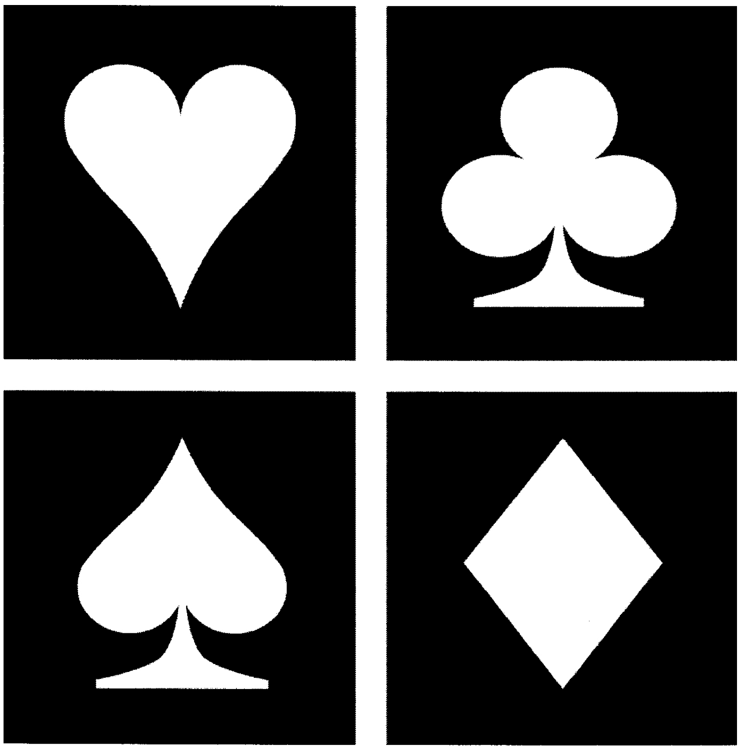
♠ ♢ Moiré-effect ♡ ♣

Jonas Di Dier, Phae van der Weijde en Keano De Vos

1 juli 2021

Samenvatting

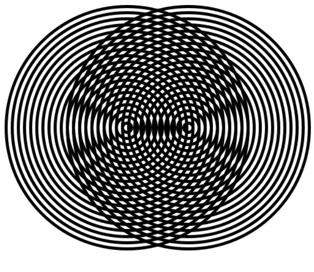
Voor seminarie kregen wij de opdracht een moirépatroon op bestelling te maken. We moesten aanvankelijk het niveaulijnpatroon vinden waarvan de glanskrommen afgeronde vierkanten voorstellen. Gezien we hier vrij snel in geslaagd waren, hebben we de opdracht uitgebreid. Ons uiteindelijke doel werd het maken van vier moirépatronen, met name de vier symbolen van het kaartspel. In dit verslag staat stap voor stap uitgeschreven hoe we tot dit resultaat zijn gekomen, van functies met twee variabelen tot het uiteindelijke plotten van de moirépatronen met het computeralgebrapakket *Sage*.



Inhoudsopgave

1 Moiré in een notendop

Moiré is een vorm van optische kunst. Een moiré-effect ontstaat wanneer er meerdere lijnpatronen elkaar overlappen. De overlapping zorgt voor plaatsen die lichter en donkerder zijn, waardoor er schijnbare witte lijnen ontstaan. Deze lijnen noemen we glanskrommen. Deze glanskrommen kunnen bewust gebruikt worden, maar kunnen ook als neveneffect optreden. Zo wordt moiré bijvoorbeeld gebruikt in de modewereld. Jurken worden ontworpen met twee lagen doorschijnende stof met elk een lijnpatroon. De interferentie van de twee patronen geeft een mooi moiré-effect als resultaat. Aan de andere kant kan moiré ook ongewenst zijn. Het hemd van de presentator kan bijvoorbeeld zorgen voor een vervelende trilling in het beeld wanneer de lijnen van het hemd overlappen met het raster van het televisiescherm.



Figuur 1: Moiré-effect

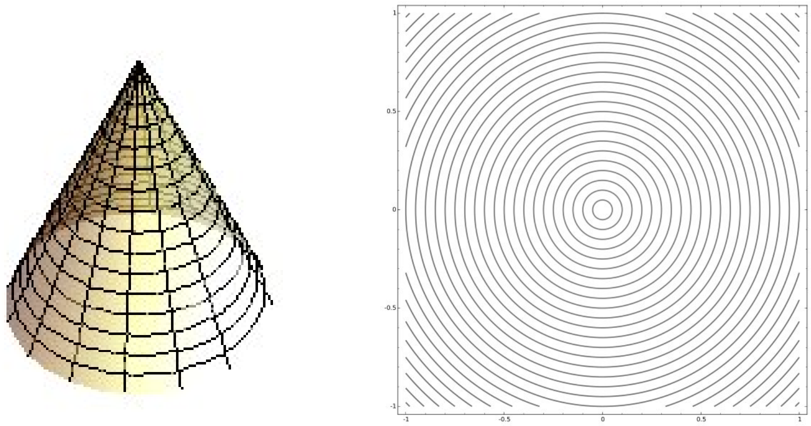
2 Functies met twee onafhankelijke variabelen

Om 3D-figuren te beschrijven kan men gebruik maken van functies met twee onafhankelijke variabelen. Zo stelt $q(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ een kegel voor. De x-waarde wordt op de x-as voorgesteld, de y-waarde op de y-as en het beeld van die waarden wordt op de z-as voorgesteld.

Een punt behoort tot deze kegel als men de coördinaten van dit punt in de functie kan invullen. Zo is het punt $P(1, 1, -\sqrt{2})$ een punt van de kegel, Want $q(1, 1) = -\sqrt{1^2 + 1^2} = -\sqrt{2}$. De verzameling van alle punten die men zo in de vergelijking kan invullen, vormt deze kegel (zie figuur 2).

3 Niveaulijnen

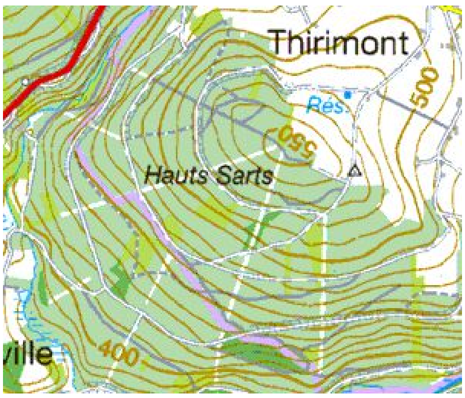
Een niveaulijn is een kromme op de grafiek van een functie $f(x, y)$ die alle punten met gelijke z-waarde verbindt. Ook de projecties van deze krommen op het xy-vlak worden niveaulijnen genoemd. Niveaulijnen kunnen elkaar niet snijden. Om een beter overzicht te krijgen van deze lijnen is de kegel in figuur 2 links in perspectiefvoorstelling afgebeeld en rechts met behulp van niveaulijnen. Beiden zijn correcte voorstellingen maar bij de perspectiefvoorstelling zien we slechts één deel van de kegel, Terwijl we met niveaulijnen de volledige figuur kunnen voorstellen (zie figuur 2). Een niveaulijnenkaart kunnen we maken door voor bepaalde z-waarden alle punten met die z-coördinaat, dit wil zeggen met dezelfde hoogte, te verbinden. Deze z-waarden moeten equidistant gespreid zijn.



Figuur 2: Perspectiefvoorstelling [7] en Niveaulijnen

Zo kan er bijvoorbeeld op alle gehele hoogten een niveaulijn getrokken worden. Als de z-waarden niet equidistant zouden zijn, dan zou men het verschil tussen een kegel en een paraboloïde niet kunnen zien.

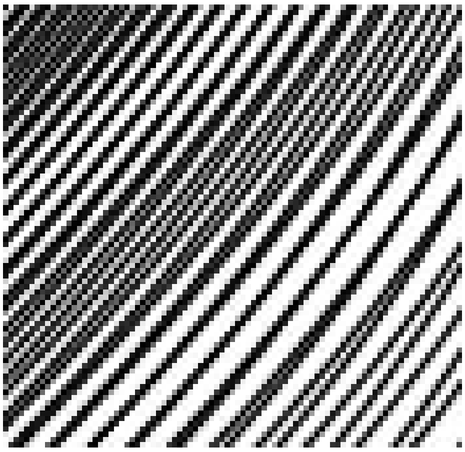
Bij topografie wordt vaak gebruik gemaakt van niveaulijnenkaarten om het reliëf van een landschap duidelijk weer te kunnen geven (zie figuur 3).



Figuur 3: Topografische kaart [8]

4 Ontstaan glanskrommen

Wanneer de niveaulijnen van twee functies elkaar overlappen en er maar een kleine hoek is tussen de snijdende niveaulijnen, zal er een moiré-effect ontstaan. In figuur 4 kunnen we de overlapping van twee lijnenpatronen heel sterk vergroot zien. We zien dat er tussen twee snijpunten meer witruimte is. Daardoor zullen er lichtere plaatsen en donkere plaatsen tevoorschijn komen als je dit op normale grootte ziet. Als je dan een niveaulijnenpatroon over zichzelf verschuift verschijnen er ook glanskrommen. Het is mogelijk te voorspellen welke glans-



Figuur 4: Lijnen

krommen er ontstaan bij welke functie en ook welke functie je nodig hebt om bepaalde glanskrommen te bekomen.

5 Vergelijking glanskrommen

Om de moirékrommen te berekenen, maken we een theoretische afleiding. De berekening die we hier uitvoeren is echter een benadering, Ze geeft ons wel het voordeel dat we de moirékrommen kunnen voorspellen. Zo kunnen we moiré naar wens maken met behulp van integralen (zie sectie 6). Om de glanskrommen van de functie $f(x, y)$ te vinden, verschuiven we de grafiek met d eenheden over de x-as. We stellen de functie gelijk aan de verschoven functie plus n verdiepingen met verticale tussenafstand c. Hierdoor vinden we alle punten waarop de niveaulijnen van $f(x, y)$ en de niveaulijnen van de verschoven functie snijden.

$$f(x, y) = f(x - d, y) + n \cdot c$$

Door de term $f(x - d, y)$ over te brengen en beide leden te delen door d vinden we:

$$\frac{f(x, y) - f(x - d, y)}{d} = \frac{n \cdot c}{d}$$

Als we d heel klein nemen, wordt het linkerlid een benadering van de partiële afgeleide van $f(x, y)$ naar x:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \approx n \cdot \frac{c}{d}$$

In het rechterlid bekomen we een rekenkundige rij, die we voorstellen door u_n.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \approx u_n$$

Aangezien we hier d infinitesimaal klein nemen, is dit maar een benadering. Doordat we echter ook van een afgeleide functie tot de functie zelf kunnen komen, is deze benadering heel nuttig, zoals later zal blijken. We controleren deze vergelijking door de functie van de kegel te nemen, waarvan de moirélijnen allen rechten door de oorsprong zijn. Zie figuur 1.

$$
\begin{aligned}
& q(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2} \\
& \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} q(x,y) \approx -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \approx u_n \\
& \Leftrightarrow y \approx -\sqrt{\frac{1}{u_n^2} - 1} \cdot x \qquad \text{of} \qquad y \approx \sqrt{\frac{1}{u_n^2} - 1} \cdot x
\end{aligned}
$$

Doordat we de partiële afgeleide van de functie naar x kunnen omvormen naar een cartesische vergelijking met de vorm $y = a \cdot x$, zien we dat de moirékrommen rechten door de oorsprong zijn. We zien dus met dit voorbeeld dat de berekening met afgeleiden een juiste benadering geeft.

6 Vergelijking niveaulijnen

We kunnen een bepaalde grafiek als glanskrommen tevoorschijn laten komen met behulp van de vergelijking van die grafiek. Hierdoor kunnen we glanskrommen naar wens genereren. We kunnen de functie van de niveaulijnen vinden met de tegengestelde van de afleidingsoperator, namelijk door de functie te integreren naar de variabele x. Door een afgeleide functie te integreren wordt de functie zelf op een constante term na bepaald. Er zijn meerdere programma's die integralen voor je uitrekenen, zoals *Sage* of *WolframAlpha*. Deze programma's noteren de constante als $+c$.

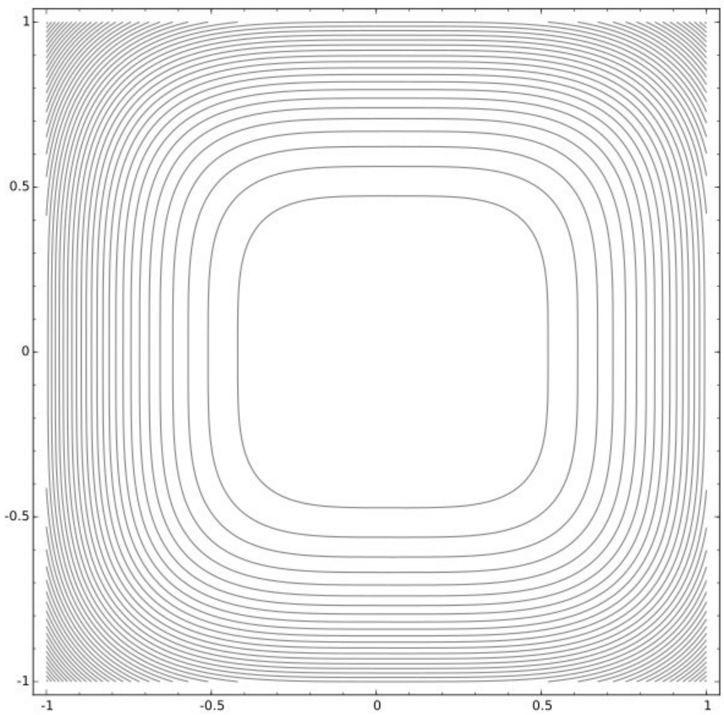
6.1 Niveaulijnen van een afgerond vierkant

Eerste poging

Aanvankelijk maakten we gebruik van de vergelijking hieronder om een afgerond vierkant te bekomen. Deze hadden we op het internet onder de naam *squircle* gevonden. [2]

$$w(x,y) = x^4 + y^4$$

Als je hiervan echter de niveaulijnen neemt, vormen de stralen van de *squircle* (dit zijn de afstanden van het middelpunt tot het midden van een zijde van de *squircle*) geen rekenkundige rij. Als je deze figuur probeert te plotten, bekom je in het midden een grote lege plaats en een heel grote densiteit aan lijnen aan de buitenkanten. Dit kan je zien op figuur 5.



Figuur 5: Poging één

Tweede poging

Een oplossing voor dit probleem is de vierdemachtswortel van de functie te nemen.

$$k(x, y) = (x^4 + y^4)^{\frac{1}{4}}$$

Hiervan konden we de integraal met *Sage* niet berekenen en *WolframAlpha* gaf een integraal die we niet konden plotten.

Derde poging

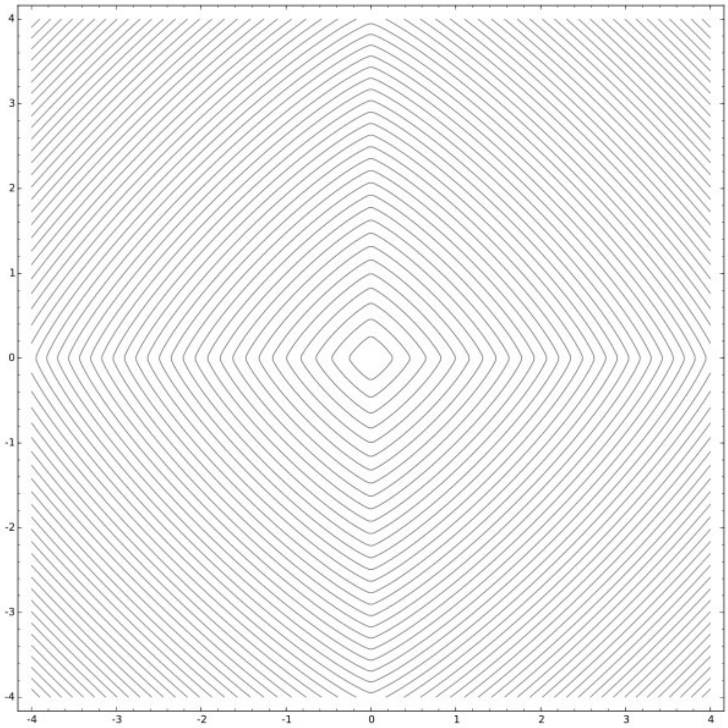
Aangezien we doorhadden dat het zo dus niet zou lukken, zochten we op goed geluk naar andere mogelijke functies. Toen dachten we eraan om de functie van een vierkant $m(x, y) = |x| + |y|$ een beetje aan te passen. Als we x en y tot een macht net iets groter dan 1 verheffen, wordt de functie een afgerond vierkant. Door de exponent iets te vergroten bollen de zijden namelijk op. Als je deze exponent daarentegen kleiner maakt dan 1 zullen de zijden licht naar de oorsprong gebogen worden. Wij gebruikten dus eerst de volgende vergelijking:

$$g(x, y) = |x|^{\frac{6}{5}} + |y|^{\frac{6}{5}}$$

Als je dit functievoorschrift integreert naar x, geeft *Sage* de onderstaande vergelijking.

$$h(x, y) = -\frac{5}{22}(-x)^{\frac{11}{5}} + \frac{5}{22} \cdot x^{\frac{11}{5}} + x|y|^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{22}((-x)^{\frac{11}{5}} + x^{\frac{11}{5}})\,\mathrm{sgn}(x)$$

Hierbij stelt $\operatorname{sgn}(x)$ de sign-functie voor. Deze is 1 als x positief is, -1 als x negatief is en bestaat niet voor $x = 0$. Dit is een functie die *Sage*, mits een aantal kleine aanpassingen, wel kan plotten (zie 7 Plotten in Sage). De functie $g(x, y)$ wordt op figuur 6 afgebeeld.



Figuur 6: Poging drie

6.2 Niveaulijnen ruiten aas

Na de beslissing om het kaartspel te vormen, werd de functie van het afgerond vierkant aangepast om meer ruitvormig te worden. Dit deden we door de exponenten net iets kleiner dan 1 te maken. Hierdoor verkregen we de volgende functie.

$$p(x, y) = |x|^{\frac{4}{5}} + |y|^{\frac{4}{5}}$$

Je kan zowel deze als de komende grafieken zien in figuur 7.

6.3 Niveaulijnen van de harten aas

Op het internet vonden we de vergelijking van concentrische harten [5]:

$$z(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \cdot x^{\frac{4}{7}} \cdot y$$

Na het berekenen van de integraal van deze vergelijking met behulp *Sage* kregen we de vergelijking voor de niveaulijnen:

$$a(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - \frac{14}{11}x^{\frac{11}{7}}y$$

Deze vergelijking van de hartkromme zullen we verder nog gebruiken voor de schoppen en de klaveren.

6.4 Niveaulijnen van de schoppen aas

Voor de vergelijking van de schoppen aas hebben we omwille van de eenvoud gekozen om de hartkromme te spiegelen rond de x-as. We bekwamen dan deze vergelijking:

$$t(x,y) = x^2 + y^2 + 2 \cdot x^{\frac{4}{7}} \cdot y$$

Door *Sage* de integraal van dit functievoorschrift te laten berekenen bekwamen we:

$$u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + \frac{14}{11}x^{\frac{11}{7}}y$$

6.5 Niveaulijnen van de klaverenen aas

Bij het zoeken naar de functie voor de klaveren aas maakten we opnieuw gebruik van de oorspronkelijke hartfunctie. Om esthetische redenen hebben de exponenten licht aangepast. We namen deze vergelijking:

$$e(x,y) = x^2 + y^2 - 2 \cdot x^{\frac{10}{11}} \cdot y^{\frac{10}{11}}$$

We hebben ook de integraal van deze functie laten berekenen door *Sage*.

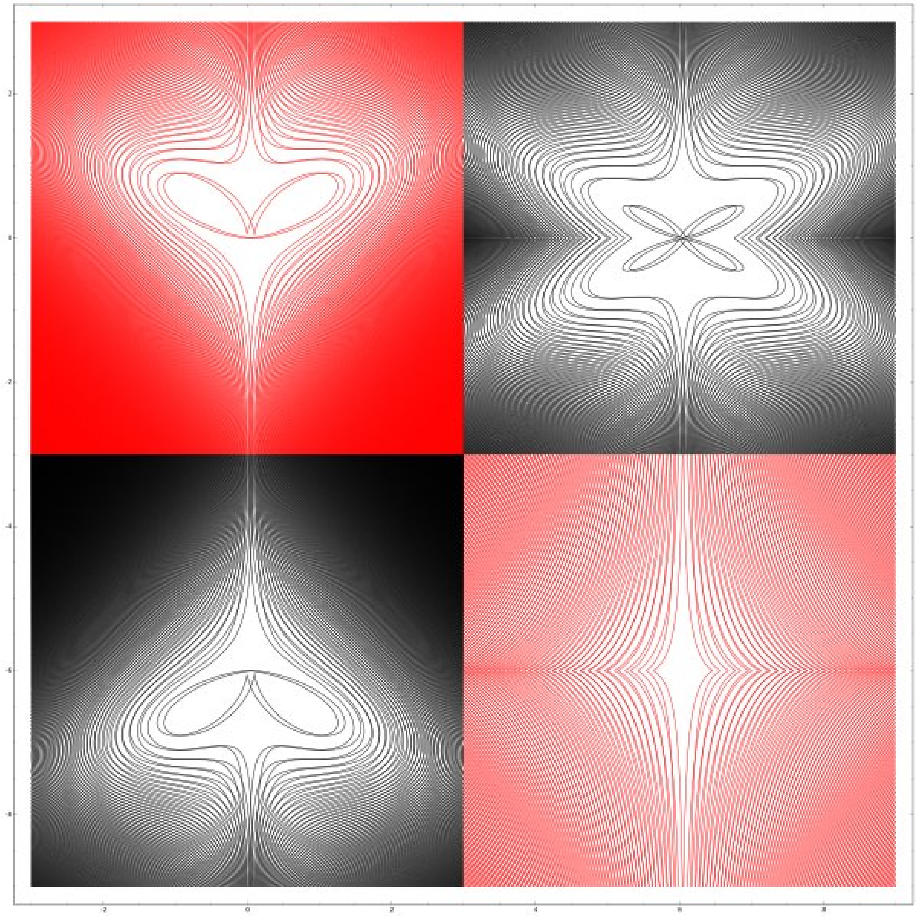
$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x \cdot y^2 - \frac{22}{21}x^{\frac{22}{21}}y^{\frac{10}{11}}$$

We zien natuurlijk dat dit weinig verschillend is van de hartfunctie. Het verschil tussen de klaveren en het hart zit in het plotten zelf. We gaven voor het plotten van deze klaveren aan *Sage* het commando om de absolute waarde te nemen van zowel x als y. Door het commando te laten beginnen met $f(|x|,|y|)$, in plaats van het gebruikelijke $f(|x|,y)$, werd het deel van het niveaulijnenpatroon boven de x-as gespiegeld rond de x-as. Hierdoor werd de klaveren aas bekomen.

7 Plotten in Sage

Om deze functies te plotten maken wij gebruik van *Sage*. Dit is het nauwkeurigste programma voor het plotten van niveaulijnen dat tot onze beschikking staat. Eerst gaven we alle functies in en lieten we *Sage* hun integralen berekenen met het commando *integrate*. Daarna lieten we *Sage* de functie plotten met het commando *contour_plot*. Hierbij moesten we functie en het bereik van deze functie geven. Daarnaast hadden we nog opties zoals het kiezen van de plotkleur, het aantal niveaulijnen, de dikte van de lijnen en nog veel meer. Om alle grafieken op één figuur te krijgen, hadden we drie van de vier functies verschoven en hun bereik aangepast, zodat de functies aansluiten. Een verschuiving naar rechts gebeurde door bij de x-waarde een bepaalde waarde af te trekken, dus $f(x-6,y)$ in de plaats van $f(x,y)$ te plotten. Om naar onder te verschuiven konden we dat analoog doen door bij de y-waarde een bepaalde waarde op te tellen. Aangezien *Sage* de foutmelding 'a negatif number to a fractional power is not real' gaf wanneer we negatieve getallen tot een rationale macht wouden verheffen, lieten we *Sage* $f(|x|,y)$ plotten als x tot een rationaal getal verheven werd, omdat een negatief getal dat tot een rationele macht wordt verheven een positief getal wordt.

Het resultaat is figuur 7. Wegens de limiet op de grootte van foto's in *Overleaf* kan er geen afbeelding van betere kwaliteit in dit bestand geplaatst worden. Daarom verwijzen we de lezer graag door naar ons *Sage*-bestand. Dit kan u vinden onder de link in de referenties met de titel *Black Diamond*. Ook veel van de andere grafieken zijn onder die link te vinden. [1]



Figuur 7: Kaartspel

Referenties

[1] Keano De Vos, Phae Van der Weijde en Jonas Di Dier. *Black Diamond.* Nov 2015. URL: https://cloud.sagemath.com/projects/c2022f03-c1bb-4bbe-9e14-6946d8a45328/files/Black%5C%20Diamond.sagews.

[2] Modest Genius. *Squircle.* URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Squircle.

[3] Bally Gaming Inc. *4 Squares with Heart, Club, Spade and Diamond.* URL: http://www.ipaustralia.com.au/applicant/bally-gaming-inc/trademarks/1161937/.

[4] SharkD. *Moire Circles.* URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Moire_Circles.svg#filehistory.

[5] Luc Van Den Broeck. *Moiré-effect.* Dec 2012. URL: http://sage.snorduffel.be/home/pub/4/.

[6] Luc Van Den Broeck. *Seminarie Wiskunde.* Hfdstk. 2.

[7] WolframAlpha. *Finite Cone.* URL: http://www.wolframalpha.com/input/?i=finite+cone&lk=1&a=ClashPrefs_*Surface.ConeFinite-.

[8] Woodcraftsurvival. *Hoogtelijnen.* URL: http://www.woodcraftsurvival.com/Survival%20skills/navigeren/Kaartlezen.htm.