№11 Т.В. Некрасов Артём 216

Задача 13.

Пусть X_n − последовательность независимых и равномерно распределенных на $[0,1]$ случайных величин. Найдите распределение случайной величины $m_n = min\{X_1, \dots, X_n\}$ и докажите, что $m_n \xrightarrow{п.н.} 0$.

Решение.

Найдем распределение случайной величины m_n. Стоить также заметить, что все $X_n \in [0,1] \Rightarrow m_n \in [0,1]$.

$F_{m_n}(t) = P(m_n \le t) = 0, \qquad t < 0$

$F_{m_n}(t) = P(m_n \le t) = 1, \qquad t \ge 1$

$F_{m_n}(t) = P(m_n \le t) = 1 - P(t < m_n) = 1 - P(t < \min\{X_1, \dots, X_n\}) = 1 - P(X_1 > t \wedge \dots \wedge X_n > t)$
$= 1 - P(X_1 > t) \cdot \dots \cdot P(X_n > t) =$

$= 1 - (1 - P(X_1 \le t)) \cdot \dots \cdot (1 - P(X_1 \le t)) = 1 - \left(1 - F_{X_1}(t)\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - F_{X_n}(t)\right) = 1 - (1-t)^n, \qquad t \in [0,1)$

$$F_{m_n}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - (1-t)^n, & t \in [0,1) \\ 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

Докажем, что $m_n \xrightarrow{п.н.} 0$:

$\forall \delta > 0\colon\ P(|m_n| \ge \delta) = P(m_n \ge \delta) = 1 - P(m_n \le \delta) + \underbrace{P(m_n = \delta)}_{0} = 1 - F_{m_n}(\delta)$

$\forall \delta \ge 1\colon\ P(|m_n| \ge \delta) = 0$

$\forall \delta \in (0,1)\colon\ P(|m_n| \ge \delta) = 1 - 1 + (1-\delta)^n = (1-\delta)^n < 1$

$\forall \delta > 0\ \sum_{n=1}^{\infty} P(|m_n| \ge \delta) < \infty$ − что соответствует условию сходимости п. н.

Задача 14.

Пусть X_n − последовательность независмых и равномерно распределенных на $[0,1]$ случайных величин. Докажите, что последовательность $Y_n = \sqrt[n]{X_1 \cdot \dots \cdot X_n}$ почти наверное сходится и найдите ее предел.

Решение.

$$Y_n = \sqrt[n]{X_1 \cdot \dots \cdot X_n} = e^{\ln Y_n} = e^{\ln \sqrt[n]{X_1 \cdot \dots \cdot X_n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln(X_1 \cdot \dots \cdot X_n)} = e^{\frac{\ln X_1 + \dots + \ln X_n}{n}}$$

По усиленному ЗБЧ:

$$\frac{\ln X_1 + \dots + \ln X_n}{n} \xrightarrow{п.н.} \mathbb{E} \ln X_1 = \int_0^1 \ln x \, dx = x \cdot (ln\, x - 1)\Big|_0^1 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad Y_n \to e^{-1}$$