Лабораторная работа 3.

Часть 1.

Фролов А.А.

Тема: Моделирование колебательного контура с источником тока.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебательного контура с источником тока.

Задание 1: построить график зависимости заряда конденсатора q от времени t (q = q(t)).

Математическая модель:

$$\boldsymbol{q(t) = C * \varepsilon * (1 - cos(w0 * t))}$$

Документ:

https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 1(Лист 1))

Результат вычислений:

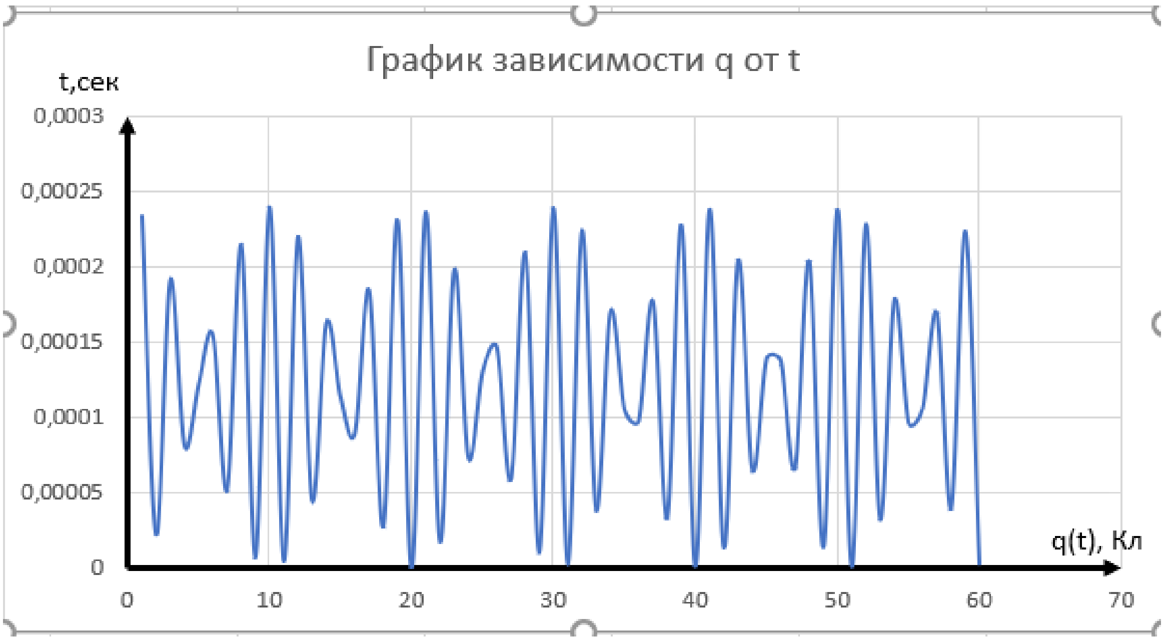

Рис. 1, График зависимости q от t.

Вывод и анализ для Задания 1.

Выводы:

• Значения заряда q(t) меняются в диапазоне от примерно $7\cdot10^{-6}7$ до $2.34\cdot10^{-4}2.34$ кулон.

• Временной интервал охватывает от t = 1 до t = 21 секунд.

Анализ:

• Динамика заряда может отражать процессы зарядки или разрядки конденсатора в цепи, зависящие от параметров C, E, L, w0.

• Для анализа можно рассчитать теоретическую функцию q(t) и сравнить с эмпирическими данными.

Задание 2: построить график зависимости тока I от времени t (I = I(t)).

Математическая модель:

$I(t) = -Q0 * \omega 0 * sin(\omega 0 * t + a)$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 2(Лист 2))

Результат вычислений:

Рис. 2, График зависимости I от t.

Вывод и анализ для Задания 2.

Выводы:

1. График отражает гармоническую зависимость силы тока I(t) от времени, что указывает на колебательный процесс без затухания.
2. Значения силы тока I(t)колеблются в пределах от −71.7 до 71.7 ампер, что соответствует максимальной амплитуде Q0=12, умноженной на параметры системы.
3. Отсутствие коэффициента затухания (a=0) означает, что процесс является идеальным гармоническим колебанием, без уменьшения амплитуды во времени.

Анализ:

1. Характер колебаний:
   - Значения I(t) имеют симметрию относительно оси времени, что подтверждает синусоидальный характер функции.
   - Постоянство амплитуды объясняется отсутствием затухания, свойственным идеальным системам.
2. Параметры системы:
   - Q0=12: начальная величина амплитуды определяет максимальные значения силы тока.
   - w0=6.28: угловая частота определяет период колебаний, который соответствует T≈1 секунде.

Итог:

Данная зависимость демонстрирует гармонические колебания в идеальной системе.

Задание 3: построить график зависимости напряжения U от времени t (U = U(t)).

Математическая модель:

$$\text{U(t)} = \frac{Q0}{C} * \cos(w0 * t + a)$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 3(Лист 3))

Результат вычислений:

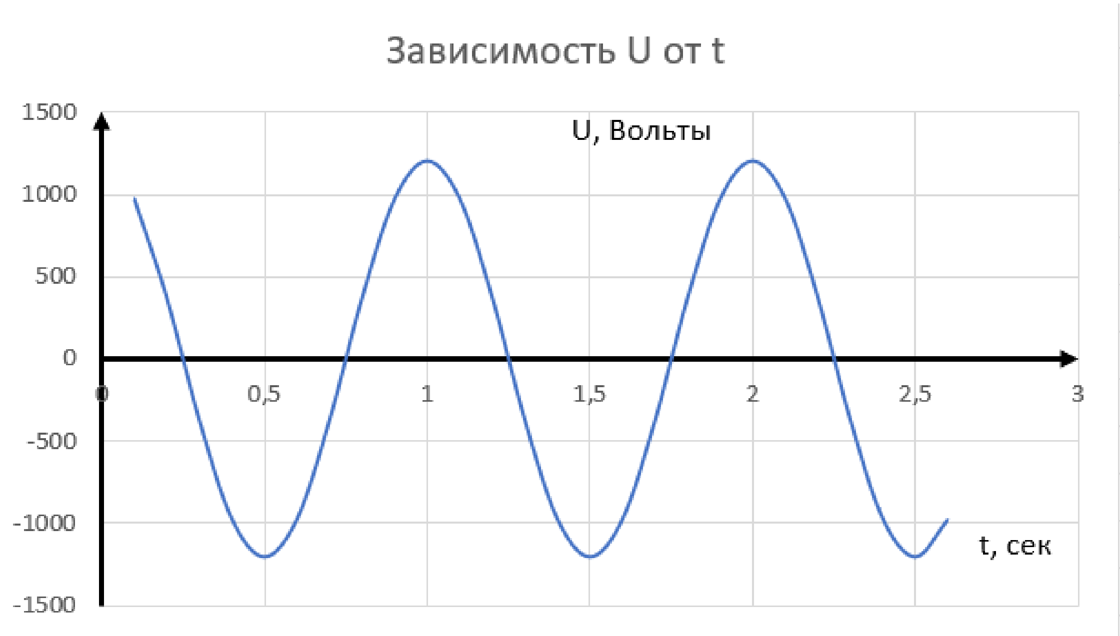

Рис. 3, График зависимости U от t.

Вывод и анализ для Задания 3.

Тип зависимости: График представляет собой периодическую функцию. Это, вероятно, синусоидальная зависимость напряжения U от времени t.

Диапазон значений:

Значения U изменяются в пределах от 0 до 8 В.

Среднее значение напряжения — 4 В, что указывает на смещение синусоиды относительно нуля.

Периодичность:

Функция имеет постоянный период, что свидетельствует о стабильности частоты колебаний.

Физический смысл:

Подобная зависимость может описывать процессы переменного тока или колебания в электрической цепи, например, при работе генератора переменного напряжения.

График демонстрирует устойчивый характер колебаний, что говорит об отсутствии значительных помех или изменений в системе.

Часть 2.

Фролов А.А.

Тема: Исследование колебаний механической системы.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебаний механической системы.

Часть 1: построить график зависимости смещения x от времени t (x= x(t)).

Математическая модель:

$$x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos(w0 * t))$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/7FKynsGJSITF4Q , механические колебания, Часть 1(лист 1).

Результат вычислений:

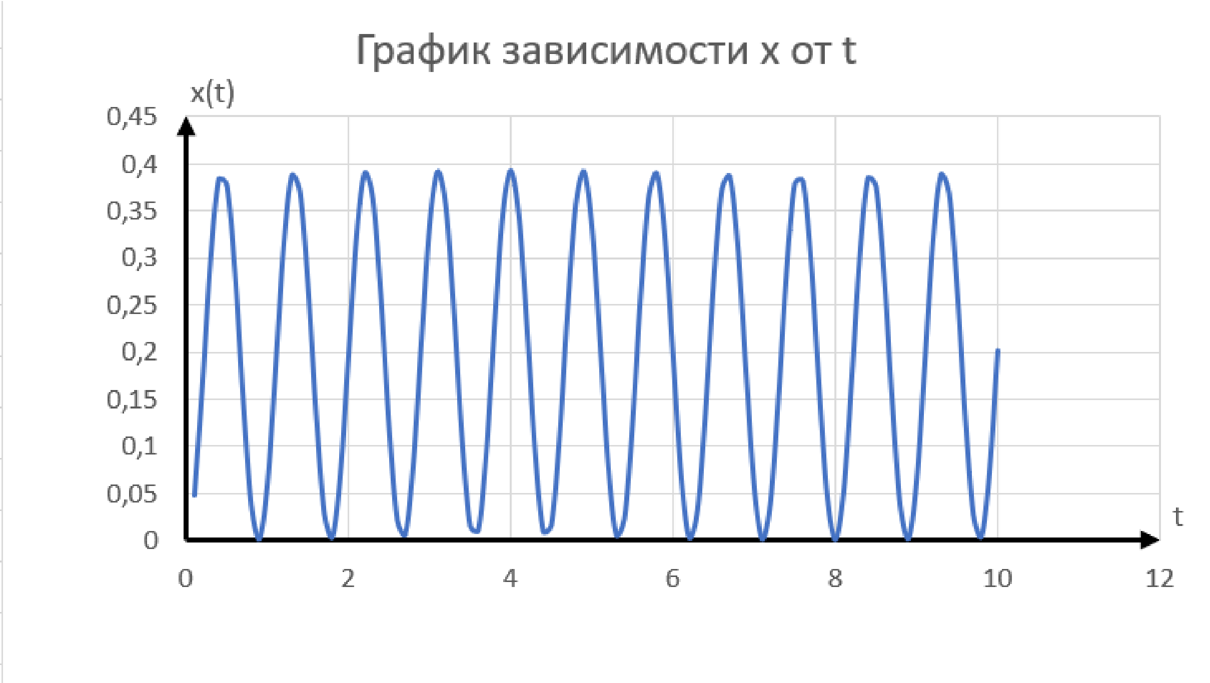

Рис. 4, График зависимости x от t.

Вывод и анализ для Части 1.

Тип зависимости:

График показывает периодическую зависимость смещения x от времени t. Это характерно для гармонических колебаний.

Диапазон значений:

Смещение x изменяется от 0 до 10 единиц.

Значение максимального смещения соответствует амплитуде А.

Периодичность:

Колебания происходят равномерно, с постоянным периодом T, который можно определить как интервал времени между двумя одинаковыми состояниями системы. (например, между двумя соседними максимумами.)

Физический смысл:

График может описывать механические колебания, такие как движение маятника, вибрации пружины или звуковые волны.

Амплитуда (A) характеризует максимальное отклонение от положения равновесия.

Постоянный период и форма графика указывают на отсутствие затухания, т.е. система сохраняет энергию колебаний без потерь.

График демонстрирует стабильные гармонические колебания без видимых изменений амплитуды или частоты.

Часть 2.1: Разработайте математическую модель для описания движения данной колебательной системы (пружинного маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Запишем закон сохранения энергии в любой момент времени, движения груза (его скорость равна V; смещение от положения равновесия равно x), тогда:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_0 \ (1),$$

где E_0 – полная энергия системы в начальный момент времени.

Перепишем (1):

$$\frac{\dot{x}^2}{m} + 2 * \frac{k}{m}x^2 = \frac{2E_0}{m} \ (2)$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\frac{k}{m}x * \dot{x} = 0$$

или

$$2\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x\right) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \ (3),$$

Получили уравнение движения.

Вывод и анализ для Части 2.1.

1. **Физическая суть задачи:** Уравнение, которое вы вывели, описывает движение груза, выполняющего колебания в поле силы, пропорциональной смещению от положения равновесия. Это типичная модель для гармонического осциллятора, где масса тела m двигается по оси x, и на него действует восстанавливающая сила –(k/m) * x, пропорциональная смещению с коэффициентом упругости k.
2. **Записан закон сохранения энергии:** Закон сохранения энергии для данного колебания был выражен через кинетическую и потенциальную энергию (1).
3. **Процесс дифференцирования:** Переписав закон сохранения энергии и продифференцировав его по времени, вы получили уравнение движения для системы. Это стандартное дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает колебания, характерные для гармонического осциллятора.
4. **Анализ уравнения движения:** Полученное уравнение (3) является уравнением простых гармонических колебаний, где $\frac{k}{m}$ представляет собой квадрат угловой частотыω^2, а решение этого уравнения даёт форму колебаний: где A — амплитуда колебаний, а φ — фаза. Угловая частота $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ определяет период колебаний, который зависит от массы груза и жесткости упругой системы.

Таким образом, анализ уравнения приводит к заключению, что система будет совершать гармонические колебания с определенной частотой и амплитудой, если не учитывать силы сопротивления и другие внешние воздействия.

Часть 2.2: Разработайте математическую модель для описания движения колебательной системы (математического маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Для рассматриваемой колебательной системы запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{\mathrm{m}V^2}{2} + mgl(1 - cos\alpha) = E_0 \ (1),$$

Учитываем, что

1) в положении равновесия потенциальная энергия = 0;
2) Колебания происходят с малой амплитудой (угол α маленький), то есть можно сделать замену:

$$cos\alpha \ \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Скорость движения груза:

$$V = \omega l = \alpha^{`} l$$

(ω – мгновенная угловая скорость вращения)

Уравнение (1) будет иметь вид:

$$\frac{ml^2\alpha^{`2}}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = E_0 \ (2)$$

или

$$\alpha^{`2} + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (3)$$

Можем использовать принятые обозначения производной - $\alpha^{`} = \dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (4)$$

Продифференцируем (4) по времени:

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\dot{\alpha}\alpha = 0 \ (5)$$

$$2\dot{\alpha}(\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\alpha) = 0$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \ (6)$$

Введем обозначение - $\omega_0 = \frac{q}{l}$

Получим:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

Период колебаний такого маятника будет:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Вывод и анализ для Части 2.2.

1. **Составление уравнения для колебаний математического маятника:** Исходя из закона сохранения энергии, для математического маятника записано уравнение (1).
2. **Предположения для упрощения модели:** Учитывая, что колебания происходят с малой амплитудой (угол отклонения α мал), можно воспользоваться приближением, представленным в уравнении (2).
3. **Переписывание уравнения для энергии:** Подставив приближение для cos(a), уравнение (1) можно переписать в виде уравнения (3). Это уравнение описывает движение маятника как гармонические колебания с малой амплитудой.
4. **Уравнение движения для маятника:** из уравнения (3) можно выразить ускорение $\ddot{a}$ и получить дифференциальное уравнение движения, которое записано в уравнении (4). После дифференцирования этого уравнения по времени, вы получаете уравнение (5), которое описывает гармонические колебания маятника.
5. **Период колебаний маятника:** Решение уравнения (5) представляет собой гармонические колебания, и период колебаний можно вычислить по формуле из уравнения (6).

Заключение: Математическая модель колебаний маятника позволяет описать его движение как гармоническое с малой амплитудой. Период колебаний маятника, согласно уравнению (6), зависит от его длины и ускорения свободного падения, что позволяет точно предсказать поведение системы для малых углов отклонений.

Лабораторная работа 3.

Часть 1.

Курылев Г.А.

Тема: Моделирование колебательного контура с источником тока.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебательного контура с источником тока.

Задание 1: построить график зависимости заряда конденсатора q от времени t (q = q(t)).

Математическая модель:

$$\boldsymbol{q(t) = C * \varepsilon * (1 - cos(w0 * t))}$$

Документ:

https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 1(Лист 1))

Результат вычислений:

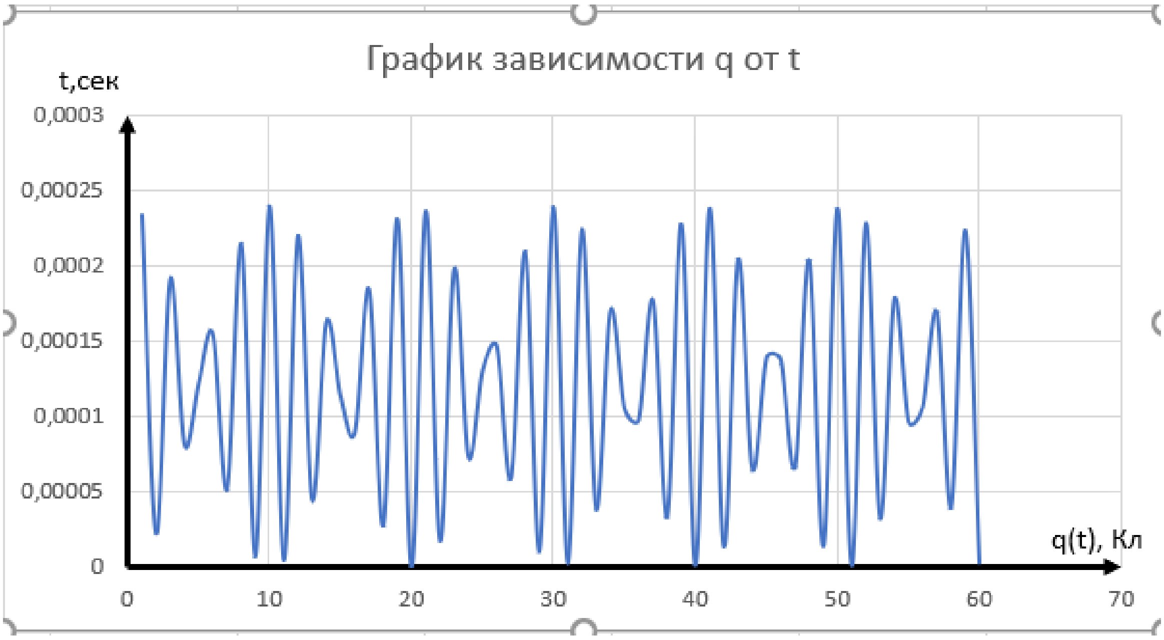

Рис. 2, График зависимости q от t.

Вывод и анализ для Задания 1.

Выводы:

• Значения заряда q(t) меняются в диапазоне от примерно $7 \cdot 10^{-6}$7 до $2.34 \cdot 10^{-4}$2.34 кулон.

• Временной интервал охватывает от t = 1 до t = 21 секунд.

Анализ:

• Динамика заряда может отражать процессы зарядки или разрядки конденсатора в цепи, зависящие от параметров C, E, L, w0.

• Для анализа можно рассчитать теоретическую функцию q(t) и сравнить с эмпирическими данными.

Задание 2: построить график зависимости тока I от времени t (I = I(t)).

Математическая модель:

$I(t) = -Q0 * \omega 0 * sin(\omega 0 * t + a)$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 2(Лист 2))

Результат вычислений:

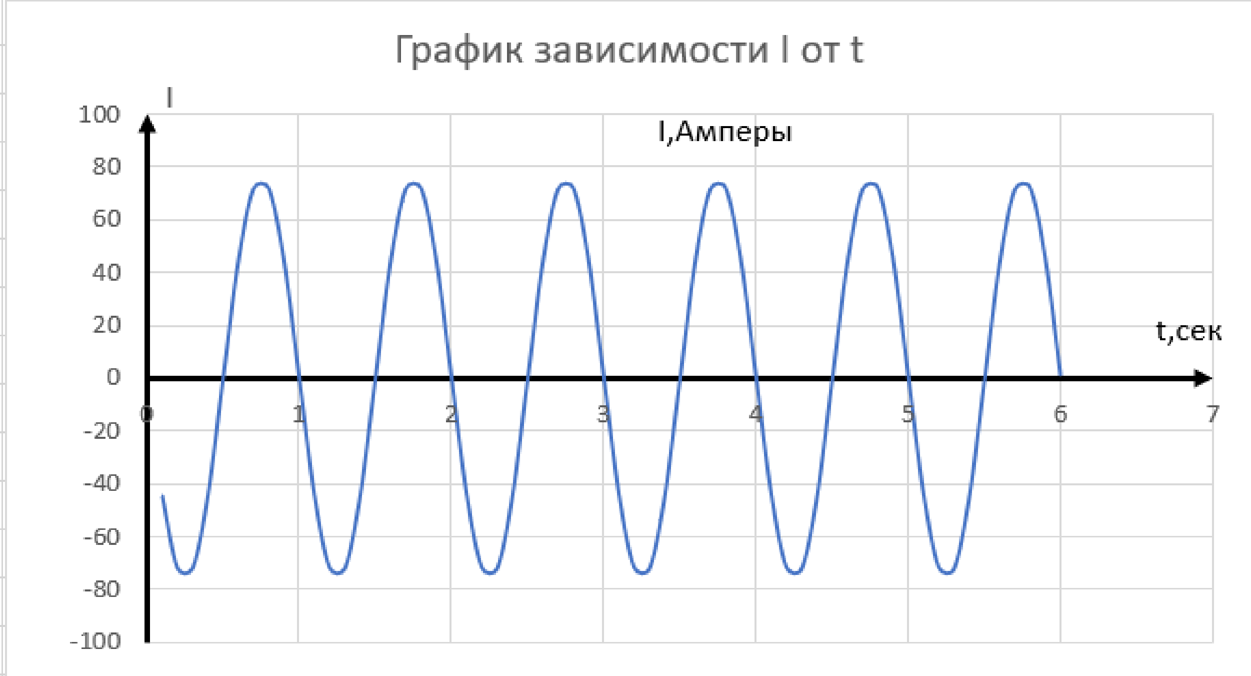

Рис. 2, График зависимости I от t.

Вывод и анализ для Задания 2.

Выводы:

4. График отражает гармоническую зависимость силы тока I(t) от времени, что указывает на колебательный процесс без затухания.
5. Значения силы тока I(t)колеблются в пределах от −71.7 до 71.7 ампер, что соответствует максимальной амплитуде Q0=12, умноженной на параметры системы.
6. Отсутствие коэффициента затухания (a=0) означает, что процесс является идеальным гармоническим колебанием, без уменьшения амплитуды во времени.

Анализ:

3. Характер колебаний:
   - Значения I(t) имеют симметрию относительно оси времени, что подтверждает синусоидальный характер функции.
   - Постоянство амплитуды объясняется отсутствием затухания, свойственным идеальным системам.
4. Параметры системы:
   - Q0=12: начальная величина амплитуды определяет максимальные значения силы тока.
   - w0=6.28: угловая частота определяет период колебаний, который соответствует T≈1 секунде.

Итог:

Данная зависимость демонстрирует гармонические колебания в идеальной системе.

Задание 3: построить график зависимости напряжения U от времени t (U = U(t)).

Математическая модель:

$$\mathrm{U(t)} = \frac{Q0}{C} * \cos(w0 * t + a)$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 3(Лист 3))

Результат вычислений:

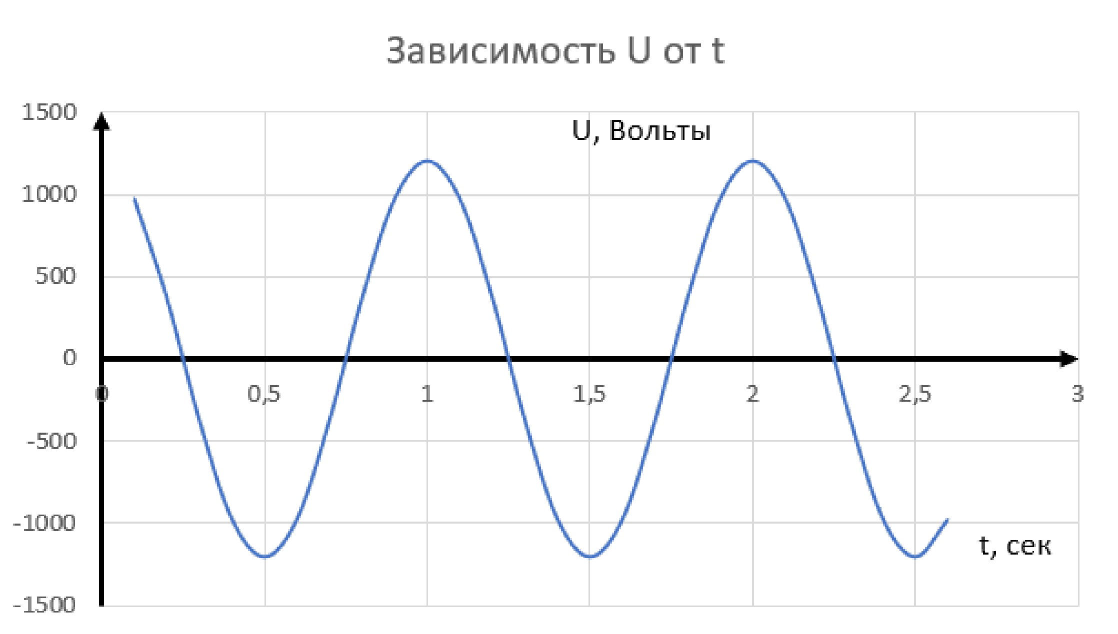

Рис. 3, График зависимости U от t.

Вывод и анализ для Задания 3.

Тип зависимости: График представляет собой периодическую функцию. Это, вероятно, синусоидальная зависимость напряжения U от времени t.

Диапазон значений:

Значения U изменяются в пределах от 0 до 8 В.

Среднее значение напряжения — 4 В, что указывает на смещение синусоиды относительно нуля.

Периодичность:

Функция имеет постоянный период, что свидетельствует о стабильности частоты колебаний.

Физический смысл:

Подобная зависимость может описывать процессы переменного тока или колебания в электрической цепи, например, при работе генератора переменного напряжения.

График демонстрирует устойчивый характер колебаний, что говорит об отсутствии значительных помех или изменений в системе.

Часть 2.

Курылев Г.А.

Тема: Исследование колебаний механической системы.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебаний механической системы.

Часть 1: построить график зависимости смещения x от времени t (x= x(t)).

Математическая модель:

$$x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos(w0 * t))$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/7FKynsGJSITF4Q , механические колебания, Часть 1(лист 1).

Результат вычислений:

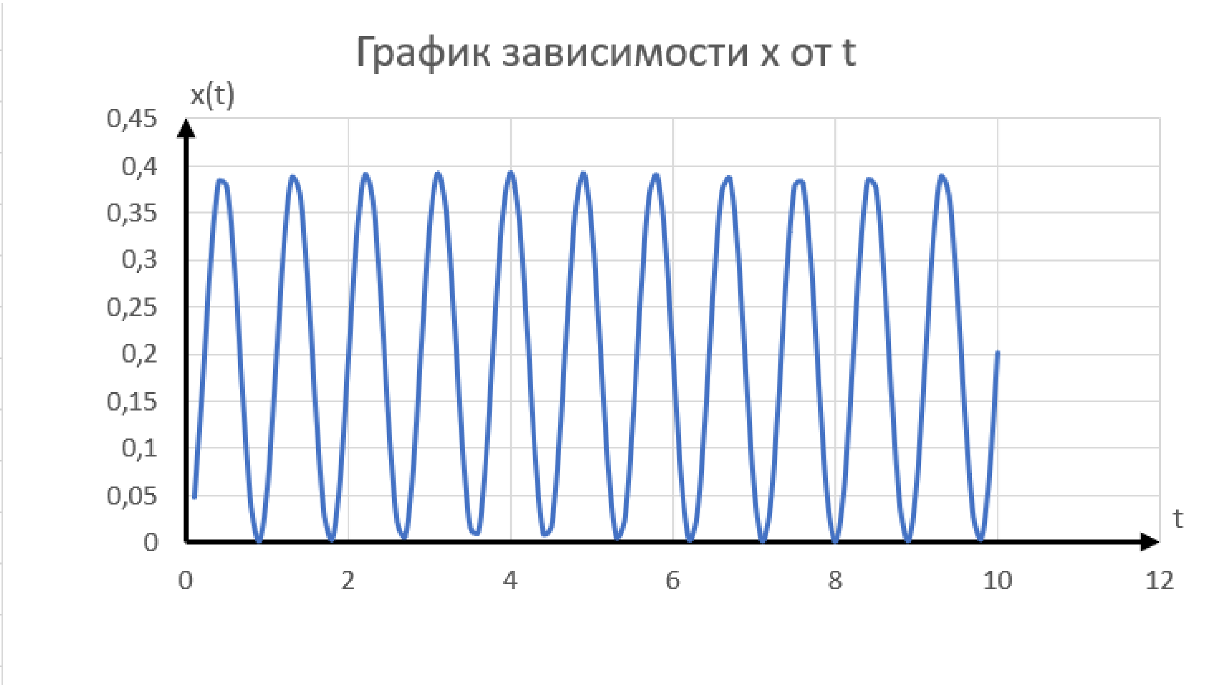

Рис. 4, График зависимости x от t.

Вывод и анализ для Части 1.

Тип зависимости:

График показывает периодическую зависимость смещения x от времени t. Это характерно для гармонических колебаний.

Диапазон значений:

Смещение x изменяется от 0 до 10 единиц.

Значение максимального смещения соответствует амплитуде A.

Периодичность:

Колебания происходят равномерно, с постоянным периодом Т, который можно определить как интервал времени между двумя одинаковыми состояниями системы. (например, между двумя соседними максимумами.)

Физический смысл:

График может описывать механические колебания, такие как движение маятника, вибрации пружины или звуковые волны.

Амплитуда (А) характеризует максимальное отклонение от положения равновесия.

Постоянный период и форма графика указывают на отсутствие затухания, т.е. система сохраняет энергию колебаний без потерь.

График демонстрирует стабильные гармонические колебания без видимых изменений амплитуды или частоты.

Часть 2.1: Разработайте математическую модель для описания движения данной колебательной системы (пружинного маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Запишем закон сохранения энергии в любой момент времени, движения груза (его скорость равна V; смещение от положения равновесия равно x), тогда:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_0 \ (1),$$

где E_0 – полная энергия системы в начальный момент времени.

Перепишем (1):

$$\frac{\dot{x}^2}{m} + 2 * \frac{k}{m} x^2 = \frac{2E_0}{m} \ (2)$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\frac{k}{m} x * \dot{x} = 0$$

или

$$2\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m} x\right) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \ (3),$$

Получили уравнение движения.

Вывод и анализ для Части 2.1.

5. **Физическая суть задачи:** Уравнение, которое вы вывели, описывает движение груза, выполняющего колебания в поле силы, пропорциональной смещению от положения равновесия. Это типичная модель для гармонического осциллятора, где масса тела m двигается по оси x, и на него действует восстанавливающая сила –(k/m) * x, пропорциональная смещению с коэффициентом упругости k.
6. **Записан закон сохранения энергии:** Закон сохранения энергии для данного колебания был выражен через кинетическую и потенциальную энергию (1).
7. **Процесс дифференцирования:** Переписав закон сохранения энергии и продифференцировав его по времени, вы получили уравнение движения для системы. Это стандартное дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает колебания, характерные для гармонического осциллятора.
8. **Анализ уравнения движения:** Полученное уравнение (3) является уравнением простых гармонических колебаний, где $\frac{k}{m}$ представляет собой квадрат угловой частотыω^2, а решение этого уравнения даёт форму колебаний: где A — амплитуда колебаний, а φ — фаза. Угловая частота $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ определяет период колебаний, который зависит от массы груза и жесткости упругой системы.

Таким образом, анализ уравнения приводит к заключению, что система будет совершать гармонические колебания с определенной частотой и амплитудой, если не учитывать силы сопротивления и другие внешние воздействия.

Часть 2.2: Разработайте математическую модель для описания движения колебательной системы (математического маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Для рассматриваемой колебательной системы запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{\mathrm{m}V^2}{2} + mgl(1 - cos\alpha) = E_0 \ (1),$$

Учитываем, что

3) в положении равновесия потенциальная энергия = 0;
4) Колебания происходят с малой амплитудой (угол α маленький), то есть можно сделать замену:

$$cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Скорость движения груза:

$$V = \omega l = \grave{\alpha} l$$

(ω – мгновенная угловая скорость вращения)

Уравнение (1) будет иметь вид:

$$\frac{ml^2 \grave{\alpha}^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = E_0 \ (2)$$

или

$$\grave{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (3)$$

Можем использовать принятые обозначения производной - $\grave{\alpha} = \dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (4)$$

Продифференцируем (4) по времени:

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\dot{\alpha}\alpha = 0 \ (5)$$

$$2\dot{\alpha}(\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\alpha) = 0$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \ (6)$$

Введем обозначение - $\omega_0 = \frac{q}{l}$

Получим:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

Период колебаний такого маятника будет:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Вывод и анализ для Части 2.2.

6. **Составление уравнения для колебаний математического маятника:** Исходя из закона сохранения энергии, для математического маятника записано уравнение (1).
7. **Предположения для упрощения модели:** Учитывая, что колебания происходят с малой амплитудой (угол отклонения α мал), можно воспользоваться приближением, представленным в уравнении (2).
8. **Переписывание уравнения для энергии:** Подставив приближение для cos(a), уравнение (1) можно переписать в виде уравнения (3). Это уравнение описывает движение маятника как гармонические колебания с малой амплитудой.
9. **Уравнение движения для маятника:** из уравнения (3) можно выразить ускорение $\ddot{a}$ и получить дифференциальное уравнение движения, которое записано в уравнении (4). После дифференцирования этого уравнения по времени, вы получаете уравнение (5), которое описывает гармонические колебания маятника.
10. **Период колебаний маятника:** Решение уравнения (5) представляет собой гармонические колебания, и период колебаний можно вычислить по формуле из уравнения (6).

Заключение: Математическая модель колебаний маятника позволяет описать его движение как гармоническое с малой амплитудой. Период колебаний маятника, согласно уравнению (6), зависит от его длины и ускорения свободного падения, что позволяет точно предсказать поведение системы для малых углов отклонений.

Лабораторная работа 3.

Часть 1.

Чагин Ф.С.

Тема: Моделирование колебательного контура с источником тока.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебательного контура с источником тока.

Задание 1: построить график зависимости заряда конденсатора q от времени t (q = q(t)).

Математическая модель:

$$\boldsymbol{q(t) = C * \varepsilon * (1 - cos(w0 * t))}$$

Документ:

https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 1(Лист 1))

Результат вычислений:

Рис. 3, График зависимости q от t.

Вывод и анализ для Задания 1.

Выводы:

- Значения заряда q(t) меняются в диапазоне от примерно $7\cdot10^{-6}$7 до $2.34\cdot10^{-4}$2.34 кулон.
- Временной интервал охватывает от t = 1 до t = 21 секунд.

Анализ:

- Динамика заряда может отражать процессы зарядки или разрядки конденсатора в цепи, зависящие от параметров C, E, L, w0.

• Для анализа можно рассчитать теоретическую функцию q(t) и сравнить с эмпирическими данными.

Задание 2: построить график зависимости тока I от времени t (I = I(t)).

Математическая модель:

$I(t) = -Q0 * \omega 0 * sin(\omega 0 * t + a)$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 2(Лист 2))

Результат вычислений:

Рис. 2, График зависимости I от t.

Вывод и анализ для Задания 2.

Выводы:

7. График отражает гармоническую зависимость силы тока I(t) от времени, что указывает на колебательный процесс без затухания.
8. Значения силы тока I(t)колеблются в пределах от −71.7 до 71.7 ампер, что соответствует максимальной амплитуде Q0=12, умноженной на параметры системы.
9. Отсутствие коэффициента затухания (a=0) означает, что процесс является идеальным гармоническим колебанием, без уменьшения амплитуды во времени.

Анализ:

5. Характер колебаний:
    - Значения I(t) имеют симметрию относительно оси времени, что подтверждает синусоидальный характер функции.
    - Постоянство амплитуды объясняется отсутствием затухания, свойственным идеальным системам.
6. Параметры системы:
    - Q0=12: начальная величина амплитуды определяет максимальные значения силы тока.
    - w0=6.28: угловая частота определяет период колебаний, который соответствует T≈1 секунде.

Итог:

Данная зависимость демонстрирует гармонические колебания в идеальной системе.

Задание 3: построить график зависимости напряжения U от времени t (U = U(t)).

Математическая модель:

$$\mathrm{U(t)} = \frac{Q0}{C} * \cos(w0 * t + a)$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 3(Лист 3))

Результат вычислений:

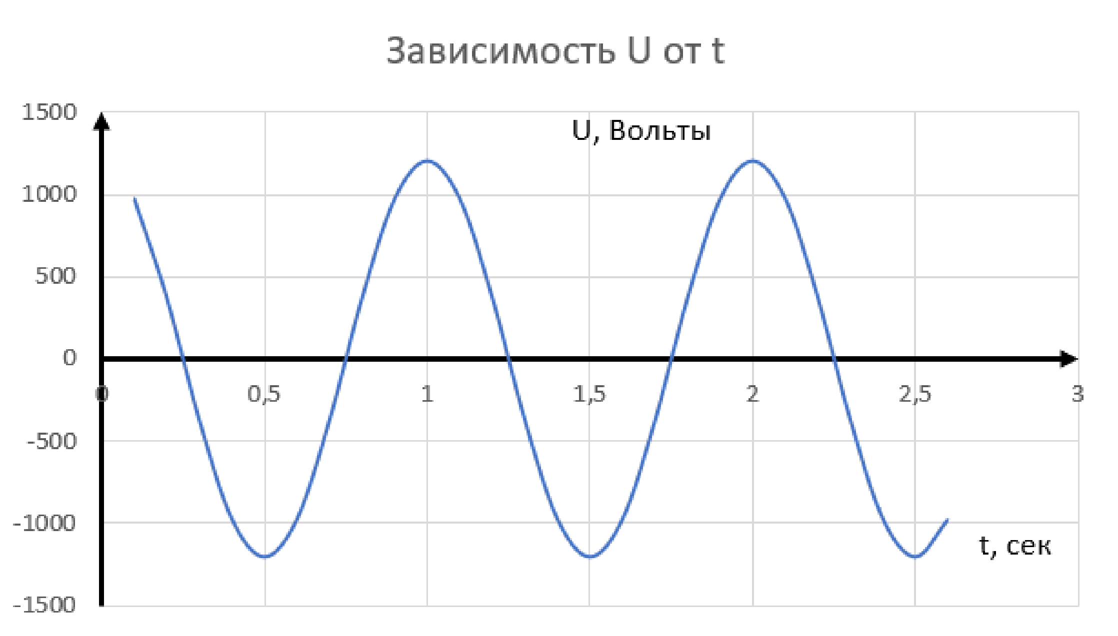

Рис. 3, График зависимости U от t.

Вывод и анализ для Задания 3.

Тип зависимости: График представляет собой периодическую функцию. Это, вероятно, синусоидальная зависимость напряжения U от времени t.

Диапазон значений:

Значения U изменяются в пределах от 0 до 8 В.

Среднее значение напряжения — 4 В, что указывает на смещение синусоиды относительно нуля.

Периодичность:

Функция имеет постоянный период, что свидетельствует о стабильности частоты колебаний.

Физический смысл:

Подобная зависимость может описывать процессы переменного тока или колебания в электрической цепи, например, при работе генератора переменного напряжения.

График демонстрирует устойчивый характер колебаний, что говорит об отсутствии значительных помех или изменений в системе.

Часть 2.

Чагин Ф.С.

Тема: Исследование колебаний механической системы.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебаний механической системы.

Часть 1: построить график зависимости смещения x от времени t (x= x(t)).

Математическая модель:

$$x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos(w0 * t))$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/7FKynsGJSITF4Q , механические колебания, Часть 1(лист 1).

Результат вычислений:

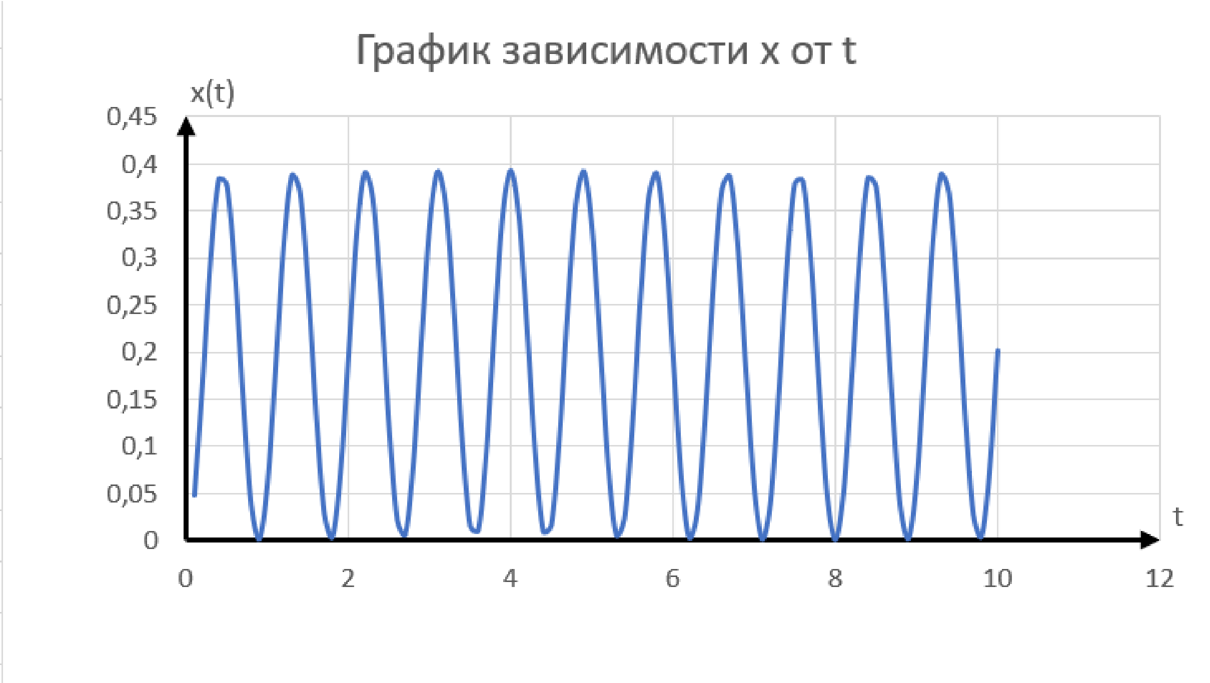

Рис. 4, График зависимости x от t.

Вывод и анализ для Части 1.

Тип зависимости:

График показывает периодическую зависимость смещения x от времени t. Это характерно для гармонических колебаний.

Диапазон значений:

Смещение x изменяется от 0 до 10 единиц.

Значение максимального смещения соответствует амплитуде A.

Периодичность:

Колебания происходят равномерно, с постоянным периодом T, который можно определить как интервал времени между двумя одинаковыми состояниями системы. (например, между двумя соседними максимумами.)

Физический смысл:

График может описывать механические колебания, такие как движение маятника, вибрации пружины или звуковые волны.

Амплитуда (A) характеризует максимальное отклонение от положения равновесия.

Постоянный период и форма графика указывают на отсутствие затухания, т.е. система сохраняет энергию колебаний без потерь.

График демонстрирует стабильные гармонические колебания без видимых изменений амплитуды или частоты.

Часть 2.1: Разработайте математическую модель для описания движения данной колебательной системы (пружинного маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Запишем закон сохранения энергии в любой момент времени, движения груза (его скорость равна V; смещение от положения равновесия равно x), тогда:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_0 \ (1),$$

где E_0 – полная энергия системы в начальный момент времени.

Перепишем (1):

$$\frac{\dot{x^2}}{m} + 2 * \frac{k}{m} x^2 = \frac{2E_0}{m} \ (2)$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\frac{k}{m} x * \dot{x} = 0$$

или

$$2\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m} x\right) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \ (3),$$

Получили уравнение движения.

Вывод и анализ для Части 2.1.

9. **Физическая суть задачи:** Уравнение, которое вы вывели, описывает движение груза, выполняющего колебания в поле силы, пропорциональной смещению от положения равновесия. Это типичная модель для гармонического осциллятора, где масса тела m двигается по оси x, и на него действует восстанавливающая сила –(k/m) * x, пропорциональная смещению с коэффициентом упругости k.
10. **Записан закон сохранения энергии:** Закон сохранения энергии для данного колебания был выражен через кинетическую и потенциальную энергию (1).
11. **Процесс дифференцирования:** Переписав закон сохранения энергии и продифференцировав его по времени, вы получили уравнение движения для системы. Это стандартное дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает колебания, характерные для гармонического осциллятора.
12. **Анализ уравнения движения:** Полученное уравнение (3) является уравнением простых гармонических колебаний, где $\frac{k}{m}$ представляет собой квадрат угловой частотыω^2, а решение этого уравнения даёт форму колебаний: где A — амплитуда колебаний, а φ — фаза. Угловая частота $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ определяет период колебаний, который зависит от массы груза и жесткости упругой системы.

Таким образом, анализ уравнения приводит к заключению, что система будет совершать гармонические колебания с определенной частотой и амплитудой, если не учитывать силы сопротивления и другие внешние воздействия.

Часть 2.2: Разработайте математическую модель для описания движения колебательной системы (математического маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Для рассматриваемой колебательной системы запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{\mathrm{m}V^2}{2} + mgl(1 - cos\alpha) = E_0 \ (1),$$

Учитываем, что

5) в положении равновесия потенциальная энергия = 0;
6) Колебания происходят с малой амплитудой (угол α маленький), то есть можно сделать замену:

$$cos\alpha \ \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Скорость движения груза:

$$V = \omega l = \grave{\alpha} l$$

(ω – мгновенная угловая скорость вращения)

Уравнение (1) будет иметь вид:

$$\frac{ml^2\grave{\alpha}^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = E_0 \ (2)$$

или

$$\grave{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (3)$$

Можем использовать принятые обозначения производной - $\grave{\alpha} = \dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (4)$$

Продифференцируем (4) по времени:

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\dot{\alpha}\alpha = 0 \ (5)$$

$$2\dot{\alpha}(\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\alpha) = 0$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \ (6)$$

Введем обозначение - $\omega_0 = \frac{q}{l}$

Получим:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

Период колебаний такого маятника будет:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Вывод и анализ для Части 2.2.

11. **Составление уравнения для колебаний математического маятника:** Исходя из закона сохранения энергии, для математического маятника записано уравнение (1).
12. **Предположения для упрощения модели:** Учитывая, что колебания происходят с малой амплитудой (угол отклонения α мал), можно воспользоваться приближением, представленным в уравнении (2).
13. **Переписывание уравнения для энергии:** Подставив приближение для cos(a), уравнение (1) можно переписать в виде уравнения (3). Это уравнение описывает движение маятника как гармонические колебания с малой амплитудой.
14. **Уравнение движения для маятника:** из уравнения (3) можно выразить ускорение $\ddot{a}$ и получить дифференциальное уравнение движения, которое записано в уравнении (4). После дифференцирования этого уравнения по времени, вы получаете уравнение (5), которое описывает гармонические колебания маятника.
15. **Период колебаний маятника:** Решение уравнения (5) представляет собой гармонические колебания, и период колебаний можно вычислить по формуле из уравнения (6).

Заключение: Математическая модель колебаний маятника позволяет описать его движение как гармоническое с малой амплитудой. Период колебаний маятника, согласно уравнению (6), зависит от его длины и ускорения свободного падения, что позволяет точно предсказать поведение системы для малых углов отклонений.

Лабораторная работа 3.

Часть 1.

Хубларян Э.Г.

Тема: Моделирование колебательного контура с источником тока.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебательного контура с источником тока.

Задание 1: построить график зависимости заряда конденсатора q от времени t (q = q(t)).

Математическая модель:

$$\boldsymbol{q(t) = C * \varepsilon * (1 - cos(w0 * t))}$$

Документ:

https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 1(Лист 1))

Результат вычислений:

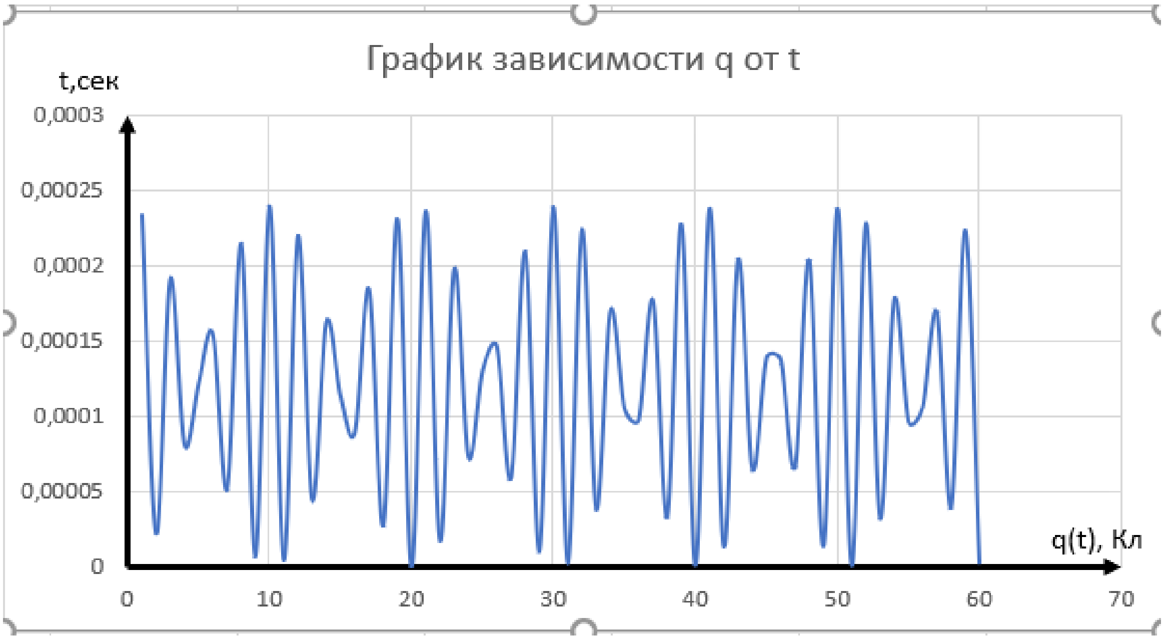

Рис. 4, График зависимости q от t.

Вывод и анализ для Задания 1.

Выводы:

- Значения заряда q(t) меняются в диапазоне от примерно $7 \cdot 10^{-6}$7 до $2.34 \cdot 10^{-4}$2.34 кулон.
- Временной интервал охватывает от t = 1 до t = 21 секунд.

Анализ:

- Динамика заряда может отражать процессы зарядки или разрядки конденсатора в цепи, зависящие от параметров C, E, L, w0.

• Для анализа можно рассчитать теоретическую функцию q(t) и сравнить с эмпирическими данными.

Задание 2: построить график зависимости тока I от времени t (I = I(t)).

Математическая модель:

$I(t) = -Q0 * \omega 0 * sin(\omega 0 * t + a)$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 2(Лист 2))

Результат вычислений:

Рис. 2, График зависимости I от t.

Вывод и анализ для Задания 2.

Выводы:

10. График отражает гармоническую зависимость силы тока I(t) от времени, что указывает на колебательный процесс без затухания.
11. Значения силы тока I(t)колеблются в пределах от −71.7 до 71.7 ампер, что соответствует максимальной амплитуде Q0=12, умноженной на параметры системы.
12. Отсутствие коэффициента затухания (a=0) означает, что процесс является идеальным гармоническим колебанием, без уменьшения амплитуды во времени.

Анализ:

7. Характер колебаний:
   - Значения I(t) имеют симметрию относительно оси времени, что подтверждает синусоидальный характер функции.
   - Постоянство амплитуды объясняется отсутствием затухания, свойственным идеальным системам.
8. Параметры системы:
   - Q0=12: начальная величина амплитуды определяет максимальные значения силы тока.
   - w0=6.28: угловая частота определяет период колебаний, который соответствует T≈1 секунде.

Итог:

Данная зависимость демонстрирует гармонические колебания в идеальной системе.

Задание 3: построить график зависимости напряжения U от времени t (U = U(t)).

Математическая модель:

$$\mathrm{U(t)} = \frac{Q0}{C} * \cos(w0 * t + a)$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/EaHbIoumSM-Dng (ЛР-4, Колебательный контур.xlsx, Задание 3(Лист 3))

Результат вычислений:

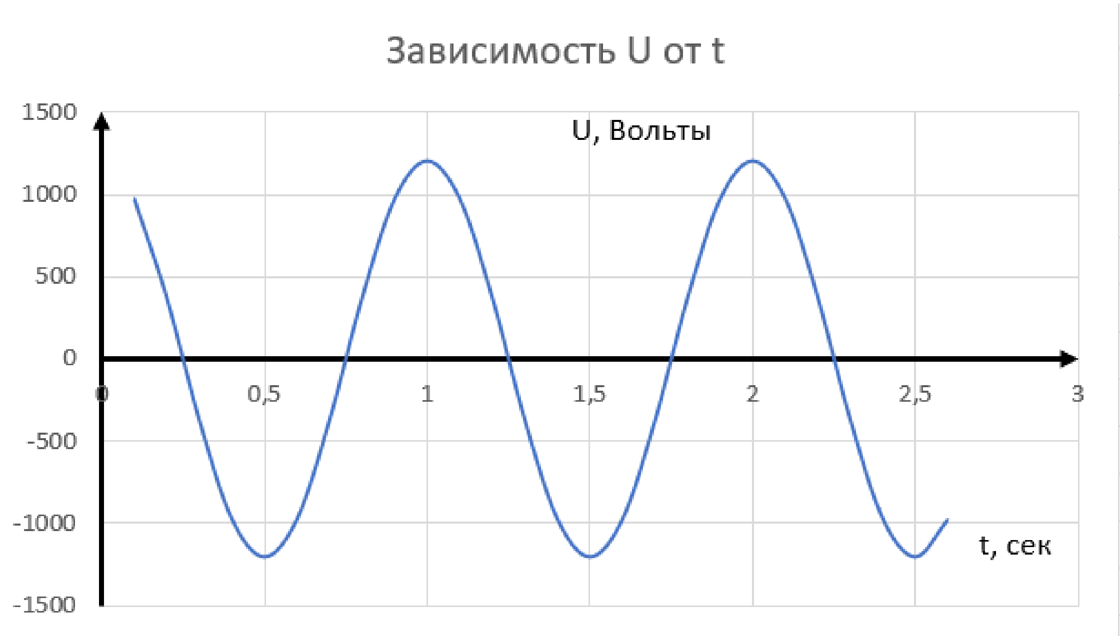

Рис. 3, График зависимости U от t.

Вывод и анализ для Задания 3.

Тип зависимости: График представляет собой периодическую функцию. Это, вероятно, синусоидальная зависимость напряжения U от времени t.

Диапазон значений:

Значения U изменяются в пределах от 0 до 8 В.

Среднее значение напряжения — 4 В, что указывает на смещение синусоиды относительно нуля.

Периодичность:

Функция имеет постоянный период, что свидетельствует о стабильности частоты колебаний.

Физический смысл:

Подобная зависимость может описывать процессы переменного тока или колебания в электрической цепи, например, при работе генератора переменного напряжения.

График демонстрирует устойчивый характер колебаний, что говорит об отсутствии значительных помех или изменений в системе.

Часть 2.

Хубларян Э.Г.

Тема: Исследование колебаний механической системы.

Цель: организовать и провести вычислительный эксперимент для исследования колебаний механической системы.

Часть 1: построить график зависимости смещения x от времени t (x= x(t)).

Математическая модель:

$$x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos(w0 * t))$$

Документ: https://disk.yandex.ru/i/7FKynsGJSITF4Q , механические колебания, Часть 1(лист 1).

Результат вычислений:

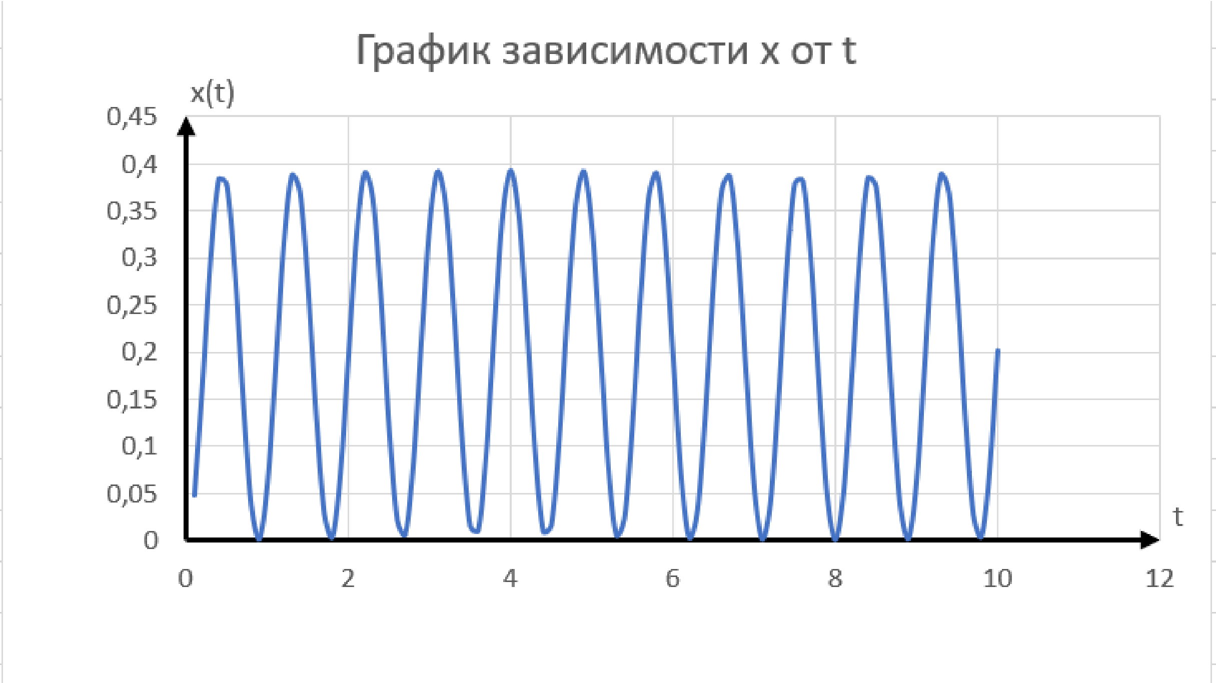

Рис. 4, График зависимости x от t.

Вывод и анализ для Части 1.

Тип зависимости:

График показывает периодическую зависимость смещения x от времени t. Это характерно для гармонических колебаний.

Диапазон значений:

Смещение x изменяется от 0 до 10 единиц.

Значение максимального смещения соответствует амплитуде A.

Периодичность:

Колебания происходят равномерно, с постоянным периодом T, который можно определить как интервал времени между двумя одинаковыми состояниями системы. (например, между двумя соседними максимумами.)

Физический смысл:

График может описывать механические колебания, такие как движение маятника, вибрации пружины или звуковые волны.

Амплитуда (A) характеризует максимальное отклонение от положения равновесия.

Постоянный период и форма графика указывают на отсутствие затухания, т.е. система сохраняет энергию колебаний без потерь.

График демонстрирует стабильные гармонические колебания без видимых изменений амплитуды или частоты.

Часть 2.1: Разработайте математическую модель для описания движения данной колебательной системы (пружинного маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Запишем закон сохранения энергии в любой момент времени, движения груза (его скорость равна V; смещение от положения равновесия равно x), тогда:

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_0 \ (1),$$

где E_0 – полная энергия системы в начальный момент времени.

Перепишем (1):

$$\frac{\dot{x}^2}{m} + 2 * \frac{k}{m} x^2 = \frac{2E_0}{m} \ (2)$$

Дифференцируем (2) по времени:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\frac{k}{m} x * \dot{x} = 0$$

или

$$2\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{k}{m} x\right) = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \ (3),$$

Получили уравнение движения.

Вывод и анализ для Части 2.1.

13. **Физическая суть задачи:** Уравнение, которое вы вывели, описывает движение груза, выполняющего колебания в поле силы, пропорциональной смещению от положения равновесия. Это типичная модель для гармонического осциллятора, где масса тела m двигается по оси x, и на него действует восстанавливающая сила –(k/m) * x, пропорциональная смещению с коэффициентом упругости k.
14. **Записан закон сохранения энергии:** Закон сохранения энергии для данного колебания был выражен через кинетическую и потенциальную энергию (1).
15. **Процесс дифференцирования:** Переписав закон сохранения энергии и продифференцировав его по времени, вы получили уравнение движения для системы. Это стандартное дифференциальное уравнение второго порядка, которое описывает колебания, характерные для гармонического осциллятора.
16. **Анализ уравнения движения:** Полученное уравнение (3) является уравнением простых гармонических колебаний, где $\frac{k}{m}$ представляет собой квадрат угловой частотыω^2, а решение этого уравнения даёт форму колебаний: где A — амплитуда колебаний, а φ — фаза. Угловая частота $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ определяет период колебаний, который зависит от массы груза и жесткости упругой системы.

Таким образом, анализ уравнения приводит к заключению, что система будет совершать гармонические колебания с определенной частотой и амплитудой, если не учитывать силы сопротивления и другие внешние воздействия.

Часть 2.2: Разработайте математическую модель для описания движения колебательной системы (математического маятника), используя закон сохранения энергии.

Вычисления:

Для рассматриваемой колебательной системы запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{\mathrm{m}V^2}{2} + mgl(1 - cos\alpha) = E_0 \ (1),$$

Учитываем, что

7) в положении равновесия потенциальная энергия = 0;
8) Колебания происходят с малой амплитудой (угол α маленький), то есть можно сделать замену:

$$cos\alpha \ \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Скорость движения груза:

$$V = \omega l = \alpha^{`} l$$

(ω – мгновенная угловая скорость вращения)

Уравнение (1) будет иметь вид:

$$\frac{ml^2\alpha^{`2}}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = E_0 \ (2)$$

или

$$\alpha^{`2} + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (3)$$

Можем использовать принятые обозначения производной - $\alpha^{`} = \dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2} \ (4)$$

Продифференцируем (4) по времени:

$$2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\dot{\alpha}\alpha = 0 \ (5)$$

$$2\dot{\alpha}(\ddot{\alpha} + \frac{2g}{l}\alpha) = 0$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0 \ (6)$$

Введем обозначение - $\omega_0 = \frac{q}{l}$

Получим:

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

Период колебаний такого маятника будет:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Вывод и анализ для Части 2.2.

16. **Составление уравнения для колебаний математического маятника:** Исходя из закона сохранения энергии, для математического маятника записано уравнение (1).
17. **Предположения для упрощения модели:** Учитывая, что колебания происходят с малой амплитудой (угол отклонения α мал), можно воспользоваться приближением, представленным в уравнении (2).
18. **Переписывание уравнения для энергии:** Подставив приближение для cos(a), уравнение (1) можно переписать в виде уравнения (3). Это уравнение описывает движение маятника как гармонические колебания с малой амплитудой.
19. **Уравнение движения для маятника:** из уравнения (3) можно выразить ускорение $\ddot{a}$ и получить дифференциальное уравнение движения, которое записано в уравнении (4). После дифференцирования этого уравнения по времени, вы получаете уравнение (5), которое описывает гармонические колебания маятника.
20. **Период колебаний маятника:** Решение уравнения (5) представляет собой гармонические колебания, и период колебаний можно вычислить по формуле из уравнения (6).

Заключение: Математическая модель колебаний маятника позволяет описать его движение как гармоническое с малой амплитудой. Период колебаний маятника, согласно уравнению (6), зависит от его длины и ускорения свободного падения, что позволяет точно предсказать поведение системы для малых углов отклонений.