测度的历史1

- 若尔当(Jordan)于1892年在R中用有限个开区间覆盖定义外测度，但有明显的缺点。主要是它仍只具有有限可加性，从而导致有些简单的点集也不可测。例如，令A=[0，1]$\cap$Q，则A的若尔当内测度为0，而外测度为1，因而A在若尔当意义下不可测。
- 波莱尔(Borel)于1898年，先由开集经过可列并与余的运算导致一类集，即所谓波莱尔集类。再对每个有界波莱尔集对应一个实数，即波莱尔测度，并使得这种测度具有可列可加性。波莱尔的这种思想对测度理论做出了重大贡献，成为近代测度论中用公理方式引出 σ 代数概念的起源，并为勒贝格(Lebesgue，H.L.)的工作开辟了道路. Borel 在1920到中国做为期5个月的学术交流.

测度的历史2

- 波莱尔的学生勒贝格于1902年以更一般的形式建立起比较完善的测度理论.他在定义点集测度的方法上，容许可列覆盖，使所建立的测度具有可列可加性，并且相当广泛的一类点集的测度有了定义。勒贝格测度是现代抽象测度的起源，在它的基础上建立的勒贝格积分，是现代分析中应用最广和意义重大的积分。卡拉西奥多里(Carath éodory，C.) 于1914年发展了外测度理论，对测度进行了公理化研究，并给出了测度扩张的典型方法，成为近代测度论的基础.拉东(Radon，J.)、萨克斯(Saks，S.)、弗雷歇(Fr échet，M.-R.)以及另外一些人考虑了一般集合上的测度以及测度空间的乘积，并建立了一般可测集上积分的理论。
- 测度概念与积分概念紧密相关。每一种测度理论的推广都可导致一种积分理论的推广.测度理论不仅是积分理论的基础，而且在现代分析以及概率论等许多数学领域中也有着广泛的应用。

Lebesgue 外测度的定义1

- $\mathbb{R}^n$ 中开矩体的体积：$I = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : a_i < x_i < b, i = 1, 2, \ldots, n\}$, I 的体积为 $|I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.
- L-覆盖：设 $E \subset \mathbb{R}^n$，若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可数个开矩体，且有 $E \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k$, 则称 $\{I_k\}$ 是 E 的一个 L-覆盖.
- Lebesgue 外测度的定义：$E \subset \mathbb{R}^n$, E 的 Lebesgue 外测度

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{k \geq 1} |I_k| : \{I_k\} \text{ 是 } E \text{ 的 } L\text{-覆盖}\right\}.$$

Lebesgue 外测度的定义2

- $E \subset \mathbb{R}^n$, 若 $m^*(E) < +\infty$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$，存在 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum |I_k| < m^*(E) + \epsilon$.
- 若 $m^*(E) = +\infty$, 则对 E 的任何 L-覆盖 $\{I_k\}$, 有 $\sum |I_k| = +\infty$.
- 例：单点集的外侧度为 0.
- 例: 二维空间中线段的外侧度为 0.
  证明: 不妨设线段不与坐标轴平行, 设线段长 l, n 等分后每个小段可以用边长为 $\frac{l}{n}$ 的正方形覆盖, 所得覆盖的面积和为 $l^2/n \to 0$,

Lebesgue 外测度的基本性质

- $m^*(E) \geq 0$, $m^*(\phi) = 0$.
- 若 $E_1 \subset E_2$, 则有 $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$.
- 设 E_k 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合列, 则有 $m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

  证明： 任给 $\epsilon > 0$, 存在 E_k 的 L-覆盖 $\{I_{k,i} : i = 1, 2, \ldots\}$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_{k,i}| \leq m^*(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$. 则 $\{I_{k,i} : k, i = 1, 2, \ldots\}$ 是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 的 L-覆盖，有

  $$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k,i} |I_{k,i}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \epsilon$$

  由 ϵ 的任意性即得要证的不等式.
- 特别地，$m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} m^*(E_k)$.

一些集合的外测度1

- 可数集的外侧度为 0.

  证明：设 $E=\{a_1,a_2,\cdots\}$, $m^*(E)\le\sum m^*(\{a_n\})=0$.

- 例：$\mathbb{R}^2$ 中的任意直线的外侧度为0.

- I 为开矩体，则有 $m^*(\overline{I})=|I|$.

  证明: 记 λI 为与 I 中心相同, 边长为 λ 倍的开矩体. 若 $\lambda>1$, 则有 $\lambda I\supset\overline{I}$. 从而 $m^*(\overline{I})\le|\lambda I|=\lambda^n|I|$. 令 $\lambda\to 1+0$, 即得 $m^*(\overline{I})\le|I|$.

  另一方面，对 $\overline{I}$ 的任意开矩体覆盖 $\{I_k\}$, $\exists N$，使得 $\bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k\supset\overline{I}$, $\sum\limits_{k=1}^{N}|I_k|\ge|I|$，从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|\ge|I|$, $m^*(\overline{I})\ge|I|$.

一些集合的外测度2

- I 为开矩体，则有 $m^*(I) = |I|$.
  证明：$m^*(I) \leq m^*(\bar{I}) = |I|$, 另一方面，$\forall 0 < \lambda < 1$, $m^*(I) \geq m^*(\lambda\bar{I}) = \lambda^n|I|$. $\lambda \to 1-0$, 得 $m^*(I) \geq |I|$.
- 若 E 满足 $I \subset E \subset \bar{I}$, 则有 $m^*(E) = |I|$.
- $[0,1]$ 中的 Cantor 集的外侧度为零.
  证明: 设 F_n 是构造过程中第 n 步留下来的集合, 它是由 2^n 个长度为 3^{-n} 的闭区间之并, 因此

$$m^*(C) \leq m^*(F_n) = 2^n \cdot 3^{-n} \to 0$$

距离外测度1

- 引理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, 定义

$$m_\delta^*(E) = \inf\left\{\sum_{k\geq 1}|I_k| : \{I_k\}\text{是 } E \text{ 的 } L\text{-覆盖, 且每个 } I_k \text{ 的变成小于 } \delta\right\}.$$

则有 $m_\delta^*(E) = m^*(E)$.

证明: 显然 $m_\delta^*(E) \geq m^*(E)$. 为证明反向不等式, 不妨设 $m^*(E) < \infty$. 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|I_k| \leq m^*(E) + \epsilon,$$

再把每个 I_k 分割为边长小于 $\delta/2$ 的小矩体 $I_{k,j}$, 再把每个小矩体边长扩大 $\lambda(1<\lambda<2)$ 倍则 $\{I_k,j\}$ 构成 E 的 L-覆盖, 且有

$$\sum_{k,j}|I_{k,j}| = \lambda^n \sum_k |I_k| \leq \lambda^n(m^*(E)+\epsilon),$$

距离外测度2

- 定理: 设 E_1, E_2 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个点集, 若 $d(E_1, E_2) > 0$, 则有

$$m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2).$$

证明: 只需要证明 $m^*(E_1 \cup E_2) \geq m^*(E_1) + m^*(E_2)$. 不妨设 $m^*(E_1 \cup E_2) < \infty$. 对任给 $\epsilon > 0$, 做 $E_1 \cup E_2$ 的边长小于 $d(E_1, E_2)/\sqrt{n}$ 的 L-覆盖 $\{I_k\}$(I_k 不会同时和 E_1, E_2 相交)使得

$$m^*(E_1 \cup E_2) + \epsilon > \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| \geq m^*(E_1) + m^*(E_2)$$

由 ϵ 的任意性即得.

外测度的平移不变性

- 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 记 $E + \{x_0\} = \{x + x_0 : x \in E\}$, 则有

$$m^*(E + \{x_0\}) + m^*(E).$$

证明: 对于开矩体 I, $I + \{x_0\}$ 还是开矩体, 且 $|I| = |I + \{x_0\}|$.
对于 E 的任意 L-覆盖 $\{I_k\}$, $\{I_k + \{x_0\}\}$ 是 $E + \{x_0\}$ 的 L-覆盖. 则有

$$m^*(E+\{x_0\}) \leq \sum |I_k+\{x_0\}| = \sum |I_k|, \quad \Rightarrow m^*(E+\{x_0\}) \leq m^*(E)$$

- 一维集合的数乘: $E \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$. 则 $m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E)$.
证明: $E \subset \bigcup (a_n, b_n)$, 则 $\lambda E \subset \bigcup \lambda (a_n, b_n)$.

可测集

- 定义：$E \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\forall T \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c).$$

则称 E 为（Lebesgue）可测集，$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ 表示可测集的全体. E 为可测集时，E 的外侧度 $m^*(E)$ 称为 E 的测度，记为 $m(E) = m^*(E)$.

- E 可测 $\Leftrightarrow \forall\ m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$.
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(T) + \epsilon$.
- 零测集(外侧度为零的点集)是可测集. 事实上若 $m^*(E) = 0$, $\forall T \subset \mathbb{R}^n$,

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(T) = m^*(T).$$

Lebesgue 可测条件的一个等价刻画

- E 可测 $\iff \forall$ 开矩体 I, 有 $m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c)$.
  证明：只要证明充分性. $\forall T$，$\forall \epsilon > 0$, 存在 T 的开矩体覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(T) + \epsilon$.

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \le m^*((\cup I_k) \cap E) + m^*((\cup I_k) \cap E^c)$$
$$= m^*(\cup(I_k \cap E)) + m^*(\cup(I_k \cap E^c))$$
$$\le \sum m^*((I_k \cap E) + m^*(I_k \cap E^c)) = \sum (m^*(I_k)) < m^*(T) + \epsilon$$

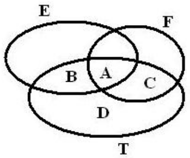
- 若 $E \subset I$, $m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^c)$, 则 E 可测. 事实上若 $H \subset I$ 是 $I \cap E^c$ 的等侧包, 则 $I \backslash H$ 是 E 的等测核.
- 勒贝格内测度: $E \subset I$, $m_*(E) = |I| - m^*(E)$, 则 E 可测 $\iff$ $m_*(E) = m^*(E)$

可测集的性质1

$\mathbb{R}^n$ 上的可测集族记为 $\mathcal{M}$.

- 空集 $\phi \in \mathcal{M}$. $E \in \mathcal{M}$, 则 $E^c \in \mathcal{M}$.
- $E, F \in \mathcal{M}$, 则 $E \cup F, E \cap F, E \backslash F \in \mathcal{M}$.
  证明：只证明 $E \cup F \in \mathcal{M}$. 任给集合 T, 则有 $T = A \cup B \cup C \cup D$, 其中 $A = (T \cap E) \cap F$, $B = (T \cap E) \cap F^c$, $C = (T \cap E^c) \cap F$, $D = (T \cap E^c) \cap F^c$, $T \cap (E \cup F) = A \cup B \cup C$, $T \cap ((E \cup F)^c) = D$. 则有

$$
\begin{aligned}
m^*(T) &\leq m^*(T \cap (E \cup F)) + m^*(T \cap ((E \cup F)^c)) \\
&\leq m^*(A) + m^*(B) + m^*(C) + m^*(D) \\
&= m^*(T \cap E) + m^*(T \cup E^c) = m^*(T).
\end{aligned}
$$



可测集的性质2

- 若 $\{E_k\}$ 可测, 两两不交, 则 $S_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ 可测. 对任意集合 T, 有

$$m^*(T \cap S_n) = \sum_{k=1}^{n} m^*(T \cap E_k).$$

- 证明: 只对 $n = 2$ 证明. 显然 S_n可测. 对任意集合 T,

$$\begin{aligned}
&m^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) \\
&= m^*(T \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + m^*(T \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c) \\
&= m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2).
\end{aligned}$$

可测集的性质3

- 可测集合列 $\{E_k\}$ 两两不交, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 可测.
- 证明: 令 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 对任意集合 T, 我们有

$$m^*(T)=m^*(T\cap S_n)+m^*(T\cap S_n^c)$$

$$=\sum_{k=1}^{n} m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap S_n^c)\geq \sum_{k=1}^{n} m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap S^c),$$

令 n 趋向无穷，得

$$m^*(T)\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(T\cap E_k)+m^*(T\cap S^c)$$

$$\geq m^*(T\cap S)+m^*(T\cap S^c)\geq m^*(T),$$

因此上面的 “$\geq$” 取等号，S 可测.

可测集的性质4

- 可测集合列 $\{E_k\} \subset \mathcal{M}$ 两两不交，则有

$$m(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

证明：上面证明, 对任意集合 T,

$$\begin{aligned} m^*(T) &= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(T \cap E_k) + m^*(T \cap S^c) \\ &= m^*(T \cap S) + m^*(T \cap S^c), \end{aligned}$$

取 $T = S$, 即得 $m^*(S) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$.

- 推论: 若可测集 A, B 满足 $A \subset B$, $m(B) < +\infty$, 则有 $m(B \backslash A) = m(B) - m(A)$.

可测集的性质5

- 集合列 $\{E_k\} \subset \mathcal{M}$, 则 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k, \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.
- 证明: 取 $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \backslash E_1$, $F_3 = E_2 \backslash (E_1 \cup E_2)$, $\cdots$. 则有 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ 可测.

  又由于 E_k^c 可测, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^c$ 可测, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k = (\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k^c)^c$, 即得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 可测.
- 半开闭矩体是可测集, 开集, 闭集, G_δ 集, F_σ 集都可测.
  证明: 若 E 是半开闭矩体, 则存在开矩体 I, $I \subset E \subset \bar{I}$, $E \backslash I \subset \bar{I} \backslash I$ 是零测集.

极限集的测度1

- E_k 是递增可测集合列，则 $\lim\limits_{k\to\infty} E_k \in \mathcal{M}$, 且有

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

证明： $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(E_k \backslash E_{k-1})$（不交并），这里取 $E_0 = \phi$. 则有

$$\begin{aligned} m(\lim_{k\to\infty} E_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k \backslash E_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) - m(E_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} m(E_k). \end{aligned}$$

极限集的测度2

- E_k 是递减可测集合列，则 $\lim_{k\to\infty} E_k \in \mathcal{M}$, 若还有 $m(E_1) < +\infty$, 则有

$$m(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

证明：$E_1 \backslash E_k$ 是递增列，

$$m(\lim_{k\to\infty} (E_1 \backslash E_k)) = \lim_{k\to\infty} m(E_1 \backslash E_k) = m(E_1) - \lim_{k\to\infty} m(E_k).$$

又 $\lim_{k\to\infty} (E_1 \backslash E_k) = E_1 \backslash (\lim_{k\to\infty} E_k)$, 我们得

$$m(E_1) - \lim_{k\to\infty} m(E_k) = m(E_1) - m(\lim_{k\to\infty} E_k).$$

- 例：$E_k = (k, +\infty)$, $\lim_{k\to\infty} E_k = \phi$, $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = +\infty$.

极限集的测度3

- $m(\varliminf_{k\to\infty} E_k) \le \varliminf_{k\to\infty} m(E_k)$.
  证明：利用 $\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subset E_n$,

$$m(\varliminf_{k\to\infty} E_k) = m(\lim_{n\to\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k) = \lim_{n\to\infty} m(\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k)$$

$$\le \varliminf_{n\to\infty} m(E_n).$$

- 若有 $m(\bigcup E_n) < +\infty$, $m(\varlimsup_{k\to\infty} E_k) \ge \varlimsup_{k\to\infty} m(E_k)$.
  证明： $m(\varlimsup_{k\to\infty} E_k) = m(\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k)$.
- 注：$E_k = (k, k+1)$ 时，$m(\varlimsup_{k\to\infty} E_k) = 0$, $\varlimsup_{k\to\infty} m(E_k) = 1$,

例

- 若有 $m(\bigcup E_n) < +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} E_k$ 存在, 则有 $m(\lim\limits_{k\to\infty} E_k) = \lim\limits_{k\to\infty} m(E_k)$.
- 例: 若可测集列 $\{E_k\}$ 满足 $\sum m(E_k) < \infty$, 则有 $m(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} E_k) = 0$. 即几乎所有点最多属于有限个 E_k.

  证明:

$$
\begin{aligned}
m(\overline{\lim_{k\to\infty}} E_k) &= \lim_{k\to\infty} m(\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i) \\
&\le \lim_{k\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} m(E_i) = 0
\end{aligned}
$$

测度的平移、旋转不变性

- E 是可测集，则对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $E+x=\{y+x:y\in E\}$ 可测.
  证明：对任意集合 T, 有 $m^*(T+x)=m^*(T)$, $T\cap(E+x)=(T-x)\cap E+x$, $(E+x)^c=E^c+x$,
  $$\begin{aligned}&m^*(T\cap(E+x))+m^*(T\cap(E+x)^c)\\&m^*((T-x)\cap E))+m^*((T-x)\cap E^c)\\&=m^*(T-x)=m^*(T).\end{aligned}$$
- 定理: 设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换. 若 $E\in\mathscr{M}$, 则 $T(E)\in\mathscr{M}$, 且
  $$m(T(E))=|\det T|\cdot m(E).$$
- E 是可测集，T 是 $\mathbb{R}^n$ 的旋转，则 $T(E)$ 可测，且 $m(T(E))=m(E)$.

- 引理: 设 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是非奇异线性变换. 若 I 为矩体,

$$m(T(I)) = |\det T|\cdot|I|. \tag{$*$}$$

  证明: 不妨设 $n=2$, T 是下面三类变换的乘积: (1) $T_1:(x,y)\to(y,x)$, (2) $T_2:(x,y)\to(\lambda x,y)$ (3) $T_3:(x,y)\to(x+y,y)$. T_1 显然满足($*$), T_2 把矩体变为矩体, 一个边有拉伸, ($*$)显然也成立. 对 T_3 把矩矩形变为平行四边形, 只要把平行四边形切成几部分再通过平行移动可以重新组合成矩形(高维情形类似), 利用测度的平移不变性和可加性可得($*$).

- 定理证明: 由上面的引理, $m^*(T(E)) = |\det T|\cdot m^*(E)$, 所以 T 把零测集映到零测集, 由于 T, T^{-1} 连续, T 把 Borel 集映到 Borel 集, 因此 T 把可测集映到可测集.

Cantor 集的测度

- 例：Cantor 集是测度为 0 的可测集.
  证明：复习 Cantor 集的构造. $I_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $F_1 = I \backslash I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.
  $I_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. $F_2 = I \backslash (I_1 \cup I_2) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.
  Cantor 集 $C = I \backslash (\cup I_n) = \cap F_n$.
  由 Cantor 集的构造可知 $m(I_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$,

$$m(C) = m(I \backslash (\cup I_n)) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 0.$$

  或者由 $m(F_n) = \frac{2^n}{3^n}$, 得 $m(C) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \leq m(F_n) \to 0$.
- 推论: 可测集的基数是 2^c.

Carathéodory引理1

- 设开集 $G \neq \mathbb{R}^n$, 设 $E \subset G$, 令

$$E_k = \left\{x \in E : d(x, G^c) \geq \frac{1}{k}\right\}, (k = 1, 2, \cdots)$$

则 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) = m^*(E)$.

- 证明: E_k 递增, 且 $E = \bigcup E_k$, 显然 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \leq m^*(E)$, 下证反向不等式. 不妨假设 $\lim_{k\to\infty} m^*(E_k) < \infty$, 令

$$A_k = E_{k+1} \backslash E_k, k = 1, 2, \cdots$$

则有 $d(A_{2j,2j+2}) > 0$.

$$\sum_{j=1}^{k} m^*(A_{2j}) = m^*(\bigcup_{j=1}^{k} A_{2j}) \leq m^*(E_{2j+1}) \leq \lim_{k\to\infty} m^*(E_k) \leq \infty$$

Carathéodory引理2

- 因此 $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_{2j})$(类似地 $\sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_{2j})$)收敛,

$$m^*(E) \le m^*(E_{2k}) + m^*(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{2j}) + m^*(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_{2j+1})$$

$$\le m^*(E_{2k}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j}) + \sum_{j=k}^{\infty} m^*(A_{2j+1})$$

两边对 k 求极限即得.

非空闭集是可测集

- 定理: 非空闭集是可测集.

  证明: 对任意集合 T, $T/F \subset F^c = G$.

$$F_k = \left\{x \in T/F : d(x, G^c) \geq \frac{1}{k}\right\}, d(F_k, F) \geq \frac{1}{k}, (k = 1, 2, \cdots).$$

  这里 $\lim_{k\to\infty} m^*(F_k) = m^*(T/F)$.

$$m^*(T) \geq [(T/F) \cup F_k] = m^*(T \cap F) + m^*(F_k)$$

  上式中令 $k \to \infty$, 即得.

- 推理: Borel集是可测集.

可测集的刻画1

- 设 E 是可测集. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, $m(G \backslash E) < \epsilon$.
- 证明： $m(E) < +\infty$时， 存在 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k \supset E$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \epsilon$, 取 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$， 则有

$$m(G \backslash E) < m(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) - m(E) < \epsilon.$$

当 $m(E) = +\infty$ 时， 令 $E_n = E \cap B(0, n)$, 则 E_n 测度有限, 存在开集 $G_n \supset E_n$, 使得 $m(G_n \backslash E_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$. 取 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_n$, 则有

$$m(G \backslash E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(G_n \backslash E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(G_n \backslash E_n) < \epsilon.$$

可测集的刻画2

设 E 是可测集.

- 对任意 $\epsilon > 0$, 存在闭集 $F \subset E$, $m(E \backslash F) < \epsilon$
  证明: 存在开集 $G \supset E^c$, 使得 $m(G \backslash E^c) < \epsilon$. 取 $F = G^c$, $m(E \backslash F) = m(E \cap F^c) = m(F^c \backslash E^c) < \epsilon$.
- 存在 G_δ 集 $G \supset E$, $m(G \backslash E) = 0$ (G 称为 E 的 G_δ 包).
  证明: 存在 $G_n \supset E$, $m(G_n \backslash E) < \frac{1}{n}$, 取 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_n$.
- 存在 F_σ 集 $F \subset E$, $m(E \backslash F) = 0$ (F 称为 E 的 F_σ 核).
  证明: 存在 G_δ 集 $G \supset E^c$, 使得 $m(G \backslash E^c) = 0$, $F = G^c \subset E$ 是 F_σ 集, $m(G \backslash E^c) = m(G \cap E) = m(E \backslash G^c) = 0$.

等侧包与等侧核

- 等侧包: $E \subset H$, $m^*(E) = m(H)$
- 等侧核: E 可测, $E \supset K$, $m(E) = m(K)$. 若 $m^*(E) < \infty$, $m(H) = m^*(E) = 0$, 但 $m^*(H \backslash E)$ 不一定为零.
- 定理: 若 $E \subset \mathbb{R}^n$, 存在 G_δ 集 H, 使得 H 是 E 的等侧包.
  证明: 存在开集 $G_k \supset E$, 使得

$$m(G_k) \leq m^*(E) + \frac{1}{k}, H = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

- 推论: 设 $E_k \subset \mathbb{R}^n$, 则 $m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} m^*(E_k)$.
  证明: 对每个 E_k 做等侧包 H_k,

$$m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \le m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} H_k) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} m^*(H_k) = \underline{\lim}_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

- 注: 若有 $m^*(\bigcup E_n) < +\infty$, $m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \ge \overline{\lim}_{k\to\infty} m^*(E_k)$ 也不一定成立. 事实上可以做不可测集合列 $E_k = W + \{r_k\}$ 满足两两不交且 $[0,1] \subset \bigcup E_k \subset [-1,2]$, 则上述不等式不成立.
- 推论: 设 $\{E_k\}$ 是递增集合列, 则

$$m^*(\lim_{k\to\infty} E_k) = \lim_{k\to\infty} m^*(E_k)$$

证明: $E_k \subset \lim E_k$, $\lim m^*(E_k) \le m^*(\lim E_k)$.

正测度集与矩体的关系

- 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测且 $m(E) > 0$, $0 < \lambda < 1$, 则存在矩体 I, 使得

$$\lambda|I| < m(I \cap E)$$

证明: 不妨设 $m(E) < \infty$, $0 < \epsilon < (\lambda^{-1} - 1)m(E)$, 存在 E 的 L-覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \epsilon < \lambda^{-1} m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-1} m(I_k \cap E)$$

因此至少存在一个 k 满足 $|I_k| < \lambda^{-1} m(I \cap E)$.

Steinhaus 定理

- 定理: 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测且 $m(E) > 0$, 则存在 $\delta_0 > 0$ 使得

$$E - E = \{x - y : x, y \in E\} \supset B(0, \delta_0)$$

- 证明思路: 只要找一个原点为中心的矩体 J, $J \subset E - E$, 即证对任意 $x_0 \in J$, 存在 $x \in E$, 使得 $x + x_0 \in E$, 也就是 $E \cap (E + \{x_0\})$ 非空, 只要证明存在矩体 I, 使得

$$\begin{aligned} & m((E \cap I) \cap (E \cap I + \{x_0\})) > 0 \\ \iff & m((E \cap I) \cup (E \cap I + \{x_0\})) < 2m(E \cap I). \end{aligned}$$

Steinhaus 定理的证明

- 证明：对 $0<\lambda<1$, 存在矩体 I, 使得 $\lambda|I|<m(I\cap E)$, 记 I 的最短边长为 δ, 做开矩体

$$J=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n):|\xi_i|\le\frac{\delta}{2}(i=1,2,\cdots,n)\}.$$

当 $x_0\in J$ 时, $m(I\cap(I+\{x_0\}))>2^{-n}|I|$, 取 λ 满足 $1-2^{-(n+1)}<\lambda<1$,

$$\begin{aligned}&m((E\cap I)\cup(E\cap I+\{x_0\}))\le m(I\cup(I+\{x_0\}))\\&=|I|+m(I+\{x_0\})-m(I\cap(I+\{x_0\}))\\&<2(1-2^{-n-1})|I|<2\lambda|I|<2m(I\cap E),\end{aligned}$$

不可测集的构造1

- 设 $\mathbb{Q}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集, 定义 $\mathbb{R}^n$ 中等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}^n$$

  利用上述等价关系, 把 $\mathbb{R}^n$ 分类, 等价的元素属于一类, 如 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集是一类.

- 上述每个类中取一个点, 构成集合 W, 则有

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^n} (W + \{r\}).$$

  下面证明 W 是不可测集. 反设 W 是可测集, 若 $m(W) = 0$, 则 $m(\mathbb{R}^n)$, 矛盾;
  若 $m(W) > 0$, $W - W$ 包含一个原点为心的球, 因此存在 $0 \neq r \in (W - W) \cap \mathbb{Q}^n$, 即存在 $x, y \in W$, $x - y \in \mathbb{Q}^n$, 矛盾.

不可测集的构造2

- $E=[0,1]^n$ 分类: 设 $\mathbb{Q}^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有理点集, 定义 E 中等价关系

$$x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Q}^n$$

利用上述等价关系, 把 E 分类, 等价的元素属于一类, 如 E 中的有理点集是一类.

- 上述每个类中取一个点, 构成集合 W, 下面证明 W 是不可测集. 设

$$R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{Q}^n : |x_i|\le 1, i=1,2,\cdots,n.\}$$

考虑集合 $A=\bigcup_{r_k\in R}(W+\{r_k\})$. 下面设 W 可测, 则 A 是无穷个测度相等的可测集之并, 且两两不交,

$$E\subset A\subset[-1,2]^n$$

则不管 W 测度为零还是不为零, 都会推出矛盾.