№7 М.А. Некрасов Артём 216

1. Найти множество сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}x^n$$

$x_0 = 0$

$a_n = \frac{4^n}{3^n(n^3+2)^{1/2}}$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{4^n}{3^n(n^3+2)^{1/2}}\right|} = \frac{4}{3}\overline{\lim} \frac{1}{(n^3+2)^{1/2n}} = \frac{4}{3}$$

$$e^{\ln(n^3+2)^{1/2n}} = e^{\frac{1}{2n}\ln(n^3+2)} \sim$$

$$\sim e^{1/2n \ln n^3} = e^{\frac{3}{2n}\ln n} \to 1$$

$$\frac{1}{R} = \frac{4}{3} \Rightarrow R = \frac{3}{4}$$

Интервал сх-ти: $(-3/4;\ 3/4)$

$x = -3/4$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^n\sqrt{n^3+2}}\cdot(-3/4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4^n}{3^n}\cdot\frac{3^n}{4^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^3+2}} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3+2}}$ — сходится по пр-ку Лейбница.

$x = 3/4$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n}\cdot\frac{3^n}{4^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n^3+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ — сходится, как обобщенный гарм-ий => исх. тоже сх-ся

Вывод: сходится на всём интервале.

2. Найти множество сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}(x-1)^{5n}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3}\cdot\frac{(n!)^3}{(3n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} =$$

$$= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} = 27$$

Интервал сх-ти: $\left(\frac{26}{27};\ \frac{28}{27}\right)$

$x = 26/27$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)!}{(n!)^3}(-1)^{5n}\cdot 27^{-5} =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{6}\sqrt{\pi n}}{2\pi n\sqrt{2}\sqrt{\pi n}}(-1)^{5n}\cdot 27^{-5n}\cdot\frac{(3n)^{3n}}{e^{3n}}\cdot\frac{e^{3n}}{n^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2\pi n}(-1)^{5n}\cdot 27^{-5n}\cdot 3^{3n} =$$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2\pi n}(-1)^{5n}\cdot\frac{1}{3^{?}}$ — сх-ся по пр-ку Лейбница

$x = 28/27$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2\pi n}\cdot\frac{1}{3^{12n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{12n}}$ — сходится, как геом. прогр.

Вывод: сходится на всём интервале.

3. Найти сумму ряда:

$$\sum_{n=}\frac{n^2}{2^n}$$

Вспомним кое-что из семинара:

$$\sum nx^n = x\sum nx^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x^2)}\cdot x$$

$$\sum nx^n = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{продиф-м обе части}$$

$$\sum n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad \Big/ \cdot x$$

$$f(x) = \frac{(1+x)\cdot x}{(1-x)^3} \Rightarrow x = 1/2 \Rightarrow \frac{1/2\,(1+1/2)}{(1-1/2)^3} = 6$$