Исследовать ряд на сходимость:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{3n-2}$

<u>Решение.</u>

По признаку Лейбница:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{3n-2} = \frac{1}{3\sqrt{n} - \frac{2}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$a_n' = \left(\frac{\sqrt{n}}{3n-2}\right)' = \frac{\left(\sqrt{n}\right)' \cdot (3n-2) - \sqrt{n} \cdot (3n-2)'}{(3n-2)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}(3n-2) - 3\sqrt{n}}{(3n-2)^2} = \frac{\overbrace{(3n-2) - 3\sqrt{n}}^{>0}}{\underbrace{2\sqrt{n}(3n-2)^2}_{>0}} \text{ при } n > n_0, \qquad \text{то есть монотонна.}$$

Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{3n-2}$ сходится.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n + \ln n}$

<u>Решение.</u>

По признаку Дирихле:

$$\frac{\cos n}{n + \ln n} = \cos n \cdot \frac{1}{n + \ln n}$$

1) $\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\right| \le \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$ – ограниченна.

2) $\left(\frac{1}{n + \ln n}\right)' = -\frac{(n + \ln n)'}{(n + \ln n)^2} = -\frac{n+1}{n \cdot (n + \ln n)^2}$ – монотонна.

3) $\frac{1}{n + \ln n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n + \ln n}$ сходится.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n + n}$

<u>Решение.</u>

По признаку Вейерштрасса:

$$\left|\frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n + n}\right| \le \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится.}$$

Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2^n + n}$ тоже сходится.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2n}{\sqrt{n+6}}$

<u>Решение.</u>

По признакам Дирихле и Абеля:

$(-1)^n \sin 2n = \sin(2n + \pi n)$

1) $\left|\sum \sin(2n + \pi n)\right| \leq \left|\frac{1}{\sin \frac{2n + \pi n}{2}}\right|$

2) $\frac{1}{\sqrt{n+6}} = -\frac{\left(\sqrt{n+6}\right)'}{\left(\sqrt{n+6}\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{n+6} \cdot (n+6)} - \text{монотонна.}$

3) $\frac{1}{\sqrt{n+6}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 2n}{\sqrt{n+6}}$ сходится.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n^2+3)} \cdot e^{\frac{n+1}{n}}$

<u>Решение.</u>

$\sin\left(n + \frac{\pi}{3}\right) = \sin n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+2)}{\ln(n^2+3)} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln(n^2+3)} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln(n^2+3)}$$

По признаку Дирихле:

1) $\left|\sum_{n=1}^{N} \sin n\right| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} - \text{ограниченна.}$

2) $\frac{1}{\ln(n^2+3)} = \frac{1}{\ln n^2 \cdot \ln 3} = \frac{1}{2 \cdot \ln 3 \cdot \ln n} - \text{монотонна.}$

3) $\frac{1}{\ln(n^2+3)} \to 0$

Значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\ln(n^2+3)}$ сходится.

Также

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n^2+3)}$ – сходится.

2) $e^{\frac{n+1}{n}}$ – ограниченна $\left(\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n+1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}} = e^1 = e\right)$

3)$e^{\frac{n+1}{n}}$ – монотонна.

Значит по признаку Абеля ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{\pi}{3}\right)}{\ln(n^2+3)} \cdot e^{\frac{n+1}{n}}$ сходится.