

《数学物理方法》期末考试试题

2018 年 1 月 3 日

一、 (10 分) 柱坐标下求解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), r < a, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, u \Big|_{r=0} \text{有界} \\ u \Big|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = r^2 \end{cases}$$

二、 (30 分) 计算积分变换

(1) 求 $F\left\{\frac{a}{a^2+x^2}\right\}, a > 0$; (2) 求 $F^{-1}\{e^{-\omega^2 b}\}, b > 0$; (3) 求 $L\left\{\int_0^t t^2 e^{-3t} \sin(3t) dt\right\}$;

(4) 求 $L\{e^{-at} \sin(\omega t)\}$; (5) 求 $L^{-1}\left\{\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right\}$; (6) 求 $L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2-3}\right\}$

三、 (15 分) 镜像法求圆内 Dirichlet 问题的解, 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < R \text{ (圆内)} \\ u \Big|_{r=R} = f(\theta, \phi) \end{cases} \quad \text{要求画出镜像法示意图}$$

四、 (15 分) 用 Green 函数法求解半无界一维热传导方程初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), x > 0, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = h(t) \end{cases}$$

要求 Fourier 变换后做 Laplace 变换再用镜像法 (画出镜像法示意图)

五、 (15 分) 用积分法, 求解

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(t), x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = 0 \\ u(0, t) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) \text{有界} \end{cases} \quad \text{要求写出详细求解步骤}$$

六、 (15 分) 用留数定理求 $F(s) = \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}, a > 0$ 的 Laplace 逆变换, 要求画出 Bromwich

回路, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ 。