1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{3-63\sqrt[3]{7}-8\sqrt[3]{49}}{1-2\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{49}}$ и упростите полученное выражение.

Решение.

$$\frac{3-63\sqrt[3]{7}-8\sqrt[3]{49}}{1-2\sqrt[3]{7}-4\sqrt[3]{49}} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{7}\right)$$

Пусть $\alpha = \underbrace{\sqrt[3]{7}}_{\substack{\text{алгебраический} \\ \text{элемент над } \mathbb{Q} \\ \text{с минимальным} \\ \text{многочленом} \\ h = x^3 - 7}} \Rightarrow$ выражение имеет вид: $\dfrac{3-63\alpha-8\alpha^2}{1-2\alpha-4\alpha^2}$

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{7}\right) \simeq \mathbb{Q}[x]/(h)$$

Тогда $\dfrac{3-63\alpha-8\alpha^2}{1-2\alpha-4\alpha^2} = \beta_0+\beta_1\alpha+\beta_2\alpha^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3-63\alpha-8\alpha^2 = (1-2\alpha-4\alpha^2)(\beta_0+\beta_1\alpha+\beta_2\alpha^2) =$

$$= \beta_0 + \alpha\beta_1 + \alpha^2\beta_2 - 2\alpha\beta_0 - 2\alpha^2\beta_1 - 2\alpha^3\beta_2 - 4\alpha^2\beta_0 - 4\alpha^3\beta_1 - 4\alpha^4\beta_2 =$$

$$(\beta_0) + (\alpha\beta_1 - 2\alpha\beta_0) + (\alpha^2\beta_2 - 2\alpha^2\beta_1 - 4\alpha^2\beta_0) - (-2\alpha^3\beta_2 - 4\alpha^3\beta_1) + (-4\alpha^4\beta_2) \ominus$$

$$\boxed{\alpha^3 = 7}$$

$$\ominus (\beta_0) + (\alpha\beta_1 - 2\alpha\beta_0) + (\alpha^2\beta_2 - 2\alpha^2\beta_1 - 4\alpha^2\beta_0) - (-2\cdot 7\cdot\beta_2 - 4\cdot 7\cdot\beta_1) + (-4\cdot 7\cdot \alpha\beta_2) =$$

$$= \underbrace{(\beta_0 - 28\beta_1 - 14\beta_2)}_{3} + \underbrace{(-2\alpha\beta_0 + \alpha\beta_1 - 28\alpha\beta_2)}_{-63} + \underbrace{(-4\alpha^2\beta_0 - 2\alpha^2\beta_1 + \alpha^2\beta_2)}_{-8}$$

$$\begin{cases} \beta_0 - 28\beta_1 - 14\beta_2 = 3 \\ -2\alpha\beta_0 + \alpha\beta_1 - 28\alpha\beta_2 = -63 \\ -4\alpha^2\beta_0 - 2\alpha^2\beta_1 + \alpha^2\beta_2 = -8 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -28 & -14 & 3 \\ -2 & 1 & -28 & -63 \\ -4 & -2 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{cases} \beta_0 = 3 \\ \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3 - \alpha + 2\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt[3]{7} \quad \Rightarrow \quad 3 - \sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{49}$$

2. Найдите минимальный многочлен для числа $\sqrt{6}-\sqrt{5}-1$ над $\mathbb{Q}$.

Решение.

$$\alpha = \sqrt{6}-\sqrt{5}-1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha+1 = \sqrt{6}-\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha+1)^2 = 11-2\sqrt{30} \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha+1)^2 - 11 = -2\sqrt{30} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left((\alpha+1)^2-11\right)^2 = \left(-2\sqrt{30}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left((\alpha+1)^2-11\right)^2 = 120 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^4+4\alpha^3-16\alpha^2-40\alpha+100 = 120$$

$$f = (\alpha^4+4\alpha^3-16\alpha^2-40\alpha-20) \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

Теперь докажем, что f минимален для α. Для этого достаточно показать, что $\left[\underbrace{\mathbb{Q}[x]}_{\substack{\text{степень} \\ \text{мин.мн}-\text{а}}} : \mathbb{Q}\right] = 4$

Значит нужно проверить, что $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right) : \mathbb{Q}\right] = 4$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right) = k$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) \Rightarrow x^2 - 5$ -аннулирующий многочлен, значит нужно доказать, что $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$.

Пусть $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) \Rightarrow \sqrt{6} = a + b\sqrt{5} \quad \Leftrightarrow \quad 6 = a^2 + 5b^2 + 2\sqrt{5}ab \ \Rightarrow \begin{cases} 6 = a^2 + 5b^2 \\ 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 6 \\ b^2 = \dfrac{6}{5} \end{cases}$ что невыполнимо для $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$

$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) : \mathbb{Q}\right] = 2;$ базис: $1, \sqrt{5}$

$\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right) : \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\right] = 2;$ базис : $1, \sqrt{6}$

Тогда базис $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right)$ – это попарное перемножение базисов, то есть он равен: $1, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{30}$

Теперь проверим, что $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right) = \mathbb{Q}(\alpha)$

$\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \left(\sqrt{6} - \sqrt{5} - 1\right)^2 = 12 - 2\sqrt{30} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \alpha\sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow$

$\sqrt{30}\left(\sqrt{6} - \sqrt{5} - 1\right) = 6\sqrt{5} - 5\sqrt{6} - \sqrt{30} \in \mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\alpha) \\ \sqrt{6} \in \mathbb{Q}(\alpha) \end{cases}$

Вывод: $1, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{30}$ – базис k над $\mathbb{Q}$, лежащий в $\mathbb{Q}(\alpha) \Rightarrow \mathbb{Q}(\alpha) = k$

Значит действительно $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{6}\right) : \mathbb{Q}\right] = 4$

3. Постройте явно поле $\mathbb{F}_8$ и составьте для него таблицы сложения и умножения.

<u>Решение.</u>

$\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_{2^3} \Rightarrow n = 3; p = 2 \Rightarrow$ поле $\mathbb{Z}_2$

Рассмотрим неприводимый многочлен 3 степени: $g = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

$$\mathbb{F}_8 = {}^{\mathbb{Z}_2[x]}\big/_{x^3 + x + 1} = \left\{\underbrace{0}_{f_0}, \underbrace{1}_{f_1}, \underbrace{x+1}_{f_2}, \underbrace{x^2+1}_{f_3}, \underbrace{x^2+x+1}_{f_4}, \underbrace{x}_{f_5}, \underbrace{x^2}_{f_6}, \underbrace{x^2+x}_{f_7}\right\}$$

+	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_5	f_0	f_7	f_6	f_1	f_4	f_3
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$\cdot$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0	f_0
f_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_2	f_0	f_2	f_3	f_6	f_5	f_7	f_4	f_1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

f_1	f_1	f_0	f_5	f_6	f_7	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_5	f_0	f_7	f_6	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_6	f_7	f_0	f_5	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_7	f_6	f_5	f_0	f_3	f_2	f_1
f_5	f_5	f_2	f_1	f_4	f_3	f_0	f_7	f_6
f_6	f_6	f_3	f_4	f_1	f_2	f_7	f_0	f_5
f_7	f_7	f_4	f_3	f_2	f_1	f_6	f_5	f_0

f_1	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_2	f_0	f_2	f_3	f_6	f_5	f_7	f_4	f_1
f_3	f_0	f_3	f_6	f_4	f_7	f_1	f_5	f_2
f_4	f_0	f_4	f_5	f_7	f_2	f_3	f_1	f_6
f_5	f_0	f_5	f_7	f_1	f_3	f_6	f_2	f_4
f_6	f_0	f_6	f_4	f_5	f_1	f_2	f_7	f_3
f_7	f_0	f_7	f_1	f_2	f_6	f_4	f_3	f_5

$$f_2 \cdot f_2 = (x+1)(x+1) = x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1 = f_3$$

$$f_2 \cdot f_3 = (x+1)(x^2+1) = x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 = f_6$$

$$f_2 \cdot f_4 = (x+1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1 = x = f_5$$

$$f_2 \cdot f_5 = (x+1)x = x^2 + x = f_7$$

$$f_2 \cdot f_6 = (x+1)x^2 = x^3 + x^2 = x^2 + x + 1 = f_4$$

$$f_2 \cdot f_7 = (x+1)(x^2+x) = x^3 + x^2 + x^2 + x = 1 = f_1$$

$$f_3 \cdot f_3 = (x^2+1)(x^2+1) = f_4$$

$$f_3 \cdot f_4 = (x^2+1)(x^2+x+1) = f_7$$

$$f_3 \cdot f_5 = (x^2+1)x = f_1$$

$$f_3 \cdot f_6 = (x^2+1)x^2 = f_5$$

$$f_3 \cdot f_7 = (x^2+1)(x^2+x) = f_2$$

$$f_4 \cdot f_4 = (x^2+x+1)(x^2+x+1) = f_2$$

$$f_4 \cdot f_5 = (x^2+x+1)x = f_3$$

$$f_4 \cdot f_6 = (x^2+x+1)x^2 = f_1$$

$$f_4 \cdot f_7 = (x^2+x+1)(x^2+x) = f_6$$

$$f_5 \cdot f_5 = x \cdot x = f_6$$

$$f_5 \cdot f_6 = x \cdot x^2 = f_2$$

$$f_5 \cdot f_7 = x(x^2+x) = f_4$$

$$f_6 \cdot f_6 = x^2 \cdot x^2 = f_7$$

$$f_6 \cdot f_7 = x^2(x^2+x) = f_3$$

$$f_7 \cdot f_7 = (x^2+x)(x^2+x) = f_5$$

4. Пусть $K \subseteq F$ – расширение полей и $\alpha \in F$. Положим $K[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in K[x]\}$. Докажите, что если $K[\alpha]$ конечномерно как векторное пространство над K, то $K[\alpha] = K(\alpha)$.

Решение.