№10 М.С. Некрасов Артём 216

Субгауссовские и субэкспоненциальные случайные величины.

1. Пусть ξ это субгауссовская случайная величина с параметром σ^2. Докажите, что $Var\xi \le \sigma^2$.

Решение.

По определению:

$M_{\xi-\mathbb{E}\xi}(\lambda) = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)\right]$

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)\right] \le \exp\left(\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right), \quad \forall\lambda.$ Разложим по Тейлору:

$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)\right] = \mathbb{E}\left[1 + \lambda(\xi - \mathbb{E}\xi) + \left(\frac{\left(\lambda(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)^2}{2}\right) + o\left(\lambda(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[1 + \lambda(\xi - \mathbb{E}\xi) + \left(\frac{\lambda^2(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{2}\right) + o(\lambda^2(\xi - \mathbb{E}\xi)^2)\right] =$$

$$= 1 + \lambda(\mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}\xi]) + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2] + o(\lambda^2)$$

$\exp\left(\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right) = 1 + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + o(\lambda^2)$. Итого:

$1 + \lambda\underbrace{\mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}\xi]}_{=0} + \frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2] + o(\lambda^2) \le 1 + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2} + o(\lambda^2)$. Отсюда:

$\boxed{Var[\xi] \le \sigma^2}$

2. Пусть $\xi \sim Bin(1, p)$. Докажите, что ξ является субгауссовской случайной величиной и найдите ее параметр. Отдельно рассмотрите $p = 1/2$. Найдите её субгауссовский параметр σ^2_{opt} и докажите его минимальность (т. е. что случайная величина $\xi \sim Bin(1,1/2)$ не является субгауссовской с параметром σ^2 для любого $\sigma^2 < \sigma^2_{opt}$).

Решение.

ёкаламэнэ

3.
a) Пусть ξ это субэкспоненциальная величина с параметрами (σ, b). Покажите, что для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ случайная величина $\alpha \cdot \xi$ является субэкспоненциальной с параметрами $(\alpha\sigma, \alpha b)$.

Решение.

$\xi \in SE(\sigma, b) \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)\right] \le \exp\left(\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right) \ \forall\lambda: |\lambda| \le \frac{1}{b}$

Покажем, что $\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\alpha \cdot \xi - \mathbb{E}[\alpha \cdot \xi])\right)\right] \le \exp\left(\frac{\lambda^2(\alpha \cdot \sigma)^2}{2}\right) \forall\lambda: |\lambda| \le \frac{1}{b}$

Рассмотрим левую часть неравенства:

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\alpha \cdot \xi - \mathbb{E}[\alpha \cdot \xi])\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\alpha \cdot \xi - \alpha \cdot \mathbb{E}\xi)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\alpha \cdot \lambda(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)\right], \quad$ так как $\mathbb{E}[\alpha \cdot \xi] = \alpha \cdot \mathbb{E}\xi$

Умножение на константу также не влияет на дисперсию: $Var[\alpha \cdot \xi] = \alpha^2 \cdot Var\xi$. Поскольку σ^2 — дисперсия ξ, то

$Var[\alpha \cdot \xi] = \alpha^2 \cdot \sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = Var\xi = \frac{Var[\alpha \cdot \xi]}{\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad Var[\alpha \cdot \xi] = \alpha^2 \cdot \sigma^2$

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \cdot \alpha(\xi - \mathbb{E}\xi)\right)\right] \le \exp\left(\frac{(\lambda \cdot \alpha)^2\sigma^2}{2}\right) \forall\lambda: |\alpha \cdot \lambda| \le \frac{1}{\alpha \cdot b}, \quad$ заметим, что $|\alpha \cdot \lambda| \le \frac{1}{\alpha \cdot b}$ эквивалентно $|\lambda| \le \frac{1}{b}$ при $\lambda \ne 0$.
Это верно, так как мы можем разделить обе стороны неравенства на α, и пределы интеграла не изменятся. Таким образом:

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\alpha \cdot \xi - \mathbb{E}[\alpha \cdot \xi])\right)\right] \le \exp\left(\frac{\lambda^2(\alpha \cdot \sigma)^2}{2}\right) \forall\lambda: |\lambda| \le \frac{1}{b}$

Значит, если $\xi \in SE(\sigma, b), \quad$ то и $\alpha \cdot \xi \in SE(\alpha \cdot \sigma, \alpha \cdot b)$

b) Пусть есть независимые субэкспоненциальные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ с параметрами (σ, b). Покажите, что $\xi_1 + \dots + \xi_n$ является субэкспоненциальной с параметрами $(\sqrt[2]{n}\sigma, b)$.

Решение.

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi_i - \mathbb{E}\xi_i)\right)\right] \le \exp\left(\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right) \forall\lambda: |\lambda| \le \frac{1}{b}$

$\mathbb{E}[\xi_1 + \dots + \xi_n] = \mathbb{E}\xi_1 + \dots + \mathbb{E}\xi_n = n\mathbb{E}\xi_i$: $\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mathbb{E}\xi_i)\right)\right], \quad Var[\xi_1 + \dots + \xi_n] = Var\xi_1 + \dots + Var\xi_n = nVar\xi_i = n\sigma^2$

Воспользуемся неравенством Маркова: $\mathbb{P}(Y \ge a) \le \frac{\mathbb{E}Y}{a}$. Возьмем $Y = \exp\left(\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mathbb{E}\xi_i)\right)$, $a = \exp\left(\lambda(\sqrt{n}\sigma)\right)$

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mathbb{E}\xi_i)\right) \ge \exp\left(\lambda(\sqrt{n}\sigma)\right)\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mathbb{E}\xi_i)\right)\right]}{\exp\left(\lambda(\sqrt{n}\sigma)\right)}$$

Дальше можно применить теорему о субэкспоненциальной концентрации для сумм: $\mathbb{P}(\bar{X} - \mathbb{E}X_1 \ge t) \le \begin{cases} \exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2}\right), t \le \frac{\sigma^2}{b} \\ \exp\left(-\frac{nt}{2b}\right), t > \frac{\sigma^2}{b} \end{cases}$

...

$\mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda(\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mathbb{E}\xi_i)\right)\right] \le \exp\left(\frac{\lambda^2(\sqrt{n}\sigma)^2}{2}\right) \forall\lambda: |\lambda| \le \frac{1}{b}$