№5 М.А. Некрасов Артём 216

Исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость на заданом множестве.

$$1. f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^3}$$

$a) D = [0,1]$
<u>Решение.</u>

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = 0$$
$$\sup_{\mathbb{D}} \left| \frac{nx}{1+n^3x^3} - 0 \right| = \frac{n\cdot(1-2n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}$$

$$\left(\frac{nx}{1+n^3x^3}\right)' = \frac{n\cdot(1+n^3x^3) - nx\cdot(3n^3x^2)}{(1+n^3x^3)^2} = \frac{n\cdot(1-2n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}n} \\ x_2 = -\dfrac{1}{n}(\text{не подходит}) \end{array}\right.$$

$$\sup_{\mathbb{D}} \left| \frac{nx}{1+n^3x^3} - 0 \right| = \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1+\frac{1}{2}} \not\to 0$$

Значит неравномерная сходимость.

$b) D = [1, +\infty)$

<u>Решение.</u>

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = 0$$

$$\sup_{\mathbb{D}} \left| \frac{nx}{1+n^3x^3} - 0 \right| = \frac{n\cdot(1-2n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}$$

$$\left(\frac{nx}{1+n^3x^3}\right)' = \frac{n\cdot(1+n^3x^3) - nx\cdot(3n^3x^2)}{(1+n^3x^3)^2} = \frac{n\cdot(1-2n^3x^3)}{(1+n^3x^3)^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}n} \\ x_2 = -\dfrac{1}{n}(\text{не подходит}) \end{array}\right.$$

$$\sup_{\mathbb{D}} \left| \frac{nx}{1+n^3x^3} - 0 \right| = \left| \frac{n}{n^3+1} - 0 \right| \to 0$$

Значит равномерная сходимость.

$$2. f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}$$

$a) D = [0, 2]$

Решение.

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = x^2$$

$$\sup_{\mathbb{D}} \left| \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right| = \left| \frac{-x^3}{n+x} \right| = \frac{x^3}{n+x}$$

$$\left(\frac{x^3}{n+x} \right)' = \frac{3x^2 \cdot (n+x) - x^3}{(n+x^2)^2} = \frac{3nx^2 + 2x^3}{(n+x^2)^2}$$

$$x = -\frac{3n}{2},\, x_{max} = 2$$

$$\sup_{\mathbb{D}} \left| \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right| = \frac{2^3}{n+2} \to 0$$

Значит равномерная сходимость.

$b) D = [2, +\infty)$

Решение.

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = \infty$$

$$f_n(x) - \text{непрерывна.}$$

Значит неравномерная сходимость.

$$3. f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$$

$a) D = [0, 1]$

Решение.

$$\text{при } x = 0 : f(x) = 0,\ \frac{\pi}{2} \text{ и } x \in (0, 1] \Rightarrow f(x) \text{ разрывна, } f_n(x) \text{ непрерывна.}$$

Значит нет равномерной сходимости.

$b) D = [1, +\infty)$

Решение.

$$f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sup\left(\operatorname{arctg}(nx) - \frac{\pi}{2}\right) = \left(\operatorname{arctg}(n) - \frac{\pi}{2}\right) \to 0$$

Значит равномерная сходимость.

4.Законен ли переход к пределу под знаком интеграла в выражении

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$$

<u>Решение.</u>

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx \Rightarrow t = nx^2, dt = 2nx\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^n \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^n = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \int_0^1 0dx = 0$$

$$0 \neq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{Значит переход не законен, вызывайте полицию.}$$