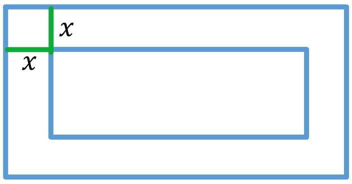
№6 Т.В. Некрасов Артём 216

Задача 10.

В прямоугольник со сторонами 1 и 2 брошена точка. Пусть $x > 0$. Найти вероятность того, что

a) расстояние от точки до ближайшей стороны прямоугольника не превосходит x;
b) расстояние от точки до каждой стороны прямоугольника не превосходит x;
c) расстояние от точки до диагоналей прямоугольника не превосходит x?

<u>Решение.</u>



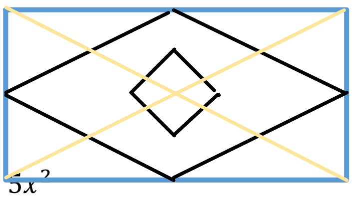
a) Рассмотрим крайний случай: так как расстояние от точки до ближайшей стороны не больше $\frac{1}{2}$, то при $x \geq \frac{1}{2}$ вероятность равна 1.

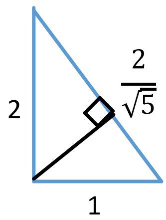
При $0 < x < \frac{1}{2}$. Внутри нашего прямоугольника построим новый, проведя линии на расстоянии x от исходных сторон. То есть стороны нового прямоугольника равны $(1 - 2x)$ и $(2 - 2x)$.
Тогда если точка принадлежит новому прямоугольнику,
то расстояния до всех сторон будет больше, чем x. Найдем вероятность попадания: $\frac{2-(1-2x)\cdot(2-2x)}{1\cdot 2} = \frac{2-4x^2+6x-2}{2} = -2x^2 + 3x$.

b) При $x < 1$ вероятность всегда 0.

При $1 \leq x < 2$. Пусть абсцисса точки лежит между $(2 - x)$ и (x), ордината от 0 до 1, значит вероятность будет равна $\frac{x-(2-x)}{2\cdot 1} = x - 1$

c)





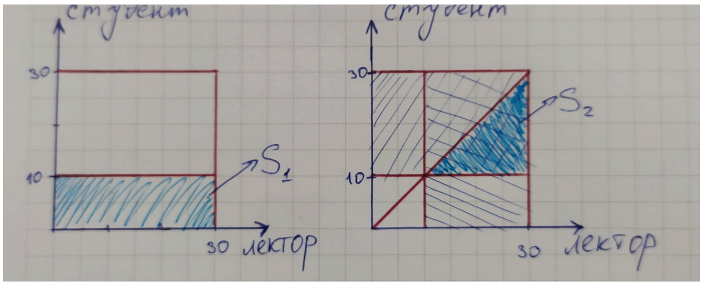
При $x \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{\text{мал.ромб}} = 5x^2 \Rightarrow P = \frac{5x^2}{1\cdot 2}$.

При $\frac{1}{\sqrt{5}} < x < \frac{2}{\sqrt{5}}$ пук-пук, я человек-паук.

Задача 11.

Студент К. хочет успеть к началу экзамена в 10.00, и решил приехать заранее к 9.50. Однако К. едет на электричке и в этот день из − за раннего снега все электрички задерживаются от 0 до 30 минут.
Найдите вероятность, что К. успеет к началу экзамена, если экзамен без лектора не начнется, а лектор сам едет на электричке к 9.50. Опоздания К. и лектора считать независимыми.

<u>Решение.</u>



$$\left[\begin{array}{l} \text{студент} \leq 10 \\ \begin{cases} \text{студент} > 10 \\ \text{лектор} \geq \text{студента} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} S_1 = 300 \\ S_2 = 200 \\ S_{\text{общ.}} = 900 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{S_1 + S_2}{S_{\text{общ.}}} = \frac{500}{900} = \frac{5}{9}.$$

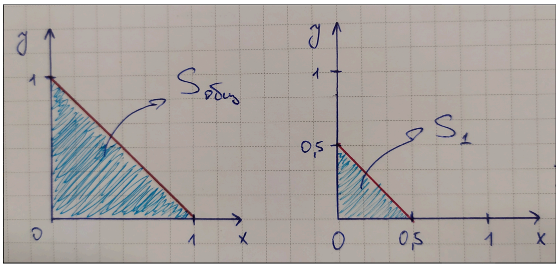
Задача 12.

Стержень длины 1 сломан на три части в двух выбранных случайно точках. Какова вероятность того, что из трех так получившихся частей можно сложить треугольник?

<u>Решение.</u>

Пусть полученные части имеют длины $x, y, (1 - x - y)$. Треугольник существует, если сумма двух сторон больше третей, то есть:

$$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ y < \frac{1}{2} \\ x + y > \frac{1}{2} \end{cases}, \qquad 0 < x + y < 1$$



$$S_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} \left(\begin{array}{c} \text{тут я, конечно, перепутал и нужен треугольник} \\ \text{симметричный этому, относительно} \\ \text{красной линии,} \\ \text{но площадь все равно та же.} \end{array} \right), \qquad S_{\text{общ.}} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Значит искомая вероятность равна:

$$\frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}.$$