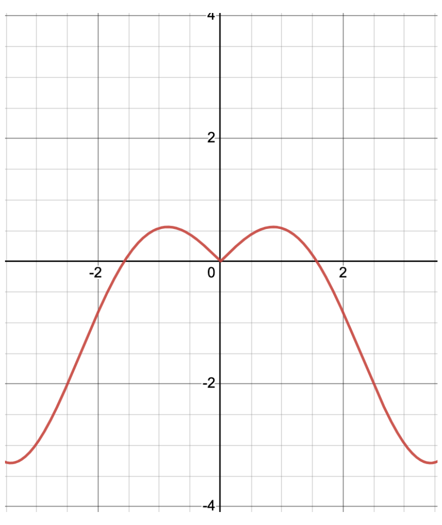
№23 М.А. Некрасов Артём 216

1. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на указанном отрезке:

$$f(x) = x\cos x\,, \qquad [0, \pi]$$

Решение.

$i.$ Определим функцию $\tilde{f}(x)$ на $[-\pi, \pi]$, которая четная и $\tilde{f}(x) = f(x)$ на $[0, \pi]$



$ii.$ Разложим $\tilde{f}(x)$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$. Так как она четная, то разложится только по косинусам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx\right) = \frac{2}{\pi}(x\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x \cdot \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\cos\big(x(k-1)\big)\,dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{2}\cos\big(x(k+1)\big)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin\big(x(k-1)\big)}{k-1}\Bigg|_0^{\pi} + \frac{x\sin\big(x(k+1)\big)}{k+1}\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin\big(x(k-1)\big)}{k-1}dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin\big(x(k+1)\big)}{k+1}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\big(x(k-1)\big)}{(k-1)^2} + \frac{\cos\big(x(k+1)\big)}{(k+1)^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k-1}(k+1)^2 + (-1)^{k+1}(k-1)^2 - (k+1)^2 - (k-1)^2}{(k+1)^2(k-1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}(2k^2+2) - (2k^2+2)}{(k^2-1)^2}\right) = \begin{cases} 0, & k = 2n+1 \\ -\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{k^2+1}{(k^2-1)^2}, & k = 2n \end{cases}$$

$iii.$ Получаем, что $\tilde{f}(x)$ на $[-\pi, \pi]$:

$$\tilde{f}(x) \cong -\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\cos 2nx$$

$iiii.$ Функция $f(x) = \tilde{f}(x)\Big|_{[0,\pi]}$, то есть разложение $f(x)$ по косинусам-это разложение $\tilde{f}(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

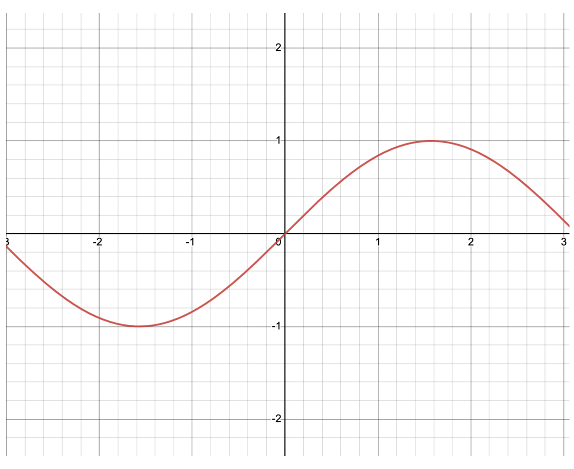
$$\boxed{-\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{(4n^2-1)^2}\cos 2nx}$$

2. Разложить функцию в ряд Фурье по синусам на указанном отрезке:

$$f(x) = x\sin x\,, \qquad [0, \pi]$$

Решение.

$i.$ Определим функцию $\tilde{f}(x)$ на $[-\pi, \pi]$, которая нечетная и $\tilde{f}(x) = f(x)$ на $[0, \pi]$



$ii.$ Разложим $\tilde{f}(x)$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$. Так как она нечетная, то разложится только по синусам:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x \cdot \sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos\big(x(k-1)\big)\,dx - \int_0^{\pi} x\cos\big(x(k+1)\big)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin\big(x(k-1)\big)}{k-1} + \frac{\cos\big(x(k-1)\big)}{(k-1)^2} - \frac{x\sin\big(x(k+1)\big)}{k+1} - \frac{\cos\big(x(k+1)\big)}{(k+1)^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{k+1}\cdot 4k - 4k}{(k^2-1)^2}\right) = \begin{cases} 0, & k = 2n+1 \\ -\dfrac{8}{\pi}\cdot\dfrac{k}{(k^2-1)^2}, & k = 2n \end{cases}$$

$iii.$ Получаем, что $\tilde{f}(x)$ на $[-\pi, \pi]$:

$$\tilde{f}(x) \cong \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{\pi}\cdot\frac{2n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx = -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sin 2nx}{(4n^2-1)^2}$$

$iiii.$ Функция $f(x) = \tilde{f}(x)\Big|_{[0,\pi]}$, то есть разложение $f(x)$ по синусам-это разложение $\tilde{f}(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.

$$\boxed{-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sin 2nx}{(4n^2-1)^2}}$$

3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $\dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2}$, $\qquad |q| < 1$ и вычислить

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2}\cos(2023x)\,dx$$

Решение.

$i.$ Преобразуем функцию $f(x) = \dfrac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2}$

$$f(x) = \frac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2} = -1 + \frac{2(1-q\cos x)}{1-2q\cos x + q^2} = \left[\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right] = -1 + \frac{2 - q\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} =$$

$$= -1 + \frac{2 - q\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} = -1 + \frac{A}{(1-qe^{ix})} + \frac{B}{(1-qe^{-ix})}$$

$$A\left(1 - qe^{-ix}\right) + B\left(1 - qe^{ix}\right) = 2 - q\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad A + B - q\left(Ae^{-ix} + Be^{ix}\right) = 2 - q\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \Rightarrow A = B = 1$$

$$f(x) = -1 + \frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{1}{1-qe^{-ix}}$$

$ii.$ Разложим $f(x)$ в степеной ряд по параметру q:

так как $|q| < 1$ и $\left|e^{ix}\right| = \left|e^{-ix}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left|qe^{ix}\right| = \left|qe^{-ix}\right| < 1$

$\dfrac{1}{1-qe^{ix}}$ – геометрическая прогрессия с параметрами $b_1 = 1$ и $d = qe^{ix} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{1-qe^{ix}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{inx}$

$\dfrac{1}{1-qe^{-ix}}$ – геометрическая прогрессия с параметрами $b_1 = 1$ и $d = qe^{-ix} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{1-qe^{-ix}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-inx}$

Значит $f(x) = -1 + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{inx} + \sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{-inx} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^n \Big(\underbrace{e^{inx} + e^{-inx}}_{2\cos nx}\Big) = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$

$iii.$ Покажем, что полученный ряд и есть тригонометрический ряд Фурье для $f(x)$:

⋆ ряд сходится, так как он мажорируется рядом геометрической прогрессии $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^n$

$$\star\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -\cos kx\,dx}_{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\begin{cases} 0, k \neq n, \text{так как } \cos nx \text{ и } \cos kx \text{ ортогональны на } [-\pi, \pi], \text{при } n \neq k \\ \pi q^k, \qquad k = n \end{cases} = 2q^k$$

$$\Rightarrow a_k = 2q^k, \qquad b_k = 0\ (f(x) - \text{четная}) \;\Rightarrow f(x) = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$$

$iiii.$ Если получено разложение функции в тригонометрический ряд и этот ряд сходится равномерно, то это ряд Фурье

$$f(x) \cong -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$$

$iiiii.$ $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2}\cos(2023x)\,dx$ – это 2023-й коэффициент ряда Фурье, то есть a_{2023}, так как

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-q^2}{1-2q\cos x + q^2}\cos(kx)\,dx\,, \qquad a_k = 2q^k \Rightarrow a_{2023} = 2\cdot q^{2023}$$

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) \cong -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx \\ a_{2023} = 2\cdot q^{2023} \end{gathered}}$$