Исследовать ряд на условную/абсолютную сходимость:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^p}$

Решение.

$a_n = \frac{\cos n}{n^p}$

при $p \le 0$ $a_n \nrightarrow 0$ ряд расходится по необходимому условию.

при $p > 0$ ряд сходится по признаку Дирихле:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{1}{2}\right|}, \qquad \frac{1}{n^p} \to 0 \text{ и монотонна.}$$

при $p > 1$ $\frac{|\cos n|}{n^p} \le \frac{1}{n^p}$ по признаку Вейерштрасса ряд сходится.

$$0 < p \le 1 \quad \frac{|\cos n|}{n^p} \ge \frac{\cos^2 n}{n^p} = \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{n^p}}_{\text{расходится}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\cos 2n}{n^p}}_{\text{сходится по пр.Дирихле}} - \text{ряд расходится.}$$

Ответ:
при $p \le 0$ – ряд расходится;
при $0 < p \le 1$ – ряд условно сходится;
при $p > 1$ – ряд абсолютно сходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{n}\right)$

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}}_{\text{сходится по пр.Дирихле}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}} - \text{ряд сходится.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\sin\left(\frac{\sin n}{n}\right)\right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right| \ge \frac{\sin^2 n}{n} = \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{n}}_{\text{расходится}} - \underbrace{\frac{\frac{1}{2}\cos 2n}{n}}_{\text{сходится по пр. Дирихле}} - \text{расходится.}$$

Значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{n}\right)$ сходится условно

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right)$$

<u>Решение.</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left(\frac{\sin n}{n}\right) \Rightarrow a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\left(\frac{\sin n}{n}\right)$$

$\dfrac{1}{\sqrt[5]{n}}\left(\dfrac{\sin n}{n}\right) = \dfrac{\sin n}{n^{6/5}}$, при $n \to \infty$ по признаку Дирихле ряд сходится.

$\left|\dfrac{\sin n}{n^{6/5}}\right| \leq \dfrac{1}{n^{6/5}}, \sum \dfrac{1}{n^p},\qquad p > 1$ – ряд сходится.

Значит ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right)$ сходится абсолютно.

$$4. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}$$

<u>Решение.</u>

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}\right)$$

$$a_n = \ln\left(\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right)\cdot\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)^{-1}\right) = \underbrace{\ln\left(1+\frac{n+2}{n^2}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} - \underbrace{\ln\left(1+\frac{3n+1}{n^2}\right)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$$

$$a_n = \frac{n+2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{3n+1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-n+3}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \underbrace{-\frac{1}{n}}_{\text{расходится}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится по признаку сравнения}} \text{ – расходится.}$$

Значит произведение $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+2}{n^2+3n+1}$ расходится.