№9 Т.В. Некрасов Артём 216

Задача 2.

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределение которой задано плотностью:

c) $\varrho(x) = \sin x$ *при* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *и* $\varrho(x) = 0$ *при* $x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

<u>Решение.</u>

$$\begin{cases} \varrho(x) = \sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \varrho(x) = 0, & x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x\, dx \Rightarrow \left[\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix}\right] \Rightarrow x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x\, dx = \sin x - x \cdot \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x - x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - (-0 \cdot \cos 0 + \sin 0) = \boxed{1}$$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sin x\, dx - 1^2 \Rightarrow \left[\begin{matrix} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = \sin x\, dx \Rightarrow v = -\cos x \end{matrix}\right] \Rightarrow x^2 \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2xdx =$$

$$= x^2(-\cos x) - 1 \cdot (-2) \cdot \int \cos x \cdot xdx = x^2(-\cos x) + 2\int \cos x \cdot xdx \Rightarrow \left[\begin{matrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\, dx \Rightarrow v = \sin x \end{matrix}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(-\cos x) + 2\left(x \cdot \sin x - \int \sin x\, dx\right) = x^2(-\cos x) + 2(x \cdot \sin x - (-\cos x)) = -x^2 \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 1 =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2} - (0^2 \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 \sin 0 + 2\cos 0) - 1 = \pi - 2 - 1 = \boxed{\pi - 3}$$

Задача 5.

Пусть X и Y независимые случайные величины, X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,2]$*, а Y имеет экспоненциальное распределение с параметром 1. Найдите* $\mathbb{E}Z$ *и* $\mathbb{D}Z$*, где b)* $Z = \min\{X, Y, 1\}$.

<u>Решение.</u>

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t \in [0,2] \\ 0, & t \notin [0,2] \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}, \qquad \varrho_Y(t) = e^{-t} Ind_{t>0}$$

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(min\{X, Y, 1\} \le t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-t}(t + 2e^t - 2), & t \in (0,1) \\ 1, & t \ge 1 \\ 0, & t \le 0 \end{cases} \Rightarrow \varrho_Z(t) = \frac{3-t}{2e^t} Ind_{\ t\in(0,1)}$$

$$\mathbb{E}Z = \int_0^1 t \cdot \frac{3-t}{2e^t} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3t - t^2}{e^t} dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3t}{e^t} - \frac{t^2}{e^t} dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{3t}{e^t} dt - \int_0^1 \frac{t^2}{e^t} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-3te^{-t} - 3e^{-t} + t^2e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t})\Big|_0^1 = \frac{-t - 1 + t^2}{2e^t}\Big|_0^1 = \boxed{-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}}$$

$$\mathbb{D}Z = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = \int_0^1 t^2 \cdot \frac{3-t}{2e^t} dt - \left(-\frac{1}{2e} + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2e} - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4e} + \frac{1}{4e^2}\right) = \boxed{\frac{1}{e} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2}}$$

Задача 7.

Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$, а случайная величина Y совпадает с числом успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p и эти случаные величины независимы. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величин $X + Y$, $X \cdot Y$. Найдите математическое ожидание случайной величины $max\left\{X, \frac{Y}{n}\right\}$.

<u>Решение.</u>

Так как X, Y независимые случайные величины, то

$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$, $\quad \mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}(X) + \mathbb{D}(Y)$
$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$, $\quad \mathbb{D}(X \cdot Y) = \mathbb{D}(X) \cdot \mathbb{D}(Y) + (\mathbb{E}X)^2 \cdot \mathbb{D}Y + (\mathbb{E}Y)^2 \cdot \mathbb{D}X$

$$\begin{cases} \mathbb{E}X = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{D}X = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12} \\ \mathbb{E}Y = n(1 \cdot p + 0 \cdot q) = np \\ \mathbb{D}Y = npq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(X + Y) = \frac{1}{2} + np \\ \mathbb{E}(X \cdot Y) = \frac{1}{2} \cdot np \\ \mathbb{D}(X + Y) = \frac{1}{12} + npq \\ \mathbb{D}(X \cdot Y) = \frac{1}{12} \cdot npq + \frac{1}{4} \cdot npq + (np)^2 \cdot \frac{1}{12} \end{cases}$$