№15 М.А. Некрасов Артём 216

1. Вычислить предел: $\lim\limits_{y\to 1}\int_0^1 x^2 e^{yx^3}dx$

<u>Решение.</u>

Знаем, что пределы интегр. конст. + непрерывность на $[0,1]\times[0,2] \Rightarrow$ можно менять порядок:

$$\lim_{y\to 1}\int_0^1 x^2 e^{yx^3}dx = \int_0^1 \lim_{y\to 1} x^2 e^{yx^3}dx$$

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3}dx = \begin{bmatrix} t = x^3 \\ dx = \dfrac{1}{3x^2}dt \end{bmatrix} = \int_0^1 x^2 e^{x^3}\cdot\frac{1}{3x^2}dt = \int_0^1 \frac{e^t}{3}dt = \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 e^t dt = \frac{e^t}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{e^1}{3} - \frac{e^0}{3} = \frac{e^1-1}{3} = \boxed{\frac{e-1}{3}}$$

2. Вычислить предел: $\lim\limits_{y\to 0}\int_{\sin y}^{\pi\sqrt{y+1}} \underbrace{x\cdot\cos\big((1+y)x\big)}_{\text{непрерывная}}dx$

<u>Решение.</u>

$\pi\sqrt{y+1}, \sin y$ непрерывны на $[-1, 1]$. Пусть $y\in[-1,1]$, тогда $x\in\big[\sin(-1), \pi\sqrt{2}\big] \Rightarrow x\in\big[-\sin(1), \pi\sqrt{2}\big]$

$$\int_{\sin y}^{\pi\sqrt{y+1}} \lim_{y\to 0} x\cdot cos\big((1+y)x\big)\,dx = \int_0^{\pi} x\cdot\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = \cos x\,dx \\ du = dx \\ v = \sin x \end{bmatrix} \Rightarrow x\cdot\sin x - \int \sin x\,dx \Rightarrow x\cdot sin\,x + cos\,x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \pi\cdot\sin\pi + \cos\pi - (0\sin 0 + \cos 0) = \boxed{-2}$$

3. Исследовать на дифференцируемость и найти производную функции: $F(y) = \int_{e^{-y}}^{e^y}\ln(1+x^2y^2)\,\frac{dx}{x}$

<u>Решение.</u>

Функция дифференцируема по y, поскольку внутри интеграла есть явная зависимость от y.

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_{e^{-y}}^{e^y}\ln(1+x^2y^2)\,\frac{dx}{x} = \frac{d}{dy}\left(ln(1+x^2y^2)\frac{dx}{x}\right)\Bigg|_{e^{-y}}^{e^y} = \boxed{\ln(1+e^{2y}y^2) - \ln(1+e^{-2y}y^2)}$$

4. Исследовать на дифференцируемость и найти производную функции: $F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2y}dx$. Исследовать производную на непрерывность.

<u>Решение.</u>

$\Big(\alpha(y) = y$

$\beta(y) = y^2$ обе дифференцируемы на $[c, d]$.

$f(x,y) = e^{-x^2 y}$ – непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$

$\frac{df}{dy} = e^{-x^2 y}(-x^2 y)' = -x^2 e^{-x^2 y}$ – тоже непрерывна. Тогда по теореме о дифференцируемости СИЗП:

Fдифференцируема на любом $[c,d] \Rightarrow F$ дифференцируема на $\mathbb{R}$.

$$F' = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{df}{dy} dx + f(\beta(y),y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\cdot\alpha'(y) \Rightarrow F'(y) = \frac{d}{dy}\int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx =$$

$$= (y^2 - y)\cdot e^{-y^3} - (y^2 - y)\cdot e^{-y^2} = \boxed{e^{-y^3} - e^{-y^2}}$$

Заметим, что $\alpha(y), \beta(y)$ непрерывно дифференцируемы $\Rightarrow F'(y)$ тоже непрерывна.

5. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(p \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx$ при $p \in [0,1)$.
(*Напоминание от лектора: при вычислении некоторых интегралов удобна замена* $tg\ x = y$).

<u>Решение.</u>

$$f(x,p) = \frac{\operatorname{arctg}(p\cdot\operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg} x} \text{ на } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1)$$

$$\operatorname{arctg}(p\cdot\operatorname{tg}(x)) \sim_{x\to 0} \sim p\cdot\operatorname{tg} x \Rightarrow f(x,p) \sim \frac{p\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = p$$

$$f(x,p) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(p\cdot\operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg} x} \\ p, \text{при } x = 0 \end{cases} \text{– непрерывна на } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \left\{\frac{\operatorname{tg} x}{(1+p^2\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x} = \frac{1}{(1+p^2\operatorname{tg}^2 x)} \text{– непрерывно на } \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1)\right.$$

$$F'(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+p^2\operatorname{tg}^2 x)} dx = \left[\begin{matrix} dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1+t^2)dx \\ t = \operatorname{tg} x \end{matrix}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+p^2\cdot t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^2\left(\frac{1}{p^2}+t^2\right)(1+t^2)} dt$$

$$= \frac{1}{p^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{p^2}+t^2\right)(1+t^2)} dt$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{p^2}+t^2\right)(1+t^2)} = \frac{At+B}{t^2+\frac{1}{p^2}} + \frac{Ct+D}{t^2+1} \Rightarrow \frac{At^3+Bt^2+At+B+Ct^3+Dt^2+C\cdot\frac{t}{p^2}+D\cdot\frac{1}{p^2}}{\left(t+\frac{1}{p^2}\right)\cdot(t^2+1)}$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + C\cdot\frac{1}{p^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = C = 0$$

$$\begin{cases} B + D = 0 \\ B + D \cdot \dfrac{1}{p^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow B = -D, \qquad D = -\frac{p^2}{(p^2-1)}, \qquad B = \frac{p^2}{p^2-1}$$

$$\frac{1}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2 + \frac{1}{p^2}} - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \frac{1}{p^2-1} \left(\operatorname{arctg} tp \cdot p \Big|_0^{+\infty} - \operatorname{arctg}(t) \Big|_0^{+\infty} \right) =$$

$$= \frac{1}{p^2-1} \left(\frac{\pi}{2} \cdot p - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(p-1)}{(p-1)\cdot(p+1)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)}$$

$$F(p) = \int \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)} dp = \frac{\pi}{2} \cdot \ln p + 1 + C$$

$$p = 0: \quad F(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = \frac{\pi}{2} \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Ответ: $\boxed{\frac{\pi}{2} \cdot \ln(p+1), \qquad p \in [0,1)}$

6. Вычислить интеграл из пункта 5 при всех $p \in \mathbb{R}$.

Решение.

Скорее всего интеграл не изменится, так как функция и производная непрерывная. $\big(F'(-1) = F'(1)\big)$