動量

姓名: ________________

學號: ______________

1 長題目

1. 小克從離地 1 m 高的平台從靜止跳起，其質量為 70 kg。
   (a) 估算小克剛着地前的速率。 (2 分)
   (b) (i) 小克着地時的動量變化是多少？ (1 分)
   (ii) 假設小克從剛着地至完全靜止需時 0.1 s。估算小克着地時地面作用在他身上的平均力。 (2 分)
   (c) 人們着地時一般會屈膝。舉出着地時屈膝的一個好處。 (1 分)

Ans:

(a) 取向下為正。運用公式 $v^2 - u^2 = 2as$，可得

$v^2 - 0 = 2(9.81)(1)$ (1M)

$\therefore\ v = \sqrt{19.62} = 4.429 \approx 4.43\ \text{m s}^{-1}$

小克剛着地前的速率為 **4.43 m s⁻¹**。 (1A)

(b) (i) 小克着地時的動量變化為

$m(v - u) = (70)(0 - 4.429)$

$= -310.1 \approx -310\ \text{kg m s}^{-1}$

小克的動量減少 **310 kg m s⁻¹**。 (1A)

(ii) 作用在小克身上的淨力為

$$F_{淨力} = \frac{m(v-u)}{t} = \frac{-310.1}{0.1}$$

$= -3101\ \text{N}$

因此，作用在小克身上的淨力 3101 N（向上）。 (1M)

地面作用在小克身上的平均力為

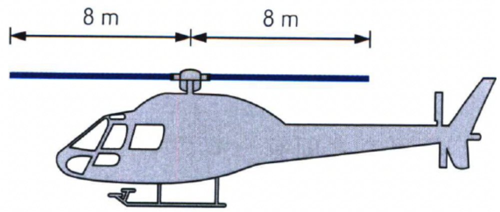
$F = mg + F_{淨力}$

$= (70)(9.81) + 3101$

$= 3787 \approx$ **3790 N** (1A)

(c) 屈膝可延長撞擊時間，以減低作用在人們身上的撞擊力。 (1A)

2. 一架直升機停留在空中。直升機的質量為 1200 kg，其葉片長 8 m。



(a) 直升機的葉片旋轉時，不斷上方的空氣抽往下方。試扼要解釋何以直升機能藉此停留在空中。

(2 分)

(b) 假設葉片上方的空氣起初靜止。空氣的密度為 $1.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$。

(i) 估算葉片下方空氣的速率。 (3 分)

(ii) 估算直升機引擎的功率。 (2 分)

(c) 葉片必須傾斜，才能使直升機向前推進。假如直升機水平推進時，葉片與水平成 5° 角，證明作用在機上的向前推力約為 1000 N。試輔以隔離體圖，解釋你的答案。 (2 分)

Ans:

(a) 葉片把空氣抽往下方，使空氣獲得動量。運用動量守恆定律，葉片獲得向上的動量。 (1A)
當葉片的動量增加率（即上升力）與直升機的重量互相平衡時，直升機便可停留在半空。 (1A)

(b) (i) 運用牛頓運動第二定律，考慮空氣被葉片抽往下方時的動量轉變，可得

$F = \frac{m(v-u)}{t} \quad \Rightarrow \quad F = \rho\pi r^2 v(v-u)$ (1M)

其中 r 為葉片的長度，ρ 為空氣的密度。

> 考慮被葉片抽往下方的空氣團，設該空氣團的高度為 h，可得
>
> $F = \frac{m(v-u)}{t} = \frac{m}{t}(v-u)$
>
> $= \rho\pi r^2 \left(\frac{h}{t}\right)(v-u) = \rho\pi r^2 v(v-u)$，
>
> 其中 $\frac{h}{t}$ 代表該空氣團的速率。

由此可得

$$mg = \rho\pi r^2 v(v-u)$$

$(1200)(9.81) = (1.2)\pi(8)^2 v(v-0)$ (1M)

$\therefore v = 6.985 \approx 6.99 \text{ m s}^{-1}$

葉片下方空氣的速率為 **6.99 m s⁻¹**。 (1A)

(ii) 運用公式 $P = \frac{E}{t}$ 可得

$P = \frac{1}{2}mv^2 \times \frac{1}{t}$

$= \frac{1}{2}(\rho\pi r^2 v)v^2$

$= \frac{1}{2}\rho\pi r^2 v^3$

由此可得

$P = \frac{1}{2}(1.2)\pi(8)^2(6.985)^3$ (1M)

$\approx 41100 \text{ W}$

直升機引擎的功率為 **41100 W**。 (1A)

(c)

正確圖像：**1A**

考慮各道力的垂直分量，可得

$L\cos 5° = mg$ (1)

設 F 為所需的向前推力。考慮各道力的水平分量，可得

$L\sin 5° = F$ (2)

$\frac{(2)}{(1)}$，可得

$\frac{F}{mg} = \tan 5°$

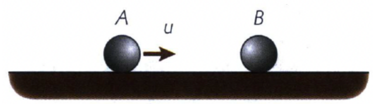
$F = mg\tan 5°$

$= (1200)(9.81)\tan 5°$

$= 1030 \approx 1000 \text{ N}$

因此，直升機所需的向前推力約為 1000 N。 (1A)

3. 小球 A（質量為 m_A）與小球 B（質量為 m_B）發生對正彈性碰撞。碰撞前，小球 A 以速率 u 朝着靜止的小球 B 衝去。碰撞後，A、B 兩球分別以速率 v_A 和 v_B 移動。



(a) 證明 $m_A(u - v_A) = m_B v_B$。 (2 分)

(b) 證明 $m_A(u^2 - v_A^2) = m_B v_B^2$。 (2 分)

(c) 由此，證明 (3 分)

(i) $v_A = \dfrac{m_a - m_B}{m_A + m_B}u$

(ii) $v_B = \dfrac{2m_A}{m_A + m_B}u$

Ans:

(a) 運用動量守恆定律，可得 (1M)

$$m_A u + \cancel{m_B u_B}^{0} = m_A v_A + m_B v_B$$

$$m_A (u - v_A) = m_B v_B \quad \text{(1A)}$$

(b) 運用能量守恆定律，可得 (1M)

$$\frac{1}{2} m_A u^2 + \cancel{\frac{1}{2} m_B u_B{}^2}^{0} = \frac{1}{2} m_A v_A{}^2 + \frac{1}{2} m_B v_B{}^2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} m_A u^2 - \cancel{\frac{1}{2}} m_A v_A{}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_B v_B{}^2$$

$$m_A(u^2 - v_A{}^2) = m_B v_B{}^2 \quad \text{(1A)}$$

(c) 從(a)部和(b)部的答案可得

$$m_A(u - v_A) = m_B v_B \qquad (1)$$

$$m_A(u + v_A)(u - v_A) = m_B v_B{}^2 \qquad (2)$$

$\frac{(2)}{(1)}$，可得

$$\frac{\cancel{m_A(u - v_A)}(u + v_A)}{\cancel{m_A(u - v_A)}} = \frac{\cancel{m_B} v_B{}^{\cancel{2}}}{\cancel{m_B v_B}}$$

因此，

$$\begin{cases} v_B = u + v_A \\ v_A = v_B - u \end{cases} \quad \text{(1M)}$$

把 $v_A = v_B - u$ 代入(1)，可得

$$m_A (u - v_B + u) = m_B v_B$$

$$\therefore \; v_B = \frac{2mAu}{(m_A + m_B)} \quad \text{(1A)}$$

把 $v_B = v_A + u$ 代入(1)，可得

$$m_A (u - v_A) = m_B (v_A + u)$$

$$\therefore \; v_A = \frac{(m_A - m_B)u}{(m_A + m_B)} \quad \text{(1A)}$$

4. 把一根長度為 ℓ 而質量為 M 的均勻木棒放在平滑的水平面上。一顆質量為 m 的點質量以速率 v 趨向木棒，最後跟木棒碰撞。碰撞後，點質量便停下來。

   在以下情況中，木棒的重心碰撞後的速率是多少？假設碰撞是彈性的。

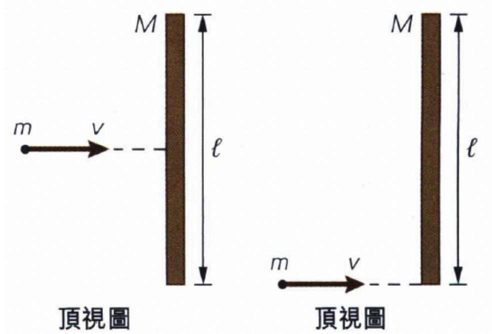


圖 (a) 圖 (b)

   (a) 點質量擊中木棒的中心 (圖 a)。

   (b) 點質量擊中木棒的一端 (圖 b)。木棒碰撞後向右方移動並旋轉。

Ans:

(a) 當質量為 m 的點質量擊中木棒的中心時，此次碰撞可視為質量為 m 的點質量和另一質量為 M 的點質量之間的碰撞。

取向右為正。假設木棒於碰撞後以速度 V 移動。運用動量守恆定律，可得

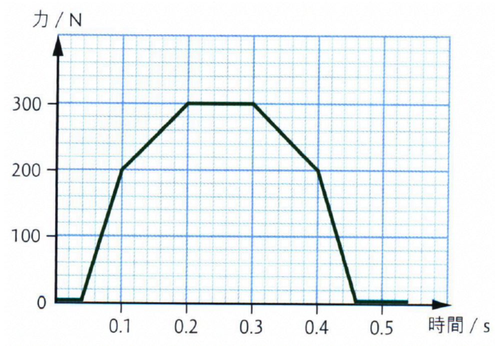
$mv = MV$ (1M) $\Rightarrow$ $V = \dfrac{m}{M}v$

碰撞後，木棒重心的速率為 $\dfrac{m}{M}v$。 (1A)

(b) 運用動量守恆定律，此情況與(a)相同，因此碰撞後木棒重心的速率同為 $\dfrac{m}{M}v$。 (1A)

2 多項選擇題

1. 某物體受一道力作用。該力如圖示般隨時間改變。計算該力對物體所造成的動量變化。



A. $61\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

B. $80\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

C. $92\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$

D. 物體的質量不明，故未能判斷

Ans: C

動量變化相等於 F–t 線圖下的面積。

線圖下的面積為

面積

$$= 2[0.06 \times \frac{200}{2} + 0.1 \times \frac{200+300}{2} + 0.05 \times 300]$$

$$= 92\ \mathrm{N\,m} = 92\ \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$$

2. 有質量相同的小球 A、B 兩個，小球發生對正碰撞。碰撞前，小球 A 以速率 u 移動，小球 B 則靜止不動。假設碰撞為彈性碰撞，求兩球的速率。

	小球 A	**小球 B**
A.	$u/2$	$u/2$
B.	$u/4$	$3u/4$
C.	$u/6$	$5u/6$
D.	0	u

Ans: D

3. 某物體爆炸後分裂為碎片 X 和 Y 。假設 X 的質量為 Y 的兩倍。下列哪些敘述正確？

(1) X、Y 的速率比為 1 : 2。
(2) X、Y 的動量量值比為 1 : 2。
(3) X、Y 的動能比為 1 : 2。

A. 只有 (1)
B. 只有 (2)
C. 只有 (1) 和 (3)
D. 只有 (2) 和 (3)

Ans: C

運用動量守恆定律，於爆炸後，碎片 X、Y 的動量量值相同但方向相反，因此敘述(2)**不正確**。

此外

$$0 = m_A v_A + m_B v_B$$

$$\frac{v_A}{v_B} = -\frac{m_B}{m_A} = -\frac{1}{2}$$

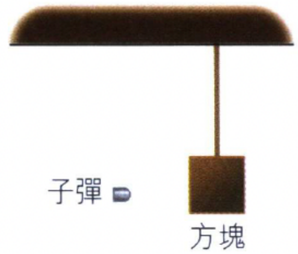
X、Y 的速率比為 1 : 2，因此敘述(1)正確。

X、Y 的動能比為

$$\frac{m_A {v_A}^2}{m_B {v_B}^2} = \frac{2 \times 1^2}{1 \times 2^2} = \frac{1}{2}$$

因此敘述(3)正確。

4. 如圖所示，子彈射中方塊，使方塊向上升起。透過量度方塊的最高和最低兩點之間的垂直距離，便可計算子彈的初速度。



下列哪項是要得到準確結果的必要條件？

(1) 連接方塊的繩子不可延伸。
(2) 子彈完全嵌入方塊中。
(3) 方塊的升溫幅度小得可略去不計。

A. 只有 (1) 和 (2)
B. 只有 (1) 和 (3)
C. 只有 (2) 和 (3)
D. (1), (2) 和 (3)

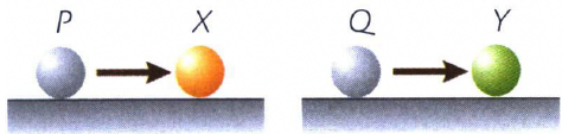
Ans: D

敍述(1)為必要條件。若繩子可延伸，方塊的部分動能會轉化為繩子的彈性勢能，使量度方塊的最高、最低兩點之間的垂直距離時與真實值有差異。

敍述(2)為必要條件。要得到準確結果，子彈的全部動能均須轉移至方塊中。

敍述(3)為必要條件。若方塊升溫，則代表子彈的能量有部份以熱散失，這會影響結果的準確性。

5. 在光滑水平面上，兩個相同的小球 P 和 Q 起初以相同速率移動。其後，兩球分別與小球 X 和 Y 發生彈性碰撞。



碰撞後，P 變為靜止，Q 則逆轉其移動方向。X、Y 兩球中，哪一個球獲得較大動量？哪一個球獲得較大動能？

	較大動量	**較大動能**
A.	X	X
B.	X	Y
C.	Y	X
D.	Y	Y

Ans: C

取向右為正。兩球的總動量應為正值。由於 P 的末動量為零，而 Q 的末動量為負值，因此 Y 應比 X 獲得較大動量。由於該碰撞為彈性碰撞，因此總動能守恆。在此兩個情況中，P 的所有初動能都轉移至 X，而 Q 的初動能則由 Q 和 Y 所瓜分。因此，X 應比 Y 獲得較大的動能。

6. 質量為 0.7 kg 的小球，從離地 3 m 高處從靜止下墜。小球着地後回彈至原來高度。假設小球與地面的撞擊時間為 0.02 s，求作用在小球上的撞擊力。

A. 267 N
B. 384 N
C. 537 N
D. 767 N

Ans: C

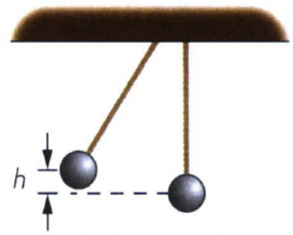
小球剛撞擊前的速率為

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.81)(3)} = 7.672 \text{ m s}^{-1}$$

作用在小球上的撞擊力為

$$F = \frac{m(v-u)}{t} = \frac{(0.7)[7.672-(-7.672)]}{0.02} \approx 537 \text{ N}$$

7. 小球以輕繩懸掛在天花板上。偉時把小球提起高度 h 後放手。小球抵達最低點時撞上另一個小球，兩球黏在一起後升起。



假設兩球的質量相同。求兩球升至最高點時，與最低點的垂直距離。

A. $h/4$
B. $h/2$
C. $h/\sqrt{2}$
D. h

Ans: A

設左邊的小球剛撞擊前的速率為 v。運用動量守恆定律，兩球於撞擊後的共同速率為 $0.5v$。兩球的總能量由 $E = mgh = \frac{1}{2}mv^2$ 改變為

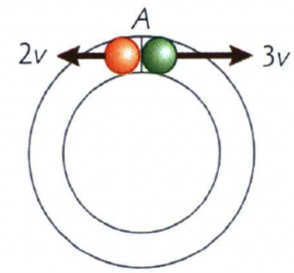
$E' = \frac{1}{2}(2m)(0.5v)^2 = 0.5E$。

兩球升至最高點時與最低點的垂直距離為

$2mgh' = 0.5mgh \quad \Rightarrow \quad h' = 0.25h$。

- 該碰撞為非彈性碰撞，故兩球的動量**並不**守恆。

8. 今有兩個相同的小球，在時間 $t = 0$ 的一刻，從 A 點沿同一水平圓形軌道以相反方向移動。兩者的初速率分別為 $2v$ 和 3v。已知兩者曾在 $t = 5s$ 的一刻發生彈性碰撞，兩球會於哪一刻再次於 A 點重遇？忽略球的大小。



A. 15 s

B. 25 s

C. 35 s

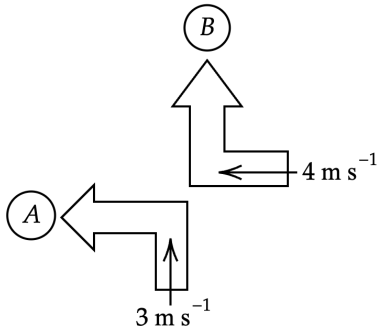
D. 45 s

Ans: B

該碰撞屬彈性碰撞，故兩球的總動量和總動能守恆。由於兩球的質量相同，因此兩球的速率互換。

因此，兩球每次相撞時，撞擊點會比前次向順時針方向推移 $\frac{3}{5}$ 週，並於 5 次碰撞後返回 A 點。故此，答案為 5 × 5 = 25 s。

9. A、B 兩個相同的球以互相垂直的方向移向對方，如圖。兩球發生彈性碰撞。碰撞前，A 的速率為 $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，B 的速率則為 $4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。



碰撞後，兩球的速率為何？

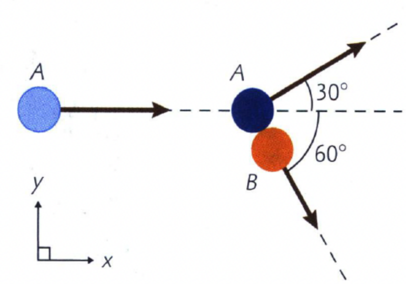
	小球 A	**小球 B**
A.	$1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
B.	$3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
C.	$4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
D.	$5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$	$5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Ans: C

由於總動量守恆，$3m\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ 的向上動量和
$4m\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ 的向左動量於碰撞後必須保留。
只有選項 *C* 符合上述條件。

- 由於動量為矢量，因此動量守恆定律沿每個方向皆成立。

10. 一個氣墊 A 與另一個起初靜止的氣墊 B 發生斜向碰撞。下圖顯示兩氣墊的初速度和末速度。



從所得的數據中，下列哪些推斷是正確的？

(1) 氣墊的質量相同。
(2) 氣墊的總動能守恆。
(3) 氣墊沿 x 及 y 方向的總動量守恆。

A. 只有 (1) 和 (2)
B. 只有 (1) 和 (3)
C. 只有 (2) 和 (3)
D. (1), (2) 和 (3)

Ans: D

每當一個移動中的物體，與質量相同但靜止的物體，進行斜向彈性碰撞時，兩者於碰撞後的徑跡必成直角。因此，敍述(1)和(3)正確。
在沒有其他能量轉換的情況下（如轉換為重力勢能、彈性勢能等），氣墊的總動能在彈性碰撞中守恆。因此，敍述(2)正確。

- 直角徑跡的推導如下：

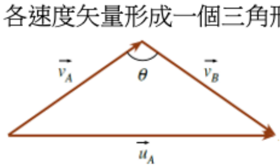
考慮物體 A（質量為 m_A）與物體 B（質量為 m_B）之間的斜向彈性碰撞。 若物體 A 的初速度為 $\overrightarrow{u_A}$， 而物體 B 起初靜止，根據動量守恆定律，可得

$m_A\overrightarrow{u_A} = m_A\overrightarrow{v_A} + m_B\overrightarrow{v_B}$

若 $m_A = m_B$，則可得

$\overrightarrow{u_A} = \overrightarrow{v_A} + \overrightarrow{v_B}$

各速度矢量形成一個三角形。



如果此次碰撞屬彈性碰撞， 那麼兩物的總動能守恆， 由此可得

$\frac{1}{2}mu_A^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$

$u_A^2 = v_A^2 + v_B^2$

三個速度矢量的量值符合畢氏定理的條件，故夾角 θ 為直角。