№32 М.А. Некрасов Артём 216

Изолированные особые точки и вычеты.

Найти особые точки функции и определить их тип (включая бесконечно удаленную точку). В случае полюса найти его порядок:

1. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$

Решение.

Особые точки функции: $\begin{cases} z=0 \\ z=2i \\ z=-2i \end{cases} \Rightarrow \quad f(z) = \dfrac{1}{z(z-2i)^2(z+2i)^2}$

Предел $f(z)$ в каждой точке: $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \infty, \quad \lim\limits_{z\to 2i} f(z) = \infty, \quad \lim\limits_{z\to -2i} f(z) = \infty \quad \Rightarrow$ все точки - полюс.

Так как порядок полюса - это порядок нуля для $1/f$: $\dfrac{1}{f} = z(z-2i)^2(z+2i)^2 \Rightarrow \begin{cases} z=0\text{: порядок один,} \\ z=2i\text{: порядок два,} \\ z=-2i\text{: порядок два.} \end{cases}$

При $z=\infty$ замена $w=1/z$: $f = \dfrac{1}{\frac{1}{w}\left(\frac{1}{w^4}+4\right)} = \dfrac{w^5}{1+4w^5} \xrightarrow{w\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad z=\infty$ - устранимая особенность.

$$\boxed{\begin{array}{c} z=0 - \text{полюс порядка один} \\ z=\pm 2i - \text{полюс порядка два} \\ z=\infty - \text{устранимая особая точка} \end{array}}$$

2. $f(z) = \dfrac{z^5}{(1-z)^2}$

Решение.

Особая точка точка функции: $z=1$. Функция $\varphi(z)=z^5$ - алалитич. в окрестности точки $z=1$ и $\varphi(1)=1\neq 0 \quad \Rightarrow$ точка является полюсом порядка два для $f(z)$.

При $z=\infty$ замена $w=1/z$: $f = \dfrac{\frac{1}{w^5}}{\left(1-\frac{1}{w}\right)^2} = \dfrac{w^2}{w^5(w-1)^2} = \dfrac{1}{w^3(1-w)^2} = \dfrac{1}{w^3}\cdot\dfrac{1}{(1-w)^2} \underset{\text{ряд Тейлора}}{=}$

$= \dfrac{1}{w^3}(1+2w+3w^2+4w^3+5w^4+\cdots) = \underbrace{\dfrac{1}{w^3}+\dfrac{2}{w^2}+\dfrac{3}{w}}_{\text{главная часть}}\underbrace{+4+5w+6w^2+\cdots}_{\text{правильная часть}},$ минимальная степень главной части $-3 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad z=\infty$ - полюс порядка 3

$$\boxed{\begin{array}{l} z=1 - \text{полюс порядка 2} \\ z=\infty - \text{полюс порядка 3} \end{array}}$$

3. $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$

Решение.

Особая точка функции: $z=1 \quad \Rightarrow \quad f(z) = e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{z-1+1}{1-z}} = e^{-1}\cdot e^{\frac{1}{1-z}} = \dfrac{1}{e}\cdot e^{\frac{1}{1-z}}$

Используя разложение в ряд Тейлора для показательной функции, получим Лорановское разложение в окрестности $z=1$

$f(z) = \dfrac{1}{e}\left(1+\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{1}{2!\,(1-z)^2}+\dfrac{1}{3!\,(1-z)^3}+\cdots\right)$. Полученное разложение содержит бесконечно много членов со степенью меньше нуля, значит $z=1$ существенная особая точка функции.

При $z=\infty$: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \dfrac{1}{e}\lim\limits_{z\to\infty} e^{\frac{1}{1-z}} = \dfrac{1}{e} \quad \Rightarrow \quad z=\infty$ — устранимая особенность.

$$\boxed{\begin{array}{c} z=1 - \text{существенно особая точка} \\ z=\infty - \text{устранимая особенность} \end{array}}$$

4. *Найти вычеты в конечных особых точках функции* $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$.

Вычеты: $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{|z-x|=\varepsilon} f(z)dz = c_{-1}, \qquad$ Конечные особые точки: $z=0, z=1$

$z=0$:

$f(z) = \dfrac{e^z}{z^3(z-1)} \underset{\text{ряд Тейлора}}{=} \dfrac{1}{z^3(z-1)}\left(1+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}+\dfrac{z^4}{24}+\dfrac{z^5}{120}+\dfrac{z^6}{720}+\cdots\right) \underset{\text{ряд Тейлора}}{=}$

$= -\dfrac{1}{z^3}(1+z+z^2+z^3+\cdots)\left(1+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}+\cdots\right)$

Найдем c_{-1} — коэффициент при степени -1:

$c_{-1} = -1\left(1\cdot\dfrac{1}{2}+1\cdot 1+1\cdot 1\right) = \boxed{-\dfrac{5}{2}}$

$z=1$:

Замена $w=z-1 \quad \Rightarrow \quad f = \dfrac{e^{w+1}}{w(w+1)^3} \underset{\text{ряд Тейлора}}{\overset{e^w}{=}} \dfrac{e}{w(w+1)^3}\left(1+w+\dfrac{w^2}{2}+\dfrac{w^3}{6}+\cdots\right) \underset{\text{ряд Тейлора}}{\overset{(1+x)^{-n}}{=}}$

$= \dfrac{e}{w}(1-3w+6w^2-10w+\cdots)\left(1+w+\dfrac{w^2}{2}+\dfrac{w^3}{6}+\cdots\right)$

Найдем c_{-1} — коэффициент при степени -1:

$c_{-1} = e(1\cdot 1) = \boxed{e}$