№7 Д.У. Некрасов Артём 216

1. Решите разностные уравнения, используя разные методы

a) $x_{t+1}-\left(\frac{t+3}{t+2}\right)^2 x_t = 2^t(t+3)^2$

<u>Решение.</u>

$$a_t = -\left(\frac{t+3}{t+2}\right)^2, \qquad f_t = 2^t(t+3)^2, \qquad A_t = (-1)^t\cdot\prod_{j=0}^{t-1} a_j, \qquad x_t = \left(c+\sum_{j=0}^{t-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)\cdot A_t$$

$$A_t = (-1)^t\cdot\prod_{j=0}^{t-1} a_j = \prod_{j=0}^{t-1}\left(\frac{j+3}{j+2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\ldots\cdot\left(\frac{t+1}{t}\right)^t\cdot\left(\frac{t+2}{t+1}\right)^2 = \frac{(t+2)^2}{4}$$

$$\sum_{j=0}^{t-1}\frac{f_j}{A_{j+1}} = \sum_{j=0}^{t-1}\frac{2^j\cdot(j+3)^2}{\frac{(j+3)^2}{4}} = \sum_{j=0}^{t-1}\frac{2^j\cdot(j+3)^2\cdot 4}{(j+3)^2} = \sum_{j=0}^{t-1}2^{j+2} = 2^{t+2}-1 = 4(2^t-1)$$

$$\boxed{x_t = \big(c+4(2^t-1)\big)\cdot\frac{(t+2)^2}{4}}$$

b) $x_{t+1}-x_t = \frac{(t+1)^2}{(2t+1)(2t+3)}$

<u>Решение.</u>

$$a_t = -1, \qquad f_t = \frac{(t+1)^2}{(2t+1)(2t+3)}, \qquad A_t = (-1)^t\cdot\prod_{j=0}^{t-1} a_j, \qquad x_t = \left(c+\sum_{j=0}^{t-1}\frac{f_j}{A_{j+1}}\right)\cdot A_t$$

$$A_t = (-1)^t\cdot\prod_{j=0}^{t-1} a_j = 1$$

$$f_t = \frac{(t+1)^2}{(2t+1)(2t+3)} = \frac{At+B}{2t+3}+\frac{Ct+D}{2t+1}$$

$$(At+B)(2t+1)+(Ct+D)(2t+3) = 2At^2+At+2Bt+B+2Ct^2+3Ct+2Dt+3D =$$

$$= (2A+2C)t^2+(A+2B+3C+2D)t+(B+3D) \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2A+2C=1\\ A+2B+3C+2D=2\\ B+3D=1\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} A=1/2\\ B=5/8\\ C=0\\ D=1/8\end{cases} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(t+1)^2}{(2t+1)(2t+3)} = \frac{1/8}{2t+1}+\frac{t/2+5/8}{2t+3}$$

$$\sum_{j=0}^{t-1}\frac{f_j}{A_{j+1}} = \sum_{j=0}^{t-1}\left(\frac{1/8}{2j+1}+\frac{j/2+5/8}{2j+3}\right) = \frac{1}{8}\sum_{j=0}^{t-1}\left(\frac{1}{2j+1}+\frac{4j+5}{2j+3}\right) = \frac{t}{4}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2t-1}-\frac{1}{2t+1}\right) = \frac{2t}{8}+\frac{2t}{8(2t+1)}$$

$$\boxed{x_t = C+\frac{t^2+t}{2(2t+1)}}$$

c) $2x_{t+2}-2x_{t+1}+x_t = 2^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

<u>Решение.</u>

Решим однородное:

$$2\lambda^2-2\lambda+1=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right., \qquad x_{\text{общ.}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\left(c_1\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+c_2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)$$

Теперь найдем частное решение $x_{\text{част.}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\left(a\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)$:

$$2(t+2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{t+2}\left(a\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\cdot 2(t+1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{t+1}\left(a\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}\right)\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t t\left(a\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+b\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-a\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)t-2a\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)t+2b\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)-a\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)t+a\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)t-b\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)t-b\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)t-$$

$$-a\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+a\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)-b\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)-b\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+a\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)t+b\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)t = \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

$$\begin{cases}-2a+a=b\\ b=1+a\end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} a=-\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases} \;\Rightarrow\; x_{\text{част.}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t t\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)$$

$$\boxed{x_t = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t\left(c_1\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+c_2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t t\left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right)}$$

d) $x_{t+2}-7x_{t+1}+12x_t = (15t+1)(-2)^t$

<u>Решение.</u>

Решаем однородное:

$$\lambda^2-7\lambda+12=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda=3\\ \lambda=4\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad x_{\text{общ.}} = c_1\cdot 4^t+c_2\cdot 3^t$$

Теперь найдем частное решение $x_{\text{част.}} = (at+b)(-2)^t$:

$$(-2)^{t+2}(a(t+2)+b)-7(-2)^{t+1}(a(t+1)+b)+12(-2)^t(at+b) = (-2)^t(15t+1)$$

$$4a(t+2)+4b+14a(t+1)+14b+12at+12b = 15t+4a+14a+12a = 15 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{2}$$

$$8a+4b+14a+14b+12b=1 \quad\Rightarrow\quad b=-\frac{1}{3}$$

$$x_{\text{част.}} = \left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)(-2)^t$$

$$\boxed{x_t = c_1\cdot 4^t+c_2\cdot 3^t+\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)(-2)^t}$$

e) $x_{t+2}-x_t = 4t-6+8(-3)^t$

<u>Решение.</u>

Решаем однородное:

$$\lambda^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=-1\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad x_{\text{общ.}} = c_1+c_2(-1)^t$$

$f_1 = 4t-6$:

$$x_{f_1} = (at+b)t \;\Rightarrow\; (a(t+2)+b)(t+2)-(at+b)t = 4t-6, \qquad t=-2:\; 2(b-2a)=-14 \;\Rightarrow\; b=-7+2a, \qquad t=0:\; 4a+2b=-6$$

$$\Rightarrow\quad 8a=8 \quad\Rightarrow\quad a=1 \quad\Rightarrow\quad b=-5$$

$$x_{f_1} = (t-5)t$$

$f_2 = 8(-3)^t$

$$x_{f_2} = (at+b)(-3)^t \;\Rightarrow\; (-3)^{t+2}(a(t+2)+b)-(-3)^t(at+b) = 8(-3)^t \;\Rightarrow\; 9a(t+2)+9b-at-b=8 \;\Rightarrow\; 9a-a=0 \;\Rightarrow\; a=0$$

$$18a+9b-b=8 \quad\Rightarrow\quad b=1$$

$$x_{f_2} = (-3)^t$$

$$\boxed{x_t = c_1+c_2(-1)^t+t^2-5t+(-3)^t}$$

2. Используя подстановку $y_t = (t-1)!\,z_t$ решите уравнение с переменными коэффициентами $y_{t+2}+5(t+1)y_{t+1}+6(t+1)ty_t = 20(t+1)!\,2^t$

<u>Решение.</u>

$$(t+1)!\,z_{t+2}+5(t+1)!\,z_{t+1}+6(t+1)!\,z_t = 20(t+1)!\,2^t$$

$$z_{t+2}+5z_{t+1}+6z_t = 20\cdot 2^t$$

Решаем однородное:

$$\lambda^2+5\lambda+6=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda=-3\\ \lambda=-2\end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \text{Общее: } z_t = c_1(-2)^t+c_2(-3)^t$$

$f_z = 20\cdot 2^t = Q_s(t)\cdot\mu^t$. Хотим найти частное решение вида $\hat{z_t} = t^m\cdot Q_s(t)\cdot\mu^t$. Применяя метод неопределенных коэффициентов:

$$\hat{z}_t = a\cdot 2^t, \qquad a\cdot 2^{t+2}+5a\cdot 2^{t+1}+6a\cdot 2t = 20\cdot 2^t \;\Rightarrow\; 20a=20 \;\Rightarrow\; a=1 \;\Rightarrow\; z_t = c_1\cdot(-2)^t+c_2\cdot(-3)^t+2^t$$

$$\boxed{y_t = (t-1)!\cdot\left(c_1(-2)^t+c_2(-3)^t+2^t\right)}$$

3. Решите однородную систему разностных уравнений

a) $\begin{pmatrix}x_{t+1}\\ y_{t+1}\\ z_{t+1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\\ z_t\end{pmatrix}$

<u>Решение.</u>

Найдем собственные значения:

$$B = A-\lambda E = \begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^3+8+8-12(1-\lambda) = -\lambda^3+3\lambda^2+9\lambda+5 = -\lambda^3-\lambda^2+4\lambda^2+4\lambda+5\lambda+5 =$$

$$= -\lambda^2(\lambda+1)+4\lambda(\lambda+1)+5(\lambda+1) = (\lambda+1)(-\lambda^2+4\lambda+5) = (\lambda+1)^2(\lambda-5) \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{ll}\lambda=-1, & k=2\\ \lambda=5, & k=1\end{array}\right.$$

Найдем собственные векторы:

$$\lambda=-1:\; \begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; h_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad h_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=5:\; \begin{pmatrix}-4&2&2\\2&-4&2\\2&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; h_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\end{array}\right) \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix}v_3\\v_3\\v_3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_t\\y_t\\z_t\end{pmatrix} = c_1(-1)^t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2(-1)^t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c_3(5^t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$$

b) $\begin{pmatrix}x_{t+1}\\ y_{t+1}\\ z_{t+1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&2&1\\4&2&3\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_t\\ y_t\\ z_t\end{pmatrix}$

<u>Решение.</u>

Найдем собственные значения:

$$B = A-\lambda E = \begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\-2&2-\lambda&1\\4&2&3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-4+4+4(2-\lambda)-2(1-\lambda)-2(3-\lambda) = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 =$$

$$= -\lambda^3+\lambda^2+5\lambda^2-5\lambda+6-6\lambda = -\lambda^2(\lambda-1)+5\lambda(\lambda-1)+(-6)(\lambda-1) = (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=2,\\ \lambda=3\end{array}\right. \qquad k=1$$

$$\lambda=1:\; \begin{pmatrix}0&-1&-1\\-2&1&1\\4&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; h_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=2:\; \begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-2&0&1\\4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; h_2 = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda=3:\; \begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-2&-1&1\\4&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; h_3 = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix}x_t\\y_t\\z_t\end{pmatrix} = c_1(1^t)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+c_2(2^t)\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}+c_3(3^t)\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}}$$

4. Решите задачу Коши для уравнения в частных производных первого порядка

$xy\frac{\partial u}{\partial x}-x^2\frac{\partial u}{\partial y}+yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ *и при* $z = x^2+y^2$ *функция* $u = x$.

<u>Решение.</u>

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz} = \frac{du}{0}, \qquad \text{отсюда } du=0, \text{ то есть } u=c_1 - \text{первый интеграл.}$$

Найдем еще два независимых первых интеграла:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{-x^2} \;\Rightarrow\; \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dz}{z} \;\Rightarrow\; \ln|x| = \ln|z|+\hat{c_2}, \qquad \frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} \;\Rightarrow\; -\int x\,dx = \int y\,dy \;\Rightarrow\; -\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}+\hat{c_1}$$

Имеем общее решение: $\Phi(x^2+y^2, x/z, u) = 0 \;\Rightarrow\; u = f(x^2+y^2, x/z)$

$x = f\big(x^2+y^2, x/(x^2+y^2)\big)$. Пусть $\xi = x^2+y^2, \eta = x/(x^2+y^2)$, тогда:

$$f(\xi,\eta) = \xi\cdot\eta = x \quad\Rightarrow\quad \boxed{u = \frac{(x^2+y^2)x}{z}}$$