Определение. Кольцо — это множество R, на котором заданы две бинарные операции: "+" и " $\cdot$ " (сложение и умножение), удовлетворяющие следующим условиям (аксиомам):

1) $(\mathrm{R}, +)$ — абелева группа
2) $\forall a, b, c \in R: \begin{cases} a(b+c) = ab + ac \\ (a+b)c = ac + bc \end{cases}$ то есть две дистрибутивности
3) $\forall a, b, c \in R: (ab)c = (ab)c = a(bc)$, то есть ассоциативность умножения
4) $\exists\ 1 \in \mathrm{R} : \mathrm{a} \cdot 1 = 1 \cdot a = a\ \forall a \in R$, то есть единичный элемент

Определение. Элемент $a \in R$ называется нильпотентным (или нильпотентом), если $a \neq 0$ и существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a^n = 0$.

1. Найдите все обратимые элементы, все делители нуля (левые и правые) и все нильпотентные элементы в кольце $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ с обычными операциями сложения и умножения.

Для начала проверим обратимость нашей матрицы, вычислив определитель: $a \cdot c - b \cdot 0 = ac \neq 0$. При условии, что a и c не равны нулю, обратная матрица выглядит: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ -b/ac & 1/c \end{pmatrix} \in R$. То есть обратимые элементы — это матрицы вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, при $a \neq 0, c \neq 0$

Теперь найдем все делители нуля. $AA_1 = 0$, где A и A_1 ненулевые матрицы из нашего кольца. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ и $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ и либо $a = 0$, либо $\mathrm{c} = 0$.

Для левых делителей:

1) Пусть $a = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 b + b_1 c & cc_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 0$, а $a_1 b = -b_1 c$. Значит матрицы имеют вид $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ c \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \\ b \neq 0 \neq c \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{— левые делители нуля}$$

2) Пусть $c = 0$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 & 0 \\ a_1 b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = 0$. Значит матрицы имеют вид $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ a \neq 0 \neq b \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{— левые делители нуля}$$

Значит левые делители нуля это все ненулевые, необратимые матрицы, у которых или первая строка нулевая, или второй столбец нулевой.

<u>Для правых делителей:</u>

1) Пусть $a = 0$

$\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ bc_1 & cc_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = 0.$ Значит матрицы имеют вид $\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & c\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ b_1 & 0\end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}\\ b \neq 0\end{cases} \\ \begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\\ c \neq 0\end{cases} \\ \begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & c\end{pmatrix}\\ b \neq 0 \neq c\end{cases}\end{array}\right. \quad - \text{правые делители нуля}$$

2) Пусть $c = 0$

$\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}aa_1 & 0\\ ab_1 + bc_1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = 0$ и $ab_1 = -bc_1.$ Значит матрицы имеют вид $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}\\ b \neq 0\end{cases} \\ \begin{cases}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ a \neq 0\end{cases} \\ \begin{cases}\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 0\end{pmatrix}\\ a \neq 0 \neq b\end{cases}\end{array}\right. \quad - \text{правые делители нуля}$$

Значит правые делители нуля это все ненулевые, необратимые матрицы, у которых или
первая строка нулевая, или второй столбец нулевой.

Теперь найдем все нильпотентные элементы. Когда матрицы перемножаются $-$ перемножаются и диагональные элементы: $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2 & 0\\ ab + bc & c^2\end{pmatrix}$

Тогда у нильпотентной матрицы $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & c\end{pmatrix}$ и $a = 0$, и $c = 0$, то есть $\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $-$ нильпотентная матрица.

2. Докажите, что идеал $(x, y-2)$ в кольце $\mathbb{R}[x, y]$ не является главным.

Уже по проверенной схеме предположим, что идеал $(x, y-2) = \{f_1 x + f_2(y-2) \mid f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x, y]\}$ является главным и постараемся придти к противоречию.

То есть $(x, y-2) = (f) \Rightarrow$ все многочлены в $(x, y-2)$ делятся на f. Тогда $\begin{cases}(x, y-2) \ni x\\ (x, y-2) \ni y-2\end{cases} \Rightarrow f \mid x$ и $f \mid y-2$.

Значит степень f не больше единицы. Если же $\deg f = 1$, то $f = c\cdot x$, однако $c \cdot x \nmid y-2 \Rightarrow f -$ ненулевая константа c_0.

Заметим, что c_0 $-$ обративый элемент в кольце $\mathbb{R}[x, y]$, а мы знаем, что главный идеал, порождаемый обратимым элементом $-$ это и есть всё кольцо.

$(x, y-2) = (c_0) = \mathbb{R}[x, y]$.

Пусть $1 \in (x, y-2)$. Тогда $1 = f_1 x + f_2(y-2)$, а взяв $x = 0, y = 2$, получим $1 = 0 -$ первое противоречие, и $1 \notin (x, y-2)$, а также $(x, y-2) \subsetneq \mathbb{R}[x, y]$ — тоже противоречие.

3. При помощи теоремы о гомоморфизме для колец установите изоморфизм $\mathbb{C}[x]/(2x^2 - x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, где $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \{(z_1, z_2) | z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ кольцо с покомпонентными операциями сложения и умножения.

Построим следующее отображение φ:

$$\mathbb{C}[x] \to (\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2), \qquad f \to \left(f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \quad - \text{ гомоморфизм, так как:}$$

$$\begin{cases} \varphi(f + f_1) = \varphi\left(\left(f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \left(f_1(0), f_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \varphi(f) + \varphi(f_1) \\ \varphi(f \cdot f_1) = \varphi\left(\left(f(0), f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(f_1(0), f_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) = \varphi(f) \cdot \varphi(f_1) \end{cases}, \qquad \forall f, f_1 \in \mathbb{C}\,[x]$$

А многочлен $(2x^2 - x)$ — ядро этого гомоморфизма, так как:

$$\varphi(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow Ker\ \varphi = \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) = (2x^2 - x)$$

То есть любой паре $(\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2)$ сопоставляется многочлен вида $2(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)x + \mathbb{C}_1$. Также $(\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2) = \varphi(2(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1)x + \mathbb{C}_1)$, значит $\mathbb{C}[x]/(2x^2 - x) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

4. Пусть R — коммутативное кольцо и $I \lhd R$. Докажите, что факторкольцо R/I является полем тогда и только тогда, когда $I \neq R$ и не существует собственного идеала $J \lhd R$ с условием $I \subsetneq J$.