№6 М.С. Некрасов Артём 216

1. *Однажды Даня заметил, что количество новых фотографий на его телефоне зависит от длительности его последнего путешествия. Собрав данные, Даня заметил, что длительность его путешествий имеет распределение* $T \sim Exp(\alpha)$, *в то время как количество новых фото при фиксированной длительности путешествия имеет распределение* $N \sim Pois(\beta T)$. *Даня хочет понимать, на сколько фотографий ему в среднем стоит выделять память на телефоне в дальнейшем. Вычислите* $\mathbb{E}[N]$ *и* $\mathbb{D}[N]$.

Решение.

Место для уравнения.

2. Случайные величины X и Y независимы и экспоненциально распределены, $X -$ с параметром 2, $Y -$ с параметром 3. Вычислите условное математическое ожидание $\mathbb{E}[Y \mid X/Y]$.

Решение.

Воспользуемся теоремой о преобразовании плотности при замене координат $X = \varphi(Y)$:

$\rho_X(x)$
$= \rho_Y(\varphi^{-1}(x)) \left|\det\left(J(\varphi^{-1}(x))\right)\right|$, где $J(f)$ — матрица Якоби преобразования f. Таким образом рассматриваем следующую замену координат:

$$\begin{cases} U = Y \\ V = \dfrac{X}{Y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = U \\ X = VU \end{cases}, \quad \text{тогда Якобиан замены:}$$

$$\left|\det\left(J(\varphi^{-1})(u,v)\right)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} V & U \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |U|$$

$$\rho_{Y,\frac{X}{Y}}(u,v) = \rho_{X,Y}(uv,u) \cdot |u|, \qquad \rho_{\frac{X}{Y}}(v) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{Y,\frac{X}{Y}}(u,v)du = \int_{\mathbb{R}} \rho_{X,Y}(uv,u) \cdot |u|du = \int_{\mathbb{R}} \rho_X(uv) \cdot \rho_Y(u) \cdot |u|du =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2 \cdot e^{-2uv} \cdot 3 \cdot e^{-3u}|u|du = 6\int_0^{+\infty} e^{-2uv-3u} \cdot |u|du = 6\int_0^{+\infty} e^{-u(2v+3)}udu = \begin{bmatrix} t = u(2v+3) \\ du = \dfrac{dt}{2v+3} \end{bmatrix} = \frac{6}{(2v+3)^2}\int_0^{+\infty} e^{-t}tdt$$
$$= \frac{6}{(2v+3)^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} u \cdot \rho_{\left(Y\middle|\frac{X}{Y}\right)}(u|v)|u|du = \int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-2uv-3u} \cdot (2v+3)^2 du = (2v+3)^2 \cdot \int_0^{\infty} u^2 \cdot e^{-2uv-u}du = \begin{bmatrix} t = u(2v+3) \\ du = \dfrac{dt}{2v+3} \end{bmatrix} =$$

$$= (2v+3)^2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(2v+3)^3} \cdot e^{-t}dt = \frac{1}{2v+3} \cdot \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-t}dt = \frac{1}{2v+3} \cdot \lim_{a\to+\infty}(-a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 2e^{a} + 2) = \frac{2}{2v+3}$$

$$\mathbb{E}\left[Y\middle|\frac{X}{Y} = v\right] = \frac{2}{2v+3} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[Y\middle|\frac{X}{Y}\right] = \frac{2}{2\frac{X}{Y}+3}$$

3. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n -$ *выборка из нормального распределения* $N\left(0, \theta^2\right)$, $\theta > 0$. *Найдите оптимальную оценку* $\tau(\theta)$, *где*

$a)\ \tau(\theta) = \theta,$
$b)\ \tau(\theta) = \theta^2$

Решение.

Пользуемся алгоритмом поиска оптимальных оценок, т. е.

1. Находим достаточную статистику $S(X)$ с помощью критерия факторизации:

$$p_\theta(X) = h(X) \cdot \psi(\theta, S(X));$$

2. Проверяем $S(X)$ на полноту;

3. Решаем так называемое уравнение несмещенности, т. е. ищем функцию f, удовлетворяющую

$$E_\theta f(S(X)) = \tau(\theta);$$

4. $f(S(X))$– искомая оптимальная оценка $\tau(\theta)$.

Функция правдоподобия:

$$p_\theta(X) = \frac{1}{(2\pi\theta^2)^{n\backslash 2}} \cdot e^{-\sum_{i=1}^n \frac{X_i^2}{2\theta^2}} = \underbrace{\frac{1}{(2\pi\theta^2)^{n\backslash 2}}}_{h(x) \text{ и } g(\theta)} \cdot \exp\left(-\underbrace{\frac{1}{2\theta^2}}_{A(\theta)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i^2}_{S(X)}\right)$$

Короче вроде работает и распределение лежит в в экспоненциальном семействе

$\Rightarrow S(X) = \sum_{i=1}^n X_i^2$ является достаточной статистикой. Более того, функция $A(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$ пробегает луч $(-\infty, 0)$, так что по теореме об экспоненциальном семействе статистика $\sum_{i=1}^n X_i^2$ полная и достаточная.

Остается только решить уравнение несмещенности:

$$a)\ \mathbb{E}_\theta f\left(\sum X_i^2\right) = \theta$$

Вспомним, что $\frac{\theta^2 \sum X_i^2}{\theta^2} \sim \theta^2\chi^2(n)$, $\qquad \rho_{\sum X_i^2}(X) = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot Ind_{\{x>0\}}$, $\qquad$ тогда

$$\mathbb{E}_\theta f\left(\sum X_i^2\right) = \int_0^{+\infty} f(x) \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx = \theta$$

Возьмем $f(S(X)) = \sqrt{\sum X_i^2}$, $\qquad$ тогда посчитаем математическое ожидание Хи-квадрат под корнем:

$$\mathbb{E}_\theta\left(\sqrt{\chi^2(n)}\right) = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot \rho_X(x)dx = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx = \sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}_\theta\left(\sqrt{\theta^2\chi^2(n)}\right) = \theta \cdot \mathbb{E}_\theta\left(\sqrt{\chi^2(n)}\right) =$$

$$= \theta \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Дальше все это надо докрутить и получим то, что надо: $f\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \sqrt{\sum X_i^2}$, $\qquad$ но я опять не успеваю(

$b)$ Тут все проще. То есть нам нужна функция, математическое ожидание от которой равно θ^2.

$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \theta^2 = \theta^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right)$, $\qquad$ т. е. $f\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) = \sum_{i=1}^n X_i^2 -$ оптимальная оценка параметра θ