№18 М.А. Некрасов Артём 216

1. *Вычислить:*

$$\lim_{p\to 0+}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2}dx$$

Решение.

$$\lim_{p\to 0+}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2}dx=\lim_{p\to 0+}\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^{px}(x^2+1)^2}dx$$

$f(x,p)=\dfrac{x}{e^{px}(x^2+1)^2}$ – непрерывна на $\underbrace{[0,+\infty)}_{x}\times\underbrace{[-1,1]}_{p}$

Проверим равномерную сходимость:

$\left|\dfrac{x}{e^{px}(x^2+1)^2}\right|\underset{p=0}{\leq}\dfrac{x}{x^4}=\dfrac{1}{x^3}$ – сходится, так как $\alpha>1\Rightarrow$ равномерная сходимость $\Rightarrow$ вносим предел под интеграл.

$$\lim_{p\to 0+}\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{+\infty}\lim_{p\to 0+}\frac{xe^{-px}}{(x^2+1)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{(x^2+1)^2}dx=\begin{bmatrix}x^2+1=t\\2xdx=dt\\dx=\dfrac{dt}{2x}\end{bmatrix}=\int_1^{+\infty}\frac{x}{t^2}\cdot\frac{dt}{2x}=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{2t}\Big|_1^{+\infty}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

2. *Найти область определения функции, заданной интегралом, и исследовать эту функцию на непрерывность:*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(px)}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

Решение.

$I.$ Область определения: Плохих точек нет.

$II.\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ – монотонна по x и $\to 0$, не зависит от параметра, значит $\rightrightarrows 0$

$$\left|\int_0^A\cos(px)dx\right|=\left|\frac{\sin(px)}{p}\right|\Big|_0^A=\left|\frac{\sin(pa)}{p}\right|\leq\frac{1}{p},\qquad p\neq 0$$

По Дирихле исходный равномерно сходится $\Rightarrow$ непрерывненько.

Проверим $p=0$: $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 0}{\sqrt{1+x^3}}dx\xrightarrow{x\to\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ – сходится, так как $\alpha>1$

Значит F всюду определена.

3. *Найти область определения функции, заданной интегралом, и исследовать эту функцию на непрерывность:*

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x^p}dx$$

Решение.

$I.\quad p<0$: $\quad\displaystyle\int_0^1\sin x^{-p}\,dx\quad$ – $\quad\sin x^{-p}$ непрерывна

$\Rightarrow$ интеграл тоже непрерывный, т. к. собственный. Деления на ноль нет.

$II.\quad p=0$: $\quad\displaystyle\int_0^1\sin x\,dx\quad$ – $\quad$ собственный интеграл с непрерывной функцией $\Rightarrow$ интеграл непрерывен.

$III.\ p>0$: $\quad$ тогда при $x\to 0$: $\dfrac{\sin x}{x^p}\to\dfrac{1}{x^{p-1}}\quad\Rightarrow\quad$ сходится при $p<2$.

Равномерная сходимость по Дирихле:

$$\left|\int_A^1\sin x\,dx\right|\leq|-\cos x|\Big|_A^1\leq 2$$

$\dfrac{1}{x^p}\rightrightarrows 0$ и монотонна по $x\quad\Rightarrow\quad$ равномерная сходимость есть.

$\boxed{p\in(0,2)}$

4. *Вычислить интегралы*:

$$a)\ \int_0^{+\infty}\frac{\sin x^3}{x}dx,\qquad b)\ \int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{9+x^2}dx$$

Решение.

$a)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^3}{x}dx=\begin{bmatrix}x^3=t\\3x^2dx=dt\end{bmatrix}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{3x^3}dt=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi}{6}}$$

$b)$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{9+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x+1}{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+9}dx+\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+9}dx\right)=\begin{bmatrix}\dfrac{x}{3}=t\\dt=\dfrac{1}{3}dx\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{9}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt+\frac{3}{9}\int_0^{+\infty}\frac{\cos 6t}{1+t^2}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{+\infty}\frac{\cos 6t}{1+t^2}dt\right)\ominus$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\operatorname{arctg}t\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos 6t}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}e^{-6}\qquad\left(\text{Интеграл Лапласа: }\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|\alpha|}\right)$$

$$\ominus\ \boxed{\frac{\pi}{12}(1+e^{-6})}$$