1. Вычислить сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2}$

Решение.

$$\frac{n}{(4n^2-1)^2} = \frac{n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

$$\frac{1}{8}\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{9}}_{n=1}+\underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{25}}_{n=2}+\underbrace{\frac{1}{25}-\frac{1}{49}}_{n=3}+\dots+\underbrace{\frac{1}{(2n-3)^2}-\frac{1}{(2n-1)^2}}_{n-1}+\underbrace{\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}}_{n}\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\cdot\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}\cdot(1-0) = \frac{1}{8}$$

2. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{n\cdot\left(-\frac{1}{n}+o\left(-\frac{1}{n}\right)\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-1+o(1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \neq 0$$

значит по необходимому условию сходимости ряда $-$ ряд расходится.

3. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{n+1}{n^2+2}$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{n+1}{n^2+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n+1}{n^2+2}+n\cdot o\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{n+1}{n^2+2}+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2+2}+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+o(1) = 1 \neq 0$$

значит по необходимому условию сходимости ряда $-$ ряд расходится.

4. Исследовать ряд на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1}$

<u>Решение.</u>

$$\begin{cases} \ln n = k \\ k \leq \ln n < k+1 \\ e^k \leq n < e^{k+1} \end{cases}$$

По критерию Коши:

$$\left| \sum_{k=e^k}^{e^{k+1}} \frac{(-1)^{\lfloor k \rfloor}}{2n+1} \right| \Rightarrow \left| \sum_{k=e^k}^{e^{k+1}} \frac{1}{2n+1} \right| \geq \frac{e^{k+1} - e^k + 1}{2 \cdot e^{k+1} + 1} = \frac{e^{k+1}}{e^{k+1}} \cdot \frac{1 - e^{-1} + \frac{1}{e^{k+1}}}{2 + \frac{1}{e^{k+1}}} = \frac{1 - e^{-1} + \frac{1}{e^{k+1}}}{2 + \frac{1}{e^{k+1}}} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{2}$$

значит по критерию Коши — ряд расходится