№2 Д.У. Некрасов Артём 216

1. Запишите эти комплексные числа в тригонометрической и показательной форме:

$$z = a + ib = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1) $1+\sqrt{3}i$

Решение.

$$1+\sqrt{3}i = z, \qquad r = |z| = \sqrt{1+3} = 2, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) - \text{тригонометрическая форма} \\ z = 2\cdot e^{\frac{i\pi}{3}} - \text{показательная форма}\end{gathered}}$$

2) $2i$

Решение.

$$2i = z, \qquad r = \sqrt{0+4} = 2, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) - \text{тригонометрическая форма} \\ z = 2\cdot e^{\frac{i\pi}{2}} - \text{показательная форма}\end{gathered}}$$

3) $-7i$

Решение.

$$-7i = z, \qquad r = \sqrt{0+(-7)^2} = 7, \qquad \varphi = \frac{3\pi}{2}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z = 7\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \text{тригонометрическая форма} \\ z = 7\cdot e^{\frac{i3\pi}{2}} - \text{показательная форма}\end{gathered}}$$

4) $1-\sqrt{3}i$

Решение.

$$1-\sqrt{3}i = z, \qquad r = \sqrt{1+3} = 2, \qquad \varphi = \frac{5\pi}{3}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) - \text{тригонометрическая форма} \\ z = 2\cdot e^{\frac{i5\pi}{3}} - \text{показательная форма}\end{gathered}}$$

5) $\sqrt{3}i$

Решение.

$$\sqrt{3}i = z, \qquad r = \sqrt{3}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z = \sqrt{3}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) - \text{тригонометрическая форма} \\ z = \sqrt{3}\cdot e^{\frac{i\pi}{2}} - \text{показательная форма}\end{gathered}}$$

6) $3+4i$

$$3+4i = z, \qquad r = \sqrt{3^2+4^2} = 5, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3} = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$$

$$\boxed{\begin{gathered} z = 5\cdot\left(\cos\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + i\sin\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) - \text{тригонометрическая форма} \\ z = 5\cdot e^{i\cdot\operatorname{arctg}\frac{4}{3}} - \text{показательная форма}\end{gathered}}$$

2. *Найдите все значения корней из комплексных чисел*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

1) $\left(1+\sqrt{3}i\right)^{\frac{1}{2}}$

Решение.

$$from\ 1.1: z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sqrt[2]{z} = \sqrt[2]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right), k \in \{0,1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{z} \in \left\{\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right), \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{6} + i\,sin\frac{7\pi}{6}\right)\right\}}$$

2) $(2i)^{\frac{1}{3}}$

Решение.

$$from\ 1.2:\ z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right), k \in \{0,1,2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[3]{z} \in \left\{\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)\right\}}$$

3) $(-7i)^{\frac{1}{6}}$

Решение.

$$from\ 1.3:\ z = 7\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{6}\right), k \in \{0,1,2,3,4,5\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt[6]{z} \in \left\{\begin{gathered} \sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ \sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \\ \sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \\ \sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\ \sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \\ \sqrt[6]{7}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right)\end{gathered}\right\}}$$

4) *найдите частное от деления* $\frac{23+i}{3+i}$

Решение.

$$\frac{23+i}{3+i} = \frac{23+i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{69-23i+3i+1}{9+1} = \frac{70-20i}{10} = \boxed{7-2i}$$

3. *Решите линейные однородные уравнения:*

$a)\ y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^5 - 6\lambda^4 + 9\lambda^3 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^3(\lambda^2-6\lambda+9) = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^3(\lambda-3)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = 0 \\ \lambda = 3\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\lambda = 0, k = 3: & e^0, xe^0, x^2e^0 \\ \lambda = 3, k = 2: & e^{3x}, xe^{3x}\end{cases} \Rightarrow \{1, x, x^2, e^{3x}, x\cdot e^{3x}\} \Rightarrow \boxed{y = (c_1 + xc_2 + x^2c_3) + e^{3x}(c_4 + xc_5)}$$

$b)\ y''' - y'' - y' + y = 0$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2(\lambda-1) - (\lambda-1) = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda-1)(\lambda^2-1) = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = 1 \\ \lambda = -1\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\lambda = 1, k = 2: & e^x, xe^x \\ \lambda = -1, k = 1: & e^{-x}\end{cases} \Rightarrow \{e^{-x}, e^x, xe^x\} \Rightarrow \boxed{y = e^{-x}c_1 + e^x(c_2 + xc_3)}$$

$c)\ y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 3 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^4 + \lambda^2 + 3\lambda^2 + 3 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2(\lambda^2+1) + 3(\lambda^2+1) = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda^2+1)(\lambda^2+3) = 0 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = i \\ \lambda = -i \\ \lambda = \sqrt{3}i \\ \lambda = -\sqrt{3}i\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\lambda = i, k = 1: & e^{ix} \\ \lambda = -i, k = 1: & e^{-ix} \\ \lambda = \sqrt{3}i, k = 1: & e^{\sqrt{3}ix} \\ \lambda = -\sqrt{3}i, k = 1: & e^{-\sqrt{3}ix}\end{cases} \Rightarrow \left\{e^{ix}, e^{-ix}, e^{\sqrt{3}ix}, e^{-\sqrt{3}ix}\right\} \Rightarrow e^{ix}c_1 + e^{-ix}c_2 + e^{\sqrt{3}ix}c_3 + e^{-\sqrt{3}ix}c_4 = c_1(\cos x - i\sin x) +$$

$$+c_2(\cos x + i\sin x) + c_3\left(\cos\sqrt{3}x - i\sin\sqrt{3}x\right) + c_4\left(\cos\sqrt{3}x + i\sin\sqrt{3}x\right) = \cos x\,(c_1+c_2)\cdot\cos x + (-c_1+c_2)i\cdot\sin x +$$

$$+\cos\sqrt{3}x\,(c_3+c_4) + \sin\sqrt{3}x\,i(-c_3+c_4) \Rightarrow \boxed{y = \cos x\,d_1 + \sin x\,d_2 + \cos\sqrt{3}x\,d_3 + \sin\sqrt{3}x\,d_4}$$

$d)\ y''' - 3y' + 2y = 0$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^3 - 4\lambda + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-4) + (\lambda+2) = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-2)(\lambda+2) + (\lambda+2) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+1) = 0 \ \Rightarrow\ (\lambda+2)(\lambda-1)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = -2 \\ \lambda = 1\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\lambda = 1, k = 2: & e^x, xe^x \\ \lambda = -2, k = 1: & e^{-2x}\end{cases} \Rightarrow \{e^x, xe^x, e^{-2x}\} \Rightarrow \boxed{y = e^x(c_1 + xc_2) + e^{-2x}c_3}$$

$e)\ y^{(6)} + 64y = 0$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^6 + 64 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = \sqrt[6]{-64} \ \Rightarrow\ \lambda = \sqrt{64(\cos\pi + i\sin\pi)} \ \Rightarrow\ \lambda = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right), k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$\left[\begin{array}{l}\lambda = \sqrt{3} \pm i \\ \lambda = -\sqrt{3} \pm i \\ \lambda = \pm 2i\end{array}\right. \Rightarrow \left\{e^{\sqrt{3}\pm i}, e^{-\sqrt{3}\pm i}, e^{\pm 2i}\right\} \ \Rightarrow\ \boxed{y = \cos 2x\,d_1 + \sin 2x\,d_2 + e^{\sqrt{3}x}(\cos x\,d_3 + \sin x\,d_4) + e^{-\sqrt{3}x}(\cos x\,d_5 + \sin x\,d_6)}$$

4. Решите неоднородные уравнения с правой частью квазимногочленом методом неопределенных коэффициентов:

$a)\ y'' + 4y = 2\cos^2 x$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = 2i \\ \lambda = -2i\end{array}\right. \ \Rightarrow\ \text{Общее решение:}\ \ y = \cos 2x\,c_1 + \sin 2x\,c_2$$

Имеем: $2\cos^2 x = \cos 2x + 1$

$i.\ y_1 = x(r\cos 2x + t\sin 2x) \ \Rightarrow\ y_1' = r\cos 2x + t\sin 2x - 2rx\sin 2x + 2tx\cos 2x$

$y_2'' = -4r\sin 2x - 4rx\cos 2x + 4t\cos 2x - 4tx\sin 2x$, тогда

$-4r\sin 2x - 4rx\cos 2x + 4t\cos 2x - 4tx\sin 2x + 4rx\cos 2x + 4tx\sin 2x = \cos 2x$

$-4r\sin 2x + 4t\cos 2x = \cos 2x$

$$\begin{cases}4t = 1 \\ -4r = 0\end{cases} \ \Rightarrow\ y_1 = \frac{1}{4}x\sin 2x$$

$ii.\ y_2 = q \ \Rightarrow\ y_2' = 0 \ \Rightarrow\ y_2'' = 0$

$$4q = 1 \ \Rightarrow\ q = \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ y_2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4} + c_1\cos 2x + c_2\sin 2x}$$

$b)\ y''' - 3y' - 2y = e^{-x}$

Решение.

coming soon …

$c)\ y^{(4)} - y = e^x\cos x$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^4 - 1 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^4 = 1 \ \Rightarrow\ \lambda = \sqrt[4]{1} \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = \pm 1 \\ \lambda = \pm i\end{array}\right. \ \Rightarrow\ \text{общее решение:}\ y = e^xc_1 + e^{-x}c_2 + \cos x\,d_1 + \sin x\,d_2$$

$y_1 = e^x(r\cos x + t\sin x)$

$y_1' = re^x\cos x - re^x\sin x + te^x\sin x + te^x\cos x$

$y_1'' = -2re^x\sin x + 2te^x\cos x$

$y_1''' = -2re^x\sin x - 2re^x\cos x + 2te^x\cos x - 2te^x\sin x$

$y_1^{(4)} = -4re^x\cos x - 4te^x\sin x$

$$\text{Тогда}\ \ -4re^x\cos x - 4te^x\sin x - re^x\cos x + te^x\sin x = e^x\cos x \ \Rightarrow\ \begin{cases}-5r = 1 \\ -5t = 0\end{cases} \ \Rightarrow\ y_1 = -\frac{1}{5}e^x\cos x$$

$$\boxed{y = c_1e^x + c_2e^{-x}d_1\cos x + d_2\sin x - \frac{1}{5}e^x\cos x}$$

$d)\ y''' - 2y'' + 2y' = 5\cos x + 2x$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \ \Rightarrow\ \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = 0 \\ \lambda = 1 \pm i\end{array}\right. \ \Rightarrow\ \text{Общее решение:}\ \ y = c_1 + e^x(d_1\cos x + d_2\sin x)$$

$i.\ y_1 = r\cos x + t\sin x \ \Rightarrow\ y_1' = -r\sin x + t\cos x \ \Rightarrow\ y_1'' = -r\cos x - t\sin x \ \Rightarrow\ y''' = r\sin x - t\cos x$

Тогда $r\sin x - t\cos x + 2r\cos x + 2t\sin x - 2r\sin x + 2t\cos x = 5\cos x \ \Rightarrow\ y_1 = 2\cos x + \sin x$

Имеем

$ii.\ y_2 = x(px+q) \ \Rightarrow\ y_2' = 2px + q \ \Rightarrow\ y_2'' = 2p \ \Rightarrow\ y_2''' = 0$

$$4px - 4p + 2q = 2x \ \Rightarrow\ \begin{cases}p = \frac{1}{2} \\ q = 1\end{cases} \ \Rightarrow\ y_2 = \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$\boxed{y = c_1 + e^x(d_1\cos x + d_2\sin x) + 2\cos x + \sin x + x\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}$$

$e)\ y''' - 2y'' = 16\sin 2x - 12x$

Решение.

Характеристический многочлен:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda^2(\lambda - 2) = 0 \ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{l}\lambda = 0 \\ \lambda = 2\end{array}\right. \Rightarrow \text{Общее решение:}\ c_1 + xc_2 + c_3e^{2x}$$

$i.\ y_1 = r\cos 2x + t\sin 2x$

$y_1' = -2\sin 2x + 2t\cos 2x$

$y_1'' = -4r\cos 2x + 4t(-\sin 2x)$

$y_1''' = 8r\sin 2x - 8t\cos 2x$

Тогда $8r\sin 2x - 8t\cos 2x + 8r\cos 2x + 8t\sin 2x = 16\sin 2x$

$$\begin{cases}8r + 8t = 16 \\ -8r + 8t = 0\end{cases} \ \Rightarrow\ y_1 = \cos 2x + \sin 2x$$

$ii.\ y_2 = px^3 + qx^2$

$y_2' = 3px^2 + 2qx$

$y_2'' = 6px + 2q$

$y_2''' = 6p$

$$\text{Тогда}\ \ 6p - 12px - 4q = -12x \ \Rightarrow\ \begin{cases}p = 1 \\ q = \frac{3}{2}\end{cases} \ \Rightarrow\ y_2 = x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$\boxed{y = c_1 + xc_2 + e^{2x}c_3 + \sin 2x + \cos 2x + x^2\left(x + \frac{3}{2}\right)}$$