№8 Т.В. Некрасов Артём 216

Задача 8.

Случайные величины X, Y, U, V независимы. X и Y имеют равномерное распределение на $[0,1]$, а U и V имеют экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$
$\left(\text{т. е. плотность распределения имеет вид } \lambda e^{\lambda x} Ind_{\{x>0\}}\right)$. Найдите плотности случайных велечин:

$b)\ \frac{X}{Y}, \qquad c)\ U+V, \qquad d)\ U-V, \qquad g)\ \frac{X}{U}$

<u>Решение.</u>

$c)\ \varrho_u(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot Ind_{\{t>0\}}, \qquad \varrho_v(t) = \lambda e^{-\lambda(z-t)} \cdot Ind_{\{z-t>0\}}$

По формуле свертки:

$$\varrho_{u+v}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda e^{-\lambda t} \cdot Ind_{\{t>0\}}\right) \cdot \left(\lambda e^{-\lambda(z-t)} \cdot Ind_{\{z-t>0\}}\right) dt = \int_0^z \lambda^2 e^{-\lambda t - \lambda z + \lambda t}\, dt = e^{-\lambda z}\lambda^2 \int_0^z e^{t(\lambda-\lambda)}\, dt =$$

$$= e^{-\lambda z}\lambda^2 \int_0^z dt = \boxed{e^{-\lambda z}\lambda^2 z}$$

$d)$ ✨*magic*✨ $: U - V = U + (-V)$

$\varrho_u(t) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot Ind_{\{t>0\}}, \qquad \varrho_v(t) = \lambda e^{\lambda(z-t)} \cdot Ind_{\{z-t<0\}}$

По формуле свертки:

$$\varrho_{u-v}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot Ind_{\{t>0\}} \cdot \lambda e^{\lambda(z-t)} \cdot Ind_{\{z-t<0\}} dt = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t + z\lambda - \lambda t} dt = \frac{\lambda^2 e^{\lambda z}}{2\lambda} = \boxed{\frac{\lambda e^{\lambda z}}{2}}, & z < 0 \\ \int_z^{+\infty} \lambda^2 e^{-2\lambda t + z\lambda} dt = \frac{\lambda^2 e^{\lambda z}}{2\lambda} e^{-2\lambda z} = \boxed{\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{2}}, & z > 0 \end{cases}$$

$$g)\ \varrho_{\frac{x}{u}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot \varrho(zy, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \cdot Ind_{\{zy \in [0,1]\}} \cdot \lambda e^{-\lambda y} \cdot Ind_{\{y \geq 0\}} dy = \int_0^{\frac{1}{z}} y \cdot \lambda e^{-\lambda y} dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(-e^{-\lambda y}(1+\lambda y)\right)\Big|_0^{\frac{1}{z}} = \boxed{\frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{z}}\left(1 + \frac{\lambda}{z}\right)\right)}$$

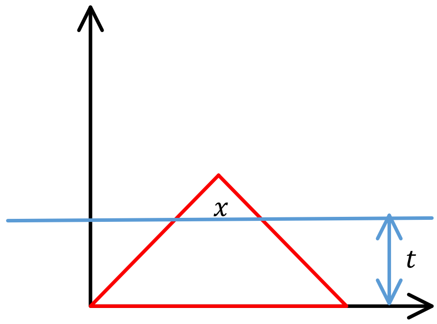
$$b)\ \varrho_{\frac{x}{y}}(z) = \begin{cases} \boxed{\frac{1}{2}}, & 0 \leq z \leq 1 \\ \boxed{\frac{1}{2z^2}}, & z > 1 \end{cases}$$

Задача 15.

Пусть вектор (X, Y) имеет равномерное распределение на треугольнике с вершинами $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (1,1)$. Найдите функции распределения и плотности случайных велечин X и Y. Являются ли эти *случайные велечины независимыми?*

Решение.

$F_X(t) = P(X \le t) = \dfrac{S_{\text{трапеции}}}{S_{\text{Б.треугольника}}}$. Различие X и Y лишь в том, где мы отсекаем маленький треугольничек функцией $y = t$: сверху или сбоку.



$$S_{\text{трапеции}} = \frac{x+2}{2} \cdot t = t + \frac{xt}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t + \dfrac{xt}{2} \Rightarrow \varrho_X(t) = 1 + \dfrac{x}{2}, & t \in [0,1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = \frac{S_{\text{хз}}}{S_{\text{Б.треугольника}}} \Rightarrow S_{\text{хз}} = 1 - \frac{(2-t)^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{-t^2 + 4t - 2}{2} \Rightarrow \varrho_Y(t) = -t + 2, & t \in [0,2] \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

Значит можно предположить, что независимости не будет.