

1) Tenemos el modelo $y = \alpha + e$, lo definimos matricialmente como $y = X\beta + e$
 donde $\beta = [\alpha]$, $X = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$, Sabemos que $\hat{\beta} = (X^t X)^{-1}(X^t y)$

$$\Rightarrow (X^t X)^{-1} = (h)^{-1} = \frac{1}{h} \Rightarrow \hat{\beta} = (X^t X)^{-1}(X^t y) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h y_i = \bar{y}$$

$$X^t y = [1, \dots, 1] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^h y_i \quad \therefore \hat{\alpha} = \bar{y}$$

2) De las ecuaciones normales podemos despejar el valor de los estimadores

$$\begin{aligned} 20 \hat{\beta}_0 + 10 \hat{\beta}_1 &= 40 \Rightarrow \hat{\beta}_0 = 1 \\ 10 \hat{\beta}_0 + 6 \hat{\beta}_1 &= 22 \Rightarrow \hat{\beta}_1 = 2 \end{aligned} \Rightarrow \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3) a) Tenemos que las formas cuadráticas se ve así:

$$X^t A X \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [X_1 A_{11} + X_2 A_{21}, X_1 A_{12} + X_2 A_{22}] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1 A_{11} X_1 + X_2 A_{21} X_2 + X_1 A_{12} X_2 + X_2 A_{22} X_1$$

Teniendo que A_{ij} son escalares y que X_1, X_2 son permutables, $\stackrel{\text{Matrices}}{\therefore}$ entonces

$A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + 2 A_{21} X_1 X_2$, siendo $2 X_1^2 + 3 X_2^2 + 6 X_1 X_2$ las formas cuadráticas, tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} 2I & 3I \\ 3I & 3I \end{bmatrix}$$

b) Nota que en $\frac{1}{2} X_1^2 + 3 X_1 X_2 + 4 X_2^2 + 6 X_3^2$, hay tres términos cuadrados por lo cual serán 0

Si para simplificar notación, $X = [X_1, X_2]^t$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \Sigma & X_3 A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$= X \Sigma X + X_3 A_{33} X_3 \quad \text{s para a) tenemos que}$$

$$= A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{12} X_1 X_2 + A_{21} X_2 X_1$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} I & \frac{3}{2} I & 0 \\ \frac{3}{2} I & 4 I & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

4) Sabemos que si $X \sim N_p(\mu, \Sigma) \Rightarrow X^t A X \sim \chi^2(p, \lambda)$ si $A\Sigma$ es independiente.

Sugamos A independiente $\Leftrightarrow A\Sigma$ es independiente y utilizando lo anterior.

Sea $X \sim N_p(0, I) \Rightarrow X^t A X \sim \chi^2(p, \lambda)$ si $A\Sigma$ es independiente $\Leftrightarrow A$ es independiente.

5) Supongamos A idempotente, Sea $B = \frac{1}{\sigma^2} A$

$$\Rightarrow (B\sigma^2 I)^2 = \sigma^4 (BI)^2 = \sigma^4 (B^2) = \sigma^4 \left(\frac{A^2}{\sigma^4}\right) = \sigma^2 \frac{A}{\sigma} = \sigma^2 I B = B\sigma^2 I.$$

Entonces $B\sigma^2 I$ es idempotente y sabemos por el criterio anterior en 4), que:

Si $X \sim N_m(0, \sigma^2 I)$ $\Rightarrow X^t B X \sim \chi^2(f, \lambda)$ con $\lambda = \frac{1}{2} M^t B M$, $r(A) = f$

$\Leftrightarrow B\sigma^2 I$ es idempotente

$$\Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} X^t A X \sim \chi^2(0, \text{ran}(A)) , \text{ digamos que } \text{ran}(A) = F$$

$$\Rightarrow E[\frac{1}{\sigma^2} X^t A X] = f + 2\lambda = \underline{F}$$

6). Definimos la matriz $\underline{\underline{1}}$ como $[\underline{\underline{1}}]_{ii} = 1 \quad \forall i, j$.

Vemos que tanto Q_1 como Q_2 son formas cuadráticas, siendo estas

$$Q_1 = y^t A y = [y_1, \dots, y_p]^t \frac{1}{P} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^p y_i \left(\sum_{j=1}^p y_j \right) = P \left(\sum_{i=1}^p \frac{y_i^2}{P} \right)^2 = P \bar{y}^2$$

$$\text{Ahora bien que } \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^p y_i^2 - P \bar{y}^2$$

$$\Rightarrow Q_2 = y^t B y = y^t I y - y^t A y = \sum_{i=1}^p y_i^2 - P \bar{y}^2 = \sum_{i=1}^p (y_i - \bar{y})^2 \quad \therefore A = \frac{1}{P} \underline{\underline{1}}, \quad B = (I - A)$$

a) $B^t A = BA = (I - \frac{1}{P} \underline{\underline{1}}) \frac{1}{P} \underline{\underline{1}} = \frac{1}{P} \underline{\underline{1}} - \frac{1}{P^2} P \underline{\underline{1}} = 0$.

Sabiendo que, si $X \sim N(M, \Sigma)$ con A, B simétricas $\Rightarrow X^t A X, X^t B X$ son independientes

$\Leftrightarrow B^t A = 0$

$\Rightarrow y \sim N(0, I) \quad , \quad Q_1 = y^t A y^t, \quad Q_2 = y^t B y \Rightarrow Q_1, Q_2$ son independientes

b) $(AZ)^2 = (A)^2 = \frac{1}{P^2} (\underline{\underline{1}})^2 = \frac{1}{P^2} (f \underline{\underline{1}}) = \frac{1}{P} \underline{\underline{1}} = A = AZ \Rightarrow AZ$ es idempotente.

Si utilizando 4), tenemos que

$$Q_1 \sim \chi^2(f, \lambda), \quad \lambda = 0, \quad r(A) = f \Rightarrow Q_1 \sim \chi^2(f).$$

Por su parte

$$(BZ)^2 = (B)^2 = (I - \frac{1}{P} \underline{\underline{1}})(I - \frac{1}{P} \underline{\underline{1}}) = I^2 - \frac{2}{P} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{P^2} \underline{\underline{1}}^2 = I - \frac{2}{P} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{P} \underline{\underline{1}} = I - \frac{1}{P} \underline{\underline{1}} = B = (D\Sigma)$$

$$\Rightarrow Q_2 \sim \chi^2(f, \lambda) \text{ con } \lambda = 0, \quad r(B) = f \Rightarrow Q_2 \sim \chi^2(f).$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \sim \frac{\chi^2(f)}{\chi^2(f)} = Z = \frac{Q_1}{Q_2} \sim F(f, f) / \underline{\underline{1}}$$

c) Sabemos que, $s: X \sim N(\mu, \Sigma) \Rightarrow X^T A X, B X$ son independientes si y solo si $B^T A = 0$
 Entonces basta con mostrar que, $Q_1 = S^T B Y = \sum_{i=1}^p (S_i - \bar{S})^2$, $Q_2 = D Y = \sum_{i=1}^p S_i$ Donde $D^T B = 0$,
 ya se conoce B , calculemos D .

$$Q_2 = D Y = \mathbb{1}_{I_{X_F}} Y = [1, \dots, 1] \begin{bmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_p \end{bmatrix} = S_1 + \dots + S_p = \sum_{i=1}^p S_i$$

$$\Rightarrow D^T B = DB = \mathbb{1}_{I_{X_F}} (I - \frac{1}{p} \mathbb{1}_{I_{X_F}} \mathbb{1}_{I_{X_F}}^T)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^p S_i, \sum_{i=1}^p (S_i - \bar{S})^2 \text{ son independientes}$$

d) Utilizando lo encontrado en bb).

$$Q_1 \sim \chi^2(p, 0) \quad ; \quad Q_2 \sim \chi^2(p, 0)$$

$$\Rightarrow E[Q_1] = E[Q_2] = p + 2(0) = p$$