1. Найдите наибольший общий делитель многочленов $f, g \in K[x]$, а также его линейного выражение через f и g в следующих случаях:

(а) $K = \mathbb{R}$, $\quad f = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$, $\quad g = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x - 2$;
(б) $K = \mathbb{Z}_5$, $\quad f = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4$, $\quad g = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1$.

<u>Решение.</u>

a) Прямым ходом Алгоритма Евклида найдем наибольший общий делитель многочленов f, g:

$$\begin{array}{l|l} x^5+x^4-x^3-2x-1 & 3x^4-2x^3+x^2-2x-2 \\ \cline{2-2} 3x^5-2x^4+x^3-2x^2-2x & 1/3x+5/9 \\ \hline 5/3x^4-4/3x^3+2/3x^2-4/3x-1 & \\ 5/3x^4-10/9x^3+5/9x^2-10/9x-10/9 & \\ \hline -2/9x^3+1/9x^2-2/9x+1/9 = r_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^4-2x^3+x^2-2x-2 & -2/9x^3+1/9x^2-2/9x+1/9 \\ \cline{2-2} 3x^4-3/2x^3+3x^2-3/2x & -27/2x+9/4 \\ \hline -1/2x^3-2x^2-1/2x-2 & \\ -1/2x^3+1/4x^2-1/2x+1/4 & \\ \hline -9/4x^2-9/4 = r_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} -2/9x^3+1/9x^2-2/9x+1/9 & -9/4x^2-9/4 \\ \cline{2-2} -2/9x^3-2/9x & 8/81x-4/81 \\ \hline 1/9x^2+1/9 & \\ 1/9x^2+1/9 & \\ \hline 0 = r_3 & \end{array}$$

$f = (1/3x + 5/9) \cdot g + \underbrace{\left(-2/9x^3 + 1/9x^2 - 2/9x + 1/9\right)}_{r_1}$

$g = (-27/2x + 9/4) \cdot r_1 + (-9/4x^2 - 9/4)$

Значит НОД$(f, g) = -9/4x^2 - 9/4$, так как это последний ненулевой делитель.

Теперь обратным ходом алгоритма Евклида найдем его линейное выражение через f и g:

НОД$(f, g) = -9/4x^2 - 9/4 = g - \left(f(-27/2x + 9/4) - g(1/3x + 5/9)(-27/2x + 9/4)\right) = -f(-27/2x + 9/4) + g(1 + (1/3x + 5/9)$
$(-27/2x + 9/4))$

b) Прямым ходом Алгоритма Евклида найдем наибольший общий делитель многочленов f, g:

$$\begin{array}{l|l} x^5+2x^4+4x^3+2x^2+4 & 3x^3+4x^2+4x+1 \\ \cline{2-2} x^5+3x^4+3x^3+2x^2 & 2x^2+3x+3 \\ \hline 4x^4+x^3+4 & \\ 4x^4+2x^3+2x^2+3x & \\ \hline 4x^3+3x^2+2x+4 & \\ 4x^3+2x^2+2x+3 & \\ \hline x^2+1 = r_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3+4x^2+4x+1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} 3x^3+3x & 3x+4 \\ \hline 4x^2+x+1 & \\ 4x^2+4 & \\ \hline x+2 = r_2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2+1 & x+2 \\ \cline{2-2} x^2+2x & x+3 \\ \hline 3x+1 & \\ 3x+1 & \\ \hline 0 = r_3 & \end{array}$$

$f = (2x^2 + 3x + 3)g + (x^2 + 1)$

$g = (3x + 4)r_1 + (x + 2)$

НОД$(f, g) = x + 2$, так как это последний ненулевой делитель.

Теперь обратным ходом алгоритма Евклида найдем его линейное выражение через f и g:

НОД$(f, g) = x + 2 =$
$g - (3x + 4)r_1 - g - (3x + 4)\left(f - (2x^2 + 3x + 3)g\right) = g - 3fx - 4f + 3gx(2x^2 + 3x + 3) + 4g(2x^2 + 3x + 3) =$
$= (x^3 + 2x^2 + x + 3)g + (2x + 1)f$

2. Разложите многочлен f в произведение неприводимых в кольце $K[x]$ в следующих случаях:

(а) $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\quad f = x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12$;
(б) $K = \mathbb{Z}_5$, $\quad f = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3$.

<u>Решение.</u>

a) $x^5 + 2x^3 - 6x^2 - 12 = x^3(x^2 + 2) - 6(x^2 + 2) = (x^2 + 2)(x^3 - 6) = (x^2 + 2)\left(x - \sqrt[3]{6}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{6}x + 6^{2/3}\right)$

Рассмотрим все по — отдельности:

1) $(x^3 - 6) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$ — единственный корень в $\mathbb{R}$.

2) $(x^2+2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}i \\ x=-\sqrt{2}i \end{array}\right.$

3) $\left(x^2+\sqrt[3]{6}x+6^{2/3}\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\sqrt[3]{6}+\sqrt[6]{972}i}{2} \\ x=\dfrac{-\sqrt[3]{6}-\sqrt[6]{972}i}{2} \end{array}\right.$

То есть разложение f в $\mathbb{C}$ имеет вид:

$$f=\left(x-\sqrt{2}i\right)\left(x+\sqrt{2}i\right)\left(x-\frac{-\sqrt[3]{6}+\sqrt[6]{972}i}{2}\right)\left(x-\frac{-\sqrt[3]{6}-\sqrt[6]{972}i}{2}\right)\left(x-\sqrt[3]{6}\right)$$

$b)\ f=x^5+3x^4+x^3+x^2+3$

$\{0,1,2,3,4\}$ – все возможные корни в $\mathbb{Z}_5$.

$f(0)=0+3\cdot 0+0+0+3=3;$

$f(1)=1+3+1+1+3=4;$

$f(2)=32+48+8+4+3=0$ – является корнем f;

$f(3)=f(-2)=-32+48-8+4+3=0$ – является корнем f;

$f(4)=f(-1)=-1+3-1+1+3=0$ – является корнем f;

$$\begin{array}{l|l} x^5+3x^4+x^3+x^2+3 & x-2 \\ \hline x^5-2x^4 & x^4+x^2+3x+1 \\ \quad x^3+x^2+3 & \\ \quad x^3-2x^2 & \\ \quad\quad 3x^2+3 & \\ \quad\quad 3x^2-6x & \\ \quad\quad\quad x+3 & \\ \quad\quad\quad x-2 & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} x^4+x^2+3x+1 & x+2 \\ \hline x^4+2x^3 & x^3+3x^2+3 \\ \quad 3x^3+x^2+3x+1 & \\ \quad 3x^3+x^2 & \\ \quad\quad 3x+1 & \\ \quad\quad 3x+1 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} x^3+3x^2+3 & x+1 \\ \hline x^3+x^2 & x^2+2x+3=g \\ \quad 2x^2+3 & \\ \quad 2x^2+2x & \\ \quad\quad 3x+3 & \\ \quad\quad 3x+3 & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

Убедимся, что корней точно больше нет:

$g(0)=0+2\cdot 0+3=3;$

$g(1)=1+2+3=1;$

$g(2)=4+4+3=1;$

$g(3)=g(-2)=4-4+3=3;$

$g(4)=g(-1)=1-2+3=2;$

То есть разложение f в $\mathbb{Z}_5$ имеет вид:

$$f=(x-2)(x+2)(x+1)(x^2+2x+3)$$

3. Рассмотрим факторкольцо $F=\mathbb{Q}[\mathrm{z}]/\left(\mathrm{z}^3-\mathrm{z}^2-1\right)$ и обозначим через α класс элемента z в нём.
Докажите, что F является полем, и представьте элемент $\dfrac{3\alpha^2-12\alpha+7}{\alpha^2-3\alpha+1}\in F$ в виде $f(\alpha)\in\mathbb{Q}[\mathrm{z}]$ и $\deg f\le 2$.

Решение.

Для начала проверим, что $z^3-z^2-1=h$ неприводим, то есть $\deg h\ge 1$(уже нормик) и h нельзя представить в виде $h=h_1\cdot h_2$, где $\deg h_i<\deg h$.

Пусть h все – таки можно представить в виде $h=h_1\cdot h_2$, то есть существуют такие корни, что:

$\begin{cases} h = (x - h_1)(x^2 - bx + c) \\ h = (x - h_1)(x - h_2)(x - h_3) \end{cases} \Rightarrow z^3 - z^2 - 1 = 0$ и существуют рациональные корни, то есть корень h_0

имеет вид $h_0 = \dfrac{p}{q}$, при НОД$(p, q) = 1$.

$p \mid h_0$ и $q \mid h_n \Rightarrow q = 1$ и $p = \pm 1$. То есть:

$$\left(\frac{1}{1}\right)^3 - \left(\frac{1}{1}\right)^2 - 1 = 1 - 1 - 1 = -1$$

$$\left(-\frac{1}{1}\right)^3 - \left(-\frac{1}{1}\right)^2 - 1 = -1 - 1 - 1 = -3$$

$\Rightarrow$ можно сделать вывод, что рациональных корней нет $\Rightarrow z^3 - z^2 - 1$ – неприводим.

$\Rightarrow \mathbb{Q}[\mathrm{z}]/(\mathrm{z}^3 - \mathrm{z}^2 - 1)$ – поле.

$F = \{b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 | b_i \in \mathbb{Q}\}$

$\alpha^3 - \alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = \alpha^2 + 1$

$$\frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = A\alpha^2 + B\alpha + C \Rightarrow 3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = (A\alpha^2 + B\alpha + C)(\alpha^2 - 3\alpha + 1)$$

$$3\alpha^2 - 12\alpha + 7 = A\alpha^4 - 3A\alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha^3 - 3B\alpha^2 + B\alpha + C\alpha^2 - 3C\alpha + C =$$

$$\begin{aligned}
&= A\alpha^4 + (B - 3A)\alpha^3 + (A - 3B + C)\alpha^2 + (B - 3C)\alpha + C \\
&= \alpha(\alpha^2 + 1)A + (B - 3A)\alpha^3 + (A - 3B + C)\alpha^2 + (B - 3C)\alpha + C \\
&= \alpha^3(B - 2A) + (A - 3B + C)\alpha^2 + (A + B - 3C)\alpha + C - (\alpha^2 + 1)(B - 2A) + \alpha^2(A + C - 3B) + \alpha(B - 3C + A) + C \\
&= \alpha^2(-A - 2B + C) + \alpha(A + B - 3C) + (-2A + B + C)
\end{aligned}$$

$$\alpha^2(-A - 2B + C) + \alpha(A + B - 3C) + (-2A + B + C) = 3\alpha^2 - 12\alpha + 7$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -12 \\ -2 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{3\alpha^2 - 12\alpha + 7}{\alpha^2 - 3\alpha + 1} = -\alpha^2 + \alpha + 4$$

4. Пусть K – поле и $h \in K[x]$ – многочлен положительной степени. Докажите, что всякий ненулевой необратимый элемент факторкольца $K[x]/(h)$ является делителем нуля.

Решение.

Если h – неприводимый многочлен, то $K[x]/(h)$ – поле, а значит там нет ненулевых необратимых элементов.

Значит рассматриваем случай, когда h – приводимый многочлен, представимый:

$h = h_1 \cdot h_2 \cdot \ldots \cdot h_n$, при $\deg h_i < \deg h$.

$\bar{f} = \bar{0} \Leftrightarrow f \vdots h$, то есть все делители нуля задаются смежными классами $\bar{f}$ и $\bar{g}$, при условии, что

ни f, ни g не делится на h, однако $fg \vdots h \Rightarrow$ то есть один из них делится на произведение нескольких

h_i, а второй – на оставшиеся.

Если какой то смежный класс $\bar{k}$ обратим в факторкольце, то $\exists\, \bar{m}$, такое что

$\bar{k} \cdot \bar{m} = \overline{k \cdot m} = \bar{1}$, при НОД$(km, f) = 1$.

Значит, ни k, ни m не делятся на произведение h_i.

Если многочлен, по которому мы рассматриваем смежный класс делится на произведение h_i, то берем другой смежный класс, многочлен по которому будет делится на все остальные, значит и их произведение будет делиться на $f \Rightarrow$ это делитель нуля.

Если же многочлен, по которому мы рассматриваем смежный класс не делится на произведение h_i, то он обратим.