

1) Tenemos el modelo $y = \alpha + e$, lo definimos matricialmente como $y = X\beta + e$
 donde $\beta = [\alpha]$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$, Sabemos que $\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} (X^t y)$

$$\Rightarrow (X^t X)^{-1} = (n)^{-1} = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = (X^t X)^{-1} (X^t y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}$$

$$X^t y = [1, \dots, 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i \quad \therefore \hat{\alpha} = \bar{y}$$

2) De las ecuaciones normales podemos despejar el valor de los estimadores

$$\begin{aligned} 20 \hat{\beta}_0 + 10 \hat{\beta}_1 &= 40 \\ 10 \hat{\beta}_0 + 6 \hat{\beta}_1 &= 22 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= 1 \\ \hat{\beta}_1 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3) a) Tenemos que la forma cuadrática se ve así:

$$X^t A X \Rightarrow [X_1 \ X_2] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [X_1 A_{11} + X_2 A_{21}, X_1 A_{12} + X_2 A_{22}] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1 A_{11} X_1 + X_2 A_{21} X_1 + X_1 A_{12} X_2 + X_2 A_{22} X_2$$

Tomando que A_{ij} son ^{Matrices} escalares y que X_1, X_2 son variables, y A simétrica entonces

$A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + 2 A_{21} X_1 X_2$, siendo $2 X_1^2 + 3 X_2^2 + 6 X_1 X_2$ la forma cuadrática, tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} 2I & 3I \\ 3I & 3I \end{bmatrix}_4$$

b) Note que en $\frac{1}{2} X_1^2 + 3 X_1 X_2 + 4 X_2^2 + 6 X_3^2$, no hay términos cruzado por lo cual serán 0

y por simplicidad notación, $X = [X_1, X_2]^t$ y $Z = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow [X \ X_3] \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_3 \end{bmatrix} = [X \Sigma \ X_3 A_{33}] \begin{bmatrix} X \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$= X \Sigma X + X_3 A_{33} X_3 \quad \text{y por a) tenemos que}$$

$$= A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{12} X_1 X_2 + A_{33} X_3^2$$

$$\therefore A = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}I & 3I & 0 \\ 3I & 4I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6 \end{array} \right]_4$$

4) Sabemos que si $X \sim N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow X^t A X \sim \chi^2(p, \lambda)$ si $A\Sigma$ es idempotente.

Supongamos A idempotente $\Leftrightarrow A I$ es idempotente y utilizando lo anterior:

Sea $X \sim N_p(0, I) \Rightarrow X^t A X \sim \chi^2(p, \lambda)$ si $A I$ es idempotente $\Leftrightarrow A$ es idempotente.

5) Supongamos A idempotente, Sea $B = \frac{1}{\sigma^2} A$

$$\Rightarrow (B\sigma^2 I)^T = \sigma^4 (BI)^T = \sigma^4 (B^T) = \sigma^4 \left(\frac{A^T}{\sigma^4} \right) = \\ = \sigma^2 \frac{A}{\sigma^2} = \sigma^2 I B = B\sigma^2 I.$$

Entonces $B\sigma^2 I$ es idempotente y sabemos por el teorema enunciado en 4), que:

$$\text{Si } X \sim N_n(0, \sigma^2 I) \Rightarrow X^T B X \sim \chi^2(p, \lambda) \text{ con } \lambda = \frac{1}{2} \mu^T B \mu, r(B) = p$$

$\Leftrightarrow B\sigma^2 I$ es idempotente

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} X^T A X \sim \chi^2(0, r(A)) \text{ , digamos que } r(A) = p$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{1}{\sigma^2} X^T A X\right] = p + 2\lambda = \underline{p}$$

6). Definimos la matriz $\mathbb{1}$ como $[\mathbb{1}]_{ij} = 1 \quad \forall i, j$.

Vease que tanto Q_1 como Q_2 son formas cuadráticas, siendo estas

$$Q_1 = y^T A y = [y_1, \dots, y_p] \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_i \left(\sum_{j=1}^p y_j \right) = p \left(\frac{\sum_{i=1}^p y_i}{p^2} \right)^2 = p \bar{y}^2$$

$$\text{Ahora note que } \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^p y_i^2 - p \bar{y}^2$$

$$\Rightarrow Q_2 = y^T B y = y^T I y - y^T A y = \sum_{i=1}^p y_i^2 - p \bar{y}^2 = \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^2 \quad \therefore A = \frac{1}{p} \mathbb{1}, B = (I - A)$$

$$a) BZA = BA = (I - \frac{1}{p} \mathbb{1}) \frac{1}{p} \mathbb{1} = \frac{1}{p} \mathbb{1} - \frac{1}{p^2} p \mathbb{1} = 0.$$

Sabiendo que, si $X \sim N(\mu, \Sigma)$ con A, B simétricas $\Rightarrow X^T A X, X^T B X$ son independientes

$$\Leftrightarrow BZA = 0$$

$$\Rightarrow y \sim N(0, I) \quad y \quad Q_1 = y^T A y, Q_2 = y^T B y \Rightarrow Q_1 \text{ y } Q_2 \text{ son independientes}$$

$$b) (AZ)^T = (A)^T = \frac{1}{p^2} (\mathbb{1})^T = \frac{1}{p^2} (p \mathbb{1}) = \frac{1}{p} \mathbb{1} = A = AZ \Rightarrow AZ \text{ es idempotente.}$$

y utilizando 4), tenemos que

$$Q_1 \sim \chi^2(p, \lambda) \quad , \quad \lambda = 0, r(A) = p \Rightarrow Q_1 \sim \chi^2(p).$$

Por su parte

$$(BZ)^T = (B)^T = (I - \frac{1}{p} \mathbb{1}) (I - \frac{1}{p} \mathbb{1}) = I^2 - \frac{2}{p} \mathbb{1} + \frac{1}{p^2} \mathbb{1}^2 = I - \frac{2}{p} \mathbb{1} + \frac{1}{p} \mathbb{1} \\ = I - \frac{1}{p} \mathbb{1} = B = (BZ)$$

$$\Rightarrow Q_2 \sim \chi^2(p, \lambda) \text{ con } \lambda = 0, r(B) = p \Rightarrow Q_2 \sim \chi^2(p).$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \sim \frac{\chi^2(p)}{\chi^2(p)} \Rightarrow Z = \frac{Q_1}{Q_2} \sim \underline{F(p, p)}$$

c) Sabemos que, si: $X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow X^T A X, B X$ son independientes si y solo si $B^T A = 0$

Entonces basta con mostrar que, $Q_1 = Y^T B Y = \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^2$ y $Q_2 = D Y = \sum_{i=1}^p y_i$ donde $D^T B = 0$,

Y se conoce B , calculemos D .

$$Q_2 = D Y = \mathbb{1}_{1 \times p} Y = [1, \dots, 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = y_1 + \dots + y_p = \sum_{i=1}^p y_i$$

$$\Rightarrow D^T B = D B = \mathbb{1}_{1 \times p} \left(I - \frac{1}{p} \mathbb{1}_{p \times p} \right)$$

$$= \mathbb{1}_{1 \times p} - \frac{1}{p} \mathbb{1}_{1 \times p} \mathbb{1}_{p \times p} = \mathbb{1}_{1 \times p} - \frac{1}{p} (p \mathbb{1}_{1 \times p}) = \mathbb{1}_{1 \times p} - \mathbb{1}_{1 \times p} = 0$$

$\therefore \sum_{i=1}^p y_i$ y $\sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^2$ son independientes

d) Utilizando lo encontrado en b).

$$Q_1 \sim \chi^2(p, 0) \text{ y } Q_2 \sim \chi^2(p, 0)$$

$$\Rightarrow E[Q_1] = E[Q_2] = p + 2(0) = \underline{p}$$