№10 Т.В. Некрасов Артём 216

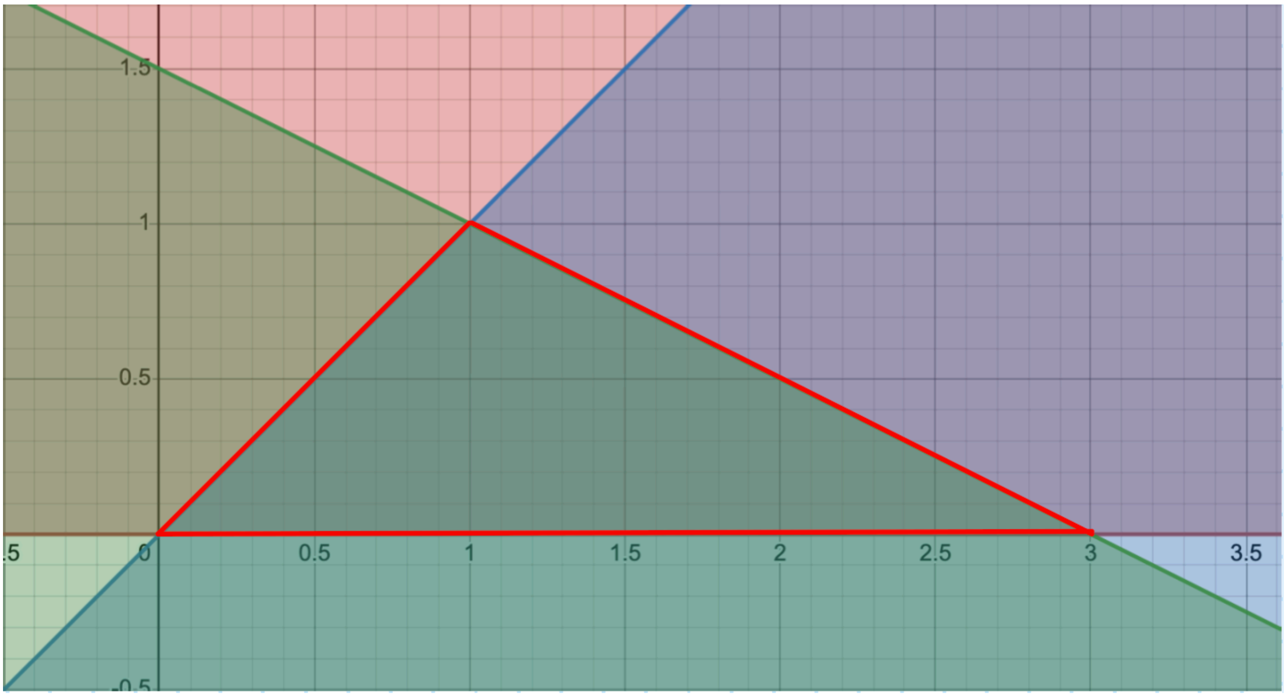
Задача 8.

Пусть вектор (X, Y) равномерно распределен на треугольнике

$$S = \{(x, y): y \geq 0, x \geq y, x + 2y \leq 3\}.$$

Найдите $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $cov(X, Y)$ и $\mathbb{D}(X + Y)$.

<u>Решение.</u>



$\mathbb{E}X, \mathbb{E}Y$ — центр тяжести треугольника, то есть точка пересечения его медиан.

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y, \qquad \mathbb{E}(X \cdot Y) = \iint_{R^2} xy \cdot \varrho_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$\mathbb{D}(X+Y) = cov(X+Y, X+Y) = cov(X,X) + 2cov(X,Y) + cov(Y,Y) = \mathbb{D}X + 2cov(X,Y) + \mathbb{D}Y$$

$$\mathbb{E}X = \frac{4}{3}, \qquad \mathbb{E}Y = \frac{1}{3}, \qquad S_\Delta = \frac{3}{2}$$

Однако все равно придется считать $\mathbb{D}$, так что можно и проверить:

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 \int_y^{3-2y} x \cdot \frac{1}{S_\Delta} dx\,dy = \int_0^1 \frac{4y^2 - 12y + 9}{3} - \frac{1}{3}y^2 dy = \frac{4y^3}{9} - 2y^2 + 3y - \frac{y^3}{9}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 3y\Big|_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 \int_y^{3-2y} y \cdot \frac{1}{S_\Delta} dx\,dy \Rightarrow \left[\frac{2}{3}xy\Big|_y^{3y-2} = 2y - 2y^2\right] \Rightarrow \int_0^1 2y - 2y^2 dy = y^2 - \frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y)=\int_0^1\int_y^{3-2y} xy\cdot\frac{1}{S_\Delta}dx\,dy=\frac{5}{12}$$

$$\mathbb{D}X+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\int_0^1\int_y^{3-2y} x^2\cdot\frac{1}{S_\Delta}dx\,dy\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\displaystyle\int_y^{3-2y} x^2\cdot\frac{2}{3}dx=\\ \displaystyle=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_y^{3-2y}=\\ =-2y^3+8y^2-12y+6\end{array}\right]\Rightarrow\int_0^1-2y^3+8y^2-12y+6dy=$$

$$=-\frac{y^4}{2}+\frac{8y^3}{3}-6y^2+6y\bigg|_0^1=\frac{13}{6}\Rightarrow\ \mathbb{D}X=\frac{13}{6}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{7}{18}$$

$$\mathbb{D}Y+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\int_0^1\int_y^{3-2y} y^2\cdot\frac{1}{S_\Delta}dx\,dy\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\displaystyle\int_y^{3-2y} y^2\cdot\frac{2}{3}dx=\\ \displaystyle=\frac{2}{3}xy^2\bigg|_y^{3-2y}=\\ =2y^2-2y^3\end{array}\right]\Rightarrow\int_0^1 2y^2-2y^3dy=\frac{2y^3}{3}-\frac{y^4}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{6}\Rightarrow\mathbb{D}Y=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$cov(X,Y)=\frac{5}{12}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}=\boxed{-\frac{1}{36}}$$

$$\mathbb{D}(X+Y)=\frac{7}{18}+\frac{1}{18}-2\cdot\frac{1}{36}=\boxed{\frac{7}{18}}$$

Задача 2.
Докажите, что

d) $X_n\xrightarrow{P}X$ *и* $Y_n\xrightarrow{P}Y \ \Rightarrow\ X_n+Y_n\xrightarrow{P}X+Y.$

<u>Решение.</u>

Попробуем доказать, что для сходимости по вероятности предел суммы будет равен сумме пределов:

$$P(|X_n+Y_n-X-Y|\geq\varepsilon)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Но

$|X_n+Y_n-X-Y|\leq|X_n-X|+|Y_n-Y|$ отсюда
$(|X_n+Y_n-X-Y|\geq\varepsilon)\subseteq(|X_n-X|+|Y_n-Y|\geq\varepsilon)\subseteq\left(|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(|Y_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)$

Значит

$$P(|X_n+Y_n-X-Y|\geq\varepsilon)\leq P\left[\left(|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\cup\left(|Y_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]\leq P\left(|X_n-X|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|Y_n-Y|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

так как $X_n\xrightarrow{P}X$ *и* $Y_n\xrightarrow{P}Y.$

Задача 9.
Случайные величины X и Y независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром λ > 0.
Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $|X-Y|$.

Решение.

$\varrho_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} Ind_{x>0}, \qquad \varrho_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} Ind_{y>0}$

$$\mathbb{E}(|X-Y|) = \iint_{-\infty}^{+\infty} |x-y| \cdot \lambda e^{-\lambda x} Ind_{x>0} \cdot \lambda e^{-\lambda y} Ind_{y>0} dxdy = \int_0^{+\infty} \int_x^{x+a} |x-y| \cdot \lambda e^{-\lambda(x+y)} dy\, dx =^{wolfram}= \frac{1}{a}$$

$$\mathbb{D}(|X-Y|) = \iint_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^2 \lambda e^{-\lambda x} Ind_{x>0} \cdot \lambda e^{-\lambda y} Ind_{y>0} dxdy - \frac{1}{a^2} = \int_0^{+\infty} \int_x^{x+a} |x-y|^2 \cdot \lambda e^{-\lambda(x+y)} dy\, dx - \frac{1}{a^2} =$$

$$=^{wolfram}= \frac{1}{a^2}$$

Мы получили мат. ожидание и дисперсию обычного экспоненциального распределения, то есть случайная величина $|X-Y|$ имеет соответствующее распределение.