№24 М.А. Некрасов Артём 216

1. Найти интеграл Фурье функции ($a > 0$):

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Решение.

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-x(iy+a)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left. \frac{e^{-x(iy+a)}}{-iy-a} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(iy+a)}$$

$$\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{\sqrt{2\pi}(iy+a)} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{iy+a} dy$$

$$\boxed{\check{\hat{f}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixy}}{iy+a} dy}$$

2. Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (указание: вспомните интеграл Дирихле).

Решение.

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ – четная $\Rightarrow$ преобразование Фурье для $f(x)$ вещественно и $\check{\hat{f}}(x) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos xy \, dy \int_0^{+\infty} \hat{f}(t) \cos yt \, dt$

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot e^{-ixy} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x} \cos xy}_{\text{четная}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x} \sin xy}_{\text{нечетная}} dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \cos xy \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2x} \cdot (\sin(x - xy) + \sin(x + xy)) dx = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin\big(x(1-y)\big)}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin\big(x(1+y)\big)}{x} dx \right) =$$

$$= \left[\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin px}{x} dx = \operatorname{sgn} p \cdot \frac{\pi}{2}}_{\text{тот самый Дирихле}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\operatorname{sgn}(1-y) \cdot \frac{\pi}{2} + \operatorname{sgn}(1+y) \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (\operatorname{sgn}(1-y) + \operatorname{sgn}(1+y))$$

$$\boxed{\hat{f}(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (\operatorname{sgn}(1-y) + \operatorname{sgn}(1+y)) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, & |y| = 1 \\ 0, & |y| > 1 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, & |y| < 1 \end{cases}}$$