№8 М.С. Некрасов Артём 216

1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ − выборка из экспоненциального распределения с параметром $\theta > 0$.
Постройте точный доверительный интервал уровня доверия γ для параметра θ с помощью статистики

$$a)\ \sum_{i=1}^{n} X_i$$

<u>Решение.</u>

$$X_i \sim \Gamma(1,\theta) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,1)$$

$$P_\theta\left[\alpha \le \theta \sum_{i=1}^{n} X_i \le \beta\right] \ge \gamma, \qquad \alpha = \Gamma_{\frac{1-\gamma}{2}}, \beta = \Gamma_{\frac{1+\gamma}{2}}, \qquad \text{где } \Gamma_\alpha - \alpha \text{ квантиль распределения } \Gamma(n,1)$$

$$P_\theta\left[\frac{\alpha}{\sum_{i=1}^n X_i} \le \theta \le \frac{\beta}{\sum_{i=1}^n X_i}\right] = \gamma \quad \Rightarrow \quad \theta \in \left(\frac{\Gamma_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sum_{i=1}^n X_i}, \frac{\Gamma_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sum_{i=1}^n X_i}\right) \text{ с вероятностью } \gamma.$$

$$b)\ X_{(1)} = \min_{i=1,\dots,n} X_i$$

<u>Решение.</u>

$$\min_{i=1,\dots,n} X_i = X_{(1)}$$

Рассмотрим $X_{(1)} \cdot n\theta$

$$P_\theta\left[X_{(1)} \cdot n\theta \le t\right] = P_\theta\left[X_{(1)} \le \frac{t}{n\theta}\right] = 1 - P_\theta\left[X_{(1)} > \frac{t}{n\theta}\right] = 1 - P_\theta\left[X_{(1)} > \frac{t}{n\theta}\right]^n = 1 - \left[\exp\left\{-\frac{t}{n\theta}\cdot\theta\right\}\right]^n = 1 - e^{-t}$$

$$P_\theta\left[\alpha \le X_{(1)} \cdot n\theta \le \beta\right] \ge \gamma \quad \Rightarrow \quad P_\theta\left[\frac{\alpha}{nX_{(1)}} \le \theta \le \frac{\beta}{nX_{(1)}}\right] \ge \gamma, \qquad 1 - e^{-\beta} - (1 - e^{-\alpha}) = e^{-\alpha} - e^{-\beta} \ge \gamma$$

$$\alpha = \frac{1}{n}, \qquad \text{тогда } e^{-\frac{1}{n}} - e^{-\beta} \ge \gamma$$

$$e^{-\beta} \le e^{-\frac{1}{n}} - \gamma \quad \Rightarrow \quad \beta \ge -\ln\left(e^{-\frac{1}{n}} - \gamma\right) \quad \Rightarrow \quad \text{берем } \beta = -\ln\left(e^{-\frac{1}{n}} - \gamma\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{n^2 X_{(1)}} \le \theta \le -\frac{\ln\left(e^{-\frac{1}{n}} - \gamma\right)}{nX_{(1)}}} - \text{искомый интервал.}$$

2. $X_1, \dots, X_n$ − выборка из бета распределения с параметрами (θ, θ), $\theta > 0$, с плотностью

$$p_\theta(x) = \frac{x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}}{B(\theta,\theta)} \cdot I\{x \in (0;1)\},$$

где $B(\theta,\theta)$− бета функция. Постройте асимптотический доверительный интервал уровня γ для параметра θ.

<u>Решение.</u>

Считаем математическое ожидание и дисперсию:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}}{B(\theta,\theta)} \cdot I\{x \in (0;1)\}\, dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}}{B(\theta,\theta)} dx = \frac{1}{B(\theta,\theta)} \int_0^1 x \cdot x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{\theta+\theta}$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{D}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}}{B(\theta,\theta)} \cdot I\{x \in (0;1)\}\, dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1}}{B(\theta,\theta)} dx = \frac{1}{B(\theta,\theta)} \int_0^1 x^2 \cdot x^{\theta-1}(1-x)^{\theta-1} dx$$
$$= \frac{\theta^2}{(\theta+\theta)^2(\theta+\theta+1)} = \frac{1}{8\theta+4}$$

По ЦПТ:

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right) \xrightarrow{d} N(0, \mathbb{D}X_1), \text{т. е. } \sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{8\theta+4}\right)$$

$$P_\theta\left[z_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{8\theta+4}}}\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right) \le z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right] \to \gamma, \qquad \text{положим} \frac{\left(z_{\frac{1+\gamma}{2}}\right)}{\sqrt{n}} = a,$$

так как нормальное распределение симметрично

относительно нуля, то $\dfrac{\left(z_{\frac{1-\gamma}{2}}\right)}{\sqrt{n}} = -a$

$$P_\theta\left[-a < \sqrt{8\theta+4}\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right) \le a\right], \qquad P_\theta\left[-\frac{a}{\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)} < \sqrt{8\theta+4} \le \frac{a}{\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)}\right],$$

$$P_\theta\left[\left(-\frac{a}{\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)}\right)^2 < 8\theta + 4 \le \left(\frac{a}{\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)}\right)^2\right],$$

$$P_\theta\left[\frac{\left(-\frac{a}{\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)}\right)^2 - 4}{8} < \theta \le \frac{\left(\frac{a}{\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)}\right)^2 - 4}{8}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta \in \left(0, \frac{\left(\frac{a}{\left(\bar{X} - \frac{1}{2}\right)}\right)^2 - 4}{8}\right)} - \text{искомый доверительный интервал.}$$