1. Сколько элементов порядков 2, 3, 6 и 9 в группе $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_9$?

Порядок 2.

$x = (a, b, c)$ имеет порядок 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} (2a, 2b, 2c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \end{cases}$

$2a = 0 \rightarrow 2$ варианта в $\mathbb{Z}_2$, которые при умножении на два дают ноль. $\{0,1\}$
$2b = 0 \rightarrow 2$ варианта в $\mathbb{Z}_6$, которые при умножении на два дают ноль. $\{0,3\}$
$2c = 0 \rightarrow 1$ вариант в $\mathbb{Z}_9$, который при умножении на два дает ноль. $\{0\}$

$2x = 0$: всего $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ решений. $x = 0$ не подходит, так как порядок 1.
Итого: $4 - 1 = 3$ варианта порядка 2.

Порядок 3.

$x = (a, b, c)$ имеет порядок 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} (3a, 3b, 3c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \end{cases}$

$3a = 0 \rightarrow 1$ вариант в $\mathbb{Z}_2$, который при умножении на три дает ноль. $\{0\}$
$3b = 0 \rightarrow 3$ варианта в $\mathbb{Z}_6$, которые при умножении на три дают ноль. $\{0,2,4\}$
$3c = 0 \rightarrow 3$ варианта в $\mathbb{Z}_9$, которые при умножении на три дают ноль. $\{0,3,6\}$

$3x = 0$: всего $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ решений. $x = 0$ не подходит, так как порядок 1.
Итого: $9 - 1 = 8$ вариантов порядка 3.

Порядок 6.

$x = (a, b, c)$ имеет порядок 6 $\Leftrightarrow \begin{cases} (6a, 6b, 6c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \\ (2a, 2b, 2c) \neq 0 \\ (3a, 3b, 3c) \neq 0 \end{cases}$

$6a = 0 \rightarrow 2$ варианта в $\mathbb{Z}_2$, которые при умножении на шесть дают ноль. $\{0,1\}$
$6b = 0 \rightarrow 6$ вариантов в $\mathbb{Z}_6$, которые при умножении на шесть дают ноль. $\{0,1,2,3,4,5\}$
$6c = 0 \rightarrow 3$ варианта в $\mathbb{Z}_9$, которые при умножении на шесть дают ноль. $\{0,3,6\}$

$6x = 0$: всего $2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$ решений.
$x = 0$ не подходит, так как порядок 1
$2x = 0$ не подходит, так как порядок 2
$3x = 0$ не подходит, так как порядок 3

Итого: $36 - 1 - 3 - 8 = 24$ варианта порядка 6.

Порядок 9.

$x = (a, b, c)$ имеет порядок 9 $\Leftrightarrow \begin{cases} (9a, 9b, 9c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \\ (3a, 3b, 3c) \neq 0 \end{cases}$

$9a = 0 \rightarrow 1$ вариант в $\mathbb{Z}_2$, который при умножении на девять дает ноль. $\{0\}$
$9b = 0 \rightarrow 3$ варианта в $\mathbb{Z}_6$, которые при умножении на девять дают ноль. $\{0,2,4\}$
$9c = 0 \rightarrow 9$ вариантов в $\mathbb{Z}_9$, которые при умножении на девять дают ноль. $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$9x = 0$: всего $1 \cdot 3 \cdot 9 = 27$ решений.
$x = 0$ не подходит, так как порядок 1
$3x = 0$ не подходит, так как порядок 3

Итого: $27 - 1 - 8 = 18$ вариантов порядка 9.

2. Сколько подгрупп порядков 7 и 14 в нециклической абелевой группе порядка 98?

Абелева группа порядка $98 = 2 \cdot 7^2$. Разложим группу в прямое произведение примарных циклических групп:

1) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7 = A$.
2) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{49} \simeq \mathbb{Z}_{98} \leftarrow$ циклическая группа. $\text{НОД}(2,49) = 1$.

Если $|G| = p$, то G – цикл.

Подгруппа порядка $7 \simeq \mathbb{Z}_7$. То есть нас интересуют цикл. подгруппы порядка 7.

$$x = (a, b, c) \text{ имеет порядок } 7 \Leftrightarrow \begin{cases} (7a, 7b, 7c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \end{cases}$$

$7a = 0 \to 1$ вариант: $\{0\}$
$7b = 0 \to 7$ вариантов: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$
$7c = 0 \to 7$ вариантов: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$7x = 0$: всего $1 \cdot 7 \cdot 7 = 49$ решений.
$x = 0$ не подходит, так как порядок 1

Итого: $49 - 1 = 48$

Но возможно и такое, что разные элементы порядка 7 будут порождать одинаковые подгруппы порядка 7.
Подгруппа порядка $7 \simeq \mathbb{Z}_7$:

элемент	0	1	2	3	4	5	6
порядок	1	7	7	7	7	7	7

Подгрупп порядка 7 содержит 6 элементов порядка 7.

Итого подгрупп порядка 7 будет $\dfrac{48}{6} = 8$.

Подгруппа порядка $14 = 2 \cdot 7 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7 \simeq \mathbb{Z}_{14}$. То есть нас интересуют цикл. подгруппы порядка 14.

$$x = (a, b, c) \text{ имеет порядок } 14 \Leftrightarrow \begin{cases} (14a, 14b, 14c) = 0 \\ (a, b, c) \neq 0 \\ (2a, 2b, 2c) \neq 0 \\ (7a, 7b, 7c) \neq 0 \end{cases}$$

$14a = 0 \to 2$ варианта: $\{0,1\}$
$14b = 0 \to 7$ вариантов: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$
$14c = 0 \to 7$ вариантов: $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$14x = 0$: всего $2 \cdot 7 \cdot 7 = 98$ решений.
$x = 0, \qquad 2x = 0, \qquad 7x = 0$ не подходят, так как порядки 1, 2, 7 соответственно.

Итого: $98 - 1 - 1 - 48 = 48$

элемент	0	1	2	3	4	5	6
порядок	1	14	7	14	7	14	7
элемент	7	8	9	10	11	12	13
порядок	2	7	14	7	14	7	14

Подгрупп порядка 14 содержит 6 элементов порядка 14.

Итого подгрупп порядка 14 будет $\frac{48}{6} = 8$.

3. При каком наименьшем $n \in \mathbb{N}$ группа $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ изоморфна прямому произведению n циклических групп?

Разложим группу в прямое произведение циклических групп взаимно простых порядков:

$\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} = \mathbb{Z}_{2\cdot 5} \times \mathbb{Z}_{3\cdot 4} \times \mathbb{Z}_{3\cdot 5} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3) \times (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$

То есть сейчас $n = 2$ и нужно проверить, что меньше быть не может.
Необходимым и достаточным условием для цикличности произведения является взаимная простота порядков сомножителей, а НОД$(30,60) \neq 1$, поэтому и $n \neq 1$.

4. Пусть k — наибольший порядок элементов конечной абелевой группы A. Докажите, что порядок любого элемента A делит k.