1. Докажите, что формула $m \circ n = 2mn - 2m - 2n + 3$ задает бинарную операцию на множестве $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ и что $(\mathbb{R}\backslash\{1\},\circ)$ является группой.

$\circ: \mathbb{R}\backslash\{1\} \times \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}\backslash\{1\}$, где $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, n \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, m \circ n \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

пусть $m \circ n = 1$

$2mn - 2m - 2n + 3 = 1 \Rightarrow 2mn - 2m - 2n + 2 = 0 \Rightarrow mn - m - n + 1 = 0 \Rightarrow m(n-1) - (n-1) = 0 \Rightarrow (n-1)(m-1) = 0 \Rightarrow$

$\left[\begin{matrix} m = 1 \\ n = 1 \end{matrix}\right.$, однако ни m, ни n единицей быть не может, следовательно и $m \circ n \neq 1 \Rightarrow$ формула действительно задает бинарную операцию

на $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Теперь проверим, что $(\mathbb{R}\backslash\{1\},\circ)$ является группой. Для этого вспомним, что такое группа по определению.

Множество G с бинарной операцией называется группой, если выполнены следующие условия:

1)Ассоциативность. $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \quad \forall a, b, c \in G$.

2)Нейтральный элемент. То есть в G $\exists$ нейтральный элемент e, такой что $e \circ a = a \circ e = a \ \ \forall a \in G$.

3)Обратный элемент. То есть $\forall a \in G$ $\exists$ обратный элемент b, такой что $a \circ b = b \circ a = e$.

Проверим эти условия в нашем случае:

1) $(a \circ b) \circ c = (2ab - 2a - 2b + 3) \circ c = 2(2ab - 2a - 2b + 3) \circ c - 2(2ab - 2a - 2b + 3) - 2c + 3 =$
$= 4abc - 4ac - 4bc - 4ab + 4a + 4b + 4c - 3$

$a \circ (b \circ c) = a \circ (2bc - 2b - 2c + 3) = 2a \circ (2bc - 2b - 2c + 3) - 2a - 2(2bc - 2b - 2c + 3) + 3 =$
$= 4abc - 4ab - 4ac + 6a - 2a - 4bc + 4b + 4c - 6 + 3 = 4abc - 4ac - 4bc - 4ab + 4a + 4b + 4c - 3$

$4abc - 4ac - 4bc - 4ab + 4a + 4b + 4c - 3 = 4abc - 4ac - 4bc - 4ab + 4a + 4b + 4c - 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ – ассоциативненько

2.1)$(m, e) \to 2me - 2m - 2e + 3 = m,$ где $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, e \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$2me - 2m - 2e + 3 = m \Rightarrow 2e(m-1) - 2m + 3 = m \Rightarrow 2e = \frac{m - 3 + 2m}{m-1} \Rightarrow e = \frac{3 \cdot (m-1)}{2 \cdot (m-1)} \Rightarrow e = \frac{3}{2} (\text{так как } m \neq 1)$$

2.2)$(e, m) \to 2em - 2e - 2m + 3 = m,$ где $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, e \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$2em - 2e - 2m + 3 = m \Rightarrow 2e(m-1) - 2m + 3 = m \Rightarrow 2e = \frac{m - 3 + 2m}{m-1} \Rightarrow e = \frac{3 \cdot (m-1)}{2 \cdot (m-1)} \Rightarrow e = \frac{3}{2} (\text{так как } m \neq 1)$$

2) из 2.1 и 2.2 следует, что $\exists\, e \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, e = 3/2$ – нейтральненько

3.1)$(m, b) \to 2mb - 2m - 2b + 3 = e,$ где $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$2mb - 2m - 2b + 3 = e \Rightarrow 2mb - 2m - 2b + 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow b(2m-2) - 2m = \frac{3}{2} - 3 \Rightarrow b = \frac{-\frac{3}{2} + 2m}{2 \cdot (m-1)}$$

3.2)$(b, m) \to 2bm - 2b - 2m + 3 = e,$ где $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$$2bm - 2b - 2m + 3 = e \Rightarrow 2mb - 2m - 2b + 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow b(2m-2) - 2m = \frac{3}{2} - 3 \Rightarrow b = \frac{-\frac{3}{2} + 2m}{2 \cdot (m-1)}$$

3) при $b = 1$ решений нет $\Rightarrow b \neq 1$, а также исходя из 3.1 и 3.2 $\exists\, b \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ – обратименько

2. Найдите все элементы порядка 20 в группе $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\times)$.

G – группа и $g \in G$.

$M(g) = \{n \in N \mid g^n = e\}$

Порядок g — это $ord(g) = \begin{cases} \min M(g), M(g) \neq 0 \\ \infty, M(g) = \emptyset \end{cases}$

Другим словами нужно найти решения уравнения $g^{20} = 1$, при $g^n \neq i \ \forall n \in \mathbb{N} < 20$.

Это числа вида $e^{\left(\frac{\pi k}{10}\right)i}$, при $k = 0, \dots, 19$. А так как $g^n \neq i \ \forall n \in \mathbb{N} < 20$, то НОД$(k, 20) = 1$. Предположим, что НОД$(k, 20) = x \neq 1 \Rightarrow k$ представимо в виде произведения каких $-$ то x и y(при $y < 20$). То есть

$$g = e^{\left(\frac{2\pi xy}{20}\right)i} = e^{\left(\frac{2\pi yz}{w}\right)i} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{z}{w}, \text{а} \begin{cases} z < x \\ w < 20 \end{cases} \Rightarrow g^w = e^{2\pi yz} = 1, \text{однако } w < 20 \Rightarrow \text{противоречие.}$$

Значит $e^{\left(\frac{\pi k}{10}\right)i}$, при $k = 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$

3. Найдите все левые и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $< \sigma >$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

То есть $H =< (124) > = \{id, (124), (142)\}$.

Известно, что $|A_4| = 12$, а $|H| = 3 \Rightarrow$ число смежных классов $=$ число правых(левых)смежных классов $= \frac{12}{3} = 4$.

Найдем левые смежные классы:

1)$eH = H = \{id, (124), (142)\}$
2)$(123)H = \{(123), (123)(124), (123)(142)\} = \{(123), (13)(24), (143)\}$
3)$(132)H = \{(132), (132)(124), (132)(142)\} = \{(132), (243), (14)(23)\}$
4)$(134)H = \{(134), (134)(124), (134)(142)\} = \{(134), (12)(34), (234)\}$

Найдем правые смежные классы:

1)$He = H = \{id, (124), (142)\}$
2)$H(123) = \{(123), (124)(123), (142)(123)\} = \{(123), (14)(23), (234)\}$
3)$H(132) = \{(132), (124)(132), (142)(132)\} = \{(132), (134), (13)(24)\}$
4)$H(134) = \{(134), (124)(134), (142)(134)\} = \{(134), (13)(24), (132)\}$

4. Докажите, что всякая подгруппа циклической группы является циклической.

Пусть $G =< g >$ циклическая группа, пораждаемая элементом g, бесконечная или конечная $\begin{pmatrix} |G| < \infty \\ |G| > \infty \end{pmatrix}$
и H — подгруппа G. Будем считать, что H содержит больше, чем один элемент(теорема для единичной подгруппы очевидна). Предположим, что g^k — наименьшая положительная степень нашего элемента g, т. ч. g^k
$\in H$ (такая степень найдется в любом случае, так как если в $H \ \exists \ g^{-s} \neq 1$, то $\exists \ g^s$, обратный к нему).
Пусть $g^l \in H$(при $l \neq 0$), и $k \nmid l$. Значит если $x =$ НОД$(k, l) > 0$, то $\exists \ m, n \in \mathbb{Z}$, такие что:
$km + ln = d$, отсюда $(g^k)^m \cdot (g^l)^n = g^d \in H$, однако $d < k \Rightarrow$ противоречие и $H =< g^k >$.