

Homework 3

Instructor: Chao Qian

Name: Your name, StudentId: Your number

1 Problem 1: 证明No Free Lunch(NFL)定理(30)

对于任意两种算法，其在均匀分布上的所有问题都表现得一样好，即

$$\sum_f \sum_{d_m^y} \Phi(d_m^y) P(d_m^y | f, m, A_1) = \sum_f \sum_{d_m^y} \Phi(d_m^y) P(d_m^y | f, m, A_2),$$

其中 $\sum_{d_m^y} \Phi(d_m^y) P(d_m^y | f, m, A)$ 代表算法 A 在函数 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ 上迭代 m 次后的性能。

2 Problem 2: 分析LeadingOnes问题(20)

请用适应层分析法来分析(1+1)-EA找到LeadingOnes问题最优解的期望运行时间上界。

3 Problem 3: 分析OneMax问题(20)

请用乘性漂移分析法求解(1+1)-EA算法找到OneMax问题最优解的期望运行时间上界。

4 Problem 4: 分析COCZ问题(30)

试求解SEMO算法找到COCZ问题的帕累托前沿的期望运行时间上界。

5 相关内容

作业相关伪布尔函数问题的定义如下：

定义 1 (LeadingOnes). 一个规模为 n 的LeadingOnes问题旨在找到一个 n 位的01串，以最大化

$$f(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i s_j, \quad (1)$$

这里 s_j 指 $\mathbf{s} \in \{0, 1\}^n$ 的第 j 位。

定义 2 (OneMax). 一个规模为 n 的OneMax问题旨在找到一个 n 位的01串，以最大化

$$f(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n s_i, \quad (2)$$

这里 s_i 指 $\mathbf{s} \in \{0, 1\}^n$ 的第 i 位。

定义 3 (COCZ). 一个规模为 n 的COCZ: $\{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{N}^2$ 问题旨在找到一个 n 位的01串，以最大化

$$COCZ(\mathbf{s}) = \left(\sum_{i=1}^n s_i, \sum_{i=1}^{n/2} s_i + \sum_{i=n/2+1}^n (1 - s_i) \right) \quad (3)$$

这里 n 为偶数，且 s_i 指 $\mathbf{s} \in \{0, 1\}^n$ 的第 i 位。

对于二目标优化问题COCZ，可通过占优规则来比较两个解的优劣，具体定义如下：

定义 4 (占优规则). 对于具有两目标(f_1, f_2)的解 s 和 s' 来说,

1. 若 $\forall i: f_i(s) \geq f_i(s')$, 则 s 弱占优 s' , 即 s 好于 s' , 表示为 $s \succeq s'$;
2. 若 $s \succeq s' \wedge \exists i: f_i(s) > f_i(s')$, 则 s 占优 s' , 即 s 严格好于 s' , 表示为 $s \succ s'$;
3. 若既不满足 $s \succeq s'$ 又不满足 $s' \succeq s$, 则 s 和 s' 二者不可比。

帕累托前沿的定义如下:

定义 5 (帕累托前沿). 令 \mathcal{X} 代表问题的解空间。若解空间中不存在解占优 s , 则称 s 为帕累托最优解。所有帕累托最优解的目标向量集合称为帕累托前沿。

(1+1)-EA和SEMO算法的基本流程如算法 1和算法 2所示:

Algorithm 1 (1+1)-EA

Input: 伪布尔函数 $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Output: $\{0, 1\}^n$ 中的一个解

- 1: 随机均匀地从 $\{0, 1\}^n$ 中选择一个解 s 作为初始解;
 - 2: **while** 算法终止条件不满足 **do**
 - 3: 在解 s 上执行bit-wise mutation算子以产生新解 s' ;
 - 4: **if** $f(s') \geq f(s)$ **then**
 - 5: $s \leftarrow s'$
 - 6: **end if**
 - 7: **end while**
 - 8: **return** s
-

Algorithm 2 SEMO

- 1: 随机均匀地从 $\{0, 1\}^n$ 中选择一个解 s 作为初始解;
 - 2: 将初始解放入种群 $P \leftarrow \{s\}$;
 - 3: **while** 算法终止条件不满足 **do**
 - 4: 随机均匀地从种群 P 中挑选出解 s ;
 - 5: 在解 s 上执行one-bit mutation算子以产生新解 s' ;
 - 6: **if** $\nexists z \in P$ 使得 $z \succ s'$ **then**
 - 7: $P = (P - \{z \in P \mid s' \succeq z\}) \cup \{s'\}$
 - 8: **end if**
 - 9: **end while**
 - 10: **return** P
-

6 提交与评分

提交一份pdf文档, 并发送到liudx@lamda.nju.edu.cn, 12月17日23:59截止。延期提交的折扣为-20/天, 即每延迟一天, 本次作业得分减20。请合理分配时间。

- Pdf文档命名方式: “学号-姓名.pdf”, 例如“MG1937000-张三.pdf”;
- 邮件标题命名: “HSEA第三次作业-学号-姓名”, 例如“HSEA第三次作业-MG1937000-张三”。

注意, pdf可以用latex/word/markdown等方式生成, 但是不要用手写证明的照片。

作业的评分主要参考以下几点:

1. 结论的紧致性。
2. 证明过程的完整性以及正确性。例如在使用分析工具时是否充分考虑了工具的条件, 公式推导是否完整、以及是否有错误。
3. 文档的细节。例如是否出现符号错误, 文档格式是否混乱。

若发现作业出现雷同的情况, 会根据相关规定给予惩罚, 详情请参考课程主页中“学术诚信”的相关内容。请同学们务必独立完成作业!