№3 М.С. Некрасов Артём 216

1. *Пусть* $X_1, \dots, X_n$ *− выборка из равномерного распределения на отрезке* $[0, \theta]$. *Найти оценку параметра* θ, *наилучшую в среднеквадратичном смысле в классе оценок вида* $c_n \cdot X_{(n)}$. *Найти ее смещение.*

Решение.

$$p_{X_n}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \Rightarrow \mathbb{E}X_{(n)} = \int_0^\theta x \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{nx^{n+1}}{n\theta^n + \theta^n}\Bigg|_0^\theta = \frac{n\theta}{n+1}, \qquad \mathbb{E}X_{(n)}^2 = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{nx^{n+2}}{n\theta^n + 2\theta^n}\Bigg|_0^\theta = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

Найдем среднеквадратическое отклонение:

$$MSE = \mathbb{E}\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 = \mathbb{E}\left(c_n \cdot X_{(n)} - \theta\right)^2 = c_n^2 \cdot \frac{n\theta^2}{n+2} - 2\theta c_n \cdot \frac{n\theta}{n+1} + \theta^2 = \theta^2\left(\frac{nc_n^2}{n+2} - \frac{2nc_n}{n+1} + 1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_n}\left(\mathbb{E}\left(c_n \cdot X_{(n)} - \theta\right)^2\right) = \frac{\partial}{\partial c_n}\left(\theta^2\left(\frac{nc_n^2}{n+2} - \frac{2nc_n}{n+1} + 1\right)\right) = 0,$$

$$\frac{2c_n n^2\theta^2 + 2c_n n\theta^2 - 2n^2\theta^2 - 4n\theta^2}{n^2 + 3n + 2} = 0,$$ отсюда минимум в $\boxed{c_n = \frac{n+2}{n+1}}$ − единственный корень.

Тогда отклонение:

$$\mathbb{E}\left(c_n \cdot X_{(n)} - \theta\right) = \theta\left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} - 1\right) = \boxed{\frac{\theta}{(n+1)^2}}$$

2. *Пусть* $X_1, \dots, X_n$ *− выборка из нормального распределения* $N(\theta, 1)$ *с параметром* $\theta \in \mathbb{R}$. *Для какой функции* $\tau(\theta)$ *существует* эффективная оценка? Вычислите информацию Фишера $i(\theta)$ *одного наблюдения в данной модели.*

Решение.

Пользуясь критерием эффективности:

$$\hat{\theta}(X) - \tau(\theta) = c(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{n} \log p_\theta\,(X_i) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{n} \log p_\theta\,(X_i) = \frac{\hat{\theta}(X) - \tau(\theta)}{c(\theta)}$$

Вклад:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\sum_{i=1}^{n} \log p_\theta\,(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_\theta\,(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{\frac{-(x-\theta)^2}{2}\right\}\right) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta) = n \cdot (\bar{X} - \theta)$$

Отсюда:

$$\tau(\theta) = n\theta$$

Теперь считаем информацию Фишера:

$$c(\theta) = \frac{\tau'(\theta)}{i_n(\theta)} \quad \Rightarrow \quad i_n(\theta) = \frac{\tau'(\theta)}{c(\theta)} = n \quad \Rightarrow i(\theta) = 1$$

Эффективная оценка существует для линейных преобразований функции θ. Оценка с точностью до домножения на константу равняется $\bar{X}$.

3. Пусть $X_1, \dots, X_n$ *независимы и имеют биномиальное распределение* $Bi(1, \theta)$. *Доказать, что не существует оптимальной оценки для* $\tau(\theta) = \theta^{n+1}$.

Решение.

Пусть $\hat{T}$ − оптимальная оценка для $\tau(\theta) = \theta^{n+1}$. Тогда по всем канонам $\mathbb{E}\hat{T} = \tau(\theta)$.

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\hat{T}(X_1, \dots, X_n)\right) = \mathbb{E}(\theta^{n+1})$, однако мы знаем, что $X_1, \dots, X_n$ имеют биноминальное распределение, значит сумма их ожидаемых значений равна $n\theta$, поэтому $\mathbb{E}(\theta^{n+1}) \neq \mathbb{E}(n\theta) = n\theta$. Значит можно сделать вывод, что любая оценка $\mathbb{E}\hat{T}$ будет смещенной, так как $\mathbb{E}\left(\hat{T}(X_1, \dots, X_n)\right) \neq \tau(\theta)$.

Следовательно, действительно не существует несмещенной (оптимальной) оценки для $\tau(\theta)$ с $X_1, \dots, X_n$, имеющими биномиальное распределение $Bi(1, \theta)$.