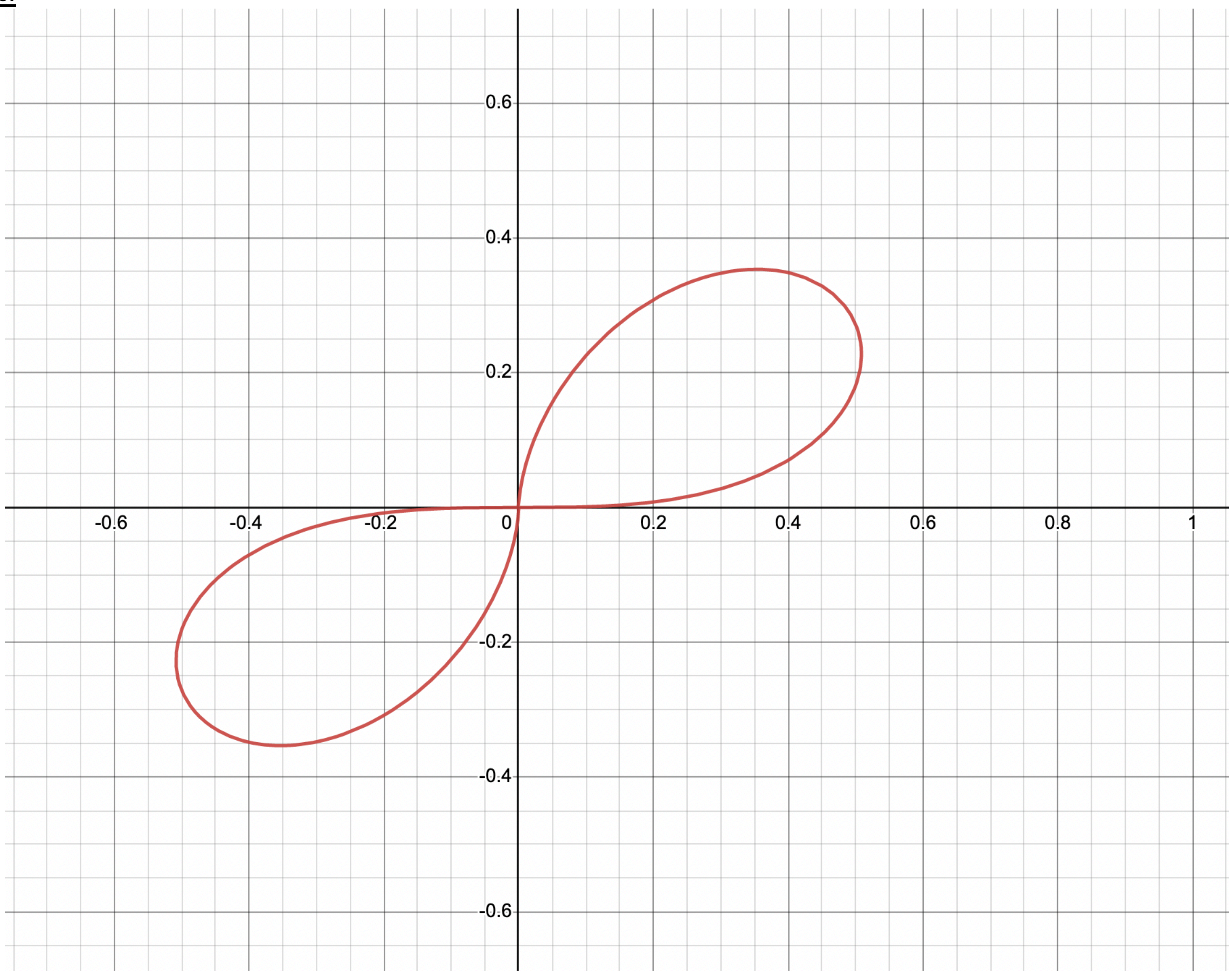
№12 М.А. Некрасов Артём 216

*1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:*

$$(x^2+y^2)^3 = x^3y$$

<u>**Решение.**</u>




Полярные координаты: $\begin{cases} r^6 = r^3\cos^3\varphi \cdot r\sin\varphi \\ r > 0 \\ \varphi \in [0,2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = \sin\varphi\cos^3\varphi \\ r > 0 \\ \varphi \in [0,2\pi) \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt{\sin\varphi\cos^3\varphi}$

Посчитаем площадь одной "петельки" и удвоим, в силу симметрии

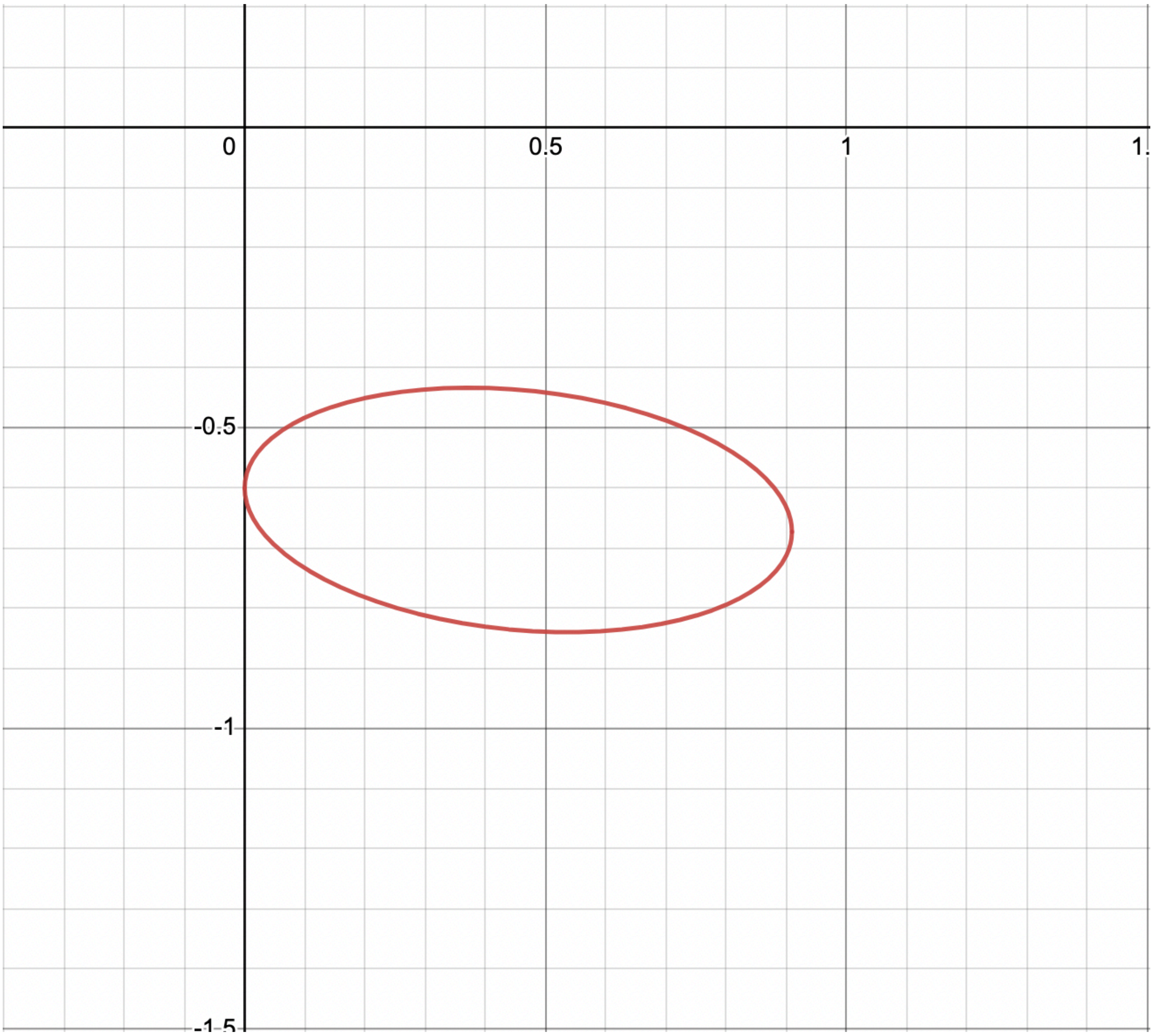
$$S = 2\iint_D dxdy \Rightarrow S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin\varphi\cos^3\varphi}} 1\cdot r\,dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{\sin\varphi\cos^3\varphi}} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[2]{\sin\varphi\cos^3\varphi}^2}{2} - 0\,d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\cos^3\varphi}{2}\,d\varphi \Rightarrow [t=\cos\varphi] \Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{t^3}{2}dt = -\frac{t^4}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos^4\varphi}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\cos^4\frac{\pi}{2}}{4} - \left(-\frac{\cos^4 0}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

*2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой:*

$$(2x + 3y + 1)^2 + (x - 4y - 3)^2 = 1$$

<u>Решение.</u>




Замена: $\begin{cases} X = 2x + 3y \\ Y = x - 4y \end{cases} \Rightarrow (X+1)^2 + (Y-3)^2 = 1$

$J^{-1} = \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \right| = |-11| = 11 \Rightarrow J = \dfrac{1}{11}$

$S = \iint_D 1 dxdy \Rightarrow S = \iint_{(X+1)^2+(Y-3)^2 \le 1} \dfrac{1}{11} \cdot dXdY = \dfrac{1}{11} \iint_{(X+1)^2+(Y-3)^2 \le 1} dXdY = \boxed{\dfrac{\pi}{11}},$ так как площадь единичного круга равна $\pi$

*3. Найти объем тела, заданного неравенствами*:

$$x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$$

Решение.

Цилиндрическая замена: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \\ r > 0 \\ \varphi \in [0,2\pi) \end{cases} \Rightarrow r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \le h \le \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \Rightarrow r^2 \le h \le r$ – ясно, чт

$h \in (0,1]$

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dh \int_h^{\sqrt{h}} r\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{2}\Big|_h^{\sqrt{h}} dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r^2}{2}\Big|_h^{\sqrt{h}} dh = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{h - h^2}{2} dh = \int_0^{2\pi} \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{6}\Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} d\varphi = \frac{1}{12}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{12} \cdot 2\pi - 0 = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

*4. Найти объем тела, ограниченного поверхностью:*

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 = z\left(x^2 + y^2\right)$$

Решение.

Сферическая замена: $\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \\ J = r^2\cos\psi \\ r > 0 \\ \varphi \in [0,2\pi), \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow r^4 = r\sin\psi\,(r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi + r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \sin\psi\cos^2\psi > 0$, что совпадает с областью $z > 0$, т. е. подходит 4 верхних октана. В первом октане $\varphi, \psi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$V = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sin\psi\cos^2\psi} r^2 \cdot \cos\psi\,dr = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\,r^3}{3}\Big|_0^{\sin\psi\cos^2\psi} d\psi = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^7\psi\sin^3\psi}{3} d\psi =$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t = \sin\psi \\ d\psi = \frac{1}{t}dt \end{bmatrix} \Rightarrow 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^3 - 3t^5 + 3t^7 - t^9 dt = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\psi}{12} - \frac{\sin^6\psi}{6} + \frac{\sin^8\psi}{8} - \frac{\sin^{10}\psi}{30}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{120} d\varphi = 4 \cdot \varphi\frac{1}{120}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{120} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{120} \cdot 0\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{240} = \boxed{\frac{\pi}{60}}$$