№5 Д.У. Некрасов Артём 216

1. Решите уравнение $\left(1-x^2\right)y''-xy'+y=\frac{1}{x}\sqrt[2]{1-x^2}$, *сделав подстановку* $x=\cos t$ *, где* $0<x<1$

Решение.

$t=\arccos x$

$y(x)=g(\arccos x)$

$y'(x)=g'(\arccos x)-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y''=g''(\arccos x)\cdot\frac{1}{1-x^2}-g'(\arccos x)\cdot\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$g''+g=\frac{1}{\cos t}\sqrt{1-\cos^2 t} \quad\Rightarrow\quad g''+g=\frac{\sqrt{\sin^2 t}}{\cos t}=\frac{|\sin t|}{\cos t}$

$g''+g=\operatorname{tg} t$ - неоднородное с постоянными коэффициентами

$\lambda^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\pm\mathrm{i} \quad\Rightarrow\quad g_{\text{общее}}=c_1\cos t+c_2\sin t$

Методом вариации постоянных получаем:

$$\begin{cases} c_1'\cos t+c_2\sin t=0\\ -c_1'\sin t+c_2\cos t=\operatorname{tg} t\end{cases}$$

$c_1'=-\frac{\sin^2 t}{\cos t} \quad\Rightarrow\quad c_1=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|+\sin t+D_1$

$c_2'=\sin t \quad\Rightarrow\quad c_2=-\cos t+D_2$

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t-1}{\sin t+1}\right|+\sin t+D_1\right)\cos t+(-\cos t+D_2)\sin t\,, \qquad t=\arccos x}$$

2. Решите линейные неоднородные уравнения методом вариации постоянных, сперва подобрав одно из решений однородного уравнения:

$a)$ $(2x-x^2)y''+2y'-\frac{2}{x}y=(2-x)^2xe^{-x}$

Решение.

$(2x-x^2)y''+2y'-\frac{2}{x}y=(2-x)^2xe^{-x} \quad |:x(2-x), \qquad x=0, x=2$ — не решения

$y''+\frac{2}{x(2-x)}y'-\frac{2}{x^2(2-x)}y=(2-x)e^{-x}$

Однородное:

$y''+\frac{2}{x(2-x)}y'-\frac{2}{x^2(2-x)}y=0,$ где $y=ax+b$ решение

$\frac{2}{x(2-x)}\cdot a-\frac{2}{x^2(2-x)}\cdot(ax+b)=0 \quad | \cdot(2-x)x$

$2a-\frac{2}{x}(ax+b)=0 \quad\Rightarrow\quad 2a-2a-\frac{2b}{x}=0 \quad\Rightarrow\quad a=a, b=0$

тогда $y=x$ частное решение однородного

По формуле Остроградского-Лиувилля:

$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=c\cdot e^{-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx},$ где y_1 частное

$y_1y_2'-y_1'y_2=xy_2'-y_2=ce^{-\int\frac{2}{x(x-2)}dx}=ce^{\ln|x-2|-\ln|x|}$

$xy_1'-y_2=c\cdot\frac{x-2}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{xy_1-y_2}{x^2}=c\cdot\frac{x-2}{x^3} \quad\Rightarrow\quad d\left(\frac{y}{x}\right)=c\cdot\frac{x-2}{x^3}$

$\frac{y}{x}=c\cdot\int\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}dx \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{x}=c\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+c_1$

$y=c\cdot x\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+c_1x$

$y_{\text{общее}}=c\cdot\frac{1-x}{x}+c_1x$

Методом вариации постоянных получаем:

$$\begin{cases} c'\cdot\frac{1-x}{x}+c_1'x=0\\ c'\cdot-\frac{1}{x^2}+c_1'=(2-x)e^{-x}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c'=-x^2e^{-x}\\ c_1'=(1-x)e^{-x}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c=\int\frac{-x^2}{e^x}dx=e^{-x}(x^2+2x+2)+d_1\\ c_1=\int(1-x)e^{-x}dx=xe^{-x}+d_2\end{cases}$$

$$\boxed{y=(e^{-x}(x^2+2x+2)+d_1)\left(\frac{1-x}{x}\right)+(xe^{-x}+d_2)x}$$

$b)$ $xy''-(4x+2)y'+(4x+4)y=x^2e^{2x}, \qquad x>0$

Решение.

$xy''-(4x+2)y'+(4x+4)y=x^2e^{2x}$

$xy''-(4x+2)y'+(4x+4)y=0,$ пусть решение $y=e^{ax}$

$a^2xe^{ax}-(4x+2)ae^{ax}+(4x+4)e^{ex}=0 \quad | :e^{ax}\neq 0$

$a^2x-(4x+2)a+4x+4=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} a_1=\frac{2x+2}{x}\\ a_2=2\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad y=e^{2x}$

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=c\cdot e^{\int\frac{4x+2}{x}dx}=ce^{4x+2\ln|x|}$

$y_1y_2'-y_1'y_2=e^{2x}y_2'-2e^{2x}y_2=ce^{4x+2\ln|x|}$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{e^{2x}}\right)=ce^{\ln x^2}=cx^2$

$y\coloneqq y_2=\frac{x^3}{3}\cdot e^{2x}c+c_1e^{2x}$

Методом вариации постоянных получаем:

$$\begin{cases} c'\ x^3e^{2x}+c_1'e^{2x}=0\\ c'\ (3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x})+c_1'\cdot 2e^{2x}=xe^{2x}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c'=\frac{1}{3x}\\ c_1'=-\frac{x^2}{3}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c=\frac{1}{3}\ln|x|+d_1\\ c_1=-\frac{x^3}{9}+d_2\end{cases}$$

$$\boxed{\frac{x^3e^{2x}}{3}\left(\frac{1}{3}\ln|x|+d_1\right)+e^{2x}\left(-\frac{x^3}{9}+d_2\right)}$$

3. Найдите уравнение второго порядка $a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x)$*, при* $f(x)=1$*, и, если фундаментальные решения известны и равны* x *и* x^2-1*. Как будет выглядеть общее решение этого уравнения?*

Решение.

Рассмотрим определитель Вронского:

$y_1=x, \quad y_1'=1, \quad y_1''=0$

$y_2=x^2-1, \quad y_2'=2x, \quad y_2''=2$

$W=\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2\\ y' & y_1' & y_2'\\ y'' & y_1'' & y_2''\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & x & x^2-1\\ y' & 1 & 2x\\ y'' & 0 & 2\end{vmatrix}=y''(x^2+1)+2y-2y'x$

$\begin{cases} y_1=x\\ y_2=x^2-1\end{cases} \quad\Rightarrow\quad y=c_1x+c_2(x^2-1)$

Методом вариации постоянных получаем:

$$\begin{cases} c_1'x+c_2'(x^2-1)=0\\ c_1'+2xc_2'=\frac{1}{x^2+1}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} c_1=\frac{x}{x^2+1}+d_2\\ c_2=\frac{1}{2x^2+2}+d_2\end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{x^2+1}+d_1\right)x+\left(\frac{1}{2x^2+2}+d_2\right)(x^2-1)=1}$$

4. Дано уравнение $y''+p(x)y=0$*, где* $x\geq 0$ *и* $p(x)$ *непрерывна. Пусть* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *два решения этого уравнения со свойствами:*

$a)$ на плюс бесконечности оба решения стремятся к нулю,
$b)$ их производные ограничены на промежутке $x\geq 0$.

Докажите, что они линейно зависимы.

Решение.

Известно, что если определитель Вронского равен нулю, то решения линейно зависимы.

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=y_1y_2'-y_1'y_2,$ при этом $y_1, y_2\xrightarrow{x\to+\infty}0$

сумма произведений бесконечно малой и ограниченой — бесконечно мала, поэтому Вронскиан обнуляется и значит решения линейно зависимы.

5. $a)$ Докажите, что каждое решение уравнение $y''+\frac{1}{1+x^2}y=0$ на промежутке $x\geq 0$ имеет бесконечно много корней.

Решение.

рассмотрим:

$y''+\frac{1/2}{x^2}y=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{bmatrix} x=e^t\\ t=\ln x\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad y(x)=g(\ln x) \quad\Rightarrow\quad y'(x)=g'(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad y''(x)=g''(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}-g'(\ln x)\cdot\frac{1}{x^2}$

$g''\cdot\frac{1}{x^2}-g'\cdot\frac{1}{x^2}+g\cdot\frac{\frac{1}{2}}{x^2}=0 \quad\Rightarrow\quad g''-g'+0{,}5g=0$

Характеристическое уравнение:

$\lambda^2-\lambda+0{,}5=0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda-0{,}5)^2+0{,}25=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=0{,}5\pm 0{,}5i$

Общее решение:

$g(t)=c_1e^{\frac{1}{2}t}\sin\frac{t}{2}+c_2e^{\frac{1}{2}t}\cos\frac{t}{2},$ любое решение такого вида будет иметь бесконечное количество корней при $x\geq 0, e^t\geq 0, t\in\mathbb{R}$

По теореме Штурма в силу выполнения неравенства $\frac{\frac{1}{2}}{x^2}\leq\frac{1}{1+x^2}$ для $x\geq 1$ любое решение исходного уравнения тоже будет иметь бесконечное количество корней.

$b)$ Может ли некоторое нетривиальное решение уравнение $y''-xy'+y=0$ на интервале $(-\infty,\infty)$ иметь пять корней?

Решение.

coming soon …