Задача 9.

По кругу сидят n человек. Каждый из них независимо от остальных бросает игральную кость. Пусть случайная величина X равна количеству людей, у которых у хотя бы одного соседа выпало то же число, что и у него самого. Найдите $\mathbb{E}X$.

Решение.

Рассматриваем i-го человека в круге. С вероятностью $^5/_6$ у $i+1$ человека выпало другое значение при броске, и с той же вероятностью у $i-1$. Так как кость бросается независимо, то с вероятностью $^{25}/_{36}$ значения у i и $i+1$, а также у i и $i-1$ различны. Тогда событие, дополнительное к этому имеет вероятность $1-{}^{25}/_{36} = {}^{11}/_{36}$, то есть хотя бы одно совпадение с $i-1$ или с $i+1$.

$X = X_1 + \dots + X_n \;\Rightarrow\; \mathbb{E}X_i = \mathrm{P}(X_i = 1) = {}^{11}/_{36} \;\Rightarrow\; \mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n = {}^{11n}/_{36}$.

Задача 10.

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин X_n, имеющих геометрическое распределение, т. е. $P(X_n = k) = p(1-p)^{k-1}$. Найдите распределение случайных величин $\tau = min\{n \geq 1: X_n > 1\}$ и X_τ, вычислите $\mathbb{E}\tau$, $\mathbb{E}X_\tau$.

Решение.

$\tau = n$: $X_1 = \dots = X_{n-1} = 1, \quad X_n \neq 1 \;\Rightarrow\; P(\tau = n) = P(X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, \quad X_n > 1) = p^{n-1} \cdot (1-p)$.

То есть τ имеет геометрическое распределение с параметром $q = 1 - p$.

Значит $\mathbb{E}\tau = \dfrac{1}{1-p}$.

Известно, что $X_\tau > 1$. Тогда найдем вероятность $X_\tau = k+1, k \geq 1$. Тогда при $\tau = 1, \tau = 2, \dots,$:

$P(X_\tau = k+1) = P(X_\tau = k+1, \tau = 1) + P(X_\tau = k+1, \tau = 2) + \dots = P(X_1 = k+1) + P(X_1 = 1, X_2 = k+1) + P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = k+1) + \dots = p \cdot (1-p)^k + p^2 \cdot (1-p)^k + p^3 \cdot (1-p)^k = \dfrac{p \cdot (1-p)^k}{(1-p)} = p \cdot (1-p)^{k-1}$.

То есть $X_\tau = 1 + Y$. Y имеет геометрическое распрделение с параметром p.

Значит $\mathbb{E}X_\tau = 1 + \dfrac{1}{p}$.