Определения.

$F \subseteq R\backslash\{0\}$ называется <u>системой Грёбнера</u>, если $\forall g \in R$ остаток g относительно F определен однозначно.

<u>S − многочлен:</u>

$f_1, f_2 \in R\backslash\{0\}, \qquad m = LCM(L(f_1), L(f_2)) = m_1 L(f_1) = m_2 L(f_2)$

$S(f_1, f_2) \coloneqq m_1 f_1 - m_2 f_2$

<u>Критерий Бухбергера:</u> следующие условия эквивалентны:

1) F − система Грёбнера;

2) $\forall f_1, f_2 \in F: S(f_1, f_2) \xrightarrow{F} 0$

1. Какие значения может принимать длина убывающей (в лексикографическом порядке) цепочки одночленов от переменных x_1, x_2, x_3 начинающейся с одночлена $x_1 x_2^3 x_3^2$ и заканчивающейся одно − −членом $x_1 x_2^2 x_3^3$?

<u>Решение.</u>

$\begin{cases} \deg x_1 = 1; \\ \left[\begin{array}{l} \deg x_2 = 2\ ; \\ \deg x_2 = 3; \end{array}\right. \end{cases}$ иначе никак, так как получится, что одночлен окажется меньше одночлена, которым завершается цепочка

$x_1 x_2^3 x_3^2 \succ x_1 x_2^3 x_3 \succ x_1 x_2^3 \succ x_1 x_2^2 x_3^n \succ x_1 x_2^2 x_3^{n-1} \succ x_1 x_2^2 x_3^{n-2} \succ \cdots \succ x_1 x_2^2 x_3^3 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \geq 3$

$\infty > len \geq 2$
$len = 2$, когда $x_1 x_2^3 x_3^2 \succ x_1 x_2^2 x_3^3$, и не меньше двух из условия, а также длина конечна в силу леммы о бесконечно убывающей цепочках

2. Найдите остаток многочлена g относительно системы $\{f\}$, где

$g = x_2^4 x_3^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2, \qquad f = x_2^4 x_3 - 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2.$

<u>Решение.</u>

1) $L(f) = x_1 x_2^2; \qquad m = x_1^2 x_2^2 = \underbrace{x_1}_{m_0} \cdot (x_1 x_2^2)$

$g \xrightarrow{f} g_1 = x_2^4 x_3^5 + 2x_1 x_2^4 x_3 + x_1^2 x_2^2 - x_1 \cdot (x_2^4 x_3 - 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2) = 2x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^4 x_3 + x_2^4 x_3^5$

2) $L(f) = x_1 x_2^2; \qquad m = x_1 x_2^4 x_3 = \underbrace{x_2^2 x_3}_{m_0} \cdot (x_1 x_2^2)$

$g_1 \xrightarrow{f} g_2 = 2x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^4 x_3 + x_2^4 x_3^5 - x_2^2 x_3 \cdot (x_2^4 x_3 - 2x_1 x_2 x_3^2 + x_1 x_2^2) = 2x_1^2 x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2^3 x_3^3 - x_2^6 x_3^2 + x_2^4 x_3^5$

3) $L(f) = x_1 x_2^2; \qquad m = 2x_1 x_2^3 x_3^3 = \underbrace{2x_2 x_3^3}_{m_0} \cdot (x_1 x_2^2)$

$g_2 \xrightarrow{f} g_3 = 2x_1^2 x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2^3 x_3^3 - x_2^6 x_3^2 + x_2^4 x_3^5 - 2x_2 x_3^3 \cdot (x_2^4 x_3 - 2x_1 x_2 {x_3}^2 + x_1 x_2^2) = 2x_1^2 x_2 x_3^2 - x_2^6 x_3^2 + x_2^4 x_3^5 -$

$-2x_2^5 x_3^4 + 4x_1 x_2^2 x_3^5$

4) $L(f) = x_1x_2^2$; $m = 4x_1x_2^2x_3^5 = \underbrace{4x_3^5}_{m_0} \cdot (x_1x_2^2)$

$g_3 \xrightarrow{f} g_4 = 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 + x_2^4x_3^5 - 2x_2^5x_3^4 + 4x_1x_2^2x_3^5 - 4x_3^5 \cdot (x_2^4x_3 - 2x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2) = 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 +$

$+ x_2^4x_3^5 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6 + 8x_1x_2x_3^7$

5) g_4 уже не редуцируется.

Значит остаток g относительно $\{f\} = 2x_1^2x_2x_3^2 - x_2^6x_3^2 + x_2^4x_3^5 - 2x_2^5x_3^4 - 4x_2^4x_3^6 + 8x_1x_2x_3^7$

3. Выясните, является ли множество $\{f_1, f_2, f_3\}$ системой Грёбнера, где

$f_1 = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2$, $f_2 = 4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4$, $f_3 = x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3$

<u>Решение.</u>

То есть по критерию Бухбергера:

$$\begin{cases} g_1 = S(f_1, f_2) \xrightarrow{F} 0; \\ g_2 = S(f_1, f_3) \xrightarrow{F} 0; \\ g_3 = S(f_2, f_3) \xrightarrow{F} 0; \end{cases} \Rightarrow F - \text{система Грёбнера}$$

$LCM\left(L(f_1), L(f_2)\right) = LCM(2x_1x_2, 4x_1x_3^2) = 4x_1x_2x_3^2$

$LCM\left(L(f_1), L(f_3)\right) = LCM(2x_1x_2, x_2^2x_3^3) = 2x_1x_2x_3^3$

$LCM\left(L(f_2), L(f_3)\right) = LCM(4x_1x_3^2, x_2^2x_3^3) = 4x_1x_2^2x_3^3$

1) $g_1 = 2x_3^2(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) - x_2(4x_1x_3^2 + x_2x_3 - 4) = 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2$

$g_1 \xrightarrow{\overset{f_2}{-2x_3}} 8x_1x_3^3 + 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2 - 2x_3(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4) = 2x_2x_3^4 - x_2^2x_3^3 + 4x_2 - 2x_2x_3^4 + 8x_3 \xrightarrow{\overset{f_3}{-1}} x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3 -$

$-(x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = 0$

$g_1 \xrightarrow{F} 0$

2) $g_2 = x_2x_3^3(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) - 2x_1(x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3$

$g_2 \xrightarrow{\overset{f_1}{-2x_3^4}} 4x_1x_2x_3^4 + x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - 2x_3^4(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) = x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_1x_3^5 - 2x_2x_3^6 \xrightarrow{\overset{f_1}{-4}}$

$\xrightarrow{\overset{f_1}{-4}} x_2^2x_3^5 + 8x_1x_2 + 16x_1x_3 - 8x_1x_3^5 - 2x_2x_3^6 - 4(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) = x_2^2x_3^5 + 16x_1x_3 - 8x_1x_3^5 - 2x_2x_3^6 - 16x_1x_3 - 4x_2x_3^2 \xrightarrow{\overset{f_2}{2x^3}}$

$\xrightarrow{\overset{f_2}{2x^3}} x_2^2x_3^5 - 8x_1x_3^5 - 2x_2x_3^6 - 4x_2x_3^2 + 2x_3^3(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4) = x_2^2x_3^5 - 2x_2x_3^6 - 4x_2x_3^2 + 2x_2x_3^6 - 8x_3^3 \xrightarrow{\overset{f_3}{-x_3^2}} x_2^2x_3^5 - 4x_2x_3^2 - 8x_3^3 -$

$-x_3^2(x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = 0$

$g_2 \xrightarrow{F} 0$

3) $g_3 = x_2^2x_3(4x_1x_3^2 + x_2x_3^3 - 4) - 4x_1(x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = x_2^3x_3^4 - 4x_2^2x_3 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3$

$g_3 \xrightarrow{\overset{f_1}{-8}} x_2^3x_3^4 + 16x_1x_2 + 32x_1x_3 - 4x_2^2x_3 - 8(2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3^2) = x_2^3x_3^4 + 32x_1x_3 - 32x_1x_3 - 8x_2x_3^2 - 4x_2^2x_3 \xrightarrow{\overset{f_3}{-x_2x_3}}$

$\xrightarrow{\overset{f_3}{-x_2x_3}} x_2^3x_3^4 - 8x_2x_3^2 - 4x_2^2x_3 - x_2x_3(x_2^2x_3^3 - 4x_2 - 8x_3) = 0$

$g_3 \xrightarrow{F} 0$

$$\begin{cases} g_1 \xrightarrow{\mathrm{F}} 0; \\ g_2 \xrightarrow{\mathrm{F}} 0; \\ g_3 \xrightarrow{\mathrm{F}} 0; \end{cases} \Rightarrow F \text{ действительно система Грёбнера}$$

4. Докажите, что множество $F \subseteq K[x] \backslash \{0\}$ является системой Грёбнера тогда и только тогда, когда существует такой многочлен $f \in F$, который делит любой многочлен из F.

Решение.

$\Rightarrow$ пусть исходная система действительно является системой Грёбнера, но нет такого многочлена f, который делит любой другой многочлен из F. Тогда возьмем многочлен $g \in F$, имеющий минимальную степень, и многочлен $f \neq g$, так как если система состоит из одного элемента и является системой Грёнбера, то он, конечно же, делит все элементы системы. Пусть:

$f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$

$g = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$

Тогда

$S(f, g) = m_1 f - m_2 g$

Тогда шаг цепочки элементарных редукций будет выглядеть, как шаг деления многочленов в столбик.
Но $f \nmid g \Rightarrow$ остаток $r \neq 0$, то есть нельзя отредуцировать $S(f, g)$ до нуля $\Rightarrow$ по критерию Бухбергера, это не система Грёнбера. Противоречие.

$\Leftarrow$ *coming soon*