Задача 6.
Бросают пару игральных костей. Найдите распределение, математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

Решение.

Положим X — сумма выпавших очков при бросании пары игральных костей. Тогда

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\Pr X_i$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

$$\mathbb{E}(X) = 2\cdot 1/36 + 3\cdot 2/36 + 4\cdot 3/36 + 5\cdot 4/36 + 6\cdot 5/36 + 7\cdot 6/36 + 8\cdot 5/36 + 9\cdot 4/36 + 10\cdot 3/36 + 11\cdot 2/36 + 12\cdot 1/36 = 7$$

$$\mathbb{D}(X) = 2^2\cdot 1/36 + 3^2\cdot 2/36 + 4^2\cdot 3/36 + 5^2\cdot 4/36 + 6^2\cdot 5/36 + 7^2\cdot 6/36 + 8^2\cdot 5/36 + 9^2\cdot 4/36 + 10^2\cdot 3/36 + 11^2\cdot 2/36 + 12^2\cdot 1/36 - 7^2 = \frac{35}{6}$$

Задача 7.
Для оценки числа некоторого редкого вида рыб в озере биологи выловили 5 рыб и пометили их. На следующий день они выловили 2 рыбы. Случайная величина X – число помеченных рыб среди выловленных. При каком количестве N рыб в озере вероятность $Pr(X = 1)$ максимальна. Найдите распределение случайной величины X при таком N, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{D}(X)$.

Решение.

$$\Pr(X=0) = \frac{C_5^0\cdot C_{N-5}^2}{C_N^2} = \frac{n^2-11n+30}{n^2-n}$$

$$\Pr(X=1) = \frac{C_5^1\cdot C_{N-5}^1}{C_N^2} = \frac{5\cdot(n-5)}{(n^2-n)/2} = \frac{10n-50}{n^2-n}$$

$$\Pr(X=2) = \frac{C_5^2\cdot C_{N-5}^0}{C_N^2} = \frac{20}{n^2-n}$$

Теперь рассмотрим функции $f(x) = \dfrac{10x-50}{x^2-x}$ и найдем ее экстремум.

$$f'(x) = \left(\frac{10x-50}{x^2-x}\right)' = \frac{-10x^2+100x-50}{(x^2-x)^2} \Rightarrow -x^2+10x-5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5-2\sqrt{5}\approx 0.52 \\ x = 5+2\sqrt{5}\approx 9.47 \end{array}\right.$$

$$---^{-}--_{0{,}52}---^{+}--_{9{,}47}---^{-}--\longrightarrow_x$$

То есть экстремум достигается при $5+2\sqrt{5}$. Однако нужно целое значение рыбов (очевидно либо 9, либо 10. UPD: а может и то и другое).

$$\Pr_{N=9}(X=0) = \frac{81-99+30}{81-9} = 1/6 \quad \Pr_{N=9}(X=1) = \frac{90-50}{81-9} = 5/9 \quad \Pr_{N=9}(X=2) = \frac{20}{81-9} = 5/18$$

$$\Pr_{N=10}(X=0) = \frac{100-110+30}{100-10} = 2/9 \quad \Pr_{N=10}(X=1) = \frac{100-50}{100-10} = 5/9 \quad \Pr_{N=10}(X=2) = \frac{20}{100-10} = 2/9$$

Оказалось, что оба значения подходят.

$$\mathbb{E}_{N=9}(X) = 0\cdot 1/6 + 1\cdot 5/9 + 2\cdot 5/18 = 10/9$$

$$\mathbb{E}_{N=10}(X) = 0\cdot 2/9 + 1\cdot 5/9 + 2\cdot 2/9 = 1$$

$$\mathbb{D}_{N=9}(X) = 0^2\cdot 1/6 + 1^2\cdot 5/9 + 2^2\cdot 5/18 - \left(10/9\right)^2 = 35/81$$

$$\mathbb{D}_{N=10}(X) = 0^2\cdot 2/9 + 1^2\cdot 5/9 + 2^2\cdot 2/9 - 1 = 4/9$$

Короче, Меченая рыбка, я тебя выловил и в благородство играть не буду:
найдешь для меня дисперсию и мат. ожидание – и мы в расчете.
Заодно посмотрим, как быстро у тебя башка после Косова прояснится.
А по твоей теме постараюсь разузнать. Хрен его знает, на кой ляд тебе
эта вероятность сдалась, но я в чужие дела не лезу, хочешь найти,
значит есть за что…

Задача 8.
Докажите, что $\min_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(X-a)^2$ *равен* $\mathbb{D}(X)$ *и достигается только при* $a = \mathbb{E}(X)$.

Решение.

$\mathbb{E}(X-a)^2 = \mathbb{E}(X^2) - 2a\cdot\mathbb{E}(X) + a^2$

$\min = \frac{2\mathbb{E}(X)}{2} = \mathbb{E}(X),$ так как вершина параболы.

$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$

$\mathbb{D}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$

Задача 9.
Боб загадал случайным образом число от 0 до 4. Алиса получает свое число так: подкидывает монетку и в случае орла прибавляет к числу Боба 1, а в случае решки вычитает 1 (*всё по модулю 5*)
Найдите распределение каждого из полученных чисел, а также их совместное распределение.

Решение.

Алиса	0	1	2	3	4
	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

Боба	0	1	2	3	4
	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$	$1/5$

Алиса/Боба	0	1	2	3	4
0		$1/10$			$1/10$
1	$1/10$		$1/10$		
2		$1/10$		$1/10$	
3			$1/10$		$1/10$
4	$1/10$			$1/10$	

Задача 10.
a) Предположим, что дискретная случайная величина X имеет симметричное распределение (т. е. $\Pr(X=x) = \Pr(X=-x)$), а случайная величина Y принимает значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Докажите, что случайные величины X и $X\cdot Y$ имеют одинаковое распределение.
b) Случайные величины X, Y, Z, W независимы в совокупности и одинаково распределены: каждая принимает значения 1 и -1 с вероятностью
$1/2$. Являются ли независимыми в совокупности случайные величины XYZ, XYW, XW?

Решение.