№ 2. 3

а)

P	$\overline{P}$	P и $\overline{P}$	$\overline{(P \text{ и } \overline{P})}$
1	0	0	1
0	1	0	1

) - оба истинны при любых P => тавтология

б)

P	$\overline{P}$	$P \Rightarrow \overline{P}$
1	0	0
0	1	1

) - при любых P -> значения разные => не тавтология

в)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	P и $(P \to Q)$	$(P \text{ и } (P \to Q)) \to Q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

При любых P и Q - истинно => тавтология

№ 2.8

б) $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

1) Проверим для $n=1$

$1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2+1)$

$1 = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3$

$1 = 1$ – верно

2) Предположим, что верно для $n=k$

$1^2+2^2+\dots k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

3) Докажем, что верно для $k+1$

$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$

$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6}=$

$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$

$=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=$

$=\frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=$

$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$ ч.т.д.

в) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

1) Проверим для $n=1$

$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2+1}$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ – верно

2) Предположим, что верно для k

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

3) Проверим для $(k+1)$

$\frac{k}{(2k+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}=$

$=\frac{k}{(2k+1)}+\frac{1}{(2k+2-1)(2k+2+1)}=$

$=\frac{k}{(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=$

$=\frac{(2k+3)k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=$

$=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$ ч.т.д.

г) $n^3 - n$ делится на 3 при натур n

1) Проверим для $n = 1$

$\frac{1-1}{3} = \frac{0}{3}$ - верно

2) Предположим верность для k

$k^3 - k \,\%\, 3 = 0$

3) докажем для $(k+1)$

$(k+1)^3 - (k+1) \,\%\, 3 =$

$\cancel{= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k = k(k^2 + 3k + 2) = k(k+1)(k+2)}$

$(k+1)((k+1)^2 - 1) =$

$(k+1)((k+1-1)(k+1+1) = k(k+1)(k+2) \Leftrightarrow$

Три подряд идущих числа, одно из них 100% делится на 3 $\Rightarrow$ верно для $k+1$

ч.т.д.

д) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

1) Проверим для $n = 1$

$1 \cdot 1! = 2! - 1$

$1 = 1$ - верно

2) Предположим верность для k

$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$

3) Проверим для $k+1$

$(k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! =$

$= (k+1)!(k+1+1) - 1 =$

$= (k+2)! - 1 = ((k+1)+1)! - 1$

ч.т.д.