无穷小量

定义 设α,β是同一过程中的两个无穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称$\beta$是比$\alpha$的低阶无穷小;

(3) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=C(C\neq 0)$,则称$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小;记作 $\alpha\sim\beta$;

如果$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=C(C\neq 0,k>0)$,就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶的无穷小.

1 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c,$ 其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$ ，则 $k=$ ______$,c=$ _______

解 由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2(1+x^2)}=\frac{1}{3}$$

于是 $x\to 0$ 时，$x-\arctan x$ 关于 x 为三阶无穷小，因此 $k=3$ ，利用罗比达法则可求出 $c=\dfrac{1}{3}$

2　当 $x \to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比x为高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　　）

A　$x \cdot o(x^2) = o(x^3).$　　B　$o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3).$

C　$o(x^2) + o(x^2) = o(x^2).$　D　$o(x) + o(x^2) = o(x^2).$

答案是 D

3 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$, 其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$, 则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（ ）

（A）比x为高阶无穷小；（B） 比x为低阶无穷小；

（C）与x同阶但不等价的无穷小；

（D）与x为等价无穷小。

解 由于 $x\to 0,\quad \sin\alpha(x)=\frac{1-\cos x}{x}\to 0$

这时 $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x),\cos x-1\sim-\frac{x^2}{2},$

因此 $\alpha(x)\sim-\frac{x}{2}$ 答案是 C

4 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cos 2x\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cos 2x\cos 3x+2\cos x\sin 2x\cos 3x}{nax^{n-1}}$$

$$+\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x\cos 2x\sin 3x}{nax^{n-1}}$$

由于当 $n=2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos 2x\cos 3x}{nax^{n-1}}=\dfrac{1}{2a}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin 2x\cos 3x}{nax^{n-1}}=\frac{4}{2a}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x\cos 2x\sin 3x}{nax^{n-1}}=\frac{9}{2a}$$

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^{n}}=\dfrac{7}{a}$

故 $a=7$

当 $n\neq 2$ 时，不合题意，于是 $a=7,n=2.$

5 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt,\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$

则当$x\to 0$时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 (　　).

C

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C)同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha'(x)}{\beta'(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\cos x}=\frac{5}{e}.$$

6　当 $x \to 0$ **时，无穷小量**

$f(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$ **关于x的阶为______。**

解： $\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{1}{15}}\left(1+x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{15}}\left[1+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}+o\left(x^{\frac{5}{3}}\right)\right]$

$$\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}=x^{\frac{1}{15}}\left(1+x^{\frac{9}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{15}}\left[1+\frac{1}{3}x^{\frac{9}{5}}+o\left(x^{\frac{9}{5}}\right)\right]$$

$$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{15}}\left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{3}x^{\frac{9}{5}}+o\left(x^{\frac{5}{3}}\right)-o\left(x^{\frac{9}{5}}\right)\right]$$

是关于x的 $\frac{1}{15}+\frac{5}{3}=\frac{26}{15}$ **阶**

7 已知 $x \to 0$ 时，$(e^{x^2}-1)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小量，$x\sin x^n$ 是比 $1-\cos x$ 高阶的无穷小量，试确定正整数 n 的值.

解 由于 $x \to 0$ 时，$(e^{x^2}-1)\ln(1+x^2) \sim x^4$

$$x\sin x^n \sim x^{n+1}, 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

由已知可得：$2 < n+1 < 4$，且n是整数，所以

$n = 2$

8　已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

(I) 求 a 的值.

(II) 当 $x\to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 为同阶无穷小，求常数 k 的值.

解　$$a=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{2x}=1$$

(II) 因为 $f(x)-a=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-a}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x-x\sin x}{x^{k+2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x-\sin x-x\cos x}{(k+2)x^{k+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x-2\cos x+x\sin x}{(k+2)(k+1)x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3\sin x+x\cos x}{(k+2)(k+1)kx^{k-1}}$$

所以当 $k=1$ **时,有** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-a}{x^k}=\dfrac{1}{6}$ **此时** $x\to 0,$

$f(x)-a$ **与** x **为同阶无穷小**

求函数极限

函数极限和连续性

利用两个重要极限公式

1 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}$$

解 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1}\cdot(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1)\cdot x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-1)\cdot x=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2x})\cdot x=-\frac{1}{2}\quad\therefore\text{原式}=e^{-\frac{1}{2}}$$

2 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$ ，则

$$\lim_{n\to\infty}\ln[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}]^{n}=\underline{\qquad\qquad}$$

解

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{n}{n(1-2a)}}\right\}=\frac{1}{1-2a}$$

函数极限和连续性

3 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$

解

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}=-\frac{1}{6}$$

利用导数的定义

4） $$I=\lim_{x\to 0}\frac{(2+\tan x)^{10}-(2-\sin x)^{10}}{\sin x}$$

解 令 $f(x)=(\tan x-2)^{10}, g(x)=(\sin x-2)^{10}$

则 $f(0)=g(0)=2^{10}$ ，于是

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)-f(0)]-[g(x)-g(0)]}{x}=f'(0)-g'(0)$$

因此 $I=10\cdot 2^{10}$

5） 设函数$f(x)$在$x=a$可导，

且$f(a)\neq 0$，则$\mathrm{I}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=$ ______

$$I=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)\frac{1}{n}}}$$

$$=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

分子或分母有理化，罗必达法则等

6 求 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$$

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{[x\ln(1+x)-x^2][\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x)-x}\quad=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{1+x}-1}=-\frac{1}{2}$$

函数极限和连续性

7 设 $f(x)$ 有界，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})f(x)$

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})f(x)$

$$=\lim_{x\to+\infty}2f(x)\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\sin(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})$

$$=\sin(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})=0,$$

而 $\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}f(x)$ 有界，于是

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})f(x)=0$$

8) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin\dfrac{(x+\sin x)}{2}\sin\dfrac{(x-\sin x)}{2}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{(x+\sin x)}{2}\cdot\dfrac{(x-\sin x)}{2}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}(1+\frac{\sin x}{x})(\frac{x-\sin x}{x^3})$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2\cdot 3x^2}=\frac{1}{6}$$

注意 使用三角变换公式

函数极限和连续性

9) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos\left(xe^{x}\right)-\cos\left(xe^{-x}\right)}{x^{3}}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2\sin\dfrac{xe^{x}+xe^{-x}}{2}\sin\dfrac{xe^{x}-xe^{-x}}{2}}{x^{3}}$

$$=-2\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{xe^{x}+xe^{-x}}{2}\,\dfrac{xe^{x}-xe^{-x}}{2}}{x^{3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{x}-e^{-x}\right)}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}\left(e^{4x}-1\right)}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{4x}{x}=-2$$

10) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

解：由拉格朗日定理得 $e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\xi}\left(\tan x-\sin x\right).$

其中 ξ **在** $\sin x$ **与** $\tan x$ **之间，当** $x\to 0$ **时**

$\xi\to 0, e^{\xi}\to 1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}\left(\tan x-\sin x\right)}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\dfrac{x^2}{2}}{x-\sin x}=3$$

方法二 使用等价无穷小和洛比达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\left(e^{\tan x-\sin x}-1\right)}{x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}=3$$

泰勒公式求极限：

11) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$

解：由麦克劳林公式得：

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right),\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$$

$$\tan\left(\tan x\right)=\tan x+\frac{\left(\tan x\right)^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^3+o\left(x^3\right)=x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{(\sin x)^3}{3!}+o\left(x^3\right)$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)^3+o\left(x^3\right)=x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o\left(x^3\right)}{\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)}=2$$

12）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{\sin x}+\left(\dfrac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}\right]$

解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\sin\dfrac{1}{x^2}\right)=1\cdot 0=0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3-e^x}{2+x}\right)^{\csc x}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\csc x\cdot\ln\frac{3-e^x}{2+x}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-e^x}{3-e^x}-\dfrac{1}{2+x}}{\cos x}\right)=\frac{1}{e}$$

原式= $\dfrac{1}{e}$

特殊的等价代换：

13) 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^4\left(\arctan\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$

解：$\because x\to\infty$ 时 $\arctan\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}\to 0$

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty} x^4\tan\left(\arctan\frac{2x^2+5}{x^2+1}-\arctan\frac{2x^2+7}{x^2+2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^4\frac{\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}-\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}}{1+\dfrac{2x^2+5}{x^2+1}\bullet\dfrac{2x^2+7}{x^2+2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)+\left(2x^2+5\right)\left(2x^2+7\right)}=\frac{3}{5}$$

14）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\dots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ **，其中n是自然数。**

解： $原式=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(e^x+e^{2x}+\dots+e^{nx}\right)-\ln n}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+e^{2x}+\dots+e^{nx}\right)-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\dots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\dots+e^{nx}}=\frac{1+2+\dots+n}{n}=\frac{n+1}{2}$$

$$原式=e^{\frac{n+1}{2}}$$

15) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$ $\quad\because(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=1)$

解 当x=0时，原式=1. 当x≠0时，

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

16　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$. $=1.$

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1,$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1.$$

17）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(n^3-n^2+\dfrac{n}{2}\right)e^{\frac{1}{n}}-\sqrt{1+n^6}\right]$.

解 先求 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$,

$$I=\lim_{t\to0^+}\frac{\left(1-t+\dfrac{1}{2}t^2\right)e^t-\sqrt{1+t^6}}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{2}t^2e^t-\dfrac{3t^5}{\sqrt{1+t^6}}}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{2}e^t-\dfrac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3}=\frac{1}{6}.$$

18） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x\sin x}-1)-(\sqrt{\cos x}-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\sqrt{\cos x})}\quad=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

原式= $\dfrac{4}{3}$

19 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}.$$

解 原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x\int_0^x f(u)du}$ (分母令 $x-t=u$)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)}{\int_0^x f(u)du+xf(x)}$$ (应用洛必达法则)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(u)du + xf(x)}$$ (应用洛必达法则)

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ (\xi\to 0)}} \frac{xf(\xi)}{xf(\xi) + xf(x)}$$

(用积分中值定理:

ξ在0和x之间)

$$= \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

20）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\ln^q(x+1)-x\ln^q x}{\ln^q x}$

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\ln^q(x+1)-x\ln^q x}{\ln^q x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x[\ln^q(x+1)-\ln^q x]}{\ln^q x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^q(x+1)}{\ln^q x}$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x[\ln^q(x+1)-\ln^q x]}{\ln^q x}$$

$$\ln^q(x+1)-\ln^q x=[\ln(1+\frac{1}{x})+\ln x]^q-\ln^q x$$

$$=\ln^q x\left[[1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}]^q-1\right]=\ln^q x\left[e^{q\ln(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x})}-1\right]$$

$$\sim q\ln^q x\ln(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x})\sim q\ln^q x\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\sim\frac{q\ln^q x}{x\ln x}$$

等价代换得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)\ln^q(x+1)-x\ln^q x}{\ln^q x}$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln^q x}\frac{q\ln^q x}{x\ln x}=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{q}{\ln x}=1$$

连续与间断点

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

称 $f(x)$ 在 x_0 点是左连续的, 若 $f(x_0-0)=f(x_0)$

称 $f(x)$ 在 x_0 点是右连续的, 若 $f(x_0+0)=f(x_0)$

定理 函数 $f(x)$在x_0 处连续的充要条件是$f(x)$在 x_0 处即左连续又右连续.

杨建新

函数的间断点

若 $f(x)$ 在 $U^0(x_0)$ 内有定义，在 x_0 点不连续，

称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点。

第一类不连续点：左右极限的都存在的不连续点

1 跳跃间断点

$f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 都存在，但是 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$

称 x_0 为跳跃间断点；

2 可去间断点

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ ，称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

3.第二类间断点

$f(x_0+0)$ 和 $f(x_0-0)$ 至少有一个不存在，称 x_0 为第二类间断点。

1 设 $f(x)=\dfrac{1-2e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 B .

（A）可去间断点；（B）跳跃间断点；

（C）无穷间断点；（D）震荡间断点.

$$f(0+0)=(-2)\cdot\frac{\pi}{2}=-\pi, f(0-0)=-\frac{\pi}{2}$$

2 求下面函数的间断点并指出其类型.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x} & x\le 0\\[2ex] \dfrac{x(x^2-1)}{x-1} & x>0\end{cases}$$

解 因为初等函数在其定义域内是连续的，所以函数 $f(x)$ 只能在 $x=1, x=0,$ $x=-1,-2,-3\cdots,$ 这些没定义点处间断，显然这些点都是间断点.

因为 $x\to -1,-3,-4,\cdots,-n,\cdots$ 时， $f(x)\to\infty,$

所以它们为无穷间断点；即第二类间断点。

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-1)}{x-1} = 2,$$

故 $x=1$ 为可去间断点;

而 $\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x} = \frac{8}{\pi},$

故 $x=-2$ 为可去间断点;

由于 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-1)}{x-1} = 0.$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-4)}{\sin \pi x} = -\frac{4}{\pi}.$$

$x=0$ 为跳跃间断点.

3 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型.

解: $f(x)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点是使 $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ 为0或为 ∞ 的点即 $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}.$

因为 $f(\frac{\pi}{4}+)=f(\frac{5\pi}{4}+)=\infty$ 而 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi}f(x)=1$

因此 $\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 是第二类间断点. $\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 为可去间断点

4 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数是（　　）

解 函数的间断点为 $x=0, x=-1, x=1,$

$$\lim_{x\to0+}|x|^x=\lim_{x\to0+}x^x=e^{\lim\limits_{x\to0+}x\ln x}=e^0=1$$

$$\lim_{x\to0-}|x|^x=\lim_{x\to0-}(-x)^x=e^{\lim\limits_{x\to0-}x\ln(-x)}=e^0=1$$

于是 $\lim\limits_{x\to0}|x|^x=1$

$$x\to0,|x|^x-1=e^{x\ln|x|}-1\sim x\ln|x|$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$x \to 1, |x|^x - 1 = e^{x\ln|x|} - 1 \sim x\ln|x|$$

于是 $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$

$$x \to -1, |x|^x - 1 = e^{x\ln|x|} - 1 \sim x\ln|x|$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x+1} = \infty$$

因此可去间断点有两个。

5 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x<0\\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x+x^2)], & x>0\end{cases}$

当$x\to 0$时的极限存在,求a的值.

函数极限和连续性

解 $f(0-)=-\sqrt{2}a,\quad f(0+)=-1,\quad$ 故$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}\sim\frac{ax}{\sqrt{\frac{1}{2}x^2}}\to-\sqrt{2}a$$

$$\frac{1}{x}[\ln x-\ln(x+x^2)]=-\frac{1}{x}\ln(1+x)\to-1$$

6 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有二阶导数，且有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4 f(x)+\ln(1+x^2)-x^2}{x^6}=\frac{2}{3},$$ 求 $f(0), f'(0), f''(0)$

解：因 $\dfrac{x^4 f(x)+\ln(1+x^2)-x^2}{x^6}=\dfrac{2}{3}+\alpha,$ 其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$

则 $$f(x)=-\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}+\frac{2}{3}x^2+\alpha x^2,$$

于是，$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}=\frac{1}{2},$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)-x^2+\frac{1}{2}x^4}{x^5}=0$$

故 $$f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=\frac{2}{3}$$

7 求满足方程 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$

的函数 $f(x)$,其中 $f(0)=a, f(\frac{\pi}{2})=b$

解 以 $(x,y)=(0,u),\quad (u+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\quad (\frac{\pi}{2},u+\frac{\pi}{2})$ 分别

代入原方程,可得含 $f(u), f(-u), f(u+\pi)$ 的方程组

$$\begin{cases} f(u)+f(-u)=2a\cos u \\ f(u+\pi)+f(u)=0 \\ f(u+\pi)+f(-u)=-2b\sin u \end{cases}$$

然后解出

$$f(u)=a\cos u+b\sin u$$

即

$$f(x)=a\cos x+b\sin x$$

8 设 $f(x)$ 在(0,1)上有定义,且 $e^{x}f(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在(0,1)上都是单调不减,求证:$f(x)$ 在(0,1)上连续.

证明 首先对任意 $a\in(0,1)$,及 $a<x<1,$ 因

$$\mathrm{e}^{a}f(a)\le \mathrm{e}^{x}f(x)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{a-x}f(a)\le f(x),$$

又 $\mathrm{e}^{-f(a)}\le \mathrm{e}^{-f(x)}$. 有 $f(a)\ge f(x)$. 因此

$$\mathrm{e}^{a-x}f(a)\le f(x)\le f(a),$$

而 $\lim\limits_{x\to a+}\mathrm{e}^{a-x}f(a)=f(a),$ 由夹逼准则得 $f(a+)=f(a)$

同理, $f(a-)=f(a).$ 由此推出 $f(x)$ 在(0,1)上连续.

(有界)闭区间上连续函数性质

有界性、最值性、介值性与根的存在(零点)定理.

关于根的存在性证明问题,一般考虑三种方法:

(1)直接运用最大值最小值定理与介值定理;

(2)先将结论(或满足条件的等式)中的ξ(或根)换成变量*x*,再移项使一边为0, 作 辅助函数 $f(x)$ 然后运用零点定理导出结论;

(3)用反证法证明.

1 设 $f(x)$ 在R上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 求证：

$\exists\xi\in R$ 使得 $f(\xi)+\xi=0$

证明：令 $F(x)=f(x)+x$ ，则

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}x\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]=+\infty$$

$\therefore\exists N>0$ 使得 $F(N)>0,F(-N)<0,$

由零点定理得：$\exists\xi\in R$ 使得 $F(\xi)=0$

即 $f(\xi)+\xi=0$

2 设函数 $f(x)$ 在(-∞,+∞)内连续,且 $f(f(x))=x.$

证明 在(-∞,+∞)内至少有一个 x_0 满足 $f(x_0)=x_0$

证明:任取一点 $a,$ 若 $f(a)=a,$ 则已满足要求. 现设 $f(a)=b\neq a,$ 有 $f(b)=a$. 则 $g(x)=f(x)-x$ 连续,且 $g(a)=b-a$ 与 $g(b)=a-b$ 异号,根据介值定理,

在*a*与*b*之间至少有一点 x_0 使得 $g(x_0)=0$ 即

$f(x_0)=x_0$ 命题得证.

3 设 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续, $f(0)=f(1)$ ，证明: 对于任意给定的整数 $n>1$,必存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

证: $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上连续, 假定 $F(x)$ 在区间 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上不变号,则

$$F(\tfrac{k}{n})=f(\tfrac{k}{n})-f(\tfrac{k+1}{n}),k=0,1,\cdots,n-1,$$

同号,各式相加得 $f(0)-f(1)\neq 0$,此矛盾说明 $F(x)$ 在区间 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上变号,于是存在 $\xi\in(0,1-\frac{1}{n})\subset[0,1]$ 使得 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$

4 证明方程 $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1 \quad (n>1)$ 有唯一的实根 $\xi_n \in (0,1)$,并求极限 $\lim_{n\to\infty} \xi_n$

解 若 $n=2$ 结论显然正确,现设 $n>2.$ 对 $0<x<t$,有

$$(\sum_{k=1}^{n} t^k - 1) - (\sum_{k=1}^{n} x^k - 1) = \sum_{k=1}^{n} (t^k - x^k)$$

$$= (t-x)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1} t^i x^{k-1-i} > 0$$

因此连续函数 $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$ 在(0,+∞)内单调增加,且 $f(0)f(1)<0$,根据介值定理,方程 $f(x)=0$ 即

$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ 唯一的实根 $\xi_n \in (0,1)$

其次,数列 $\{\xi_n\}$ 显然是有界数列.下证 $\{\xi_n\}$ 是单调减少的数列,事实上 $\sum_{k=1}^{n} \xi_n{}^k = 1, \sum_{k=1}^{n+1} \xi_{n+1}{}^k = 1$，两式相减得

$$\xi_{n+1}{}^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (\xi_{n+1}{}^k - \xi_n{}^k)$$

$$= \xi_{n+1}{}^{n+1} + (\xi_{n+1} - \xi_n) \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k-1} \xi_{n+1}{}^i \xi_n{}^{k-i-1} = 0,$$

由此得 $\xi_{n+1} - \xi_n < 0$.

最后由 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \xi_n{}^k = 1$ 得 $\frac{a}{1-a} = 1$,于是 $a = \frac{1}{2}$

5 设 $f_n(x)=C_n^1\cos x-C_n^2\cos^2 x+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^n\cos^n x.$

求证 （1）对于任意自然数n，方程 $f_n(x)=\frac{1}{2}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内仅有一解；

（2）设 $x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 满足 $f_n(x_n)=\frac{1}{2}$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{2}$

证明：（1） $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n, f_n(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，$f_n(0)=1, f_n\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 根据介值定理得

$\exists x_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f_n(x)=\frac{1}{2}$

由 $f_n'(x) = -n\sin x(1-\cos x)^{n-1} < 0\left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ 得

$f_n(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上递减，故根 x_n 唯一。

（2） $\because f_n\left(\arccos\dfrac{1}{n}\right) = 1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\arccos\frac{1}{n}\right) = 1-\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = 1-\frac{1}{e} > \frac{1}{2} = f_n(x_n) = \frac{1}{2}$$

故 $\exists N > 0$ 当n>N时 $f_n\left(\arccos\dfrac{1}{n}\right) > f_n(x_n)$, 由 $f_n(x)$

在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上递减得

$$\arccos\frac{1}{n} < x_n < \frac{\pi}{2}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\arccos\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\pi}{2}$

6 求函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ **的表达式。**

解：当 $|x| < 1$ **时，** $f(x) = 1;$

当 $|x| > 2$ **时，** $f(x) = \frac{x^2}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{x^2}\right)^n + \left(\frac{2}{x}\right)^n} = \frac{x^2}{2};$

当 $1<x<2$ 时， $f(x)=x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x;$

当 $-2<x<-1$ 时，若n为偶数

$$f(x)=-x\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=-x,$$

若n为奇数 $f(x)=x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}+\left(\frac{x}{2}\right)^n}=x,$

当 $-2<x<-1$ 时该极限不存在，即 $f(x)$ 不存在；

又 $f(1)=1, f(2)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{n+1}}=2$

当 $x=-1$ 时，若n为偶数 $f\left(-1\right)=1$ ，若n为奇数

$f\left(-1\right)=\frac{1}{2},\therefore f\left(-1\right)$ 不存在；

当 $x=-2$ 时，若n为偶数 $f\left(-2\right)=2$ ，若n为奇数

$f\left(-2\right)=1,\therefore f\left(-2\right)$ 不存在；

故，$f\left(x\right)=\begin{cases}1,-1<x\le 1,\\ x,1<x\le 2,\\ \frac{x^2}{2},x>2\text{或}x<-2\end{cases}$ ，其定义域为

$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$

7 求函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^{n+1}+x}$

（n 为正整数）的间断点，并判别其类型.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1;\\ 2, & x=1;\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$$

$x=0$ 为第二类（无穷间断点），

$x=-1$ 为第一类（跳跃）间断点，

$x=1$ 为第一类间断点（可去）

8　已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^n}=C\neq 0$ **，试确定常数** n,C **的值。**

解　$\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$$=[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)]+[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)]$$

$$=2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$$

又　$\because \arctan x=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))-(2x+\frac{2}{3}x^3+o(x^3))}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{x^n}=C$$

可知：$n=3, c=-\dfrac{4}{3}$

9　设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x tf(t)dt, & x\neq 0\\ c & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$

有连续导数，$f(0)=0$ （1）确定 c，使 $F(x)$ 连续；

（2）在 $F(x)$ 连续时，$F'(x)$ 是否连续?

解：（1）$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f(0)=0$

$c=0$ 时，$F(x)$ 连续；

(2) 当$x \neq 0$ 时，$F'(x) = \dfrac{x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$

$$\lim_{x\to 0} F'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{3} = \frac{1}{3} f'(0)$$

又 $F'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{3x} = \frac{1}{3} f'(0)$$

所以$F'(x)$也连续.

10 若 $a \le f(x) \le b, x \in [a,b]$ 且 $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|.$

其中k为常数且0<k<1，设

$$x_1 \in [a,b], x_{n+1} = f(x_n), n = 1,2,\ldots$$

证明：（1）存在唯一的 $x \in [a,b]$ 使得f(x)=x。

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

证明：（1）由 $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$ 知f(x)连续，

所以g(x)=f(x)−x连续，由于

$$a \le f(x) \le b, \therefore g(a) \ge 0, g(b) \le 0.$$

由介值定理得：$\exists x \in [a,b]$ 使得g(x)=0即f(x)=x。

杨建新

假设另有 $x_0 \neq x$ 且 $f(x_0)=x_0$，则

$$|x_0 - x| = |f(x_0) - f(x)| \le k|x_0 - x| < |x_0 - x|$$

矛盾。这说明，存在唯一的 $x \in [a,b]$ 使得f(x)=x。

（2）$|x_n - x| = |f(x_{n-1}) - f(x)| \le k|x_{n-1} - x|$

$$\le k^2|x_{n-2} - x| \le \ldots \le k^{n-1}|x_1 - x|$$

$$\therefore |x_n - x| \le k^{n-1}|x_1 - x|, k < 1,$$

$$\because 0 \le \lim_{n\to\infty}|x_n - x| \le \lim_{n\to\infty} k^{n-1}|x_1 - x| = 0$$

由夹逼定理得 $\lim_{n\to\infty}|x_n - x| = 0, \therefore \lim_{n\to\infty} x_n = x$

杨建新

11 若函数$f(x)$ 单调,并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$ 证明 对于任何实数 $C>0$ 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(Cx)}{f(x)}=1$

证明 不妨设 $f(x)$ 严格单调增加。则存在X >0, 使得 $f(x)$ 在 $[X,+\infty)$ 上不改变符号。因此不妨设 $f(x)>0$

若 $C=2^n$ ，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^n x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^n x)}{f(2^{n-1}x)}\frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(22^{n-1}x)}{f(2^{n-1}x)}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=1$$

若 $C\geq1$ ，则存在 n 使得 $2^{n-1}\leq C<2^{n}$ ， $x>X>0$

于是 $2^{n-1}x\leq Cx<2^{n}x,$ 因此

$$f(2^{n-1}x)\leq f(Cx)<f(2^{n}x)$$

于是 $$\frac{f(2^{n-1}x)}{f(x)}\leq\frac{f(Cx)}{f(x)}<\frac{f(2^{n}x)}{f(x)}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^{n-1}x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^{n}x)}{f(x)}=1,$ 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(Cx)}{f(x)}=1$

当 $0<C<1$ ，令 $x=\dfrac{y}{C}$ ，于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(Cx)}{f(x)}=\lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{f(\frac{1}{C}y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f(\frac{1}{C}y)}{f(y)}}=1$$