№28 М.А. Некрасов Артём 216

Интегралы вдоль путей.

1. Вычислить интеграл $\int_\gamma \ln z\,dz$ *($\ln z = \ln|z| + i\arg z$ – главное значение логарифма),* $\gamma: |z| = 1$, *где*

a) начальная точка $z_0 = 1$;

Решение.

$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [0,2\pi], \quad \gamma'(t) = i\cdot e^{it} = i\cos t - \sin t$

$$\int_\gamma \ln z\,dz = \int_\gamma \underbrace{\ln|z|}_{0,\text{т.к.}|z|=1} + i\arg z\,dz = i\int_\gamma \arg z\,dz$$

Известно, что $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt$

$$\int_\gamma \ln z\,dz = i\int_\gamma \arg z\,dz = i\int_0^{2\pi}\arg e^{it}\cdot ie^{it}dt = -\int_0^{2\pi} t\cdot(\cos t + i\sin t)dt = -\underbrace{\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt}_{0} - i\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = -i\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt =$$

$$= -i\left(-t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\cos t\,dt\right) = -i\cdot(-2\pi) = \boxed{2\pi i}$$

b) начальная точка $z_0 = -1$.

Решение.

$\gamma(t) = e^{it}, \quad t \in [\pi,3\pi], \quad \gamma'(t) = ie^{it} = i\cos t - \sin t$

$$\int_\gamma \ln z\,dz = -\underbrace{\int_\pi^{3\pi} t\cos t\,dt}_{0} - i\int_\pi^{3\pi} t\sin t\,dt = i\left(-\cos t\cdot t\Big|_\pi^{3\pi} + \int_\pi^{3\pi}\cos t\,dt\right) = -i(3\pi - \pi) = \boxed{-2\pi i}$$

В обоих случаях обход был против часовой стрелки.

2. Вычислить интеграл $\oint_\gamma \frac{z}{\bar z}dz$, γ *– кривая на рисунке 2.*

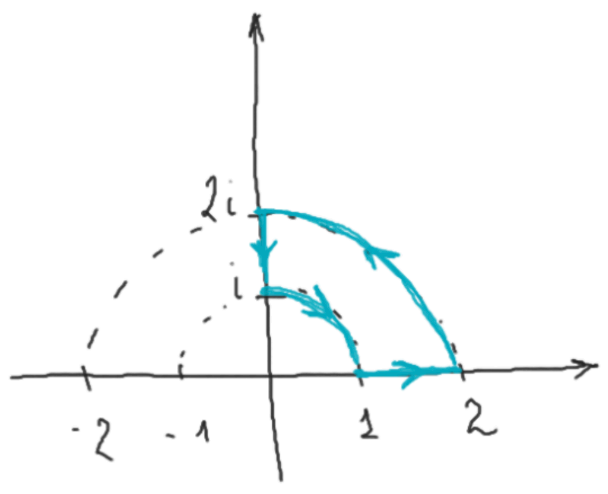

Рис. 2: Кривая для задачи 2 из ДЗ (от 2 до $2+i$ и от i до 1 – части окружностей)

Разобъём основной путь γ на 4 подпути: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [1,2] \quad \Rightarrow \quad \gamma_1'(t) = 1$

$\gamma_2(t) = 2e^{it}, \quad t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \gamma_2'(t) = 2ie^{it}$

$\gamma_3(t) = i(2-t), \quad t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \gamma_3'(t) = -i$

$\gamma_4(t) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}, \quad t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \gamma_4'(t) = -ie^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$

$$\int_\gamma \frac{z}{\bar z}dz = \int_{\gamma_1}\frac{z}{\bar z}dz + \int_{\gamma_2}\frac{z}{\bar z}dz + \int_{\gamma_3}\frac{z}{\bar z}dz + \int_{\gamma_4}\frac{z}{\bar z}dz$$

$$\int_{\gamma_1}\frac{z}{\bar z}dz = \int_1^2\frac{\gamma_1(t)}{\overline{\gamma_1(t)}}\cdot\gamma_1'(t)dt = \int_1^2\frac{t}{\bar t}dt = \int_1^2 dt = 1, \qquad \int_{\gamma_2}\frac{z}{\bar z}dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2e^{it}}{\overline{2e^{it}}}\cdot 2ie^{it}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\frac{(\cos t + i\sin t)^2}{\cos t - i\sin t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos t + i\sin t)^3 dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{3it}dt = \frac{2}{3}e^{3it}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(i\sin\frac{3\pi}{2} - 1\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i, \qquad \int_{\gamma_3}\frac{z}{\bar z}dz = \int_0^1\frac{i(2-t)}{i(t-2)}\cdot(-i)dt = i\int_0^1 dt = i, \qquad \int_{\gamma_4}\frac{z}{\bar z}dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\cdot -ie^{i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -ie^{3i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt = -i\cdot -\frac{1}{3}e^{3i\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{3}(1+i) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$$

Итого: $1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i + i - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i = \boxed{2i}$

3. Вычислить интеграл $\int_\gamma Re(\sin z)\cos z\,dz$, $\gamma: |Im(z)| \le 1$, $Re(z) = \frac{\pi}{4}$, *движение снизу в*верх.

Решение.

$\gamma(t) = \frac{\pi}{4} + it, \quad t \in [-1,1] \quad \Rightarrow \quad \gamma'(t) = i$

$$\int_\gamma Re(\sin z)\cos z\,dz = \int_{-1}^1 Re(\sin\gamma(t))\cos\gamma(t)\cdot\gamma'(t)dt$$

$$\sin\gamma(t) = \frac{e^{i\gamma(t)} - e^{-i\gamma(t)}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(e^{-t}e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{t}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{-t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) - e^{t}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)$$

$$Re(\sin\gamma(t)) = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^{-t} + e^{t}), \qquad \cos\gamma(t) = \frac{e^{i\gamma(t)} + e^{-i\gamma(t)}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{-t}\cdot e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{t}\cdot e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(e^{-t} + e^{t}) + \frac{\sqrt{2}}{4}i(e^{-t} - e^{t})$$

$$\int_\gamma Re(\sin z)\cos z\,dz = \int_{-1}^1\frac{1}{8}i\left((e^{-t} + e^{t})^2 + i(e^{-2t} - e^{2t})\right)dt = -\frac{1}{8}\int_{-1}^1(e^{-2t} - e^{2t})dt + \frac{1}{8}i\int_{-1}^1(e^{-2t} + e^{2t} + 2)dt =$$

$$= -\frac{1}{16}(e^{-2t} + e^{2t})\Big|_{-1}^1 + \frac{i}{8}\left(\frac{e^{-2t}}{-2} + \frac{e^{2t}}{2} + 2t\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{i}{8}\left(-\frac{e^{-2}}{2} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{e^{-2}}{2} + 4\right) = \frac{i}{8}(-e^{-2} + e^2) + \frac{i}{2} = \boxed{\frac{(-1 + e^4 + 4e^2)i}{8e^2}}$$

4. Вычислить интеграл $\int_{-i}^{i} ze^{z^2}dz$.

Решение.

Известно, что если f голоморфна на открытом множестве D, то есть голоморфна в каждой точке $z_0 \in D$ и f' – непрерывна на D, то

$\int_\gamma f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)), \quad$ для $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ – кусочно непрерывно дифференцируемый путь $\gamma([a,b]) \subset D$.

Пусть $f(z) = \frac{1}{2}e^{z^2}$, тогда $f'(z) = ze^{z^2}$, где $\begin{cases} f \text{ – голоморфна на } \mathbb{C} \\ f' \text{ – непрерывна на } \mathbb{C}\end{cases} \Rightarrow \int_{-i}^{i} ze^{z^2}dz = f(i) - f(-i) = \frac{1}{2}e^{-i} - \frac{1}{2}e^{-i} = \boxed{0}$

5. Вычислить интеграл $\int_{i+1}^{-1-i}(z^2 - z + 1)dz$.

Решение.

$f(z) = \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z$ – голоморфна на $\mathbb{C}$, $\quad f'(z) = z^2 - z + 1$ – непрерывна на $\mathbb{C}$

$$\int_{i+1}^{-1-i}(z^2 - z + 1)dz = \frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + z\Big|_{1+i}^{-1-i} = -\frac{2}{3}(1+i)^3 + \frac{-(1+i)^2 + (1+i)^2}{2} - (1+i) - (1+i) = \boxed{-\frac{2}{3} - \frac{10}{3}i}$$