№6 Д.У. Некрасов Артём 216

1. Рассмотрите автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 \\ \dot{y} = arctg(1 - y^2) \end{cases}$$

Найдите ее положения равновесия, линеаризуйте правые части в окрестности равновесий и определите характер этих равновесий. Найдите собственные значения и векторы линеаризованных систем. Изобразите траектории, используя эту информацию, а в случае фокуса определите направление закрутки спирали (по часовой или против).

Решение.

Исследуем точку $(1,1)$. Сместим начало координат: $x = p + 1, \qquad y = q + 1$

$\begin{cases} \dot{p} = p - q^2 - 2q \\ \dot{q} = \mathrm{arctg}(-q^2 - 2q) \end{cases}$, линеаризируем с использованием разложения в двумерный ряд Тейлора в окрестности точки:

$f(p,q) = p - q^2 - 2q, \qquad f(0,0) = 0, \qquad g(p,q) = \mathrm{arctg}(-q^2 - 2q)$

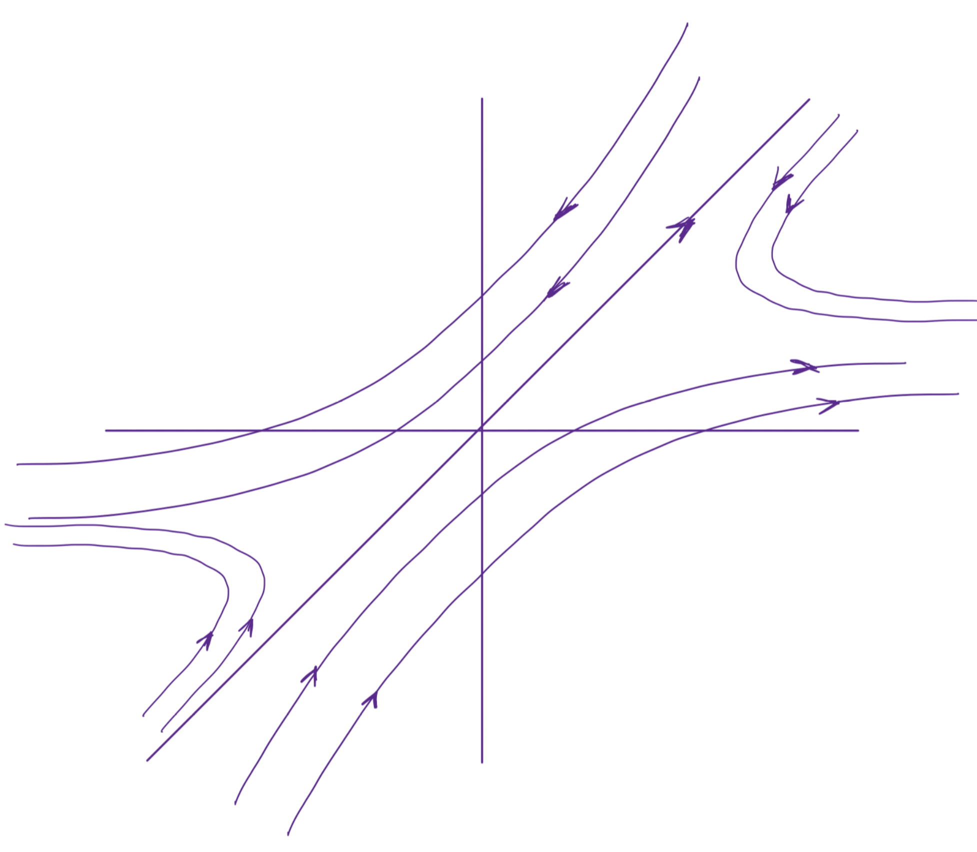
$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial p} = 1, \qquad \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial q} = -2, \qquad \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial p} = 0, \qquad \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial q} = -2$

Тогда:

$\begin{cases} \dot{p} = p - 2q \\ \dot{q} = -2q \end{cases}$, найдем собственные значения и собственные векторы:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$ – седло(неустойчивое)

$\lambda = -2$: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



Исследуем точку $(1,-1)$. Сместим начало координат: $x = p + 1, \qquad y = q + 1$

$\begin{cases} \dot{p} = p - q^2 + 2q \\ \dot{q} = \mathrm{arctg}(-q^2 + 2q) \end{cases}$, линеаризируем с использованием разложения в ряд Тейлора в окрестности точки:

$f(p,q) = p - q^2 + 2q, \qquad f(0,0) = 0, \qquad g(p,q) = \mathrm{arctg}(-q^2 + 2q), \qquad g(0,0) = 0$

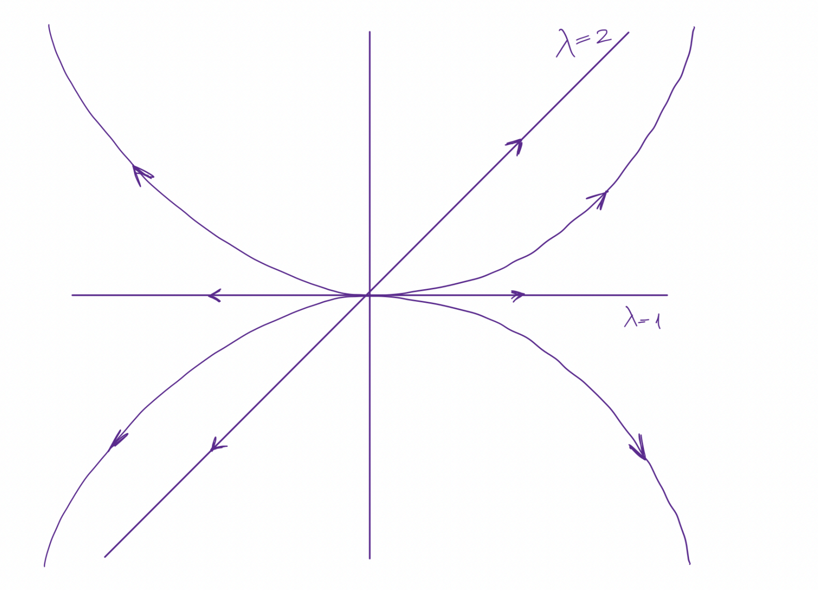
$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial p} = 1, \qquad \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial q} = 2, \qquad \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial p} = 0, \qquad \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial q} = 2$

Тогда:

$\begin{cases} \dot{p} = p + 2q \\ \dot{q} = 2q \end{cases}$, найдем собственные значения и собственные векторы:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$ – узел(неустойчивое)

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



2. Рассмотрите возможную функцию Ляпунова $V(x,y) = ax^2 + by^2$ и подберите a, b, чтобы определить характер положения равновесия (0,0) для системы $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3 \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$.

Решение.

Условие равновесия: $V(0,0) = 0$ при любых коэффициентах. $\forall (x,y) = (0,0) \Rightarrow V(x,y) > 0, \qquad ax^2 + by^2 > 0,$

то есть для $\left[\begin{array}{l} (1,0) \\ (0,1) \end{array}\right.$ должно выполнятся неравенство, так что $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$

$\dot{V} = \dfrac{dV}{dx}\dot{x} + \dfrac{dV}{dy}\dot{y} = 2ax(-2y - x^3) + 2by(x - y^3) = -2ax^4 - 4axy + 2bxy - 2by^4 = a(-x^4 - 2xy) + b(xy - y^4)$

Заметим, при $b = 2a$: $a(-x^4 - 2xy) + 2a(xy - y^4) = -ax^4 - 2ay^4 = -\underbrace{a}_{>0}\underbrace{(x^4 + 2y^4)}_{\geq 0} \leq 0,$ где равенство достигается только в точке $(x,y) = (0,0)$, так что получаем асимптотически устойчивое равновесие.

3. Пусть A симметричная $n \times n$ матрица. Рассмотрите систему $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$. Используя функцию Ляпунова $V(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, покажите, что $\bar{x} = 0$ асимптотически устойчиво, если A отрицательно определенная, и неустойчиво, если A положительно определенная.

Решение.

Рассмотрим $V' = \dfrac{dV}{dx_1}\dfrac{dx_1}{dt} + \dots + \dfrac{dV}{dx_n}\dfrac{dx_n}{dt}$. $\quad \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$.

$V' = 2x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + 2x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots + 2x_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n)$

$$V' = 2\left(2 \cdot \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2\right)$$

$$B = X^T A X = x_1(x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1}) + x_2(x_1 a_{12} + \dots + x_n a_{n2}) + \dots + x_n(x_1 a_{1n} + \dots + x_n a_{nn}) = 2\sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$$

Если A положительно определенная, то $B > 0 \quad \Rightarrow \quad V' > 0$ – нулевое решение асимптотически неустойчиво.
Если A отрицательно определенная, то $B < 0 \quad \Rightarrow \quad V' < 0$ – нулевое решение асимптотически устойчиво.

4. Сначала найдите первый интеграл системы $\begin{cases} \dot{x} = xz \\ \dot{y} = x + yz \\ \dot{z} = -z^2 \end{cases}$, *а потом с его помощью решите эту нелинейную систему уравнений. Можно ограничиться $z > 0$.*

Решение.

$\dfrac{dx}{xz} = \dfrac{dy}{z + yz} = \dfrac{dz}{-z^2}$

Первый интеграл:

$\dfrac{zdx}{xz^2} = \dfrac{xdz}{-xz^2}, \qquad -zdx = xdz, \qquad -\int \dfrac{dx}{x} = \int \dfrac{dz}{z}, \qquad -\ln|x| = \ln|z| + c_1, \qquad x = \dfrac{c_1}{z}$

$\dot{x} = xz = c_1 \quad \Rightarrow \quad x = c_1 t + c_2 \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{c_1}{c_1 t + c_2}$

$\dot{y} = c_1 t + c_2 + y\dfrac{c_1}{c_1 t + c_2}, \qquad \int \dfrac{dy}{y} = \int \dfrac{c_1}{c_1 t + c_2}dt, \qquad y = c_3(t)(c_1 t + c_2)$

Подставим:

$\dot{y} = x + yz \quad \Rightarrow \quad \dot{c_3}(c_1 t + c_2) + c_3 c_1 = c_1 t + c_2 + c_3 c_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{c}_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_3 = t + c_4$

$y = (t + c_4)(c_1 t + c_2) = c_1 t^2 + c_2 t + c_4 c_1 t + c_4 c_2 = c_1 t^2 + c_5 t + c_6$

$$\boxed{\begin{array}{c} x = c_1 t + c_2 \\ y = c_1 t^2 + c_3 t + c_4 \\ z = \dfrac{c_1}{c_1 t + c_2} \end{array}}$$

5. Найдя два первых интеграла системы, и доказав их независимость, решить следующую нелинейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = z^2 - y^2 \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y \end{cases}, \qquad \text{здесь } y > z > 0.$$

Решение.

$\dfrac{dx}{z^2 - y^2} = \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{-y}$

Заметим: $\dfrac{dx}{z^2 - y^2} = \dfrac{zdy + ydz}{z^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad dx = zdy + ydz = d(zy),$ так что первый интеграл $x = zy + c_1$

Второй интеграл: $\dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{-y}, \qquad \int ydy = \int zdz, \qquad -\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{z^2}{2} + c_2, \qquad y^2 = -z^2 + c_2$

Проверим на независисмость:

$$rk\begin{pmatrix} \dfrac{d(x - zy)}{dx} & \dfrac{d(x - zy)}{dy} & \dfrac{d(x - zy)}{dz} \\ \dfrac{d(y^2 + z^2)}{dx} & \dfrac{d(y^2 + z^2)}{dy} & \dfrac{d(y^2 + z^2)}{dz} \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} 1 & -z & -y \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} 2y & 0 & -2y^2 - 2z^2 \\ 0 & 2y & 2z \end{pmatrix} = 2, \qquad y > z > 0, \text{т. е. н. з.}$$

$\begin{cases} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y \end{cases}$, $\quad \ddot{y} + y = 0$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad [\lambda = \pm i \quad \Rightarrow \quad y = c_3 \sin t + c_4 \cos t$

$z = \dot{y} \Rightarrow z = c_3 \cos t - c_4 \sin t, \qquad x = zy + c_1 \Rightarrow x = (c_3 \cos t - c_4 \sin t)(c_3 \sin t + c_4 \cos t) + c_1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \quad x = xy + c_1 \\ y = c_3 \sin t + c_4 \cos t, \qquad c_1, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \\ z = c_3 \cos t - c_4 \sin t \end{array}}$$