№19 М.А. Некрасов Артём 216

Табличные интегралы:

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\sin bx - b\cos bx) + C$$

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(-a\cos bx + b\sin bx) + C$$

Теорема о дифференцируемости НИЗП $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$:

$\star$ f и $\frac{df}{dy}$ непрерывны на $[a,+\infty)\times[c,d]$

$\star$ $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ – сходится равномерно на $[c,d]$

$\star$ $\exists y_0 \in [c,d]$: $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)$ – сходится

$\star\star\star \Rightarrow F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dy$ – дифференцируема, $F'(y) = \int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$

1. *Вычислить интеграл:*

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\sin 3x\,dx, \qquad p,q>0$$

<u>Решение.</u>

$$\underbrace{f(x,p)}_{\text{непр.на }[0,+\infty)\times[c,d]} = \begin{cases}\frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\sin 3x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}, \qquad \text{так как при } x\to 0: \frac{1-1}{x}\cdot 3x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \left(\frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\cdot\sin 3x\right)_p' = \frac{\sin 3x}{x}\cdot(e^{-px}-e^{-qx})_p' = \frac{\sin 3x}{x}\cdot(e^{-px})_p' - \frac{\sin 3x}{x}\cdot(e^{-qx})_p' = \frac{\sin 3x}{x}\cdot e^{-px}\cdot -x = -\frac{\sin 3x}{e^{px}}, x\neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad x=0$$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial p}}_{\text{непр.на }[0,+\infty)\times[c,d]} = -\frac{\sin 3x}{e^{px}}, \qquad \text{так как стык в нуле}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\cdot\sin 3x\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{e^{px}}-\frac{1}{e^{qx}}\right)\sin 3x\,dx = \int_0^{+\infty}0dx \text{ – сходится при } p_0=q, \qquad q\in[c,d]$$

Нужна равномерная сходимость: $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx = \int_0^{+\infty}-\frac{\sin 3x}{e^{px}}dx$

$\left|-\frac{\sin 3x}{e^{px}}\right| \le \frac{1}{e^{px}} \quad\Rightarrow\quad \int_0^{+\infty}\frac{1}{e^{px}}dx$ – сходится.

Из НИЗП:

$$F'(p) = \int_0^{+\infty}-\frac{\sin 3x}{e^{px}}dx = -\int_0^{+\infty}\frac{\sin 3x}{e^{px}}dx = -\frac{e^{-px}}{p^2+9}(p\sin 3x - 3\cos 3x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{e^{-px}}{p^2+9}(p\sin 3x + 3\cos 3x)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= -\frac{1}{e^{p0}}(p0+3\cdot 1) = -\frac{3}{p^2+9}$$

$$F(p) = \int -\frac{3}{p^2+9}dp = -3\int\frac{1}{p^2+9}dp = -3\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{p}{3} + c = -\operatorname{arctg}\frac{p}{3} + c$$

$$F(q) = 0 = -\operatorname{arctg}\frac{q}{3} + c \quad\Rightarrow\quad c = \operatorname{arctg}\frac{q}{3}$$

Получаем $\boxed{-\operatorname{arctg}\frac{p}{3} + \operatorname{arctg}\frac{q}{3}}$

2. *Вычислить интеграл:*

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px}\cos 2x\,dx, \qquad p>0$$

<u>Решение.</u>

Пусть $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px}\cos 2x\,dx = \frac{e^{-px}}{p^2+4}(-p\cos 2x + 2\sin 2x)\Big|_0^{+\infty} = \frac{p}{p^2+4}$

$f(x,p) = e^{-px}\cos 2x, \qquad f'(x,p) = -xe^{-px}\cos 2x$ – обе непрерывны на $[0,+\infty)\times[c,d]$

$\int_0^{+\infty} xe^{-px}\cos 2x\,dx$ – равномерно сходится пр признаку Вейерштрасса: $|xe^{-px}\cos 2x| \le xe^{-cx} \le e^{-\frac{cx}{2}} \quad \forall p_0\in[c,d]$

Тогда $F'(p) = -\int_0^{+\infty} xe^{-px}\cos 2x\,dx = -\left(\frac{p}{p+4}\right)' = \boxed{\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2}}$

3. Вычислить интеграл:

$$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,dx, \qquad p>0$$

<u>Решение.</u>

$(x^{p-1})'' = (x^{p-1}\ln x)' = x^{p-1}\ln^2 x$ – исходное выражение.

Тогда

$$F(p) = \int_0^1 x^{p-1}dx = \frac{x^p}{p}\Big|_0^1 = \frac{1}{p} \quad\Rightarrow\quad F'(p) = \int_0^1 x^{p-1}\ln x\,dx \quad\Rightarrow\quad F''(p) = \int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,dx$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)'' = \boxed{\frac{2}{p^3}}$$

Обоснование: $x^{p-1}, x^{p-1}\ln x, x^{p-1}\ln^2 x$ – непрерывны на $[0,1]\times[c,d], \qquad c\ge 1$

$\int_0^1 x^{p-1}\ln x\,dx$,

$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,dx$ – сходятся равномерно по признаку Вейерштрасса, так как можно ограничить $|\ln^2 x|$,

а такой интеграл сходится на $[0,1]$ (исходный тоже сходится да)

4. Вычислить интеграл:

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-1}{\ln x}dx, \qquad p>0$$

<u>Решение.</u>

Рассмотрим: $\int_1^p x^{y-1}dy = \frac{x^{y-1}}{\ln x}\Big|_1^p = \frac{x^{p-1}-1}{\ln x}$, покажем, что $\int_0^1 x^{y-1}dx$ сходится равномерно.

$i. p\ge 1$

$0 \le y-1 \le p-1$

$1 \ge x^{y-1} \ge x^{p-1}, \qquad x\in(0,1]$

Тогда $\int_0^1 x^{y-1}dx \le \int_0^1 1dx$ – сходится $\quad\Rightarrow\quad \int_0^1 x^{y-1}dx$ – сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

$ii. 0<p<1$

$p-1 \le y-1 \le 0$

$x^{p-1} \ge x^{y-1} \ge 1$

Тогда $\int_0^1 x^{y-1}dx \le \int_0^1 x^{p-1}dx = \int_0^1\frac{1}{x^{1-p}} \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 x^{y-1}dx$ – сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.

$$\int_1^p\left(\int_0^1 x^{y-1}dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_1^p x^{y-1}dy\right)dx$$

Получаем:

$$\int_1^p\left(\int_0^1 x^{y-1}dx\right)dy = \int_1^p\frac{1}{y}dy = \ln|y|\Big|_1^p = \ln|p| = \int_0^1\left(\int_1^p x^{y-1}dy\right)dx = \int_0^1\frac{x^{p-1}-1}{\ln x}dx$$

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}-1}{\ln x}dx = \boxed{\ln|p|}$$