№30 М.А. Некрасов Артём 216

Интегральная формула Коши для производных. Вычисление несобственных интегралов с помощью интегралов вдоль путей.

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Вычислить интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки):

1. $\oint_{|z-i|=2}\frac{e^z}{(z-i)^3}dz$

<u>Решение.</u>

Критическая точка $z = i$ входит в область интегрирования. Тогда по формуле:

$$\oint_{|z-i|=2}\frac{e^z}{(z-i)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(e^z)^{(2)}\bigg|_{z=i} = \pi i\cdot e^z\Big|_{z=i} = \pi i\cdot e^i = \boxed{\pi i(\cos 1 + i\sin 1)}$$

2. $\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz$

<u>Решение.</u>

Криттические точки $z = 1, z = 3,$ в область интегрирования входит только $z = 1$. Тогда по формуле:

$$\oint_{|z-1|=1}\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}dz = \oint_{|z-1|=1}\frac{\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-3}}{(z-1)^2}dz = \frac{2\pi i}{1}\cdot\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{z-3}\right)'\Bigg|_{z=1} = 2\pi i\cdot\left(\frac{\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}z\cdot(z-3)-\sin\frac{\pi}{4}}{(z-3)^2}\right)\Bigg|_{z=1} = \boxed{-\frac{\pi i(\pi+2)\sqrt{2}}{8}}$$

3. $\oint_{|z|=1/2}\frac{1}{z^3}\cos\frac{z}{z+1}dz$

<u>Решение.</u>

Критические точки $z = 0, z = -1,$ в область интегрирования входит только $z = 0$. Тогда по формуле:

$$\oint_{|z|=1/2}\frac{1}{z^3}\cos\frac{z}{z+1}dz = \frac{2\pi i}{2!}\cdot\left(\cos\frac{z}{z+1}\right)^{(2)}\Bigg|_{z=0} \ominus$$

$$\left(\cos\frac{z}{z+1}\right)^{(1)} = -\sin\frac{z}{z+1}\left(\frac{z+1-z}{(z+1)^2}\right) = -\frac{1}{(z+1)^2}\sin\frac{z}{z+1}$$

$$\left(\cos\frac{z}{z+1}\right)^{(2)} = \left(-\frac{1}{(z+1)^2}\sin\frac{z}{z+1}\right)^{(1)} = \frac{2}{(z+1)^3}\sin\frac{z}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^4}\cos\frac{z}{z+1} = \frac{1}{(z+1)^3}\left(2\sin\frac{z}{z+1} - \frac{1}{z+1}\cos\frac{z}{z+1}\right)$$

$$\ominus\ \pi i\cdot(-1) = \boxed{-\pi i}$$

4. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}dx$ *с помощью интеграла на комплексной плоскости.*

<u>Решение.</u>

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

Критические точки $z = \pm i,$ в область интегрирования входит только $z = i$, так как если $\gamma = C_R \cup [-R, R]$, то $-i$ не входит.

$$\int_{C_R} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(z)dz = \oint_{C_R\cup[-R,R]} f(z)dz = \oint_{C_R\cup[-R,R]}\frac{\frac{1}{(z^2+i)^3}}{(z-i)^3}dz = \pi i.$$

$$\left(\frac{1}{(z^2+i)^3}\right)^{(2)}\Bigg|_{z=i} = \pi i\cdot\frac{12}{(z+i)^5}\bigg|_{z=i} = \boxed{\frac{3\pi}{8}}, \quad \left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \pi R\cdot\max_{C_R}\left|\frac{1}{(z^2+1)^3}\right| \sim \frac{\pi R}{R^6} = \frac{\pi}{R^5} \xrightarrow{R\to\infty} 0, \quad \int_{-R}^{R} f(z)dz \xrightarrow{R\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz$$

5. Вычислить интеграл $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx}_{I_0}$ *с помощью интеграла на комплексной плоско*сти.

<u>Решение.</u>

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$$

Критические точки $z = 1 \pm 3i,$ в область интегрирования входит только $z = 1 + 3i$.

$$\int_{C_R\cup[-R,R]} f(z)dz = \int_{C_R\cup[-R,R]}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz = \int_{C_R\cup[-R,R]}\frac{ze^{iz}}{(z-(1+3i))(z-(1-3i))}dz = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{z\cdot e^{iz}}{(z-1+3i)}\right)\Bigg|_{z=1+3i} = \frac{\pi(1+3i)e^{i-3}}{3}$$

По отрезку:

$$\int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R}\frac{x\cos x}{x^2+2x+10}dx + i\int_{-R}^{R}\frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = I_1 + iI_2 \xrightarrow{R\to+\infty} I_0$$

По окружности:

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_R}\frac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}dz\right| \le \pi\cdot\max_{C_R}\left|\frac{z}{z^2-2z+10}\right| \sim \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Получаем:

$$\frac{\pi(1+3i)e^{i-3}}{3} = 0 + I_1 + iI_2 \ \Rightarrow\ I_0 = Im\left(\frac{\pi(1+3i)e^{i-3}}{3}\right) = Im\left(\frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 + i\sin 1 + 3i\cos 1 - 3\sin\square)\right) = \boxed{\frac{\pi(\sin 1 + 3\cos 1)}{3e^3}}$$