勒贝格积分

- Lebesgue 积分的思想：设 $f(x)$ 是在集合 E 上定义的有界函数，$m \leq f(x) \leq M$. 把区间 $[m, M]$ 进行分割

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M.$$

令 $E_i = \{x : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$, $0 \leq i < n$, $E_n = \{x : y_{n-1} \leq f(x) \leq y_n = M\}$. $\lambda = \max\{\Delta y_i\}$, Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i).$$

$h = \sum_{i=1}^{n}(x) y_{i-1} \chi_{E_i} \leq f(x)$, $|f(x) - h(x)| \leq \lambda$. $\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m(E_i)$ 是 h 的积分.

- 任意函数可分解为 $f = f^+ - f^-$, 任意非负函数可以用非负简单函数逼近.
- 定义: 设 $\mathbb{R}^n$ 非负可测简单函数 f 可表示为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \chi_{A_j}, A_j \text{ 两两不交}, \bigcup A_i = \mathbb{R}^n.$$

f 在可测集 E 上的 Lebesgue 积分定义为(规定 $0 \cdot (+\infty) = 0$.)

$$\int_E f(x)dx = \sum_{i=1}^{p} c_i m(A_i \cap E).$$

- 注: 上面的积分中, c_j 不要求两两不同. $\bigcup A_i$ 不等于 $\mathbb{R}^n$ 时可添加一个等于零的项. 如 $f = \chi_{A_j} = \chi_{A_j} + 0 \cdot \chi_{A_j^c}$.

简单可测函数积分的性质1

- 例: $\int_{(0,1)} \chi_{\mathbb{Q}} dx = 0$.
- 设 h 是简单函数. 当 $A \subset E$ 时, $\int_A h(x)dx = \int_E h(x)\chi_A dx$.

  证明: 若 $h(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$, $h(x)\chi_A = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j \cap A}$,

$$\int_E h(x)\chi_A dx = \sum_{j=1}^{m} a_j m(E_j \cap A) = \int_A h(x)dx.$$

- 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负简单可测函数, $c \geq 0$, $\int_E c \cdot f(x)dx = c\int_E f(x)dx$.

简单可测函数积分的性质2

- 设 f,g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负简单可测函数,

  $\int_E(f(x)+g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$

  证明: 设 $f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i\chi_{A_i}$($A_i$ 两两不交, 并集为全空间), $g(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j\chi_{B_j}$, 则 $f+g = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\chi_{A_i\cap B_j}$

  $$\int_E(f(x)+g(x)dx = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j\cap E))$$

  $$= \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{j=1}^{q} m(A_i\cap B_j\cap E)) + \sum_{j=1}^{q} b_j \sum_{i=1}^{p} m(A_i\cap B_j\cap E))$$

  $$= \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i\cap E) + \sum_{j=1}^{q} b_j m(B_j\cap E)$$

简单可测函数积分的性质2

- 设 f, g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负简单可测函数,

$\int_E (f(x)+g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$.

证明: 设 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i \chi_{A_i}$($A_i$ 两两不交, 并集为全空间), $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{q} b_j \chi_{B_j}$, 则 $f+g = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q}(a_i+b_j)\chi_{A_i\cap B_j}$

$$\int_E (f(x)+g(x)dx = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j\cap E))$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i \sum_{j=1}^{q} m(A_i\cap B_j\cap E)) + \sum_{j=1}^{q} b_j \sum_{i=1}^{p} m(A_i\cap B_j\cap E))$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i m(A_i\cap E) + \sum_{j=1}^{q} b_j m(B_j\cap E)$$

简单可测函数积分的性质3

- 推论: 设 $\mathbb{R}^n$ 非负可测简单函数 f 可表示为 $f(x)=\sum_{i=1}^{p} c_i\chi_{A_j}$, 这里 A_j 不要求两两不交, 并集也不一定是全空间. 则 f 在可测集 E 上的 Lebesgue 积分为

$$\int_E f(x)dx=\sum_{i=1}^{p} c_i m(A_i\cap E).$$

- A, B 不交, $\int_{A\cup B} h(x)dx=\int_A h(x)dx+\int_B h(x)dx$.
- $h(x)\le g(x)$, 则有 $\int_E hdx\le\int_E gdx$.

  证明: $\int_E g(x)dx=\int_E h(x)dx+\int_E(g(x)-h(x))dx$.

简单可测函数积分的性质4

- E_k 是递增集合列, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_k = \lim_{k\to\infty} E_k$, 则有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} h(x)dx = \int_E hdx.$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} h(x)dx &= \sum_{j=1}^{m} a_j \lim_{k\to\infty} m(E_j \cap E_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_j m(E_j \cap E) = \int_E hdx\end{aligned}$$

非负可测函数积分的定义

- 定义: $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数, h 在 E 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)dx = \sup\left\{ \int_E h(x)dx : \ h(x) \text{ 简单, 满足 } h(x) \le f(x)\right\}.$$

若 $\int_E f(x)dx < +\infty$, 则称 f 在 E 上 Lebesgue 可积, E 上 Lebesgue 可积函数的全体记为 $L(E)$.

- 注: 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测简单函数, 显然有

$$\int_E f(x)dx = \sup\left\{ \int_E h(x)dx : \ h(x) \text{ 简单, 满足 } h(x) \le f(x)\right\}.$$

非负函数积分的性质

- 若 E 为零测集, 则有 $\int_E f(x)dx = 0$.
- 若 $A \subset E$, 则有 $\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A dx$.

  证明: $\sup\{\int_A h(x)dx : h(x) \leq f(x)\}$ 等于

  $$\sup\left\{\int_E h(x)\chi_A dx : h(x) \leq f(x)\right\} = \sup\left\{\int_E h(x)dx : h(x) \leq f(x)\chi_A\right\}.$$

- 若 $m(E) < +\infty$, 则 E 上的有界可测函数可积.
- Levi 定理：设非负函数列 f_k 满足 $f_1 \leq f_2 \leq \cdots f_n$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k = f, x \in E$.

  则有 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$.

Levi 定理的证明

- 证明：首先由 $f_k \le f$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k dx \le \int_E f dx$.
  取 $0 < \alpha < 1$, 对任意满足 $0 \le h(x) \le f(x)$ 的简单函数 $h(x)$, 令 $E_k = E(f_k \ge \alpha h(x))$, 则有 E_k 是递增列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} E_k = \cup E_k = E$. 事实上, 对任意 $x \in E$, 若 $f(x) = 0$, 则有 $h(x) = 0$, 显然对任意 k, $x \in E_k$, 从而 $x \in \cup E_k$; 若 $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) > 0$, 则存在 $f_k(x) > \alpha h(x)$, 因此 $x \in E_k \subset \cup E_k$. 我们有

$$\int_E f_k(x)dx \ge \int_{E_k} f_k(x)dx \ge \int_{E_k} \alpha h(x)dx \to \alpha \int_E h(x)dx.$$

  上式中 $\alpha \to 1$, 得 $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx \ge \int_E h(x)dx$.

Levi 定理的推论1

- 若 E_k 是递增集合列, 极限集为 E, 则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

- $f(x,y)$ 是 $E\times(a,b)$ 上定义的非负函数, 对任意固定 $y\in(a,b)$, $f(x,y)$ 关于 x 在 E 上可积; 对固定的 $x\in E$, $f(x,y)$ 关于 y 单调增. 若 $\lim\limits_{y\to b-0} f(x,y)=f(x)$, 则有

$$\lim_{y\to b-0}\int_E f(x,y)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明: 对任意趋向于 b 的递增列 y_n, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f(x,y_n)dx=\int_E f(x)dx$.

非负函数积分的线性性质

- 积分的线性性质：设 $\alpha, \beta \geq 0$, f, g 是非负函数, 则有

$$\int_E (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_E f(x) dx + \beta \int_E g(x) dx.$$

证明：取趋向于 $f(x)$ 的递增简单函数列 ϕ_k, 取趋向于 $g(x)$ 的递增简单函数列ψ_k, 则有递增列 $\alpha\phi_k(x) + \beta\psi_k(x)$ 趋向于 $\alpha f(x) + \beta g(x)$. 由

$$\int_E (\alpha\phi_k(x) + \beta\psi_k(x)) dx = \alpha \int_E \phi_k(x) dx + \beta \int_E \psi_k(x) dx.$$

中 $k \to \infty$ 即得.

- 推论：若 $E = E_1 \cup E_2$(不交), $\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx$.

- 设 E 上的非负可积函数列 f_k 几乎处处收敛到 f, 则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

证明: $g_k(x) = f_1(x) - f_k(x)$ 是 E 上的渐升列.

$$\int_E f_1(x)dx - \int_E f_k(x)dx = \int_E (f_1(x) - f_k(x)) \to \int_E (f_1(x) - f(x))dx$$
$$= \int_E f_1(x)dx - \int_E f(x)dx$$

逐项积分定理

- 逐项积分定理: f_n 是 E 上的非负可测函数列, $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. 则有

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x).$$

证明：令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$, 是递增列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} S_n(x)=f(x)$. 利用积分的线性性质, 由 Levi 定理, 有

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E S_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx.$$

- 推论：若 $E=\cup E_k$ (不交), f 是 E 上的非负可测函数, 则有

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx.$$

非负函数积分的性质1

- 若 $f(x) \le g(x)$, 则有 $\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)dx$.

  证明：$g(x) = f(x) + (g(x) - f(x))$. 两边积分即得.

- 若 $f(x), g(x)$ 非负, 若 f 与 g 几乎处处相等, 则有

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

  证明：$E_1 = E(f \ne g)$, $E_2 = E \backslash E_1$.

非负函数积分的性质2

- 若 $\int_E f(x)dx < +\infty$, 则有 f 几乎处处有限.

  证明：令 $E_k = \{x \in E : f(x) > k\}$, 则有 $km(E_k) \le \int_E f(x)dx$, 从而 $m(E_k) \to 0$, $E(f = +\infty) = \cap E_k$是零测集.

- 若 $\int_E f(x)dx = 0$, 则有 $f(x) = 0, a.e.x \in E$.

  证明: 令 $E_k = E(f \ge \frac{1}{k})$, 则有

$$0 = \int_E f(x)dx \ge \int_{E_k} f(x)dx \ge \frac{1}{k} m(E_k),$$

故 E_k 都是零测集, $E(f > 0) = \cup E_k$ 也是零测集.

Fatou 引理

- 定理：设 $f_n(x)$ 是 E 上的非负可积函数列，有

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

证明：定义 $g_k(x) = \inf\{f_j(x) : j \ge k\}$，则 g_k 是递增函数列，$g_k(x) \le f_k(x)$，且 $\lim_{k\to\infty} g_k = \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)$. 由 Levi 定理，

$$\int_E \varliminf_{k\to\infty} f_k(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_E g_k(x)dx \le \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx$$

- 例：$f_n(x) = n\chi_{(0,\frac{1}{n})} \to f(x) \equiv 0$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \varliminf_{k\to\infty} f_n(x)dx < \varliminf_{k\to\infty} \int_E f_n(x)dx = 1.$$

例

- 设 $f(x)$ 是集合 E 上非负可测函数，$m(E) < \infty$，在 $[0, +\infty)$ 做分划 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots$，$y_{k+1} - y_k < \delta$,令 $E_k = \{x \in E : y_k \leq f(x) \leq y_{k+1}\}$，则 f 可积 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) < +\infty$. 且

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} y_k m(E_k) = \int_E f(x) dx.$$

证明: $y_k m(E_k) \leq \int_{E_k} f(x) dx \leq y_{k+1} m(E_k) \leq \delta m(E_k) + y_k m(E_k)$.

一般可测函数积分的定义

- 设 f 是 E 上可测函数,

$$f^{+}(x)=\max\{f(x),0\},\quad f^{-}(x)=\max\{-f(x),0\},$$

是非负可测函数, 且 $f=f^{+}-f^{-}, |f|=f^{+}+f^{-}$.

- 定义：f 是 E 上可测函数, 若 f^{+}, f^{-} 至少有一个可积, 则可定义 f 在 E 上的积分

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^{+}(x)dx-\int_E f^{-}(x)dx.$$

若 f^{+}, f^{-} 都可积, 则称 f 在 E 上可积, 记为 $f\in L(E)$.

一般可测函数积分的性质1

- 定理：f 可积，对任意 $\epsilon > 0$，则存在简单函数 $\phi_k(x)$ 满足 $|\phi_k(x)| \leq |f(x)|$，且有
$$\Big|\int_E |f(x) - \phi(x)| dx < \epsilon.$$
- 定理：f 可积的充分必要条件是 $|f|$ 可积．且 f 可积时，有
$$\Big|\int_E f(x) dx\Big| \leq \int_E |f|(x) dx.$$

证明：$f \in L(E) \Leftrightarrow f^+, f^- \in L(E) \Leftrightarrow |f| = f^+ + f^- \in L(E)$，又
$$\int_E f(x) dx \leq \int_E f^+(x) dx \leq \int_E |f|(x) dx,$$
$$-\int_E f(x) dx \leq \int_E f^-(x) dx \leq \int_E |f|(x) dx.$$

一般可测函数积分的性质2

- 有界集上的有界可测函数可积, 可积函数与有界函数的乘积函数可积.
- 可积函数几乎处处有限; 几乎处处为零的函数积分为零.
- 若 $f(x) = g(x), a.e. x \in E$, 则 f, g 的可积性相同, 且可积时积分相等.
- 若 g 可积, 且 $|f| \le g$, 则有 f 可积, 且

$$\Big|\int_E f(x)dx\Big| \le \int_E g(x)dx.$$

一般可测函数积分的性质2

- 有界集上的有界可测函数可积，可积函数与有界函数的乘积函数可积.
- 可积函数几乎处处有限；几乎处处为零的函数积分为零.
- 若 $f(x) = g(x), a.e. x \in E$, 则 f, g 的可积性相同，且可积时积分相等.
- 若 g 可积，且 $|f| \leq g$, 则有 f 可积，且

$$\left| \int_E f(x)dx \right| \leq \int_E g(x)dx.$$

一般可测函数积分的性质3

- 若 $f, g \in L(E)$, $f(x) \leq g(x)$, 则有 $\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)(x)dx$.

  证明：$f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$, 因此 $f^+ + g^- \leq f^- + g^+$, 两边积分即得$\int_E f^+dx + \int_E g^-dx \leq \int_E f^-dx + \int_E g^+dx$. 移项即可得.

- 若 $f \in L(E)$, 则有 $|f(x)| < +\infty$, $a.e.x \in E$.

- 若 $m(E) < +\infty$, 则 E 上的有界可测函数可积.

- 若 $f \in L(E)$, $A \subset E$, 则 $f \in L(A)$, 且 $\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx$.

一般可测函数积分的性质3

- 若 $f, g \in L(E)$, $f(x) \leq g(x)$, 则有 $\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)(x)dx$.

  证明：$f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$, 因此 $f^+ + g^- \leq f^- + g^+$, 两边积分即得 $\int_E f^+ dx + \int_E g^- dx \leq \int_E f^- dx + \int_E g^+ dx$. 移项即可得.
- 若 $f \in L(E)$, 则有 $|f(x)| < +\infty$, $a.e. x \in E$.
- 若 $m(E) < +\infty$, 则 E 上的有界可测函数可积.
- 若 $f \in L(E)$, $A \subset E$, 则 $f \in L(A)$, 且 $\int_A f(x)dx = \int_E f(x)\chi_A(x)dx$.

一般可测函数积分的性质4

- 若 $f, g \in L(E)$, $f(x) \le g(x)$, 则有 $\int_E f(x)dx \le \int_E g(x)(x)dx$.
- 若 E_k 是递增集合列, 极限集为 E. 若 $f \in L(E)$, 则有 $f \in L(E_k)$, 且

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$

证明: $f = f^+ - f^-$, $\int_E f(x)^{\pm}dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f^{\pm}(x)dx$.

- $f \in L(E)$, $E_n = \{x \in E : |x| \ge n\}$, $\lim \int_{E_n} f(x)dx = 0$.

证明: $\int_{E_n} f(x)dx = \int_E f(x)dx - \int_{\{x\in E:|x|<n\}} f(x)dx$, $\{x \in E : |x| < n\}$ 是递增列, 极限集为 E.

一般可测函数积分的性质5

- 定理：$f, g \in L(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 则有 $\alpha f \in L(E)$, 且有

$$\int_E \alpha f(x)dx = \alpha \int_E f(x)dx.$$

证明：$\alpha < 0$ 时, $(\alpha f)^+ - (\alpha f)^- = (-\alpha)f^- - (-\alpha)f^+$ 两边积分得第一个等式.

$$\begin{aligned}\int_E \alpha f(x)dx &= \int_E (-\alpha)f^-(x)dx - \int_E (-\alpha)f^+(x)dx \\ &= \alpha\left(\int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx\right) = \alpha \int_E f(x)dx.\end{aligned}$$

一般可测函数积分的性质6

- 定理：$f, g \in L(E)$, 则有 $f+g \in L(E)$, 且有

$$\int_E (f(x)+g(x))dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

证明：$(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ + g^+ - f^- - g^-$, 从而有 $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$, 两边积分得

$$\begin{aligned} &\int_E (f+g)^+ dx + \int_E f^- dx + \int_E g^- dx \\ = &\int_E (f+g)^- dx + \int_E f^+ dx + \int_E g^+ dx, \end{aligned}$$

移项即得要证的等式.

积分对区域的可加性

- 推论：$E=E_1\cup E_2$(不交并)，$\int_E f(x)dx=\int_{E_1} f(x)dx+\int_{E_2} f(x)dx$.
- 若 E_k 是两两不交的可测集，$E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)dx.$$

证明：$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx$。

例

- 若 $|f(x)|\ln(1+|f(x)|)\in L([0,1])$, 则有 $|f(x)|\in L([0,1])$,
  证明: 设 $E_1=\{x\in[0,1]:|f(x)|\le e-1\}$, $E_2=\{x\in[0,1]:|f(x)|>e-1\}$,
$$\int_{[0,1]}|f(x)|dx\le\int_{E_1}|f(x)|dx+\int_{E_2}|f(x)|(\ln(1+|f(x)|))dx$$
- (下)凸函数: 若 $\phi(x)$ 是 $[a,b]$ (可以是无穷区间)上的(下)凸函数, $a_i>0(1\le i\le n)$ 满足 $\sum_{i=1}^n a_i=1$, 则有
$$\phi(\sum_{i=1}^n a_ix_i)\le\sum_{i=1}^n a_i\phi(x_i).$$

- Jensen不等式: 设 $w(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的正值可测函数, 且 $\int_E w(x)dx=1$. $\phi(x)$ 是 $I=[a,b]$ 上的(下)凸函数, $f(x)$ 在 E 上可测, 且值域 $R(f)\subset I$, 若 $fw\in L(E)$, 则

$$\phi(\int_E f(x)w(x)dx)\le\int_E \phi(f(x))w(x)dx.$$

证明: 令 $y_0=\int_E f(x)w(x)dx$, 若 y_0 不是 I 的端点, 存在 k (只要取 k 在 y_0 的左右导数之间), 使得 $\phi(y)\ge\phi(y_0)+k(y-y_0)$, 则有

$$\phi(f(x))\ge\phi(y_0)+k(f(x)-y_0)$$

两边乘以 $w(x)$ 再积分即得. 若 $y_0=b$, $\int_E(b-f(x))w(x)dx=0$, $b=f(x)$,a,e $x\in E$.

例1

- 设 $f \in L([a,b])$, 若对任意 $c \in [a,b]$, 有 $\int_{[a,c]} f(x)dx = 0$, 则有$f(x) = 0$, a.e. $x \in [a,b]$.

  证明: 由条件, f在任意区间上的积分为零. 反设存在正测集 $E \subset [a,b]$, 使得在 E 上$f(x) > 0$, 做正测集 $F \subset E$, 则 f 在 F 上的积分大于0, 则在 $G = (a,b) \backslash F = \bigcup(a_n, b_n)$上的积分小于零, 则 f 必在某个区间 $[a_n, b_n]$ 上积分小于0, 矛盾.

例2

- 设 $g(x)$ 是 E 上的可测函数, 若对任意的 $f\in L(E)$, 都有 $f\cdot g\in L(E)$, 证明存在零测集 $Z\subset E$, 使得f 在 $E\backslash Z$ 上有界.

  证明: 反设存在自然数的子列 k_i,使得集合 $E_i=\{x\in E: k_i\leq f(x)<k_{i+1}\}$ 都是正测集. 做函数

$$f(x)=\sum i^{-1-1/2}(m(E_i))^{-1}\mathrm{sign}\,(g(x))\chi_{E_i}(x)$$

  则有$f\in L(E)$, 但是

$$\int_E f(x)g(x)dx\geq\sum\frac{k_i}{i^{1+1/2}m(E_i)}m(E_i)=\infty$$

积分的绝对连续性

- 定理：若 $f \in L(E)$, 则对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $A \subset E$ 满足 $m(A) < \delta$ 时, $|\int_A f(x)dx| \leq \int_A |f|(x)dx < \epsilon$.

  证明：令 $E_n = \{x \in E : |f(x)| \leq n\}$, 则 E_n 是递增集合列, 其极限集为 $E_0 = E(|f| < +\infty)$, 由 f 几乎处处有限, 从而 $E \backslash E_0$ 是零测集. 因此有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} |f(x)|dx = \int_{E_0} |f(x)|dx = \int_E |f(x)|dx.$$

  取 N, 使得 $\int_{E\backslash E_N} |f(x)|dx = \int_E |f(x)|dx - \int_{E_N} |f(x)|dx < \frac{\epsilon}{2}$, 再取 $\delta = \frac{\epsilon}{2N}$, 则当 $m(A) < \delta$ 时,

$$\int_A |f(x)|dx \leq \int_{A\cap E_n} |f(x)|dx + \int_{E\backslash E_N} |f(x)|dx < \epsilon.$$

- 也可先用简单函数逼近, 再利用简单函数有界.

积分的平移不变性

- 定理：若 $f \in L(\mathbb{R}^n)$，则对任意 $y \in \mathbb{R}^n$，$f(\cdot + y) \in L(\mathbb{R}^n)$. 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

证明：$f = \chi_E$ 时，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x+y)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E-y}(x)dx = m(E)$$

因此当 f 是简单函数时，结论成立.

当 f 是非负可测函数时，取非负简单递增函数列 ϕ_k，使得 $\lim \phi_k(x) = f(x)$，则有 $\lim \phi_k(x+y) = f(x+y)$，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k(x+y)dx,$$

上面等式中令 k 趋向 $+\infty$，由 Levi 定理即得.

控制收敛定理

- 定理：设 $f_n(x)$ 是 E 上的可积函数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x), a.e.x\in E$，且存在可积函数 $F\in L(E)$，使得 $|f_n(x)|\le F(x), a, e, x\in E, \forall n$. 则有 $f\in L(E)$，且
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$
- 例：$f_n(x)=n\chi_{(0,\frac{1}{n})}$，没有可积的控制函数，
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\ne\int_E f(x)dx.$$

控制收敛定理的证明1

- 定理证明：由 $F(x)-f_n(x)\geq 0$，利用 Fatou 引理，

$$\int_E (F(x)-f(x))dx = \int_E \lim_{n\to\infty}(F(x)-f_n(x))dx$$
$$\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E (F(x)-f_n(x))dx = \int_E F(x)dx - \overline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx,$$

由此得 $\int_E f(x))dx \geq \overline{\lim}\int_E f_n(x)dx$. 又由 $F(x)+f_n(x)\geq 0$,

$$\int_E (F(x)+f(x))dx = \int_E \lim_{n\to\infty}(F(x)+f_n(x))dx$$
$$\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E (F(x)+f_n(x))dx = \int_E F(x)dx + \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

控制收敛定理的证明2

- 定理证明(续): 得 $\int_E f(x))dx \le \underline{\lim} \int_E f_n(x)dx$, 从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)dx = \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x))dx.$$

- 另一证明: 令 $E_N = E \cap \{x : \|x\| \le N\}$, $E_\delta \subset E_N$ 使得 $m(E_N \backslash E_\delta) < \delta$, 且在 E_δ 上 $f_n \Longrightarrow f$.

$$\int_E |f - f_n|dx \le \int_{E_\delta} |f - f_n|dx + \int_{E_N \backslash E_\delta} 2F(x)dx + \int_{E \backslash E_N} 2F(x)dx.$$

依测度收敛的控制收敛定理

- 定理：设 $f_n(x)$ 是 E 上的可积函数列，$f_n(x)$ 依测度收敛到 $f(x)$，且存在可积函数 $F \in L(E)$，使得对任意 n，$|f_n(x)| \le F(x)$，$a,e,x \in E$. 则有 $f_n, f \in L(E)$，且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

- 证明：反设存在 ϵ_0，存在子列 f_{n_k}，使得

$$\left|\int_E f_{n_k}(x)dx - \int_E f(x)dx\right| > \epsilon_0. \tag{1}$$

则由 $f_{n_k} \xrightarrow{m} f$，又存在子列 $f_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.e.} f$. 由控制收敛定理，$\int_E f_{n_{k_j}}(x)dx \to \int_E f(x)dx$，这与(1)式矛盾.

- 另一证明:(1) f 可积, 因为存在子列 $f_{k_i} \to f(x)$, a.e. $|f_{k_i}| \le F(x)$. 因此 $|f(x)| \le F(x)$.

  (2) $E_N = E \cap \{x \in E : \|x\| \le N\}$, $E_k = \{x \in E : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}$.

$$\int_E |f - f_k| dx \le \int_{E_N \setminus E_k} |f - f_n| dx + \int_{E_k} 2F(x) dx + \int_{E \setminus E_N} 2F(x) dx.$$

- 推论：若 $m(E) < +\infty$, 存在 M, 使得 $|f_n(x)| \le M$, $\forall n, x \in E$. 若 $f_n \xrightarrow{m} f$, 或者 $f_{n_k} \xrightarrow{m} f$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

注

- 注：若 $f_k(x)$ 非负可积，$f_k(x)$ 依测度收敛到可积函数 $f(x)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E |f_k(x)-f(x)|dx = 0$.
证明：记 $m_k(x) = \min\{f_k(x), f(x)\}$. $M_k(x) = \min\{f_k(x), f(x)\}$, $m_k(x)+M_k(x) = f(x)+f_k(x)$, $\{x\in E : f(x)-m_k(x) > \sigma\} \subset \{x \in E : |f(x)-f_k(x)| > \sigma\}$，因此 $m_k(x)$ 依测度收敛到 $f(x)$. 且 $m_k(x) \leq f(x)$，因此$\lim_{n\to\infty}\int_E m_k(x)dx = \int_E f(x)dx$. M_k 也有类似结论. $|f_k(x)-f(x)| = M_k(x) = m_k(x)$.

控制收敛定理的应用1

- 例：$f_n(x) = e^{-x}\cos x \frac{\ln(x+n)}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

  解：对任意 $x \geq 0$，$f_n(x) \to 0$，又有

$$|f_n(x)| \leq e^{-x}\frac{\ln(x+n)}{n+x}\frac{n+x}{n} \leq Ce^{-x}(1+x) \in L[0,+\infty).$$

  由控制收敛定理，所求极限为0.

- 注：若利用含参变量广义积分，要验证 $[0,A]$ 上 f_n 一致收敛，还要验证 $A \to +\infty$ 时，$\int_A^{+\infty} f_n(x)dx$ 一致收敛到 0.

控制收敛定理的应用2

- 例：$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+(nx)^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.
- 解：对任意 $x \in [0,1]$, $f_n(x) \to 0$, 又有

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{(nx)^{\frac{3}{2}}}{1+(nx)^2} \le M\frac{1}{\sqrt{x}} \in L[0,1].$$

由控制收敛定理, 所求极限为 0.

- 注: $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\sqrt{n}}{2}$, f_n 不是一致收敛到0.

逐项积分定理

- 利用 Levi 定理我们已经证明：若 f_n 是 E 上的非负可测函数列，$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. 则有

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

- 逐项积分定理：f_n 是 E 上的可积函数列，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_E |f_k(x)|dx < +\infty.$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛．设和函数为 $f(x)$，则有 $f \in L(E)$，

$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx.$$

- 证明：令 $F(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$, 则有

$$\int_E F(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E |f_k(x)|dx<+\infty.$$

因此 $F\in L(E)$, 从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上几乎处处收敛，且 $|f(x)|\leq F(x)$. 令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 则有 $|S_n(x)|\leq F(x)$, $a.e.$. 由控制收敛定理，

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E\sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k(x)dx.$$

逐项积分定理的推论

- 推论：若 $E = \bigcup E_k$(不交), $f \in L(E)$, 则有 $f \in L(E_k)$, 且有
$$\int_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)dx.$$
- 例：$f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})} - (n+1)\chi_{(0,\frac{1}{n+1})}$, 则有 $\sum_{k=1}^{\infty} f_n = \chi_{(0,1)}$. 但是
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)dx = 0 \neq \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)dx = 1.$$
这里 f_n 不满足定理要求, 因为
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n|dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = +\infty.$$

例

- $f \in L([0,+\infty))$, 则有$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0$, a.e. $z \in \mathbb{R}$.

  证明:

$$\int_{[0,1]} \sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f(x+n)|dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n,n+1]} |f(x)|dx = \int_{[0,+\infty)} |f(x)|dx$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} |f(x+n)|$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处有限.

- 含参变量积分：设 $f(x,y)$ 是 $E\times[a,b]$ 上定义的函数，对任意固定 $y\in[a,b]$，关于 x 可积．定义 $\phi(y)=\int_E f(x,y)dx$.
- 对 $y_0\in[a,b]$，若存在可积函数 $F(x)$ 使得 $|f(x,y)|\le F(x)$，且极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 对 $a.e.x\in E$ 存在，则有

$$\lim_{y\to y_0}\phi(y)=\int_E \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

证明：对任意 $[a,b]\ni y_n\to y_0$，由控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}\phi(y_n)=\int_E\lim_{n\to\infty}f(x,y_n)dx=\int_E\lim_{y\to y_0}f(x,y)dx.$$

- 若存在可积函数 $F(x)$，使得 $|f(x,y)|\le F(x)$，且 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=f(x,y_0)$，$a.e.x\in E$，则有 $\phi(y)$ 在 $y=y_0$ 处连续．

含参变量积分的导数

- 若 $f_y(x,y)$ 存在，且存在可积函数 $F(x)$，使得 $|f_y(x,y)| \le F(x)$，则有 $\phi(y)$ 在 $y = y_0$ 处可导，且 $\phi'(y) = \int_E f_y(x,y)dx$.

  证明：利用中值定理，

$$\left|\frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\right| = |f_y(x, y+\theta\Delta)| \le F(x),$$

  利用控制收敛定理，

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\phi(y+\Delta y) - \phi(y)}{\Delta y} dx = \lim_{\Delta y \to 0} \int_E \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} dx$$
$$= \int_E \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} dx = \int_E f_y(x,y)dx.$$

- 例：设 $f(x), xf(x) \in L(\mathbb{R})$, $\phi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\arctan(xy)dx$, $y \in \mathbb{R}$. 讨论 ϕ 的连续性和可微性.
- 解：设 $f(x,y) = f(x)\arctan(xy)$, 则有 $|f(x,y)| \leq \frac{\pi}{2}|f(x)| \in L(\mathbb{R})$, 又 $f(x,y)$ 关于 y 连续, 因此 ϕ 连续. 又因为

$$|f_y(x,y)| = |f(x)|\frac{x}{1+(xy)^2} \leq |xf(x)| \in L(\mathbb{R}),$$

故 ϕ 可微.

紧支连续函数的稠密性

- 定义：设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数，若 $\{x : f(x) \neq 0\}$ 是一个有界集，则称 f 有紧支集. $\mathbb{R}^n$ 上有紧支集的连续函数的全体记为 $C_c(\mathbb{R}^n)$.
- 定理：若 $f \in L(E)$. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\int_E |f(x) - g(x)| dx < \epsilon.$$

- 推论: $f \in L(E)$, 对任意 $\epsilon > 0$, g 可分解为 $f(x) = g(x) + h(x)$, 其中 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\int_E |h(x)| dx < \epsilon$.

紧支连续函数稠密性的证明1

- 利用积分的定义，存在非负简单函数 ϕ_1, ϕ_2，使得 $\int_E |f^+(x) - \phi_1(x)|dx < \frac{\epsilon}{6}$，$\int_E |f^-(x) - \phi_1(x)|dx < \frac{\epsilon}{6}$，令 $\phi = \phi_1 - \phi_2$，则有
$$\int_E |f(x) - \phi(x)|dx < \frac{\epsilon}{3}.$$
- 令 $\phi_n = \phi\chi_{|x|\le n}$，则 $|\phi_n|$ 单调递增趋向于 $|\phi|$，由 Levi 定理
$$\int_E |\phi(x) - \phi_n(x)|dx = \int_E |\phi(x)|dx - \int_E |\phi_n(x)|dx \to 0.$$
取 N 足够大，紧支简单函数 $\psi = \phi\chi_{|x|\le N}$ 满足
$$\int_E |\phi(x) - \psi(x)|dx < \frac{\epsilon}{3}.$$

紧支连续函数的稠密性的证明2

- 设 $|\psi| \le M$, 把 ψ 限制到一个闭集 $F \subset E$ 上, 使得 $m(E \backslash F) \le \frac{\epsilon}{6M}$, 取 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 为 $\psi|_F$ 的延拓,且上界不变(事实上, 若 $h \in C(\mathbb{R}^n)$ 为 $\psi|_F$ 的延拓, 作 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $\omega(x)$, 使得当 $|x| \le N$ 是 $\omega(x) = 1$, 当 $|x| \ge N+1$ 是 $\omega(x) = 0$, 且 $0 \le \omega(x) \le 1$ 对所有 x 成立. 则 $g(x) = h(x)\omega(x) \in C_c(\mathbb{R}^n)$ 为 $\psi|_F$ 的延拓). 则

$$\int_E |\psi(x) - g(x)| dx = \int_{E \backslash F} |\psi(x) - g(x)| dx < 2M \cdot \frac{\epsilon}{6M} < \frac{\epsilon}{3}.$$

- 因此, 上面的 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 满足

$$\int_E |f(x) - g(x)| dx < \epsilon.$$

- 定理：设 $f \in L(E)$，存在 $g_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得
  1. $\int_E |f(x) - g_k(x)| dx = 0$.
  2. g_k 在 E 上几乎处处收敛到 f.
- 证明：存在函数列 $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$，使得 $\int_E |f(x) - k_k(x)| dx \le \frac{1}{k}$. 则对任意的 $\epsilon > 0$，

$$\epsilon \cdot m(E(|f - f_k| \ge \epsilon)) \le \int_E |f(x) - f_k(x)| dx \to 0,$$

因此 f_k 依测度收敛到 f，则存在子列 f_{k_n} 几乎处处收敛到 f. 取 $g_n = f_{k_n}$ 即可.

- 定理：设 $f \in L(E)$, 存在紧支阶梯函数列 ϕ_k, 使得

  (1) ϕ_k 在 E 上几乎处处收敛到 f.

  (2) $\int_E |f(x) - \phi_k(x)|dx = 0$.

  证明: 存在 $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\|f - g\| < \epsilon$, 设 f 的支集包含在方体 $I = \{x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : |\xi_i| \leq k_0\}$ 中, 把 I 的边长等分, 每次取出振幅小于 $\epsilon/|I|$ 的方体 I_i, f 在 I_i 中某一点的值为 c_i, 由一致收敛, 有限步可完成. 则 $\phi = \sum c_i \chi_{I_i}$ 满足 $|f - \phi| < \epsilon/|I|$.因此$\|g - \phi\| < \epsilon$.

- 定理：设 $f \in L([a,b])$，若对任意 $\phi \in C_c^1((a,b))$，有

$$\int_{[a,b]} f(x)\phi'(x)|dx = 0,$$

则有 $f(x) = 0$, a,e, $x \in [a,b]$.

证明：任取 $g \in C_c((a,b))$，$h(x)$ 支于 (a,b) 满足 $\|h\|_1 = 1$，

$$\phi(x) = \int_{[a,x]} g(t)dt - \int_{[a,x]} h(t)dt \cdot \int_{[a,b]} g(t)dt,$$

则 $\operatorname{supp}\phi \subset (a,b)$，$\phi'(x) = g(x) - h(x)\int_{[a,b]} g(t)dt$，

$$0 = \int_{[a,b]} f(x)\phi'(x)dx = \int_{[a,b]} (f(x) - \int_{[a,b]} f(t)h(t)dt)g(x)dx.$$

因此 $f(x) - \int_{[a,b]} f(t)h(t)dt$, a.e. $x \in [a,b]$.

- 定理：设 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\lim_{|h|\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

证明: 任给 $\epsilon > 0$, 存在分解 $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\|f_2\|_1 < \epsilon$, 当 $|h| < 1$ 时, $|f_1(x+h) - f_1(x)|$ 的支集包含在某个有界集 F 上, 存在 $\delta > 0$. 使得 $|h| < \delta$ 时 $|f_1(x+h) - f_1(x)| < \frac{\epsilon}{m(F)}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \int_F |f_1(x+h) - f_1(x)| dx + 2\epsilon$$

- 定理：若 $g_k(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数列，且满足(1) $|g_n| \le M$ (2) 对任意 $c \in [a,b]$, $\lim \int_{[a,c]} g_n(x)dx = 0$.
  则对任意 $f \in L([a,b])$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f(x)g_n(x)dx = 0$$

证明: 对任给 $\epsilon > 0$,存在阶梯函数 $\phi(x) = \sum_{i=1}^{p} y_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)$, 使得 $\|f-\phi\| < \frac{\epsilon}{2M}$,

$$\int_{[x_{i-1},x_i]} g_n(x)dx = \int_{[a,x_i]} g_n(x)dx - \int_{[a,x_{i-1}]} g_n(x)dx \to 0.$$

$$\left|\int_{[a,b]} f(x)g_n(x)dx\right| \le \left|\int_{[a,b]} (f(x)-\phi(x))g_n(x)dx\right| + \left|\int_{[a,b]} \phi(x)g_n(x)dx\right|$$

- 定理：f 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数（有界），则 $f \in L([a,b])$，且 $\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

  证明: 设 f 是 $[a,b]$ 上的 Riemann 可积函数, 考虑 $[a,b]$ 的一列划分

$$\Delta_n : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{i_n}^{(n)} = b,$$

  满足$\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$, $|\Delta_n| = \max\limits_{1 \le i \le i_n} \{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\} \to 0$. 取

$$M_i^{(n)} = \sup\{f(x) | x_{i-1}^{(n)} \le x \le x_i^{(n)}\},$$
$$m_i^{(n)} = \inf\{f(x) | x_{i-1}^{(n)} \le x \le x_i^{(n)}\}.$$

- 定理证明(续): 定义函数列:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} m_i^{(n)}, & x_{i-1}^{(n)} < x \le x_i^{(n)} \\ f(a), & x = a \end{cases}, \psi_n(x) = \begin{cases} M_i^{(n)}, & x_{i-1}^{(n)} < x \le x_i^{(n)} \\ f(a), & x = a \end{cases}$$

则有 $\phi_n(x)$ 递增趋向于某个函数 f_1, 而 $\psi_n(x)$ 递减趋向于某个函数 f_2. 则 $f_2 \ge f \ge f_1$. 由于 f 是 Riemann 可积, Darboux 上下积分

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{i_n} M_j^{(n)}(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{i_n} m_j^{(n)}(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

- 证明(续): 因此

$$\int_{[a,b]}(f_2 - f_1)dx \leq \int_{[a,b]}(\psi_n - \phi_n)dx \to 0,$$

$f_1 = f_2 = f$, a.e.$x \in [a,b]$, 从而 f 可测, 且

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \geq \lim_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{[a,b]} f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

因此 $\int_{[a,b]} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

- 推论：若对任意的 $A > a$, $f \in R([a, A])$, 则 $f \in L([a, +\infty))$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A |f(x)|dx$ 存在(即广义积分 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛). 且收敛时 $\int_{[a,+\infty)} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx$.
  证明: $f \in L([a, +\infty)) \iff |f| \in L([a, +\infty)) \iff \lim\limits_{A \to +\infty} \int_a^A |f(x)|dx$ 存在.

$$\int_{[a,+\infty)} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_{[a,n]} f(x)dx$$
$$= \lim_{n \to \infty} \int_a^n f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Riemann 积分和 Lebesgue 积分5

- 推论：若 b 是 f 的瑕点，对任意的 $b-a>\epsilon>0$，$f\in R([a,b-\epsilon])$，且 $\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\int_a^{b-\epsilon}|f(x)|dx$ 存在，则 $f\in L([a,b]$，且

$$\int_{[a,b]} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

- 例：$\frac{\sin x}{x}\notin L[0,+\infty)$，但广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 存在.
- 证明：广义积分 $\int_0^{+\infty}|\frac{\sin x}{x}|dx=+\infty$.

振幅函数1

- 振幅函数: 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数, f 在 $[a,b]$ 上的振幅函数定义为

$$\omega_f(x)=\lim_{\delta\to 0}\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x,\delta)\cap[a,b]\}.$$

- 注：设 $f_\delta(x)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:x',x''\in B(x,\delta)\cap[a,b]\}$, 则 $f_\delta(x)$ 关于 δ 递减.
- 引理: 对于任意的 $t\in\mathbb{R}$, $\{x\in(a,b):w_f(x)<t\}$ 是开集.
- 定理: ω_f 是 $[a,b]$上的可测函数.
- 性质: f 在 x 点连续 $\iff$ $\omega_f(x)=0$.

振幅函数2

- 引理的证明: 对于任意的 $t \in \mathbb{R}$, 设 $H = \{x : w_f(x) < t\}$. 设 $x_0 \in H$, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得 $B(x_0, \delta_0) \subset (a, b)$, 且有

$$\sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B(x_0, \delta_0) \cap [a, b]\} < t.$$

对任意 $x \in B(x_0, \delta_0)$, 可取 $\delta_1 > 0$, 使得 $B(x, \delta_1) \subset B(x_0, \delta_0)$, 且有

$$\sup\{|f(x') - f(x'')| : x', x'' \in B(x, \delta_1) \cap [a, b]\} < t.$$

因此 $B(x, \delta_1) \subset H$.

- 考虑 $[a,b]$ 的一列划分

$$\Delta_n : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{i_n}^{(n)} = b,$$

满足 $|\Delta_n| = \max\limits_{1 \le i \le i_n} \{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}\} \to 0$. 取

$$M_i^{(n)} = \sup\{f(x) | x_{i-1}^{(n)} \le x \le x_i^{(n)}\},$$
$$m_i^{(n)} = \inf\{f(x) | x_{i-1}^{(n)} \le x \le x_i^{(n)}\}.$$

定义函数列:

$$\omega_n(x) = \begin{cases} M_i^{(n)} - m_i^{(n)}, & x_{i-1}^{(n)} < x < x_i^{(n)} \\ 0, & x \text{ 是 } \Delta^{(n)} \text{ 的分点.} \end{cases}.$$

- 性质: $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)=\omega_f(x)$, $a.e.x\in[a,b]$

  证明: 当 $x\in[a,b]$ 不是 Δ_n 的分点时, 取 δ_1 为 x 到 $\Delta^{(n)}$ 分点的最小距离, $\delta_2=|\Delta^{(n)}|$, 则当 $n\to\infty$ 时有 $\delta_1\to 0$, $\delta_2\to 0$. 由 $f_{\delta_1}(x)\le\omega_n(x)\le f_{\delta_2}(x)$ 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\omega_n(x)=\omega_f(x)$.

- Darboux 上下积分:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i_n}M_j^{(n)}(x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)}),$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{i_n}m_j^{(n)}(x_j^{(n)}-x_{j-1}^{(n)}).$$

振幅函数和 Darboux 上下积分3

- 引理: 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数, 则有

$$\int_{[a,b]} \omega_f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

证明: 利用控制收敛定理,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i_n} (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \omega_n(x)dx = \int_{[a,b]} \omega_f(x)dx$$

- 定理：f 是 $[a,b]$ 上的有界函数，则 f 是 Riemann 可积 $\iff$ f 在 $[a,b]$ 上的不连续点集是零测集.

  证明: f 是 Riemann 可积 $\iff$ $\overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 \iff \int_{[a,b]} \omega_f(x)dx = 0 \iff \omega_f(x) = 0, a.e. x \in [a,b] \iff f(x)$ 几乎处处连续.

- 例：$f = \chi_{\mathbb{Q}}$ 在任意区间上不是 Riemann 可积；$[a,b]$ 上的单调函数可积.

Tonelli 定理

记号：$\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$, $n = p + q$, $F_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$.

定理：设 $f(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数. 则有

- 对 $a.e. x \in \mathbb{R}^p$, $f(x, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}^q$ 上的非负可测函数.
- 对 $a.e. x \in \mathbb{R}^p$, $F_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy$ 有定义, 且 $F_f(x)$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的非负可测函数.
- 重积分等于累次积分, 即

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} F_f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy.$$

Tonelli 定理的证明1

只需对 $f=\chi_E$ 证明, 其中 E 可测. 我们设 $p=q=1$.

- $E=[a,b)\times[c,d)$, 则有 $F_f(x)=(d-c)\chi_{[a,b)}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy=m(E)=(d-c)(b-a)=\int_{\mathbb{R}} F_f(x)dx.$$

- E 是开集, 则有 $E=\bigcup[a_n,b_n)\times[c_n,d_n)$, 令 $f_n=\chi_{[a_n,b_n)\times[c_n,d_n)}$, 则有 $f=\sum f_n$, 对 y 积分, 由非负函数逐项积分定理, $F_f=\sum F_{f_n}$, 且

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} F_f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}} F_{f_n}(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

Tonelli 定理的证明2

- E 是 G_δ 集, 若 $m(E) < +\infty$, 则有测度有限的递减开集列 $G_n \to E$, 令 $f_n = \chi_{G_n}$, 则 f_n 单调递减趋向于 f. 由于 $\int_{\mathbb{R}} F_{f_1}(x)dx < +\infty$, $F_{f_1} = \int_{\mathbb{R}} f_1(x,y)dy$ 几乎处处有限. 由 Levi 定理的推论, F_{f_n} 单调递减趋向于 F_f, 且

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} F_f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} F_{f_n}(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} f_n(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy.\end{aligned}$$

若 E 为满足 $m(E) = +\infty$, 令 $E_n = E \cap B\big((0,0),n\big)$, 则 E_n 是测度有限的递增 G_δ 集合列, 且 $E_n \to E$, 由 Levi 定理, F_{f_n} 单调递增收敛到 F_f.

Tonelli 定理的证明3

- E 为零测集, 存在测度有限递减开集列 $G_k \supset E$, 使得 $m(G_k) \to 0$. 令 $H = \bigcap G_k$, $g = \chi_H$. 则有

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} F_g(x)dx$$

因此 $F_g = 0, a.e.$, 又因 $f \le g = \chi_H$, $F_f(x) \le F_g(x)$, 因此 $F_f = 0, a.e.$, 从而 $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}} F_f(x)dx = 0$.

- E 为可测集且测度, 则存在 G_δ 集 G 和零测集 Z, 使得 $E = G \backslash Z$. 设 $g = \chi_G$, $h = \chi_Z$, 则 $f = g - h$, $F_f = F_g - F_h$(这里 h, F_h 几乎处处为零).

Fubini 定理

定理：设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 上的可积函数. 则有

- 对 $a.e. x \in \mathbb{R}^p$, $f(x,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可积函数.
- 对 $a.e. x \in \mathbb{R}^p$, $F_f(x) = \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy$ 有定义, 且 $F_f(x)$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的可积函数.
- 重积分等于累次积分, 即

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^p} F_f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^p} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy$$

证明：$f(x,y) = f^+(x,y) - f^-(x,y)$, 对 $a.e. x$, $F_f(x) = F_{f^+}(x) - F_{f^-}(x)$.

Fubini 定理的推广

定理：设 $A \times B \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $f(x,y)$ 是 $A \times B$ 上的非负可测函数或者可积函数. 则有

- 对 $a.e. x \in A$, $f(x,\cdot)$ 是 B 上的可积函数.
- 对 $a.e. x \in A$, $F_f(x) = \int_B f(x,y)dy$ 有定义, 且 $F_f(x)$ 是 A 上的可积函数.
- 重积分等于累次积分, 即

$$\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A F_f(x)dx = \int_A dx \int_B f(x,y)dy.$$

例：求 $I=\int_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)}\frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dxdy$.

解：由 Tonelli 定理,

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,+\infty)} dy \int_{[0,+\infty)} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}dx \\ &= \int_{[0,+\infty)} \frac{1}{(1+y)\sqrt{y}}\frac{\pi}{2}dy \\ &= \int_{[0,+\infty)} \frac{1}{(1+t^2)}\pi dt = \frac{1}{2}\pi^2. \end{aligned}$$

设 $f, g \in L(\mathbb{R}^n)$.

- 则有 $f(x-y)g(y)$, 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

  证明：$F(x,y) = f(x-y)$, $G(x,y) = g(y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数.

  事实上, $\{(x,y) : G(x,y) > t\} = \mathbb{R}^n \times \{y : g(y) > t\}$, $G(x,y)$ 可测.

  利用坐标变换 $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ 可证明 $F(x,y)$ 可测.

- $f(x-y)g(y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 且有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dxdy &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx.\end{aligned}$$

卷积2

- 定义 f 与 g 的卷积

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

则 $f * g(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx.$$

证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dxdy.$$