广义实数

规定 $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. 下面设 $x \in \mathbb{R}$.

- 大小关系：$-\infty < x < +\infty$.
- 加减法：$+\infty + (\infty) = +\infty$, $-\infty - (-\infty) = -\infty$. $+\infty - (-\infty) = +\infty$, $-\infty - (+\infty) = -\infty$. $\pm\infty + x = \pm\infty$, $x - (\pm\infty) = \mp\infty$.
- 乘除法：$x > 0$ 时，$\pm\infty \cdot x = \pm\infty$; $x < 0$ 时，$\pm\infty \cdot x = \mp\infty$. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(\pm\infty) \cdot 0 = 0$, $x/(\pm\infty) = 0$, $|\pm\infty)| = +\infty$.
- 无意义的运算：$(+\infty) + (-\infty)$，$(\pm\infty)/(\pm\infty)$.

勒贝格积分

- Lebesgue 积分的思想：设 $f(x)$ 是在集合 E 上定义的有界函数，$m \leq f(x) \leq M$. 把区间 $[m, M]$ 进行分割

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M.$$

令 $E_i = \{x : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$, $0 \leq i < n$, $E_n = \{x : y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n = M\}$. $\lambda = \max\{\Delta y_i\}$, Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i).$$

可测函数的定义

- 定义：$E \subset \mathbb{R}^n$ 到 $\bar{\mathbb{R}}$ 的映射称为广义实值函数.
- 定义：f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数，若对任意的 $t \in \mathbb{R}$, $E(f > t) = \{x \in E : f(x) > t\}$ 是可测集，则称 f 是 E 上的可测函数. E上 可测函数的全体记为 $\mathcal{M}(E)$.
- 等价定义：f 是 E 上的可测函数
  $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $E(f \le t) = \{x \in E : f(x) \le t\}$ 是可测集
  $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $E(f < t) = \{x \in E : f(x) < t\}$ 是可测集
  $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $E(f \ge t) = \{x \in E : f(x) \ge t\}$ 是可测集.
  证明：$E(f \le t) = E(f > t)^c \cap E$, $E(f < t) = \cup E(f \le t - \frac{1}{n})$. $E(f > t) = \cup E(f \ge t + \frac{1}{n})$.

可测函数的例

- 例：设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数，D 是 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集. 若对任意的 $r \in D$, $E(f > r)$ 是可测集，则 f 是 E 上的可测函数.

  证明：对任意 $t \in \mathbb{R}$, 取 $r_k \in D$ 单调递减趋向于 t, 则有

$$E(f > t) = \bigcup E(f > r_k).$$

- $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集，则 E 上的单调函数是可测函数.

  证明：$E(f > t)$ 只能为区间(或者单点集、空集)和 E 的交集(f 单调递增时，若 $x_0 \in E(f > t)$, 则 E 中满足 $x > x_0$ 的 x 均在 $E(f > t)$ 中).

- 例: 设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的广义实值函数, D 是 $\mathbb{R}$ 的一个稠密子集. 若对任意的 $r \in D$, $E(f > r)$ 是可测集, 则 f 是 E 上的可测函数.
  证明: 对任意 $t \in \mathbb{R}$, 取 $r_k \in D$ 单调递减趋向于 t, 则有
  $$E(f > t) = \bigcup E(f > r_k).$$
- $E \subset \mathbb{R}$ 为可测集, 则 E 上的单调函数是可测函数.
  证明: $E(f > t)$ 只能为区间(或者单点集、空集)和 E 的交集(f 单调递增时, 若 $x_0 \in E(f > t)$, 则 E 中满足 $x > x_0$ 的 x 均在 $E(f > t)$ 中).

- f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值函数，f 可测的充分必要条件是：对 $\mathbb{R}$ 的任意开集 G, $f^{-1}(G)$ 可测.
  证明：$G = \bigcup(a_n, b_n)$, $f^{-1}(G) = \bigcup\{x \in E : a_n < f(x) < b_n\}$.
- 例：可测集上的连续函数可测.
  证明：若 f 是可测集 E 上的连续函数，对任意 $t \in \mathbb{R}$, 存在开集 G_t, 使得 $E(f > t) = G_t \cap E$.
- f 是 R 上的连续函数，g 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数, 则 $f(g(x))$ 是可测集 $E \subset$ 上的可测函数.
  证明：G 为开集, $f^{-1}(G)$ 也是开集, $h^{-1}(G) = g^{-1}(f^{-1}(G))$ 可测.

复合函数

- f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，$T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换, 则 $h(x)=f(T(x))$ 是可测函数.
  证明: G 是开集, $A=f^{-1}(G)$ 是可测集, A 可表示为 $A=H\backslash Z$, 其中 A 是 G_δ 集, H 是零测集. $T^{-1}(A)=T^{-1}(H)\backslash T^{-1}(Z)$, $T^{-1}(H)$ 是 G_δ 集, $T^{-1}(Z)$ 是零测集.
- f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，$f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$上的可测函数.
  证明: $F(x,y)=f(x)$ 可测:
  $$\{(x,y):F(x,y)>t\}=\{x:f(x)>t\}\times\mathbb{R}^n$$
  定义 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $T(x,y)=(x-y,x+y)$, 则 $F(T(x,y))=f(x-y)$ 可测.

- 若 f 可测，则有 $E(f=+\infty)$, $E(f=-\infty)$, $E(f<+\infty)$, $E(f>-\infty)$ 均为可测集.

  证明:
$$E(f=+\infty)=\cap E(f>n),$$
$$E(f=-\infty)=\cap E(f<-n).$$
$$E(f<+\infty)=\cup E(f<n),$$
$$E(f>-\infty)=\cup E(f>-n).$$

- 定理: (i)若 $E_i(i=1,2)$ 是可测集，$f\in\mathcal{M}(E_i)$, 则有 $f\in\mathcal{M}(E_1\cup E_2)$.
  (ii) 若 $f\in\mathcal{M}(E)$, A 是 E 的可测子集, 则 $f\in\mathcal{M}(A)$
  证明: $\{x\in A: f(x)>t\}=\{x\in E: f(x)>t\}\cap A$.
  $\{x\in E_1\cup E_2: f(x)>t\}=\{x\in E_1: f(x)>t\}\cup\{x\in E_2: f(x)>t\}$.

可测函数的例子

- $E \subset \mathbb{R}^n$ 为零测集，则 E 上的任何函数均为可测函数.
- f 是 $[a, b]$ 上的函数，f 的间断点集是一个零测集. 则 f 可测.
  证明: 设间断点集为 E_1, $E_2 = [a, b] \setminus E_1$, 则 f 在 E_1, E_2 上均可测.
- 若 $f \in \mathcal{M}(E)$, 定义 $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$, 则有 f^+, f^- 可测(从而 $|f| = f^+ + f^-$ 可测).
  证明: $t \geq 0$ 时, $E(f^+ > t) = E(f > t)$, $t \geq 0$ 时, $E(f^+ > t) = E$.

可测函数的四则运算1

设 f, g 是可测集 E 上的可测函数，$c \in \mathbb{R}$.

- cf 可测.

  证明：$c > 0$ 时，$E(cf > t) = E(f > \frac{t}{c})$; $c < 0$ 时，$E(cf > t) = E(f < \frac{t}{c})$.

- 使得 $f + g$ 有定义的集合 E_0 可测，$f + g$ 是 E_0 上的可测函数.

  证明：$A_1 = E(f = +\infty) \cup E(g = -\infty)$, $A_2 = E(f = -\infty) \cup E(g = +\infty)$, 则 $E_0 = E \backslash (A_1 \cup A_2)$ 可测, 则有

  $$\{x \in E_0 : f(x) + g(x) > t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} E(f > r) \cap E(g > t - r).$$

  事实上，若 $f(x) + g(x) > t$, 则 $f(x) > t - g(x)$, 存在有理数 r, 使得 $f(x) > r > t - g(x)$.

- fg 可测.
  证明：先证明 $f(x)^2$ 可测，事实上，
  $$E(f^2 > t) = \begin{cases} E & t < 0 \\ E(f > \sqrt{t}) \cup E(f < -\sqrt{t}) & t \geq 0. \end{cases}$$
  令 $A = E(f = \pm\infty) \cup E(g = \pm\infty)$, $E_0 = E \backslash A$. 则有 $fg = \frac{1}{4}((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$ 在 E_0 上可测. 又 fg 在 A 上显然可测.

- 使得 f/g 有定义的集合 $E_0 \subset E$ 可测，f/g 是 E_0 上的可测函数.

证明：只要证明 $\frac{1}{g(x)}$ 在 $E_1 = \{x \in E : g(x) \neq 0\}$ 上可测.

$$E(\frac{1}{g} > t) = \begin{cases} E(0 < g < \frac{1}{t}) \cap E_1, & t > 0 \\ E(g > 0) \cap E_1, & t = 0 \\ E(g > 0) \cup E(g < \frac{1}{t}) \cap E_1, & t < 0 \end{cases}$$

可测函数列的极限函数

设 f_k 是可测集 E 上的可测函数列.

- $\sup\{f_k(x)\}$ 可测
  证明: $E(\sup\{f_k(x)\} > t) = \cup E(f_k > t)$.
- $\inf\{f_k(x)\}$ 可测.
  证明: $E(\inf\{f_k(x)\} < t) = \cup E(f_k < t)$.
- $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k(x)$ 可测
  证明: $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k(x) = \inf\limits_{n\geq 1} \sup\limits_{k\geq n}\{f_k\}$.
- $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k(x)$ 可测
  证明: $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_k(x) = \sup\limits_{n\geq 1} \inf\limits_{k\geq n}\{f_k\}$.

例

- 若 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的实值函数，固定 x，$f(x,y)$ 是 y 的连续函数，固定 y，$f(x,y)$ 是 x 的可测函数，则 $f(x,y)$ 是可测函数.
- 证明：定义(关于 y 为阶梯函数)

$$f_n(x,y) = f(x, \frac{k}{n}), \frac{k-1}{n} < y \le \frac{k}{n}$$

则

$$\{(x,y) : f_n(x,y) < t\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left\{x : f(x, \frac{k}{n}) < t\right\} \times \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$$

由于 $f_n(x,y) \to f(x,y)$，$f(x,y)$ 可测.

几乎处处1

- 一个命题在集合 E 上几乎处处成立, 就是除去一个零测集外处处成立，记为 $a.e.x \in E$ 成立. 如:
  - $f(x) = g(x)$, $a.e.x \in E$, 即存在零测集 E_0, 使得对任意 $x \in E \setminus E_0$, $f(x) = g(x)$.
  - $f(x)$ 在 E 上几乎处处连续, 即 f 的间断点集是零测集.
  - $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限, 即 $\{x \in E : |f(x)| = +\infty\}$ 是零测集.

几乎处处2

- 定理：f, g 是可测集 E 上几乎处处相等的函数，则 f 和 g 的可测性相同.

  证明：$E(g > t) = (E(f > t) \cap E(f = g)) \cup (E(g > t) \cap E(f \neq g))$.
- 例：$D(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处为 0, 但处处不连续，几乎处处等于一个连续函数 $f(x) \equiv 0$. $\operatorname{sgn}(x)$ 不可能几乎处处对于一个连续函数(若 $f(x)$ 连续且和 $\operatorname{sgn}(x)$ 几乎处处相等, 存在 x_0, 使得 $f(x_0) = \frac{1}{2}$, 由 f 连续, 存在 x_0 的小邻域，使得 f 在该邻域上不等于 $\operatorname{sgn}(x)$).

简单函数1

- 定义：E 可测，E 上形如 $\phi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{E_k}$($E_k, k = 1, 2, \ldots, m$ 是 E 的可测子集)的函数称为 E 上的简单函数.
- 性质：E 上的简单函数可表示为形如 $\phi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{E_k}$($E_k, k = 1, 2, \ldots, m$，使得 E_k 两两不交，且 $\bigcup_{k=1}^{m} E_k = E$.

例：$\mathbb{R}^n$ 上的简单函数 $\chi_A + \chi_B$ 可写成

$$\chi_A + \chi_B = \chi_{A \setminus B} + \chi_{B \setminus A} + 2\chi_{A \cap B} + 0 \cdot \chi_{(A \cup B)^c}.$$

简单函数2

- 定理：可测集上的简单函数可测.

  证明：设 f 是可测集 E 上的简单函数，则存在 E_k $(k=1,...m)$ 两两不交，满足 $\bigcup\limits_{k=1}^{m} E_k = E$. 使得 $f = \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{E_k}$，这里不妨假设 $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$. 则有

$$\{x \in E : f(x) > t\} = \begin{cases} E & t < \alpha_1 \\ \bigcup_{k=i+1}^{n} E_k & \alpha_i \leq t < \alpha_{i+1} \\ \phi & t \geq \alpha_n. \end{cases}$$

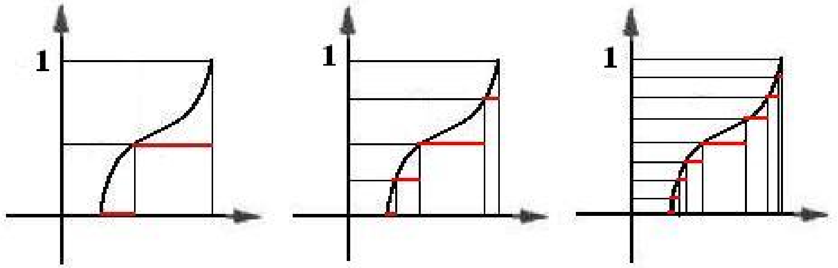
- 定理：设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数，则存在简单函数列 ϕ_k，满足 $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \cdots$，使得对任意 $x \in E$，有 $\lim_{n\to\infty} \phi_k(x) = f(x)$；若还有 f 有界，则上述简单函数列 ϕ_k 一致收敛到 f.
- 推论：若 $f \in \mathcal{M}(E)$，存在非负简单函数列 $\phi_n^+ \le f^+$ 收敛到 f^+，$\phi_n^- \le f^-$ 收敛到 f^-，从而 $\phi_n = \phi_n^+ - \phi_n^-$ 收敛到 f，且当 f 有界时，一致收敛.
- 若 $m \le f(x) \le M$. 把区间 $[m, M]$ n 等分 $y_k = m + \frac{k-1}{n}(M-n)$，令 $E_k = \{x : y_k \le f(x) < y_{k+1}\}$，$1 \le i \le n$，$h_n = \sum_{k=1}^n (x) y_k \chi_{E_k} \le f(x)$，$|f(x) - h_n(x)| \le \frac{1}{n}(M-m)$.

可测函数与简单函数列2

- 定理证明：对 $k \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, k2^k - 1$, 定义集合

$$E_{k,j} = E\left(\frac{j}{2^k} \le f < \frac{j+1}{2^k}\right), \quad E_{k,k2^k} = E(f \ge k).$$

定义函数列 $\phi_k = \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \chi_{E_{k,j}}$.



可测函数与简单函数列3

定理证明:

- $\phi_k \le \phi_{k+1}$.

  证明: 对 $k \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, k2^k - 1$,

$$E_{k,j} = E_{k+1,2j} \cup E_{k+1,2j+1},$$

$$E_{k,k2^k} = \left(\bigcup_{j=k2^{k+1}}^{(k+1)2^{k+1}-1} E_{k+1,j} \right) \cup E_{k+1,(k+1)2^{k+1}},$$

即当 $\phi_k(x) = \frac{j}{2^k}$ 时, $\phi_{k+1}(x) = \frac{2j}{2^{k+1}}, \frac{2j+1}{2^{k+1}}$, 当$\phi_k(x) = k$时,

$$\phi_{k+1}(x) = \frac{j}{2^{k+1}}, j = k2^{k+1}, k2^{k+1} + 1, \cdots, (k+1)2^{k+1}.$$

因此 $\phi_k \le \phi_{k+1}$.

- $\phi_k(x) \to f(x)$.
  证明：当 $f(x) = +\infty$ 时，$\phi_k(x) = k \to +\infty$; 当 $f(x) < +\infty$ 时，存在$N > f(x)$. 则当 $k > N$ 时，$x \in \bigcup_{j=0}^{k2^k-1} E_{k,j}$, 有
  $$0 \le f(x) - \phi_k(x) < \frac{1}{2^k},$$
  从而 $\phi_k(x) \to f(x)$.
- 若 $f(x) < M$, $\phi_k(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.
  证明：$k > M$ 时，$E \subset \bigcup_{j=0}^{k2^k-1} E_{k,j}$, 因此对任意 $x \in E$,
  $$0 \le f(x) - \phi_k(x) < \frac{1}{2^k},$$
  从而 $\phi_k(x)$ 一致收敛到 $f(x)$.

可测函数与紧支简单函数列

- 定义: 对于定义在 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数 f, 集合 $\{x : f(x) \neq 0\}$ 的闭包称为 f 的支集, 积分 $\operatorname{supp}(f)$. 若 $\operatorname{supp}(f)$ 是有界集(即紧集), 则称 f 是具有紧支集的函数.
- 推论: 设 f 是可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数, 则存在紧支集简单函数列 g_k, 满足 $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \cdots$, 使得对任意 $x \in E$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} g_k(x) = f(x)$.
  证明: 令 $g_k = \phi_k(x)\chi_{B(0,k)}(x)$, 对任意 x, $\chi_{B(0,k)}(x)$ 递增趋向 1.
- 对 $\mathbb{R}$ 上的常数函数 f, 不存在一致收敛到 f 的紧支集简单函数列.

可测函数列的近一致收敛

- 一致收敛: $f(x), f_k(x)$ 是可测集 E 上的实值函数. 若对任意 $\epsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得 $k > N$ 时,

$$|f - f_k| < \epsilon, \forall x \in E.$$

 则称 f_k 在 E 上一致收敛到 f, 记为 $f_k \Longrightarrow f$ 或 $f_k \xrightarrow{u} f$.

- 近一致收敛: $f(x), f_k(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的函数. 若对任意 $\delta > 0$, 存在集合 $E_\delta \subset E$, 使得 $m(E_\delta) < \delta$, 且 f 在 $E \backslash E_\delta$ 上一致收敛到 f, 则称 f_k 在 E 上近一致收敛到 f, 记为 $f_k \xrightarrow{a.u} f$.

叶戈罗夫定理

- 性质：$f_k \in \mathcal{M}(E)$, 若 $f_k \xrightarrow{a.u} f$，则有 $f_k \xrightarrow{a.e} f$.
  证明：由于 $f_k \xrightarrow{a.u} f$，对任意自然数 n, 存在集合 $E_{\frac{1}{n}}$ 使得 f_k 在 $E_{\frac{1}{n}}$ 一致收敛，从而 f_k 在 $\cup E_{\frac{1}{n}}$ 上收敛. 显然 $E \setminus \cup E_{\frac{1}{n}}$ 测度为 0.
- 叶戈罗夫定理：设 f, f_k 是 E 上的几乎处处有限的可测函数，$m(E) < +\infty$, $f_k \xrightarrow{a.e} f$，则有 $f_k \xrightarrow{a.u} f$.
- 例：$[0,1]$ 上 $x^n \xrightarrow{a.e} 0$，不是一致收敛，但在 $[0,1-\delta]$ 上一致收敛，从而在 $[0,1]$ 上是近一致收敛.
- 例：$E = (0,+\infty)$, $f_k = \chi_{(k,+\infty)}$ 收敛到 0, 但不是近一致收敛. 事实上 $|f_k - 0| < 1$(即 $f_k = 0$)不可能对 $k \geq N$ 在任意 E_δ 上成立($m(E \setminus E_\delta) < \delta$, E_δ 无界).

引理

- 设 f, f_k 是 E 上的几乎处处有限的可测函数，$m(E) < +\infty$, $f_k \xrightarrow{a.e} f$，对任给 $\epsilon > 0$. 令

$$E_k(\epsilon) = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\},$$

则有 $m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\epsilon)) \to 0$.

- 证明: 由于 $\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k(\epsilon)$ 中的点不收敛, 由

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k(\epsilon) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\epsilon),$$

且 $m(E) < \infty$,

$$\lim_{j\to\infty} m(\bigcup_{k=j}^{\infty} E_k(\epsilon)) = 0.$$

叶戈罗夫定理的证明

- 叶戈罗夫定理证明：由引理,对 $\epsilon=\frac{1}{i}$, $\lim_{j\to\infty} m(\bigcup\limits_{k=j}^{\infty} E_k(\frac{1}{i}))=0$. 对任意 $\delta>0$, 存在 j_i, 使得

$$m(\bigcup_{k=j_i}^{\infty} E_k(\tfrac{1}{i}))<\frac{\delta}{2^i}.$$

取 $E_\delta=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=j_i}^{\infty} E_k(\frac{1}{i})$，则有 $m(E_\delta)<\delta$,

$$E\setminus E_\delta=\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcap_{k=j_i}^{\infty} E(|f_k-f|<\tfrac{1}{i}).$$

且对任意 $\epsilon>0$, 取 $\frac{1}{i}<\epsilon$, 则当 $k\geq j_i$ 时

$$|f_k(x)-f(x)|<\frac{1}{i}<\epsilon,\quad \forall x\in E\setminus E_\delta.$$

可测函数列的依测度收敛1

- 定义: $f(x), f_k(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的函数. 若对任意 $\epsilon > 0$, $\lim_{k\to\infty} m(E(|f_k - f| > \epsilon)) = 0$, 则称 f_k 在 E 上依测度收敛到 f. 记为 $f_k \xrightarrow{m} f$.
- 若 f_k 在 E 上一致依测度收敛到 f, f_k 在 E 上也一致依测度收敛到 g, 则有 $f(x) = g(x), a.e. x \in E$.

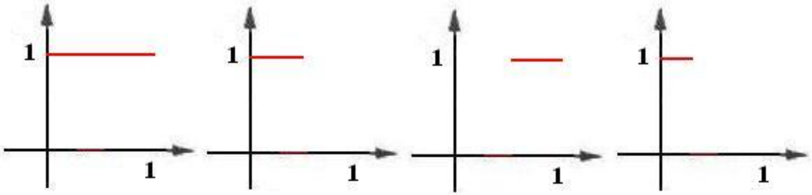
  证明: 对任意 $\epsilon > 0$,

$$m\big(E(|f-g| > \epsilon)\big) \leq m\big(E(|f - f_k| > \frac{\epsilon}{2})\big) + m\big(E(|f_k - g| > \frac{\epsilon}{2})\big) \to 0,$$

  因此 $m(E(|f-g| > \epsilon)) = 0$.

可测函数列的依测度收敛2

- 例：令 $i=[\log_2 k]$, $j=k-2^i$. 显然 $0\le j<2^i$. 构造 $[0,1]$ 上的函数列 $f_k=\chi_{[\frac{j}{2^i},\frac{j+1}{2^i})}$，即 $f_1=\chi_{[0,1)}$，$f_2=\chi_{[0,\frac{1}{2})}$，$f_3=\chi_{[\frac{1}{2},1)}$，...则有 $m(E(|f_k-0|>\epsilon)\le\frac{1}{2^i}\to 0$, 即 f_k 一致依测度收敛到 0.



- 例：$[0,1]$ 上 $x^n\xrightarrow{a.e}0$，也是依测度收敛.

- $f(x), f_k(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的函数. 若 $f_k \xrightarrow{a.u} f$，则有 $f_k \xrightarrow{m} f$.
  证明：由于若 $f_k \xrightarrow{a.u} f$，对任意 $\delta > 0$, 存在 $E_\delta \subset E$, 使得 $m(E \backslash E_\delta) < \delta$, 而且 f_k 在 E_δ 上一致收敛到 f. 即对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, 当 $k > N$ 时,
  $$|f_k(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in E_\delta,$$
  因此 $E(|f_k - f| \geq \epsilon) \subset E_\delta$, 从而 $m(E(|f_k - f| \geq \epsilon)) < \delta$.
- $f(x), f_k(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的函数, $m(E) < +\infty$. 若 $f_k \xrightarrow{a.e} f$，则有 $f_k \xrightarrow{m} f$.　　证明：由叶戈罗夫定理，$f_k \xrightarrow{a.u} f$.
- 例：$f_k = \chi_{(k,+\infty)}$ 收敛到 0, 但不是依测度收敛.

依测度 Cauchy 列的定义

- 定义：$f_k(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数列，若对任意 $\epsilon > 0$，有

$$\lim_{k\to\infty, j\to\infty} m(\{x \in E : |f_k(x) - f_j(x)| \geq \epsilon\}) = 0$$

则称 $f_k(x)$ 为 E 上的依测度 Cauchy 列.

- 若 $f_k(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数列，依测度收敛到几乎处处有限的可测函数 f. 则 $f_k(x)$ 为 E 上的依测度 Cauchy 列，
证明：对任意 $\epsilon > 0$，

$$\{|f_k(x) - f_j(x)| > \epsilon\} \subset \{|f_k(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{|f_j(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{2}\}.$$

- 定理: 若 $f_k(x)$ 为 E 上的依测度 Cauchy 列，则 $f_k(x)$ 在 E 上依测度收敛到某个几乎处处有限的可测函数 f.
- 若已经证明存在子列 f_{k_i} 依测度收敛到 f, 对任给 $\epsilon > 0$, 有

$$
\begin{aligned}
& m(\{|f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \\
& \leq m(\{|f_k(x) - f_{k_i}(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) + m(\{|f_{k_i}(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) \to 0
\end{aligned}
$$

因此 $f_k(x)$ 依测度收敛到 f,

依测度Cauchy列2

- 证明: 可取严格递增序列 k_i, 使得当 $l, j \geq k_i$ 时

$$m(E(|f_l - f_j| \geq \frac{1}{2^i})) < \frac{1}{2^i},$$

令

$$E_i = \{x \in E : |f_{k_i}(x) - f_{k_{i+1}}(x)| \geq \frac{1}{2^i}\},$$

则 $m(E_i) < 2^{-i}$. 令 $S = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$, 则由 $m(\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i) < \frac{1}{2^{j-1}}$ 得 $m(S) = 0$.

- 证明续: 当 $x \notin S$ 时, 存在 j, 使得 $x \in E \setminus \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$, $l \geq j$ 时,

$$\sum_{i=l}^{\infty} |f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x)| < \frac{1}{2^{l-1}},$$

因此 $f_{k_i}(x)$ 收敛到函数

$$f(x) = f_{k_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{k_{i+1}}(x) - f_{k_i}(x))$$

f 在 S 上有限. 事实上 $f(x)$ 在 $E \setminus \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$ 上一致收敛, 从而在 E 上近一致收敛, 也是依测度收敛.

Riesz 定理

- Riesz 定理：$f(x), f_k(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的函数，若 $f_k \xrightarrow{m} f$，则有子列 f_{k_i}，使得 $f_{k_i} \xrightarrow{a.e} f$.
  证明：$f_k \xrightarrow{m} f$，$f_k(x)$ 是依测度 Cauchy 列．存在近一致收敛子列(也是依测度收敛，极限函数必为f).
- 注I 上面结论中 $f_{k_i} \xrightarrow{a.e} f$ 可改为 $f_{k_i} \xrightarrow{a.u} f$.
- 例：$[0,1]$ 上函数 $f_k = \chi_{[\frac{j}{2^i}, \frac{j+1}{2^i})}$，依测度收敛到 0，存在子列 $f_{2^k}(x) = \chi_{[0, \frac{1}{2^k})} \to 0$，$x \in (0,1)$.

Lusin 定理

- 定理：$f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数，则对任意的 $\delta > 0$，存在 E 的闭子集 F，满足 $m(E \backslash F) < \delta$，且 f 在 F 上的限制是 F 上的连续函数.
- 注：f 在 F 上的限制是 F 上的连续函数，此时 F 中的点不一定是原来函数的连续点. 如 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上连续.
- 注：δ 不能取 0，如 $E = \mathbb{R}$，若去掉零测集以后是闭集 F,则必有 $E = F$.
- 注：F 不能改为开集，如 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在任意开集上不连续..
- 例：$f = \chi_{\mathbb{Q}}$. 取闭集 $F \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$，使得 $m((\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \backslash F) < \delta$，则 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在 F 上的限制是连续函数.

- 定理：$f(x)$ 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数，则对任意的 $\delta > 0$，存在 E 的闭子集 F，满足 $m(E \backslash F) < \delta$，且 f 在 F 上的限制是 F 上的连续函数.
- 注：f 在 F 上的限制是 F 上的连续函数，此时 F 中的点不一定是原来函数的连续点．如 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上连续.
- 注：δ 不能取 0，如 $E = \mathbb{R}$，若去掉零测集以后是闭集 F,则必有 $E = F$.
- 注：F 不能改为开集，如 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在任意开集上不连续..
- 例：$f = \chi_{\mathbb{Q}}$．取闭集 $F \subset \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$，使得 $m((\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \backslash F) < \delta$，则 $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在 F 上的限制是连续函数.

Lusin 定理的证明1

- 引理：F_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) 是互相不交的闭集，$E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, $f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \chi_{F_k}$ 是 E 上的连续函数.
- 定理证明：当 $f = \chi_A$ 时，取 $F_1 \subset A$, $F_2 \subset E \backslash A$, 使得

$$m(A \backslash E_1) < \frac{\delta}{2}, \quad m((E \backslash A) \backslash F_2) < \frac{\delta}{2}.$$

取 $F = F_1 \cup F_2$.

当 $f = \sum\limits_{k=1}^{p} c_k \chi_{E_k}$ 时，$E = \bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k$. 取 $F_k \subset E_k$, $F = \bigcup\limits_{k=1}^{p} F_k$.

Lusin 定理的证明2

- 定理证明续: 当 f 是有界函数时, 存在简单函数列 f_k 一致收敛到 f. 对每个 f_k, 找 $F_n \subset E$, 使得 $m(E \backslash F_n) < \frac{\delta}{2^n}$, $F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. f_k 在 F 上连续, 所以极限函数 f 也在 F 上连续.
  当 f 是无界函数, 且处处有限时, 令 $g(x) = \arctan f(x)$. 若 $g(x)$在 F 上连续, 则 $f(x)$ 也在 F 上连续.
- 注: Lusin 定理的逆也成立. 若对任意 $\delta > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $m(E \backslash F) < \delta$, 且 f 在 F 上连续, 则 f 在 E 上可测.
- 延拓定理（引理 2.3.12）: 若 f 是闭集 F 上的连续函数. 则存在 $g \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得 $g|_F = f$, 且 $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| = \sup\limits_{x \in F} |f(x)|$.

- 定理证明续：当 f 是有界函数时，存在简单函数列 f_k 一致收敛到 f. 对每个 f_k, 找 $F_n \subset E$, 使得 $m(E \setminus F_n) < \frac{\delta}{2^n}$, $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$. f_k 在 F 上连续, 所以极限函数 f 也在 F 上连续.
  当 f 是无界函数, 且处处有限时, 令 $g(x) = \arctan f(x)$. 若 $g(x)$在 F 上连续, 则 $f(x)$ 也在 F 上连续.
- 注：Lusin 定理的逆也成立. 若对任意 $\delta > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, 使得 $m(E \setminus F) < \delta$, 且 f 在 F 上连续, 则 f 在 E 上可测.
- 延拓定理（引理 2.3.12）：若 f 是闭集 F 上的连续函数. 则存在 $g \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得 $g|_F = f$, 且 $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| = \sup\limits_{x \in F} |f(x)|$.

- f 是 E 上的几乎处处有限的函数可测函数，则存在 $g_k \in C(\mathbb{R}^n)$, 使得 g_k 在 E 上几乎处处收敛到 f.
  证明思路：作闭集 $F_k \subset E$, $m(E \backslash F_k) < \frac{1}{n}$, h_k 是 $f|_{F_k}$ 的延拓，则有 $m(E(|f - h_k|) > 0) < \frac{1}{n}$, 从而 $h_k \xrightarrow{m} f$，存在子列 $h_{n_k} \xrightarrow{a.e.} f$. 取 $g_k = h_{n_k}$ 即可.
- f 是 E 上的几乎处处有限的函数, 则 f 可测 $\Leftrightarrow$ 存在 $g_k \in C(E)$, 使得 $f_k \xrightarrow{a.e.} f$.
- $f = \chi_{\mathbb{Q}}$. 不存在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数列处处收敛到 f (连续函数列的极限函数的不连续点集是第一纲集).