№16 М.А. Некрасов Артём 216

1. Исследовать семейство функции $f(x, y)$ на равномерную по y сходимость на указанном множестве:

$$f(x,y) = \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1}, \qquad y \in (0, +\infty), \qquad x \to 0^{+}$$

<u>Решение.</u>

$$g(y) = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} = 0$$

$$\sup_{y\in(0,+\infty)} \left|\frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} - 0\right| = \sup_{y\in(0,+\infty)} \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} \ominus$$

$$\frac{df}{dy} = \left(\frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1}\right)' = \frac{x}{x+1}(\operatorname{arctg}(xy))' = \frac{x}{x+1}\cdot(xy)'_y \cdot \frac{1}{1+(xy)^2} = \frac{x^2}{(x+1)\big(1+(x^2y^2)\big)}$$

Функция постоянно возврастает, поэтому ее максимум при $y = +\infty$

$$\ominus \lim_{y\to+\infty} \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} = \frac{x\cdot\frac{\pi}{2}}{x+1} \xrightarrow{x\to 0} 0,$$ значит сходимость равномерная.

2. Исследовать семейство функции $f(x, y)$ на равномерную по y сходимость на указанном множестве:

$$f(x,y) = \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1}, \qquad y \in (0, +\infty), \qquad x \to +\infty$$

<u>Решение.</u>

$$g(y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} = \lim_{x\to D} \frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\sup_{y\in(0,+\infty)} \left|\frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} - \frac{\pi}{2}\right| = \sup_{y\in(0,+\infty)} -\left(\frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} - \frac{\pi}{2}\right) \ominus$$

$$\frac{df}{dy} = \left(-\frac{x\operatorname{arctg}(xy)}{x+1} + \frac{\pi}{2}\right)'_y = \frac{-x^2}{(x+1)\big(1+(x^2y^2)\big)}$$

Функция постоянно убывает*, поэтому ее максимум при* $y = 0$.

$$\ominus -\frac{x\operatorname{arctg} 0}{x+1} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{\pi}{2},$$ значит сходимость неравномерная.

3. Исследовать семейство функций $f(x, y)$ на равномерную по y сходимость на указанном множестве:

$$f(x,y) = \ln\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right), \qquad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x \to +\infty$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)=0$$

$$\sup_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \ln\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)=\sup_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\left(-\ln\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)\right) \circleddash$$

$$\frac{df}{dy}=\left(-\ln\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)\right)'=-\frac{1}{1-\frac{\sin^2 y}{x^2}}\cdot\left(1-\frac{\sin^2 y}{x^2}\right)'_y=-\frac{1}{1-\frac{\sin^2 y}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\cdot 2\sin y\cos y\right)=\frac{\sin 2y}{\underbrace{(x^2-sin^2 y)}_{>0}}$$

$\sin 2y>0,\qquad y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$ *Функция постоянно возрастает, поэтому ее максимум при* $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\circleddash -ln\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{x^2}\right)\xrightarrow{x\to\infty}-\ln 1=0,$$ значит сходимость равномерная.

4. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость (по определению):

$$\int_1^{+\infty}\frac{pdx}{1+p^2x^2},\qquad a)p\in[1,p_0],p_0>1,\qquad b)p\in(0,p_0],p_0>0$$

Решение.

$$a)\ \sup_{p\in[1,p_0]}\left|\int_A^{+\infty}\frac{pdx}{1+p^2x^2}\right|=\sup_{p\in[1,p_0]}\left|arctg(px)\Big|_A^{+\infty}\right|=\sup_{p\in[1,p_0]}\left|\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(Ap)\right|=\sup_{p\in[1,p_0]}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(Ap)\right)\underbrace{=}_{\substack{\text{макс.убыв.}\\\text{в нач.точке}}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}A\xrightarrow{A\to+\infty}0,$$ значит сходимость равномерная.

$$\sup_{p\in(0,p_0]}\left|\int_A^{+\infty}\frac{pdx}{1+p^2x^2}\right|=\sup_{p\in(0,p_0]}\left|arctg(px)\Big|_A^{+\infty}\right|=\sup_{p\in(0,p_0]}\left|\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(Ap)\right|=\sup_{p\in(0,p_0]}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(Ap)\right)\underbrace{=}_{\substack{\text{макс.убыв.}\\\text{в нач.точке}}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\xrightarrow{A\to\infty}\frac{\pi}{2},$$ значит сходимость неравномерная.