Задача 8.

Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и

$$Pr(X_k = 1) = Pr(X_k = -1) = 1/4, \qquad Pr(X_k = 0) = 1/2, \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Пусть $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Найдите $\mathbb{E}S_n$, $\mathbb{D}S_n$ и $\mathbb{E}2^{S_n}$.

Решение.

Нагло пользуемся тем, что случайные величины независимы:

$$S_n = X_1 + \dots + X_n = \sum_1^n X_k$$

$$\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}\sum_1^n X_k = \sum_1^n \mathbb{E}X_k \Rightarrow \mathbb{E}X_k = 1 \cdot 1/4 - 1 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/2 = 0 \Rightarrow \mathbb{E}S_n = 0 + \dots + 0 = 0$$

$$\mathbb{D}S_n = \mathbb{D}\sum_1^n X_k = \sum_1^n \mathbb{D}X_k \Rightarrow \mathbb{D}X_k = 1^2 \cdot 1/4 + (-1)^2 \cdot 1/4 + 0^2 \cdot 1/2 - 0^2.0 = 1/2 \Rightarrow \mathbb{D}S_n = 1/2 + \dots + 1/2 = n/2$$

$$\mathbb{E}2^{S_n} = \mathbb{E}2^{(\sum_1^n X_k)} = \mathbb{E}\prod_1^n 2^{X_k} = \prod_1^n \mathbb{E}2^{X_k} = \left(\mathbb{E}2^{X_k}\right)^n \Rightarrow \mathbb{E}2^{X_k} = 2^1 \cdot 1/4 + 2^{-1} \cdot 1/4 + 2^0 \cdot 1/2 = 9/8 \Rightarrow \left(9/8\right)^n$$

Задача 9.

По кругу сидят n человек. Каждый из них независимо от остальных бросает игральную кость. Пусть случайная величина X равна количеству людей, у которых у хотя бы одного соседа выпало то же число, что и у него самого. Найдите $\mathbb{E}X$.

Решение.

Рассматриваем i-го человека в круге. С вероятностью $5/6$ у $i+1$ человека выпало другое значение при броске, и с той же вероятностью у $i-1$. Так как кость бросается независимо, то с вероятностью $25/36$ значения у i и $i+1$, а также у i и $i-1$ различны. Тогда событие, дополнительное к этому имеет вероятность $1 - 25/36 = 11/36$, то есть хотя бы одно совпадение с $i-1$ или с $i+1$.
$X = X_1 + \dots + X_n \Rightarrow \mathbb{E}X_i = \Pr(X_i = 1) = 11/36 \Rightarrow \mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n = 11n/36$.