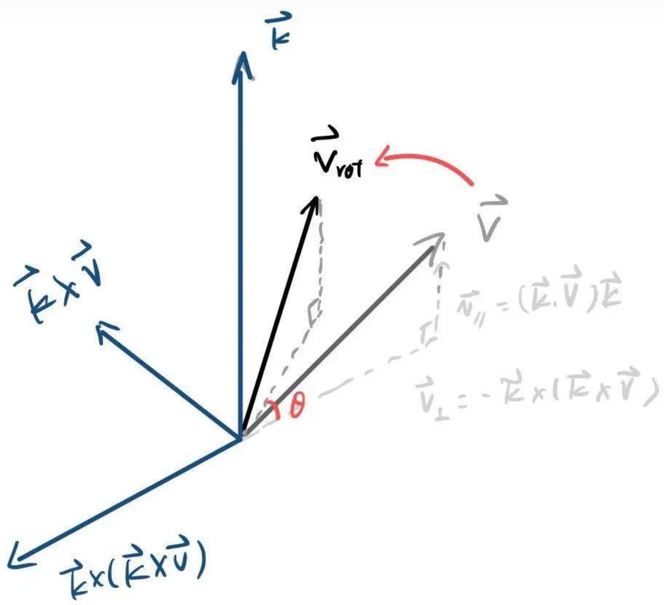


[数学]罗德里格旋转公式（Rodrigues' rotation formula）

王二
Live a life you will remember.

介绍

罗德里格（Rodrigues）旋转公式，是描述空间中向量旋转的公式，引用一段百度百科：

> 罗德里格旋转公式是计算三维空间中，一个向量绕旋转轴旋转给定角度以后得到的新向量的计算公式。这个公式使用原向量，旋转轴及它们叉积作为标架表示出旋转以后的向量。可以改写为矩阵形式，被广泛应用于空间解析几何和计算机图形学领域，成为刚体运动的基本计算公式。

确实是一个很牛的公式，只需要原向量，加上旋转轴向量和角度，就可以得出旋转后的向量，感觉很合理，不过想想就知道这个东西应该是很常用的很基础的公式。

看下它的提出者，就是这位老哥：本杰明·奥伦德·罗德里格（Benjamin Olinde Rodrigues，1795-10-6 至 1851-12-17）1816 年提出的（还有几位独立提出者，但他是最先提出的）

下面放几张帅照：

Benjamin Olinde Rodrigues-2

（感觉第一张有点像金刚狼）

推导

下面正式推导一下：

先放几个公式，待会儿要用到的

1. 叉乘矩阵

$$\begin{bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -z_a & y_a \\ z_a & 0 & -x_a \\ -y_a & x_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

2. 向量三重积展开

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

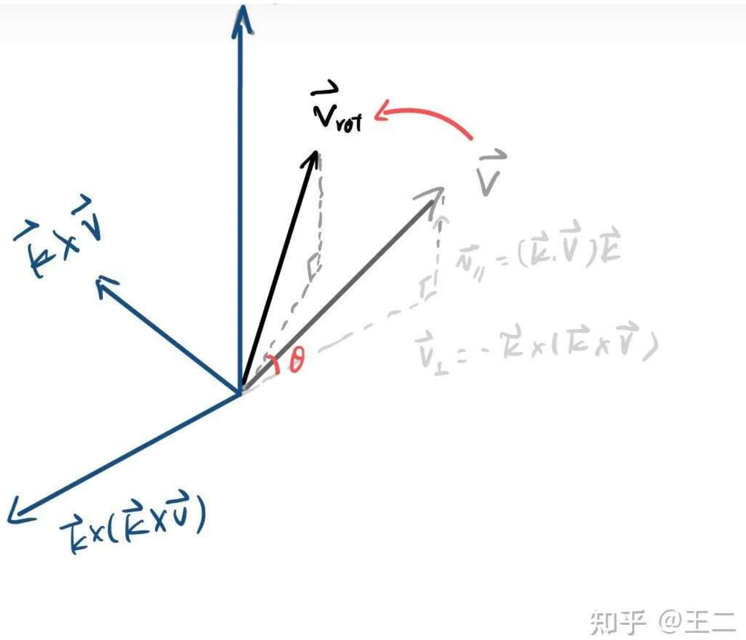
3. 叉乘符合分配律

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

4. 叉乘定义

$\vec{a} \times \vec{b} = ||\vec{a}||||\vec{b}||sin(\theta)n$

$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}||||\vec{b}||sin(\theta)$



Rodrigues-1

问题可描述如下，已知 $\vec{v}$ 是三维空间中一向量， $\vec{k}$ 是与转轴同向的单位向量， θ 是 $\vec{v}$ 绕 $\vec{k}$ 的右手（逆时针）方向旋转经过的角度，求旋转后向量 $\overrightarrow{v_{rot}}$ 。

Step1.

将 $\vec{v}$ 分为与 $\vec{k}$ 垂直的分量 $\overrightarrow{v_\perp}$ 和平行的分量 $\overrightarrow{v_{//}}$ ，有 $\vec{v}=\overrightarrow{v_\perp}+\overrightarrow{v_{//}}$ 。

$$\overrightarrow{v_{//}}=(\vec{k}\cdot\vec{v})\cdot\vec{k} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_\perp}&=\vec{v}-\overrightarrow{v_{//}}\\&=(\vec{k}\cdot\vec{k})\cdot\vec{v}-(\vec{k}\cdot\vec{v})\cdot\vec{k}\end{aligned}$$

由公式2（向量三重积展开）可得

$$\overrightarrow{v_\perp}=-\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{v}) \tag{2}$$

Step2.

从图中可以得出几何关系

$$\overrightarrow{v_{rot//}}=\overrightarrow{v_{//}} \tag{3}$$

现在只要求出 $\overrightarrow{v_{rot\perp}}$ 就能求出$\overrightarrow{v_{rot}}$了，

由于 $||\overrightarrow{v_{rot\perp}}||=||\overrightarrow{v_\perp}||$ ，而且$\overrightarrow{v_{rot\perp}}$可拆分为 $\vec{k}\times\vec{v}$ 与 $\overrightarrow{v_\perp}$ 向量的和，所以将$\overrightarrow{v_{rot\perp}}$表示为这两个向量方向单位向量乘以各自应对应的标量后得到的向量的和：

$$\overrightarrow{v_{rot\perp}}=\frac{\overrightarrow{v_\perp}}{||\overrightarrow{v_\perp}||}\cdot||\overrightarrow{v_\perp}||cos(\theta)+\frac{\vec{k}\times\vec{v}}{||\vec{k}\times\vec{v}||}\cdot||\vec{k}\times\vec{v}||sin(\theta)$$

$$\overrightarrow{v_{rot\perp}}=\overrightarrow{v_\perp}\cdot cos(\theta)+\vec{k}\times\vec{v}\cdot sin(\theta) \tag{4}$$

Step3.

$$\overrightarrow{v_{rot}} = \overrightarrow{v_{rot//}} + \overrightarrow{v_{rot\perp}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{rot}} &= \overrightarrow{v_{//}} + \overrightarrow{v_{\perp}} \cdot cos(\theta) + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta) \\ &= \overrightarrow{v_{//}} + (\vec{v} - \overrightarrow{v_{//}}) \cdot cos(\theta) + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta) \\ &= cos(\theta) \cdot \vec{v} + (1 - cos(\theta)) \cdot \overrightarrow{v_{//}} + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta) \\ &= cos(\theta) \cdot \vec{v} + (1 - cos(\theta)) \cdot (\vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{k} + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta)\end{aligned}$$

[Step4.]

化简为矩阵形式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{rot}} &= \vec{v} - \vec{v} + cos(\theta) \cdot \vec{v} + (1 - cos(\theta)) \cdot (\vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{k} + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta) \\ &= \vec{v} - (1 - cos(\theta)) \cdot \vec{v} + (1 - cos(\theta)) \cdot (\vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{k} + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta) \\ &= \vec{v} + (1 - cos(\theta)) \cdot [(\vec{k} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{v}] + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta)\end{aligned}$$

根据公式2（向量三重积展开）可得

$$\overrightarrow{v_{rot}} = \vec{v} + (1 - cos(\theta)) \cdot \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{v}) + \vec{k} \times \vec{v} \cdot sin(\theta)$$

根据公式1，用矩阵 R_k 替换 $\vec{k}$

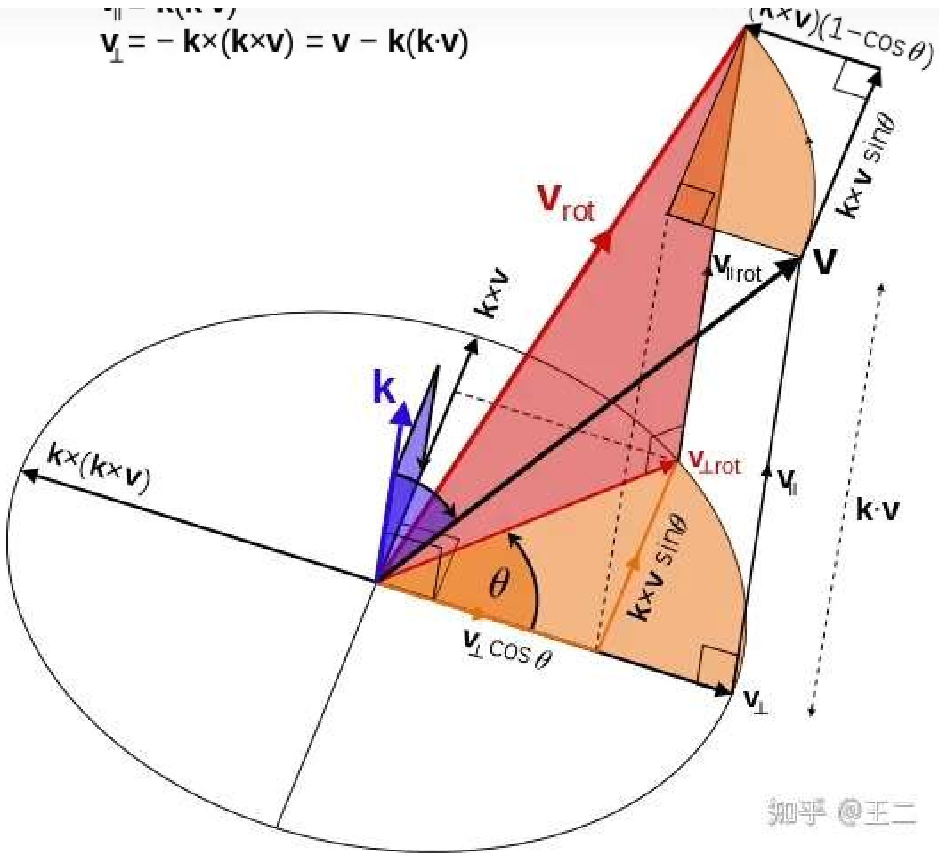
$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_{rot}} &= \vec{v} + (1 - cos(\theta)) \cdot R_k^2 \cdot \vec{v} + R_k \cdot \vec{v} \cdot sin(\theta) \\ &= [I + (1 - cos(\theta)) \cdot R_k^2 + R_k \cdot sin(\theta)] \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

令

$$M = I + (1 - cos(\theta)) \cdot R_k^2 + R_k \cdot sin(\theta)$$

$$\overrightarrow{v_{rot}} = M \cdot \vec{v}$$

（最后再附一张图辅助理解）



Rodrigues-2

目录

现

```
Eigen::Matrix4f get_rotation(Vector3f axis, float angle) {
    // Use Rodrigues rotation formula
    float radian = DEG2RAD(angle);
    Eigen::Matrix4f model = Eigen::Matrix4f::Identity();
    Eigen::Matrix3f I = Eigen::Matrix3f::Identity();
    Eigen::Matrix3f M;
    Eigen::Matrix3f Rk;
    Rk << 0, -axis[2], axis[1],
        axis[2], 0, -axis[0],
        -axis[1], axis[0], 0;

    M = I + (1 - cos(radian)) * Rk * Rk + sin(radian) * Rk;

    model << M(0, 0), M(0, 1), M(0, 2), 0,
        M(1, 0), M(1, 1), M(1, 2), 0,
        M(2, 0), M(2, 1), M(2, 2), 0,
        0, 0, 0, 1;
    return model;
}
```

参考：

en.wikipedia.org/wiki/O...

王二：[GAMES101] 投影变换和模型变换 作业1

编辑于 2022-07-31 14:19