2014年秋季学期《概率与数理统计》期中考试试题

姓名：__________　学号：__________　院系与专业：____________________

(考试结束后请将试卷、草稿纸一起提交)　　本试卷共8道大题，总分100分

1. 某官员第1次受贿没被查处的概率是$q_1 = 98/100 = 0.98$.第1次没被查处后，第2次受贿没被查处的概率是$q_2 = 96/98 = 0.9796,\cdots$.前$j-1$次没被查处后，第$j$次受贿不被查处的概率是$q_j = (100-2j)/(100-2(j-1)),\cdots$.求他受贿$n$次还不被查处的概率$p_n$. (10分)

   解：

   用A_j表示该官员第j次受贿没被查处，则$A_1A_2\cdots A_n$表示受贿n次还不被查处.

$$\begin{aligned}
p_n &= P(A_1A_2\cdots A_n)\\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})\\
&= q_1q_2\cdots q_n\\
&= \frac{98}{100}\frac{96}{98}\cdots\frac{100-2(n-1)}{100-2(n-2)}\frac{100-2n}{100-2(n-1)}\\
&= \frac{100-2n}{100}\\
&= 1-\frac{n}{50}.
\end{aligned}$$

2. n个签中有m个标有“中”，现无放回依次随机进行抽签时，试证明第j次抽中的概率是m/n. (10分)

   证明：

   用数学归纳法.用A_j表示第j次抽中，则对一切m,n，当$m \leqslant n$时，有$P(A_1) = m/n$.设对一切m,n，当$m \leqslant n$时，有$P(A_{j-1}) = m/n$.已知A_1（或$\overline{A_1}$）发生后，可视原来的第j 次抽签为新条件下的第$j-1$次抽签，这时的$n-1$个签中有$m-1$（或m）个标有“中”.由归纳法假设知

$$P(A_j|A_1) = \frac{m-1}{n-1},\ P(A_j|\overline{A_1}) = \frac{m}{n-1}.$$

   于是有

$$\begin{aligned}
P(A_j) &= P(A_1)P(A_j|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_j|\overline{A_1})\\
&= \frac{m}{n}\frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n}\frac{m}{n-1}\\
&= \frac{m}{n}, 1 \leqslant j \leqslant n.
\end{aligned}$$

3. 甲有本金a元，决心再赢b元停止赌博.设甲每局赢的概率是$p=1/2$，每局输赢都是一元钱，甲输光后停止赌博，求甲输光的概率$q(a)$并对结果进行适当的分析.　(15分)

提示：可从数列通项入手

解：

用A表示甲第一局赢，用B_k表示甲有本金k元时最后输光.则$q(k)=P(B_k)$，且由题意有$q(0)=1, q(a+b)=0$，由全概率公式有：

$$\begin{aligned} q(k) &= P(B_k) \\ &= P(A)P(B_k|A)+P(\overline{A})P(B_k|\overline{A}) \\ &= \frac{1}{2}P(B_{k+1})+\frac{1}{2}P(B_{k-1}) \\ &= \frac{1}{2}q(k+1)+\frac{1}{2}q(k-1). \end{aligned}$$

从而有$2q(k)=q(k+1)+q(k-1)$,从而得到

$$q(k+1)-q(k)=q(k)-q(k-1)=\cdots=q(1)-q(0)=q(1)-1.$$

上式两边对$k=n-1,n-2,\cdots,0$求和后得到

$$q(n)-1=n(q(1)-1).$$

取$n=a+b$,得到

$$\begin{aligned} 0-1 &= (a+b)(q(1)-1) \\ \Rightarrow q(1)-1 &= \frac{-1}{a+b} \end{aligned}$$

再取$n=a$有

$$q(a)=1+(q(1)-1)=1-\frac{a}{a+b}=\frac{b}{b+a}$$

这说明，当本金有限时，贪心越大，输光的概率越大，如果一直赌下去($b\to\infty$),必定输光.

4. 几何分布中设成功的概率为p,并记$q=1-p$.证明：

(1) 几何分布具有无记忆性，即$P(X=k+1|X>k)=P(X=1)(\forall k\geqslant 1)$.

(2) 基于(a)中无记忆性的形式，说明在离散型分布中，具有无记忆性的分布只能是几何分布.　(15分)

证明：

(1) 由条件概率公式得到

$$
\begin{aligned}
P(X=k+1|X>k) &= \frac{P(X=k+1, X>k)}{P(X>k)} \\
&= \frac{P(X=k+1)}{P(\bigcup\limits_{j=k+1}^{\infty}\{X=j\})} \\
&= \frac{q^k p}{\sum\limits_{j=k+1}^{\infty} q^{j-1}p} \\
&= p = P(X=1)
\end{aligned}
$$

(2) 令$r_k = P(X>k)$,现在希望证明的是

$$P(X=k) = P(X>k-1) - P(X>k) = r_{k-1} - r_k = q^{k-1}p.$$

利用无记忆性条件看看r_k会有什么性质:

$$
\begin{aligned}
p &= P(X=k+1|X>k) \\
&= \frac{P(X>k) - P(X>k+1)}{P(X>k)} \\
&= 1 - \frac{r_{k+1}}{r_k}.
\end{aligned}
$$

而$r_0 = P(X>0) = 1$,得到

$$r_{k+1} = (1-p)r_k = (1-p)^2 r_{k-1} = \cdots = q^{k+1}$$

从而

$$P(X=k) = r_{k-1} - r_k = q^{k-1}p.$$

故此得证.

5. 设随机变量X的概率密度函数是

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求$Y = sin\,X$的概率密度. (10分)

解：

X在$(0,\pi)$取值时，$Y = sin\ X$在$(0,1)$取值，故若$y<0$或$y>1$，则$f_Y(y)=0$.若$0\leqslant y\leqslant 1$，Y的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y\leqslant y) = P(0\leqslant Y\leqslant y) = P(0\leqslant sin\ X\leqslant y)\\ &= P((0\leqslant X\leqslant arcsin\ y)\bigcup(\pi - arcsin\ y\leqslant X\leqslant \pi))\\ &= \int_0^{arcsin\ y}\frac{2x}{\pi^2}dx + \int_{\pi-arcsin\ y}^{\pi}\frac{2x}{\pi^2}dx = \frac{1}{\pi^2}(arcsin\ y)^2 + 1 - \frac{1}{\pi^2}(\pi - arcsin\ y)^2\\ &= \frac{2}{\pi}arcsin\ y.\end{aligned}$$

故当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$. 因此，$Y$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

6. 一颗子弹打在靶子上，令X和Y分别表示弹着点离靶心的水平偏差和垂直偏差.并设

(1) X与Y为连续型随机变量，其概率密度$f_X(x)$与$f_Y(y)$均可微,

(2) X,Y相互独立,

(3) X与Y的联合概率密度

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=g(x^2+y^2)>0,$$

其中g为某一可微函数.

试求X与Y的分布. (10分)

解：

对条件(3)中的等式两边同时对x求导得

$$f_X^{'}(x)f_Y(y)=2xg^{'}(x^2+y^2).$$

两边同时除以$f_X(x)f_Y(y)=g(x^2+y^2)$有

$$\frac{f_X^{'}(x)}{f_X(x)}=\frac{2xg^{'}(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)},$$

即

$$\frac{f_X^{'}(x)}{2xf_X(x)}=\frac{g^{'}(x^2+y^2)}{g(x^2+y^2)}.$$

从这个等式我们可以看出$\frac{f_X^{'}(x)}{2xf_X(x)}$为一常数.
这是因为对$\forall x_1, x_2$,总能找到y_1, y_2使$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$,故

$$\frac{f_X^{'}(x_1)}{2x_1f_X(x_1)}=\frac{g^{'}(x_1^2+y_1^2)}{g(x_1^2+y_1^2)}=\frac{g^{'}(x_2^2+y_2^2)}{g(x_2^2+y_2^2)}=\frac{f_X^{'}(x_2)}{2x_2f_X(x_2)}$$

从而

$$\frac{f_X^{'}(x)}{f_X(x)}=2cx$$

对上式两边求积分有

$$f_X(x)=ke^{cx^2}$$

由于$f_X(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积，故$c<0$.可令$c=-1/2\sigma^2$.再由$\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)dx=1$得

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

即X~$N(0,\sigma^2)$.由于X与Y地位平等，故也有Y~$N(0,\sigma^2)$.

7. 设

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty),$$

$$g(x)=\begin{cases}cos\ x, & |x|<\pi\\ 0, & |x|\geqslant\pi,\end{cases}$$

$$f(x,y)=\varphi(x)\varphi(y)+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y)(-\infty<x,y<+\infty),$$

解答下列问题：

(1) $f(x,y)$是概率密度函数（设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为$f(x,y)$.

(2) (X,Y)关于X,Y的边缘分布均为正态分布.

(3) X与Y的相关系数$\rho_{XY}=0$.　(15分)

解：

(1) 当$|x|<\pi, |y|<\pi$时,

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}cos\ xcos\ y\\&=\frac{1}{2\pi}(e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+e^{-\pi^2}cos\ xcos\ y)\geqslant 0\end{aligned}$$

而当$|x|\geqslant\pi$,$|y|\geqslant\pi$或其他情况时，显然有$f(x,y)\geqslant 0$.且有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}cos\ xcos\ y\\&=1+0=1.\end{aligned}$$

所以$f(x,y)$是概率密度函数.

(2) 因为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<\infty),$$

同理

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<\infty),$$

所以$X\tilde{}N(0,1),Y\tilde{}N(0,1)$.

(3) 因为

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E(XY)-E(X)E(Y)=E(XY)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy[\varphi(x)\varphi(y)+\frac{1}{2\pi}e^{-\pi^2}g(x)g(y)]dxdy\\&=0,\end{aligned}$$

所以$\rho_{XY}=0$.

8. 已知条件方差的定义是：

$$Var(X|Y=y)=E[(X-E[X|Y=y])^2|Y=y]=E[X^2|Y=y]-(E[X|Y=y])^2,$$

于是$Var(X|Y)$是Y的函数，试证条件方差公式：

$$Var(X)=E[Var(X|Y)]+Var(E[X|Y]) \qquad (15分)$$

证明：

$$\begin{aligned}E[Var(X|Y)]&=E[E[X^2|Y]-(E[X|Y])^2]\\&=E[E[X^2|Y]]-E[(E[X|Y])^2]\\&=E[X^2]-E[(E[X|Y])^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(E[X|Y])&=E[(E[X|Y])^2]-(E[E[X|Y]])^2\\&=E[(E[X|Y])^2]-(E[X])^2\end{aligned}$$

从而

$$Var(X)=E[Var(X|Y)]+Var(E[X|Y])$$