№31 М.А. Некрасов Артём 216

Степенные ряды.

1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \cos in \cdot z^n$.

Решение.

Ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, где $c_n = \cos in = \dfrac{e^{-n}+e^n}{2} = ch(n)$, $z_0 = 0$

Область сходтмости — круг с центром в $z_0 = 0$ и радиусом R, где по формуле Коши-Адамара:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|ch(n)|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{e}{\sqrt[n]{2}} \sqrt[n]{1+e^{-2n}} = e \quad\Rightarrow\quad R = e^{-1}$$

Теперь рассмотрим границу полученной области: $|z-z_0| = R \quad\Leftrightarrow\quad |z| = e^{-1}$

Необходимое условие сходимости: $|\cos in \cdot z^n| = |\cos in| \cdot |z^n| = \dfrac{e^{-n}+e^n}{2} \cdot \dfrac{1}{e^n} = \left|\dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{-2n}}{2}\right| \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$, то есть условие не выполнено, а значит ряд расходится на границе.

2. Разложить функцию $f(z) = e^{z+i}\sin(z+i)$ *в ряд Тейлора с центром* $z_0 = -i$ *и найти его радиус сходимости.*

Решение.

Центр в $z_0 = i \quad\Rightarrow\quad$ замена $w = z+i \quad\Rightarrow\quad f(w) = e^w \sin w$

Воспользуемся формулами: $e^z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!}$, $\quad \sin z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\quad (R = +\infty)$

$$e^w \cdot \sin w = e^w \cdot \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = \frac{e^{(1+i)w}}{2i} - \frac{e^{(1-i)w}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(w(1+i)\big)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(w(1-i)\big)^n}{n!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\big((1+i)^n - (1-i)^n\big) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}\left(\left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n - \left(\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)^n\right) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot \sqrt{2}^n \cdot 2i \cdot \left(\frac{e^{\frac{in\pi}{2}} - e^{-\frac{in\pi}{2}}}{2i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}^n \cdot \sin\frac{\pi n}{4}}{n!} w^n =$$

$= \boxed{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{2}^n \cdot \sin\frac{\pi n}{4}}{n!}(z+i)^n}$, где $R = +\infty$ — радиус сходимости, так как наш ряд это сумма двух рядов для экспоненты, для которых $R = +\infty$.

3. Разложить функцию $f(z) = (z-2)^4 \cos\dfrac{1}{z-2}$ *в ряд Лорана с центром* $z_0 = 2$*, определить кольцо сходимости, выделить правильную часть ряда Лорана и главную часть ряда Лорана.*

Решение.

Центр в $z_0 = 2 \quad\Rightarrow\quad$ замена $w = z-2 \quad\Rightarrow\quad f(w) = w^4 \cdot \cos\dfrac{1}{w}$

Воспользуемся формулой: $\cos z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$, $\quad R = +\infty$

$$w^4 \cos\frac{1}{w} = w^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!\,w^{2k}} = \underbrace{w^4 - \frac{w^2}{2!} + \frac{1}{4!}}_{\text{правильная часть}} \underbrace{- \frac{1}{6!\,w^2} + \cdots}_{\text{главная часть}} = w^4 - \frac{w^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!\,w^2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{\big(2(k+2)\big)!\,w^{2k}} + \cdots$$

Проблемная точка $w = 0 \quad\Rightarrow\quad$ кольцо сходимости $0 < |w| < \infty$

$$\boxed{f(z) = \underbrace{(z-2)^4 - \frac{(z-2)^2}{2!} + \frac{1}{4!}}_{\text{правильная часть}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\big(2(k+2)\big)!\,(z-2)^{2k}}}_{\text{главная часть}}, \qquad \text{кольцо сходимости } 0 < |z-2| < \infty}$$

4. Разложить функцию $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ *в ряд Лорана с центром* $z_0 = 0$ *во всех возможных кольцах сходимости (тут три случая).*

Решение.

Проблемные точки: $z^2+z-2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z=1 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad$ 3 случая: 3 кольца, в каждом из которых $f(z)$ — аналитическая.

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}$$

Первое кольцо: $|z| < 1$

$f(z) = \dfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{1+\frac{z}{2}}}_{\text{сход. при } |z|<2} - \underbrace{\dfrac{1}{1-z}}_{\text{сход. при} |z|<1}$ по формуле $(z+1)^\alpha \underset{R=1}{\underbrace{=}} 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$ при $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k, \qquad \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot z^k - \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \cdots\right) - (1 + z + z^2 + z^3 + \cdots) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 + \cdots =$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} - 1\right) z^k}$$

Второе кольцо: $1 < |z| < 2$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{z}{2}}}_{\text{сход. при } |z|<2} + \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}}_{\text{сход. при} |z|>1}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} z^k + \frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right) = \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k}}$$

Третье кольцо: $|z| > 2$:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{2}{z}}}_{\text{сход. при } |z|>2} + \frac{1}{z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{z}}}_{\text{сход. при} |z|>1}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \cdots\right) + \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots\right)\right) = \frac{1}{z}\left(2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \cdots\right) = \boxed{\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \cdots}$$