27 de Janeiro 2022 **Duração** 2h

1. Considere o termo $M \equiv \lambda w.((\lambda xy.xx(\lambda x.xy)y)(\lambda z.zw))$.
   (a) Indique um termo diferente de M, que seja α-equivalente a M e que satisfaça a convenção de Barendregt no que respeita a nomes de variáveis livres e ligadas.
   (b) Converta o termo M para a notação de De Brujin.

2. Desenhe o grafo de redução do termo $M \equiv (\lambda yz.zz)((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))((\lambda x.x)(\lambda x.x))$.

3. Usando as codificações no λ-calculus para pares e listas (`pair`, `fst`, `snd`, `nil`, `cons` e `null`), assim como o combinador Y, defina um λ-termo M para representar a função de ordem superior map, definida como:

$$\mathsf{map}\ \mathsf{f}\ [\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_\mathsf{n}] = [\mathsf{f}\ \mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{f}\ \mathsf{x}_\mathsf{n}]$$

4. Infira um par principal para o termo $\lambda x.x)(\lambda fx.f(fx))$.

5. Considere as semânticas operacionais e denotacionais para expressões aritméticas e booleanas dadas no curso, e a seguinte gramática para comandos:

$$c \ ::= \ \mathsf{skip} \mid x := a \mid c_1; c_2 \mid \mathsf{if}\ b\ \mathsf{do}\ c_1\ \mathsf{else}\ c_2 \mid \ \mathsf{repeat}\ c\ \mathsf{until}\ b$$

   (a) Defina uma semântica operacional natural para a linguagem de comandos dada.
   (b) Utilizando a semântica operacional definida na alínea anterior, avalie o comando $s := 0;\ n := 4;\ \mathsf{repeat}\ s := s + n;\ n := n - 2;\ \mathsf{until}\ n = 0;$ no estado σ_0.
   (c) Defina uma semântica denotacional $\mathcal{S}_{ds}[\![\cdot]\!]$, para a linguagem de comandos dada.
   (d) Considere uma extensão da linguagem dada com pares (a_1, a_2) e projecções fst e snd que permitem aceder ao primeiro e segundo elemento do par. Defina as funções semânticas adequadas para lidar com comandos da forma $(x_1, x_2) := (a_1, a_2)$ e expressões aritméticas da forma $\mathsf{fst}(a_1, a_2)$ e $\mathsf{snd}(a_1, a_2)$

6. Mostre que a composição de duas funções contínuas entre dois CPOs é uma função contínua.