

Задача 11.

При игре в преферанс 32 карты раздали на троих человек по 10 карт каждому и две карты снесли в прикуп. Какова вероятность того, что в прикупе оказались два туза? А если вы один из игроков и у вас среди карт нет тузов?

Решение.

Вероятность того, что в прикупе лежит туз: $4/32 = 1/8$;

Вероятность того, что второй каротой в прикупе тоже является туз: $3/31$;

Значит с вероятностью $1/8 \cdot 3/31 = 3/248$ в прикупе два туза.

Если же я игрок и у меня нет ни одного туза, то с вероятностью $4/22 = 2/11$ в прикупе лежит туз, с вероятностью $3/21 = 1/7$ еще один, то есть искомая вероятность: $2/11 \cdot 1/7 = 2/77$.

Ответ: $3/248$; $2/77$

Задача 12.

По n ящикам раскладываются k шаров случайным образом. Найдите вероятность того, что в j -м ящике лежит k_j шаров, $k_1 + \dots + k_n = k$. Рассмотрите случаи различных и неразличимых шаров.

Решение.

Положим A – в j -ом ящике лежит k_j шаров

★ Для различных:

$C_k^{k_j}$ – способов выбрать k_j шаров. $|\Omega| = n^k$.

Значит

$$P(A) = \frac{C_k^{k_1} \cdot C_{k-k_1}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{k-k_1-\dots-k_{n-1}}^{k_n}}{n^k} = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n! \cdot n^k}$$

★ Для неразличимых:

C_{n+k-1}^{k-1} – способов разложить k шаров по ящикам с помощью метода перегородок.

$$P(A) = \frac{1}{C_{n+k-1}^{k-1}}$$

Задача 13.

Правильная монета бросается N раз. Какова вероятность того, что орел выпал ровно два раза при условии, что выпало четное число орлов?

Решение.

Для решения этой задачи безусловно потребуется формула условной вероятности:

$$\Pr[A|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}, \quad \text{где } \begin{cases} A - \text{"Орел выпал ровно два раза"} \\ B - \text{"Выпало четное число орлов"} \end{cases}$$

А также формула Бернулли:

$$\Pr = \frac{C_N^k}{2^N}, \quad \text{где } C_N^k = \frac{N!}{k! \cdot (N - k)!}$$

$$C_N^2 = \frac{N!}{2! \cdot (N - 2)!}$$

$$\Pr[B] = 1/2, \quad \text{так как вариантов тут немного: либо четное, либо нечетное ...}$$

Тогда итоговая вероятность:

$$\Pr[A|B] = \frac{\frac{N!}{2! \cdot (N - 2)!} / 2^N}{1/2} = \frac{\frac{N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2)!}{2 \cdot (N - 2)!} / 2^N}{1/2} = \frac{\frac{N \cdot (N - 1)}{2} / 2^N}{1/2} = \frac{N \cdot (N - 1)}{2^N}$$

Задача 14.

Имеется N коробок, в каждой из которых лежит a белых и b черных шаров. Из первой коробки выбирается случайным образом шар и перекладывается во вторую коробку, затем из второй коробки извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый, если
а) $N = 2$; б) $N = 100$?

Решение.

Решения не будет.