№17 М.А. Некрасов Артём 216

1. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x \, dx \qquad a)\ p \in (0, +\infty), \qquad b)\ p \in [p_0, +\infty), \qquad p_0 > 0$$

<u>Решение.</u>

$a)$

Финт ушами или метод граничной точки:

$e^{px} \sin x = \dfrac{\sin x}{e^{px}}$ непрерывна на $x \in [0, +\infty), p \in [0, +\infty),$ так что подставим $p = o$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^{0x}} dx = \int_0^{+\infty} \sin x \, dx - \text{нет предела} \quad \Rightarrow \quad \text{расходится}$$

Следовательно по методу граничной точки $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x \, dx$ сходится неравномерно при $p \in (0, +\infty)$

$b)$

$i.\ \left| \int_0^A \sin x \, dx \right| = \left| -\cos x \Big|_0^A \right| = |-(\cos A - \cos 0)| = |-\cos A + 1| \leq 2$

$ii.\ e^{-px}$ — монотонна по x

$iii.\ \lim\limits_{x \to \infty} \left| \sup\limits_{p \in [p_0, +\infty)} e^{-px} \right| = \lim\limits_{x \to \infty} e^{-p_0 x} = 0 -$ Равномерно сходится к нулю

Следовательно по признаку Дирихле $\int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x \, dx$ сходится равномерно при $p \in [p_0, +\infty)$

2. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^p} dx \qquad a)\ p \in (0, +\infty), \qquad b)\ p \in [p_0, +\infty), \qquad p_0 > 0$$

<u>Решение.</u>

$a)$

Подставим $p = 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \cos x \, dx \nrightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{расходится}$$

$\dfrac{\cos x}{1 + x^p}$ непрерывна при $x \in [0, +\infty), p \in [0, +\infty)$

Следовательно по методу граничной точки равномерной сходимости нет.

$b)$

$i.\ \left|\int_0^A \cos x\,dx\right| = \left|\sin x\Big|_0^A\right| = |\sin A - 0| = |\sin A| \le 1$

$ii.\ \dfrac{1}{1+x^p}$ монотонно убывает и $\xrightarrow{x\to\infty} 0$

$iii.\ \lim\limits_{x\to\infty}\left|\sup \dfrac{1}{(1+x^p)}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{p_0}} \to 0$

Следовательно по признаку Дирихле $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x^p}\,dx$ сходится равномерно при $p\in[p_0,+\infty)$

3. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(p^2x)}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{arctg}(px)\,dx, \qquad p\in[1,+\infty)$$

<u>Решение.</u>

$\operatorname{arctg}(px)$ $-$ монотонна по x и ограничена $\dfrac{\pi}{2}$

Далее рассматриваем $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(p^2x)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, где $\sqrt[3]{x^2}$ монотонна и равномерно $\to 0$ так как нет параметра

$$\left|\int_1^A \sin(p^2x)dx\right| = \left|-\frac{cos(p^2x)}{p^2}\Bigg|_1^A\right| = \frac{1}{p^2}\left|-(\cos p^2A - \cos p^2)\right| = \frac{\cos p^2A - \cos p^2}{p^2} \le \frac{2}{p^2}$$
≤ 2 $\;-\;$ сходится равномерно по Дирихле

Следовательно по признаку Абеля $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(p^2x)}{\sqrt[3]{x^2}}\operatorname{arctg}(px)\,dx$ сходится равномерно при $p\in[1,+\infty)$

4. Исследовать несобственный интеграл на равномерную сходимость:

$$\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+(x-p)^4}\,dx, \qquad p\in[0,+\infty)$$

<u>Решение.</u>

Пользуемся признаком Вейерштрасса при $x > x_0, p > p_0$:

$$\left|\frac{x}{1+(x-p)^4}\right| \le \frac{x}{1+x^4} \sim \frac{x}{x^4} \sim \frac{1}{x^3} \quad - \quad \text{сходится}$$

Следовательно по признаку Вейерштрасса $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+(x-p)^4} dx$ сходится равномерно при $p \in [0, +\infty)$