Исследовать ряд на сходимость:

1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n + 3}{n \cdot (\ln^2 n + 2)}$

Решение.

$$\frac{\ln n + 3}{n \cdot (\ln^2 n + 2)} = \frac{\ln n + 3}{n \cdot \ln^2 n + 2n} \geq \frac{\ln n}{n \cdot \ln^2 n + 2n} \geq \frac{\ln n}{n \cdot \ln^2 n + 2n \cdot \ln^2 n} = \frac{1}{3n \cdot \ln n} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{расходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n + 3}{n \cdot (\ln^2 n + 2)} \text{ тоже расходится.}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$

Решение.

$$\left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \sim \left(1 - 1 + \frac{\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^2}{2}\right), \qquad \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^2}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{\left(2n^{\frac{4}{3}}\right)} = \frac{\pi^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} - \text{сходится} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{\sqrt[3]{n^2}}\right) \text{ тоже сходится.}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Решение.

По признаку Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\left((n+1) \cdot n!\right)^2 \cdot 2n!}{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot 2n! \cdot (n!)^2} = \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot 2n!}{2 \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \cdot 2n! \cdot (n!)^2} =$$

$$= \frac{n+1}{4n+2} = \frac{n}{n} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(4 + \frac{2}{n}\right)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(4 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{так как значение предела меньше единицы, то ряд сходится.}$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$

Решение.

По радикальному признаку Коши:

$$\sqrt[n]{a_n} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+2n}}\right)\right) =$$

$= \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow$ так как значение предела больше единицы, то ряд расходится.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}$

Решение.

По признаку Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+5)!!}{(n+1)^3\cdot(2n+2)!!}}{\frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!}} = \frac{(2n+5)!!}{(n+1)^3\cdot(2n+2)!!}\cdot\frac{n^3(2n)!!}{(2n+3)!!} = \frac{(2n+5)\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot(2n+2)}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+5)\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot(2n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{n^4}\cdot\left(\frac{2+\frac{5}{n}}{2+\frac{8}{n}+\frac{12}{n^2}+\frac{8}{n^3}+\frac{2}{n^4}}\right)\right) = 1$ – очень плохо, Даламбер подвёл.

По признаку Гаусса:

$$\frac{(2n+5)\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot(2n+2)} = \frac{1+\frac{1}{\frac{5}{2}n}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 = \left(1+\frac{1}{\frac{5}{2}n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^3 =$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{5}{2}n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{\frac{5}{2}n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{\frac{3}{2}n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n+1}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\frac{3}{n+1}-\frac{1}{\frac{3}{2}n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1-\frac{\frac{11}{3}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow p = \frac{11}{3} \Rightarrow p \geq 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!!}{n^3(2n)!!} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{11}{3}}}$ – тоже сходится.