№22 М.А. Некрасов Артём 216

Ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

1. Найти тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)=x\sin x$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

Решение.

$i.\ \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{интегрируема}\\ \text{на } [-\pi,\pi]}} \cong \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

$$\left.\begin{matrix} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \qquad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \end{matrix}\right] - \text{наши коэффициенты Фурье}$$

$ii.\ f(x)$ – четная функция: $f(-x)=-x\cdot\sin -x=x\sin x\Rightarrow b_i=0,$ т. е. Функция раскладывается только по $\cos x$

$iii.$ Минутка нетривиальной арифметики:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin(x(n+1))}{2}+x\cdot\frac{\sin(x(1-n))}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(x(n+1))\,dx-\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(x(n-1))\,dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{x}{n+1}d\cos(x(n+1))-\int_{-\pi}^{\pi}-\frac{x}{n-1}d\cos(x(n-1))\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(x\cdot\left(\frac{cos(x(n-1))}{n-1}-\frac{cos(x(n+1))}{n+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{cos(x(n+1))}{n+1}dx}_{0}-\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(x(n-1))}{n-1}dx}_{0}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi(n+1)\cos(\pi n)-2\sin(\pi n)}{(n+1)^2}-\frac{2\pi(n-1)\cos(\pi n)-2\sin(\pi n)}{(n-1)^2}\right)=\frac{\cos\pi n}{n+1}-\frac{\cos\pi n}{n-1}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{n^2-1}$$

$iiii.\ a_0=\frac{(-1)^1\cdot 2}{0^2-1}=2$

$iiiii.$ Получим:

$$f(x)\cong\frac{2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=\boxed{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx}$$

2. Найти тригонометрический ряд Фурье для функции $f(x)=\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

$i.\ \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{интегрируема}\\ \text{на } [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}} \cong \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

$$\left.\begin{matrix} a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx \\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin 2nx\,dx \end{matrix}\right] - \text{наши коэффициенты Фурье}$$

$ii.\ f(x)$ – нечетная функция: $f(-x)=\sin -x=-\sin x=-f(x)\Rightarrow a_{n_{\{n\geq 0\}}}=0,$ т. е. функция раскладывается только по $\sin 2nx$

$$iii.\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2nx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x(1-2n))\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x(1+2n))\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x(2n-1))\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x(2n+1))\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{sin(x(2n-1))}{2n-1}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{sin(x(2n+1))}{2n+1}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=$$

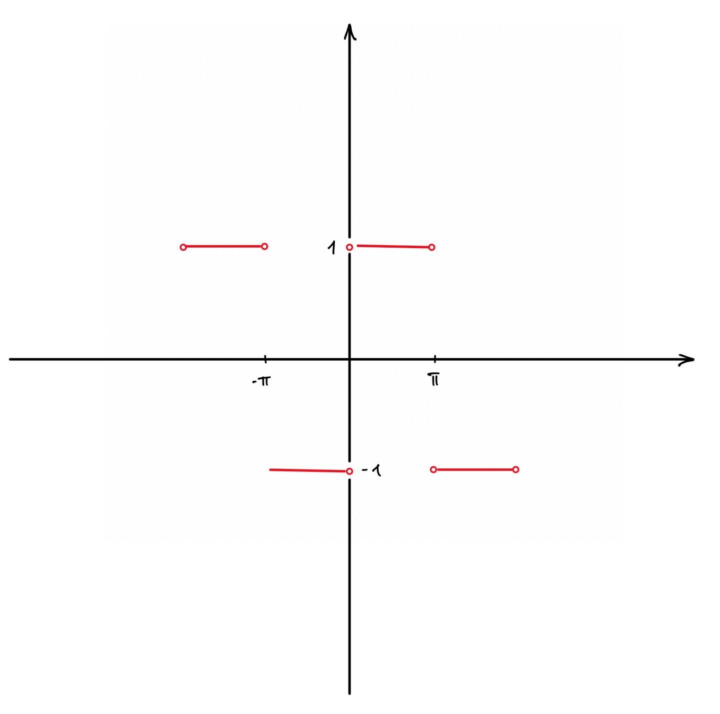
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\cos\pi n}{2n-1}-\frac{2\cos\pi n}{2n+1}\right)=-\frac{2}{\pi}\cos\pi n\cdot\frac{4n}{4n^2-1}=\frac{8n(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$$

$iiii.$ Получим:

$$\boxed{f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}sin\,2nx}$$

3. Разложить функцию $f(x)=sign(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi,\pi]$. К какой функции сходится этот ряд? С помощью этого разложения найти суммы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

Решение.



$i.\ \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{интегрируема}\\ \text{на } [-\pi,\pi]}} \cong \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

$$\left.\begin{matrix} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \qquad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \end{matrix}\right] - \text{наши коэффициенты Фурье}$$

$ii.\ f(x)$ – нечетная функция: $sign(-x)=-sign(x)\Rightarrow a_n=0,$ т. е. функция раскладывается только по $\sin nx$.

$$iii.\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}sign(x)sin\,kx\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-\sin kx\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right)=\frac{1}{k\pi}\left(\cos kx\Big|_{-\pi}^{0}-cos\,kx\Big|_{0}^{\pi}\right)=\begin{cases}\frac{4}{\pi k}, & 2\nmid k\\ 0, & 2\mid k\end{cases}$$

Нулевые слагаемые только при $k=2n-1,$ значит:

$$f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}\sin(x(2n-1))$$

$iiii.$ Для $x_0\in(-\pi,\pi)$ ряд Фурье сходится поточечно к $f(x_0)$, а в точках разрыва к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, т. е. в точках $x=0,\pm\pi$ ряд сходится к нулю.

$iiiii.$ Теперь найдем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$:

$$f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(x(2n-1)) \quad \text{на } [-\pi,\pi]$$

Пусть $x=\frac{\pi}{2},$ тогда $\left[\begin{matrix}\sin(x(2n-1))=1, & 2n-1\equiv 1\ mod\ 4\\ \sin(x(2n-1))=-1, & 2n-1\equiv -1\ mod\ 4\end{matrix}\right.$

$$\underbrace{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Равенство Парсеваля:

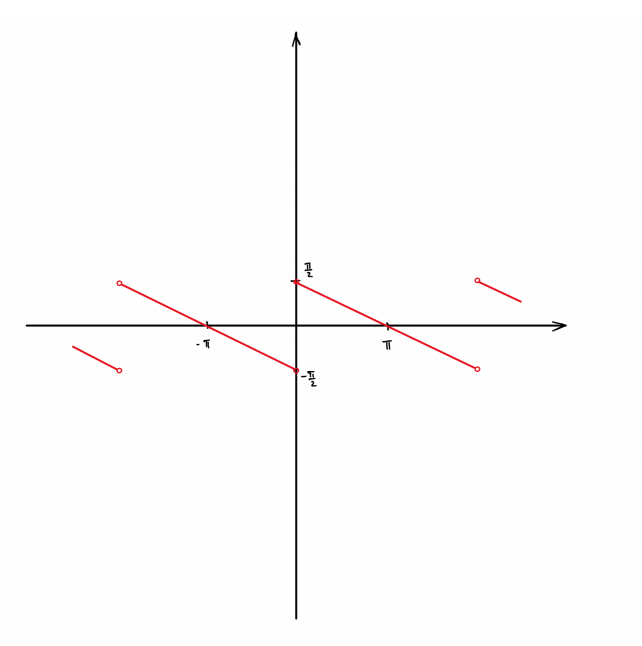
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2), \qquad \text{отсюда}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2n-1)}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}sign^2(x)dx \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx=2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)}\sin(x(2n-1)) \quad \text{на } [-\pi,\pi] \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\end{matrix}}$$

4. *Разложить функцию $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ в тригонометрический ряд Фурье на $[0,2\pi]$. К какой функции сходится этот ряд? С помощью этого разложения найти суммы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$*

Решение.



$i.\ \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{интегрируема}\\ \text{на } [-c,c]}} \cong \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{c}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{c}\right)$

$$\left.\begin{matrix} a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{\pi nx}{c}dx, \qquad a_0=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)dx \\ b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\sin\frac{\pi nx}{c}dx \end{matrix}\right] - \text{наши коэффициенты Фурье}$$

$ii.$ Отрезок размера 2π, поэтому коэффициенты Фурье:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nx\,dx=\begin{bmatrix}t=x-\pi\\ dx=dt\end{bmatrix}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cos(nt+n\pi)dt=\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{t\cos nt\,dt}_{\text{нечетная}}=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin x\,dx=\begin{bmatrix}t=x-\pi\\ dx=dt\end{bmatrix}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\sin(nt+n\pi)dt=\frac{(-1)^{n+1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{t\sin nt\,dt}_{\text{четная}}=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin nt\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi}t\,d\frac{\cos nt}{n}=\frac{(-1)^n}{\pi}\left(t\cdot\frac{\cos nt}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{\sin nt}{n^2}\Bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{(-1)^n\pi}{n}+0\right)=\frac{1}{n}$$

Получаем: $f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

$iii.$ Полученный рядсходится поточечно при $x\in(0,2\pi)$ к $f(x_0)$

Для $x_0\in(0,2\pi)$ ряд Фурье сходится поточечно к $f(x_0)$, а в точках разрыва к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, т. е. в точках $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ряд сходится к нулю.

$iiii.$ Теперь найдем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Пусть $x=\frac{\pi}{3},$ тогда $\sin nx=\sin\frac{\pi n}{3}$

$$\underbrace{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{n} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{n}=\frac{\pi}{3}$$

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

Отсюда, так как $|[0,2\pi]|=2\pi$, получаем $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2dx=\begin{bmatrix}t=x-\pi\\ dx=dt\end{bmatrix}=\frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{\pi}t^2dt=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{6}$

Пусть $x=\frac{\pi}{2},$ тогда $\left[\begin{matrix}\sin nx=0, & n=2k\\ \sin nx=(-1)^{k+1}, & n=2k-1\end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ ненулевые слагаемые в сумме только нечетные

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\begin{matrix} f(x)\cong\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{n}=\frac{\pi}{3} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}\end{matrix}}$$