1. Пусть G — группа всех невырожденных нижнетреугольных (2×2) — матриц с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Докажите, что все содержащиеся в G матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ образуют нормальную подгруппу в G.

Пусть существует гомоморфизм $\varphi: G \to F$.
Ядро гомоморфизма φ — это множество $Ker\ \varphi \coloneqq \{g \in G \mid \varphi(g) = e_F\} \subseteq G$.
$Ker\ \varphi$ — нормальная подгруппа в G.

Построим следующее отображение: каждой нашей нижнетреугольной матрице будем сопоставлять её элемент a_{11}, т. е. $\varphi: G \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $e_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} = 1$. Получается, что матрицы вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ — это и есть ядро нашего гомоморфизма φ, так как у них $a_{11} = 1$. Глобальный вывод:
матрицы из условия образуют нормальную подгруппу в G.

2. Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{15}$ в группу $\mathbb{Z}_{20}$.

Отображение $\varphi: G \to F$ называется гомоморфизмом, если $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ для любых $a, b \in G$.

$\varphi\colon\ \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{20}$ — гомоморфизм $\Leftrightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)\ \ \forall x, y \in \mathbb{Z}_{15}$

$\varphi(0)$ очевидно $-\ 0$, тогда пусть $\varphi(1) = a$.

Необходимое условие:

$\varphi(k) = k \cdot a,$ значит

Условие корректности:

$\varphi(x) = \varphi(x + 15k)\ \forall k, x \in \mathbb{Z}$

$x \cdot a = \varphi(x) + \varphi(15k) = x \cdot a + 15k \cdot a \Leftrightarrow\ 15k \cdot a \equiv 0\ (mod\ 20) \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 15a \equiv 0\ (mod\ 20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15a \vdots 20 \Leftrightarrow 3a \vdots 4 \Leftrightarrow a \vdots 4 \Leftrightarrow a \in \{0, 4, 8, 12, 16\}$

Выпишем эти гомоморфизмы:

1) $\varphi(x) = 0x\ \ \forall x$
2) $\varphi(x) = 4x\ \ \forall x$
3) $\varphi(x) = 8x\ \ \forall x$
4) $\varphi(x) = 12x\ \ \forall x$
5) $\varphi(x) = 16x\ \ \forall x$

3. Пусть H — подгруппа всех элементов конечного порядка в группе $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \times)$. Докажите, что $H \simeq \dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, где группы $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}$ рассматриваются с операцией сложения.

4. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

(1) m, n взаимно просты;

(2) для всякой группы G, всякой подгруппы $A \subseteq G$ порядка m и всякой подгруппы $B \subseteq G$ порядка n выполняется условие $A \cap B = \{e\}$.

(1) $\rightarrow$ (2)

Если $x^m = 1$ и $x^n = 1$, то $x = 1$, при НОД$(m, n) = 1$ (по следствию Теоремы Лагранжа).

(2) $\rightarrow$ (1)

Пусть НОД$(m, n) \neq 1$, тогда рассмотрим циклическую группу порядка mn.
Пусть x порождает эту группу, тогда $A =< x^m >$ порядка m, $B =< x^n >$ порядка n,
а $A \cap B$ по подгруппе, с порождающим элементом $x^{\text{НОК}(m,n)}$ порядка, равного НОД(m, n).