Exercício 01: Gerador de números aleatórios

Ana Moreira 54514

Este trabalho foi realizado com o intuito de implementar um gerador linear congruente, cujas capacidades foram testadas através dos testes do quadrado, cubo e χ^2, juntamente com outros geradores existentes em C++: rand() e drand48().

I. EXERCÍCIO 1: IMPLEMENTAÇÃO DE UM GERADOR LINEAR CONGRUENTE

O método congruente foi utilizado para gerar números aleatórios com os parâmetros $c = 3$, $p = N_{max} = 31$, $a_0 = 0$ e $X_0 = 1$ (Parâmetros 1) através da equação que relaciona X_n e X_{n-1} dada por:

$$X_n = (c\mathrm{X}_{n-1}+\mathrm{a}_0)\%N_{max} \quad \textbf{(1)}$$

onde c é o multiplicador, a_0 é o incremento e o número inteiro X_0 utilizado para iniciar o método é a semente. Gerando 3000 números aleatórios, foi criado o gráfico da Figura 1, que relaciona os valores obtidos de dois números gerados seguidos, X_n e X_{n-1}, ambos divididos por N_{max} (como todos os números utilizados neste exercício), ou seja, o teste do quadrado.

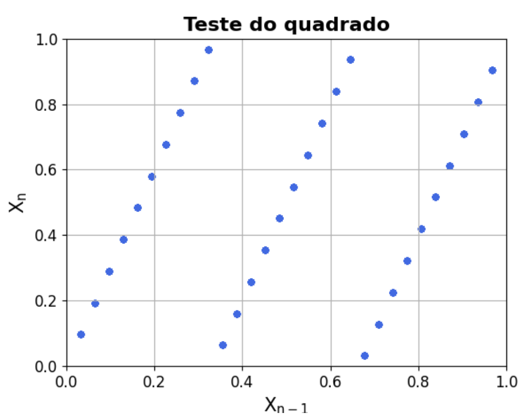

Figura 1. Gráfico do teste do quadrado para 3000 números gerados com os parâmetros $c = 3$, $N_{max} = 31$, $a_0 = 0$ e $X_0 = 1$ para o exercício 1.

Deste gráfico constata-se que existe uma correlação entre os números gerados com estes parâmetros. Este apresenta números com uma relação linear. Os números gerados não são uniformes, pois existe uma relação entre um número gerado e o número gerado na iteração anterior. Do gráfico também se conclui que o método tem um ciclo de 30 pontos (os 3000 pontos sobrepõem-se no gráfico). Daqui verifica-se que os valores de c e N_{max} utilizados não produzem bons números aleatórios.

Aplicando o teste do cubo aos valores (1), onde foram relacionados os valores de três iterações sucessivas, nomeadamente, X_n, X_{n-1} e X_{n-2}, produziu-se o gráfico da Figura 3. Voltamos assim a confirmar que os valores utilizados no gerador produzem um padrão nos números produzidos, o que nos leva a deduzir que os pontos gerados estão correlacionados e não são uniformes.

Alterando os parâmetros utilizados para $c = 16807$ e $N_{max} = 2147483647$ (Parâmetros 2, com os valores de c, X_0 e a_0 iguais aos dos Parâmetros 1), e aplicando novamente o teste do quadrado, obtemos o gráfico da Figura 2. Estes novos valores de c e N_{max} produzem valores aleatórios sem correlação e uniformes, uma vez que o gráfico não apresenta qualquer tipo de padrão, ao contrário do caso anterior. Assim, estes valores constituem bons parâmetros para o gerador. Logo, podemos afirmar que os Parâmetros (2) produzem melhores números aleatórios que os Parâmetros (1).

Utilizando os geradores rand() e drand48(), verificamos que estes também são bons geradores de números aleatórios , uma vez que ao serem aplicados os mesmos testes impostos aos Parâmetros (1) e (2), não apresentam qualquer tipo de correlação entre os pontos obtidos em iterações sucessivas, produzindo assim números uniformes e aleatórios.

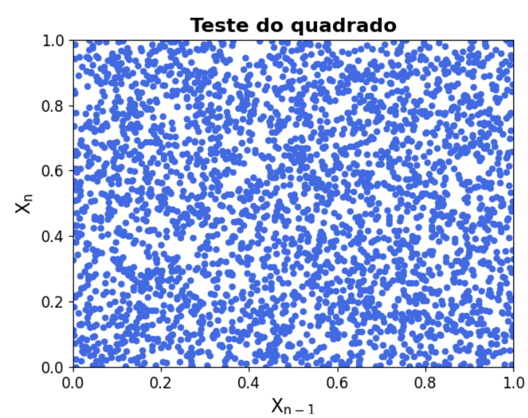

Figura 2. Gráfico do teste do quadrado para 3000 números gerados com parâmetros utilizados de $c = 16807$, $N_{max} = 2147483647$, $a_0 = 0$ e $X_0 = 1$ para o exercício 1.

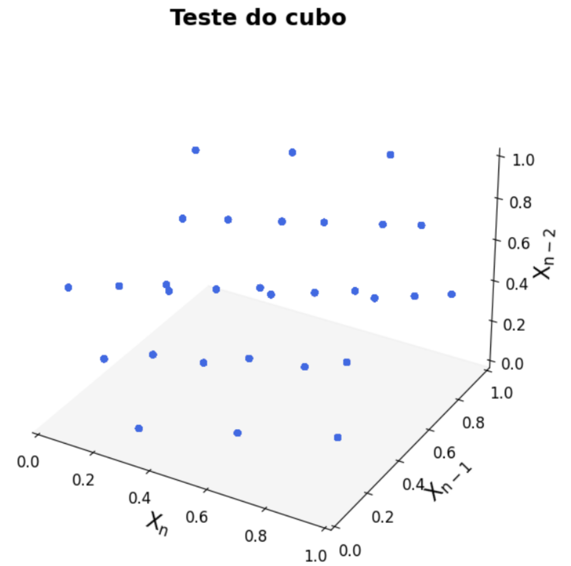

Figura 3. Gráfico do teste do cubo para 3000 números gerados com parâmetros $c = 3$, $N_{max} = 31$, $a_0 = 0$ e $X_0 = 1$ para o exercício 1.

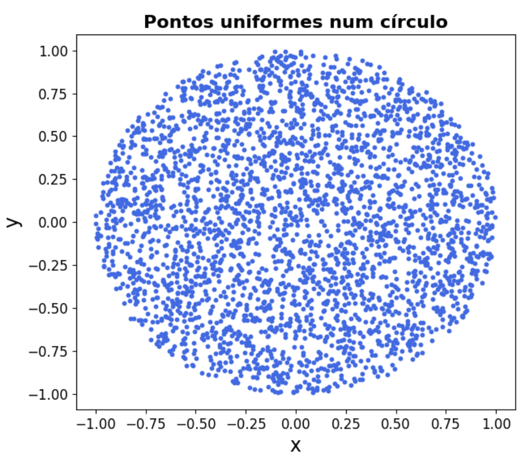

Figura 4. Gráfico dos valores de x e y gerados (3000 números gerados) uniformente dentro de um círculo utilizando a função rand() para o exercício 2.

II. EXERCÍCIO 2: GERAR PONTOS UNIFORMEMENTE NUM CÍRCULO

De modo a gerar pontos num círculo de maneira uniforme, não podemos simplesmente gerar números aleatórios. Sabemos que quanto mais longe do centro do círculo, maior terá de ser o número de pontos gerados nesse determinado raio para que o círculo seja totalmente coberto. Assim, temos de determinar a função densidade de probabilidade acumulada. Ora, se os pontos têm de estar distribuidos uniformemente no interior do círculo, a densidade de pontos na área do círculo tem de ser constante: $\rho_{pontos} = \frac{N_{pontos}}{Área} = C$, sendo C uma constante. Como $Área = 2\pi r$, temos que $N_{pontos} = 2\pi r C$, que se pode definir como uma função f(r), que neste caso é a função densidade de probabilidade, devido à simetria do problema. Normalizando a função para obter C, temos, $\int_0^R f(r)dr = 1 \iff c = \frac{1}{\pi R^2}$, logo $f(r) = \frac{2r}{R^2}$, levando à função densidade acumulada dada por:

$$F(r) = \int_0^r f(r')dr' = \frac{r^2}{R^2} \quad \textbf{(2)}$$

Como sabemos que a distribuição tem de ser entre 0 e 1, ou seja, ser uniforme, f(r) tem de ser tornada constante e F(r) tem de ser linear, o que é obtido através de uma mudança de variável: $r \to \sqrt{r}$. Esta leva a que $F(r) = \frac{r}{R^2}$ e $f(r) = \frac{1}{R^2}$. Assim, as coordenadas x e y ficam definidas como $(x, y) = (\sqrt{r}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\theta)$, para $r \in [0, 1]$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Utilizando a função rand() para gerar números para o raio, e produzindo o gráfico dos pontos gerados, obtemos a Figura 4, que nos mostra que os pontos obtidos ficaram uniformemente distribuídos no círculo.

III. EXERCÍCIO 3: TESTE DO χ^2

Por fim, aplicou-se o teste do χ^2 aos Parâmetros (1), (2) e à função rand() de modo a verificar a uniformidade destes geradores de números aleatórios. Utilizou-se um total de 1000 pontos com k=5 intervalos, sendo assim a probabilidade de encontrar um número em qualquer um dos intervalos i dada por $p_i = \frac{1}{k}$.

O gerador com Parâmetros (1) obteve um valor de $\chi^2 = 0.01$; para o gerador com Parâmetros (2), obteve-se um valor de $\chi^2 = 1.995$, enquanto que para a função rand() o valor obtido foi de $\chi^2 = 3.175$. Sabendo que o valor de χ^2 é dado por:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \quad \textbf{(3)}$$

onde N_i é cada número da sequência, e que os valores de χ^2 são comparados com os fornecidos na tabela em anexo, podemos tirar conclusões sobre os valores obtidos.

Para os Parâmetros (1), o valor obtido corresponde a uma probabilidade de menos de 1%, o que nos leva a concluir que este é um valor demasiado baixo. De facto, se considerarmos o número de pontos encontrado em cada intervalo i verificamos que este é muito perto do valor esperado, logo conclui-se que os valores obtidos não são aleatórios. Para os Parâmetros (2) e para a função rand(), os valores de χ^2 obtidos correspondem a uma probabilidade entre $p = 25\%$ e $p = 50\%$, o que significa que, como são valores intermédios, podemos considerar os parâmetros e a função utilizados como bons para um gerador de números aleatórios.