№2 М.С. Некрасов Артём 216

1. Пусть $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ — выборка, соответствующая случайному вектору (ξ, η). Докажите, что статистика

$$T = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

является несмещенной и состоятельной оценкой величины $cov(\xi, \eta)$.

<u>Решение.</u>

Для начала докажем, что T является несмещенной оценкой $cov(\xi, \eta)$. Для этого покажем что математическое ожидание T равно $cov(\xi, \eta)$.

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left((X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}(X_i) - \mathbb{E}(\overline{X})\right)\left(\mathbb{E}(Y_i) - \mathbb{E}(\overline{Y})\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_i) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(\overline{Y}) - \mathbb{E}(\overline{X})\mathbb{E}(Y_i) + \mathbb{E}(\overline{X})\mathbb{E}(\overline{Y})\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(Y_i) - \frac{1}{n-1}n\mathbb{E}(\overline{X})\mathbb{E}(\overline{Y}) =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}cov(\xi, \eta) - \frac{1}{n-1}n\, cov(\xi, \eta) = cov(\xi, \eta) = 0$$

Теперь докажем, что T является состоятельной оценкой. Для этого покажем, что дисперсия T стремится к 0 при увеличении n.

$$\mathbb{D}T = \mathbb{D}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\right) = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left((X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{D}(X_i) - 2cov(X_i, \overline{X}) + \mathbb{D}(\overline{X})\right)\left(\mathbb{D}(Y_i) - 2cov(Y_i, \overline{Y}) + \mathbb{D}(\overline{Y})\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}(X_i)\mathbb{D}(Y_i) + \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}cov(X_i, \overline{X})cov(Y_i, \overline{Y}) - \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}cov(X_i, \overline{X})\mathbb{D}(Y_i) -$$

$$- \frac{2}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}cov(Y_i, \overline{Y})\mathbb{D}(X_i) + \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}(\overline{X})\mathbb{D}(\overline{Y})$$

Так как:

$$\mathbb{D}(X_i) = \mathbb{D}(Y_i) = \mathbb{D}(\xi) = \mathbb{D}(\eta) = \sigma^2, \qquad cov(X_i, \overline{X}) = cov(Y_i, \overline{Y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}(T) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}$$

Таким образом, $\mathbb{D}(T) \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

2. Задана выборка $X_1, \dots, X_n$ из распределения с плотностью

$$p_0(x) = (3x^2/\theta^3)I_{\{x\in[0,\theta]\}}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Предложите асимптотически нормальную оценку для $\tau(\theta) = 1/\theta$ и найдите ее асиптотическую дисперсию.

<u>Решение.</u>

Для начала найдем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\mathrm{X} = \int_0^1 x\cdot(3x^2/\theta^3)I_{\{x\in[0,\theta]\}}dx = \int_0^\theta \frac{3x^3}{\theta^3}dx = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^3dx = \frac{3x^4}{4\theta^3}\Bigg|_0^\theta = \frac{3}{4}\theta$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta x^4dx = \frac{3x^5}{5\theta^3}\Bigg|_0^\theta = \frac{3}{5}\theta^2$$

$$\mathbb{E}(X_1) \neq \frac{1}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \text{нельзя}\ \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right) \ \to \ N\big(0,\sigma^2(\theta)\big)$$

Подберем g, такое что $g\left(\frac{3}{4}\theta\right) = \theta$

$$g\Bigg(\underbrace{\frac{3}{4}\theta}_{x}\Bigg) = \frac{1}{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\theta = x \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{4}{3}x \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{4}{3}x, \qquad \text{тогда}$$

$$\sqrt{n}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right) - \frac{1}{\theta}\right) \ \to \ \underbrace{g'\left(\frac{3}{4}\theta\right)}_{=C}\underbrace{N\big(0,\sigma^2(\theta)\big)}_{\xi}$$

Значит $\theta(x) = g\left(\frac{S_n}{n}\right)$ является асимптотически нормальной оценкой

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{3}{5}\theta^2 - \left(\frac{3}{4}\theta\right)^2 = \frac{3}{80}\theta^2$$

$$g'(X) = \left(\frac{3}{4}X\right)' = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{D}(C\xi) = C^2\mathbb{D}\xi = \frac{9}{16}\cdot\frac{3}{80}\theta^2 - \text{асиптотическая дисперсия}$$

3. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — выборка из распределения $N(\theta, 1), \theta > 0$. Сравните в равномерном подходе относительно квадратичной функции потерь оценки $\overline{X}$ и $\max\big(0, \overline{X}\big)$.

<u>Решение.</u>

Пусть θ — истинное значение параметра, $\hat{\theta}$ — оценка параметра.

Воспользуемся свойством, что несмещенная оценка — это оценка, для которой математическое ожидание равно истинному значению параметра, то есть: $\mathbb{E}\left(\hat{\theta}\right) = \theta$

$\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \cdot X_1, \dots, X_n\right) = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n = \frac{1}{n} \cdot n\theta = \theta \ \Rightarrow$ свойство выполняется и оценка $\overline{X}$ является несмещенной для θ.

Оценка $\max(0, \overline{X})$ не является несмещенной, так как она ограничена снизу нулем, а значит любые значения, меньше нуля выбрасываются $\left(\mathbb{E}\left(\max(0, \overline{X})\right) \geq 0\right)$, а так как у нас распределение $N(\theta, 1)$, то они вполне могут быть.

Относительно квадратичной функции потерь, оценка $\overline{X}$ является лучшей, так как она несмещенная, а значит имеет меньшую дисперсию.