№25 М.А. Некрасов Артём 216

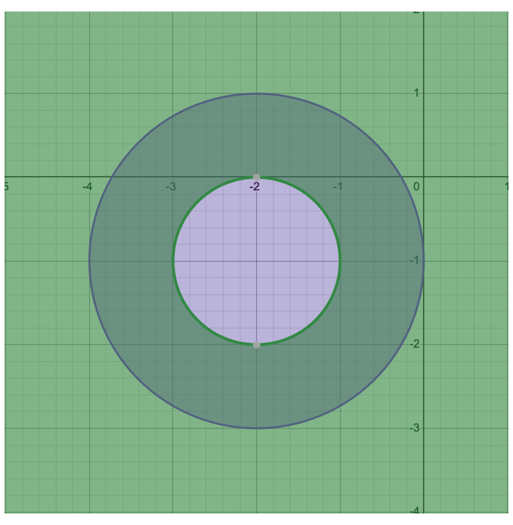
1. Найти множества точек на комплексной плоскости, определяемые условиями:

$a)\ 1 \le |z+2+i| \le 2$

<u>Решение.</u>

$z = x+iy \quad \Rightarrow \quad z+2+i = (x+2)+i(y+1)$

$|z+2+i| = \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} \quad \Rightarrow \quad 1 \le \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \le (x+2)^2+(y+1)^2 \le 4$

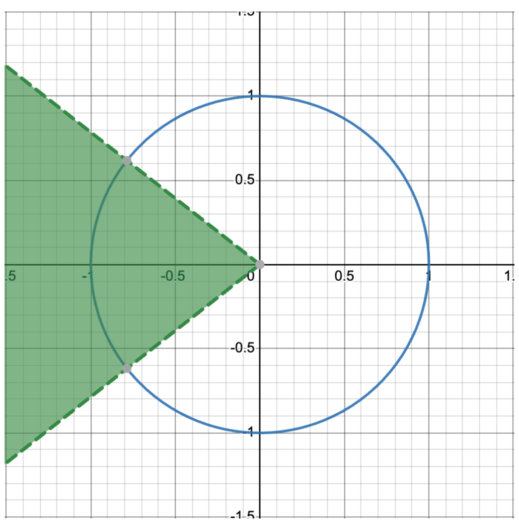


$b)\ |\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4}$

<u>Решение.</u>

$|\pi - \arg z| < \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{4} < \arg z - \pi < \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4} \quad \Rightarrow$ искомое множество-это комплексные числа,

принадлежащие $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$



2. Верно ли, что

$a)\ Ln(z) - Ln(z) = 0?$

<u>Решение.</u>

$\star\ Ln(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n):$

$Ln(z) - Ln(z) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n_1) - \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n_2) = 2\pi(n_1 - n_2), \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

что в общем случае не равно нулю (только при $n_1 = n_2$) $\quad \Rightarrow \quad \boxed{Ln(z) - Ln(z) \neq 0}$

$b)\ \sin 2z = 2\sin z \cos z\,?$

<u>Решение.</u>

$\star\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}:$

$2\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}e^{iz} - e^{-iz}e^{-iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{2iz} - e^{-2iz}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(2z)} - e^{-i(2z)}\right) = \sin 2z \quad \Rightarrow \boxed{\sin 2z = 2\sin z \cos z}$

3. Найти все значения уравнения: $\sin z - \cos z = i$

<u>Решение.</u>

$\star\ \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}:$

$\sin z - \cos z = \frac{e^{iz}(1-i) - e^{-iz}(1+i)}{2i} = -\frac{i}{2}\left(e^{iz}(1-i) - e^{-iz}(1+i)\right) \quad \Rightarrow$

$-\frac{i}{2}\left(e^{iz}(1-i) - e^{-iz}(1+i)\right) = i \quad \Rightarrow \quad e^{iz}(1-i) - e^{-iz}(1+i) = -2 \quad \Rightarrow \quad e^{2iz}(1-i) + 2e^{iz} - (1+i) = 0 \quad \Rightarrow \quad [x = e^{iz}] \Rightarrow$

$x^2(1-i) + 2x - (1+i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{(1-i)} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{(1-i)} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$

$e^{iz} = \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i) \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} = e^{Ln(x)} \quad \Leftrightarrow \quad iz = Ln(x)$

$z = \frac{1}{i}Ln(x) = -i\left(\ln|x| + i(\arg x + 2\pi n)\right) = -i\ln|x| + (\arg x + 2\pi n)$

$|x| = \left|\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)\right| = \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$

$\left[\begin{array}{ll} \arg x_1 = \operatorname{arctg}\frac{Im(x_1)}{Re(x_1)} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}, & x_1\ in\ I\ quadrant \\ \arg x_2 = \operatorname{arctg}\frac{Im(x_2)}{Re(x_2)} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{5\pi}{4}, & x_2\ in\ III\ quadrant \end{array}\right.$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = -i \cdot \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \\ z_2 = -i \cdot \ln\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \end{array}, \qquad n \in \mathbb{Z}}$$

4. В какие кривые на плоскости w переходят координатные прямые $Re(z) = const$ и $Im(z) = const$ при отображении $w = z^2$?

<u>Решение.</u>

$w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

Если $x = Re(z) = const = c_1$, то $\begin{cases} u = c_1^2 - y^2 \\ v = 2c_1 iy \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1^2 = u + \frac{v^2}{4c_1^2} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} u = c_1^2 + \frac{v^2}{4c_1^2}, & c_1 \neq 0 \\ v = 0, & c_1 = 0 \end{array}\right.$

Если $y = Im(z) = const = c_2$, то $\begin{cases} u = x^2 - c_2^2 \\ v = 2c_2 ix \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_2^2 = -u - \frac{v^2}{4c_2^2} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} u = -c_2^2 - \frac{v^2}{4c_2^2}, & c_2 \neq 0 \\ v = 0, & c_2 = 0 \end{array}\right.$