L^p 空间的定义

- 定义: 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.
  (i) $0 < p < \infty$,
  $$\|f\|_p = \Big(\int_E |f(x)|^p dx \Big)^{1/p}, \quad L^p(E) = \{f : \|f\|_p < \infty\}$$
  称 $L^p(E)$ 为 L^p 空间. 显然 $L^1(E) = L(E)$.
  (ii) $p = \infty$, $m(E) > 0$.
  $$\|f\|_\infty = \inf\{M : |f(x)| \leq M, a.e. x \in E\}, L^\infty(E) = \{f : \|f\|_p < \infty\}$$
  称上面的 M 为 f 在 E 上的本性上界. $\|f\|_\infty$ 是本性上界的下确界, 称为本性上确界.

$\|f\|_p$ 的性质

- $f \in L^\infty(E)$ 时, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, a.e.$x \in E$. 即 $\|f\|_\infty$ 也是 f 的本性上界.

  证明: $\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \cup\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n}\}$ 是零测集.
- $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$; $p \geq 1$ 时, $\|f\|_p$ 称为 f 的 L^p 范数.
- 例: $E = (0,1)$, $0 < p < \infty$, 则有

$$\ln\frac{1}{x} \in L^p(E), \quad \ln\frac{1}{x} \notin L^\infty(E),$$

$$x^{-1/p} \in L^{p-\alpha}(0 < \alpha < p), \quad x^{-1/p} \notin L^p(E).$$

- $0 < m(E) < \infty$ 时，$\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
- 证明:

$$\|f\|_p = (\int_E |f(x)|^p dx)^{1/p} \le \|f\|_\infty \cdot (m(E))^{1/p} \Rightarrow \limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$$

任给 $\epsilon > 0$, $A = \{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty - \epsilon\}$,

$$\|f\|_p \ge (\int_A |f(x)|^p dx)^{1/p} \ge (\|f\|_\infty - \epsilon)(m(A))^{1/p},$$

因此 $\liminf\limits_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty - \epsilon$.

L^p 是线性空间

- 若 $f, g \in L^p(E)$, $0 < p < \infty$, α, β 是实数, 则 $\alpha f + \beta g \in L^p(E)$.
- 证明: 当 $0 < p < \infty$ 时,

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)|^p \leq 2^p(|\alpha|^p|f(x)|^p + |\beta|^p|g(x)|^p)$$

当 $p = \infty$ 时,

$$|\alpha f(x) + \beta g(x)| \leq (|\alpha||f(x)| + |\beta||g(x)|)$$

- 当 $p \geq 1$ 时, $\|\alpha f + \beta g\|_p \leq |\alpha|\|f\|_p + |\beta|\|g\|_p$(Minkowshi不等式), 如果没有特别指明, 一般假设 $p \geq 1$.

Hölder不等式

- 共轭指标: 若 $1 < p < \infty$, p' 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, 即 $p' = \frac{p}{p-1}$; 若 $p = 1$, $p' = \infty$; 若 $p = \infty$, $p' = 1$.
- Hölder不等式: 若 $f \in L^p(E)$, $g \in L^{p'}(E)$, 则有 $\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}, 1 \le p \le \infty$. 当 $1 < p < \infty$ 时,

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \le \Big(\int_E |f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \Big(\int_E |f(x)|^{p'} dx\Big)^{1/p'}$$

当 $p = 1$ 时,

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \le \|g\|_\infty \int_E |f(x)|dx$$

- 当 $p = p' = 2$ 时也称为Schwarz不等式.

Hölder不等式的证明

- 原不等式可以写成
$$\int_E \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_{p'}}dx \le 1$$
- 当 $1 < p < \infty$ 时，利用 e^x 的凸性，对任意 $a > 0, b > 0$，有
$$a^{1/p}b^{1/p'} = e^{\frac{1}{p}\ln a+\frac{1}{p'}\ln b} \le \frac{1}{p}e^{\ln a} + \frac{1}{p'}e^{\ln b} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p'}.$$
因此有
$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_{p'}} = \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}.$$
上面不等式两边积分即得.

Hölder不等式的实例1

- 设 $m(E) < \infty$, $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$, 则 $L^{p_1}(E) \subset L^{p_2}(E)$, 且有

$$\|f\|_{p_1} \leq [m(E)]^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2},$$

- 证明: 当 $p_2 < \infty$ 时, 令 $r = \frac{p_2}{p_1}$,

$$\int_E |f(x)|^{p_1} dx \leq \Big(\int_E |f(x)|^{p_1 \cdot r} dx \Big)^{1/r} \Big(\int_E 1^{r'} dx \Big)^{1/r'}$$
$$= m(E)^{1/r'} \Big(\int_E |f(x)|^{p_2} dx \Big)^{1/r}$$

注意到 $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{p_1}{p_2}$.

Hölder不等式的实例2

- 设 $0 < r < p < s \leq \infty$, 则 $f \in L^r(E) \cap L^s(E)$, $\lambda \in (0,1)$ 由下式给出,
$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{r} + \frac{1-\lambda}{s}.$$
则有 $\|f\|_p \leq \|f\|_r^{\lambda} \|f\|_s^{1-\lambda}$.
- 证明:
$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^p dx &\leq \int_E |f(x)|^{\lambda p} |f(x)|^{(1-\lambda)p} dx \\ &\leq \left(\int_E |f(x)|^r dx \right)^{\lambda p/r} \left(\int_E |f(x)|^s dx \right)^{(1-\lambda)p/s}.\end{aligned}$$

Minkowski 不等式1

- 设 $1 \le p \le \infty$, $f, g \in L^p(E)$, 则有 $\|f+g\| \le \|f\|_p + \|g\|_p$.
- 证明: $p = 1, \infty$ 时显然, 当 $1 < p < \infty$ 时

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p dx \le \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|dx$$
$$\le \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|dx + \int_E |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|dx.$$

利用 $p' = \frac{p}{p-1}$,

$$\int_E |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|dx \le \|f+g\|_p^{p-1}\|f\|_p.$$

Minkowski 不等式2

- 当 $0 < p < 1$ 时, $\|f+g\|_p \le 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p)$.
  证明: 由 $(1+t)^p \le 1 + t^p$, $t \ge 0$,

$$|f(x)+g(x)|^p \le (|f(x)|+|g(x)|)^p \le |f(x)|^p + |g(x)|^p.$$

  有 $\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$.
  由 $(1+t)^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}-1}(1+t^{\frac{1}{p}})$, $t \ge 0$, 即得.

Minkowski 不等式3

- 当 $0 < p < 1$ 时, 对非负可测函数 f, g, $\|f+g\|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$.
  证明: 对共轭指标$\frac{1}{p}$, $\frac{1}{1-p}$ 用Hölder不等式

$$\|f\|_p = \left(\int_E \frac{f(x)^p}{(f(x)+g(x))^{(1-p)p}}(f(x)+|g(x))^{(1-p)p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \int_E \frac{f(x)}{(f(x)+g(x))^{(1-p)}}dx \cdot \|f+g\|_p^{1-p}$$

因此

$$\|f\|_p + \|g\|_p \leq \int_E \frac{f(x)+g(x)}{(f(x)+g(x))^{(1-p)}}dx \cdot \|f+g\|_p^{1-p} = \|f+g\|_p.$$

- 规定: $f, g \in L^p(E)$, $f = g \iff f(x) = g(x)$, a.e. $x \in E$, .
- L^p 空间的距离: 设 $1 \leq p \leq \infty$, $f, g \in L^p(E)$, 定义

$$d(f, g) = \|f - g\|_p.$$

- 定理: $(L^p(E), d)$ 是一个距离空间.

  证明: (i) $d(f, g) \geq 0$, $d(f, g) = 0$ 当且仅当 $f = g$.

  (ii) $d(f, g) = d(f, g)$.

  (iii) $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

- 定义: 设 $f_k \in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$, 若存在 $f \in L^p(E)$, 使得 $d(f_k, f) \to 0$, 则称 f_k 依范数收敛于 f(强收敛), f_k 为 $L^p(E)$ 中的收敛列.
- 极限的唯一性: 若 f_k 在 $(L^p(E), d)$ 中依范数同时收敛到 f, g, 则

  $$\|f-g\|_p \leq \|f_k - f\|_p + \|f_k - g\|_p \to 0,$$

  因此 $f = g$.
- 范数的极限: 若 f_k 在 $(L^p(E), d)$ 中依范数收敛到 f, 则有 $\|f_k\|_p \to \|f\|_p$. 事实上由Minkowski不等式,

  $$|\|f_k\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_k - f\|_p \to 0.$$

$L^p(E)$ 中的 Cauchy 列

- Cauchy列: 设 $f_k \in L^p(E)(k=1,2,\cdots)$, 若

$$\lim_{k,j\to\infty} d(f_k, f_j) \to 0,$$

则称 f_k 是 $L^p(E)$ 中的 Cauchy 列.

- $L^p(E)$ 中的收敛列是 Cauchy 列.

证明:

$$\|f_k - f_j\|_p \le \|f_k - f\|_p + \|f_j - f\|_p \to 0.$$

L^p 空间的完备性

- 定理: $L^p(E)$ 是完备的距离空间, 即任意 Cauchy 列在 $L^p(E)$ 中收敛.
- 证明思路: 设 f_k 是 Cauchy 列, 有子列 f_{k_j} 在 E 上几乎处处收敛到某个函数 f. $1 \leq p < \infty$ 时, 由 Fatou 引理,

$$\|f_k - f\|_p^p \leq \liminf_{i \to \infty} \int_E |f_k(x) - f_{k_i}(x)|^p dx \to 0$$

$p = \infty$ 时, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N, $k, j > N$ 时, $\|f_k - f_j\| < \epsilon$. 对 a.e. $x \in E$,

$$|f_k(x) - f(x)| = \lim_{i \to \infty} |f_k(x) - f_{k_i}(x)| < \epsilon \Rightarrow \|f_k - f\|_\infty \to 0.$$

L^p 空间的完备性的证明

- 子列的选取: 设 f_k 是 Cauchy 列, 则存在子列 f_{k_j} 使得

$$\|f_{k_j} - f_{k_{j+1}}\|_p \leq 2^{-j}, j = 1, 2, \cdots .$$

任取 $e \subset E$, 使得 $m(e) < \infty$, 则

$$\|f_{k_j} - f_{k_{j+1}}\|_{L^1(e)} \leq m(e)^{1/p'} \|f_{k_j} - f_{k_{j+1}}\|_p \leq m(e)^{1/p'} 2^{-j}.$$

因此 $\sum |f_{k_j} - f_{k_{j+1}}|$ 在 e 上可积, 从而 $\sum |f_{k_j} - f_{k_{j+1}}|$ 在 e 上几乎处处收敛, 从而在 E 上几乎处处收敛, $f_{k_m} = f_{k_1} + \sum_{j=1}^{m-1} (f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$ 在 E 上几乎处处收敛.

有界函数稠密

- 设 $f \in L^p(E)(1 \leq p < \infty$, 对任意 $\epsilon > 0$,存在有界可测函数 $g \in L^p(E)$, 使得$\|f - g\|_p < \epsilon$.
- 证明: 令 $A_k = \{x \in E : |f(x)| > k\}$, $g_k = f(x)\chi_{E \setminus A_k}$, 则 $m(A_k) \to 0$,

$$\|f - g_k\|_p^p = \int_{A_k} |f(x)|^p dx \to 0$$

阶梯函数稠密

- 设 $f \in L^p(E)(1 \le p < \infty)$, 对任意 $\epsilon > 0$,存在 $\mathbb{R}^n$ 上的有紧支集的连续函数 g, 使得$\|f-g\|_p < \epsilon$.
- 证明: 不妨设 $|f(x)| \le M$, 存在有紧支集的连续函数 g, $|g(x)| \le M$,

$$\int_E |f(x)-g(x)|dx < (2M)^{1-p}\epsilon^p,$$

$$\|f-g\|_p^p = (2M)^{p-1}\int_E |f(x)-g(x)|dx < \epsilon^p$$

- 设 $f \in L^p(E)(1 \le p < \infty)$, 对任意 $\epsilon > 0$,存在 $\mathbb{R}^n$ 上的有紧支集的阶梯函数

$$\phi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{I_i}(x),$$

其中每个 I_i 都是二进方体, 使得 $\|f-\phi\|_p < \epsilon$.

- 定理: L^p $(1 \le p < \infty)$是可分的距离空间
- 证明: 若 $E = \mathbb{R}^n$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上紧支的阶梯函数$\phi = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{I_i}(x)$, 其中每个 I_i 都是二进方体, 使得 $\|f - \phi\|_p < \epsilon/2$.
  考虑取值为有理数的阶梯函数 $\psi = \sum_{i=1}^k r_i \chi_{I_i}(x)$,

$$\|\phi - \psi\|_p \le \sum_{i=1}^k |c_i - r_i| \|\chi_{I_i}\|_p = \sum_{i=1}^k |c_i - r_i| m(I_i)^{1/p}$$

  设 $|c_i| \le M$, $m(I_i) \le M^p$, $|r_i| \le M$, $|c_i - r_i| \le \frac{\epsilon}{2kM}$, 则有 $\|\phi - \psi\|_p \le \frac{\epsilon}{2}$.
  对一般可测集 E, 做 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f_1(x) = f(x)(x \in E)$, $f_1(x) = 0(x \notin E)$, 利用 $\|f - \phi\|_{L^p(E)} \le \|f - \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 即得.

内积

- 对 $f, g \in L^2(E)$, 定义内积

$$\langle f, g\rangle = \int_E f(x)g(x)dx.$$

- 性质: $\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle$, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.
- 内积公理: (i) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$;
  (ii) $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$;
  (iii) $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle = \langle f, \alpha g\rangle$.

内积的连续性, 正交系

- 定理: 对 $f_k, f \in L^2(E)$, f_k 依范数收敛到 f, 则对任意的 $g \in L^2(E)$, 有(f_k 若收敛到 f)
$$\lim_{k\to\infty}\langle f_k, g\rangle = \langle f, g\rangle.$$
证明:
$$|\langle f_k, g\rangle - \langle f, g\rangle| = \langle f_k - f, g\rangle \le \|f_k - f\|_2\|g\|_2 \to 0.$$

- 正交: $\langle f, g\rangle = 0$
正交系 $\{\phi_\alpha\}$: 两两正交
标准正交系 $\{\phi_\alpha\}$: 两两正交, $\|\phi_\alpha\|_2 = 1$. 正交系 $\{\phi_\alpha\}$, $\|\phi_\alpha\|_2 \neq 0$, $\{\frac{\phi_\alpha}{\|\phi_\alpha\|_2}\}$ 是标准正交系.

正交系

- 例: $L^2([-\pi,\pi])$ 中的标准正交系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, n = 1, 2, \cdots$$

- $L^2(E)$ 中任意标准正交系 $\{\phi_\alpha\}$ 是可数的.

  证明: 正交系中任意两个元 ϕ_α, ϕ_β 的距离

$$d(\phi_\alpha - \phi_\beta) = \sqrt{\langle \phi_\alpha - \phi_\beta, \phi_\alpha - \phi_\beta \rangle} = \sqrt{\langle \phi_\alpha, \phi_\alpha \rangle - \langle \phi_\beta, \phi_\beta \rangle} = \sqrt{2}.$$

  由 $L^2(E)$ 的可分性即得.

广义Fourier级数的定义

- 设 $\{\phi_i\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系, $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\phi_i(x)$ 在$L^2(E)$ 中收敛到某个 $f \in L^2(E)$, 即部分和序列 $S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i\phi_i(x)$ 依范数收敛到 f, 则
$$\langle f, \phi_j\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle S_k, \phi_j\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} c_i\delta_{i,j} = c_j$$
- 设 $\{\phi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系, $f \in L^2(E)$, 我们称
$$c_k = \langle f, \phi_k\rangle = \int_E f(x)\phi_k(x)dx, k = 1, 2, \cdots$$
为 f (关于 ϕ_k)的广义Fourier系数,$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k(x)$ 为 f (关于 ϕ_k)的广义Fourier级数. 记为 $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k(x)$

- 定理: 设 $\{\phi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系, $f \in L^2(E)$, 取定 k, $a_i(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是一组实数, $f_k = \sum_{i=1}^k a_i\phi_i(x)$, 则当 $a_i = c_i = \langle f, \phi_i\rangle$ 时 $d(f, f_k)$ 最小.

  证明: $\|f_k\|_2^2 = \sum_{i=1}^k a_i^2$,

$$\|f - f_k\|_2^2 = \langle f - \sum_{i=1}^k a_i\phi_i(x), f - \sum_{i=1}^k a_i\phi_i(x)\rangle$$

$$= \|f\|_2^2 - 2\sum_{i=1}^k a_i c_i + \sum_{i=1}^k a_i^2 = \|f\|_2^2 + \sum_{i=1}^k (a_i - c_i)^2 - \sum_{i=1}^k c_i^2$$

  显然 $a_i = c_i$, 即 $f_k = S_k$ 时最小

Bessel不等式

- Bessel定理：设 $\{\phi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系，$f \in L^2(E)$，f 的广义Fourier系数 c_i 满足
$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \le \|f\|_2^2$$
证明：上面已经证明
$$\|f - S_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \ge 0.$$

- Riesz-Fischer定理: 设 $\{\phi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系, 若数列 c_i 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty$, 则存在 $g \in L^2(E)$ 使得 $c_i = \langle g, \phi_i \rangle$.
  证明: $S_k = \sum_{i=1}^{k} c_i \phi_i(x)$ 满足
  $$\|S_{k+p} - S_k\|_2^2 = \sum_{i=k}^{k+p} c_i^2.$$
  因此 S_k 是 $L^2(E)$ 中的基本列. 存在 $g \in L^2(E)$, $d(S_k, g) \to 0$, $c_k = \langle g, \phi_k \rangle$.

完全正交系

- 定义: 设 $\{\phi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的正交系, 若 $L^2(E)$ 中不存在非零元与所有 ϕ_k 正交, 则称 $\{\phi_k\}$ 是完全正交系.
- 定理: 设 $\{\phi_k\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准完全正交系, $f \in L^2(E)$, 令 $c_k = \langle g, \phi_k \rangle (k = 1, 2, \cdots)$. 则

$$\|\sum_{i=1}^{k} c_i \phi_i - f\|_2 \to 0. \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \|f\|_2^2$$

证明: 设 $\sum_{i=1}^{k} c_i \phi_i$ 在 $L^2(E)$ 收敛到某个函数 g, 则有

$$\langle f - g, \phi_k \rangle = 0, i = 1, 2, \cdots \Rightarrow f = g$$

- 例: $1, \cos kx, \sin kx (k = 1, 2, \cdots)$ 是 $L^2([-\pi, \pi])$ 中的完全正交系.

封闭系是完全系

- 定理: 设 $\{\phi_i\}$ 是 $L^2(E)$ 中的标准正交系, 若对任意 $f \in L^2(E)$ 以及 $\epsilon > 0$, 存在 $\{\phi_k\}$ 中的线性组合

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \phi_{i_j},$$

满足 $\|f - g\|_2 < \epsilon$(此时称 $\{\phi_i\}$ 为封闭系), 则 $\{\phi_i\}$ 是完全正交系.

证明: 反设 $\{\phi_i\}$ 不是完全正交系, 则存在非零元 $f \in L^2(E)$ 使得 $\langle f, \phi_k \rangle = 0, \forall i$, 由条件, 存在 $\{\phi_k\}$ 中的线性组合满足

$$\|f - \sum_{j=1}^{k} a_j \phi_{i_j}\|_2 < \frac{\|f\|_2}{2}$$

$$|\|f\|_2^2 = \langle f, f - \sum_{j=1}^{k} a_j \phi_{i_j} \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \frac{\|f\|_2}{2}$$