Задача 9.

Случайным образом выбираем из $\{1,2, \dots , n\}$ одно число. Событие A − выбранное число делится на 2, событие B − выбранное число делится на 5. Найдите все n такие, что события A и B незасисимы.

<u>Решение.</u>

$\Omega = (x | x \in \{1, \dots, n\})$

Положим $\begin{cases} A - x \vdots 2 \\ B - x \vdots 5 \end{cases}$

События A и B независимы, если $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$

Пусть $n \equiv 0 \ (mod\ 2)$, тогда

$\Pr(A) = {}^1/_2 \ \Rightarrow \ \Pr(B) = 2 \cdot \Pr(A \cap B) \ \Rightarrow \ |B| = 2|(A \cap B)| \ \Rightarrow \ |B| \vdots 2 \ \Rightarrow |x| \equiv \{0,2,4\} \ (mod\ 10)$

Пусть $n \equiv 1 \ (mod\ 2)$, тогда

$\Pr(A) = \dfrac{\frac{n}{2} - 1}{3}$

Также не стоит забывать про $\{0,1,2,3,4\}$. Эти числа тоже подходят, так как не кратны ни 5, ни 10.

Ответ: $\{0,1,2,3,4\}$, $\quad n \equiv \{0,2,4\} \ (mod\ 10)$

Задача 10.

В городе здоровых горожан больше половины, богатых горожан больше половины и есть хотя бы один умный горожанин, причем богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы. Докажите, что найдется богатый, здоровый и умный горожанин.

<u>Решение.</u>

Положим $\begin{cases} A - \text{горожанин здоров} \Rightarrow \Pr(A) > {}^1/_2 \\ B - \text{горожанин богат} \quad \Rightarrow \Pr(B) > {}^1/_2 \\ C - \text{горожанин умён} \quad \Rightarrow \Pr(C) > 0 \end{cases}$

Бензин кончился.

Задача 11.

Три студента пишут контрольную работу из 4-х задач. Первый студент решает любую задачу с вероятностью ${}^3/_4$, второй − с вероятностью ${}^1/_2$, третий − ${}^1/_4$. Преподаватель получил анонимную работу с тремя решенными задачами. Кому данная работа скорее всего принадлежит?

<u>Решение.</u>

Положим $\begin{cases} A_1 - \text{работа первого студента} \Rightarrow \Pr(A_1) = {}^1/_3 \\ A_2 - \text{работа второго студента} \Rightarrow \Pr(A_2) = {}^1/_3 \\ A_3 - \text{работа третьего студента} \Rightarrow \Pr(A_3) = {}^1/_3 \\ B - \text{решено три задачи} \end{cases}$

$\Pr(B) = \Pr(A_1) \cdot \Pr(B|A_1) + \Pr(A_2) \cdot \Pr(B|A_2) + \Pr(A_3) \cdot \Pr(B|A_3)$ – Исходя из формулы полной вероятности.

По формуле Бернулли ($\Pr = C_n^k \cdot pr^k \cdot q^{n-k}$):

$$\begin{cases} \Pr(B|A_1) = C_4^3 \cdot \left(3/4\right)^3 \cdot \left(1/4\right)^1 = 27/64 \\ \Pr(B|A_2) = C_4^3 \cdot \left(1/2\right)^3 \cdot \left(1/2\right)^1 = 1/4 \\ \Pr(B|A_3) = C_4^3 \cdot \left(1/4\right)^3 \cdot \left(3/4\right)^1 = 3/64 \end{cases} \Rightarrow \Pr(B) = 1/3 \cdot \left(27/64 + 1/4 + 3/64\right) = 23/96$$

По формуле Байеса $\left(\Pr(A|B) = \dfrac{\Pr(B|A) \cdot \Pr(A)}{\Pr(B)}\right)$:

$$\begin{cases} \Pr(A_1|B) = \dfrac{27/64 \cdot 1/3}{23/96} = 27/46 \approx 0.586 \\ \Pr(A_2|B) = \dfrac{1/4 \cdot 1/3}{23/96} = 8/23 \approx 0.347 \\ \Pr(A_3|B) = \dfrac{3/64 \cdot 1/3}{23/96} = 3/46 \approx 0.065 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ значит, данная работа скорее всего принадлежит первому студенту

Задача 12.

При исследовании больного имеется подозрение на одно из трех заболеваний A_1, A_2 и A_3, а их вероятности в данных условиях равны $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$ и $p_3 = 1/6$ соответственно. Для уточнения диагноза назначен некоторый анализ, дающий положительный результат с вероятностью 0.1 в случае A_1, с вероятностью 0.2 в случае A_2, и с вероятностью 0.8 в случае A_3. Анализ был проведен четыре раза и дал три раза положительный результат и один раз отрицательный. Какова вероятность каждого заболевания после анализа?

Решение.

$$\text{Положим} \begin{cases} B_1 \text{ — пациент болеет болезнью } A_1 \\ B_2 \text{ — пациент болеет болезнью } A_2 \\ B_3 \text{ — пациент болеет болезнью } A_3 \\ A \text{ — анализ дал результат "+++ –"} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \Pr(A|B_1) = 0{,}1^3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0009 \\ \Pr(A|B_2) = 0{,}2^3 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064 \\ \Pr(A|B_3) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1024 \end{cases} \Rightarrow \Pr(B_i|A) = \frac{\Pr(A|B_i) \cdot \Pr(B_i)}{\Pr(A)} \Rightarrow \begin{cases} \Pr(B_1|A) = \dfrac{9}{20000 \cdot \Pr(A)} \\ \Pr(B_2|A) = \dfrac{4}{1875 \cdot \Pr(A)} \\ \Pr(B_3|A) = \dfrac{32}{1875 \cdot \Pr(A)} \end{cases}$$

$\Pr(B_1|A) + \Pr(B_2|A) + \Pr(B_3|A) = 1 \Rightarrow \Pr(A) = 393/20000$

$$\begin{cases} \Pr(B_1|A) = 3/131 \approx 0.02 \\ \Pr(B_2|A) = 128/1179 \approx 0.10 \end{cases}$$

$$\Pr(B_3|A) = {}^{1024}/_{1179} \approx 0.86$$