1. Решите неоднородные уравнения методом вариации постоянных

$a)\ y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

Решение.

Для начала решаем однородное:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda(\lambda-1) - 2(\lambda-1) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda = 1\\ \lambda = 2\end{array}\right.$$

$$y(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x} \quad\Rightarrow\quad y'(x) = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} + 2c_2(x)e^{2x}$$

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} = 0 \quad\Rightarrow\quad y''(x) = (c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x})' = c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{2x}$$

Подставим:

$$c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{2x} - 3(c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x}) + 2(c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x}) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$c_1'(x)e^x + c_1(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} + 4c_2(x)e^{2x} - 3c_1(x)e^x - 6c_2(x)e^{2x} + 2c_1(x)e^x + 2c_2(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^x}$$

$$c_1'(x)e^x + 2c_2'(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^x}, \qquad c_1'(x)e^x = -c_2'(x)e^{2x}$$

$$-c_2'(x)e^{2x} + 2c_2'(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^x} \quad\Rightarrow\quad c_2'(x)e^{2x} = \frac{1}{1+e^x} \quad\Rightarrow\quad c_2'(x) = \frac{1}{(1+e^x)e^{2x}} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad c_2'(x) = x - \frac{e^{-2x}}{2} + e^{-x} - \ln(e^x+1) + d_2$$

$$c_1'(x) = -\frac{1}{1+e^x} \quad\Rightarrow\quad c_1(x) = x - \ln(e^x+1) + d_1$$

$$\boxed{y(x) = e^x(x - \ln(e^x+1) + d_1) + e^{2x}\left(x - \frac{e^{-2x}}{2} + e^{-x} - \ln(e^x+1) + d_2\right)}$$

$b)\ y'' + 3y' = \frac{3x-1}{x^2}$

Решение.

Для начала решаем однородное:

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda(\lambda+3) = 0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda = 0\\ \lambda = -3\end{array}\right.$$

$$y(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{-3x} \quad\Rightarrow\quad y'(x) = c_1'(x) + c_2'(x)e^{-3x} - 3c_2(x)e^{-3x}$$

$$c_1'(x) + c_2'(x)e^{-3x} = 0 \quad\Rightarrow\quad y''(x) = (-3c_2(x)e^{-3x})' = -3c_2'(x)e^{-3x} + 9c_2(x)e^{-3x}$$

Подставим:

$$-3c_2'(x)e^{-3x} + 9c_2(x)e^{-3x} - 9c_2(x)e^{-3x} = \frac{3x-1}{x^2}$$

$$-3c_2'(x)e^{-3x} = \frac{3x-1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad c_2'(x) = -\frac{3x-1}{3x^2e^{-3x}} \quad\Rightarrow\quad c_2(x) = -\frac{e^{3x}}{3x} + d_1$$

$$c_1'(x) = -\frac{3x-1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad c_1(x) = -\frac{1}{3x} - \ln x + d_2$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{3x} - \ln x + d_2 + e^{-3x}\left(-\frac{e^{3x}}{3x} + d_1\right)}$$

2. Решите уравнения Эйлера:

$a)\ 4x^2y'' - 4xy' - 5y = -4\sqrt{x}$

Решение.

$$y = a\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{a}{2\sqrt{x}} \quad\Rightarrow\quad y'' = -\frac{a}{4\sqrt[3]{x}}$$

$$4x^2\cdot\left(-\frac{a}{4\sqrt[3]{x}}\right) - 4x\cdot\frac{a}{2\sqrt{x}} - 5a\sqrt{x} = -4\sqrt{x}$$

$$a\left(-\sqrt{\frac{x^4}{x^3}} - 2\sqrt{\frac{x^2}{x}} - 5\sqrt{x}\right) = -4\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad a(-\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 5\sqrt{x}) = -4\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad a(-8\sqrt{x}) = -4\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{2}$$

Найдем аддитивное смещение, то есть общее решение вида: $y(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + h(x)$

$$4x^2h''(x) - 4xh'(x) - 5 = 0$$

$$4\lambda(\lambda-1) - 4\lambda - 5 = 0 \;\Rightarrow\; 4\lambda^2 - 8\lambda - 5 = 0 \;\Rightarrow\; 2\lambda(2\lambda+1) - 5(2\lambda+1) = 0 \;\Rightarrow\; \left(\lambda - \frac{5}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\lambda = \frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\boxed{y(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + c_1x^{\frac{5}{2}} + c_2x^{-\frac{1}{2}}}$$

$b)\ x^2y'' - 6y = -16x^2\ln x$

Решение.

$$y(x) = ax^2\ln x + bx^2 \quad\Rightarrow\quad y''(x) = 2a\ln x + 3a + 2b$$

$$2ax^2\ln x + 3ax^2 + 2bx^2 - 6ax^2\ln x - 6bx^2 = -16x^2\ln x \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}2a - 6a = -16\\ 3a + 2b - 6b = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a = 4\\ b = 3\end{cases}$$

$$\lambda(\lambda-1) - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 3\lambda + 2\lambda - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda+2) - 3(\lambda+2) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda-3)(\lambda+2) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\lambda = 3\\ \lambda = -2\end{array}\right.$$

$$\boxed{y(x) = 4x^2\ln x + 3x^2 + c_1x^3 + c_2x^{-2}}$$

3. Рассмотрите ДУ $y'' + 2ay' + b^2y = \cos x$ с $0 \le a < b < 1$. Найдите единственное периодическое решение этого уравнения, имеющее период 2π. Для каких значений a амплитуда этого решения максимальна?

Решение.

Для начала решаем однородное:

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{-2a \pm 2\sqrt{a^2-b^2}}{2} = -a \pm \sqrt{a^2-b^2} = -a \pm i\sqrt{b^2-a^2}$$

$$y = \alpha\cos x + \beta\sin x \quad\Rightarrow\quad y' = -\alpha\sin x + \beta\cos x \quad\Rightarrow\quad y'' = -\alpha\cos x - \beta\sin x$$

Подставим:

$$-\alpha\cos x - \beta\sin x + 2a(-\alpha\sin x + \beta\cos x) + b^2(\alpha\cos x + \beta\sin x) = \cos x \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-\alpha + 2a\beta + b^2\alpha = 1\\ -\beta - 2a\alpha + b^2\beta = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \alpha(b^2-1) = 1 - 2a \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \alpha = \frac{1-2a\beta}{b^2-1}$$

$$-\beta - 2a\cdot\frac{1-2a\beta}{b^2-1} + b^2\beta = 0 \quad\Rightarrow\quad -\beta(b^2-1) - 2a(1-2a\beta) + b^2\beta(b^2-1) = 0 \quad\Rightarrow\quad -\beta b^2 + \beta - 2a + 4a^2\beta + b^4\beta - b^2\beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta(1 - 2b^2 + 4a^2 + b^4) - 2a = 0 \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{2a}{1 - 2b^2 + 4a^2 + b^4} = \frac{2a}{(b^2-1)^2 + 4a^2}$$

$$\alpha = \frac{1-2a\beta}{b^2-1} = \frac{1 - 2a\cdot\frac{2a}{(b^2-1)^2+4a^2}}{b^2-1} = \frac{\frac{(b^2-1)^2 + 4a^2 - 4a^2}{(b^2-1)^2+4a^2}}{b^2-1} = \frac{(b^2-1)^2}{((b^2-1)^2+4a^2)(b^2-1)} = \frac{b^2-1}{(b^2-1)^2+4a^2}$$

$$y(x) = \underbrace{c_1e^{x\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)} + c_2e^{x\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)}}_{y_1(x)} + \underbrace{\alpha\cos x + \beta\sin x}_{y_2(x)}$$

Заметим, что $y_2(x)$ уже имеет период 2π, разбираемся с $y_1(x)$

$$y_1(x) = y_1(x+2\pi) \Leftrightarrow c_1e^{x\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)} + c_2e^{x\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)} = c_1e^{(x+2\pi)\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)} + c_2e^{(x+2\pi)\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)}$$

$$\ln\left(c_1e^{x\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right) + \ln\left(c_2e^{x\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right) = \ln\left(c_1e^{(x+2\pi)\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right) + \ln\left(c_2e^{(x+2\pi)\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right)$$

$$\ln(c_1) + \ln\left(e^{x\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right) + \ln(c_2) + \ln\left(e^{x\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right) = \ln c_1 + \ln\left(e^{(x+2\pi)\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right) + \ln c_2 + \ln\left(e^{(x+2\pi)\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)}\right)$$

$$\begin{cases}x\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right) = (x+2\pi)\left(-a-i\sqrt{b^2-a^2}\right)\\ x\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right) = (x+2\pi)\left(-a+i\sqrt{b^2-a^2}\right)\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-a-i\sqrt{b^2-a^2} = 0\\ -a+i\sqrt{b^2-a^2} = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}b^2 - a^2 = a^2\\ -b^2 + a^2 = a^2\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a = 0\\ b = 0\end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = c_1e^0 + c_2e^0 + \alpha\cos x + \beta\sin x = c_1 + \alpha\cos x + \beta\sin x}$$

Амплитуда:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y(0) = c_1 + \beta - c_1 - \alpha = \beta - \alpha = \frac{2a}{(b^2-1)^2+4a^2} - \frac{b^2-1}{(b^2-1)^2+4a^2} = \frac{2a - b^2 + 1}{(b^2-1)^2+4a^2}$$

Максимизируем:

$-8a^2 + 8a(b^2-1) + 2(b^2-1)^2 = 0$ – парабола $\Rightarrow$ берем вершину

$$\boxed{a = \frac{-8(b^2-1)}{-16} = \frac{b^2-1}{2}}$$

4. Решите неоднородные системы второго порядка методом подстановки:

$$a)\ \begin{cases}\frac{dx}{dt} = -2x - y + 37\sin t\\ \frac{dy}{dt} = -4x - 5y\end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения:

$$-4x = \dot{y} + 5y, \qquad x = -\frac{1}{4}\dot{y} - \frac{5}{4}y, \qquad \dot{x} = -\frac{1}{4}\ddot{y} - \frac{5}{4}\dot{y}$$

Подставим:

$$-\frac{1}{4}\ddot{y} - \frac{5}{4}\dot{y} = -2\left(-\frac{1}{4}\dot{y} - \frac{5}{4}y\right) - y + 37\sin t$$

$$-\ddot{y} - 5\dot{y} = 2\dot{y} + 10y - 4y + 148\sin t$$

$$\ddot{y} + 7\dot{y} + 6y = -148\sin t$$

Для начала решаем однородное:

$$\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + \lambda + 6\lambda + 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda+1) + 6(\lambda+1) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda+1)(\lambda+6) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\lambda = -1\\ \lambda = -6\end{array}\right.$$

$$y(t) = a\cos t + b\sin t \quad\Rightarrow\quad y'(t) = -a\sin t + b\cos t \quad\Rightarrow\quad y''(t) = -a\cos t - b\sin t$$

$$-a\cos t - b\sin t - 7a\sin t + 7b\cos t + 6a\cos t + 6b\sin t = 148\sin t$$

$$\begin{cases}5b - 7a = -148\\ 5a + 7b = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a = -\frac{7}{5}b\\ 5b + \frac{49}{5}b = -148\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a = 14\\ b = -10\end{cases}$$

$$y(t) = 14\cos t - 10\sin t + c_1e^{-t} + c_2e^{-6t} \quad\Rightarrow\quad y'(t) = -14\sin t - 10\cos t + c_1e^{-t} + c_2e^{-6t}$$

$$-14\sin t - 10\cos t + c_1e^{-t} + c_2e^{-6t} = -4x - 5(14\cos t - 10\sin t + c_1e^{-t} + c_2e^{-6t})$$

$$-64\sin t + 60\cos t + c_1e^{-t} + c_2e^{-6t} = -4x$$

$$\boxed{\begin{array}{c}y(t) = 14\cos t - 10\sin t + c_1e^{-x} + c_2e^{-6x}\\ x(t) = \frac{-64\sin t + 60\cos t + c_3e^{-t} + c_4e^{-6t}}{-4}\end{array}}$$

$$b)\ \begin{cases}\frac{dx}{dt} = 3x - 5y - 2y - 2e^t\\ \frac{dy}{dt} = -4x - 5y\end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения:

$$-4x = \dot{y} + 5y, \qquad x = -\frac{1}{4}\dot{y} - \frac{5}{4}y, \qquad \dot{x} = -\frac{1}{4}\ddot{y} - \frac{5}{4}\dot{y}$$

Подставим:

$$-\frac{1}{4}\ddot{y} - \frac{5}{4}\dot{y} = 3\left(-\frac{1}{4}\dot{y} - \frac{5}{4}y\right) - 5y - 2e^t \Rightarrow -\ddot{y} - 5\dot{y} = -3\dot{y} - 15y - 20y - 8e^t \quad\Rightarrow\quad -\ddot{y} - 2\dot{y} + 35y = -8e^t \quad\Rightarrow\quad \ddot{y} + 2\dot{y} - 35y = 8e^t$$

Попробуем угадать решение вида ae^t:

$$ae^t + 2ae^t - 35ae^t = 8e^t \quad\Rightarrow\quad a + 2a - 35a = 8 \quad\Rightarrow\quad a = -\frac{8}{32} = -\frac{1}{4}$$

~~Для начала решаем однородное:~~

$$\lambda^2 + 2\lambda - 35 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + 7\lambda - 5\lambda - 35 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda+7) - 5(\lambda+7) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda+7)(\lambda-5) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\lambda = 5\\ \lambda = -7\end{array}\right.$$

$$y(t) = c_1e^{-7t} + c_2e^{5t} - \frac{1}{4}e^t \quad\Rightarrow\quad y'(t) = -7c_1e^{-7t} + 5c_2e^t - \frac{1}{4}e^t = c_1e^{-7t} + c_2e^{5t} - \frac{1}{4}e^t$$

$$\boxed{\begin{array}{c}y(t) = c_1e^{-7t} + c_2e^{5t} - \frac{1}{4}e^t\\ x(t) = \frac{3}{2}\left(c_1e^{-7t} + c_2e^{5t} - \frac{1}{4}e^t\right)\end{array}}$$

$$c)\ \begin{cases}\frac{dx}{dt} = -5x - y\\ \frac{dy}{dt} = x - 3y - 9e^{2t}\end{cases}$$

Решение.

Из первого уравнения:

$$y = -5x - \dot{x}, \qquad \dot{y} = -5\dot{x} - \ddot{x}$$

Подставим:

$$-5\dot{x} - \ddot{x} = x - 3(-5x - \dot{x}) - 9e^{2t} \quad\Rightarrow\quad -5\dot{x} - \ddot{x} = x + 15x + 3\dot{x} - 9e^{2t} \quad\Rightarrow\quad -\ddot{x} - 8\dot{x} - 16x = -9e^{2t} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 9e^{2t}$$

Попробуем угадать решение вида ae^{2t}:

$$4ae^{2t} + 16ae^{2t} + 16ae^{2t} = 9e^{2t} \quad\Rightarrow\quad 4a + 32a = 9 \quad\Rightarrow\quad 36a = 9 \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{4}$$

~~Для начала решаем однородное:~~

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \quad\Rightarrow\quad (\lambda+4)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = -4$$

$$x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t} + \frac{1}{4}e^{2t} \quad\Rightarrow\quad x'(t) = -4c_1e^{-4t} + c_2e^{-4t} - 4c_2te^{-4t} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}y(t) = -5\left(x(t) + c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t} + \frac{1}{4}e^{2t}\right) - \left(-4c_1e^{-4t} + c_2e^{-4t} - 4c_2te^{-4t} + \frac{1}{4}e^{2t}\right)\\ x(t) = c_1e^{-4t} + c_2te^{-4t} + \frac{1}{4}e^{2t}\end{array}}$$

$$d)\ \begin{cases}\frac{dx}{dt} = 3x + 2y - e^{-t}\\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y - e^{-t}\end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения:

$$\dot{y} + 2y + e^{-t} = -2x, \qquad x = -\frac{1}{2}\dot{y} - y - \frac{1}{2}e^{-t}, \qquad \dot{x} = -\frac{1}{2}\ddot{y} - \dot{y} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

Подставим:

$$-\frac{1}{2}\ddot{y} - \dot{y} + \frac{1}{2}e^{-t} = 3\left(-\frac{1}{2}\dot{y} - y - \frac{1}{2}e^{-t}\right) + 2y - e^{-t} \quad\Rightarrow\quad -\ddot{y} - 2\dot{y} + e^{-t} = -3\dot{y} - 6y - 3e^{-t} + 4y - 2e^{-t} \quad\Rightarrow\quad -\ddot{y} + \dot{y} + 2y = -6e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \ddot{y} - \dot{y} - 2y = 6e^{-t}$$

Попробуем угадать решение вида ate^{-t}:

$$(ate^{-t})' = ae^{-t} - ate^{-t}, \qquad (ate^{-t})'' = -ae^{-t} - ae^{-t} + ate^{-t}$$

$$-ae^{-t} - ae^{-t} + ate^{-t} - ae^{-t} + ate^{-t} - 2ate^{-t} = 6e^{-t} \quad\Rightarrow\quad -2a + at - a + at - 2at = 6 \;\Rightarrow\; -3a = 6 \;\Rightarrow\; a = -2$$

Решаем однородное:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda(\lambda+1) - 2(\lambda+1) = 0 \;\Rightarrow\; (\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\lambda = -1\\ \lambda = 2\end{array}\right.$$

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 2te^{-t} \quad\Rightarrow\quad y'(t) = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t} - 2e^{-t} + 2te^{-t} = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 2e^{-t} - 2te^{-t}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 2te^{-t}\\ x(t) = -\frac{3}{2}(c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 2te^{-t}) - \frac{1}{2}e^{-t}\end{array}}$$