教材和参看书

- 教材：周民强:《实变函数论》
- 参考书:
  1. Real Analysis, E. M. Stein and R. Shakarchi
  2. E. Hewitt, K Stromberg. Real and Abstract Analysis
  3. 周民强: 《实变函数解题指南》
- 成绩评定：作业 20 分，期中 30 分期末 50 分.
- 答疑: 理科一号楼 1373.
- 电子邮件：liujm@math.pku.edu.cn.
- 课件下载: ftp://162.105.69.120/teachers/liujm (要用专门的 ftp 软件匿名登录).

课程内容

- 建立一种新的积分理论，即 Lebesgue 积分，它是 Riemann 积分的推广，被积函数不一定是黎曼可积，积分区域也不一定是区间. Lebesgue 积分是可测函数 f 在可测集 E 上的积分, 记为 $\int_E f(x)dx$.
- 课程的具体内容包括：
  1. 集合论. 2. Lebesgue 测度. 3. Lebesgue 可测函数. 4. Lebesgue 积分, 5. 微分与不定积分. 6. L^p 空间.

课程内容

- 建立一种新的积分理论，即 Lebesgue 积分，它是 Riemann 积分的推广，被积函数不一定是黎曼可积，积分区域也不一定是区间. Lebesgue 积分是可测函数 f 在可测集 E 上的积分, 记为 $\int_E f(x)dx$.
- 课程的具体内容包括:

  1. 集合论. 2. Lebesgue 测度. 3. Lebesgue 可测函数. 4. Lebesgue 积分, 5. 微分与不定积分. 6. L^p 空间.

- 勒贝格(1875～1941)H. L. Lebesgue，法国数学家. 1894～1897年在巴黎高等师范学校学习. 1902 年在巴黎大学获得博士学位，从 1902 年起先后在雷恩大学、普瓦蒂埃大学、巴黎大学文理学院任教. 1922年任法兰西学院教授，同年被选为巴黎科学院院士.

勒贝格的主要贡献是测度和积分理论. 他的理论为 20 世纪的许多数学分支如泛函分析、概率论、抽象积分论、抽象调和分析等奠定了基础. 利用勒贝格积分理论, 他对三角级数论也作出基本的改进. 另外,他在维数论方面也有贡献. 晚年他对初等几何学及数学史进行了研究.

勒贝格，H. L.

勒贝格积分

- 微积分学中的黎曼积分, 被积函数要求基本上连续.
- 随着认识的深入，人们经常需要处理复杂的函数，例如，由一列性质良好的函数组成级数所定义出来的函数. 在讨论它们的可积性、连续性、可微性时，经常遇到积分与极限能否交换顺序的问题. 通常只有在很强的假设下才能对这问题作出肯定的回答. 因此，在理论和应用上都迫切要求建立一种新的积分, 它既能保持黎曼积分的几何直观和计算上的有效，又能在积分与极限交换顺序的条件上有较大的改善.
- 1902 年法国数学家 H.L.勒贝格出色地完成了这一工作，建立了以后人们称之为勒贝格积分的理论. 20 世纪初又发展成建立在一般集合上的测度和积分的理论，简称测度论.

勒贝格积分

- 微积分学中的黎曼积分, 被积函数要求基本上连续.
- 随着认识的深入，人们经常需要处理复杂的函数，例如，由一列性质良好的函数组成级数所定义出来的函数. 在讨论它们的可积性、连续性、可微性时，经常遇到积分与极限能否交换顺序的问题. 通常只有在很强的假设下才能对这问题作出肯定的回答. 因此，在理论和应用上都迫切要求建立一种新的积分, 它既能保持黎曼积分的几何直观和计算上的有效，又能在积分与极限交换顺序的条件上有较大的改善.
- 1902 年法国数学家 H.L.勒贝格出色地完成了这一工作，建立了以后人们称之为勒贝格积分的理论. 20 世纪初又发展成建立在一般集合上的测度和积分的理论，简称测度论.

勒贝格积分

- 微积分学中的黎曼积分，被积函数要求基本上连续.
- 随着认识的深入，人们经常需要处理复杂的函数，例如，由一列性质良好的函数组成级数所定义出来的函数. 在讨论它们的可积性、连续性、可微性时，经常遇到积分与极限能否交换顺序的问题. 通常只有在很强的假设下才能对这问题作出肯定的回答. 因此，在理论和应用上都迫切要求建立一种新的积分，它既能保持黎曼积分的几何直观和计算上的有效，又能在积分与极限交换顺序的条件上有较大的改善.
- 1902 年法国数学家 H.L.勒贝格出色地完成了这一工作，建立了以后人们称之为勒贝格积分的理论. 20 世纪初又发展成建立在一般集合上的测度和积分的理论，简称测度论.

积分

- Newton 积分：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.
- Riemann 积分：$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$.
- Lebesgue 积分是 Riemann 积分的延拓：$\int_E f(x)dx$, E 是可测集，f 是可测函数.
- Riemann-Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})).$$

  上述积分可延拓为 Lebesgue-Stieltjes 积分.
- Lebesgue 关于 Lebesgue 积分的论文
  - 1902年：《积分，长度与面积》
  - 1903年：《论三角级数》
  - 1904年：《积分法和原函数分析的讲义》

积分

- Newton 积分：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.
- Riemann 积分：$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
- Lebesgue 积分是 Riemann 积分的延拓：$\int_E f(x)dx$, E 是可测集，f 是可测函数.
- Riemann-Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})).$$

  上述积分可延拓为 Lebesgue-Stieltjes 积分.
- Lebesgue 关于 Lebesgue 积分的论文
  - 1902年：《积分，长度与面积》
  - 1903年：《论三角级数》
  - 1904年：《积分法和原函数分析的讲义》

积分

- Newton 积分：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.
- Riemann 积分：$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
- Lebesgue 积分是 Riemann 积分的延拓：$\int_E f(x)dx$, E 是可测集，f 是可测函数.
- Riemann-Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})).$$

  上述积分可延拓为 Lebesgue-Stieltjes 积分.
- Lebesgue 关于 Lebesgue 积分的论文
  - 1902年：《积分，长度与面积》
  - 1903年：《论三角级数》
  - 1904年：《积分法和原函数分析的讲义》

积分

- Newton 积分：$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.
- Riemann 积分：$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
- Lebesgue 积分是 Riemann 积分的延拓：$\int_E f(x)dx$, E 是可测集，f 是可测函数.
- Riemann-Stieltjes 积分

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \lim_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})).$$

  上述积分可延拓为 Lebesgue-Stieltjes 积分.
- Lebesgue 关于 Lebesgue 积分的论文
  - 1902年：《积分，长度与面积》
  - 1903年：《论三角级数》
  - 1904年：《积分法和原函数分析的讲义》

Fourier 级数

- Fourier级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

- 数学分析的许多进展与 Fourier 级数分不开. 1837, Dirichlet 在《用正弦和余弦级数表示完全任意的函数》中给出了现在的函数定义, 黎曼在他的论文《论函数通过三角级数的可表示性》中给出了 Riemann 积分的定义. 1903 年 Lebesgue 《论三角级数》.

Fourier 级数

- Fourier级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

  其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

- 数学分析的许多进展与 Fourier 级数分不开. 1837, Dirichlet 在《用正弦和余弦级数表示完全任意的函数》中给出了现在的函数定义, 黎曼在他的论文《论函数通过三角级数的可表示性》中给出了 Riemann 积分的定义. 1903 年 Lebesgue 《论三角级数》.

黎曼积分和勒贝格积分

- 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，把区间 $[a,b]$ 进行分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，$\lambda = \max\{\Delta x_i\}$，黎曼积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- Lebesgue 积分的思想：设 $f(x)$ 是在集合 E 上定义的有界函数，$m \leq f(x) \leq M$. 把区间 $[m,M]$ 进行分割 $m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M$. 令 $E_i = \{x : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$, $0 \leq i < n$, $E_n = \{x : y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n = M\}$. $\lambda = \max\{\Delta y_i\}$, Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n y_{i-1}|E_i|.$$

- 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数，把区间 $[a,b]$ 进行分割 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$, 黎曼积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- Lebesgue 积分的思想：设 $f(x)$ 是在集合 E 上定义的有界函数，$m \leq f(x) \leq M$. 把区间 $[m,M]$ 进行分割 $m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M$. 令 $E_i = \{x : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$, $0 \leq i < n$, $E_n = \{x : y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n = M\}$. $\lambda = \max\{\Delta y_i\}$, Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}|E_i|.$$

黎曼积分和勒贝格积分思想的差别

- 用数钱比喻积分: 数口袋中的钱的方法
  Riemann: 摸出钱币, 逐一依次计数
  Lebesgue: 将钱全部拿出, 按照面值分类, 同币值钱币放一起计数, 再求和.
- 定义 Lebesgue 积分需要解决的问题: 1. 一般集合的"长度"(测度, 并不是所有集合有测度)
  2. 什么函数可以保证定义中的 E_i 有测度(可测函数).

Riemann 积分的不足

- 极限和积分交换次序：若 $f_n(x) \in R([a,b])$，当 f_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛时，才能保证极限函数黎曼可积，此时

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

- 有界收敛定理：设 $f_n \in R([a,b])$，存在 $M > 0$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$，$|f_n(x)| \le M$．若 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，则极限 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ 存在(而且只与 $f(x)$ 有关)．
- $R([a,b])$ 不完备：在距离 $d(f,g) = \int_a^b |f-g|dx$ 或者 $d(f,g) = (\int_a^b |f-g|^2 dx)^{1/2}$ 导出的拓扑下不完备．

Riemann 积分的不足

- 极限和积分交换次序：若 $f_n(x) \in R([a,b])$，当 f_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛时，才能保证极限函数黎曼可积，此时
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$
- 有界收敛定理：设 $f_n \in R([a,b])$，存在 $M > 0$，使得对任意 $n \in \mathbb{N}$，$|f_n(x)| \le M$. 若 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，则极限 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ 存在(而且只与 $f(x)$ 有关).
- $R([a,b])$ 不完备：在距离 $d(f,g) = \int_a^b |f-g|dx$ 或者 $d(f,g) = (\int_a^b |f-g|^2dx)^{1/2}$ 导出的拓扑下不完备.

关于集合论

- 集合论研究对象是一般集合，它在数学中占有一个独特的地位，它的基本概念已渗透到数学的所有领域. 按现代数学观点，数学各分支的研究对象是带有某种特定结构的集合如群、环、拓扑空间，或者是可以通过集合来定义的(如映射、函数). 从这个意义上说，集合论可以说是整个现代数学的基础.
- Cantor（1845-1918）1874 年提出(超穷)集合理论. 由于 Russell 悖论的出现，Zermelo和 Frankel 提出了 ZFc 公理(c:选择公理).
- 选择公理：设 $\{A_\alpha\}$ 是互相不交的非空集族. 则存在集合 X，它由每个集合 A_α 中取一个元构成.

关于集合论

- 集合论研究对象是一般集合, 它在数学中占有一个独特的地位，它的基本概念已渗透到数学的所有领域. 按现代数学观点，数学各分支的研究对象是带有某种特定结构的集合如群、环、拓扑空间，或者是可以通过集合来定义的(如映射、函数). 从这个意义上说，集合论可以说是整个现代数学的基础.
- Cantor（1845-1918）1874 年提出(超穷)集合理论. 由于 Russell 悖论的出现，Zermelo和 Frankel 提出了 ZFc 公理(c:选择公理).
- 选择公理：设 $\{A_\alpha\}$ 是互相不交的非空集族. 则存在集合 X，它由每个集合 A_α 中取一个元构成.

关于集合论

- 集合论研究对象是一般集合, 它在数学中占有一个独特的地位, 它的基本概念已渗透到数学的所有领域. 按现代数学观点, 数学各分支的研究对象是带有某种特定结构的集合如群、环、拓扑空间, 或者是可以通过集合来定义的(如映射、函数). 从这个意义上说, 集合论可以说是整个现代数学的基础.
- Cantor（1845-1918）1874 年提出(超穷)集合理论. 由于 Russell 悖论的出现, Zermelo和 Frankel 提出了 ZFc 公理(c:选择公理).
- 选择公理: 设 $\{A_\alpha\}$ 是互相不交的非空集族. 则存在集合 X, 它由每个集合 A_α 中取一个元构成.

集合与子集

- 基本概念：集合(具有一定性质的对象的全体)，空集 ϕ，子集，全集(问题涉及的最大集合).
- 集合的关系:
  - $A \subset B($ 或 $B \supset A) \Longleftrightarrow$ 若 $x \in A$，则有 $x \in B$.
  - $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$. 即若 $x \in A$，则有 $x \in B$; 若 $x \in B$，则有 $x \in A$.
- 幂集: 集合 A 的幂集 $2^A = \{B : B \subset A\}$.

集合与子集

- 基本概念：集合(具有一定性质的对象的全体)，空集 ϕ，子集，全集(问题涉及的最大集合).
- 集合的关系:
  - $A \subset B$(或 $B \supset A$) $\Longleftrightarrow$ 若 $x \in A$，则有 $x \in B$.
  - $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$. 即若 $x \in A$，则有 $x \in B$; 若 $x \in B$，则有 $x \in A$.
- 幂集: 集合 A 的幂集 $2^A = \{B : B \subset A\}$.

集合与子集

- 基本概念：集合(具有一定性质的对象的全体), 空集 ϕ, 子集, 全集(问题涉及的最大集合).
- 集合的关系:
  - $A \subset B($ 或 $B \supset A) \Longleftrightarrow$ 若 $x \in A$, 则有 $x \in B$.
  - $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$. 即若 $x \in A$, 则有 $x \in B$; 若 $x \in B$, 则有 $x \in A$.
- 幂集: 集合 A 的幂集 $2^A = \{B : B \subset A\}$.

集合与子集

- 基本概念：集合(具有一定性质的对象的全体), 空集 ϕ, 子集, 全集(问题涉及的最大集合).
- 集合的关系:
  - $A \subset B($ 或 $B \supset A) \iff$ 若 $x \in A$, 则有 $x \in B$.
  - $A = B \iff A \subset B$ 且 $B \subset A$. 即若 $x \in A$, 则有 $x \in B$; 若 $x \in B$, 则有 $x \in A$.
- 幂集: 集合 A 的幂集 $2^A = \{B : B \subset A\}$.

基本运算

- 运算：$A\cup B$, $A\cap B$, 补集 A^c，差集 $A\backslash B=A\cap B^c$.

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\exists\alpha\in I, s.t. x\in A_\alpha\},\quad \bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\forall\alpha\in I, x\in A_\alpha\}.$$

- 交与并的交换律和结合律、分配率

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

- De.Morgan法则: $E\backslash(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}E\backslash A_\alpha$, $E\backslash(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}E\backslash A_\alpha$.
- 常见集合: $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$, 有理数集 $\mathbb{Q}$, 整数集 $\mathbb{Z}$.

对称差

- 定义：集合 A 与 B 的对称差定义为

$$A \bigtriangleup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

- 例: $A \bigtriangleup \phi = A$, $A \bigtriangleup A = \phi$, $A \bigtriangleup A^c = X$, $A \bigtriangleup X = A^c$.
- 性质:

  (i) 交换律: $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$;

  (ii) 结合律: $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$;

  (iii) 分配率: $A \cap (B \bigtriangleup C) = (A \cap B) \bigtriangleup (A \cap C)$

  (iv) $A^c \bigtriangleup B^c = A \bigtriangleup B$.

  (v) 对任意的集合 A 与 B, 存在唯一的集合 $E(= A \bigtriangleup B)$, 使得 $E \bigtriangleup A = B$.

例1

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，则有

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}.$$

- 证明：显然有

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}.$$

另一方面，对任意 $x\in\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$，即 $f(x)>0$，则存在 n，使得 $f(x)>\frac{1}{n}$，即 $x\in\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}$，从而 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}$. 因此

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}.$$

例1

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，则有

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

- 证明：显然有

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

另一方面，对任意 $x \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$，即 $f(x) > 0$，则存在 n，使得 $f(x) > \frac{1}{n}$，即 $x \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{n}\}$，从而 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{n}\}$. 因此

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

例1

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，则有

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}.$$

- 证明：显然有

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}.$$

另一方面，对任意 $x\in\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}$，即 $f(x)>0$，则存在 n，使得 $f(x)>\frac{1}{n}$，即 $x\in\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}$，从而 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}$. 因此

$$\{x\in\mathbb{R}:f(x)>0\}\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\frac{1}{n}\}.$$

例2

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，则有

$$\{x\in\mathbb{R}: f(x)\le 0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\le \frac{1}{n}\}.$$

- 注：$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x)>\frac{1}{n}\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\ge \frac{1}{n}\}$.
  $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\le \frac{1}{n}\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x)< \frac{1}{n}\}$.

- 例：若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 $f(x)$ 的连续点集，其中

$$E_n=\{x\in\mathbb{R}: \exists\delta>0, |f(x')-f(x")|<\frac{1}{n}, x', x"\in(x-\delta, x+\delta)\}.$$

例2

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，则有

$$\{x\in\mathbb{R}: f(x)\le 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\le \frac{1}{n}\}.$$

- 注：$\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x) > \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x)\ge \frac{1}{n}\}$.
  $\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x) \le \frac{1}{n}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: f(x) < \frac{1}{n}\}$.

- 例：若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 $f(x)$ 的连续点集，其中

$$E_n = \{x\in\mathbb{R}: \exists\delta>0, |f(x')-f(x'')| < \frac{1}{n}, x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)\}.$$

例2

- 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，则有

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \frac{1}{n}\}.$$

- 注：$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \frac{1}{n}\}.$
  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \frac{1}{n}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f(x) < \frac{1}{n}\}.$
- 例：若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 是 $f(x)$ 的连续点集，其中

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0, |f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n}, x', x'' \in (x - \delta, x + \delta)\}.$$

集合的直积

- 直积的定义：n 个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积定义为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, 2, ..., n)\}.$$

- $X \times X \times \cdots X = X^n$，如 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n)\}$, $\mathbb{Z}^n = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) : x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., n)\}$.
- 例：$[a, b] \times [c, d]$ 是平面中的矩形.

集合的直积

- 直积的定义：n 个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积定义为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, 2, ..., n)\}.$$

- $X \times X \times \cdots X = X^n$，如 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n)\}$, $\mathbb{Z}^n = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) : x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., n)\}$.
- 例：$[a, b] \times [c, d]$ 是平面中的矩形.

集合的直积

- 直积的定义：n 个集合 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的直积定义为

$$X_1 \times X_2 \times \cdots X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in X_i, i = 1, 2, ..., n)\}.$$

- $X \times X \times \cdots X = X^n$, 如 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n)\}$, $\mathbb{Z}^n = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) : x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, ..., n)\}$.
- 例：$[a, b] \times [c, d]$ 是平面中的矩形.

上限集与下限集

设 A_n 是一集合列.

- 定义上限集与下限集:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

  比较数列的上极限与下极限:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k : k \geq n\}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k : k \geq n\}.$$

- 极限集:若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$, 则称极限集 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在,定义

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

上限集与下限集的性质1

设 A_n 是一集合列，

- 若 A_n 是递增集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明：对上限集，$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 对下限集，$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

- 若 A_n 是递减集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明：$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$.

上限集与下限集的性质1

设 A_n 是一集合列，

- 若 A_n 是递增集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明：对上限集，$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 对下限集，$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

- 若 A_n 是递减集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明：$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$.

上限集与下限集的性质1

设 A_n 是一集合列,

- 若 A_n 是递增集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明：对上限集, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 对下限集, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

- 若 A_n 是递减集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明: $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$.

设 A_n 是一集合列，

- 若 A_n 是递增集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明：对上限集，$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 因此 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 对下限集，$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

- 若 A_n 是递减集合列，则 $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

  证明：$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$,$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$.

- 性质: $E\backslash \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} (E\backslash A_n)$, $E\backslash \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} (E\backslash A_n)$
- 设集合列 A_n 满足 $A_{2n+1} = A$, $A_{2n} = B$, 则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\bigcup B, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\bigcap B$$

.

证明:

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B.$$

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B.$$

上限集与下限集的例子1

- 性质: $E\backslash \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}(E\backslash A_n)$, $E\backslash \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}(E\backslash A_n)$
- 设集合列 A_n 满足 $A_{2n+1} = A$, $A_{2n} = B$, 则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\bigcup B, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\bigcap B$$

.

证明:

$$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B.$$

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B.$$

上限集与下限集的例子1

- 性质: $E \backslash \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} (E\backslash A_n)$, $E \backslash \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} (E\backslash A_n)$
- 设集合列 A_n 满足 $A_{2n+1} = A$, $A_{2n} = B$, 则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\bigcup B, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A\bigcap B$$

.

证明:
$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B$.
$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B$.

上限集与下限集的例子1

- 性质: $E\backslash \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} (E\backslash A_n)$, $E\backslash \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} (E\backslash A_n)$
- 设集合列 A_n 满足 $A_{2n+1} = A$, $A_{2n} = B$, 则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A \bigcup B, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = A \bigcap B$$

.

证明:

$\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcup B$.

$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A\bigcap B$.

上限集与下限集的刻画

- $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff \forall n, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$
  $\iff \exists$无穷个$A_k \ni x \iff \exists$子列$A_{n_k} \ni x.$

证明：利用 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 若对任意的 n, $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 由 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 存在 $A_{n_1} \ni x$. 由 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 存在 $n_2 > n_1$, 使得 $A_{n_2} \ni x$, $\cdots$. 这样可构造出集合列 $A_{n_k} \ni x$.

- $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff \exists n, x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n, \forall k \geq n, x \in A_k.$

证明：利用 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

上限集与下限集的刻画

- $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff \forall n, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$
  $\iff \exists$无穷个$A_k \ni x \iff \exists$子列$A_{n_k} \ni x$.

  证明：利用 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 若对任意的 n, $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 由 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 存在 $A_{n_1} \ni x$. 由 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 存在 $n_2 > n_1$, 使得 $A_{n_2} \ni x$, $\cdots$. 这样可构造出集合列 $A_{n_k} \ni x$.

- $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff \exists n, x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n, \forall k \geq n, x \in A_k$.

  证明：利用 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

- $x \in \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \iff \forall n, x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$
  $\iff \exists$无穷个$A_k \ni x \iff \exists$子列$A_{n_k} \ni x$.

  证明：利用 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 若对任意的 n, $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. 由 $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, 存在 $A_{n_1} \ni x$. 由 $x \in \bigcup\limits_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 存在 $n_2 > n_1$, 使得 $A_{n_2} \ni x$, $\cdots$. 这样可构造出集合列 $A_{n_k} \ni x$.

- $x \in \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n \iff \exists n, x \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n, \forall k \geq n, x \in A_k$.

  证明：利用 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

上限集与下限集的刻画

- $x \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff \forall n, x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$
  $\iff \exists$无穷个$A_k \ni x \iff \exists$子列$A_{n_k} \ni x$.

  证明：利用 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 若对任意的 n, $x \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 由 $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, 存在 $A_{n_1} \ni x$. 由 $x \in \bigcup_{k=n_1+1}^{\infty} A_k$, 存在 $n_2 > n_1$, 使得 $A_{n_2} \ni x$, $\cdots$. 这样可构造出集合列 $A_{n_k} \ni x$.

- $x \in \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff \exists n, x \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \iff \exists n, \forall k \geq n, x \in A_k$.

  证明：利用 $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

上限集与下限集的例子2

- 设 $\mathbb{R}$ 上的渐升实值函数列 $f_n \to f(x)$. $E_n(x) = \{x : f_n(x) > t\}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > t\} = \{x : f(x) > t\}$$

- 证明: 因为 $f_n(x) \leq f(x)$, $E_n \subset \{x : f(x) > t\}$. 另一方面若 $f(x) > t$, 存在 N, $n > N$ 时, $f_n(x) > t$, 即 $x \in E_n$.

不收敛点集

- 设 $\{f_n(x)\}$ 和 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的实值函数，不收敛点集

$$D = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \text{ 不收敛到 } f(x)\}$$

可表示为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \tfrac{1}{k}\}.$$

- 证明: 若 $x_0 \in D$, 则存在 ϵ_0, 存在无穷个 n 满足

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \epsilon$$

若 x_0 属于右边的集合, 则存在 k, 存在无穷个 n 满足

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \frac{1}{k}.$$

上限集与下限集的例子3

- 特征函数：设 $E\subset\mathbb{R}^n$，E 的特性函数 $\chi_E=\begin{cases}1, x\in E\\ 0, x\notin E\end{cases}$. 如 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}$.

  性质：$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$；$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$.
- 设 $A_n\subset\mathbb{R}^n$，证明

$$\varliminf_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x),\quad \varlimsup_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x).$$

证明：当 $x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 时，存在 N，当 $n>N$ 时，$A_n\ni x$，则 $\chi_{A_n}(x)=1$，则有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=1$. 当 $x\notin\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 时，存在 A_n 的子列 $A_{n_k}\not\ni x$，则 $\chi_{A_{n_k}}(x)=0$，则有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=0$.

- 特征函数：设 $E\subset\mathbb{R}^n$，E 的特性函数 $\chi_E=\begin{cases}1, x\in E\\ 0, x\notin E\end{cases}$. 如 Dirichlet 函数 $\chi_{\mathbb{Q}}$.

  性质：$\chi_{A\cup B}=\chi_A+\chi_B-\chi_{A\cap B}$；$\chi_{A\cap B}=\chi_A\cdot\chi_B$.
- 设 $A_n\subset\mathbb{R}^n$，证明

$$\varliminf_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n}(x),\quad \varlimsup_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=\chi_{\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n}(x).$$

证明：当 $x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 时，存在 N，当 $n>N$ 时，$A_n\ni x$，则 $\chi_{A_n}(x)=1$，则有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=1$. 当 $x\notin\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 时，存在 A_n 的子列 $A_{n_k}\not\ni x$，则 $\chi_{A_{n_k}}(x)=0$，则有 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\chi_{A_n}(x)=0$.

映射的定义1

- 映射的定义: X, Y 是两个集合, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $y = f(x) \in Y$ 与之对应，记为 $f: X \to Y$. $y = f(x)$ 称为 x 的像, x 称为 $y = f(x)$ 的一个原像.
- 像集和原像集：若 $A \subset X, B \subset Y$, 定义 A 的像集为
$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$
B 的原像集为
$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$
- 满射: $f(X) = Y$, 即 Y 中所有元都有原像.
- 单射：$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 双射(一一映射)：既是单射, 又是满射.

映射的定义1

- 映射的定义: X, Y 是两个集合, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $y = f(x) \in Y$ 与之对应，记为 $f : X \to Y$. $y = f(x)$ 称为 x 的像, x 称为 $y = f(x)$ 的一个原像.
- 像集和原像集：若 $A \subset X, B \subset Y$, 定义 A 的像集为

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

  B 的原像集为

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

- 满射: $f(X) = Y$, 即 Y 中所有元都有原像.
- 单射：$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 双射(一一映射)：既是单射, 又是满射.

映射的定义1

- 映射的定义: X, Y 是两个集合, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $y = f(x) \in Y$ 与之对应，记为 $f : X \to Y$. $y = f(x)$ 称为 x 的像, x 称为 $y = f(x)$ 的一个原像.
- 像集和原像集：若 $A \subset X, B \subset Y$, 定义 A 的像集为

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

  B 的原像集为

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

- 满射: $f(X) = Y$, 即 Y 中所有元都有原像.
- 单射：$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 双射(一一映射)：既是单射，又是满射.

- 映射的定义: X, Y 是两个集合, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $y = f(x) \in Y$ 与之对应，记为 $f : X \to Y$. $y = f(x)$ 称为 x 的像, x 称为 $y = f(x)$ 的一个原像.
- 像集和原像集：若 $A \subset X, B \subset Y$, 定义 A 的像集为

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

B 的原像集为

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

- 满射: $f(X) = Y$, 即 Y 中所有元都有原像.
- 单射：$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 双射(一一映射)：既是单射, 又是满射.

映射的定义1

- 映射的定义: X, Y 是两个集合, 对任意 $x \in X$, 存在唯一的 $y = f(x) \in Y$ 与之对应, 记为 $f: X \to Y$. $y = f(x)$ 称为 x 的像, x 称为 $y = f(x)$ 的一个原像.
- 像集和原像集: 若 $A \subset X, B \subset Y$, 定义 A 的像集为

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\},$$

  B 的原像集为

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\}.$$

- 满射: $f(X) = Y$, 即 Y 中所有元都有原像.
- 单射: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 双射(一一映射): 既是单射, 又是满射.

映射的定义2

- 逆映射：若 $f : X \to Y$ 是双射. 对任意 $y \in Y$, 存在唯一 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$. 记 $x = f^{-1}(y)$. 映射 $f^{-1} : Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y)$ 称为 f 的逆映射.
- 映射的复合：$f : X \to Y$，$g : Y \to Z$, $g \circ f : X \to Z, x \to g(f(x))$.
- 若映射 $f : X \to Y$，$g : Y \to Z$ 都有逆映射, 则 $g \circ f$ 也有逆映射, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- 函数的定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}$ 是映射，则称 f 为 E 上定义的函数.

映射的定义2

- 逆映射：若 $f: X \to Y$ 是双射. 对任意 $y \in Y$, 存在唯一 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$. 记 $x = f^{-1}(y)$. 映射 $f^{-1}: Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y)$ 称为 f 的逆映射.
- 映射的复合：$f: X \to Y$， $g: Y \to Z$, $g \circ f: X \to Z, x \to g(f(x))$.
- 若映射 $f: X \to Y$， $g: Y \to Z$ 都有逆映射, 则 $g \circ f$ 也有逆映射, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- 函数的定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}$ 是 映射，则称 f 为 E 上定义的函数.

映射的定义2

- 逆映射：若 $f: X \to Y$ 是双射. 对任意 $y \in Y$, 存在唯一 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$. 记 $x = f^{-1}(y)$. 映射 $f^{-1}: Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y)$ 称为 f 的逆映射.
- 映射的复合：$f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $g \circ f: X \to Z, x \to g(f(x))$.
- 若映射 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 都有逆映射, 则 $g \circ f$ 也有逆映射, 且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- 函数的定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $f: E \to \mathbb{R}$ 是 映射, 则称 f 为 E 上定义的函数.

映射的性质

设 $f: X \to Y$ 是映射，$A_\lambda \subset X$, $B_\lambda \subset Y$, $\lambda \in I$.

- $f(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in I}(f(A_\lambda))$.

  证明:

$$y \in f(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda, y = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow \exists\lambda, x \in A_\lambda, y = f(x) \Longleftrightarrow \exists\lambda, y \in f(A_\lambda)$$

$$\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda\in I}(f(A_\lambda)).$$

- $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in I} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

  $f(\bigcap_{\lambda\in I} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in I}(f(A_\lambda))$. $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in I} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

设 $f: X \to Y$ 是映射，$A_\lambda \subset X$, $B_\lambda \subset Y$, $\lambda \in I$.

- $f(\bigcup\limits_{\lambda\in I} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in I}(f(A_\lambda))$.

  证明：

$$
\begin{aligned}
y \in f(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda, y = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \exists \lambda, x \in A_\lambda, y = f(x) \Longleftrightarrow \exists \lambda, y \in f(A_\lambda) \\
&\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda\in I}(f(A_\lambda)).
\end{aligned}
$$

- $f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in I} B_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

  $f(\bigcap\limits_{\lambda\in I} A_\lambda) \subset \bigcap\limits_{\lambda\in I}(f(A_\lambda))$. $f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in I} B_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

设 $f: X \to Y$ 是映射，$A_\lambda \subset X$, $B_\lambda \subset Y$, $\lambda \in I$.

- $f(\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in I}(f(A_\lambda))$.

  证明：

$$y \in f(\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda) \Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda, y = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow \exists \lambda, x \in A_\lambda, y = f(x) \Longleftrightarrow \exists \lambda, y \in f(A_\lambda)$$

$$\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda \in I}(f(A_\lambda)).$$

- $f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

  $f(\bigcap_{\lambda \in I} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in I}(f(A_\lambda))$. $f^{-1}(\bigcap_{\lambda \in I} B_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

映射的性质

设 $f: X \to Y$ 是映射，$A_\lambda \subset X$, $B_\lambda \subset Y$, $\lambda \in I$.

- $f(\bigcup\limits_{\lambda\in I} A_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in I}(f(A_\lambda))$.

  证明:

$$
\begin{aligned}
y \in f(\bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda) &\Longleftrightarrow \exists x \in \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda, y = f(x) \\
&\Longleftrightarrow \exists\lambda, x \in A_\lambda, y = f(x) \Longleftrightarrow \exists\lambda, y \in f(A_\lambda) \\
&\Longleftrightarrow y \in \bigcup_{\lambda\in I}(f(A_\lambda)).
\end{aligned}
$$

- $f^{-1}(\bigcup\limits_{\lambda\in I} B_\lambda) = \bigcup\limits_{\lambda\in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

  $f(\bigcap\limits_{\lambda\in I} A_\lambda) \subset \bigcap\limits_{\lambda\in I}(f(A_\lambda))$. $\quad f^{-1}(\bigcap\limits_{\lambda\in I} B_\lambda) = \bigcap\limits_{\lambda\in I}(f^{-1}(B_\lambda))$.

集合的对等

- 集合的对等: 设 A 与 B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$.
- 例: $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \frac{\pi}{2}x$.
- 例: $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$: $2n \mapsto n$.
- 例: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: $n \mapsto (-1)^n[\frac{n}{2}]$.
- 若 A, B 是集合，且存在从 A 到集 B 的单射, 或从 B 到 A 的满射，则 A 与 B 的一个子集 $f(A)$ 对等.

  证明：若存在单射 $f: A \to B$，则 A 与 B 的子集 $f(A)$ 对等.

  若存在满射 $g: B \to A$, 对任意 $a \in A$, 取一个 $x_a \in B$, 使得 $g(x_a) = a$. 则 B 的子集 $\{x_a : a \in A\}$ 与 A 对等.

集合的对等

- 集合的对等: 设 A 与 B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$.
- 例: $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan\frac{\pi}{2}x$.
- 例: $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$: $2n \mapsto n$.
- 例: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: $n \mapsto (-1)^n[\frac{n}{2}]$.
- 若 A, B 是集合，且存在从 A 到集 B 的单射，或从 B 到 A 的满射，则 A 与 B 的一个子集 $f(A)$ 对等.

  证明：若存在单射 $f: A \to B$，则 A 与 B 的子集 $f(A)$ 对等.

  若存在满射 $g: B \to A$，对任意 $a \in A$，取一个 $x_a \in B$，使得 $g(x_a) = a$. 则 B 的子集 $\{x_a : a \in A\}$ 与 A 对等.

集合的对等

- 集合的对等: 设 A 与 B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$.
- 例: $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \frac{\pi}{2}x$.
- 例: $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$: $2n \mapsto n$.
- 例: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: $n \mapsto (-1)^n[\frac{n}{2}]$.
- 若 A, B 是集合，且存在从 A 到集 B 的单射, 或从 B 到 A 的满射，则 A 与 B 的一个子集 $f(A)$ 对等.

  证明：若存在单射 $f: A \to B$，则 A 与 B 的子集 $f(A)$ 对等.

  若存在满射 $g: B \to A$，对任意 $a \in A$，取一个 $x_a \in B$，使得 $g(x_a) = a$. 则 B 的子集 $\{x_a : a \in A\}$ 与 A 对等.

集合的对等

- 集合的对等: 设 A 与 B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$.
- 例: $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \frac{\pi}{2} x$.
- 例: $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$: $2n \mapsto n$.
- 例: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: $n \mapsto (-1)^n[\frac{n}{2}]$.
- 若 A, B 是集合，且存在从 A 到集 B 的单射，或从 B 到 A 的满射，则 A 与 B 的一个子集 $f(A)$ 对等.
  证明：若存在单射 $f: A \to B$，则 A 与 B 的子集 $f(A)$ 对等.
  若存在满射 $g: B \to A$，对任意 $a \in A$，取一个 $x_a \in B$，使得 $g(x_a) = a$. 则 B 的子集 $\{x_a : a \in A\}$ 与 A 对等.

集合的对等

- 集合的对等: 设 A 与 B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$.
- 例: $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \frac{\pi}{2}x$.
- 例: $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$: $2n \mapsto n$.
- 例: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: $n \mapsto (-1)^n[\frac{n}{2}]$.
- 若 A, B 是集合，且存在从 A 到集 B 的单射, 或从 B 到 A 的满射，则 A 与 B 的一个子集 $f(A)$ 对等.

证明：若存在单射 $f: A \to B$，则 A 与 B 的子集 $f(A)$ 对等.
若存在满射 $g: B \to A$，对任意 $a \in A$，取一个 $x_a \in B$，使得 $g(x_a) = a$. 则 B 的子集 $\{x_a : a \in A\}$ 与 A 对等.

集合的对等

- 集合的对等: 设 A 与 B 是两个集合，如果存在一个从 A 到 B 的双射，则称集合 A 与 B 对等，记作 $A \sim B$.
- 例: $(-1,1) \sim \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \frac{\pi}{2}x$.
- 例: $2\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$: $2n \mapsto n$.
- 例: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$: $n \mapsto (-1)^n[\frac{n}{2}]$.
- 若 A, B 是集合，且存在从 A 到集 B 的单射, 或从 B 到 A 的满射，则 A 与 B 的一个子集 $f(A)$ 对等.

  证明：若存在单射 $f: A \to B$，则 A 与 B 的子集 $f(A)$ 对等.

  若存在满射 $g: B \to A$, 对任意 $a \in A$, 取一个 $x_a \in B$, 使得 $g(x_a) = a$. 则 B 的子集 $\{x_a : a \in A\}$ 与 A 对等.

对等的性质

- 若 $A \sim B$, 则若 $B \sim A$; 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.
- 若 $A \subset B \subset C$, 且 $A \sim C$. 则有 $A \sim B \sim C$.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则 $A \times C \sim B \times D$.

  证明: 存在双射 $f : A \to B$, $g : C \to D$, 则

$$(a, c) \to (f(a), g(c))$$

  是 $A \times C$ 到 $B \times D$ 的双射.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 且 $A \cap C = \phi$, $B \cap D = \phi$, 则 $A \cup C \sim B \cup D$.

对等的性质

- 若 $A \sim B$, 则若 $B \sim A$; 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.
- 若 $A \subset B \subset C$, 且 $A \sim C$. 则有 $A \sim B \sim C$.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则 $A \times C \sim B \times D$.

  证明: 存在双射 $f : A \to B$, $g : C \to D$, 则

  $$(a, c) \to (f(a), g(c))$$

  是 $A \times C$ 到 $B \times D$ 的双射.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 且 $A \cap C = \phi$, $B \cap D = \phi$, 则 $A \cup C \sim B \cup D$.

对等的性质

- 若 $A \sim B$, 则若 $B \sim A$; 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.
- 若 $A \subset B \subset C$, 且 $A \sim C$. 则有 $A \sim B \sim C$.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则 $A \times C \sim B \times D$.

  证明: 存在双射 $f : A \to B$, $g : C \to D$, 则

$$(a, c) \to (f(a), g(c))$$

  是 $A \times C$ 到 $B \times D$ 的双射.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 且 $A \cap C = \phi$, $B \cap D = \phi$, 则 $A \cup C \sim B \cup D$.

对等的性质

- 若 $A \sim B$, 则若 $B \sim A$; 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.
- 若 $A \subset B \subset C$, 且 $A \sim C$. 则有 $A \sim B \sim C$.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则 $A \times C \sim B \times D$.

  证明：存在双射 $f : A \to B$, $g : C \to D$, 则

  $$(a, c) \to (f(a), g(c))$$

  是 $A \times C$ 到 $B \times D$ 的双射.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 且 $A \cap C = \phi$, $B \cap D = \phi$, 则 $A \cup C \sim B \cup D$.

对等的性质

- 若 $A \sim B$, 则若 $B \sim A$; 若 $A \sim B$, $B \sim C$, 则 $A \sim C$.
- 若 $A \subset B \subset C$, 且 $A \sim C$. 则有 $A \sim B \sim C$.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 则 $A \times C \sim B \times D$.

  证明：存在双射 $f : A \to B$, $g : C \to D$, 则

  $$(a, c) \to (f(a), g(c))$$

  是 $A \times C$ 到 $B \times D$ 的双射.
- 若 $A \sim B$, $C \sim D$, 且 $A \cap C = \phi$, $B \cap D = \phi$, 则 $A \cup C \sim B \cup D$.

集合在映射下的分解1

- 引理: 若有映射 $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, 则存在分解

$$X = A \cup \tilde{A}, A \cap \tilde{A} = \phi; \quad Y = B \cup \tilde{B}, B \cap \tilde{B} = \phi$$

使得 $f(A) = B$, $g(\tilde{B}) = \tilde{A}$.
注: 上面分解不是唯一的, 当 f, g 互逆时,对 X 的任意分解, 都有 Y 的相应分解满足条件.
证明: $E \subset X$ 称为分离集, 如果 $E \cap g(Y \backslash f(E)) = \phi$.
比如 $X \backslash (g(Y))$ 是分离集, 当 f 是满射时 X 是分离集. 当 f, g 互逆时, 任意集合是分离集.
满足引理条件的集合 A 是分离集.

集合在映射下的分解2

- 证明(续): 设 A 是 X 中所有分离集的并集. 则 A 也是分离集, 事实上, 对任意分离集 E, 有

$$E \cap g(Y \backslash f(A)) \subset E \cap g(Y \backslash f(E)) = \phi$$

对所有分离集求并即得.

设 A 是 X 中所有分离集的并集, 它是最大的分离集. 令 $B = f(A)$, $\tilde{B} = Y \backslash B$, $\tilde{A} = g(\tilde{B})$, 显然 $A \cap \tilde{A} = \phi$, 只要验证 $X = A \cup \tilde{A}$, 若不然, 令 $C = X \backslash (A \cup \tilde{A})$, 做 $A_0 = A \cup C$, $Y \backslash f(A_0) \subset Y \backslash f(A) = \tilde{B}$, 因此 $g(Y \backslash f(A_0)) \subset \tilde{A}$,

$$A_0 \cap g(Y \backslash f(A_0)) = (A \cap g(Y \backslash f(A_0))) \cup (C \cap g(Y \backslash f(A_0))) = \phi.$$

Cantor-Bernstein 定理

- Cantor-Bernstein 定理：若集合 X 与 Y 的某个(真)子集对等，Y 与 X 的某个(真)子集对等, 则 $X \sim Y$.

  方法1: 利用集合在映射下的分解

  方法2: 存在真子集 $X_0 \subset X$, $Y_0 \subset Y$, 使得 $f: X \to Y_0$, $g: Y \to X_0$ 是双射, 令 $X_1 = X \backslash X_0$, $f(X_1) = Y_1 \subset Y_0$, $g(Y_1) = X_2 \subset X_0$, $f(X_2) = Y_2$, $g(Y_2) = X_3 \ldots$ 则有 $\{X_k\}$ 两两不交, $\{Y_k\}$ 两两不交,

$$Y \backslash \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \sim X_0 \backslash \sum_{k=1}^{\infty} X_{k+1} = X \backslash \sum_{k=1}^{\infty} X_k$$

因此

$$X = (X \backslash \sum_{k=1}^{\infty} X_k) \cup \sum_{k=1}^{\infty} X_k = (Y \backslash \sum_{k=1}^{\infty} Y_k) \cup \sum_{k=1}^{\infty} Y_k = Y$$

基数(势)

- 设 A, B 是两个集合, 如果 $A \sim B$, 则称 A 与 B 有相同的基数(Cardinal number)或势. A 的基数记为 $\bar{\bar{A}}$, 则 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}} \iff A \sim B$.
- 记 $\bar{\bar{\phi}} = 0$, $\overline{\overline{\{1, 2, \cdots, n\}}} = n$, $\bar{\bar{\mathbb{N}}} = \aleph_0$, $\bar{\bar{\mathbb{R}}} = c$.
- 基数的序: 若 A 与 B 的一个子集对等(即存在从 A 到 B 的单射), 则 $\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$, 若 $\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$ 且 $\bar{\bar{A}} \neq \bar{\bar{B}}$, 则 $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$.
- 由 Cantor-Bernstein 定理, 若 $\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$ 且 $\bar{\bar{B}} \leq \bar{\bar{A}}$, 则 $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$
- 若存在从 B 到 A 的满射(由选择公理, 存在从 A 到 B 的单射), 则 $\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$. 利用选择公理还能证明对任意两个基数 α, β, 三个关系式 $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ 必有一个成立.

可数集1

- 一个集合有 n 个元的充分必要条件是该集合与 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 对等.
- 定义：$\mathbb{N}$ 对等的集合称为可列集. 例如：$\mathbb{Z}$, $2\mathbb{N}$. 可列集和有限集统称为可数集. 显然任何两个可列集对等.
- 定理：任何无穷集都包含可列子集(即可列集是最小的无穷集).
证明：设 A 是无穷集. 任取 $x_1 \in A$, 再取 $x_2 \in A\backslash\{x_1\}$, $x_n \in A\backslash\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. 得可列子集 $\{x_n\} \subset A$,

可数集1

- 一个集合有 n 个元的充分必要条件是该集合与 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 对等.
- 定义：$\mathbb{N}$ 对等的集合称为可列集. 例如：$\mathbb{Z}$, $2\mathbb{N}$. 可列集和有限集统称为可数集. 显然任何两个可列集对等.
- 定理：任何无穷集都包含可列子集(即可列集是最小的无穷集).
  证明：设 A 是无穷集. 任取 $x_1 \in A$, 再取 $x_2 \in A \backslash \{x_1\}$, $x_n \in A \backslash \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. 得可列子集 $\{x_n\} \subset A$,

可数集1

- 一个集合有 n 个元的充分必要条件是该集合与 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 对等.
- 定义：$\mathbb{N}$ 对等的集合称为可列集. 例如：$\mathbb{Z}$, $2\mathbb{N}$. 可列集和有限集统称为可数集. 显然任何两个可列集对等.
- 定理：任何无穷集都包含可列子集(即可列集是最小的无穷集).
  证明：设 A 是无穷集. 任取 $x_1 \in A$, 再取 $x_2 \in A\backslash\{x_1\}$, $x_n \in A\backslash\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. 得可列子集 $\{x_n\} \subset A$,

可数集1

- 一个集合有 n 个元的充分必要条件是该集合与 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 对等.
- 定义：$\mathbb{N}$ 对等的集合称为可列集. 例如：$\mathbb{Z}$, $2\mathbb{N}$. 可列集和有限集统称为可数集. 显然任何两个可列集对等.
- 定理：任何无穷集都包含可列子集(即可列集是最小的无穷集).
  证明：设 A 是无穷集. 任取 $x_1 \in A$, 再取 $x_2 \in A\backslash\{x_1\}$, $x_n \in A\backslash\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. 得可列子集 $\{x_n\} \subset A$,

可数集2

- 可列集和有限集的并是可列集.

  证明：设 $A=\{a_1,a_2\ldots,\}$ 是可列集，B 是有限集，$A\cup B=A\cup B_1$，其中 $B_1=\{b_1,b\ldots,b_m\}=B\backslash A$ 是与 A 不相交的有限集. 构造双射射 $f:A\cup B_1\to A$: $f(b_k)=a_k(k+1,2,\ldots,m)$, $f(a_k)=a_{k+m}$.

- 可列集和可列集的并是可列集.

  证明：$A\cup B=A\cup B_1$, 其中 $B_1=B\backslash A$. B_1 有限时，显然成立. 若 B_1 可列，则有 $A\sim 2\mathbb{N}$, $B\sim 2\mathbb{N}-1$, 从而 $A\cup B_1\sim\mathbb{N}$.

可数集2

- 可列集和有限集的并是可列集.
  证明：设 $A=\{a_1,a_2.\ldots,\}$ 是可列集，B 是有限集，$A\cup B=A\cup B_1$，其中 $B_1=\{b_1,b\ldots,b_m\}=B\backslash A$ 是与 A 不相交的有限集. 构造双射 $f:A\cup B_1\to A$: $f(b_k)=a_k(k+1,2,\ldots,m)$, $f(a_k)=a_{k+m}$.
- 可列集和可列集的并是可列集.
  证明：$A\cup B=A\cup B_1$, 其中 $B_1=B\backslash A$. B_1 有限时，显然成立. 若 B_1 可列，则有 $A\sim 2\mathbb{N}$, $B\sim 2\mathbb{N}-1$, 从而 $A\cup B_1\sim\mathbb{N}$.

可数集2

- 可列集和有限集的并是可列集.
  证明：设 $A = \{a_1, a_2 \ldots, \}$ 是可列集，B 是有限集，$A \cup B = A \cup B_1$，其中 $B_1 = \{b_1, b \ldots, b_m\} = B \backslash A$ 是与 A 不相交的有限集. 构造双射 $f : A \cup B_1 \to A$: $f(b_k) = a_k (k + 1, 2, \ldots, m)$, $f(a_k) = a_{k+m}$.
- 可列集和可列集的并是可列集.
  证明：$A \cup B = A \cup B_1$, 其中 $B_1 = B \backslash A$. B_1 有限时，显然成立. 若 B_1 可列，则有 $A \sim 2\mathbb{N}$, $B \sim 2\mathbb{N} - 1$, 从而 $A \cup B_1 \sim \mathbb{N}$.

可数集2

- 可列集和有限集的并是可列集.

  证明：设 $A=\{a_1,a_2.\ldots,\}$ 是可列集，B 是有限集，$A\cup B=A\cup B_1$，其中 $B_1=\{b_1,b\ldots,b_m\}=B\backslash A$ 是与 A 不相交的有限集. 构造双射射 $f:A\cup B_1\to A$: $f(b_k)=a_k(k+1,2,\ldots,m)$, $f(a_k)=a_{k+m}$.

- 可列集和可列集的并是可列集.

  证明：$A\cup B=A\cup B_1$, 其中 $B_1=B\backslash A$. B_1 有限时，显然成立. 若 B_1 可列，则有 $A\sim 2\mathbb{N}$, $B\sim 2\mathbb{N}-1$, 从而 $A\cup B_1\sim\mathbb{N}$.

可数集3

- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可列集(可列集和可列集的直积是可列集).

  证明：构造映射 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$. 则 f 是单射，$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可列集. 任意可列集和可列集的直积与 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 对等.

  映射 f 也可以如下构造: $f(i,j)=n$, 其中

$$n=\begin{cases}1, & i=j=1\\ j+\sum_{k=1}^{i+j-2}k, & i+j>2\end{cases}.$$

可数集3

- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可列集(可列集和可列集的直积是可列集).
  证明：构造映射 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$. 则 f 是单射，$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可列集. 任意可列集和可列集的直积与 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 对等.
  映射 f 也可以如下构造: $f(i,j)=n$, 其中

$$n=\begin{cases}1, & i=j=1\\ j+\sum_{k=1}^{i+j-2}k, & i+j>2\end{cases}.$$

可数集3

- $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可列集(可列集和可列集的直积是可列集).

  证明：构造映射 $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(m,n)=2^{m-1}(2n-1)$. 则 f 是单射，$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 是可列集. 任意可列集和可列集的直积与 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 对等.

  映射 f 也可以如下构造: $f(i,j)=n$, 其中

$$n=\begin{cases}1, & i=j=1\\ j+\sum_{k=1}^{i+j-2}k, & i+j>2\end{cases}.$$

可数集4

- 可列集列的并集是可列集: 设 $A_n(n = 1, 2, \cdots)$ 为可列集列, 则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可列集.

  证明: 设 $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,k}, \cdots\}$, $f(n, k) = a_{n,k}$ 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 A 的满射.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 是可列集.

  证明: 构造 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(p, q) = \frac{p}{q}$ 是满射.
- 可数集和可数集的直积是可数集.

可数集4

- 可列集列的并集是可列集：设 $A_n(n = 1, 2, \cdots)$ 为可列集列，则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可列集.
  证明：设 $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,k}, \cdots\}$, $f(n, k) = a_{n,k}$ 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 A 的满射.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 是可列集.
  证明：构造 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(p, q) = \frac{p}{q}$ 是满射.
- 可数集和可数集的直积是可数集.

可数集4

- 可列集列的并集是可列集: 设 $A_n(n = 1, 2, \cdots)$ 为可列集列, 则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可列集.
  证明: 设 $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,k}, \cdots\}$, $f(n, k) = a_{n,k}$ 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 A 的满射.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 是可列集.
  证明：构造 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(p, q) = \frac{p}{q}$ 是满射.
- 可数集和可数集的直积是可数集.

可数集4

- 可列集列的并集是可列集：设 $A_n(n = 1, 2, \cdots)$ 为可列集列，则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可列集.
  证明：设 $A_n = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \cdots, a_{n,k}, \cdots\}$, $f(n,k) = a_{n,k}$ 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 A 的满射.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 是可列集.
  证明：构造 $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(p,q) = \frac{p}{q}$ 是满射.
- 可数集和可数集的直积是可数集.

无穷集的性质

- 性质：若 A 是无穷集，B 是可数集，则 $A \sim A \cup B$.

  证明：不妨设 A 与 B 不交. 存在可列集 $C \subset A$, 则有 $A = (A \backslash C) \cup C \sim (A \backslash C) \cup (C \cup B) = A \cup B$.

- 定理: A 是无穷集的充要条件是 A 与它的某个真子集对等.

  证明: 设 $a \in A$, $A \backslash \{a\} \sim (A \backslash \{a\}) \cup \{a\} = A$.

无穷集的性质

- 性质：若 A 是无穷集，B 是可数集，则 $A \sim A \cup B$.
  证明：不妨设 A 与 B 不交. 存在可列集 $C \subset A$, 则有 $A = (A \backslash C) \cup C \sim (A \backslash C) \cup (C \cup B) = A \cup B$.
- 定理: A 是无穷集的充要条件是 A 与它的某个真子集对等.
  证明: 设 $a \in A$, $A \backslash \{a\} \sim (A \backslash \{a\}) \cup \{a\} = A$.

无穷集的性质

- 性质：若 A 是无穷集，B 是可数集，则 $A \sim A \cup B$.
  证明：不妨设 A 与 B 不交. 存在可列集 $C \subset A$, 则有 $A = (A \backslash C) \cup C \sim (A \backslash C) \cup (C \cup B) = A \cup B$.
- 定理: A 是无穷集的充要条件是 A 与它的某个真子集对等.
  证明: 设 $a \in A$, $A \backslash \{a\} \sim (A \backslash \{a\}) \cup \{a\} = A$.

可数集的例子

- $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ 都是可列集.
- $\{B(x, \frac{1}{k}) : x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}\}$ 是可列集.
  证明：构造映射 $B(x, \frac{1}{k}) \to (x, k) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{N}$.
- 单调函数的间断点集是可数集.
  证明：不妨设 f 单调增. f 在定义域内任意点处的左右极限存在. x 是间断点的充要条件是 $f(x+0) > f(x-0)$. 对不同的间断点 x_1, x_2, $(f(x_1-0), f(x_1+0))$ 和 $(f(x_2-0), f(x_2+0))$ 不交. 对任意间断点 x，取有理数 $r_x \in (f(x-0), f(x+0))$. 则映射: $x \to r_x$ 是间断点集到有理数集的单射. 因此间断点集和有理数的一个子集对等，因此可数.

可数集的例子

- $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ 都是可列集.
- $\{B(x,\frac{1}{k}) : x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}\}$ 是可列集.
  证明：构造映射 $B(x,\frac{1}{k}) \to (x,k) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{N}$.
- 单调函数的间断点集是可数集.
  证明：不妨设 f 单调增. f 在定义域内任意点处的左右极限存在. x 是间断点的充要条件是 $f(x+0) > f(x-0)$. 对不同的间断点 x_1, x_2, $(f(x_1-0), f(x_1+0))$ 和 $(f(x_2-0), f(x_2+0))$ 不交. 对任意间断点 x，取有理数 $r_x \in (f(x-0), f(x+0))$. 则映射: $x \to r_x$ 是间断点集到有理数集的单射. 因此间断点集和有理数的一个子集对等，因此可数.

可数集的例子

- $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ 都是可列集.
- $\{B(x,\frac{1}{k}) : x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}\}$ 是可列集.
  证明：构造映射 $B(x,\frac{1}{k}) \to (x,k) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{N}$.
- 单调函数的间断点集是可数集.
  证明：不妨设 f 单调增. f 在定义域内任意点处的左右极限存在. x 是间断点的充要条件是 $f(x+0) > f(x-0)$. 对不同的间断点 x_1, x_2, $(f(x_1-0), f(x_1+0))$ 和 $(f(x_2-0), f(x_2+0))$ 不交. 对任意间断点 x，取有理数 $r_x \in (f(x-0), f(x+0))$. 则映射: $x \to r_x$ 是间断点集到有理数集的单射. 因此间断点集和有理数的一个子集对等，因此可数.

可数集的例子

- $\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$ 都是可列集.
- $\{B(x, \frac{1}{k}) : x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}\}$ 是可列集.
  证明：构造映射 $B(x, \frac{1}{k}) \to (x, k) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{N}$.
- 单调函数的间断点集是可数集.
  证明：不妨设 f 单调增. f 在定义域内任意点处的左右极限存在. x 是间断点的充要条件是 $f(x+0) > f(x-0)$. 对不同的间断点 x_1, x_2, $(f(x_1-0), f(x_1+0))$ 和 $(f(x_2-0), f(x_2+0))$ 不交. 对任意间断点 x，取有理数$r_x \in (f(x-0), f(x+0))$. 则映射: $x \to r_x$ 是间断点集到有理数集的单射. 因此间断点集和有理数的一个子集对等，因此可数.

- 例：若 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 则集合

$$\{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ 在 } x \text{ 点不连续, 且右极限 } f(x+0) \text{ 存在有限}\}$$

是可数集

证明: 令 $S = \{x \in \mathbb{R} : \text{右极限 } f(x+0) \text{ 存在有限}\}$,

$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : \exists \delta > 0, |f(x') - f(x")| < \frac{1}{n}, x', x" \in (x-\delta, x+\delta)\}.$$

则 $\bigcap E_n$ 是 $f(x)$ 的连续点集, 只需证明 $S \backslash E_n$ 是可数集.
设 $x \in S\backslash E_n$, x 点处右极限存在, 因此存在 $(x, x+\delta)$, 当 $x', x" \in (x, x+\delta)$时, $|f(x') - f(x")| < \frac{1}{n}$, 即 $I_x = (x, x+\delta) \subset E_n$, 若 $x_1, x_2 \in S\backslash E_n$, I_{x_1} 与 I_{x_2} 不交. 因此 $\{I_x\}$ 可数.

左右导数不相等的点可数1

- 例：$f(x)$ 是 (a,b) 上的函数，则集合

$$\{x \in (a,b) : \text{右导数 } f'_+(x) \text{ 与左导数 } f'_-(x) \text{ 都存在而不相等}\}$$

- 证明思路：令

$$A = \{x \in (a,b) : f'_+(x) < f'_-(x)\}$$
$$B = \{x \in (a,b) : f'_+(x) > f'_-(x)\}$$

要证 A, B 均为可数集. 对任意 $x \in A$，存在有理数 r_x，s_x, t_x 使得 $x \to (r_x, s_x, t_x)$ 是单射.

- 推理：(a,b) 上的凸函数的不可微点集是可数集.

左右导数不相等的点可数2

- 证明: 对任意 $x \in A = \{x \in (a,b) : f'_+(x) < f'_-(x)\}$, 存在有理数 r_x, 使得 $f'_+(x) < r_x < f'_-(x)$, 存在有理数 s_x, t_x 满足 $a < s_x < x < t_x < b$, 使得

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > r_x, s_x < y < x; \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < r_x, x < y < t_x.$$

即当 $s_x < y < t_x$, 且 $y \neq x$ 时, $f(y) - f(x) < r_x(y-x)$.
下面证明 $x \to (r_x, s_x, t_x)$ 是单射. 事实上, 若 $x_1 \neq x_2$, $(s_{x_1}, t_{x_1}) = (s_{x_2}, t_{x_2})$, $x_1, x_2 \in (s_{x_1}, t_{x_1})$, 因此

$$f(x_2) - f(x_1) < r_{x_1}(x_2 - x_1), f(x_1) - f(x_2) < r_{x_2}(x_1 - x_2)$$

显然 $r_{x_1} \neq r_{x_2}$.

$\mathbb{R}$ 是不可数集1

- 定理：$(0,1)$ 是不可数集.
- 证明：反设 $(0,1)$ 可数，则 $(0,1]$ 也是可数集，存在双射 $f:\mathbb{N}\to(0,1]$. 对任意 $x\in(0,1]$, 有唯一的十进制小数表示 $x=0.a_1a_2\cdots$ (规定不允许从某位开始全为 0，如 0.3 写成 $0.2999\cdots$). 令 $f(n)=0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\cdots$. 构造 $x=b_1b_2\cdots\in(0,1]$ 满足：当 $a_{n,n}\leq 1$ 时，$b_n=2$; 当 $a_{n,n}\geq 2$ 时，$b_n=1$. 则 $x\neq f(n), \forall n$, 这与 f 是双射矛盾.
- 另一证明: 反设 $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots\}$, $[0,1]$ 三等分, $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 必有一个区间(记为 I_1)不含 x_1, 再把 I_1 三等分, 左右两个区间中必有一个(记为 I_2)不含 x_2, 继续下去得集合列 I_n, $x_n\notin\bigcap I_n$, 因此 $\bigcap I_n$ 是空集.

$\mathbb{R}$ 是不可数集1

- 定理：$(0,1)$ 是不可数集.
- 证明：反设 $(0,1)$ 可数，则 $(0,1]$ 也是可数集，存在双射 $f:\mathbb{N}\to(0,1]$. 对任意 $x\in(0,1]$, 有唯一的十进制小数表示 $x=0.a_1a_2\cdots$ (规定不允许从某位开始全为 0，如 0.3 写成 $0.2999\cdots$). 令 $f(n)=0.a_{n,1}a_{n,2}a_{n,3}\cdots$. 构造 $x=b_1b_2\cdots\in(0,1]$ 满足：当 $a_{n,n}\le 1$ 时，$b_n=2$; 当 $a_{n,n}\ge 2$ 时，$b_n=1$. 则 $x\ne f(n), \forall n$, 这与 f 是双射矛盾.
- 另一证明: 反设 $[0,1]=\{x_1,x_2,\cdots\}$, $[0,1]$ 三等分, $[0,\frac{1}{3}]$ 和 $[\frac{2}{3},1]$ 必有一个区间(记为 I_1)不含 x_1, 再把 I_1 三等分, 左右两个区间中必有一个(记为 I_2)不含 x_2, 继续下去得集合列 I_n, $x_n\notin\bigcap I_n$, 因此 $\bigcap I_n$ 是空集.

$\mathbb{R}$ 的一些等势集

- $\mathcal{A}_1 = \{0,1$构成的序列$\}$, $\mathcal{A}_1' = \{0,1$构成的序列, 且有无穷项等于$1\}$, $\mathcal{A}_2 = \{$自然数列$\}$, $\mathcal{A}_3 = \{$严格递增自然数列$\}$, $\mathcal{A}_4 = 2^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}_5 = \{A : A \subset \mathbb{N}$是无穷集$\}$
- $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_1'$: $\{0,1$构成的序列, 且只有有限项等于$1\}$ 是可数集($\{a_n\} \to \sum \frac{a_n}{2^n} \in \mathbb{Q}$).
- $\mathcal{A}_2 \sim \mathcal{A}_3$: $\{n_k\} \to \{S_k = n_1 + n_2 + \cdots + n_k\}$
- $\mathcal{A}_3 \sim \mathcal{A}_5$
- $\mathcal{A}_4 \sim \mathcal{A}_5$: $B = \{A : A \subset \mathbb{N}$是有限集$\}$ 可数,
- $(0,1] \sim \mathcal{A}_1'$: 二进制展开 $x = 0.a_1a_2\cdots$(要求无穷个 $a_n = 1$),
- $\mathcal{A}_1' \sim \mathcal{A}_3$: 设 $a_{n_k} = 1$, n_k 是严格递增数列.

实数列构成集合的基数

- 定义: 称 $(0,1)(\mathbb{R}\ )$的基数为连续基数, 记为 c 或者 $\aleph_1$. 则 $c = 2^{\aleph_0}$.
- 例：无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ 的基数均为 c.
- 集合

$$\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, \cdots) : x_k \in \mathbb{R}\}$$

的基数是 c.

证明: x_k 对应于自然数列 $x_{k,j}(j = 1, 2, \cdots)$, $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} : (k, j) \to n = f(k, j)$ 是双射, $\mathbb{R}^\infty$ 到 {自然数列} 的映射: $\{x_k\} \to \{a_n = x_{k,j}\}$.

实数列构成集合的基数

- 定义: 称 $(0,1)(\mathbb{R}\ )$的基数为连续基数, 记为 c 或者 $\aleph_1$. 则 $c=2^{\aleph_0}$.
- 例：无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^n$ 的基数均为 c.
- 集合

$$\mathbb{R}^\infty=\{(x_1,x_2,\cdots):x_k\in\mathbb{R}\}$$

的基数是 c.

证明: x_k 对应于自然数列 $x_{k,j}(j=1,2,\cdots)$, $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}:(k,j)\to n=f(k,j)$ 是双射, $\mathbb{R}^\infty$ 到 $\{$自然数列$\}$ 的映射: $\{x_k\}\to\{a_n=x_{k,j}\}$.

无最大基数定理

- $\overline{\overline{2^{\phi}}} = 1$, $\overline{\overline{A}} = n$ 时, $\overline{\overline{2^{A}}} = 2^n$.
- 定理: 若 A 是非空集合, 则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{2^{A}}}$.

  证明: 只要证明 A 到 2^A 的任意映射都不是满射. 设 $f : A \to 2^A$, 考虑集合 $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. 任意 $x \in B$, 满足 $x \notin f(x)$, 显然 $f(x) \neq B$; 对任意 $x \notin B$, $x \in f(x)$, 也有 $f(x) \neq B$.

  例: $A = \{1, 2, \cdots, n\}$, $k \to \{k\}$, 则 $B = \phi$.
- 推论: $c > \aleph_0$.

n 维欧氏空间

n维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}\}$.

- 代数运算：$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x + y = \{x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n\},$$
$$\lambda x = \{\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n\}.$$

- 内积 $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, 模 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, 满足

$$|(x, y)| \le |x| \cdot |y|, \quad |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|, \quad |x + y| \le |x| + |y|.$$

证明: 可直接验证 $(x, y)^2 \le |x|^2 \cdot |y|^2$.

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y \le |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y|.$$

n 维欧氏空间

n维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}\}$.

- 代数运算：$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x + y = \{x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n\},$$
$$\lambda x = \{\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n\}.$$

- 内积 $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, 模 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, 满足

$$|(x, y)| \le |x| \cdot |y|, \quad |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|, \quad |x + y| \le |x| + |y|.$$

证明: 可直接验证 $(x, y)^2 \le |x|^2 \cdot |y|^2$.

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y \le |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y|.$$

n维欧氏空间 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}\}$.

- 代数运算：$x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x + y = \{x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n\},$$
$$\lambda x = \{\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n\}.$$

- 内积 $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, 模 $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, 满足

$$|(x, y)| \leq |x| \cdot |y|, \quad |\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|, \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

证明: 可直接验证 $(x, y)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2$.

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2x \cdot y \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y|.$$

n 维欧氏空间的拓扑

- n 维欧氏空间上的距离: $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ 满足
  - $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
  - $d(x,y) = d(y,x)$.
  - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,
    证明: $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.
- 开球 $B(x,r) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$, 也称为 x 的球邻域.
- 闭球 $\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$.
- 球面 $S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = r\}$.

n 维欧氏空间的拓扑

- n 维欧氏空间上的距离: $d(x,y) = |x-y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ 满足
  - $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \iff x = y$.
  - $d(x,y) = d(y,x)$.
  - $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,
    证明: $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$.
- 开球 $B(x,r) = B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$, 也称为 x 的球邻域.
- 闭球 $\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) \leq r\}$.
- 球面 $S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) = r\}$.

n 维欧氏空间的矩体

- 集合的直径: $\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$.
- 有界集: $E \subset \mathbb{R}^n$ 有界
  $\iff \operatorname{diam}(E) < \infty$.
  $\iff \exists M > 0, \|x\| \leq M, \forall x \in E$
  $\iff \exists B(0,r) \supset E$.
- 开矩体 $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$.
- 闭矩体 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.
- 半开闭矩体 $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots \times (a_n, b_n]$.

点列的极限点

- 极限点：$\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $d(x_n, x) \to 0$, 则称$\{x_k\}$是收敛点列，x 是 x_k 的极限点，记着 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.
- 性质：设 $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n})$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 则有

$$x_k \to x(\,|x_k - x| \to 0\,) \Longleftrightarrow x_{k,i} \to x_i, i = 1, \cdots, n.$$

证明：若 $|x - x_k| \to 0$, 则有 $|x_i - x_{k,i}| \leq |x - x_k| \to 0$(这里 $i = 1, 2, \cdots, n$); 若对 $i = 1, 2, \cdots, n$，$|x_i - x_{k,i}| \to 0$, 则有

$$|x - x_k| = \sqrt{(x_1 - x_{k,1})^2 + (x_2 - x_{k,2})^2 + \cdots (x_n - x_{k,n})^2} \to 0.$$

点列的极限点

- 极限点：$\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $d(x_n, x) \to 0$, 则称$\{x_k\}$ 是收敛点列，x 是 x_k 的极限点，记着 $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.
- 性质：设 $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n})$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 则有

$$x_k \to x(\,|x_k - x| \to 0\,) \Longleftrightarrow x_{k,i} \to x_i, i = 1, \cdots, n.$$

证明：若 $|x - x_k| \to 0$, 则有 $|x_i - x_{k,i}| \leq |x - x_k| \to 0$(这里 $i = 1, 2, \cdots, n$); 若对 $i = 1, 2, \cdots, n$，$|x_i - x_{k,i}| \to 0$, 则有

$$|x - x_k| = \sqrt{(x_1 - x_{k,1})^2 + (x_2 - x_{k,2})^2 + \cdots (x_n - x_{k,n})^2} \to 0.$$

点列的极限点

- 极限点：$\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. 若存在 $x \in \mathbb{R}^n$, 使得 $d(x_n, x) \to 0$, 则称$\{x_k\}$是收敛点列，x 是 x_k 的极限点，记着 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.
- 性质：设 $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n})$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 则有

$$x_k \to x(\,|x_k - x| \to 0\,) \Longleftrightarrow x_{k,i} \to x_i, i = 1, \cdots, n.$$

证明：若 $|x - x_k| \to 0$, 则有 $|x_i - x_{k,i}| \leq |x - x_k| \to 0$(这里 $i = 1, 2, \cdots, n$); 若对 $i = 1, 2, \cdots, n$，$|x_i - x_{k,i}| \to 0$, 则有

$$|x - x_k| = \sqrt{(x_1 - x_{k,1})^2 + (x_2 - x_{k,2})^2 + \cdots (x_n - x_{k,n})^2} \to 0.$$

集合的聚点和孤立点

- 集合的极限点(聚点): $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意 $\epsilon > 0$,

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E \neq \phi,$$

则称 x 是集合 E 的聚点. E 的聚点集记为 E'.

- 集合的孤立点: $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$. 若存在$\epsilon > 0$, 使得

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E = \phi,$$

即 $B(x,\epsilon) \cap E = \{x\}$, 则称 x 是集合 E 的孤立点.
显然 E 的孤立集记为 $E\backslash E'$, $E = (E \cap E') \cup (E\backslash E')$.

- 例: 若 $E = \mathbb{Q}$, 则有 $E' = \mathbb{R}$, $E\backslash E' = \phi$.
- 例: 若 $E = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\}$, 则有 $E' = \{0\}$, $E\backslash E' = E$.

集合的聚点和孤立点

- 集合的极限点(聚点): $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意 $\epsilon > 0$,

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E \neq \phi,$$

  则称 x 是集合 E 的聚点. E 的聚点集记为 E'.

- 集合的孤立点: $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$. 若存在$\epsilon > 0$, 使得

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E = \phi,$$

  即 $B(x,\epsilon) \cap E = \{x\}$, 则称 x 是集合 E 的孤立点.
  显然 E 的孤立集记为 $E\backslash E'$, $E = (E \cap E') \cup (E\backslash E')$.

- 例: 若 $E = \mathbb{Q}$, 则有 $E' = \mathbb{R}$, $E\backslash E' = \phi$.
- 例: 若 $E = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\}$, 则有 $E' = \{0\}$, $E\backslash E' = E$.

集合的聚点和孤立点

- 集合的极限点(聚点): $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意 $\epsilon > 0$,

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E \neq \phi,$$

则称 x 是集合 E 的聚点. E 的聚点集记为 E'.

- 集合的孤立点: $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$. 若存在$\epsilon > 0$, 使得

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E = \phi,$$

即 $B(x,\epsilon) \cap E = \{x\}$, 则称 x 是集合 E 的孤立点.
显然 E 的孤立集记为 $E\backslash E'$, $E = (E \cap E') \cup (E\backslash E')$.

- 例: 若 $E = \mathbb{Q}$, 则有 $E' = \mathbb{R}$, $E\backslash E' = \phi$.
- 例: 若 $E = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\}$, 则有 $E' = \{0\}$, $E\backslash E' = E$.

集合的聚点和孤立点

- 集合的极限点(聚点): $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意 $\epsilon > 0$,

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E \neq \phi,$$

  则称 x 是集合 E 的聚点. E 的聚点集记为 E'.

- 集合的孤立点: $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$. 若存在$\epsilon > 0$, 使得

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E = \phi,$$

  即 $B(x,\epsilon) \cap E = \{x\}$, 则称 x 是集合 E 的孤立点.
  显然 E 的孤立集记为 $E\backslash E'$, $E = (E \cap E') \cup (E\backslash E')$.

- 例: 若 $E = \mathbb{Q}$, 则有 $E' = \mathbb{R}$, $E\backslash E' = \phi$.
- 例: 若 $E = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\}$, 则有 $E' = \{0\}$, $E\backslash E' = E$.

集合的聚点和孤立点

- 集合的极限点(聚点): $x \in \mathbb{R}^n$, $E \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意 $\epsilon > 0$,

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E \neq \phi,$$

  则称 x 是集合 E 的聚点. E 的聚点集记为 E'.

- 集合的孤立点: $E \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$. 若存在$\epsilon > 0$, 使得

$$(B(x,\epsilon))\backslash\{x\} \cap E = \phi,$$

  即 $B(x,\epsilon) \cap E = \{x\}$, 则称 x 是集合 E 的孤立点.
  显然 E 的孤立集记为 $E\backslash E'$, $E = (E \cap E') \cup (E\backslash E')$.

- 例: 若 $E = \mathbb{Q}$, 则有 $E' = \mathbb{R}$, $E\backslash E' = \phi$.
- 例: 若 $E = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \cdots\}$, 则有 $E' = \{0\}$, $E\backslash E' = E$.

聚点和孤立点的性质1

- 性质：$x \in E'$ 的充要条件是 $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列 $\{x_n\} \subset E$, 使得 $x_n \to x$.
- 证明：若存在互异点列 $\{x_n\} \subset E$, 使得 $x_n \to x$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$x_n \in B(x,\epsilon) \cap E$, 因此 $B(x,\epsilon)\backslash\{x\} \cap E \neq \phi$. 若 $x \in E'$，$r_1 = 1$, 则 $B(x,r_1)\backslash\{x\} \cap E \neq \phi$, 存在 $x_1 \in B(x,r_1)\backslash\{x\} \cap E$; 取 $r_2 = \min\{\frac{1}{2}, d(x,x_1)\}$, 则存在 $x_2 \in B(x,r_2)\backslash\{x\} \cap E, \cdots$ 的互异点列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \to x$.
- 推论：$x \in A' \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x_0) \cap A$ 是无穷集
  $\Longleftrightarrow$ 存在点列 $\{x_n\} \subset A\backslash\{x_0\}$, 使得 $x_n \to x_0$
  $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列 $\{x_n\} \subset A$, 使得 $x_n \to x_0$.

- 性质：$x \in E'$ 的充要条件是 $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列 $\{x_n\} \subset E$, 使得 $x_n \to x$.
- 证明：若存在互异点列 $\{x_n\} \subset E$, 使得 $x_n \to x$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时，$x_n \in B(x, \epsilon) \cap E$, 因此 $B(x, \epsilon) \backslash \{x\} \cap E \neq \phi$. 若 $x \in E'$，$r_1 = 1$, 则 $B(x, r_1) \backslash \{x\} \cap E \neq \phi$, 存在 $x_1 \in B(x, r_1) \backslash \{x\} \cap E$; 取 $r_2 = \min\{\frac{1}{2}, d(x, x_1)\}$, 则存在 $x_2 \in B(x, r_2) \backslash \{x\} \cap E, \cdots$ 的互异点列 $\{x_n\}$, 且 $x_n \to x$.
- 推论：$x \in A' \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $B_\epsilon(x_0) \cap A$ 是无穷集
$\Longleftrightarrow$ 存在点列 $\{x_n\} \subset A \backslash \{x_0\}$, 使得 $x_n \to x_0$
$\Longleftrightarrow$ 存在互异点列 $\{x_n\} \subset A$, 使得 $x_n \to x_0$.

聚点和孤立点的性质1

- 性质：$x \in E'$ 的充要条件是 $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列 $\{x_n\} \subset E$，使得 $x_n \to x$.
- 证明：若存在互异点列 $\{x_n\} \subset E$，使得 $x_n \to x$，则对任意的 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，$x_n \in B(x, \epsilon) \cap E$，因此 $B(x, \epsilon) \backslash \{x\} \cap E \neq \phi$.
  若 $x \in E'$，$r_1 = 1$，则 $B(x, r_1) \backslash \{x\} \cap E \neq \phi$，存在 $x_1 \in B(x, r_1) \backslash \{x\} \cap E$；取 $r_2 = \min\{\frac{1}{2}, d(x, x_1)\}$，则存在 $x_2 \in B(x, r_2) \backslash \{x\} \cap E, \cdots$ 的互异点列 $\{x_n\}$，且 $x_n \to x$.
- 推论：$x \in A' \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0$，$B_\epsilon(x_0) \cap A$ 是无穷集
  $\Longleftrightarrow$ 存在点列 $\{x_n\} \subset A \backslash \{x_0\}$，使得 $x_n \to x_0$
  $\Longleftrightarrow$ 存在互异点列 $\{x_n\} \subset A$，使得 $x_n \to x_0$.

聚点和孤立点的性质2

- 若 $A \subset B$, 则有 $A' \subset B'$.
  证明: 若 $x \in A'$, 则存在 A 中的互异点列 $x_n \to x$, 又 $x_n \in B$, 从而 $x \in B'$.
- $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
  证明: $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$ 显然成立.
  $\forall x \in (A \cup B)'$, 存在互异点列 $x_n \in A \cup B$, 使得 $x_n \to x$. 则 A 或 B 包含 $\{x_n\}$ 的一个子列, 从而 $x \in A'$ 或 $x \in B'$.
- 孤立点集可数. 若 E 不可数, 则 E' 不可数; 若E' 可数, 则 E 可数.

聚点和孤立点的性质2

- 若 $A \subset B$, 则有 $A' \subset B'$.
  证明: 若 $x \in A'$, 则存在 A 中的互异点列 $x_n \to x$, 又 $x_n \in B$, 从而 $x \in B'$.
- $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
  证明: $(A \cup B)' \supset A' \cup B'$ 显然成立.
  $\forall x \in (A \cup B)'$, 存在互异点列 $x_n \in A \cup B$, 使得 $x_n \to x$. 则 A 或 B 包含 $\{x_n\}$ 的一个子列, 从而 $x \in A'$ 或 $x \in B'$.
- 孤立点集可数. 若 E 不可数, 则 E' 不可数; 若E' 可数, 则 E 可数.

内点和边界点

- 内点：$A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$. 若存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B_\epsilon(x_0) \subset A$, 则称 x_0 是集合 A 的内点. A 的内点集记为 $\mathring{A}$.
- 边界点：$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$, $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 则称 x_0 是集合 A 的边界点. A 的边界点集记为 ∂A.
- 性质: $\mathring{A} \subset A$, 但是 ∂A 不一定是 A 的子集. $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$.
  证明：若 $x \in A \backslash \mathring{A}$, 则对任意 $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x_0) \not\subset A$, 从而 $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 又显然有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$ (包含 x). 因此 $x \in \partial A$.
- 例: 若 $A = [a, b]$, 则有 $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$.
- 例: 若 $A = \mathbb{Q}$, 则有 $\mathring{A} = \phi$, $\partial A = \mathbb{R}$.

内点和边界点

- 内点：$A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$. 若存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B_\epsilon(x_0) \subset A$, 则称 x_0 是集合 A 的内点. A 的内点集记为 $\mathring{A}$.
- 边界点：$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$, $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 则称 x_0 是集合 A 的边界点. A 的边界点集记为 ∂A.
- 性质: $\mathring{A} \subset A$, 但是 ∂A 不一定是 A 的子集. $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$.
  证明：若 $x \in A \backslash \mathring{A}$, 则对任意 $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x_0) \not\subset A$, 从而 $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 又显然有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$ (包含 x). 因此 $x \in \partial A$.
- 例: 若 $A = [a, b]$, 则有 $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$.
- 例: 若 $A = \mathbb{Q}$, 则有 $\mathring{A} = \phi$, $\partial A = \mathbb{R}$.

内点和边界点

- 内点：$A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$. 若存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B_\epsilon(x_0) \subset A$, 则称 x_0 是集合 A 的内点. A 的内点集记为 $\mathring{A}$.
- 边界点：$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$, $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 则称 x_0 是集合 A 的边界点. A 的边界点集记为 ∂A.
- 性质: $\mathring{A} \subset A$, 但是 ∂A 不一定是 A 的子集. $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$.

  证明：若 $x \in A \backslash \mathring{A}$, 则对任意 $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x_0) \not\subset A$, 从而 $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 又显然有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$ (包含 x). 因此 $x \in \partial A$.
- 例: 若 $A = [a, b]$, 则有 $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$.
- 例: 若 $A = \mathbb{Q}$, 则有 $\mathring{A} = \phi$, $\partial A = \mathbb{R}$.

内点和边界点

- 内点：$A \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in A$. 若存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B_\epsilon(x_0) \subset A$, 则称 x_0 是集合 A 的内点. A 的内点集记为 $\mathring{A}$.
- 边界点：$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$. 若对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$, $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 则称 x_0 是集合 A 的边界点. A 的边界点集记为 ∂A.
- 性质: $\mathring{A} \subset A$, 但是 ∂A 不一定是 A 的子集. $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$.
  证明：若 $x \in A \backslash \mathring{A}$, 则对任意 $\epsilon > 0$, $B_\epsilon(x_0) \not\subset A$, 从而 $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 又显然有 $B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi$ (包含 x). 因此 $x \in \partial A$.
- 例: 若 $A = [a, b]$, 则有 $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$.
- 例: 若 $A = \mathbb{Q}$, 则有 $\mathring{A} = \phi$, $\partial A = \mathbb{R}$.

内点和边界点的性质1

- $\partial A = \partial A^c$.
- $A' \backslash A = \partial A \backslash A$.

  证明：若 $x_0 \in \partial A \backslash A$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 有

$$B_\epsilon(x_0) \cap A = B_\epsilon(x_0) \cap (A \backslash \{x_0\}) \neq \phi,$$

从而 $x \in A'$. 反过来，若 $x_0 \in A' \backslash A$, 则 $\forall \epsilon > 0$，有

$$B_\epsilon(x_0) \cap (A \backslash \{x_0\}) = B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi,$$

且显然有 $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 因此 $x \in \partial A$.

内点和边界点的性质1

- $\partial A = \partial A^c$.
- $A' \backslash A = \partial A \backslash A$.

  证明：若 $x_0 \in \partial A \backslash A$, 则 $\forall \epsilon > 0$, 有
  $$B_\epsilon(x_0) \cap A = B_\epsilon(x_0) \cap (A \backslash \{x_0\}) \neq \phi,$$
  从而 $x \in A'$. 反过来，若 $x_0 \in A' \backslash A$, 则 $\forall \epsilon > 0$，有
  $$B_\epsilon(x_0) \cap (A \backslash \{x_0\}) = B_\epsilon(x_0) \cap A \neq \phi,$$
  且显然有 $B_\epsilon(x_0) \cap A^c \neq \phi$, 因此 $x \in \partial A$.

内点和边界点的性质2

- $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

  证明：设 $x \in \partial(A \cup B)$. 若 $x \in A$, 则

$$B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi, B_\epsilon(x) \cap (A \cup B)^c \subset B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \phi,$$

  从而 $x \in \partial A$; 同理若 $x \in B$, 则 $x \in \partial B$; 若 $x \notin (A \cup B)$, 由于 $\partial(A \cup B) \backslash (A \cup B) = (A \cup B)' \backslash (A \cup B)$,

$$x \in (A' \cup B') \backslash (A \cup B) \subset (A' \backslash A) \cup (B' \backslash B) = (\partial A \backslash A) \cup (\partial B \backslash B).$$

- 注：$\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$ 不一定成立. 如 $A = [0,1]$, $B = [1,2]$. $\partial(A \cup B) = \{0,2\}$, $\partial A \cup \partial B = \{0,1,2\}$.

内点和边界点的性质2

- $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.
  证明：设 $x \in \partial(A \cup B)$. 若 $x \in A$, 则
  $$B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi, B_\epsilon(x) \cap (A \cup B)^c \subset B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \phi,$$
  从而 $x \in \partial A$; 同理若 $x \in B$, 则 $x \in \partial B$; 若 $x \notin (A \cup B)$, 由于 $\partial(A \cup B) \backslash (A \cup B) = (A \cup B)' \backslash (A \cup B)$,
  $$x \in (A' \cup B') \backslash (A \cup B) \subset (A' \backslash A) \cup (B' \backslash B) = (\partial A \backslash A) \cup (\partial B \backslash B).$$
- 注: $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$ 不一定成立. 如 $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$. $\partial(A \cup B) = \{0, 2\}$, $\partial A \cup \partial B = \{0, 1, 2\}$.

- $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.
  证明：设 $x \in \partial(A \cup B)$. 若 $x \in A$, 则
  $$B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi, B_\epsilon(x) \cap (A \cup B)^c \subset B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \phi,$$
  从而 $x \in \partial A$; 同理若 $x \in B$, 则 $x \in \partial B$; 若 $x \notin (A \cup B)$, 由于 $\partial(A \cup B) \backslash (A \cup B) = (A \cup B)' \backslash (A \cup B)$,
  $$x \in (A' \cup B') \backslash (A \cup B) \subset (A' \backslash A) \cup (B' \backslash B) = (\partial A \backslash A) \cup (\partial B \backslash B).$$
- 注: $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$ 不一定成立. 如 $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$. $\partial(A \cup B) = \{0, 2\}$, $\partial A \cup \partial B = \{0, 1, 2\}$.

集合的闭包1

- 闭包：集合 A 的闭包 $\bar{A} = A \cup A'$.
- $\bar{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$.

  证明：利用 $A' \backslash A = \partial A \backslash A$, $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$,

$$
\begin{aligned}
A \cup A' &= A \cup (A' \backslash A) = A \cup (\partial A \backslash A) = A \cup \partial A \\
&= \mathring{A} \cup (\partial A \cap A) \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A.
\end{aligned}
$$

- 性质: $x \in \bar{A} \iff \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi \iff$ 存在 A 中点列 $x_n \to x$.
- 例：$A = [a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$, $A' = [a, b] = \bar{A}$.

集合的闭包1

- 闭包：集合 A 的闭包 $\bar{A} = A \cup A'$.
- $\bar{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$.

  证明：利用 $A' \backslash A = \partial A \backslash A$, $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$,

$$
\begin{aligned}
A \cup A' &= A \cup (A' \backslash A) = A \cup (\partial A \backslash A) = A \cup \partial A \\
&= \mathring{A} \cup (\partial A \cap A) \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A.
\end{aligned}
$$

- 性质: $x \in \bar{A} \iff \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi \iff$ 存在 A 中点列 $x_n \to x$.
- 例：$A = [a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$, $A' = [a, b] = \bar{A}$.

集合的闭包1

- 闭包：集合 A 的闭包 $\bar{A} = A \cup A'$.
- $\bar{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$.

  证明：利用 $A' \backslash A = \partial A \backslash A$, $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$,

$$\begin{aligned} A \cup A' &= A \cup (A' \backslash A) = A \cup (\partial A \backslash A) = A \cup \partial A \\ &= \mathring{A} \cup (\partial A \cap A) \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A. \end{aligned}$$

- 性质: $x \in \bar{A} \iff \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi \iff$ 存在 A 中点列 $x_n \to x$.
- 例：$A = [a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$, $A' = [a, b] = \bar{A}$.

集合的闭包1

- 闭包：集合 A 的闭包 $\bar{A} = A \cup A'$.
- $\bar{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$.

  证明：利用 $A' \backslash A = \partial A \backslash A$, $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$,

$$A \cup A' = A \cup (A' \backslash A) = A \cup (\partial A \backslash A) = A \cup \partial A$$
$$= \mathring{A} \cup (\partial A \cap A) \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A.$$

- 性质: $x \in \bar{A} \iff \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi \iff$ 存在 A 中点列 $x_n \to x$.
- 例：$A = [a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$, $A' = [a, b] = \bar{A}$.

集合的闭包1

- 闭包：集合 A 的闭包 $\bar{A} = A \cup A'$.
- $\bar{A} = A \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A$.

  证明：利用 $A' \backslash A = \partial A \backslash A$, $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$,

$$\begin{aligned} A \cup A' &= A \cup (A' \backslash A) = A \cup (\partial A \backslash A) = A \cup \partial A \\ &= \mathring{A} \cup (\partial A \cap A) \cup \partial A = \mathring{A} \cup \partial A. \end{aligned}$$

- 性质: $x \in \bar{A} \iff \forall \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A \neq \phi \iff$ 存在 A 中点列 $x_n \to x$.
- 例：$A = [a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathring{A} = (a, b)$, $\partial A = \{a, b\}$, $A' = [a, b] = \bar{A}$.

集合的闭包2

- 若 $\bar{A} = E$, 则称 A 在 E 中稠密.
- 例： $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathring{A} = \phi$, $\partial A = A' = \bar{A} = \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
- (i) $\partial A = \bar{A} \backslash \mathring{A}$, (ii) $(A^c)^o = (\bar{A})^c$.

证明：(i)由关系 $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$ (不交并) 可得.

(ii)

$$\begin{aligned} x \in (A^c)^o &\Longleftrightarrow \exists \epsilon > 0, s.t. x \in B_\epsilon(x) \subset A^c \\ &\Longleftrightarrow \exists \epsilon > 0, s.t. x \in B_\epsilon(x) \cap A = \phi \\ &\Longleftrightarrow x \notin A \cup \partial A = \bar{A} \Longleftrightarrow x \in (\bar{A})^c. \end{aligned}$$

集合的闭包2

- 若 $\bar{A}=E$, 则称 A 在 E 中稠密.
- 例: $A=\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\mathring{A}=\phi$, $\partial A=A'=\bar{A}=\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
- (i) $\partial A=\bar{A}\backslash\mathring{A}$, (ii) $(A^c)^o=(\bar{A})^c$.

证明: (i)由关系 $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$ (不交并) 可得.

(ii)

$$
\begin{aligned}
x\in(A^c)^o &\Longleftrightarrow \exists\epsilon>0, s.t. x\in B_\epsilon(x)\subset A^c\\
&\Longleftrightarrow \exists\epsilon>0, s.t. x\in B_\epsilon(x)\cap A=\phi\\
&\Longleftrightarrow x\notin A\cup\partial A=\bar{A}\Longleftrightarrow x\in(\bar{A})^c.
\end{aligned}
$$

- 若 $\bar{A}=E$, 则称 A 在 E 中稠密.
- 例: $A=\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, $\mathring{A}=\phi$, $\partial A=A'=\bar{A}=\mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.
- (i) $\partial A=\bar{A}\backslash\mathring{A}$, (ii) $(A^c)^o=(\bar{A})^c$.

证明: (i)由关系 $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$ (不交并) 可得.

(ii)

$$
\begin{aligned}
x\in(A^c)^o &\Longleftrightarrow \exists\epsilon>0, s.t. x\in B_\epsilon(x)\subset A^c\\
&\Longleftrightarrow \exists\epsilon>0, s.t. x\in B_\epsilon(x)\cap A=\phi\\
&\Longleftrightarrow x\notin A\cup\partial A=\bar{A}\Longleftrightarrow x\in(\bar{A})^c.
\end{aligned}
$$

- 定义：$F \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\bar{F} = F$ 则称 F 是闭集.
- F 是闭集 $\Longleftrightarrow F' \subset F \Longleftrightarrow \partial F \subset F$.

  证明：$\bar{F} = F \cup F' = F \cup \partial F$.
- 定义：$G \subset \mathbb{R}^n$, 若 G^c 是闭集则称 G 是开集.
- G 是开集 $\Longleftrightarrow \mathring{G} = G \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.

  证明：G^c 是闭集 $\Longleftrightarrow \partial G^c = \partial G \subset G^c \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
- 例：闭球 $\bar{B}(x, r)$、球面 $S(x, r)$ 是闭集，开球 $B(x, r)$ 是开集，$\mathbb{Q}$ 既不是开集，也不是闭集，ϕ 和 $\mathbb{R}^n$ 既是开集，又是闭集.

开集和闭集

- 定义：$F \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\bar{F} = F$ 则称 F 是闭集.
- F 是闭集 $\Longleftrightarrow F' \subset F \Longleftrightarrow \partial F \subset F$.

  证明：$\bar{F} = F \cup F' = F \cup \partial F$.
- 定义：$G \subset \mathbb{R}^n$, 若 G^c 是闭集则称 G 是开集.
- G 是开集 $\Longleftrightarrow \mathring{G} = G \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.

  证明：G^c 是闭集 $\Longleftrightarrow \partial G^c = \partial G \subset G^c \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
- 例：闭球 $\bar{B}(x,r)$、球面 $S(x,r)$ 是闭集，开球 $B(x,r)$ 是开集，$\mathbb{Q}$ 既不是开集，也不是闭集，ϕ 和 $\mathbb{R}^n$ 既是开集，又是闭集.

- 定义：$F \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\bar{F} = F$ 则称 F 是闭集.
- F 是闭集 $\Longleftrightarrow F' \subset F \Longleftrightarrow \partial F \subset F$.
  证明：$\bar{F} = F \cup F' = F \cup \partial F$.
- 定义：$G \subset \mathbb{R}^n$, 若 G^c 是闭集则称 G 是开集.
- G 是开集 $\Longleftrightarrow \mathring{G} = G \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
  证明：G^c 是闭集 $\Longleftrightarrow \partial G^c = \partial G \subset G^c \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
- 例：闭球 $\bar{B}(x, r)$、球面 $S(x, r)$ 是闭集，开球 $B(x, r)$ 是开集，$\mathbb{Q}$ 既不是开集，也不是闭集，ϕ 和 $\mathbb{R}^n$ 既是开集，又是闭集.

开集和闭集

- 定义：$F \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\bar{F} = F$ 则称 F 是闭集.
- F 是闭集 $\Longleftrightarrow F' \subset F \Longleftrightarrow \partial F \subset F$.
  证明：$\bar{F} = F \cup F' = F \cup \partial F$.
- 定义：$G \subset \mathbb{R}^n$, 若 G^c 是闭集则称 G 是开集.
- G 是开集 $\Longleftrightarrow \mathring{G} = G \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
  证明：G^c 是闭集 $\Longleftrightarrow \partial G^c = \partial G \subset G^c \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
- 例：闭球 $\bar{B}(x,r)$、球面 $S(x,r)$ 是闭集，开球 $B(x,r)$ 是开集，$\mathbb{Q}$ 既不是开集，也不是闭集，ϕ 和 $\mathbb{R}^n$ 既是开集，又是闭集.

开集和闭集

- 定义：$F \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\bar{F} = F$ 则称 F 是闭集.
- F 是闭集 $\Longleftrightarrow F' \subset F \Longleftrightarrow \partial F \subset F$.

  证明：$\bar{F} = F \cup F' = F \cup \partial F$.
- 定义：$G \subset \mathbb{R}^n$, 若 G^c 是闭集则称 G 是开集.
- G 是开集 $\Longleftrightarrow \mathring{G} = G \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.

  证明：G^c 是闭集 $\Longleftrightarrow \partial G^c = \partial G \subset G^c \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
- 例：闭球 $\bar{B}(x,r)$、球面 $S(x,r)$ 是闭集，开球 $B(x,r)$ 是开集，$\mathbb{Q}$ 既不是开集，也不是闭集，ϕ 和 $\mathbb{R}^n$ 既是开集，又是闭集.

开集和闭集

- 定义：$F \subset \mathbb{R}^n$，若 $\bar{F} = F$ 则称 F 是闭集.
- F 是闭集 $\Longleftrightarrow F' \subset F \Longleftrightarrow \partial F \subset F$.

  证明：$\bar{F} = F \cup F' = F \cup \partial F$.
- 定义：$G \subset \mathbb{R}^n$，若 G^c 是闭集则称 G 是开集.
- G 是开集 $\Longleftrightarrow \mathring{G} = G \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.

  证明：G^c 是闭集 $\Longleftrightarrow \partial G^c = \partial G \subset G^c \Longleftrightarrow \partial G \cap G = \phi$.
- 例：闭球 $\bar{B}(x, r)$、球面 $S(x, r)$ 是闭集，开球 $B(x, r)$ 是开集，$\mathbb{Q}$ 既不是开集，也不是闭集，ϕ 和 $\mathbb{R}^n$ 既是开集，又是闭集.

开集和闭集的性质

- 闭集的性质：有限个闭集的并是闭集；任意多个闭集的交集是闭集.

  证明：F_1, F_2 是闭集，$(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2' \subset F_1 \cup F_2$，从而 $F_1 \cup F_2$ 是闭集；若 F_α 是闭集，$(\bigcap F_\alpha)' \subset F_\alpha' \subset F_\alpha$ 对所有 α 成立，因此 $(\bigcap F_\alpha)' \subset \bigcap F_\alpha$，$\bigcap F_\alpha$ 是闭集.

- 开集的性质：有限个开集的交是开集；任意多个开集的并集是开集.

  证明：设 G_1，G_2 是开集，$G_1 \cap G_2 = (G_1^c \cup G_2^c)^c$ 是开集 ($G_1^c \cup G_2^c$ 是闭集). 若 G_α 是开集，$\bigcup G_\alpha = (\bigcap G_\alpha^c)^c$.

- 闭集的性质：有限个闭集的并是闭集；任意多个闭集的交集是闭集.

  证明：F_1, F_2 是闭集，$(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2' \subset F_1 \cup F_2$, 从而 $F_1 \cup F_2$ 是闭集；若 F_α 是闭集，$(\bigcap F_\alpha)' \subset F_\alpha' \subset F_\alpha$ 对所有 α 成立，因此 $(\bigcap F_\alpha)' \subset \bigcap F_\alpha$, $\bigcap F_\alpha$ 是闭集.
- 开集的性质：有限个开集的交是开集；任意多个开集的并集是开集.

  证明：设 G_1, G_2 是开集, $G_1 \cap G_2 = (G_1^c \cup G_2^c)^c$ 是开集 ($G_1^c \cup G_2^c$ 是闭集). 若 G_α 是开集, $\bigcup G_\alpha = (\bigcap G_\alpha^c)^c$.

- 闭集的性质：有限个闭集的并是闭集；任意多个闭集的交集是闭集.

  证明：F_1, F_2 是闭集，$(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2' \subset F_1 \cup F_2$，从而 $F_1 \cup F_2$ 是闭集；若 F_α 是闭集，$(\bigcap F_\alpha)' \subset F_\alpha' \subset F_\alpha$ 对所有 α 成立，因此 $(\bigcap F_\alpha)' \subset \bigcap F_\alpha$，$\bigcap F_\alpha$ 是闭集.

- 开集的性质：有限个开集的交是开集；任意多个开集的并集是开集.

  证明：设 G_1，G_2 是开集，$G_1 \cap G_2 = (G_1^c \cup G_2^c)^c$ 是开集（$G_1^c \cup G_2^c$ 是闭集）. 若 G_α 是开集，$\bigcup G_\alpha = (\bigcap G_\alpha^c)^c$.

开集和闭集的性质

- 闭集的性质：有限个闭集的并是闭集；任意多个闭集的交集是闭集.

  证明：F_1, F_2 是闭集，$(F_1 \cup F_2)' = F_1' \cup F_2' \subset F_1 \cup F_2$, 从而 $F_1 \cup F_2$ 是闭集；若 F_α 是闭集，$(\bigcap F_\alpha)' \subset F_\alpha' \subset F_\alpha$ 对所有 α 成立，因此 $(\bigcap F_\alpha)' \subset \bigcap F_\alpha$, $\bigcap F_\alpha$ 是闭集.

- 开集的性质：有限个开集的交是开集；任意多个开集的并集是开集.

  证明：设 G_1, G_2 是开集，$G_1 \cap G_2 = (G_1^c \cup G_2^c)^c$ 是开集 ($G_1^c \cup G_2^c$ 是闭集). 若 G_α 是开集，$\bigcup G_\alpha = (\bigcap G_\alpha^c)^c$.

开集、闭集和连续函数

- $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 则下面三个命题等价

  (1) $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

  (2) 对任意的 t, 下面的点集是闭集

  $$F_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}, F_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}$$

  (3) 对任意的 t, 下面的点集是开集

  $$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}, E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}$$

  (4) $\forall$ 开集 $U \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(U)$ 是开集.

  (5) $\forall$ 闭集 $K \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

  证明: (1) $\Rightarrow$ (3): 若 $x_0 \in E_1$, 即 $f(x) > t$, 则存在 δ, 使得 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > t$, 因此 $B(x_0, \delta) \subset E_1$.

  (3) $\Rightarrow$ (1): 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$,集合 $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon\}$ 是开集, 存在 $B(x_0, \delta) \subset E$, 即 $|x - x_0| < \delta$ 时,

开集、闭集和连续函数

- $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，则下面三个命题等价

  (1) $f \in C(\mathbb{R}^n)$.

  (2) 对任意的 t，下面的点集是闭集

$$F_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}, F_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq t\}$$

  (3) 对任意的 t，下面的点集是开集

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}, E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < t\}$$

  (4) $\forall$ 开集 $U \subset \mathbb{R}$，集合 $f^{-1}(U)$ 是开集.

  (5) $\forall$ 闭集 $K \subset \mathbb{R}$，集合 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

  证明：(1) $\Rightarrow$ (3)：若 $x_0 \in E_1$，即 $f(x) > t$，则存在 δ，使得 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > t$，因此 $B(x_0, \delta) \subset E_1$.

  (3) $\Rightarrow$ (1)：对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，$\epsilon > 0$，集合 $E = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon\}$ 是开集，存在 $B(x_0, \delta) \subset E$，即 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - f(x_0)| <$

- $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是收敛列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列(即 $\|x_k - x_l\| \to 0$).
  $\{x_k\}$ 是收敛列 $\Longleftrightarrow$ $x_{k,i}(1 \le i \le n)$ 是收敛列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_{k,i}\}$ 是 Cauchy 列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列.
- Bolzano-Weierstrass 定理: $\mathbb{R}^n$ 中的有界无限点集必有极限点.
- 证明: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界无限点集, 存在互异点列

$$\{x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})\} \subset E.$$

由于 $\{x_{k,1}\}$ 是有界, 存在子列 $x_k^{(1)}$, 它的第一个分量收敛, 同样在找 $x_k^{(1)}$ 的子列 $x_k^{(2)}$, 使得它的第二分量是收敛到(第一个分量依然收敛), 继续这一过程, 可以找到 $x_k^{(n)}$, 使得它的第n个分量是收敛到(前n-1个分量依然收敛). 则 $x_k^{(n)}$ 是互异收敛点列,它的极限即为 E 的极限点.

Bolzano-Weierstrass 定理

- $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ 是收敛列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列(即 $\|x_k - x_l\| \to 0$).
  $\{x_k\}$ 是收敛列 $\Longleftrightarrow$ $x_{k,i}(1 \le i \le n)$ 是收敛列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_{k,i}\}$ 是 Cauchy 列 $\Longleftrightarrow$ $\{x_k\}$ 是 Cauchy 列.
- Bolzano-Weierstrass 定理: $\mathbb{R}^n$ 中的有界无限点集必有极限点.
- 证明: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为有界无限点集, 存在互异点列

$$\{x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \cdots, x_{k,n})\} \subset E.$$

由于 $\{x_{k,1}\}$ 是有界, 存在子列 $x_k^{(1)}$, 它的第一个分量收敛, 同样在找 $x_k^{(1)}$ 的子列 $x_k^{(2)}$, 使得它的第二分量是收敛到(第一个分量依然收敛), 继续这一过程, 可以找到 $x_k^{(n)}$, 使得它的第n个分量是收敛到(前n-1个分量依然收敛). 则 $x_k^{(n)}$ 是互异收敛点列,它的极限即为 E 的极限点.

闭集套定理

- 若 $\{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空有界闭集列, 且 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$, 则有 $\bigcap F_k \neq \phi$.
- 证明: 若 $\{F_k\}$ 有无限项相同, 则存在 k_0, 使得 $k \geq k_0$ 时 $F_k = F_{k_0}$. 结论显然成立.

  若 $\{F_k\}$ 只有有限项相同, 可去掉相同项, $\bigcap F_k \neq \phi$ 不变. 不妨假设 $\{F_k\}$ 是严格递减集合列, 取 $x_k \in F_k \backslash F_{k+1}$, 则 $\{x_k\}$ 是有界互异点列, 存在收敛子列 $x_{k_i} \to x$. 对任意 k, 当 $k_i > k$ 时, $x_{k_i} \in F_k$, 因此 $x \in F_k$, 从而 $x \in \bigcap F_k$.

有限子覆盖定理1

- 开覆盖与子覆盖: $E \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \{G_\alpha : G_\alpha \subset R^n$ 是开集$, \alpha \in I\}$, 若$E \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$, 则称 Γ 是 E 的一个开覆盖. 若 $\Gamma' \subset \Gamma$ 也是 E 的一个开覆盖. 则称 Γ' 是 Γ 的一个子覆盖.
- 引理: $\mathbb{R}^n$ 中点集的任意开覆盖均含有一个可数子覆盖.
- 证明: 设 $\bigcup_{G \in \Gamma} G \supset E$, $\mathscr{A} = \{B(x, 1/k) : x \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}\}$. $\mathscr{A}' = \{A \in \mathscr{A} : \exists G \in \Gamma, s.t. A \subset G\}$. 则 $\mathscr{A}'$ 是 E 的覆盖, 对任意 $A \in \mathscr{A}'$, 找一个 $G_A \in \Gamma$, 使得 $G_A \supset A$, 则 $\Gamma'\{G_A : A \in \mathscr{A}\}$ 是 Γ 的一个可数子覆盖.

有限子覆盖定理2

- 定理: $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集的任意开覆盖均含有一个有限子覆盖.
- 证明: 有界闭集设为 F, 只要讨论覆盖 Γ 可列的情形. 设 $\Gamma = \{G_k\}$, 令 $H_k = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$, $L_k = F \cap H_k^c$. 则 L_k 是递减有界闭集列.
  若存在 $L_{k_0} = \phi$, 则$H_{k_0} \supset F$, 得证.
  若所有 L_k 非空, 由闭集套定理, 存在 $x_0 \in F \cap H_k^c$, 与 Γ是覆盖矛盾,
- 定理: $E \subset \mathbb{R}^n$ 的任意开覆盖都有有限子覆盖, 则 E 是有界闭集.

一维开集的构造

- 定理：$\mathbb{R}$ 中的开集一定是可数个互不相交的开区间的并（开区间可以是 无穷区间）.

  证明：$G \subset \mathbb{R}$ 是开集，$\forall x \in G$，存在包含 x 的最大开区间 $I_x \subset G$ (事实上, $I_x = (a', a")$, $a' = \inf\{a : (a, x) \subset G\}$, $a" = \sup\{a : (x, a) \subset G\}$, 对任意 $a' < t < x$, 存在 $a : a' \leq a < t < x$, $(a, x) \subset G$).
  对不同的 $x, y \in G$, I_x 和 I_y 要么相同，要么不交，故集合 $\{I_x\}$ 可数.
- 一维闭集的构造：若 $F \subset \mathbb{R}$ 是闭集，则 F 是从 $\mathbb{R}$ 中挖去可数个互不相交的开区间后所得的集合. 若 $F \subset [a, b]$, 则 F 是从 $[a, b]$ 中挖去可数个互不相交的开区间后所得的集合.

一维开集的构造

- 定理：$\mathbb{R}$ 中的开集一定是可数个互不相交的开区间的并（开区间可以是 无穷区间）.

  证明：$G \subset \mathbb{R}$ 是开集，$\forall x \in G$，存在包含 x 的最大开区间 $I_x \subset G$ (事实上，$I_x = (a', a'')$, $a' = \inf\{a : (a, x) \subset G\}$, $a'' = \sup\{a : (x, a) \subset G\}$, 对任意 $a' < t < x$, 存在 $a : a' \le a < t < x$, $(a, x) \subset G$).

  对不同的 $x, y \in G$, I_x 和 I_y 要么相同，要么不交，故集合 $\{I_x\}$ 可数.

- 一维闭集的构造：若 $F \subset \mathbb{R}$ 是闭集，则 F 是从 $\mathbb{R}$ 中挖去可数个互不相交的开区间后所得的集合. 若 $F \subset [a, b]$, 则 F 是从 $[a, b]$ 中挖去可数个互不相交的开区间后所得的集合.

一维开集的构造

- 定理：$\mathbb{R}$ 中的开集一定是可数个互不相交的开区间的并（开区间可以是 无穷区间）.

  证明：$G \subset \mathbb{R}$ 是开集，$\forall x \in G$，存在包含 x 的最大开区间 $I_x \subset G$ (事实上，$I_x = (a', a")$，$a' = \inf\{a : (a, x) \subset G\}$，$a" = \sup\{a : (x, a) \subset G\}$，对任意 $a' < t < x$，存在 $a : a' \leq a < t < x$，$(a, x) \subset G$).

  对不同的 $x, y \in G$，I_x 和 I_y 要么相同，要么不交，故集合 $\{I_x\}$ 可数.
- 一维闭集的构造：若 $F \subset \mathbb{R}$ 是闭集，则 F 是从 $\mathbb{R}$ 中挖去可数个互不相交的开区间后所得的集合. 若 $F \subset [a, b]$，则 F 是从 $[a, b]$ 中挖去可数个互不相交的开区间后所得的集合.

- 定理：$\mathbb{R}^n$ 中的开集一定可表示为可列个互不相交的半开闭矩体的并. (平面中的半开闭矩体:$(a,b]\times(c,d]$).

  例：$(a,b)\times(c,d)=\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty}(a_{n-1},a_n]\times(c_{m-1},c_m]$, 其中 $a_n\in(a,b)$ 单调递增趋向于 b, $a_0=a$, $c_m\in(c,d)$ 单调递增趋向于 d, $c_0=c$.

- 二进方体: Γ_0 是边长为1顶点是整点的半开闭方体的集合. Γ_1 是 Γ_0 中方体的每一边二等分得到的半开闭方体之集合. 继续下去, $\Gamma_k=\{(\frac{m_1}{2^n},\frac{m_1+1}{2^n}]\times\cdots\times(\frac{m_n}{2^k},\frac{m_n+1}{2^k}]\}$. 二进方体要么不交, 要么包含. 二进方体的集合可数.

- 记 Γ_0 中含于 G 的方体之并为 G_0(可以是空集), Γ_1 中含于 $G\backslash G_0$ 的方体之并为 G_1, 继续这一过程, 得 G_k, 满足 $G=\bigcup G_k$. 事实上, 对任意 $x\in G$, 存在 $B(x,\delta)\subset G$, 存在二进方体 $J: x\in J\subset B(x,\delta)\subset G$.

高维开集的构造

- 定理：$\mathbb{R}^n$ 中的开集一定可表示为可列个互不相交的半开闭矩体的并. (平面中的半开闭矩体:$(a, b] \times (c, d]$).
  例：$(a, b) \times (c, d) = \bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} (a_{n-1}, a_n] \times (c_{m-1}, c_m]$, 其中 $a_n \in (a, b)$ 单调递增趋向于 b, $a_0 = a$, $c_m \in (c, d)$ 单调递增趋向于 d, $c_0 = c$.
- 二进方体: Γ_0 是边长为1顶点是整点的半开闭方体的集合. Γ_1 是 Γ_0 中方体的每一边二等分得到的半开闭方体之集合. 继续下去, $\Gamma_k = \{(\frac{m_1}{2^n}, \frac{m_1+1}{2^n}] \times \cdots \times (\frac{m_n}{2^k}, \frac{m_n+1}{2^k}]\}$. 二进方体要么不交, 要么包含. 二进方体的集合可数.
- 记 Γ_0 中含于 G 的方体之并为 G_0(可以是空集), Γ_1 中含于 $G \backslash G_0$ 的方体之并为 G_1, 继续这一过程, 得 G_k, 满足 $G = \bigcup G_k$. 事实上, 对任意 $x \in G$, 存在 $B(x, \delta) \subset G$, 存在二进方体 $J : x \in J \subset B(x, \delta) \subset G$.

高维开集的构造

- 定理：$\mathbb{R}^n$ 中的开集一定可表示为可列个互不相交的半开闭矩体的并. (平面中的半开闭矩体:$(a,b]\times(c,d]$).
  例：$(a,b)\times(c,d)=\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty}(a_{n-1},a_n]\times(c_{m-1},c_m]$, 其中 $a_n\in(a,b)$ 单调递增趋向于 b, $a_0=a$, $c_m\in(c,d)$ 单调递增趋向于 d, $c_0=c$.
- 二进方体: Γ_0 是边长为1顶点是整点的半开闭方体的集合. Γ_1 是 Γ_0 中方体的每一边二等分得到的半开闭方体之集合. 继续下去, $\Gamma_k=\{(\frac{m_1}{2^n},\frac{m_1+1}{2^n}]\times\cdots\times(\frac{m_n}{2^k},\frac{m_n+1}{2^k}]\}$. 二进方体要么不交, 要么包含. 二进方体的集合可数.
- 记 Γ_0 中含于 G 的方体之并为 G_0(可以是空集), Γ_1 中含于 $G\backslash G_0$ 的方体之并为 G_1, 继续这一过程, 得 G_k, 满足 $G=\bigcup G_k$. 事实上, 对任意 $x\in G$, 存在 $B(x,\delta)\subset G$, 存在二进方体 $J: x\in J\subset B(x,\delta)\subset G$.

例

- 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, G 是开集, 且 $F \subset G$. 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x| < \delta$ 时有 $F + \{x\} \subset G$.
- 证明: 对任意 $y \in F$, 存在 $B(y, \delta_y) \subset G$.$\{B(y, \delta_y/2)\}$ 构成 F 的开覆盖. 存在有限子覆盖 $F \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \delta_{y_i}/2)$. 令 $\delta = \min\{\delta_{y_i}/2\}$, 则当 $|x| < \delta$ 时, $B(y_i, \delta_{y_i}/2) + \{x\} \subset B(y_i, \delta_{y_i}) \subset G$.

连续函数的定义

- 定义：f 是 $\mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0)$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. $\mathbb{R}^n$ 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(\mathbb{R}^n)$.
- 定义：f 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0) \cap E$，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. E 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(E)$.
- 注：$f \in C([a, b])$, 则 f 在 a 点处右连续，b 点处左连续.
- 注：f 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ 对 E 中任意收敛到 x_0 的点列 x_k, 有 $f(x_k) \to f(x_0)$.

  证明：“$\Leftarrow$” 反设 f 在 x_0 处不连续, 则存在 ϵ_0, 对任意 n, 存在 $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$, 使得 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$. 则 $x_0 \to x_0$, 但是 $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

连续函数的定义

- 定义：f 是 $\mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0)$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. $\mathbb{R}^n$ 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(\mathbb{R}^n)$.
- 定义：f 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0) \cap E$，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. E 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(E)$.
- 注：$f \in C([a,b])$, 则 f 在 a 点处右连续，b 点处左连续.
- 注：f 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ 对 E 中任意收敛到 x_0 的点列 x_k, 有 $f(x_k) \to f(x_0)$.

  证明：“$\Leftarrow$” 反设 f 在 x_0 处不连续, 则存在 ϵ_0, 对任意 n, 存在 $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$, 使得 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$. 则 $x_0 \to x_0$, 但是 $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

连续函数的定义

- 定义：f 是 $\mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0)$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. $\mathbb{R}^n$ 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(\mathbb{R}^n)$.
- 定义：f 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0) \cap E$，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. E 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(E)$.
- 注：$f \in C([a, b])$, 则 f 在 a 点处右连续，b 点处左连续.
- 注：f 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ 对 E 中任意收敛到 x_0 的点列 x_k, 有 $f(x_k) \to f(x_0)$.

  证明："$\Leftarrow$" 反设 f 在 x_0 处不连续, 则存在 ϵ_0, 对任意 n, 存在 $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$, 使得 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$. 则 $x_0 \to x_0$, 但是 $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

连续函数的定义

- 定义：f 是 $\mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0)$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. $\mathbb{R}^n$ 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(\mathbb{R}^n)$.
- 定义：f 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数，$x_0 \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 使得当 $x \in B_\delta(x_0) \cap E$，$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则称 f 在 x_0 处连续. E 上处处连续的函数构成的集合记为 $C(E)$.
- 注：$f \in C([a, b])$, 则 f 在 a 点处右连续，b 点处左连续.
- 注：f 在 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow$ 对 E 中任意收敛到 x_0 的点列 x_k, 有 $f(x_k) \to f(x_0)$.

  证明：“$\Leftarrow$” 反设 f 在 x_0 处不连续, 则存在 ϵ_0, 对任意 n, 存在 $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0)$, 使得 $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon_0$. 则 $x_0 \to x_0$, 但是 $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

- 定理：f 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数. 下面几个叙述等价：
    - $f \in C(E)$.
    - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 存在开集 G_1, G_2, 使得 $\{x \in E : f(x) > \lambda\} = E \cap G_1$, $\{x \in E : f(x) > \lambda\} = G_2 \cap E$.
    - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 存在闭集 F_1, F_2, 使得 $\{x \in E : f(x) \geq \lambda\} = F_1 \cap E$, $\{x \in E : f(x) \leq \lambda\} = F_2 \cap E$ 是闭集.
- 当 G 是开集时，$f \in C(G) \iff \forall$ 开集 $U \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(U)$ 是开集.
- 当 F 是闭集时，$f \in C(F) \iff \forall$ 闭集 $K \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的刻画

- 定理：f 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数. 下面几个叙述等价：
  - $f \in C(E)$.
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 存在开集 G_1, G_2, 使得 $\{x \in E : f(x) > \lambda\} = E \cap G_1$, $\{x \in E : f(x) > \lambda\} = G_2 \cap E$.
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 存在闭集 F_1, F_2, 使得 $\{x \in E : f(x) \geq \lambda\} = F_1 \cap E$, $\{x \in E : f(x) \leq \lambda\} = F_2 \cap E$ 是闭集.
- 当 G 是开集时，$f \in C(G) \Longleftrightarrow \forall$ 开集 $U \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(U)$ 是开集.
- 当 F 是闭集时，$f \in C(F) \Longleftrightarrow \forall$ 闭集 $K \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的刻画

- 定理：f 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数. 下面几个叙述等价：
  - $f \in C(E)$.
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 存在开集 G_1, G_2, 使得 $\{x \in E : f(x) > \lambda\} = E \cap G_1$, $\{x \in E : f(x) > \lambda\} = G_2 \cap E$.
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, 存在闭集 F_1, F_2, 使得 $\{x \in E : f(x) \geq \lambda\} = F_1 \cap E$, $\{x \in E : f(x) \leq \lambda\} = F_2 \cap E$ 是闭集.
- 当 G 是开集时，$f \in C(G) \Longleftrightarrow \forall$ 开集 $U \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(U)$ 是开集.
- 当 F 是闭集时，$f \in C(F) \Longleftrightarrow \forall$ 闭集 $K \subset \mathbb{R}$, 集合 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的例子

- 若 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 则 f 在任意集合 E 上的限制 $f|_E \in C(E)$.
- 例: $f(x) = \|x\|$, 则f在任意集合上连续.
- 例: $E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, 则 E 上的任意函数均连续.
  证明: 对任意 $x_0 \in E$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ 时, $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 总成立.
- 例: F_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 是互相不交的闭集, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, $f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \chi_{F_k}$ 是 E 上的连续函数.
  证明: 对任意闭集 $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ 是 F_k 中的一些集合的并, 因此 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的例子

- 若 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 则 f 在任意集合 E 上的限制 $f|_E \in C(E)$.
- 例：$f(x) = \|x\|$, 则f在任意集合上连续.
- 例：$E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, 则 E 上的任意函数均连续.

  证明：对任意 $x_0 \in E$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ 时, $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 总成立.
- 例：F_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 是互相不交的闭集，$E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, $f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \chi_{F_k}$ 是 E 上的连续函数.

  证明：对任意闭集 $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ 是 F_k 中的一些集合的并，因此 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的例子

- 若 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 则 f 在任意集合 E 上的限制 $f|_E \in C(E)$.
- 例：$f(x) = \|x\|$, 则f在任意集合上连续.
- 例：$E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, 则 E 上的任意函数均连续.

  证明: 对任意 $x_0 \in E$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ 时, $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 总成立.

- 例：F_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 是互相不交的闭集，$E = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, $f = \sum_{k=1}^{p} c_k \chi_{F_k}$ 是 E 上的连续函数.

  证明: 对任意闭集 $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ 是 F_k 中的一些集合的并, 因此 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的例子

- 若 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 则 f 在任意集合 E 上的限制 $f|_E \in C(E)$.
- 例: $f(x) = \|x\|$, 则f在任意集合上连续.
- 例: $E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, 则 E 上的任意函数均连续.
  证明: 对任意 $x_0 \in E$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ 时, $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 总成立.
- 例: F_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 是互相不交的闭集, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, $f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \chi_{F_k}$ 是 E 上的连续函数.
  证明: 对任意闭集 $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ 是 F_k 中的一些集合的并, 因此 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的例子

- 若 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 则 f 在任意集合 E 上的限制 $f|_E \in C(E)$.
- 例: $f(x) = \|x\|$, 则f在任意集合上连续.
- 例: $E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, 则 E 上的任意函数均连续.

  证明: 对任意 $x_0 \in E$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ 时, $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 总成立.
- 例: F_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 是互相不交的闭集, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, $f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \chi_{F_k}$ 是 E 上的连续函数.

  证明: 对任意闭集 $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ 是 F_k 中的一些集合的并, 因此 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

连续函数的例子

- 若 $f \in C(\mathbb{R}^n)$, 则 f 在任意集合 E 上的限制 $f|_E \in C(E)$.
- 例：$f(x) = \|x\|$, 则f在任意集合上连续.
- 例：$E = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, 则 E 上的任意函数均连续.
  证明：对任意 $x_0 \in E$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(x_0) = \{x_0\}$ 时, $0 = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 总成立.
- 例：F_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 是互相不交的闭集，$E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, $f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \chi_{F_k}$ 是 E 上的连续函数.
  证明：对任意闭集 $K \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ 是 F_k 中的一些集合的并, 因此 $f^{-1}(K)$ 是闭集.

有界闭集上的连续函数

- 设 F 是有界闭集, $f \in C(F)$, 则有
(1) f 在 F 上有界.
(2) 存在 $x_0, y_0 \in F$, 使得 f 在 x_0 上取到最大值, 在 y_0 上取到最小值,
(3) $f(x)$ 在 F 上一致连续, 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x, y \in F$ 满足 $|x - y| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \delta$.
- 证明: (2) $\{f(x) : x \in E\}$ 有上确界 M. 存在 $x_k \in E$, 使得 $|f(x_k) - M| < \frac{1}{k}$. x_k 有收敛子列 $x_{k_j} \to x_0 \in E$, 则 $f(x_{k_j}) \to f(x_0)$. 又 $|f(x_{k_j}) - M| < \frac{1}{k_j}$, 因此 $f(x_0) = M$.
(3) 对任意 $x \in F$, 存在 $B(x, \delta_x)$, f 在 $B(x, \delta_x)$ 上的振幅小于 ϵ. 覆盖 $\{B(x, \delta_x/2)\}$ 有有限子覆盖 $\{B(x_i, \delta_{x_i}/2) : i = 1, 2, \cdots, m\}$(由此也能说明 f 有界), 取 $\delta = \min\{\delta_{x_i}\}$.

F_σ 集和 G_δ 集

- 定义: 若集合 A 可表示为可数个闭集的并，则称 A 是 F_σ 集；若 A 可表示为可数个开集的交，则称 A 为 G_δ 集.
- 可数个 F_σ 集的并是 F_σ 集，可数个 G_δ 集的交是 G_δ 集.
- 性质： F_σ 的补集是 G_δ 集. G_δ 集的补集是 F_σ 集($(\bigcup F_n)^c = \bigcap F_n^c$).
- 例： $[0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[0, 1-\frac{1}{k}] = \bigcap_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{k}, 1)$, $[0,1)$ 既是 F_σ 又是 G_δ 集. 类似地可证 n 维欧氏空间中的半开闭矩体

$$[a_1, b_1) \times [a_1, b_1) \times \cdots [a_n, b_n)$$

  既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 例： $(0,1) = \bigcup[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, 任意开区间既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 有理数集是 F_σ 集, 但不是 G_δ 集(证明要用到 Baire 定理).

F_σ 集和 G_δ 集

- 定义: 若集合 A 可表示为可数个闭集的并, 则称 A 是 F_σ 集; 若 A 可表示为可数个开集的交, 则称 A 为 G_δ 集.
- 可数个 F_σ 集的并是 F_σ 集, 可数个 G_δ 集的交是 G_δ 集.
- 性质: F_σ 的补集是 G_δ 集. G_δ 集的补集是 F_σ 集($(\bigcup F_n)^c = \bigcap F_n^c$).
- 例: $[0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[0, 1-\frac{1}{k}] = \bigcap_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{k}, 1)$, $[0,1)$ 既是 F_σ 又是 G_δ 集. 类似地可证 n 维欧氏空间中的半开闭矩体

$$[a_1, b_1) \times [a_1, b_1) \times \cdots [a_n, b_n)$$

既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 例: $(0,1) = \bigcup[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, 任意开区间既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 有理数集是 F_σ 集, 但不是 G_δ 集(证明要用到 Baire 定理).

F_σ 集和 G_δ 集

- 定义: 若集合 A 可表示为可数个闭集的并，则称 A 是 F_σ 集；若 A 可表示为可数个开集的交，则称 A 为 G_δ 集.
- 可数个 F_σ 集的并是 F_σ 集，可数个 G_δ 集的交是 G_δ 集.
- 性质：F_σ 的补集是 G_δ 集. G_δ 集的补集是 F_σ 集($(\bigcup F_n)^c = \bigcap F_n^c$).
- 例：$[0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[0,1-\frac{1}{k}] = \bigcap_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{k},1)$, $[0,1)$ 既是 F_σ 又是 G_δ 集. 类似地可证 n 维欧氏空间中的半开闭矩体

$$[a_1,b_1)\times[a_1,b_1)\times\cdots[a_n,b_n)$$

既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 例：$(0,1) = \bigcup[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$, 任意开区间既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 有理数集是 F_σ 集，但不是 G_δ 集(证明要用到 Baire 定理).

F_σ 集和 G_δ 集

- 定义: 若集合 A 可表示为可数个闭集的并，则称 A 是 F_σ 集；若 A 可表示为可数个开集的交，则称 A 为 G_δ 集.
- 可数个 F_σ 集的并是 F_σ 集，可数个 G_δ 集的交是 G_δ 集.
- 性质：F_σ 的补集是 G_δ 集. G_δ 集的补集是 F_σ 集($(\bigcup F_n)^c = \bigcap F_n^c$).
- 例：$[0,1) = \bigcup_{k=1}^{\infty}[0, 1-\frac{1}{k}] = \bigcap_{k=1}^{\infty}(-\frac{1}{k}, 1)$, $[0,1)$ 既是 F_σ 又是 G_δ 集. 类似地可证 n 维欧氏空间中的半开闭矩体

$$[a_1, b_1) \times [a_1, b_1) \times \cdots [a_n, b_n)$$

既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 例：$(0,1) = \bigcup[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, 任意开区间既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 有理数集是 F_σ 集, 但不是 G_δ 集(证明要用到 Baire 定理).

F_σ 集和 G_δ 集

- 定义: 若集合 A 可表示为可数个闭集的并，则称 A 是 F_σ 集；若 A 可表示为可数个开集的交，则称 A 为 G_δ 集.
- 可数个 F_σ 集的并是 F_σ 集，可数个 G_δ 集的交是 G_δ 集.
- 性质：F_σ 的补集是 G_δ 集. G_δ 集的补集是 F_σ 集($(\bigcup F_n)^c = \bigcap F_n^c$).
- 例：$[0,1) = \bigcup_{k=1}^\infty [0, 1-\frac{1}{k}] = \bigcap_{k=1}^\infty (-\frac{1}{k}, 1)$, $[0,1)$ 既是 F_σ 又是 G_δ 集. 类似地可证 n 维欧氏空间中的半开闭矩体

$$[a_1, b_1) \times [a_1, b_1) \times \cdots [a_n, b_n)$$

  既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 例：$(0,1) = \bigcup [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, 任意开区间既是 F_σ 又是 G_δ 集.
- 有理数集是 F_σ 集, 但不是 G_δ 集(证明要用到 Baire 定理).

振幅函数

- 定义：$f(x)$ 在 x_0 附近有定义，

$$\omega_f(x_0) = \lim_{\delta\to 0} \sup\{|f(x') - f(x")| : x', x" \in B(x_0, \delta)\}$$

- $f(x)$ 是开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数，则对任意 $t \in \mathbb{R}$，

$$H = \{x \in G : \omega_f(x) < t\}$$

是开集.

证明: 设 $x_0 \in G$, $\omega_f(x_0) < t$, 存在 δ_0, 使得 $B(x_0, \delta_0) \subset G$,

$$\sup\{|f(x') - f(x")| : x', x" \in B(x_0, \delta_0)\} < t.$$

对任意 $x \in B(x_0, \delta_0)$, 存在 $B(x, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0)$, 则 $f(x)$ 在 $B(x, \delta_1)$ 上的振幅小于 t, 即 $\omega_f(x) < t$, $B(x_0, \delta_0) \subset H$

- 定理：开集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数的连续点集是 $G\delta$ 集
  证明：$f(x)$ 的连续点集可表示为

$$\{x \in G : w_f(x) = 0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in G : \omega_f(x) < \frac{1}{k}\}.$$

- σ-代数: Γ 是由集合 X 中的一些子集所构成的集合族, 如果满足
  (i) $\phi \in \Gamma$;
  (ii) 若 $A \in \Gamma$, 则 $A^c \in \Gamma$;
  (iii) 若 $A_n \in \Gamma(n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma$, 则称 Γ 是一个 σ-代数.

- 若 Γ 是一个 σ-代数,

  (i) 若 $A_n \in \Gamma(n = 1, 2, \cdots, n)$, 则 $\bigcup_{n=1}^{m} A_n \in \Gamma$

  (ii)若 $A_n \in \Gamma(n = 1, 2, \cdots)$,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Gamma,\ \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \in \Gamma$$

  (iii) 若 $A, B \in \Gamma$, 则 $A \backslash B \in \Gamma$.

  (iv) $X \in \Gamma$.

- 生成 σ-代数: Σ 是由集合 X 中的一些子集所构成的集合族, 包含 Σ 的最小 σ-代数称为由 Σ 生成的 σ-代数. 由 $\mathbb{R}^n$ 的开集族所生成的 σ-代数称为 Borel-代数(记为 $\mathscr{B}$), $\mathscr{B}$ 中的元称为 Borel 集.

Baire 定理

- 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是一个 F_σ 集, 即 F 可以表示为可列个闭集 $F_k(k = 1, 2, \cdots)$ 的并. 若每个 F_k 皆无内点, 则 E 也没有内点.
- 证明: 反设 E 有内点 x_0, 存在 $B(x_0, \delta_0) \subset E$, 由于 F_k 没有内点, 存在 $x_1 \in B(x_0, \delta_0)$, $x \notin F_1$, 存在 $\bar{B}(x_1, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0)$, 且 $B(x_0, \delta_0) \cap F_1 = \phi$, 继续做 $\bar{B}(x_2, \delta_2) \subset B(x_1, \delta_1)$, $\bar{B}(x_2, \delta_1) \cap F_2 = \phi$, 继续这一过程, 可以假设 $\delta_k < \frac{1}{k}$, 当 $l > k$ 时, 有 $|x_l - x_k| < \delta < \frac{1}{k}$, x_k 收敛到某个 $x \in \bar{B}(x_k, \delta_k)$, $\forall k$, 因此 $x \notin F_k$, 矛盾.

稠密集, 无处稠密集1

- $\mathbb{Q}$ 不是 G_δ 集. 反设 $\mathbb{Q}=\bigcap G_i$,

$$\mathbb{R}=\bigcup G_i^c\cup\mathbb{Q}$$

  即 $\mathbb{R}$ 可表示为可列个无内点的闭集之并. 矛盾.

- 定义: 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 若 $\bar{E}=\mathbb{R}^n$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的稠密集, 若 $\mathring{\bar{E}}=\phi$, 则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的无处稠密集(疏朗集); 可数个无处稠密集的并集称为贫集或第一纲集, 不是第一纲集的集合称为第二纲集.
- 性质: 由 Baire 定理, 第一纲集不含内点, 它的补集是稠密集. 可数个第一纲集的并集也是第一纲集.

稠密集，无处稠密集2

- 第一纲集的补集是第二纲集：若 E 和 E^c 都是第一纲集，则它们的并集 $\mathbb{R}^n$ 也是第一纲集,这显然是错的.
- 例：孤立点集，Cantor 集，类 Cantor 集(测度大于0)
- 闭集的边界是无处稠密集，因为 $\partial F \subset F$, ∂F 的内点不可能是 F 的边界点.
- 设 $\{G_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密开集列，则 $G_0 = \bigcap G_k$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密.
  证明： $G_0^c = \bigcup G_k^c$, G_k^c 都是无处稠密，因此 G_0^c 没有内点，G_k 是稠密集.

极限函数的连续点集

- $f_k \in C(\mathbb{R}^n)$. $\lim f_k(x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的连续点集可表示为(G_δ 集)

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\frac{1}{m}), E_k(\epsilon) = \{x : |f_x(x) - f(x)| \leq \epsilon\}.$$

且 $f(x)$ 的不连续点集为第一纲集.

证明: 设 x_0 是 $f(x)$ 的连续点, 则对任给 $\epsilon > 0$, 存在 k_0, δ, 使得对 $x \in B(x_0, \delta)$, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3, |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3, |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \epsilon/3,$$

因此 $|f_{k_0}(x) - f(x)| < \epsilon$, $B(x_0, \delta) \subset \mathring{E}_{k_0}(\epsilon)$. $x_0 \in \bigcup \mathring{E}_k(\epsilon)$.

- (2) 设

$$x_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\frac{1}{m}),$$

对任给 ϵ, 取 $m > 3/\epsilon$, $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{E}_k(\frac{1}{m})$, 存在 k_0, $x_0 \in \mathring{E}_{k_0}(\frac{1}{m})$, 即存在 $B(x_0, \delta_0) \subset E_{k_0}(\frac{1}{m})$, 从而得

$$|f_{k_0}(x) - f(x)| \le \frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{3}, x \in B(x_0, \delta_0)$$

又存在 δ_1, 使得

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, x \in B(x_0, \delta_0)$$

因此当 $x \in B(x_0, \delta)(\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\})$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

极限函数的连续点集续2

- $f(x)$ 的不连续集为

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(G(1/m)\Big)^c, \text{这里 } G(\epsilon)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{E}_k(\epsilon),$$

对任给 $\epsilon>0$, 令

$$F_\epsilon=\bigcap\{x:|f_x(x)-f_{k+i}(x)|\le\epsilon\}\Rightarrow\mathbb{R}^n=\bigcup F_k(\epsilon)$$

由于 $F_k(\epsilon)\subset E_k(\epsilon)$,

$$\bigcup\mathring{F}_k(\epsilon)\subset\bigcup\mathring{E}_k(\epsilon)=G(\epsilon),$$

因此

$$G(\epsilon)^c\subset\bigcup F_k(\epsilon)\backslash\bigcup\mathring{F}_k(\epsilon)\subset\bigcup F_k(\epsilon)\backslash\mathring{F}_k(\epsilon)=\bigcup\partial F_k(\epsilon)$$

Cantor 集的构造1

- 第一步：记 $I=[0,1]$，$I_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$F_1=I\backslash I_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$.
- 第二步：$I_2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$，取

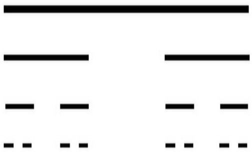
$$F_2=I\backslash(I_1\cup I_2)=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1].$$

- 第三步：$I_3=(\frac{1}{27}\frac{2}{27})(\frac{7}{27}\frac{8}{27})(\frac{19}{27}\frac{20}{27})(\frac{25}{27}\frac{26}{27})$，$F_3=I\backslash(I_1\cup I_2\cup I_3)$.
  这样可构造出开集列 I_n 和闭集例 F_n.
- Cantor 集 $C=I\backslash(\bigcup I_k)=\bigcap F_k$.

- 第一步：记 $I=[0,1]$，$I_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$，$F_1=I\backslash I_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$.
- 第二步：$I_2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$，取

$$F_2=I\backslash(I_1\cup I_2)=[0,\frac{1}{9}]\cup[\frac{2}{9},\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]\cup[\frac{8}{9},1].$$

- 第三步：$I_3=(\frac{1}{27}\frac{2}{27})(\frac{7}{27}\frac{8}{27})(\frac{19}{27}\frac{20}{27})(\frac{25}{27}\frac{26}{27})$，$F_3=I\backslash(I_1\cup I_2\cup I_3)$. 这样可构造出开集列 I_n 和闭集例 F_n.
- Cantor 集 $C=I\backslash(\bigcup I_k)=\bigcap F_k$.



- 注1：用三进制小数表示时，I_1 中数的小数点后第一位 $a_1 = 1$，I_2 中的数小数点后第二位 $a_2 = 1$，… $F_1 = I \backslash I_1$ 中的小数点后第一位 a_1 可以只取 $0, 2$，F_2 中数的小数点后第一、二位 a_1, a_2 可以只取 $0, 2, \ldots C$ 中的数用三进制展开可以不含 1. 因此

$$x \in C \Longleftrightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = (0.a_1 a_2 a_3 \cdots)_3, a_k = 0, 2.$$

- 注2：I_k 的端点均属于 Cantor 集. 例如 $\frac{1}{3} = (0.0222\ldots)_3$，$\frac{1}{9} = (0.0022\ldots)_3$.

Cantor 集的构造2

- 注1：用三进制小数表示时，I_1 中数的小数点后第一位 $a_1 = 1$，I_2 中的数小数点后第二位 $a_2 = 1$，... $F_1 = I \backslash I_1$ 中的小数点后第一位 a_1 可以只取 $0, 2$，F_2 中数的小数点后第一、二位 a_1, a_2 可以只取 $0, 2$,...C 中的数用三进制展开可以不含 1. 因此

$$x \in C \Longleftrightarrow x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = (0.a_1a_2a_3\cdots)_3, a_k = 0, 2.$$

- 注2: I_k 的端点均属于 Cantor 集. 例如 $\frac{1}{3} = (0.0222\ldots)_3$，$\frac{1}{9} = (0.0022\ldots)_3$.

Cantor 集的性质1

- Cantor 集是非空有界闭集.
- $C = C'$. (满足该条件的集合称为完全集).
  证明: $\forall x \in C$, $x \in F_n$ 中的某个区间(区间长为 3^{-n}), 而该区间的端点 $\in C$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 n 使得 $B_\epsilon \supset B_{\frac{2}{3^n}}(x)$ 至少含有 C 中的两个点($B_{\frac{2}{3^n}}$ 包含 F_n 的某个区间).
- Cantor 集没有内点.
- 证明: 若 $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset C$, 则对任意自然数 n, 有 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$, 而 F_n 中的区间长为 $3^{-n} \to 0$. n 足够大时 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$ 不可能成立.

Cantor 集的性质1

- Cantor 集是非空有界闭集.
- $C = C'$. (满足该条件的集合称为完全集).
  证明: $\forall x \in C$, $x \in F_n$ 中的某个区间(区间长为 3^{-n}), 而该区间的端点 $\in C$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 n 使得 $B_\epsilon \supset B_{\frac{2}{3^n}}(x)$ 至少含有 C 中的两个点($B_{\frac{2}{3^n}}$ 包含 F_n 的某个区间).
- Cantor 集没有内点.
- 证明: 若 $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset C$, 则对任意自然数 n, 有 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$, 而 F_n 中的区间长为 $3^{-n} \to 0$. n 足够大时 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$ 不可能成立.

Cantor 集的性质1

- Cantor 集是非空有界闭集.
- $C = C'$. (满足该条件的集合称为完全集).
  证明: $\forall x \in C$, $x \in F_n$ 中的某个区间(区间长为 3^{-n}), 而该区间的端点 $\in C$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 n 使得 $B_\epsilon \supset B_{\frac{2}{3^n}}(x)$ 至少含有 C 中的两个点($B_{\frac{2}{3^n}}$ 包含 F_n 的某个区间).
- Cantor 集没有内点.
- 证明: 若 $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset C$, 则对任意自然数 n, 有 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$, 而 F_n 中的区间长为 $3^{-n} \to 0$. n 足够大时 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$ 不可能成立.

Cantor 集的性质1

- Cantor 集是非空有界闭集.
- $C = C'$. (满足该条件的集合称为完全集).
  证明: $\forall x \in C$, $x \in F_n$ 中的某个区间(区间长为 3^{-n}), 而该区间的端点 $\in C$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 n 使得 $B_\epsilon \supset B_{\frac{2}{3^n}}(x)$ 至少含有 C 中的两个点($B_{\frac{2}{3^n}}$ 包含 F_n 的某个区间).
- Cantor 集没有内点.
- 证明: 若 $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset C$, 则对任意自然数 n, 有 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$, 而 F_n 中的区间长为 $3^{-n} \to 0$. n 足够大时 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$ 不可能成立.

Cantor 集的性质1

- Cantor 集是非空有界闭集.
- $C = C'$. (满足该条件的集合称为完全集).
  证明: $\forall x \in C$, $x \in F_n$ 中的某个区间(区间长为 3^{-n}), 而该区间的端点 $\in C$, 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 n 使得 $B_\epsilon \supset B_{\frac{2}{3^n}}(x)$ 至少含有 C 中的两个点($B_{\frac{2}{3^n}}$ 包含 F_n 的某个区间).
- Cantor 集没有内点.
- 证明: 若 $x \in (x-\delta, x+\delta) \subset C$, 则对任意自然数 n, 有 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$, 而 F_n 中的区间长为 $3^{-n} \to 0$. n 足够大时 $(x-\delta, x+\delta) \subset F_n$ 不可能成立.

完全集

- $E \subset \mathbb{R}$ 是完全集的充分必要条件是 E 的补集可以表示为可数个没有公共端点的开区间之并.
  证明: 若 $E \subset \mathbb{R}$ 是完全集, 则 E 是闭集, E 的补集可以表示为可数个开区间之并. 又因为 E 没有孤立点, 这些开区间没有公共端点.
  若 E 的补集可以表示为可数个没有公共端点的开区间之并, 则 E 是闭集. 若 $x \in E' \backslash E$, 则 x 是孤立点, 与 E^c 的组成开区间没有公共端点矛盾.
- 任意非空完全集的基数是 c.

- Cantor 集不可数. 事实上 $C \sim \mathbb{R}$.

证明：由于 $x \in C \iff x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i} (a_i = 0, 1)$，存在满射

$$\phi : C \to [0, 1], \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i},$$

因此 $[0, 1]$ 和 C 的一个子集对等, C 不可数.

- 注: 上面的映射不是单射, 事实上 ϕ 在构造过程中移除区间的两个端点上取值相同, 比如$\phi(0.2_3) = \phi(0.022\cdots_3)$.
- 注: 若构造过程中移除的区间长不定, 每次总是把一个区间移除一个开区间变成两个闭区间, 可类似证明余下的集合的基数必为 c(若 x 是余下集合中的一点, 第 k 步移除区间后属于左边区间时记 $a_k = 0$, 属于右边区间时记 $a_k = 1$), 则 x 对应与二进制数 $0.a_1 a_2 \cdots$.

Cantor 集的性质2

- Cantor 集不可数. 事实上 $C \sim \mathbb{R}$.
  证明：由于 $x \in C \iff x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i} (a_i = 0, 1)$，存在满射

  $$\phi : C \to [0, 1], \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i}{3^i} \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i},$$

  因此 $[0, 1]$ 和 C 的一个子集对等, C 不可数.
- 注: 上面的映射不是单射, 事实上 ϕ 在构造过程中移除区间的两个端点上取值相同, 比如$\phi(0.2_3) = \phi(0.022\cdots_3)$.
- 注: 若构造过程中移除的区间长不定, 每次总是把一个区间移除一个开区间变成两个闭区间, 可类似证明余下的集合的基数必为 c(若 x 是余下集合中的一点, 第 k 步移除区间后属于左边区间时记 $a_k = 0$, 属于右边区间时记 $a_k = 1$), 则 x 对应与二进制数 $0.a_1a_2\cdots$.

- $[0,1]$ 中类 Cantor 集的构造. 设 $p>3$.
  第一步: 移去以中点为中心长度为 $\frac{1}{p}$ 的开区间, 得到两个闭区间.
  第二步: 剩下的两个闭区间再移去以中点为中心长度为 $\frac{1}{p^2}$ 的开区间
  得到四个闭区间
  ......
  移去的区间总长度: $\sum \frac{2^{n-1}}{p^n} = \frac{1/p}{1-2/p} = \frac{1}{p-2} < 1$.
- 上面过程中移去长度的比例是下降的: $\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p-1}, \cdots$. 若保持每次移去 $\frac{1}{p}$,
  移去的区间长为: $\frac{1}{p}, \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p}), \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^2, \cdots$.
  ......
  移去的区间总长度: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^n = 1$.

类 Cantor 集

- $[0,1]$ 中类 Cantor 集的构造. 设 $p>3$.
  第一步: 移去以中点为中心长度为 $\frac{1}{p}$ 的开区间, 得到两个闭区间.
  第二步: 剩下的两个闭区间再移去以中点为中心长度为 $\frac{1}{p^2}$ 的开区间得到四个闭区间
  ......
  移去的区间总长度: $\sum \frac{2^{n-1}}{p^n} = \frac{1/p}{1-2/p} = \frac{1}{p-2} < 1$.
- 上面过程中移去长度的比例是下降的: $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p} \cdot \frac{2}{p-1}$, $\cdots$. 若保持每次移去 $\frac{1}{p}$,
  移去的区间长为: $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})$, $\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^2$, $\cdots$.
  ......
  移去的区间总长度: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^n = 1$.

类 Cantor 集

- $[0,1]$ 中类 Cantor 集的构造. 设 $p>3$.
  第一步: 移去以中点为中心长度为 $\frac{1}{p}$ 的开区间, 得到两个闭区间.
  第二步: 剩下的两个闭区间再移去以中点为中心长度为 $\frac{1}{p^2}$ 的开区间
  得到四个闭区间
  ......
  移去的区间总长度: $\sum \frac{2^{n-1}}{p^n} = \frac{1/p}{1-2/p} = \frac{1}{p-2} < 1$.
- 上面过程中移去长度的比例是下降的: $\frac{1}{p}, \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{p-1}, \cdots$. 若保持每次移去 $\frac{1}{p}$,
  移去的区间长为: $\frac{1}{p}, \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p}), \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^2, \cdots$.
  ......
  移去的区间总长度: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})^n = 1$.

Cantor 函数

- 利用 C 中元的三进制表示, 前面定义了 C 到 $[0,1]$ 上的函数:

$$\phi : 2\sum \frac{a_i}{3^i} \in C(a_i = 0,1) \to \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}.$$

$\phi(x)$ 在 C 上单调上升: 若 $a > b$, 它们的三进制展开为 $a = 2\sum \frac{a_i}{3^i}$, $b = 2\sum \frac{b_i}{3^i}$. 若 $a_i = b_i(i = 1, \cdots, k-1)$, $a_k = 1$, $b_k = 0$, 则有

$$\phi(x) \geq 0.a_1 a_2 \cdots a_{k-1} 1 =\geq a_1 a_2 \cdots a_{k-1} 0 b_{k+1} b_{k+2} \cdots.$$

- 把 $\phi(x)$ 延拓到 $[0,1]$ 上(保持单调性), 记为 $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \sup\{\phi(x) : y \in C, y \leq x\}.$$

称为 Cantor 函数.因为是满射, 必为连续.

点集间的距离1

- 定义: 设 $x \in \mathbb{R}^n$, E 是非空点集, x 到 E 的距离定义为

$$d(x, E) = \inf\{|x - y| : y \in E\};$$

  E_1, E_2 是两个非空点集, E_1 和 E_2 之间的距离定义为

$$d(E_1, E_2) = \inf\{|x - y| : x \in E_1, y \in E_2\}.$$

- 例: $\mathbb{R}^2$ 中的集合 E_1 是 x 轴, E_2 是双曲线 $xy = 1$ (E_1, E_2 是不交闭集), $d(E_1, E_2) = 0$.
- 若 $d(x, E) = 0$, 则 $x \in E$ 或者 $x \in E'$.

点集间的距离2

- 性质:

$$d(E_1, E_2) = \inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} = \inf\{d(x, E_1) : x \in E_2\}.$$

证明: 存在 $x \in E_1, y \in E_2$ 使得 $|x - y| < d(E_1, E_2) + \epsilon$, 此时

$$\inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} \le d(x, E_2) < |x - y| < d(E_1, E_2) + \epsilon.$$

反过来, 存在 $x \in E_1$, $d(x, E_2) < \inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} + \epsilon$ 存在 $y \in E_2$, $d(E_1, E_2) \le d(x, y) < d(x, E_2) + \epsilon < \inf\{d(x, E_2) : x \in E_1\} + 2\epsilon$.

- 定理: 若 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是非空点集, 则 $d(x, E)$ 作为 x 的函数在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

  证明: 只要证明 $|d(x, E) - d(y, E)| \le |x - y|$.

  取 $z \in E$ 使得 $|y - z| < d(y, E) + \epsilon$,

$$d(x, E) \le |x - z| \le |x - y| + |y - z| < |x - y| + d(y, E) + \epsilon$$

- 定理: 若 $F \subset \mathbb{R}^n$ 是非空闭集, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 则存在 $y_0 \in F$, 使得 $|x_0 - y_0| = d(x_0, F)$.

  证明: 若 $\bar{B}(x_0, r) \cap F$ 非空, $d(x_0, y)$在 $\bar{B}(x_0, r) \cap F$ 上取到最小值.

- 定理: 若 F_1, F_2 是非空闭集, 且至少有一个是有界集, 则存在 $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$, 使得 $|x_1 - x_2| = d(F_1, F_2)$.

- 例: 若 F_1, F_2 是两个不相交的非空闭集, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $f(x)$ 使得
  (i) $0 \leq f(x) \leq 1$.
  (ii)$F_1 = \{x : f(x) = 1\}$. $F_2 = \{x : f(x) = 0\}$
  证明: 取
$$f(x) = \frac{d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$$
- 定理: 若 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, $f(x)$ 是定义在 F 上的连续函数且 $|f(x)| \leq M(x \in F)$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g(x)$ 满足
$$|g(x)| \leq M, \quad g(x) = f(x), \forall x \in F.$$

延拓定理的证明1

- 证明思路: 作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_1(x)$ 满足

$$|g_1(x)| \le \frac{M}{3}, x \in \mathbb{R}^n, |f(x) - g_1(x)| \le \frac{2}{3}M, \forall x \in F.$$

对 $|f(x) - g_1(x)| \le \frac{2}{3}M$ 重复上述过程,构造 $g_2(x)$, 继续这一过程, 得到连续函数列$g_k(x)$满足

$$|g_k(x)| \le \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, x \in \mathbb{R}^n, |f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^k M, \forall x \in F.$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 一致收敛, 记和函数为 $g(x)$, 且在 F 上等于 $f(x)$, 且

$$|g(x)| \le \frac{M}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = M$$

延拓定理的证明2

- $g_1(x)$ 的构造: F 分成三个集合

$$A = \{x \in F : \frac{M}{3} \leq f(x) \leq M\},$$

$$B = \{x \in F : -M \leq f(x) \leq -\frac{M}{3}\},$$

$$C = \{x \in F : -\frac{M}{3} < f(x) < \frac{M}{3}\},$$

则 A, B 是闭集, 当 A, B 均非空时, 取

$$g_1(x) = \frac{M}{3}\frac{d(x,B) - d(x,A)}{d(x,B) + d(x,A)}$$

当 A 为空集时, $g_1(x) = -\frac{M}{3}$; 当 B 为空集时, $g_1(x) = \frac{M}{3}$, 当 A, B 均为空集时, $g_1(x) = 0$. 则有

$$|g_1(x)| \leq \frac{M}{3}, x \in \mathbb{R}^n, |f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}M, \forall x \in F.$$