2022–11–08 **Duração** 2h00m

1. Considere termo $M = (\lambda z.z(\lambda wa.w)a)(\lambda ab.az)$
   (a) O termo $(\lambda y.y(\lambda xy.x)a)(\lambda zx.za)$ é α-equivalente a M? Justifique.
   (b) Indique um termo α-equivalente a M em que não existam variáveis livres e ligadas comuns e em que cada variável ligada ocorre uma única vez.
   (c) Considere agora o termo $M_c = \lambda za.((\lambda x.x(\lambda wa.w)a)(\lambda ab.az))$ e escreva-o na notação de De Brujin.
   (d) Indique um termo cuja representação na notação de De Brujin seja
   $$\lambda((\lambda\lambda\lambda 1(21)(\lambda 1)4)(\lambda 21(\lambda 13))).$$
2. Desenhe o grafo de redução do termo $(\lambda xw.wcw)((\lambda y.yy)(\lambda x.xx))((\lambda y.y)ab)$.
3. Mostre que $\Theta = (\lambda xy.xyx)(\lambda yx.y(xyx))$ é um operador ponto-fixo.
4. Considere as codificações no λ-calculus dadas no curso e a função de zip, definida como:
   $$\mathsf{zip}\ [x_1, \ldots, x_n]\ [y_1, \ldots, y_n] = [(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)]$$
   Escreva um λ-termo que defina a função zip.
5. Determine o par principal de $M \equiv (\lambda fx.f(fx))(\lambda y.y)$.
6. Considerando o sistema de tipos de Damas-Milner derive (ou infira) um tipo para:
   $$\mathtt{let}\ f = \lambda y.y\ \mathtt{in}\ fff$$
7. Sejam M, N e L λ-termos não tipados. Supondo que $x \neq y$ e $x \notin \mathsf{fv}(L)$:
   (a) Mostre que $M[N/x][L/y] = M[L/y][(N[L/y])/x]$.
   (b) $M[N/x][L/y] = M[L/y][N/x]$ é sempre verdade? Prove ou dê um contra-exemplo.

The Damas-Milner type system for ML:

$$(Ax) \qquad \Gamma \cup \{x : \sigma\} \vdash_{ML} x : \sigma$$

$$(Gen) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{ML} M : \sigma \qquad \alpha \notin \mathsf{fv}(\Gamma)}{\Gamma \vdash_{ML} M : \forall \alpha . \sigma}$$

$$(Inst) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{ML} M : \forall \alpha . \sigma}{\Gamma \vdash_{ML} M : \sigma[\tau/\alpha]}$$

$$(App) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{ML} M : \tau' \to \tau \qquad \Gamma \vdash_{ML} M' : \tau'}{\Gamma \vdash_{ML} (MM') : \tau}$$

$$(Abs) \qquad \frac{\Gamma_x \cup \{x : \tau'\} \vdash_{ML} M : \tau}{\Gamma \vdash_{ML} \lambda x . M : (\tau' \to \tau)}$$

$$(Let) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{ML} M : \sigma \qquad \Gamma_x \cup \{x : \sigma\} \vdash_{ML} M' : \sigma'}{\Gamma \vdash_{ML} \text{ let } x = M \text{ in } M' : \sigma'}$$