№27 М.А. Некрасов Артём 216

Сфера Римана. Дробно-линейное отображение.

1. Пусть точка, соответствующая точке $z \in \mathbb{C}$, имеет на сфере Римана координаты (ξ, η, ζ). Найти координаты на сфере Римана точки, соответствующей точке $\frac{1}{z}$.

Решение.

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \xi = \frac{x}{|z|^2+1}, \quad \eta = \frac{y}{|z|^2+1}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{|z|^2+1}, \quad x = \xi \cdot \frac{1}{1-\zeta}, \quad y = \eta \cdot \frac{1}{1-\zeta}, \quad |z|^2 = \zeta \cdot \frac{1}{1-\zeta}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{(\xi - i\eta)}{\zeta} = \underbrace{\frac{\xi}{\zeta}}_{x_{\frac{1}{z}}} - \underbrace{\frac{\eta}{\zeta}}_{y_{\frac{1}{z}}}$$

$$\xi_{\frac{1}{z}} = \frac{x_{\frac{1}{z}}}{\left|\frac{1}{z}\right|^2+1} = \frac{\xi/\zeta}{\frac{1-\zeta}{\zeta}+1} = \xi, \quad \eta_{\frac{1}{z}} = \frac{y_{\frac{1}{z}}}{\left|\frac{1}{z}\right|^2+1} = \frac{-\frac{\eta}{\zeta}}{\frac{1-\zeta}{\zeta}+1} - \eta, \quad \zeta_{\frac{1}{z}} = \frac{\left|\frac{1}{z}\right|^2}{\left|\frac{1}{z}\right|^2+1} = \frac{\frac{1-\zeta}{\zeta}}{\frac{1-\zeta}{\zeta}+1} = 1-\zeta$$

$$\boxed{(\xi, \quad -\eta, \quad 1-\zeta) - \text{координаты на сфере Римана точки, соответствующей точке} \frac{1}{z}}$$

2. Доказать, что отображение $w = \frac{1}{z}$ переводит

a) прямые и окружности, не содержащие точку 0, в окружности

b) прямые и окружности, содержащие точку 0, в прямые.

Решение.

Выпишем обобщенное уравнение прямой и окружности:

$$\begin{cases} A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0 \\ A\, z\, \bar z + Bz + \bar B \bar z + D = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 - \text{прямая} \\ A \neq 0 - \text{окружность} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} D = 0 - \text{ проходят через } z = 0 \\ D \neq 0 - \text{не проходят через } z = 0 \end{array}\right. \quad (\star) \end{cases}$$

Выразим z через w и подставим в уравнение:

$$w = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{w} \quad \Rightarrow \quad A\,\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{\bar w} + B\cdot\frac{1}{w} + \bar B\cdot\frac{1}{\bar w} + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D\, w\cdot\bar w + Bw + \bar B \bar w + A = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} D = 0, & (\star) - \text{прямая} \\ D \neq 0, & (\star) - \text{окружность} \end{array}\right.$$

3. Найти ДЛО, переводящее точки 0, ∞, i в точки −1, ∞, i соответственно.

Решение.

Пусть искомое ДЛО имеет вид: $w = \frac{az+b}{cz+d}$.

$$w(0) = \frac{b}{d} = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -d \neq 0, \quad w(\infty) = \lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} = \infty \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a \neq 0 \\ c = 0 \end{cases}, \quad w(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{ai+b}{-b} = -\frac{a}{b}i - 1 = i$$

Решим это уравнение:

$$-\frac{a}{b}i - 1 = i \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{-1-i}{i} = -1+i$$

Тогда:

$$w = \frac{az+b}{-b} = \frac{-\frac{a}{b}z - 1}{1} = \boxed{(1-i)z - 1 \text{ искомое ДЛО}}$$

4. Найти ДЛО, переводящее точки 1, i, 0 в точки 1, i, −1 соответственно.

Решение.

$$\frac{z-a_1}{z-a_3}\cdot\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1} = \frac{w-b_1}{w-b_3}\cdot\frac{b_2-b_3}{b_2-b_1}, \qquad \begin{cases} w(a_1) = b_1 \\ w(a_2) = b_2 \\ w(a_3) = b_3 \end{cases}$$

$$\frac{z-1}{z}\cdot\frac{i}{i-1} = \frac{w-1}{w+1}\cdot\frac{i+1}{i-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{z-1}{z}i = \frac{w-1}{w+1}\cdot(i+1) \Leftrightarrow (z-1)(w+1)i = z(w-1)(i+1)$$

$$\begin{cases} w(z-1)i + (z-1)i = w\cdot z(i+1) - z(i+1) \\ w(zi - i - zi - z) = -zi + i - zi - z \\ w(-z-i) = z(-1-2i) + i \\ w = \frac{z(-1-2i)+i}{-z-1} = \frac{z(1+2i)-i}{z+i} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{w(z) = \frac{(1+2i)z - i}{z+i} \text{ искомое ДЛО}}$$