Fundamentos de Linguagens de Programação (2022/2023) .

25 de Janeiro de 2023 **Duração** 2h

PARTE I

1. Considere o seguinte termo $M \equiv \lambda w.((\lambda xy.x(\lambda y.xy)(y(\lambda z.zxw)))(\lambda w.w))$.
   (a) Indique um termo cuja árvore sintática seja isomorfa à de M, mas que não seja α-equivalente a M.
   (b) Converta o termo M para a notação de De Brujin.

2. Utilizando a estratégia de redução em ordem normal reduza o seguinte termo à sua forma normal

$$M \equiv (\lambda zx.(\lambda x.xx)z)((\lambda xy.y)(\lambda x.x))((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$$

   O termo M é fortemente normalizável? Justifique.

3. Considere as codificações no λ-calculus dadas no curso para representação de numerais e funções aritméticas, assim como para manipulação de listas (nil, cons, null, head e tail) e o combinador ponto-fixo Y. Considere a função map, definida como:

$$\mathsf{map}\ f\ [x_1, \ldots, x_n] = [f\ x_1, \ldots, f\ x_n]$$

   Defina um λ-termo M para representar a função map.

4. Utilizando qualquer um dos algoritmos de inferência para o sistema de tipos simples, dados no curso, determine o par principal do termo $(\lambda fx.f(fx))(\lambda xy.y)$

5. Sejam M, N e L λ-termos não tipados. Supondo que $x \neq y$ e $x \notin \mathsf{fv}(L)$:
   (a) Mostre que $M[N/x][L/y] = M[L/y][(N[L/y])/x]$.
   (b) $M[N/x][L/y] = M[L/y][N/x]$ é sempre verdade? Prove ou dê um contra-exemplo.

PARTE II

6. Considere as semânticas denotacionais para expressões aritméticas e booleanas dadas no curso, e a seguinte gramática para expressões que definem uma linguagem funcional lazy com inteiros n, constantes c, expressões condicionais, definição de funções usando abstrações λ e aplicações de uma função t_1 a t_2 - $(t_1\ t_2)$:

$$x \mid\ c \mid\ \mathsf{if}\ b\ \mathsf{then}\ t_1\ \mathsf{else}\ t_2 \mid\ \lambda x.t \mid\ (t_1\ t_2)$$

   (a) Defina uma semântica denotacional lazy $[\![t]\!]$ para a linguagem de expressões dada.
   (b) Considere uma extensão da linguagem dada com pares (t_1, t_2). Defina a semântica denotacional lazy de um par (t_1, t_2).
   (c) Calcule as semânticas denotacionais das expressões $\lambda x.x$ e $\lambda x.(x + 0)$
   (d) Considerando uma semântica operacional lazy para a mesma linguagem onde abstrações lambda são formas normais (não avaliamos o corpo t das abstrações $\lambda x.t$), e a resposta à alinea anterior, o que pode dizer sobre a relação entre as semânticas operacional e denotacional da linguagem?

7. Seja $(D, \sqsubseteq)$ um conjunto parcialmente ordenado (*poset*). Mostre que se $(D, \sqsubseteq)$ tem um elemento mínimo então ele é único.