1. Решите однородные системы, используя приведение матриц к диагональному или же ЖНФ виду:

$$a)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y - 2z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 2y - z \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det B = (2-\lambda)(-\lambda(-1-\lambda) - 2) - (-1(-1-\lambda) - 2) + (-2)(-2+2\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

$$-(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \lambda = 1, & k = 1 \\ \lambda = i, & k = 1 \\ \lambda = -1, & k = 1 \end{array}\right.$$

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 2-1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = i: \begin{pmatrix} 2-i & 1 & -2 \\ -1 & -i & 1 \\ 2 & 2 & -1-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2-i & 1 & -2 \\ -1 & -i & 1 \\ 0 & 2\cdot(1-i) & 1-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -i: \begin{pmatrix} 2+i & 1 & -2 \\ -1 & i & 1 \\ 2 & 2 & -1+i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & 2i+1 & 0 \\ 1 & -i & -1 \\ 0 & 2\cdot(1+i) & 1+i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2i & i \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-i \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x = (2+i)e^{it} \\ y = -1e^{it} \\ z = 2e^{it} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_1 = 2\cos t - \sin t \\ y_1 = -\cos t \\ z_1 = 2\cos t \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} x_2 = \cos t + 2\sin t \\ y_2 = -\sin t \\ z_2 = 2\sin t \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = c_1e^t + c_2(2\cos t - \sin t) + c_3(\cos t + 2\sin t) \\ y = -c_1e^t + c_2(-\cos t) + c_3(-\sin t) \\ z = c_2(2\cos t) + c_3(2\sin t) \end{matrix}}$$

$$b)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y - 4z \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y + 12z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y - 5z \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 12 \\ 1 & -1 & -5-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det B = (1-\lambda)\cdot\big((2-\lambda)(-5-\lambda) - 12\cdot(-1)\big) - (-1)\cdot(-2\cdot(-5-\lambda) - 12) + (-4)\cdot\big(-2\cdot(-1) - (2-\lambda)\big) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda =$$

$$= -\lambda(\lambda+1)^2 \quad \Rightarrow \quad -\lambda(\lambda+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \lambda = 0, & k = 1 \\ \lambda = -1, & k = 2 \end{array}\right.$$

$$\lambda = 0: \begin{pmatrix} 1-0 & -1 & -4 \\ -2 & 2-0 & 12 \\ 1 & -1 & -5-0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -2 & 2 & 12 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 1+1 & -1 & -4 \\ -2 & 2+1 & 12 \\ 1 & -1 & -5+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 12 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Так как кратность равна 2 — найдем присоединенный вектор к $(0,4,-1)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 12 & 4 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = c_1 + c_3e^{-t} \\ y = c_1 + 4c_2e^{-t} + c_3(4t-2)e^{-t} \\ z = c_2e^{-t} + c_3(-t+1)e^{-t} \end{matrix}}$$

$$c)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 6y - 15z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - 5z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + 2y - 6z \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 6 & -15 \\ 1 & 1-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det B = (2-\lambda)\cdot\big((1-\lambda)(-6-\lambda) + 10\big) - 6\cdot\big((-6-\lambda) + 5\big) + (-15)\cdot\big(2 - (1-\lambda)\big) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$$

$$-(\lambda+1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad [\lambda = -1, \qquad k = 3$$

$$\lambda = -1: \begin{pmatrix} 2+1 & 6 & -15 \\ 1 & 1+1 & -5 \\ 1 & 2 & -6+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 - \mathrm{rk}B = 3 - 1 = 2,$$ т. е. 2 собственных и один присоединенный.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -15 & 3p \\ 1 & 2 & -5 & p \\ 1 & 2 & -5 & p \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$ пусть $p = 1$, тогда имеем собственный вектор $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и присоединенный $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Найдем второй собсвенный вектор: пусть $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ — линейно независимый и подходит для уравнения.

$$\boxed{\begin{matrix} x = 3c_1e^{-t} + c_2e^{-t}(3t+1) \\ y = c_1e^{-t} + c_2e^{-t}(t+0) + 5c_3e^{-t} \\ z = c_1e^{-t} + c_2e^{-t}(t+0) + 2c_3e^{-t} \end{matrix}}$$

$$d)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y - 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = -2x + 5y - 2z \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 4-\lambda & -2 \\ -2 & 5 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det B = (1-\lambda)\cdot\big((4-\lambda)(-2-\lambda) + 10\big) - 1\cdot\big((-1)(-2-\lambda) - 4\big) + (-1)\cdot\big(-5 - (4-\lambda)(-2)\big) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3$$

$$-(\lambda-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad [\lambda = 1, \qquad k = 3$$

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & -1 \\ -1 & 4-1 & -2 \\ -2 & 5 & -2-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 - \mathrm{rk}B = 3 - 2 = 1,$$ т. е. 1 собственных и два присоединенных.

Пусть собственный — $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, так как удовлетворяет системе. Теперь найдем два присоединенных:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ — первый присоединенный.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ — второй присоединенный.

$$\boxed{\begin{matrix} x = c_1e^t + c_2e^t(t+2) + c_3e^t\left(\dfrac{t^2}{2} + 2t + 5\right) \\ y = c_1e^t + c_2e^t(t+1) + c_3e^t\left(\dfrac{t^2}{2} + t + 2\right) \\ z = c_1e^t + c_2e^t(t+0) + c_3e^t\left(\dfrac{t^2}{2}\right) \end{matrix}}$$

2. Решите систему методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t \\ \dot{y} = x - y - e^t \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det B = (3-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = -3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ll} \lambda = 1+i, & k = 1 \\ \lambda = 1-i, & k = 1 \end{array}\right.$. Найдем собственный вектор. Он один, так как корни кратности 1, которые являются комплексно-сопряженными в системе с действительными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -i & -1+2i \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2-i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y(2+i)$$

Пусть $y = 1$, тогда собственный вектор $\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x = (2+i)\cdot e^{(1+i)t}, \qquad y = (1)\cdot e^{(1+i)t}$$

$$x = (2+i)(\cos t\, i\sin t)\cdot e^t, \qquad y = (\cos t + i\sin t)\cdot e^t$$

$$x = 2\cos t\cdot e^t + 2\sin t\cdot e^t + i\cos t\cdot e^t - \sin t\cdot e^t, \qquad y = \cos t\cdot e^t + i\sin t\cdot e^t$$

$$x_1 = (2\cos t - \sin t)\cdot e^t, \qquad y_1 = \cos t\cdot e^t$$

$$x_2 = (2\sin t + \cos t)\cdot e^t, \qquad y_2 = \sin t\cdot e^t$$

Тогда:

$$x = c_1e^t(2\cos t - \sin t) + c_2e^t(2\sin t + \cos t)$$
$$y = c_1e^t\cdot\cos t + c_2e^t\cdot\sin t$$

Найдем частное решение вида: $\begin{cases} x_1 = Ae^t, & x_1' = Ae^t \\ y_1 = Be^t, & y_1' = Be^t \end{cases}$

$$\begin{cases} A = 3A - 5B - 2 \\ B = A - B - 1 \end{cases} \Rightarrow \quad (A, B) = (0,1) \quad \Rightarrow \quad (x_1, y_1) = (e^t, 0)$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = c_1e^t(2\cos t - \sin t) + c_2e^t(2\sin t + \cos t) + e^t \\ y = c_1e^t\cdot\cos t + c_2e^t\cdot\sin t + 0 \end{matrix}}$$

3. Решите неоднородную систему методом вариации постоянных:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + t\ln t \\ \dot{y} = -4x + 2y + 2t\ln t \end{cases}$$

<u>Решение.</u>

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det B = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 4 = -4 + 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2$$

$$\lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad [\lambda = 0, \qquad k = 2.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ — собственный вектор

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ — присоединенный вектор

Тогда:

$$\begin{cases} x = c_1\cdot 1\cdot 1 + c_2\cdot 1(t-1) \\ y = c_1\cdot 2\cdot 1 + c_2\cdot 1(2t-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_1(t) + c_2(t)(t-1) \\ y = 2c_1(t) + c_2(t)(2t-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = c_1'(t) + c_2'(t)(t-1) + c_2(t) \\ y' = 2c_1'(t) + c_2'(t)(2t-1) + 2c_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)(t-1) + c_2(t) = -2c_1(t) - 2c_2(t)(t-1) + 2c_1(t) + c_2(t)(2t-1) + t\ln t \\ 2c_1'(t) + c_2'(t)(2t-1) + 2c_2(t) = -4c_1(t) - 4c_2(t)(t-1) + 4c_1(t) + 2c_2(t)(2t-1) + 2t\ln t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)\cdot t - c_2'(t) = t\ln t \\ 2c_1'(t) + c_2'(t)2t - c_2'(t) = 2t\ln t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) = t\ln t \\ c_2'(t) = 0 \end{cases}$$

$$c_1(t) = \int \ln t\, dt = \frac{t^2(2\ln t - 1)}{4} + c_3, \qquad c_2(t) = \int 0dt = c_4$$

$$\boxed{\begin{matrix} x = \dfrac{t^2(2\ln t - 1)}{4} + c_3 + c_4(t-1) \\ y = \dfrac{t^2(2\ln t - 1)}{2} + 2c_3 + c_4(2t-1) \end{matrix}}$$

4. Решите задачи Коши для систем, используя преобразование Лапласа (операционным методом):

$$a)\ \begin{cases} \dot{x} = x + y + 3t + 6, \\ \dot{y} = -10x - y + 6t + 3 \end{cases}, \qquad \text{где } x(0) = y(0) = 0$$

<u>Решение.</u>

Преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} pX(p) = X(p) + Y(p) + \dfrac{3}{p^2} + \dfrac{6}{p} \\ pY(p) = -10X(p) - Y(p) + \dfrac{6}{p^2} + \dfrac{3}{p} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p-1)X(p) - Y(p) = \dfrac{3}{p^2} + \dfrac{6}{p} \\ 10X(p) + (p+1)Y(p) = \dfrac{6}{p^2} + \dfrac{3}{p} \end{cases}$$

$$i.\ \frac{3p+6}{p^2} - 10X(p) = Y(p)(p+1)$$

$$Y(p) = \frac{-10p^2X(p) + 3p + 6}{p^2(p+1)}$$

$$ii.\ p^2(p^2-1)X(p) + 10p^2X(p) - 3p - 6 = 3(p+1) + 6p(p+1)$$

$$X(p)\big(p^2(p^2+9)\big) = 3p + 3 + 6p^2 + 6p + 3p + 6$$

$$X(p) = \frac{6p^2 + 12p + 9}{p^2(p^2+9)}$$

$$iii.\ Y(p) = \frac{-10p^2\cdot\dfrac{6p^2+12p+9}{p^2(p^2+9)} + 3p + 6}{p^2(p+1)} = \frac{-60p^2 - 120p - 90 + 3p^3 + 27p + 6p^2 + 54}{p^2(p+1)(p^2+9)} = \frac{3(p^2 - 19p - 12)}{p^2(p^2+9)}$$

$$\star\ X(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{Bp + C}{p^2+9} + \frac{D}{p} \quad \Rightarrow \quad p^3(B+D) + p^2(A+C) + 9pD + 9A = 6p^2 + 12p + 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -\dfrac{4}{3} \\ C = 5 \\ D = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\star\ Y(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{Bp + C}{p^2+9} + \frac{D}{p} \quad \Rightarrow \quad p^3(B+D) + p^2(A+C) + 9pD + 9A = 3p^2 - 57p - 12 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -4 \\ B = \dfrac{19}{3} \\ C = 7 \\ D = -\dfrac{19}{3} \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{-\frac{4}{3}p + 5}{p^2+9} + \frac{\frac{4}{3}}{p}, \qquad Y(p) = \frac{-4}{p^2} + \frac{\frac{19}{3}p + 7}{p^2+9} + \frac{-\frac{19}{3}}{p}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x(t) = t - \dfrac{4}{3}\cos 3t + \dfrac{5}{3}\sin 3t + \dfrac{4}{3} \\ y(t) = -4t + \dfrac{19}{3}\cos 3t + \dfrac{7}{3}\sin 3t - \dfrac{19}{3} \end{matrix}}$$

$$b)\ \begin{cases} \dot{x} = -x - y + e^{2t}, \\ \dot{y} = 2x + 2y + 2e^{2t} \end{cases}, \qquad \text{где } x(0) = y(0) = 1$$

<u>Решение.</u>

Преобразование Лапласа:

$$\begin{cases} pX(p) - 1 = -X(p) - Y(p) + \dfrac{1}{p-2} \\ pY(p) - 1 = 2X(p) + 2Y(p) + \dfrac{2}{p-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p) = \dfrac{-Y(p)\cdot(p-2) + p - 1}{(p+1)(p-2)} \\ Y(p) = \dfrac{p^2 + 3p - 2}{p(p-1)(p-2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p) = \dfrac{p^2 - 4p + 2}{p(p-1)(p-2)} \\ Y(p) = \dfrac{p^2 + 3p - 2}{p(p-1)(p-2)} \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} \quad \Rightarrow \quad (A+B+C)p^2 + (-3A - 2B - C)p + 2A = p^2 - 4p + 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{cases}$$

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} \quad \Rightarrow \quad (A+B+C)p^2 + (-3A - 2B - C)p + 2A = p^2 + 3p - 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \\ C = 4 \end{cases}$$

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2}$$

$$Y(p) = -\frac{1}{p} - \frac{2}{p-1} + \frac{4}{p-2}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x(t) = 1 + e^t - e^{2t} \\ y(t) = -1 - 2e^t + 4e^{2t} \end{matrix}}$$