Vitali覆盖引理1

- 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, $\Gamma = \{I_\alpha\}$ 是一个区间族. 若对任意的 $x \in E$ 以及 $\epsilon > 0$, 存在 $I_\alpha \in \Gamma$, 使得 $x \in I_\alpha$, $|I_\alpha| < \epsilon$, 则称 Γ 是 E 的 Vitali 覆盖.
- 例. $E = [a, b]$, $\{r_n\}$ 是 E 中的有理数构成的集合.

$$\Gamma = \left\{ \left[r_n - \frac{1}{m}, r_n + \frac{1}{m} \right] : n, m = 1, 2, \cdots \right\}$$

- 设 $E \subset \mathbb{R}^1$, 且 $m^*(E) < \infty$, Γ 是 E 的 Vitali 覆盖, 则对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在有限个互不相交的 $I_j \in \Gamma (j = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \epsilon.$$

Vitali 覆盖引理2

- 注：假设上面所有区间都包含在一个开集 $G \supset E$ 中(Γ 中包含于 G 中的区间构成的集合依然是 Vitali 覆盖), 且 $m(G) < m^*(E) + \epsilon$. 存在有限个互不相交的 $G \supset I_j \in \Gamma(j = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$m^*(E) - \epsilon < \sum_{j=1}^{n} |J_j| < m^*(E) + \epsilon$$

- 注：$m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j) = 0$. 对 n 维空间有类似定理.
- 证明思路：依次选取 I_j, 使得 I_j 与 $\bigcup_{k=1}^{j-1} I_k$ 不交, 而且 I_j 在与 $\bigcup_{k=1}^{j-1} I_k$ 不交的区间中, 它的长度“较大”.

覆盖的构造

- 设全部区间都是闭区间. 取一个开集 $G \supset E$, 使得 $m(G) < +\infty$. 假设所有方体包含在 G 中. 任取 $I_1 \in \Gamma$. 若已经选出互不相交的区间 $I_1, I_2, \cdots, I_k$. 令

$$\delta_k = \sup\{|I| : I \in \Gamma, I \cap I_j = \phi, j = 1, 2, \cdots, k\}$$

选取 I_{k+1}, 使得

$$|I_{k+1}| > \frac{1}{2}\delta_k, I_{k+1} \cap I_j = \phi, j = 1, 2, \cdots, k$$

显然 $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < m(G) < +\infty$, 因此 $|I_k| \to 0$, $\delta_k \to 0$.

- 对任意的 $\epsilon > 0$, 取 n 满足 $\sum_{j=n+1}^{\infty} |I_j| < \frac{\epsilon}{5}$. 要证 $m^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \epsilon$, 只要证明
$$E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j \subset \bigcup_{j=n+1}^{\infty} 5I_j,$$
其中 $5I_j$ 的长度是 I_j 的 5 倍, 中心相同.
对任意 $x \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, 存在 $I \in \Gamma$, $x \in I$, $I \cap I_j = \phi$, $j = 1, 2, \cdots, I_n$.
设 $I_{n+1}, I_{n+2}, \cdots$ 中第一个与 I 相交的是 I_{n_0}, 则有 $|I| \leq \delta_{n_0-1} < 2|I_{n_0}|$, $I \subset 5I_{n_0}$, 从而 $x \in 5I_{n_0}$.

另一个覆盖引理

- 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 是有界集，$\{I_\alpha\}$ 是 E 的一个开方体覆盖，则存在可数个互不相交的 $\{I_j\} \subset \{I_\alpha\}$，使得$\{5I_j\}$ 是 E 的覆盖，当然也有 $m(E) \leq 5^n \sum |I_j|$.
- 不妨设所有 I_α 与 E 的交集非空，且 $\delta_1 = \sup\{l(I_\alpha)\} < \infty$($l(I_\alpha)$ 为方体的边长. 这里假设方体的边长有界，否则的话找一个足够大的 I_α 即可). 选 I_1 满足 $l(I_1) > \delta_1/2$. 若已经去选出互不相交的区间 $I_1, I_2, \cdots, I_k$. 令

$$\delta_k = \sup\{l(I_\alpha) : I_\alpha \cap I_j = \phi, j = 1, 2, \cdots, k\}.$$

选取 I_{k+1}，使得

$$l(I_{k+1}) > \frac{1}{2}\delta_k, I_{k+1} \cap I_j = \phi, j = 1, 2, \cdots, k.$$

对任意 I_α，设 I_k 是与之相交的第一个方体，则有 $I_\alpha \subset 5I_k$.

Dini'导数

- $f(x)$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 附近有定义. 定义右上导数, 右下导数, 左上导数, 左下导数

$$D^+ f(x_0) = \limsup_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_+ f(x_0) = \liminf_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D^- f(x_0) = \limsup_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$D_- f(x_0) = \liminf_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Dini'导数的性质

- 由定义,
  $D^+f(x_0) \geq D_+f(x_0), \quad D^-f(x_0) \geq D_-f(x_0),$
  $D^+(-f)(x_0) = -D_+f(x_0), D^-(-f)(x_0) = -D_-f(x_0).$
- $f(x)$ 在 x_0 点右导数存在 $\iff$ $D^+f(x_0) = D_+f(x_0)$.
  $f(x)$ 在 x_0 点左导数存在 $\iff$ $D^-f(x_0) = D_-f(x_0)$.
  $f(x)$ 在 x_0 点导数存在 $\iff$ 四个Dini导数相等.
- $f(x)$ 在 x_0 点导数不存在, 则有 $D^+f(x_0) > D_-f(x_0)$, 或者 $D^-f(x_0) > D_+f(x_0)$.

Lebesgue 定理

- $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的单调上升函数, 则 $f(x)$ 的不可微点集是零测集, 且有

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a).$$

- 只要证明下面集合是零测集
  $E_1 = \{x \in [a,b] : D^+ f(x) > D_- f(x)\}$
  $E_2 = \{x \in [a,b] : D^- f(x_0) > D_+ f(x_0)\}$
  为证明 E_1 是零测集, 只要证明 $A = A_{r,s} = \{x \in [a,b] : D^+ f(x) > r > s > D_- f(x)\}$ 是零测集.

证明思路

- 证明思路：利用 Vitali 覆盖引理，找有限个不交区间 $[x_j - h_j, x_j]$，$j = 1, 2, \cdots, p$，使得 $\sum_{j=1}^{p} h_j < m^*(A) + \epsilon$，

$$\sum_{j=1}^{p} f(x_j) - f(x_j - h_j) < s \sum_{j=1}^{p} h_j \leq s(m^*(A) + \epsilon).$$

找有限个不交区间 $[y_j, y_j + k_j]$，$j = 1, 2, \cdots, q$，使得 $\sum_{j=1}^{q} k_j > m^*(A) - 2\epsilon$，

$$\sum_{j=1}^{q} f(y_j + k_j) - f(y_j) > r \sum_{j=1}^{q} h_j \geq r(m^*(A) - 2\epsilon).$$

若还有任意区间 $[y_j, y_j + k_j]$ 包含在某个 $[x_j - h_j, x_j]$ 中，则有

$$\sum_{j=1}^{q} f(y_j + k_j) - f(y_j) \leq \sum_{j=1}^{p} f(x_j) - f(x_j - h_j)$$

定理证明中不交区间的选取

- A 的覆盖: 对任意 $x \in A$, $D_{-}f(x) < s$, 则存在任意小的 $h > 0$, 使得 $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} < s$. 满足 $[x-h, x] \subset G$ 的全体区间构成 A 的 Vitali 覆盖, 存在限个不交区间 $[x_j - h_j, x_j]$, $j = 1, 2, \cdots, p$, 使得 $\sum_{j=1}^{p} h_j < m^*(A) + \epsilon$,
$$\sum_{j=1}^{p} f(x_j) - f(x_j - h_j) < s \sum_{j=1}^{p} h_j \le s(m^*(A) + \epsilon).$$
令 $B = A \cap \cup_{j=1}^{p}(x_j - h_j, x_j)$, 对任意 $x \in B$, $D^{+}f(x) > s$, 则存在任意小的 $h > 0$, 使得 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > r$. 满足 $[x, x+h] \subset \cup_{j=1}^{p}(x_j - h_j, x_j)$ 的全体区间构成 B 的 Vitali 覆盖. 存在限个不交区间 $[y_j, y_j + k_j]$, $j = 1, 2, \cdots, q$, 使得 $\sum_{j=1}^{q} k_j > m^*(B) - \epsilon > m^*(A) - 2\epsilon$,
$$\sum_{j=1}^{q} f(y_j + k_j) - f(y_j) > r \sum_{j=1}^{q} h_j \ge r(m^*(A) - 2\epsilon).$$

定理中不等式的证明

- 假定 $x > b$ 时 $f(x) = b$. 令 $f_n(x) = n[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$, 则有 $f_n(x) \geq 0$, $f_n(x) \to f'(x)$, a.e.$x \in [a, b]$. 利用Fatou引理

$$\int_a^b f'(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \liminf_{n\to\infty} n \int_a^b \Big[f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\Big]dx$$
$$= \liminf_{n\to\infty} n\Big[\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\Big]$$
$$= \liminf_{n\to\infty} \Big[f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\Big] \leq f(b) - f(a)$$

- 上面不等式说明 $f'(x)$ 几乎处处有限.

逐项微分定理

- 设 $f_n(x)$ 是 $[a,b]$上的递增函数列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 则有

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x), a.e. x \in [a,b].$$

- 证明思路: 设 $R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)$, 则 $R_N(x)$ 几乎处处可微.

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{N} \frac{d}{dx} f_n(x) + R_N'(x)$$

只要证明 $R_N'(x) \to 0$, a.e. $x \in [a,b]$.

$R'_N(x) \to 0$, a.e. $x \in [a,b]$ 的证明

- $R'_N(x) = f'_{N+1}(x) + R'_{N+1}(x) \geq R'_{N+1}(x)$, a.e. $x \in [a,b]$.
- 由控制收敛定理,

$$\int_a^b \lim_{N\to\infty} R'_N(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^b R'_N(x)dx \leq \lim_{N\to\infty} (R_N(b) - R_N(a)) = 0$$

因此 $\lim_{N\to\infty} R'_N(x) = 0$, a.e.

有界变差函数的定义

- $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数, 分划 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 变差

$$v_\Delta = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

  f 在 $[a,b]$ 上的全变差

$$\bigvee_a^b (f) = \sup\{v_\Delta : \Delta \text{为 } [a,b] \text{ 的任一分割}\}.$$

- 有界变差函数: f 在 $[a,b]$ 上的全变差有限, 记为 $f \in BV([a,b])$.
- 性质: 有界变差函数有界; $BV([a,b])$ 是线性空间.

全变差的可加性

- 例: $f(x)$ 是单调函数,

$$\bigvee_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$$

- 例: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且 $|f'(x)|\le M$,

$$\bigvee_a^b(f)\le M|f(b)-f(a)|$$

- 例: $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $\bigvee_a^b(f)=+\infty$.

- 定理: $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数, 分划 $\Delta: a<c<b$, 则有

$$\bigvee_a^b(f)=\bigvee_a^c(f)+\bigvee_c^b(f)$$

全变差的可加性的证明

- 证明: 对 $[a,b]$ 的任意分割 Δ (若 c 是不是分点,加入 c 得分割 Δ'. 显然有$v_\Delta \leq v_{\Delta'}$), 有

$$v_\Delta \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) \Rightarrow \bigvee_a^b(f) \leq \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$$

取 $[a,c]$ 的分割 $a = x_0' < x_1' < \cdots < x_m'$, $[c,d]$ 的分割 $c = x_0'' < x_1'' < \cdots < x_n''$, 使得下面式子成立,

$$\sum_{i=1}^m |f(x_i') - f(x_{i-1}')| > \bigvee_a^c(f) - \frac{\epsilon}{2}, \quad \sum_{i=1}^n |f(x_i'') - f(x_{i-1}'')| > \bigvee_c^b(f) - \frac{\epsilon}{2}$$

若 $\Delta = \Delta' \cup \Delta''$, 则有

$$v_\Delta > \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f) - \epsilon$$

Jordan 分解定理

- $f \in BV([a,b])$ 当且仅当 $f(x)$ 可表示为 $[a,b]$ 上单调上升函数的差.
- 证明: 定义函数

$$g(x) = \frac{1}{2}\bigvee_a^x(f) + \frac{1}{2}f(x), h(x) = \frac{1}{2}\bigvee_a^x(f) - \frac{1}{2}f(x),$$

则 $f(x) = g(x) - h(x)$. g, h 都是单调增函数, 因为对 $a \le x \le y \le b$,

$$g(y) - g(x) = \frac{1}{2}\bigvee_x^y(f) + \frac{1}{2}(f(y) - f(x)) \ge 0.$$

- 对上面的分解,

$$\bigvee_a^x(f) = \bigvee_a^x(g) + \bigvee_a^x(h)$$

Jordan 分解定理2

- $f \in BV([a,b])$, 若另有分解 $f(x) = g_1(x) - h_1(x)$(这里$g_1(x)$, $h_1(x)$是递增函数), 则有

$$g_1(x) - g_1(a) \geq g(x) - g(a), h_1(x) - h_1(a) \geq h(x) - h(a)$$

- 证明: 显然有

$$\begin{aligned} & g(x) - g(a) + h(x) - h(a) = 2g(x) - 2g(a) - f(x) + f(a) \\ & = \bigvee_a^x (f) \leq \bigvee_a^x (g_1) + \bigvee_a^x (h_1) \\ & = g_1(x) - g_1(a) + h_1(x) - h_1(a) = 2g_1(x) - 2g_1(a) - f(x) + f(a) \end{aligned}$$

例1

- $f \in L([a,b])$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, 则有

$$\bigvee_a^b F = \int_a^b |f(t)|dt$$

- 证明: 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt|$$
$$\leq \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$$

因此 $\bigvee_a^b (F) \leq \int_a^b |f(t)|dt$

例2

- 证明(续): 存在阶梯函数列 $\phi_n(x)$(不妨设 $|\phi_n(x)| \le 1$) 依 L^1 收敛于 $\mathrm{sgn}(f(x))$, 而且 $\phi_n(x)$ 几乎处处收敛到 $\mathrm{sgn}(f(x))$, 若 $\phi_n(x) = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{[x_{k-1},x_k)}$, $|a_k| \le 1$. 当 n 足够大时

$$\int_a^b |f(x)|dx - \epsilon \le \int_a^b \phi_n(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^m a_k(F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

$$\le \sum_{k=1}^m |F(x_k) - F(x_{k-1}))| \le \bigvee_a^b(F)$$

例3

- Jordan分解中 $g(x)=\frac{1}{2}\bigvee_a^x(f)+\frac{1}{2}f(x)$, $h(x)=\frac{1}{2}\bigvee_a^x(f)-\frac{1}{2}f(x)$ 都是递增函数，因此有

$$g'(x)=\frac{1}{2}\Big(\bigvee_a^x(f)\Big)'+\frac{1}{2}f'(x)\geq 0,$$
$$h'(x)=\frac{1}{2}\Big(\bigvee_a^x(f)\Big)'-\frac{1}{2}f'(x)\geq 0.$$

因此有

$$\Big(\bigvee_a^x(f)\Big)'\geq |f'(x)|\Rightarrow \bigvee_a^x(f)\geq \int_a^x \frac{d}{dt}\bigvee_a^t(f)dt\geq \int_a^x |f'(t)|dt$$

- 注：若令 $F(x)=\bigvee_a^x(f)-\int_a^x|f'(t)|dt$, 则 $F(x)$ 递增.

例4

- $f \in BV([a,b])$, 则有

$$\frac{d}{dx}\bigvee_a^x(f) = |f'(x)|, \text{a.e.} x \in [a,b]$$

- 证明: 构造函数 $g_n(x)$ 使得 $g_n(a) = 0$, $\bigvee_a^x(f) - g_n(x)$ 是递增函数, 且

$$|g_n'(x)| = |f'(x)|, \text{a.e.} x \in [a,b], \bigvee_a^b(f) - g_n(b) < 2^{-n}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bigvee_a^x(f) - g_n(x)\right) < +\infty, x \in [a,b]$$

逐项求导, 利用 $\bigvee_a^x(f)$ 的导数非负即得.

例5

- $g_n(x)$ 的构造: 对 $\epsilon = 2^{-n}$, 存在划分 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$, 使得

  $$\bigvee_a^b(f) - \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \epsilon$$

  构造函数 $g_n(x)$ 在 $[x_i, x_{i-1}]$ 满足

  $$g_n(x) = \begin{cases} f(x) + c_i, & f(x_i) \geq f(x_{i-1}) \\ -f(x) + c_i, & f(x_i) < f(x_{i-1}) \end{cases}$$

  调整 c_i, c_i' 使得 $g_n(x)$ 在 x_i 的值一致以及 $g_n(a) = 0$. 因为 $\bigvee_a^x(f) \pm f(x) + c$ 是单调增函数, $\bigvee_a^x(f) - g_n(x)$ 是递增函数.

问题

- 问题：$f \in L([a,b])$，定义 $F(x) = \int_a^b f(x)dx$，是否有 $F'(x) = f(x)$，a.e.$x \in [a,b]$. 若定义(当 $x \notin [a,b]$ 时，令 $f(x) = 0$)

$$F_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt,$$

上面结论等价于对 a.e. $x \in [a,b]$,

$$\lim_{h\to 0} F_h(x) - f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h (f(x+t) - f(x))dt = 0$$

引理

- 引理: 设 $f \in L([a,b])$, 则有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |F_h(x) - f(x)|dx = 0$$

- 证明: 不妨设 $h > 0$,

$$F_h(x) - f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)dt - f(x) = \frac{1}{h}\int_0^h [f(x+t) - f(x)]dt$$

因此

$$\begin{aligned}\int_a^b |F_h(x) - f(x)|dx &\le \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|dtdx \\ &= \int_0^h \frac{1}{h}dt \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h}|f(x+t) - f(x)|dx \to 0\end{aligned}$$

主要定理

- 定理: 设 $f \in L([a,b])$, $F(x) = \int_a^b f(x)dx$, 则有 $F'(x) = f(x)$, a.e.$x \in [a,b]$.
- 证明1: 由引理, 存在序列 $h_k \to 0$, 使得 $F_{h_k} \to f(x)$ a.e.$x \in [a,b]$. 又 $F(x)$ 几乎处处可导, $F_{h_k} \to F'(x)$ a.e.$x \in [a,b]$, 因此 $F'(x) = f(x)$, a.e.$x \in [a,b]$.
- 证明2: $F_h \to F'(x)$ a.e.$x \in [a,b]$, 由Fatou引理,

$$\int_a^b |f(x) - F'(x)|dx \leq \liminf_{h \to 0} \int_a^b |f(x) - F_h(x)|dx = 0$$

推理

- 推理: 设 $f \in L([a,b])$, 则有

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt = 0), \text{a.e.} x \in [a,b].$$

- 证明: 若 $f(x)$ 有限,且对任意有理数 r, $\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-r|dt \to |f(x)-r|$,

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt \le \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-r|dt + |f(x)-r|$$

对任意 $\epsilon > 0$, 取 r 满足 $|f(x)-r| < \frac{\epsilon}{3}$, 存在 $\delta > 0$,使得当 $0 < |h| < \delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-r|dt - |f(x)-r|\right| < \epsilon$$

问题

- 问题：对什么样的函数 $f(x)$ 有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt,$$

- 必要条件1: $f(x)$ 几乎处处可微，且 $f'(x) \in L([a,b])$，此时$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ 一定是有界变差函数.
- 必要条件2: $f(x)$ 是连续函数.
- Cantor 函数是连续的有界变差函数，但是对 Cantor 函数上面的等式不成立.

- 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的函数. 若对任给 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交的开区间 $(x_i,y_i)(i=1,2,\ldots,n)$ 的长度和小于 δ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)|<\epsilon,$$

- 性质: 绝对连续函数是连续函数.
- 性质: $[a,b]$ 上的绝对连续函数全体构成一个线性空间.
- 例: $[a,b]$ 上的满足下列Lipschitz条件的函数.

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|.$$

几乎处处导数为零的函数

- 引理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可导. 且 $f'(x)=0$, a.e. $x\in[a,b]$. 若 $f(x)$ 不是常数函数, 则 $f(x)$ 不是绝对连续函数.
- 证明思路: 对任意 $\delta>0, r>0$, 找 $[a,c]$ 的分割 $a=x_0<x_1<x_1+h_1<x_2<x_2+h_2<\cdots<x_n<x_n+h_n<x_{n+1}=c$ 使得 $\sum h_k>(c-a)-\delta$, $|f(x_i+h_i)-f(x_i)|<rh_i$, 规定 $h_0=0$,

$$|f(c)-f(a)|\le\sum_{i=0}^{n}|f(x_{i+1})-f(x_i+h_i)|+\sum_{i=1}^{n}|f(x_i+h_i)-f(x_{i+1})|$$

  第二个求和的值可以任意小(由 r 定), 所以可以使第一个和大于一个固定的值, 比如 $\frac{|f(c)-f(a)|}{2}$, 但第一个和式中的区间长度之和小于 δ.
- x_i,h_i 的选取: $E=\{x\in(a,c):f'(x)=0\}$, 对任意 $x\in E$, 存在任意小的 $h>0$, 使得 $x+h<c$, $|f(x+h)-f(x)|<rh$. 再利用Vitali覆盖引理.

变上限积分是绝对连续函数

- 定理: 设 $f(x) \in L([a,b])$. 则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.
- 证明: (x_i, y_i), $i = 1, 2, \cdots, n$ 是 $[a,b]$ 中互相不交的区间

$$\sum_{i=1}^{n} |F(y_i) - F(x_i)| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_i}^{y_i} f(x)dx \right| \leq \int_{\cup_{i=1}^{n}(x_i,y_i)} |f(x)|dx$$

由积分的绝对连续性, 对给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $m(\cup_{i=1}^{n}(x_i, y_i)) < \delta$ 时, 上面积分小于 ϵ.

绝对连续函数是有界变差函数

- 定理: 若 $f(x)$ 是 $[a,b])$ 上的绝对连续函数, 则 $f(x)$ 是 $[a,b])$ 上的有界变差函数, .
- 证明: 存在 $\delta > 0$, 当 $[a,b]$ 中任意有限个互不相交开区间 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \cdots, n)$长度和小于 δ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i) - f(x_i)| < 1.$$

  因此对任意长度小于 δ 的区间 $[c,d]$ 有 $\bigvee_c^d(f) < 1$. 把 $[a,b]$ 分解为有限个长度小于 δ 的区间即得.
- $[a,b]$ 上的绝对连续函数几乎处处可导, 而且其导函数在 $[a,b]$ 上可积.
- 若 $[a,b]$ 上绝对连续函数的导数几乎处处为零, 则必为常数.

微积分基本定理

- 定理: 若 $f(x)$ 是 $[a,b])$ 上的绝对连续函数, 则有

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

- 证明: 令

$$g(x) = \int_a^x f'(t)dt.$$

则 $f(x) - g(x)$ 是绝对连续函数, 且导数几乎处处为零.

- 若 $[a,b])$ 上的绝对连续函数 $f(x)$ 可表示为

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt, g \in L([a,b]).$$

则 $g(x) = f'(x)$, a.e. $x \in [a,b]$.

绝对连续函数级数的逐项求导

- 定理: 若 $g_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b])$ 上的绝对连续函数, 若存在 $c\in[a,b]$, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(c)$, $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b |g_k'(x)|dx<\infty$, 则级数$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ 在 $[a,b])$ 上收敛, 且其和函数(设为 $g(x)$)是 $[a,b])$ 上的绝对连续函数，且有

$$g'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x), a.e. x\in[a,b].$$

- 证明: 由逐项积分定理, 令

$$G(x)=\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x), \int_c^x G(t)dt=\sum_{k=1}^{\infty}(g_k(x)-g_k(c))=g(x)-g(c).$$

因此 $g(x)$ 是绝对连续函数, 且 $g'(x)=G(x), a.e. x\in[a,b]$.