Контрольная работа

12 июня 2022 г. 16:46

2. Рассмотрим в кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ идеал $I = (f, g)$, где

$$f = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x + 2 \quad \text{и} \quad g = 3x^4 + 4x^2 + 4x + 1.$$

Выясните, является ли факторкольцо $\mathbb{Z}_5[x]/I$ полем.

Пусть $h = GCD(f,g)$: $(h) \subseteq (f,g)$ $\quad (f,g) \subseteq (h)$

Известно, что факторкольцо является полем <=>

h неприводим. тогда $\exists\ u, v \in \mathbb{Z}_5[x]$

$$h = uf + vg \qquad f = f' \cdot h \quad g = g' \cdot h$$

$$hr = urf + vrg \in (f,g) \qquad (h) \subseteq (f,g)$$

$$r_1 \cdot f + r_2 \cdot g = r_1(f' \cdot h) + r_2(g' \cdot h) = h(f' r_1 + g' r_2) \in (h) \qquad (f,g) \subseteq (h)$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x + 2 & 3x^4 + 4x^2 + 4x + 1 \\
\hline
x^6 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 & 2x^2 + x + 3 = q_1 \\
\quad 3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 2 & \\
\quad 3x^5 + 4x^3 + 4x^2 + x & \\
\qquad 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2 & \\
\qquad 4x^4 + 2x^2 + 2x + 3 & \\
\hline
\qquad\quad 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = r_1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 + 4x^2 + 4x + 1 & 3x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\
\hline
3x^4 + x^3 + 3x^2 + 4x & x + 3 = q_2 \\
\quad 4x^3 + x^2 + 1 & \\
\quad 4x^3 + x^2 + 4x + 2 & \\
\hline
\qquad x + 4 = r_2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x + 4 \\
\hline
3x^3 + 2x^2 & 3x^2 + 3 \\
\quad 3x + 4 & \\
\quad 3x + 2 & \\
\hline
\qquad 0 &
\end{array}
$$

т.к GCD - это последний ненулевой r_i, значит

$GCD(f,g) = x + 4$

Задача 5. Пусть α — комплексный корень многочлена $z^3 - z^2 + 1$. Представьте элемент

$$\frac{10\alpha^2 - 3\alpha - 8}{\alpha^2 + \alpha + 1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f(z) \leq 2$.

$$\frac{10a^2 - 3a - 8}{a^2 + a + 1} = Aa^2 + Ba + C$$

$$10a^2 - 3a - 8 = (a^2 + a + 1) \cdot (Aa^2 + Ba + C)$$

$$(a^2 + a + 1) \cdot (Aa^2 + Ba + C) = Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Aa^3 + Ba^2 + Ca + Aa^2 + Ba + C$$

Формула понижения степени:

$$a^3 - a^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^3 = a^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad a^4 = a^3 - a$$

$$A(a^2 - a - 1) + B(a^2 - 1) + Ca^2 + A(a^2 - 1) + Ba^2 + Ca + Aa^2 + Ba + C =$$

$$= Aa^2 - Aa - A + Ba^2 - B + Ca^2 + Aa^2 - A + Ba^2 + Ca + Aa^2 + Ba + C =$$

$$= a^2(A + B + C + A + B + A) + a(-A + C + B) + (-A - B - A + C) =$$

$$= a^2(3A + 2B + C) + a(-A + B + C) + (-2A - B + C)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 10 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow 3a^2 + a - 1$$

5. Пусть α — комплексный корень многочлена $z^3 - z + 1$. Представьте элемент

$$\frac{3\alpha^3 + 5\alpha^2 + 1}{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f(z) \leqslant 2$.

Формула понижения степени:

$$a^3 - a + 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a^3 = a - 1 \;\; \Rightarrow \;\; a^4 = \;\; a^2 - a$$

$$3a^3 + 5a^2 + 1 = 3(a - 1) + 5a^2 + 1 = 5a^2 + 3a - 2$$

$$\frac{3a^3 + 5a^2 + 1}{a^3 - 2a^2 + a} = Aa^2 + Ba + C$$

$$(a^3 - 2a^2 + a) \cdot (Aa^2 + Ba + C) = (-2a^2 + 2a - 1) \cdot (Aa^2 + Ba + C) =$$
$$= -\mathrm{A}a^4 - 2Ba^3 - 2Ca^2 + 2Aa^3 + 2Ba^2 + 2Ca - Aa^2 - Ba - C =$$

$$= -Aa^2 + Aa - 2Ba + 2B - 2Ca^2 + 2Aa - 2A + 2Ba^2 + 2Ca - Aa^2 - Ba - C =$$

$$= a^2(-A - 2C + 2B - A) + a(A - 2B + 2A + 2C - B) + (2B - 2A - C) =$$

$$= a^2(-2A + 2B - 2C) + a(3A - 3B + 2C) + (-2A + 2B - C) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}\right) \Rightarrow xa^2 + ya + z$$

5. Пусть α — комплексный корень многочлена $z^3 - z - 1$. Представьте элемент

$$\frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3}{\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f(z) \leqslant 2$.

$$a^3 - a - 1 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a^3 = a + 1 \;\; \Rightarrow \;\; a^4 = a^2 + a$$

$$\frac{a^3 + 3a^2 - 3}{a^3 + 2a^2 + a} = \frac{a + 1 + 3a^2 - 3}{a + 1 + 2a^2 + a} = \frac{3a^2 + a - 2}{2a^2 + 2a + 1}$$

$$\frac{3a^2 + a - 2}{2a^2 + 2a + 1} = Aa^2 + Ba + C$$

$$3a^2 + a - 2 = (Aa^2 + Ba + C) \cdot (2a^2 + 2a + 1) = 2Aa^4 + 2Aa^3 + Aa^2 + 2Ba^3 + 2Ba^2 + Ba + 2Ca^2 + 2Ca + C =$$

$$= 2A(a^2 + a) + 2A(a + 1) + Aa^2 + 2B(a + 1) + 2Ba^2 + Ba + 2Ca^2 + 2Ca + C =$$

$= 2Aa^2 + 2Aa + 2Aa + 2A + Aa^2 + 2Ba + 2B + 2Ba^2 + Ba + 2Ca^2 + 2Ca + C =$

$= a^2(3A + 2B + 2C) + a(4A + 3B + 2C) + (2A + 2B + C)$

$$\begin{cases} 3A + 2B + 2C = 3 \\ 4A + 3B + 2C = 1 \\ 2A + 2B + C = -2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow 3a^2 - 5a + 2$$

2. Рассмотрим в кольце $\mathbb{Z}_5[x]$ идеал $I = (f, g)$, где

$$f = x^6 + 4x^5 + 2x^3 + 4x + 2 \quad \text{и} \quad g = 3x^4 + 4x^2 + 4x + 4.$$

Выясните, является ли факторкольцо $\mathbb{Z}_5[x]/I$ полем.

Пусть $h = GCD(f, g)$: $(h) \subseteq (f, g)$; $(f, g) \subseteq (h)$

Известно, что факторкольцо является полем $\Leftrightarrow$ многочлен h неприводим.

Тогда $\exists u, v,$ такие что $h = uf + vg$, $u, v \in \mathbb{Z}_5$

$f = f'h$ $\qquad$ $g = g'h$

$hr = urf + vrg \in (f, g)$ $\qquad$ $(h) \subseteq (f, g)$

$r_1 f + r_2 g = r_1(f'h) + r_2(g'h) = h(r_1 f' + r_2 g') \in (h)$ $\qquad$ $(f, g) \subseteq (h)$

$-\ x^6 + 4x^5 + 2x^3 + 4x + 2 \ \big|\ 3x^4 + 4x^2 + 4x + 4$

$\quad x^6 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 \ \big|\ 2x^2 + 3x + 4 = \alpha_1$

$-\ 4x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 2$

$\quad 4x^5 + \quad + 2x^3 + 2x^2 + 2x$

$-\ 2x^4 + 2x^3 + 2x + 2$

$\quad 2x^4 + x^2 + x + 1$

$\quad 2x^3 + 4x^2 + x + 1 = r_1$

$-\ 3x^4 + 4x^2 + 4x + 4 \ \big|\ 2x^3 + 4x^2 + x + 1$

$\quad 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x \ \big|\ 4x + 2 = \alpha_2$

$-\ 4x^3 + 4$

$\quad 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2$

$\quad 2x^2 + 3x + 2 = r_2$

$-\ 2x^3 + 4x^2 + x + 1 \ \big|\ 2x^2 + 3x + 2$

$\quad 2x^3 + 3x^2 + 2x \ \big|\ x + 3$

$-\ x^2 + 4x + 1$

$\quad x^2 + 4x + 1$

$\quad 0$

Известно, что последний $r_i \neq 0$ — является наибольшим общим делителем двух многочленов.

Значит $GCD(f, g) = h = 2x^2 + 3x + 2$

$h(0) = 2$

$h(1) = 2$
$h(2) = 1$
$h(-2) = 4$
$h(-1) = 1$

Значит многочлен h действительно не приводим и $\mathbb{Z}_5[x] / _{2x^2 + 3x + 2}$ действительно поле.

3. Разложите многочлен $2x^6 + x^4 + 2x^3 + 2$ на неприводимые множители в кольце $\mathbb{Z}_3[x]$.

$\{0,1,2\}$ – всемовозможные корни в $\mathbb{Z}_3$;

$2x^6 + x^4 + 2x^3 + 2 = f$

$f(0) = 2$
$f(1) = 2 + 1 + 2 + 2 = 1$
$f(2) = 0$ – является корнем

$$
\begin{array}{l|l}
-\, 2x^6 + x^4 + 2x^3 + 2 & x - 2 \\
\quad 2x^6 - x^5 & \overline{2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2} \\
\quad -\, x^5 + x^4 + 2x^3 + 2 & \\
\quad\quad x^5 - 2x^4 & \\
\quad\quad -\, 2x^3 + 2 & \\
\quad\quad\quad 2x^3 - x^2 & \\
\quad\quad\quad -\, x^2 + 2 & \\
\quad\quad\quad\quad x^2 - 2x & \\
\quad\quad\quad\quad -\, 2x + 2 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 2x - 1 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad \overline{\quad 0 \quad} &
\end{array}
$$

$f' = 2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2$

$f'(0) = 2$
$f'(1) = 2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 2$
$f'(2) = 64 + 16 + 8 + 2 + 2 = 92$

Казалось бы, что f' неприводим. Но мы проверили только для корней первой степени. Многочлен пятой степени может также разложиться в многочлены 2 и 3 степени.

1) $x^2 + 1$
2) $x^2 + 2$
3) $x^2 + x + 1$
4) $x^2 + x + 2$
5) $x^2 + 2x + 1$
6) $x^2 + 2x + 2$

$$
\begin{array}{l|l}
-\, 2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2 & x^2 + 1 \\
\quad 2x^5 + 2x^3 & \overline{2x^3 + x^2 - 2x + 1} \\
\quad -\, x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x + 2 & \\
\quad\quad x^4 + x^2 & \\
\quad\quad -\, -2x^3 + x^2 + x + 2 & \\
\quad\quad\quad -2x^3 - 2x & \\
\quad\quad\quad x^2 + 2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-\, 2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2 & x^2 + 2 \\
\quad 2x^5 + x^3 & \overline{2x^3 + x^2 - x} \\
\quad -\, x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 2 & \\
\quad\quad x^4 + 2x^2 & \\
\quad\quad -\, -x^3 + x + 2 & \\
\quad\quad\quad -x^3 - 2x & \\
\quad\quad\quad \overline{\quad 2 \quad} &
\end{array}
$$

$-2x^3 + x^2 + x + 2$
$- \; -2x^3 - \quad -2x$
$x^2 + 2$
$- \; x^2 + 1$
1

$-x^3 + x + 2$
$- \; -x^3 - 2x$
2

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2 & x^2 + x + 1 \\
\hline
- \; 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 & 2x^3 - x^2 - x + 1 \\
\quad - \; -x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x + 2 & \\
\quad \quad -x^4 - x^3 - x^2 & \\
\quad \quad - \; -x^3 + x + 2 & \\
\quad \quad \quad -x^3 - x^2 - x & \\
\quad \quad \quad - \; x^2 + 2x + 2 & \\
\quad \quad \quad \quad x^2 + x + 1 & \\
\quad \quad \quad \quad x + 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 2 & x^2 + x + 2 \\
\hline
- \; 2x^5 + 2x^4 + x^3 & 2x^3 - x^2 + 1 \\
\quad - \; -x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 2 & \\
\quad \quad -x^4 - x^3 - 2x^2 & \\
\quad \quad - \; x^2 + x + 2 & \\
\quad \quad \quad x^2 + x + 2 & \\
\quad \quad \quad 0 &
\end{array}
$$

$2x^6 + x^4 + 2x^3 + 2 = (x-2)(2x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$

5. Пусть α — комплексный корень многочлена $z^3 - z + 1$. Представьте элемент

$$\frac{3\alpha^3 + 5\alpha^2 - 3}{\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$ и $\deg f(z) \leqslant 2$.

Проверим, что $m = z^3 - z + 1$ действительно неприводим:

По теореме Безу: так как свободный член равен 1, а его делители только ± 1

$m(1) = 1 - 1 + 1 \neq 0$
$m(-1) = -1 + 1 + 1 \neq 0$

m неприводим.

$a^3 - a + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a^3 = a - 1 \;\Rightarrow\; a^4 = a^2 - a$

$$\frac{3a^3 + 5a^2 - 3}{a^3 + 2a^2 + a} = \frac{3a - 3 + 5a^2 - 3}{a - 1 + 2a^2 + a} = \frac{5a^2 + 3a - 6}{2a^2 + 2a - 1}$$

$$\frac{5a^2 + 3a - 6}{2a^2 + 2a - 1} = Aa^2 + Ba + C$$

$5a^2 + 3a - 6 = (Aa^2 + Ba + C) \cdot (2a^2 + 2a - 1)$

$(Aa^2 + Ba + C) \cdot (2a^2 + 2a - 1) = 2Aa^4 + 2Aa^3 - Aa^2 + 2Ba^2 - Ba + 2Ca^2 + 2Ca - C =$

$= 2A(a^2 - a) + 2A(a - 1) - Aa^2 + 2Ba^2 - Ba + 2Ca^2 + 2Ca - C =$
$= 2Aa^2 - 2Aa + 2Aa - 2A - Aa^2 + 2Ba^2 - Ba + 2Ca^2 + 2Ca - C =$
$= a^2(2A - A + 2B + 2C) + a(-2A + 2A - B + 2C) + (-2A - C) =$
$= a^2(A + 2B + 2C) + a(0A - B + 2C) + (-2A - C)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{УСВ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \text{ я проебался}$$