Интегральная теорема Коши и интегральная формула Коши.

⋆ Интегральная теорема Коши:

$D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $f \in \mathcal{O}(G)$, $G \supset \overline{D}$-открытое множество, тогда

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

⋆ Интегральная формула Коши:

$D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $f \in \mathcal{O}(G)$, $G \supset \overline{D}$-открытое множество, тогда $\forall z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

Вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

1. $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz$

<u>Решение.</u>

$$\oint_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}dz = \oint_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{(z-1)(z+3)}dz$$

Сразу выделим проблемные точки $z = 1, z = -3$, однако исходя из графика проходит только через точку $z = 1$.

$$\oint_{|z-1|=2}\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{(z-1)(z+3)}dz = \oint_{|z-1|=2}\frac{\frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}}{(z-1)}dz = 2\pi i\cdot f(1) = 2\pi i\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{4} = \boxed{\frac{\pi i}{2}}, \qquad f(z) = \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z+3}$$

2. $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}$

<u>Решение.</u>

Сразу выделим проблемные точки $z = \pm 3i, z = -9$, однако исходя из графика проходит только через точки $z = \pm 3i$.

$$\frac{1}{z^2+9} = \frac{1}{(z-3i)(z+3i)} = \frac{A}{z-3i} + \frac{B}{z+3i} = \frac{(A+B)z + 3i(A-B)}{(z-3i)(z+3i)} \Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 \\ A-B = \frac{1}{3i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = -\frac{1}{6i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{i}{6} \\ B = \frac{i}{6} \end{cases}$$

$$\oint_{|z|=4}\frac{dz}{(z^2+9)(z+9)} = \oint_{|z|=4}\frac{-\frac{i}{6}dz}{(z-3i)(z+9)} + \oint_{|z|=4}\frac{\frac{i}{6}dz}{(z+3i)(z+9)}$$ ⊜

$$\oint_{|z|=4}\frac{-\frac{i}{6}dz}{(z-3i)(z+9)} = \oint_{|z|=4}\frac{\frac{-i}{6(z+9)}}{(z-3i)}dz = 2\pi i\cdot f(3i) = 2\pi\cdot\frac{1}{6(3i+9)} = \frac{\pi}{30} - \frac{\pi i}{90}, \qquad f(z) = \frac{-i}{6(z+9)}$$

$$\oint_{|z|=4}\frac{\frac{i}{6}dz}{(z+3i)(z+9)} = \oint_{|z|=4}\frac{\frac{i}{6(z+9)}}{(z+3i)}dz = 2\pi i\cdot f(-3i) = 2\pi\cdot\frac{-1}{6(-3i+9)} = -\frac{\pi}{30} - \frac{\pi i}{90}, \qquad f(z) = \frac{i}{6(z+9)}$$

⊜ $\displaystyle\frac{\pi}{30} - \frac{\pi i}{90} + \left(-\frac{\pi}{30} - \frac{\pi i}{90}\right) = -\frac{2\pi i}{90} = \boxed{-\frac{\pi i}{45}}$

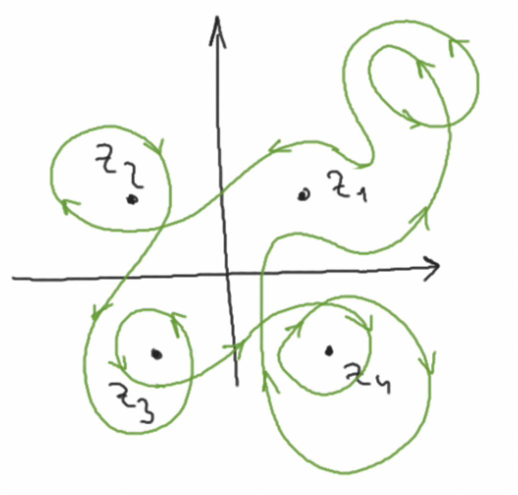
3. $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{\operatorname{tg} z}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz$

<u>Решение.</u>

Сразу выделим проблемные точки $z = 0, z = -2$, однако исходя из графика проходит только через точку $z = 0$.

$$\oint_{|z|=1}\frac{\operatorname{tg} z}{ze^{\frac{1}{z+2}}}dz = 2\pi i\cdot f(0) = \boxed{0}, \qquad f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{e^{z+2}}$$

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^4+1}$, *где* γ *изображена на рис. 3.*



$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$,

$z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

Рис. 3: Кривая интегрирования для задачи 4 из ДЗ

Сразу выделим проблемные точки $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}i}{2}$, и исходя из графика проходит через все точки :(

через точку z_1 проходит 1 раз против часовой $(+)$
через точку z_2 проходит 1 раз по часовой $(-)$
через точку z_3 проходит 1 раз против часовой$(+)$
через точку z_4 проходит 2 раза по часовой $(--)$

$$\oint_{\gamma}\frac{dz}{z^4+1} = \oint_{\gamma}\frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} = \oint_{\gamma}\frac{dz}{\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\right)} =$$

$$= 2\pi i\cdot f_1(z_1) - 2\pi i\cdot f_2(z_2) + 2\pi i\cdot f_3(z_3) - 2\pi i\cdot f_4(z_4) = -2\pi i\left(\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{i}{4\sqrt{2}} + \frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -2\pi i\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{i}{4\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{\pi i}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$