_4=\dfrac{5}{3},$ 于是 $a_1<a_3, a_2>a_4$

若 $a_{2n-1}<a_{2n+1}, a_{2n}>a_{2n+2}$ 成立,则

$$a_{2n+3}=1+\frac{1}{a_{2n+2}}>1+\frac{1}{a_{2n}}=a_{2n+1}$$

$$a_{2n+4}=1+\frac{1}{a_{2n+3}}<1+\frac{1}{a_{2n+1}}=a_{2n+2}$$

于是 $\{a_{2n}\}$ 单调减少, $\{a_{2n+1}\}$ 单调增加.

用归纳法可以验证 $1\le a_n\le 2$ ,因此数列是有界的.

极限值为 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

5）设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \frac{2}{x_n^{\ 3}}), \ (n = 1, 2, 3, \ldots),$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解：$x_{n+1} = \frac{1}{4}(x_n + x_n + x_n + \frac{2}{x_n^{\ 3}}) \geq \sqrt[4]{x_n \cdot x_n \cdot x_n \cdot \frac{2}{x_n}} = \sqrt[4]{2}$

则数列有下界，又

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{4}(3 + \frac{2}{x_n^{\ 4}}) \leq 1.$$

故数列单调减少，易得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[4]{2}.$

6) 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 求证：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。

证明: 注意两个事实：1) $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增趋于e

2) $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单调递减趋于e。

有不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}.$

$$S_n - S_{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} > 0$$

**故** $\{S_n\}$ **单调下降，且**

$$S_n > \ln(1+\frac{1}{1}) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n$$

$$= \ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} - \ln n = \ln(1+\frac{1}{n}) > 0$$

**于是** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ **存在。**

**注记：**$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n + C + o(1).$ **其中** $C$

**是欧拉常数。**

更一般的情形,设 $f\in C[1,+\infty)$, $f$ 单调递减且 $f\geq 0$,

$S_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)dx$ ，求证： $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。

证明: $S_n-S_{n+1}=\int_n^{n+1} f(x)dx-f(n+1)$

$$>\int_n^{n+1} f(n+1)dx-f(n+1)=0$$

故 $\{S_n\}$ 单调下降。而

$$S_n\geq\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx-\int_1^n f(x)dx=\int_n^{n+1} f(x)dx\geq 0$$

于是 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在。

## 利用夹逼准则求极限

定理Ⅰ 如果 $x_n, y_n$ 及 $z_n$ 满足下列条件:

(1) $\exists N_0 > 0$，使得 $y_n \le x_n \le z_n \quad (n > N_0)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

则 $x_n$ 的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

1） 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx$

解 因为 $0\le x\le 1, \sqrt{3}\le\sqrt{x+3}\le 2$

所以 $x^n\sqrt{3}\le x^n\sqrt{x+3}\le 2x^n$

于是 $\int_0^1 x^n\sqrt{3}dx\le\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx\le\int_0^1 2x^n dx$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{3}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{3}}{n+1}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 2x^n dx=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}dx=0$

2）求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}$

解 当 $0\le x\le 1$ 时， $1\le\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\le\sqrt[n]{3}$

而 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1,$ 于是 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=1$

当 $1<x\le 2$ 时， $x<\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\le\sqrt[n]{3}x$

又 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}x=x,$ 于是 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=x$

当 $x>2$ 时，$\frac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}\le\sqrt[n]{3}\frac{x^2}{2}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\frac{x^2}{2}$

于是综上所述

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\frac{x^2}{2})^n}=\begin{cases}1,0\le x\le 1\\ x,1<x\le 2\\ \frac{x^2}{2},x>2\end{cases}$$

3) 验证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}$

证明 由于 $x-\frac{x^3}{6}\le\sin x<x,\ x>0,$ 于是

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}<\sin\frac{k}{n^2}<\frac{k}{n^2}$$

因此 $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{3n^6}\right)<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$$

即 $$\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2}<\frac{n(n+1)}{2n^2}$$

利用夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}-\dfrac{1}{6n^6}\sum\limits_{k=1}^{n}k^3=\dfrac{1}{2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{1}{2}$

利用定积分

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连 续，则该函数在区间 $[a,b]$ 上必可积.

此时极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在且与区间 $[a,b]$ 的分法及 $\xi_i$ 的取法无关，

将区间$[a,b]$进行n等分,则$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$

$\xi_i$ 取区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的右端点: $\xi_i=x_i=a+\dfrac{i}{n}(b-a)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

可用定积分来计算数列的和式极限问题

若函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$ 上连续，并有

$u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

**1) 求** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\cdots+\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}]$

**解:** $I^*=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}$, **取 连续函数** $f$ **满足**

$$f(\frac{k}{n})=\sqrt{1-(\frac{k}{n})^2}. \qquad f(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\cdots+\sqrt{1-\frac{(n-1)^2}{n^2}}] = \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

2）设 $f \in C[0,1]$, $f(x) > 0$, 求

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(\frac{1}{n}) f(\frac{2}{n}) \cdots f(\frac{n-1}{n}) f(1)}.$$

解：令 $S_n = \sqrt[n]{f(\frac{1}{n}) f(\frac{2}{n}) \cdots f(\frac{n-1}{n}) f(1)}.$

则 $\ln S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln f(\frac{i}{n}) \to \int_0^1 \ln f(x) dx.$

故 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(\frac{1}{n}) f(\frac{2}{n}) \cdots f(\frac{n-1}{n}) f(1)} = e^{\int_0^1 \ln f(x) dx}$

3) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}{n+(1/k)}$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}{n+(1/k)}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}{n+(1/k)}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\quad=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n+(1/k)}=2\ln 2-1$$



**利用微分近似公式**

**1) 设** $f(0)=0,\ f'(0)$ **存在, 定义数列** $x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2}),$

**求** $\lim_{n\to\infty}x_n$ **利用此结果求极限**

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n^2},\quad\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n^2})$$

**解** $f(\frac{k}{n^2}) = f(0) + f'(0)\frac{k}{n^2} + o(\frac{1}{n}), k = 1, 2, \cdots, n$

**于是** $x_n = nf(0) + \frac{n(n+1)}{2n^2} f'(0) + no(\frac{1}{n})$

$$= \frac{n+1}{2n} f'(0) + no(\frac{1}{n})$$

**因此** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} f'(0) + no(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} f'(0)$

**若令** $f(x) = \sin x$ **,则** $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k}{n^2} = \frac{1}{2} f'(0) = \frac{1}{2}$

**若令** $f(x) = \ln(1+x)$ **,则**

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \frac{k}{n^2}) = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n^2})} = e^{\frac{1}{2}f'(0)} = e^{\frac{1}{2}}$$

## 利用Taylor公式

1) 试求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!)$ 的值

解 利用Taylor公式可得

$$2\pi en! = 2\pi n!(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}+R_{n+1})$$

其中 $R_{n+1} = \dfrac{e^{\theta}}{(n+2)!}, \quad 0<\theta<1$ ，于是

$$2\pi en! = 2\pi N + \frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n^2})$$ . 其中 $N$ 为整数,

$$n\sin(2\pi en!) = n\sin(\frac{2\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n^2})) = n(\frac{2\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n+1})) \to 2\pi$$

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi en!) = 2\pi$$

## 3、利用等价无穷小代换简化计算

**常用的等价无穷小**

当$x \to 0$时，$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x$

$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x\ln a, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

**注意：作为加减项的无穷小量不能随意用等价无穷小代换**

极限与连续

1） $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$$

解 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(e^{\frac{1}{n}\ln n}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}\ln n=1$$

2）设 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1976}}{n^x\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^x\right)}=\frac{1}{1977},$$ 求$x$

解 $$\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1976}}{n^x\left(\frac{x}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{1976}}{x\cdot n^{x-1}}=\frac{1}{1977}\neq 0,$$

故$x=1977$

**3) 求 极限** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}$

**解** $原式=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+64^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\ln\left(\frac{2+64^{\frac{1}{x}}}{3}\right)}$

**而** $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\ln\left(\dfrac{2+64^{\frac{1}{x}}}{3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\ln\left(1+\dfrac{64^{\frac{1}{x}}-1}{3}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}(2x-1)\frac{64^{\frac{1}{x}}-1}{3}=\lim_{x\to+\infty}(2x-1)\frac{(e^{\frac{1}{x}\ln 64}-1)}{3}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)\dfrac{1}{x}\ln 64}{3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)\ln 64}{3x}=\frac{2}{3}\ln 64$$

**于是** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n-1}=e^{\ln(64)^{\frac{2}{3}}}=16$

# 施笃兹(stolz)定理.

设 1) $y_{n+1} > y_n$ ,(n=1，2，…)， 2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a,$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$

注2：( $\dfrac{0}{0}$ 型stolz定理)

设对一切充分大的n, $\{b_n\}$ 严格递减，且

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0.$ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$

也存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$

1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$

证明: 因 $y_n = n^2 \to \infty$, 故利用Stolz公式,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$ 得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2 - n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{a}{2}$$

2) 设 $a_1>0,\ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},$ 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$

证明：显然 $\{a_n\}$ 是单调增加的,又可证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$

事实上若 $\{a_n\}$ 有极限 $a$ ,则 $a=a+\dfrac{1}{a}$ 矛盾,因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$$

又令 $x_n=a_n^2, y_n=2n$ ,由施笃兹(stolz)定理可得.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2(n+1)-2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2),$$ 而

$a_{n+1}^2-a_n^2=2+\dfrac{1}{a_n^2}$ ，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2}{2n}=1$ ,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$

## 综合题目

1) 设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, \quad x_{n+1} = \sin x_n,$

$y_n = \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}} \quad (n = 1,2,3\ldots),$ 请问 $\{x_n\},\{y_n\}$ 收敛吗？

若收敛，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ ；若发散，说明理由.

解：$\because x_2 = \sin x_1, \quad \therefore 0 < x_2 \le 1,$ 则 $n \ge 2,$

$0 \le x_{n+1} = \sin x_n \le x_n, \{x_n\}$ 单减有下界

根据单调有界定理知 $\{x_n\}$ 收敛，

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$ 在 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边取极限得

$A=\sin A$ ，于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

由于 $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}}$

而 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^2}\ln\dfrac{\sin t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin t}{t}-1}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t - t}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos t - 1}{3t^2} = -\frac{1}{6}$$

于是 $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e^{-\frac{1}{6}}$ ，从而 $\{y_n\}$ 收敛.

2) 证明：数列

$$\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\ldots$$

收敛，并求其极限。

证明：设该数列通项为 $x_n$ ，则 $x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}$,

令 $f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$, 则 $f(2)=2$,

$$x_{n+2}=f(x_n),x_{n+2}-2=f(x_n)-f(2),$$

由拉格朗日中值定理存在 $\xi$ 介于 $x,2$ 之间，使得

$$f(x)-f(2)=f'(\xi)(x-2),$$

$$\because f'(x)=-\frac{1}{4\sqrt{7+x}\sqrt{7-\sqrt{7+x}}}$$

$$\therefore |x_{n+2}-2|=|f(x_n)-f(2)|=|f'(\xi_n)|\cdot|x_n-2|$$

由题意得 $0<x_n<7,\quad \therefore 0<\xi_n<7,$

$$|f'(\xi_n)|=\frac{1}{4\sqrt{7+\xi_n}\sqrt{7-\sqrt{7+\xi_n}}}<\frac{1}{4\sqrt{7}\sqrt{7-\sqrt{14}}}<1$$

令 $\alpha=\max\{|f'(x)|:0\le x\le 7\}$, 则

$$|x_{n+2}-2|\le\alpha|x_n-2|, 0<\alpha<1$$

$\therefore |x_{2k}-2| \le \alpha^{k-1}|x_2-2|,$

由 $0 \le |x_{2k}-2| \le \alpha^{k-1}|x_2-2|$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha^{k-1}|x_2-2| = 0$

由夹逼定理得 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{2k}-2| = 0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = 2$

同理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1} = 2,$ 所以，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = 2$

3）设 $F(x,y)=\dfrac{f(y-x)}{2x}$, $F(1,y)=\dfrac{1}{2}y^2-y+5$,

$x_0>0$, $x_1=F(x_0,2x_0),\ldots$, $x_{n+1}=F(x_n,2x_n), n=1,2,\ldots$,

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限值。

证明：令x=1得： $F(1,y)=\dfrac{f(y-1)}{2}=\dfrac{1}{2}y^2-y+5$,

$$f(y-1)=y^2-2y+10=(y-1)^2+9$$

$$\therefore f(y-x)=(y-x)^2+9,\quad F(x,y)=\frac{(y-x)^2+9}{2x}$$

$x_1 = \dfrac{x_0^2+9}{2x_0}, x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+9}{2x_n}, n=1,2,\ldots$  $x_n > 0,$ 于是

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{9}{x_n}\right) \geq 3, \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{x_n^2}\right) \leq 1$$

即 $3 \leq x_{n+1} \leq x_n$ 因此 $\{x_n\}$ 单调递减且有下界，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 设 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n,$

对 $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2+9}{2x_n}$ 两边同时取极限得 $A = \dfrac{A^2+9}{2A},$

解得 $A=3$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$

4) (1) 证明：当 $|x|$ 充分小时，下面不等式成立

$$0 \le \tan^2 x - x^2 \le x^4$$

(2) 设 $x_n = \sum_{k=1}^{n} \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}$, 求 $\lim_{n\to\infty} x_n$

证明 (1) 因为 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x + x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x^2} = \frac{2}{3}$$

又当 $|x|$ 充分小时， $\tan^2 x > x^2$，所以成立不等式

$$0 \le \tan^2 x - x^2 \le x^4$$

(2) 由(1)知，当$n$充分大时有，

$$\frac{1}{n+k}\le\tan^2\frac{1}{\sqrt{n+k}}\le\frac{1}{n+k}+\frac{1}{(n+k)^2}$$

故，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\le x_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n}$

而 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2$

由夹逼定理知 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\ln 2$

5）设 $0<a<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_a^1(1-x^2)^n dx}{\int_0^1(1-x^2)^n dx}$

解 $I=\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^1(1-x^2)^n dx$

$$\geq\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx\geq(1-\frac{1}{n})^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

于是 $0\leq\dfrac{\int_a^1(1-x^2)^n dx}{\int_0^1(1-x^2)^n dx}\leq\dfrac{(1-a^2)^n(1-a)}{(1-\frac{1}{n})^n\frac{1}{\sqrt{n}}}$

$$=(1-a^2)^n\sqrt{n}\frac{1-a}{(1-\frac{1}{n})^n}$$

而当 $b>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{b^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{b^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{b^x\ln b}=0$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{b^n}=0$ ， 于是 当 $0<c<1$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty}c^n\sqrt{n}=0$, 因此 极限$=0$

6) 设函数$f(x)$在点$a$可导， $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 为趋于0的正数数列，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(a+\alpha_n)-f(a-\beta_n)}{\alpha_n+\beta_n}$.

**解** 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\alpha_n)-f(a)}{\alpha_n}\cdot\frac{\alpha_n}{\alpha_n+\beta_n}+\frac{f(a-\beta_n)-f(a)}{-\beta_n}\cdot\frac{\beta_n}{\alpha_n+\beta_n}\right]$$

令 $\dfrac{f(a+\alpha_n)-f(a)}{\alpha_n}=f'(a)+t_n$,

$\dfrac{f(a-\beta_n)-f(a)}{-\beta_n}=f'(a)+s_n$,

其中$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=0$,

于是

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[f'(a)+\frac{\alpha_n t_n+\beta_n s_n}{\alpha_n+\beta_n}\right],$$

且

$$0\le\left|\frac{\alpha_n t_n+\beta_n s_n}{\alpha_n+\beta_n}\right|\le\frac{\alpha_n|t_n|}{\alpha_n+\beta_n}+\frac{\beta_n|s_n|}{\alpha_n+\beta_n}$$

$$\le|t_n|+|s_n|\to 0(n\to\infty)$$

所以原式$=f'(a)$.

7) 设$a_1$，$a_2$ 是两个不同的实数，用归纳法定义

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})$$ 求数列{$a_n$}的极限.

解：由于 $a_n-a_{n-1}=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})$，令 $b_n=a_{n+1}-a_n.$

则 $\{b_n\}$ 是公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

$$a_{n+1}-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{2}{3}b_1\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}b_1\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right]=\frac{2}{3}b_1=\frac{2}{3}(a_2-a_1)$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}(a_1+2a_2)$

**8) 设数列** $\{x_n\}$ **由** $x_n = \sin x_{n-1}, n = 2,3\cdots$ **给出,**

$x_1 \in (0,\pi)$ **,求证** $x_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$

**证明: 显然** $\{x_n\}$ **是单调减少且趋于0的, 而**

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) = x^2(1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2))$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$$

于是 $$\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{\sin^2 x_{n-1}}=\frac{1}{x_{n-1}^2(1-\frac{x_{n-1}^2}{3}+o(x_{n-1}^2))}$$

$$=\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{3}+o(1)$$

于是 $$\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{3}+y_n,\quad y_n\to 0,n\to\infty$$

于是 $$\frac{1}{x_n^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{n-1}{3}+\sum_{k=2}^{n}y_k,$$

即 $$\frac{3}{nx_n^2}=\frac{3}{nx_1^2}+\frac{n-1}{n}+\frac{3}{n}\sum_{k=2}^{n}y_k.$$

极限与连续

但是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{nx_1^2}=0$ ,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=2}^{n}y_k=0$ ,于是

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{nx_n^2}=1$ ,因此 $x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$

设 $\{x_n\}$ 的极限为0，$y_n=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$， 可以证明 $\{y_n\}$ 的极限为0.