1. Определите все значения параметра $b \in \mathbb{R}$, при которых многочлен $f = x^3y + bxy^3z^2$ принадлежит идеалу $I = \left(\underbrace{x^2 + 2y^2}_{i_1}, \underbrace{xz - y}_{i_2}\right)$ кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$.

<u>Решение.</u>

$S(i_1, i_2) = i_1 \cdot z - i_2 \cdot x = x^2z + 2y^2z - x^2z + xy = \underbrace{2y^2z + xy}_{i_3}$ – дальше не редуцируется.

$S(i_1, i_3) = i_1 \cdot y - i_3 \cdot x = x^2y + 2y^3 - x^2y - 2xy^2z = 2y^3 - 2xy^2z \xrightarrow[]{\overset{i_3}{2y^2}} 2y^3 - 2xy^2z + 2xy^2z + 2y^3 = 0;$

$S(i_2, i_3) = i_2 \cdot y - i_3 \cdot z = xyz - y^2 - xyz - 2y^2z^2 = \underbrace{-y^2 - 2y^2z^2}_{i_4}$ – дальше не редуцируется.

$GCD(i_1, i_4) = 1$ – мегахарош.

$S(i_2, i_4) = i_2 \cdot 2y^2z - i_4 \cdot x = 2xy^2z^2 - 2xy^3z - 2xy^2z^2 - xy^2 = -2y^3z - y^2x \xrightarrow{\overset{i_3}{y}} -2y^3z - y^2x + xy^2 + 2y^3z = 0;$

$S(i_3, i_4) = i_3 \cdot 2yz^2 - i_4 \cdot x = 2xy^2z^2 + 4y^3z^3 - 2xy^2z^2 - xy^2 = -xy^2 + 4y^3z^3 \xrightarrow{\overset{i_3}{y}} 4y^3z^3 + 2y^3z \xrightarrow{\overset{i_4}{-2yz}} 0;$

$\begin{cases} i_1 = x^2y + 2y^2 \\ i_2 = xz - y \\ i_3 = xy + 2y^2z \\ i_4 = 2y^2z^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow$ базис Грёбнера в I.

А мы знаем, что $i \in I \Leftrightarrow i$ редуцируется в нолик.

Тогда:

$f = x^3y + bxy^3z^2 \xrightarrow{\overset{i_3}{-xy}} bxy^3z^2 - 2xy^3 \xrightarrow{\overset{i_2}{-by^3z}} bxy^3z^2 - 2xy^3 - bxy^3z^2 + by^4z = -2xy^3 + by^4z \xrightarrow{\overset{i_3}{+2y^2}} -2xy^3 + by^4z + 2xy^3 + 4y^4z =$

$= (b+4)y^4z,$ при $b \neq -4 \Rightarrow$ не редуцируется $\Rightarrow b = -4$.

2. Найдите минимальный редуцированный базис Грёбнера в идеале

$$(xy + 2yz, x - y^2, yz^2 - y) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$$

относительно лексикографического порядка, задаваемого условием $z > x > y$.

<u>Решение.</u>

$I = (i_1, i_2, i_3) = (xy + 2yz, x - y^2, yz^2 - y)$

$S(i_1, i_2) = i_1 \cdot x - i_2 \cdot 2zy \to$ не редуцируется, так как $GCD(2zy, x) = 1$;

$S(i_2, i_3) \to$ не редуцируем(см. выше)

$S(i_1, i_3) = i_1 \cdot z - i_3 \cdot 2 = zxy + 2y \xrightarrow{\overset{i_1}{-\frac{1}{2}x}} zxy + 2y - zxy - \frac{1}{2}x^2y = 2y - \frac{1}{2}x^2y \xrightarrow{\overset{i_2}{\frac{1}{2}xy}} 2y - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^3 = 2y - \frac{1}{2}xy^3 \xrightarrow{\overset{i_2}{\frac{1}{2}y^3}}$

$\xrightarrow{\overset{i_2}{\frac{1}{2}y^3}} 2y - \frac{1}{2}xy^3 + \frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{2}y^5 = 2y - \frac{1}{2}y^5$ – дальше не редуцируется $\to \underbrace{y^5 - 4y}_{i_4}$

$$S(i_1, i_4) = i_1 \cdot y^4 - i_4 \cdot 2z = 2zy^5 + xy^5 - 2zy^5 + 8zy = 8zy + xy^5 \xrightarrow[]{\overset{i_1}{-4}} xy^5 - 4xy \xrightarrow{\overset{i_2}{-y^5}} -4xy + y^7 \xrightarrow{\overset{i_2}{+4y}} y^7 - 4y^3 \xrightarrow{\overset{i_4}{-y^2}} 0$$

$S(i_2, i_4) \rightarrow$ не редуцируется, так как $GCD(L_2, L_4) = 1$;

$$S(i_3, i_4) = i_3 \cdot y^4 - i_4 \cdot z^2 = z^5y^5 - y^5 - z^2y^5 + 4z^2y = 4z^2y - y^5 \xrightarrow{\overset{i_3}{-4}} -y^5 + 4y \xrightarrow{i_4} 0$$

$$\begin{cases} i_1 = xy + 2yz \\ i_2 = x - y^2 \\ i_3 = yz^2 - y \\ i_4 = y^5 - 4y \end{cases} \Rightarrow \text{базис Грёбнера}$$

Можно выпинуть $i_3 \Rightarrow L(i_1) \mid L(i_3)$

$$\begin{cases} i_1 = xy + 2yz \xrightarrow{\overset{i_2}{-y}} 2zy + y^3 \\ i_2 = x - y^2 \\ i_4 = y^5 - 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1' = zy + \dfrac{1}{2}y^3 \\ i_2' = x - y^2 \\ i_3' = y^5 - 4y \end{cases} - \text{МРБГ}$$

3. Дан идеал $I = \left(\underbrace{x^2y + 2xz + z^2}_{i_1}, \underbrace{yz - 1}_{i_2}\right) \subseteq \mathbb{R}[x, y, z]$. Найдите порождающую систему для иделал систему для иделала $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ кольца $\mathbb{R}[x, y]$.

<u>Решение.</u>

$$S(i_1, i_2) = i_1 \cdot z - i_2 \cdot x^2x^2yz + 2xz^2 + z^3 - x^2yx + x^2 = \underbrace{x^2 + 2xz^2 + z^3}_{i_3}$$

$$S(i_1, i_3) = i_1 - i_3 \cdot y = x^2y + 2xz + z^2 - x^2y - 2xyz^2 - yz^3 = 2xz + z^2 - 2xyz^2 - yz^3 =$$

$$= -2xyz^2 + 2xz - yz^3 + z^2 \xrightarrow{\overset{i_2}{+2xz}} 2xz - yz^3 + z^2 - 2xz = -yz^3 + z^2 \xrightarrow{\overset{i_2}{+z^2}} 0$$

$S(i_2, i_3) \rightarrow$ не редуцируется, так как $GCD(L_2, L_3) = 1$;

$$\begin{cases} i_1 = x^2y + 2xz + z^2 \\ i_2 = yz - 1 \\ i_3 = x^2 + 2xz^2 + z^3 \end{cases} \Rightarrow \text{базис Грёбнера} \Rightarrow I \cap \mathbb{R}[x, y] = \emptyset.$$

4. Найдите конечный базис Грёбнера (относительно стандартного лексикографического порядка, задаваемого условием $x > y > z$) для идеала I кольца $\mathbb{R}[x, y, z]$, где

$$I = \{f \in \mathbb{R}[x, y, z] \mid f(a, a + 1, a^2 - 2a) = 0 \text{ для всех } a \in \mathbb{R}\}.$$