2016–11–11 **Duração** 1h30m+30min

1. Considere o λ-termo $M \equiv (\lambda xyz.x(\lambda y.yy)z)(\lambda z.z(zx))(\lambda y.y)$.
   (a) Indique um termo (diferente de M) que seja α-equivalente a M.
   (b) Indique um termo, cuja árvore sintática seja isomorfa à de M, mas que não seja α-equivalente a M.
   (c) Converta o termo M para a notação de De Brujin.

2. Reduza à forma normal os seguintes termos:
   (a) $(\lambda zx.z(xz))(\lambda y.ay)(\lambda x.xx)$
   (b) $(\lambda xy.xy(xx))(\lambda x.x)(\lambda w.ww)(\lambda z.zz)$

3. Mostre que o termo $\mathsf{Y} \equiv (\lambda xy.xyx)(\lambda yx.y(xyx))$ é um operador ponto-fixo.

4. Considere as codificações no λ-calculus dadas no curso para manipulação de listas (nil, cons, null, head e tail) assim como o combinador ponto-fixo Y. Considere a função de ordem superior fldr, definida como:

$$\mathsf{fldr}\ f\ v\ [x_1, \ldots, x_n] = f\ x_1\ (f\ x_2\ (\cdots (f\ x_n\ v) \cdots))$$

   Escreva um λ-termo F que codifique a função fldr.

5. Utilizando qualquer um dos algoritmos de inferência para o sistema de tipos simples, dados no curso, determine o par principal do termo $(\lambda xyz.x(yz))(\lambda xy.y)$.

6. Considere o sistema de tipos com polimofismo paramétrico de Damas-Milner.
   (a) Derive um tipo para o termo $\lambda x.\mathtt{let}\ f = \lambda y.y\ \mathtt{in}\ f(ff)x$.
   (b) No sistema de tipos de Damas-Milner, dizemos que $\sigma = \forall \alpha_1 \ldots \alpha_m.\tau$ tem uma instância genérica $\sigma' = \forall \beta_1 \ldots \beta_n.\tau'$ se existem tipos $\tau_1, \ldots, \tau_m$ tais $\tau' = [\tau_i/\alpha_i]\tau$ e as variáveis $\beta_j \notin FV(\sigma)$. Mostre que, se σ tem como instância genérica σ' e $\Gamma_x \cup \{x : \sigma'\} \vdash M : \sigma''$, então $\Gamma_x \cup \{x : \sigma\} \vdash M : \sigma''$.