№6 Некрасов Артём 216

Исследовать функциональный ряд на равномерную сходимость на множестве $D=\mathbb{R}$

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2} \le \frac{x}{n^2|x|}$ (по нер-ву о средних)

I. $x\ne 0$: $\frac{x}{n^2|x|} = \operatorname{sign}(x)\cdot\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n^2}$ – сходится

II. $x=0$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} = 0 \le \frac{1}{n^2}$ – сходится

По пр-ку Вейерштрасса: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ – сходится равномерно

Исследовать функц. ряд на равномерную сходимость на мн-ве $D=(-1,1)$:

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^{2n}}$

Заметим, что при $x=1$:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ расходится. ; $\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ – непрерывна на $(-1;1]$

Тогда по методу граничных точек – равномерной сходимости нет.

Исследовать функц. ряд на равномерную сходимость на мн-ве $D=\mathbb{R}$:

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x\cdot\cos(nx)}{\ln(n+x^2)}$

$a_n = \sin x\cdot\cos(nx)$

$b_n = \frac{1}{\ln(n+x^2)}$

$\left|\sum\limits_{n=1}^{N} \sin x\cdot\cos(nx)\right| \le \frac{|\sin x|}{|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{2\cdot|\sin\frac{x}{2}||\cos\frac{x}{2}|}{|\sin\frac{x}{2}|} = 2\cos\frac{x}{2} \le 2$

$\frac{1}{\ln(n+x^2)}$ – монотонная по $n$

$\sup\left|\frac{1}{\ln(n+x^2)} - 0\right| = \frac{1}{\ln n} \to 0 \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+x^2)} \rightrightarrows 0$

Значит сходится равномерно по признаку Дирихле.

Исследовать функц. ряд на равномерную сходимость на мн-ве $D=[0,+\infty)$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n}+\sqrt{x})}$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{n}}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n}+\sqrt{x})} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot a_n$

$a_n$ – монотонно убывает по $n$.

$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{n}} \to 0$ $\quad \sup\left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$

тогда по признаку Лейбница ряд сходится равномерно

Исследовать функц. ряд на равномерную сходимость на мн-ве $D=\mathbb{R}$:

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2}$

По признаку Коши:

$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{1+(x-n)^2}\right| \underset{p=1}{\overset{x=n}{=}} \left|\frac{1}{1}\right| = \varepsilon \Rightarrow$ Не сходится равномерно.

(т.е. отрицание кр. Коши)