№7 Т.В. Некрасов Артём 216

Лист 6.

Задача 4.

b) Слуайная величина X имеет экспоненциальное (показательное) распределение с параметром λ (т. е. $\varrho_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\{x>0\}}$). Нарисуйте график функции распределения X. Найдите вероятность $P(X \geq 1)$.

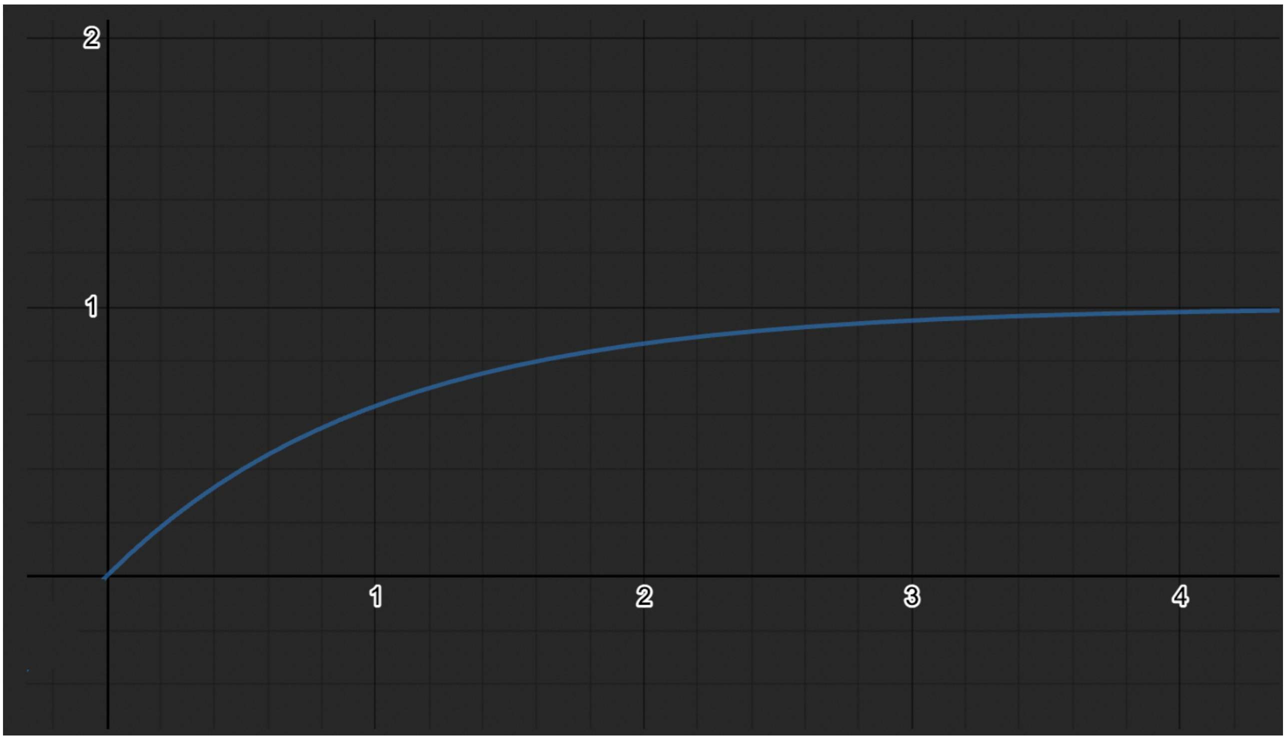
Найдите плотность величин

$b)\ Y_2 = X^2,\qquad c)\ Y_3 = \frac{1}{\lambda}\ln X.$

<u>Решение.</u>

$\varrho_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{\{x>0\}}$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varrho_X(x)dx = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda x} I_{\{x>0\}}dx = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 = 1 - e^{-\lambda x}$$



$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda}\right) = e^{-\lambda}$$

$b)\ Y_2 = X^2$

$$F_{Y_2}(x) = P(Y_2 \leq x) = P(X^2 \leq x) \Rightarrow_{X \geq 0 \text{ п.н.}} \Rightarrow P(X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) \Rightarrow \varrho_{Y_2}(x) = \left(1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}\right)' = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}}$$

$c)\ Y_3 = \frac{1}{\lambda}\ln X$

$$F_{Y_3}(x) = P(Y_3 \leq x) = P\left(\frac{1}{\lambda}\ln X \leq x\right) \Rightarrow_{X \geq 0 \text{ п.н.}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \geq 0, & P(\ln X \leq \lambda x) = P\left(x \leq e^{\lambda x}\right) = 1 - e^{-\lambda e^{\lambda x}} \\ \lambda < 0, & P(\ln X \geq \lambda x) = P\left(X \geq e^{\lambda x}\right) \end{cases}$$

Задача 11.

Для плотности ϱ_X случайной величины X известно, что $\varrho_X(x) = Cx^{-4}$ при $x \geq 1$ и $\varrho_X(x) = 0$ при $x < 1$. Найдите:
a) Постоянную C, b) плотность случайной величины $Y = 1/X$, c) вероятность $P(0.1 < Y < 0.3)$.

<u>Решение.</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(x)dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{1}^{+\infty} Cx^{-4}dx = \frac{C}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 3$$

$$F_X(x) = 0 + \int_1^x 3x^{-4}dx = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^3}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) = P\left(X \geq \frac{1}{x}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{x}\right) = \begin{cases} x^3 \;\Rightarrow\; \varrho(x) = 3x^2, & x \in (0,1) \\ 0 \;\Rightarrow\; \varrho(x) = 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$$P(0.1 < Y < 0.3) = F_Y(0.3) - F_Y(0.1) = 0.3^3 - 0.1^3 = \frac{13}{500} = 0.026$$

Задача 12.

Пусть случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,3]$. Найдите функцию и плотность распределения случайной величины:
a) $Y_1 = X^2$, b) $Y_2 = \sqrt{X}$.

<u>Решение.</u>

$$a)\; P(Y_1 \leq x) = P(X^2 \leq x) \Rightarrow \begin{cases} P(X^2 \leq x) = 0, & x^2 < 0 \\ P(X^2 \leq x) = \dfrac{x^2}{3}, & x^2 \in [0,3] \Rightarrow \varrho(x) = \dfrac{2}{3}x \\ P(X^2 \leq x) = 1, & x^2 > 3 \end{cases}$$

$$b) P(Y_2 \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) \Rightarrow \begin{cases} P(\sqrt{X} \leq x) = 0, & \sqrt{x} < 0 \\ P(\sqrt{X} \leq x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3}, & \sqrt{x} \in [0,3] \Rightarrow \varrho(x) = \dfrac{1}{6\sqrt{x}} \\ P(\sqrt{X} \leq x) = 1, & \sqrt{x} > 3 \end{cases}$$

Задача 13.

Равномерно из множества $\{(x,y): 1 \leq |x| + |y| \leq 3, y > 0\}$ выбирается точка плоскости. Найдите функцию распределения и плотность случайной величины $X(x,y) = x$.
*Нарисуйте график функции распр*еделения.

<u>Решение.</u>

А голова в коробке будет?

Задача 14.

Существуют ли независимые случайные величины X и Y такие, что каждая из них не является константой с вероятностью единица и $X^2 + Y^2 \equiv 1$?

Решение.

$0 < \lambda, p_x, p_y < 1.$ Пусть $\lambda = p_x = p_y = \dfrac{1}{2}$, тогда

	p_x	$1 - p_x$
X	$\sqrt{\lambda}$	$-\sqrt{\lambda}$

	p_y	$1 - p_y$
Y	$\sqrt{1-\lambda}$	$-\sqrt{1-\lambda}$

Отсюда $X^2 + Y^2 \equiv 1$.