№20 М.А. Некрасов Артём 216

$$B(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx\,, p,q>0,\qquad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, p,q>0\,,\qquad B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

$$\Gamma(p+1)=p\cdot\Gamma(p),\qquad \Gamma(n+1)=n!, n\in\mathbb{N},\qquad \Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi p},\qquad \Gamma(p)=\int_0^{+\infty}t^{p-1}e^{-t}dt$$

1. Вычислить с помощью эйлеровых интегралов:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{(4+x^2)^5}dx$$

<u>Решение.</u>

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{(4+x^2)^5}dx=\frac{1}{4^5}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^5}dx=\begin{bmatrix} t=\frac{x^2}{4} \\ x=2\sqrt{t} \\ dx=\frac{dt}{\sqrt{t}}\end{bmatrix}=\frac{1}{4^5}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{t}}}{(1+t)^5}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{4^5}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{(1+t)^5}dt=$$

$$=\frac{4^{\frac{1}{6}}}{4^5}B\left(\frac{2}{3},\frac{13}{3}\right)=\frac{4^{\frac{1}{6}}}{4^5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{13}{3}\right)}{\Gamma(5)}=\frac{4^{\frac{1}{6}}}{4^5\cdot 4!}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{13}{3}\right)=\frac{4^{\frac{1}{6}}}{4^5\cdot 4!}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4^{\frac{1}{6}}}{4^5\cdot 4!}\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{4^{\frac{1}{6}}}{4^5\cdot 4!}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{70\pi\sqrt[3]{2}}{4^5\cdot 3^5\cdot\sqrt{3}}}$$

2. Вычислить с помощью эйлеровых интегралов:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\ ,\qquad (a>0)$$

<u>Решение.</u>

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=a\int_0^a x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\begin{bmatrix} t=\frac{x^2}{a^2}\Rightarrow x=a\sqrt{t} \\ x\in[0,a]\Rightarrow t\in[0,1] \\ dx=a\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}\end{bmatrix}=a\int_0^1 a^2t(1-t)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{t}}=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1}(1-t)^{\frac{3}{2}-1}dt=\frac{a^4}{2}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}=\frac{a^4}{2^4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{a^4\pi}{16}}$$

3. Выразить интеграл через эйлеровы интегралы, указав значения параметров, при которых он существует:

$$\int_0^{+\infty}x^pe^{-x^q}dx$$

<u>Решение.</u>

$$\int_0^{+\infty}x^pe^{-x^q}dx=\begin{bmatrix} t=x^q, q\neq 0 \\ t\in[0,+\infty) \\ x=t^{\frac{1}{q}} \\ dx=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt\end{bmatrix}=\int_0^{+\infty}t^{\frac{p}{q}}\cdot e^{-t}\cdot\frac{1}{q}\cdot t^{\frac{1}{q}-1}dt=\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\cdot e^{-t}\cdot\frac{dt}{q}=\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\cdot e^{-t}dt=\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)$$

Такой интеграл сходится при $\frac{p+1}{q}>0$

Теперь рассмотрим случай $q=0$:

$$\int_0^{+\infty}x^pe^{-x^q}dx=\int_0^{+\infty}x^pe^{-1}dx=\frac{1}{e}\int_0^{+\infty}x^pdx\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{array}{l} x\to 0^+ - \text{сходится при } p>-1 \\ x\to+\infty - \text{сходится при } p<-1\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\text{расходится }\forall p$$

Ответ: сходится при $\frac{p+1}{q}>0,\qquad q\neq 0$ и равен $\boxed{\frac{1}{q}\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)}$

4. Выразить интеграл через эйлеровы интегралы, указав значения параметров, при которых он существует:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}^p\,x\,dx$$

<u>Решение.</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}^p\,x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^p x}{\cos^p x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x\,)^{\frac{p}{2}}\cdot(\cos^2 x\,)^{-\frac{p}{2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x\,)^{\frac{p}{2}}\cdot(1-\sin^2 x\,)^{-\frac{p}{2}}\,dx=\begin{bmatrix} t=\sin^2 x\,, t\in[0,1] \\ dt=2\sin x\cdot\cos x\,dx \\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}\end{bmatrix}=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{\frac{p}{2}}(1-t)^{-\frac{p}{2}}\cdot t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\frac{dt}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{\frac{p-1}{2}}(1-t)^{\frac{-p-1}{2}}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{1-p}{2}\right)\Rightarrow\text{сходится при }\left[\begin{array}{l}\frac{p+1}{2}>0 \\ \frac{1-p}{2}>0\end{array}\right., -1<p<1$$

$$\left[\begin{array}{l} x\to 0^+:\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^{-p}x\,dx\sim\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\,dx\sim\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^pdx\underset{\text{сходится}}{\Rightarrow}p>-1 \\ x\to\frac{\pi}{2}:\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\cos^{-p}x\,dx\sim\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^p x\,dx=\begin{bmatrix}\frac{\pi}{2}-x=t \\ dx=-dt\end{bmatrix}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0-\sin^{-p}t\,dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^{-p}t\,dt\sim\int_{\frac{\pi}{2}}^0 t^{-p}dt\underset{\text{сходится}}{\Rightarrow}p<1\end{array}\right.$$

Ответ: сходится при $|p|<1$ и равен $\boxed{\frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{1-p}{2}\right)}$