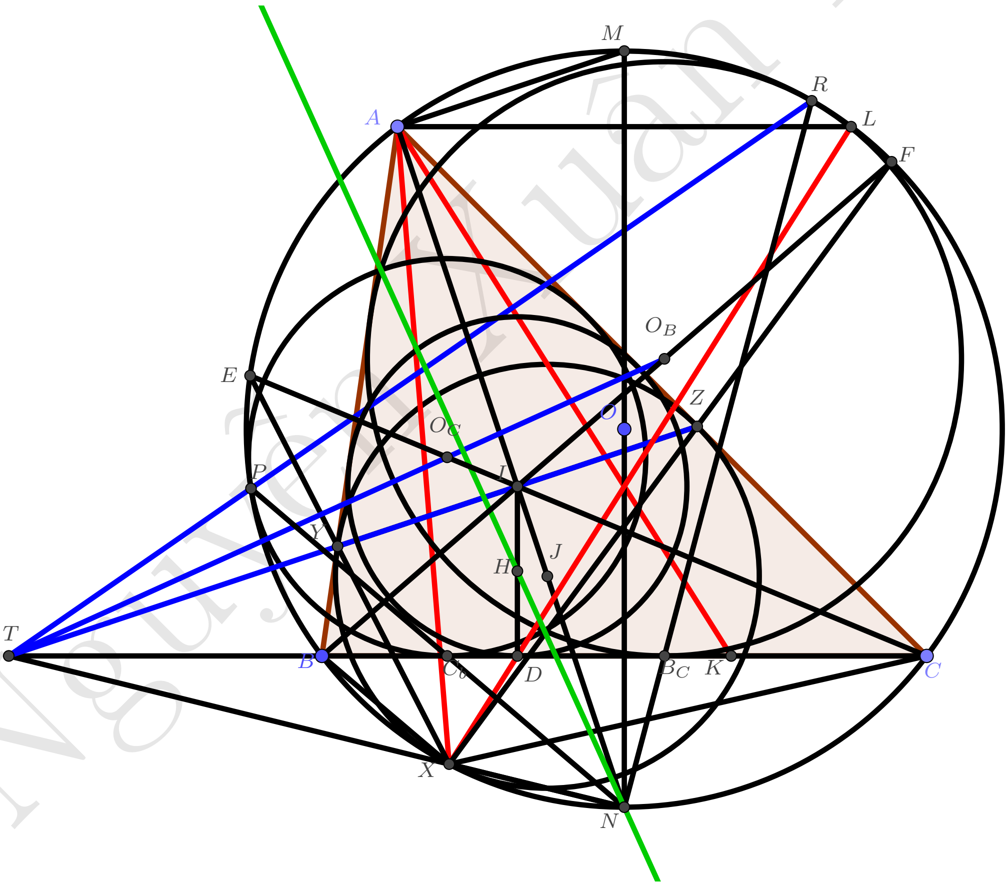
1 Hình học

Các chú ý

1.1 Các chú ý

1. Luôn chú ý các Bổ đề, đưa về mô hình quen thuộc
2. Với chứng minh Đồng quy, có thể sử dụng Ceva, Ceva sin, Ceva dạng đường cao, Trục đẳng phương, Hàng điểm, Jacobi
3. Sử dụng hình học xạ ảnh: Desargues, Pappus, Pascal
4. Có thể lấy thêm điểm, điểm thuộc trung trực, hoặc tâm đường tròn ngoại tiếp để đưa về Desargues
5. Để chứng minh tiếp xúc có thể dùng tính toán
6. Điểm tiếp xúc thường sẽ thuộc nhiều đường tròn, là điểm Miquel của tứ giác toàn phần nào đó



1.2 Các điểm đặc biệt trong tam giác

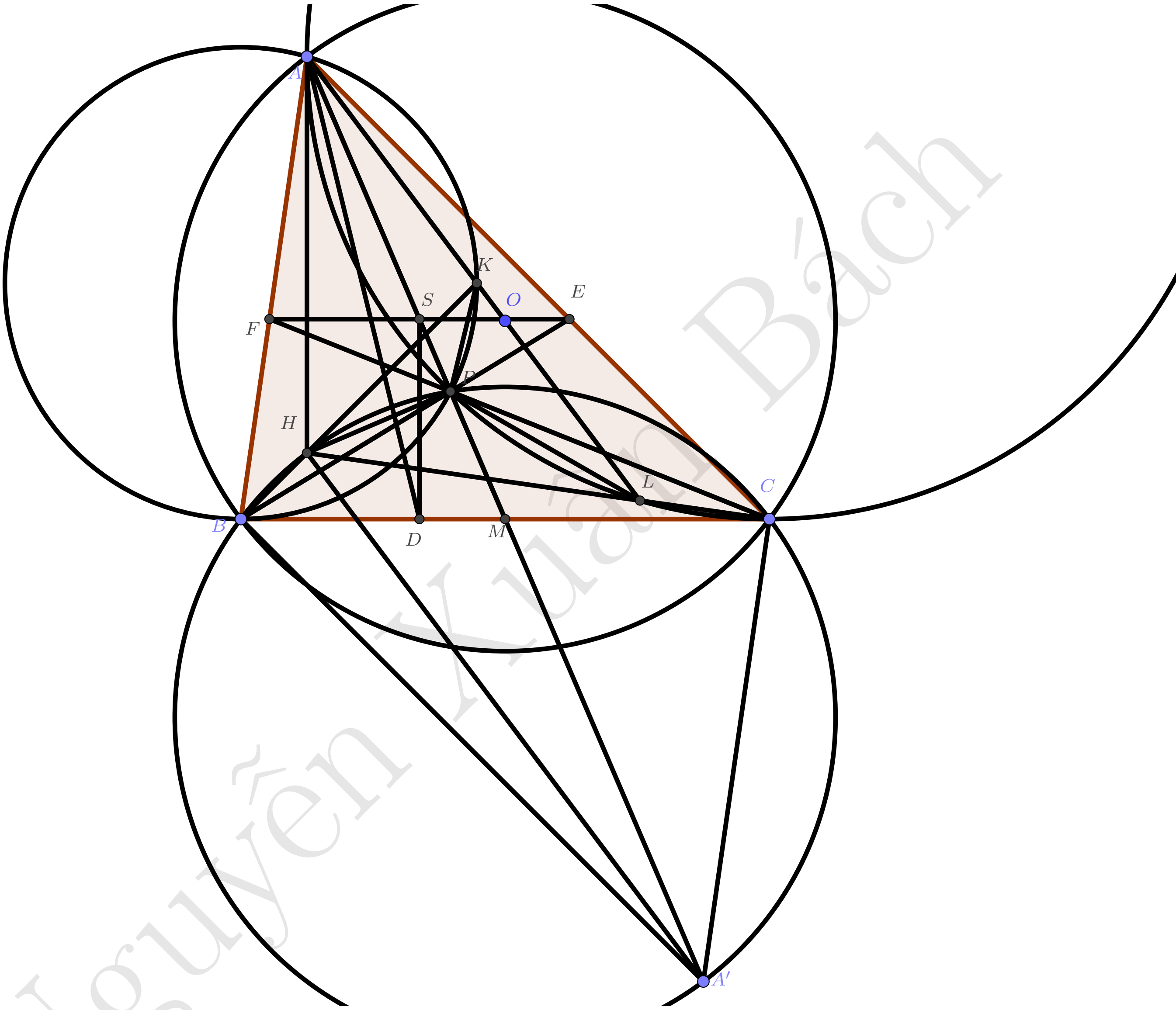
Định lí 1.1 (Điểm Humpty)**.** Tam giác ABC có P thỏa mãn $\angle PAB = \angle PBC, \angle PAC = \angle PCB$. Khi đó

1. $P = (C_1) \cap (C_2)$ với (C_1) đi qua A, tiếp xúc BC tại B, (C_2) đi qua A, tiếp xúc BC tại C
2. $P = (BHC) \cap (AH)$

3. $P \in AM$, từ đó $MP.MA = MB^2$

4. P thuộc $A - Apollonius \triangle ABC$

5. Đường đối trung $AD (D \in BC)$, $BP, CP \cap AC, AB = E, F$, $EF \cap AM = S$ thì $DS \perp BC // EF$



Chứng minh. Dựng thêm A' là đối xứng của A qua trung điểm BC □

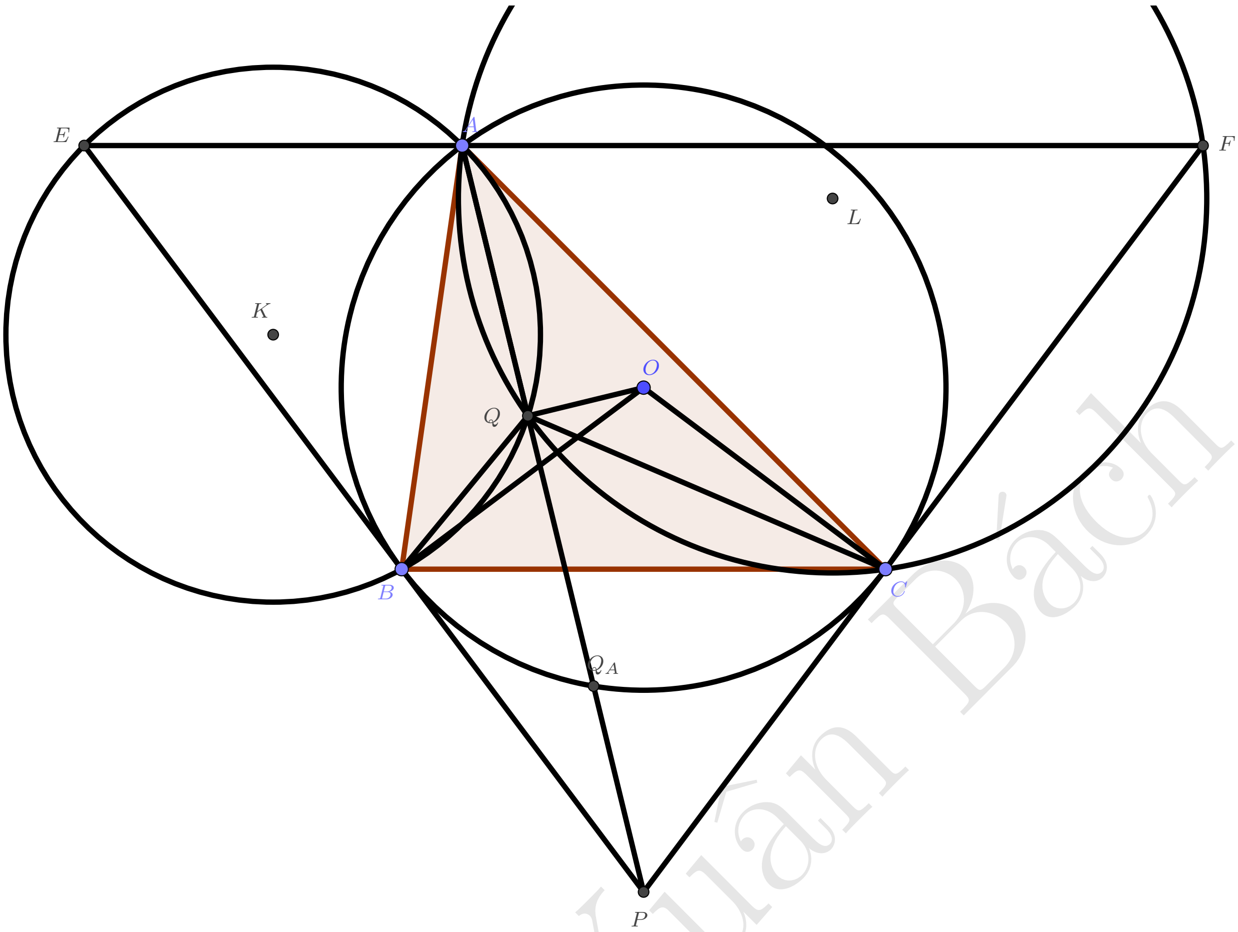
Định lí 1.2 (Điểm Dumpty)**.** Tma giác ABC điểm Q thỏa mãn $\angle QAB = \angle QCA, \angle QAC = \angle QBA$. Khi đó

1. $Q = (C_1) \cap (C_2)$ với (C_1) đi qua A, C tiếp xúc AB tại A, (C_2) đi qua A, B tiếp xúc AC tại C

2. AQ là đường đối trung

3. $Q = (BOC) \cap (AO)$, Q là trung điểm AQ_A với Q_A là giao của AQ với (O)

4. $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$



Chứng minh. Dựng P là giao của hai tiếp tuyến tại B và C của (O), dựng E, F là giao điểm của đường thẳng qua A song song BC cắt PB, PC
Chú ý rằng ta có $E \in (C_1)$, $F \in (C_2)$ □

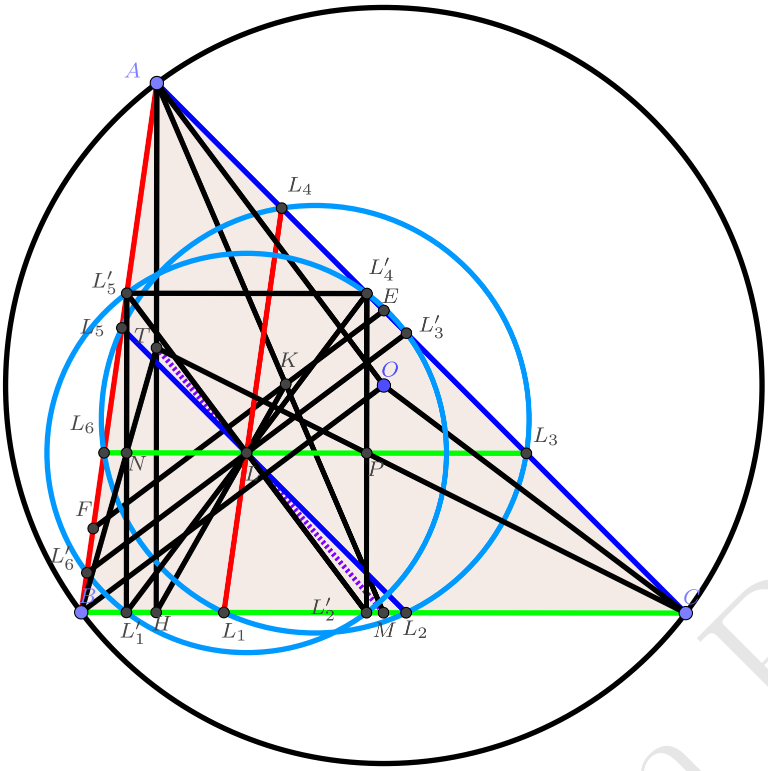
Định lí 1.3 (Điểm Lemoine)**.** Tam giác ABC, điểm L là điểm Lemoine của tam giác, là điểm liên hợp đẳng giác với trọng tâm G. Khi đó

1. Đường tròn Lemoine thứ nhất: đường thẳng qua L song song với AB, BC, CA cắt lại các cạnh tạo thành 6 điểm đồng viên: $L_1, \cdots, L_6$

2. Đường tròn Lemoine thứ hai: các đường đối song qua L cắt các cạnh tam giác tương ứng tạo thành 6 điểm đồng viên: $L'_1, \cdots, L'_6$

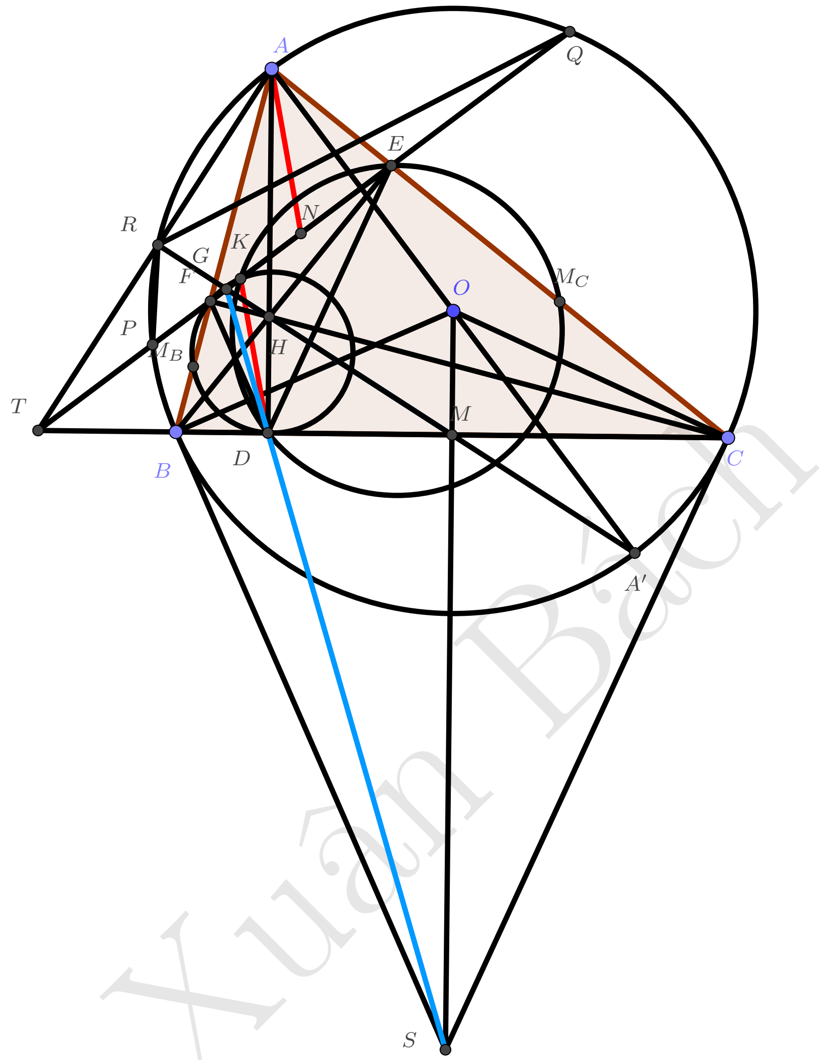
3. T, L, M thẳng hàng với T là trung điểm AH, M là trung điểm BC

4. H, L, K thẳng hàng với $K = AM \cap EF$



Chứng minh. Chủ yếu cộng góc, dùng bổ đề hình thang. □

Định lí 1.4 (Mô hình trục tâm)**.** Tam giác ABC



Định lí 1.5 (Bài toán đặc biệt)**.** Tam giác ABC lấy trên tia BA, CA các điểm F, E: $CE = BF = BC$. Khi đó $EF \perp OI$

Chứng minh. Sử dụng định lí 4 điểm □

1.3 Các Bổ đề

Định lí 1.6 (Simson - đẳng giác)**.** Với AX, AY đẳng giác trong $\angle A : \triangle ABC$ thì $X - Simson \perp AY$

Định lí 1.7 (Định lí 4 điểm)**.** Khi sử dụng định lí 4 điểm để ý $AX^2 - BX^2 = P_{A/(X)} - P_{B/(X)}$

Định lí 1.8 (Bổ đề đẳng giác)**.** Tam giác ABC có AP, AQ đẳng giác trong góc A, gọi $R = BP \cap CQ, S = BQ \cap CP$. Khi đó AR, AS đẳng giác trong $\angle A$.

Định lí 1.9 (Tính chất liên hợp đẳng giác)**.** P, Q liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC, $X = AP \cap (BCP), Y = AQ \cap (BQC)$, J, K là tâm $(BPC), (BQC)$. Khi đó $XY // PQ$ và AJ, AK đẳng giác trong $\angle A$

Định lí 1.10 (cyclocevian conjugate)**.** Tam giác ABC có X, Y, Z trên BC, CA, AB, lấy K, L, S là giao điểm còn lại của (XYZ) với BC, CA, AB. Khi đó AX, BY, CZ đồng quy khi và chỉ khi AK, BL, CS đồng quy

Định lí 1.11 (cực và đối cực)**.** MN là đường đối cực của H đối với cực và đối cực với (I)

Định lí 1.12 (Tính tỉ lệ)**.** Với 2 đoạn AX, A_1A'

Định lí 1.13 (Định lí Carnot)**.** $d(O, AB) + d(O, BC) + d(O, CA) = R + r$ ở đây là khoảng cách có hướng

Chứng minh. Đặt $OD = x, OE = y, OF = z$, theo Ptolemy cho $AEFO$:

$$OA.EF = AF.OE + AE.OF \implies aR = by + cz$$

Tương tự thì

$$bR = cx + az, cR = bx + ay$$

kết hợp với

$$2S = r(a + b + c) = ax + by + cz$$

□

Định lí 1.14 (E.R.I.Q)**.** Cho 2 đường thẳng d_1, d_2 lấy $A_1, B_1, C_1 \in d_1$ và $A_2, B_2, C_2 \in d_2$ sao cho $\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{B_1C_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{B_2C_2}}$ và lấy trên A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 các điểm A_3, B_3, C_3 sao cho

$$\frac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} = \frac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}} = \frac{\overline{C_3C_1}}{\overline{C_3C_2}}$$

thì A_3, B_3, C_3 thẳng hàng và $\dfrac{\overline{A_3B_3}}{\overline{B_3C_3}} = k$

Định lí 1.15 (Tổng quát ERIQ)**.** $\overline{A, B, C}$ và $\overline{A', B', C'}$ có $\triangle AXA' \sim +\triangle BYB' \sim +\triangle CZC'$ thì X, Y, Z thẳng hàng

2 Đa thức

Lưu ý. 1. Trong những bài toán Đa thức, ta nên dự đoán hàm đa thức thỏa mãn (chúng có bậc bao nhiêu?, hệ số cao nhất?,...) và rồi chứng minh nó có những tính chất của đa thức đó, ví dụ như nếu nó không như vậy thì ta có điều gì?

Định lí 2.1 (Khoảng của nghiệm phức)**.** Cho đa thức $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Khi đó nếu x_0 là một nghiệm của P thì

$$|x_0| < 1 + \max_{0 \le i \le n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|$$

Định lí 2.2 (Đa thức nghiệm thực)**.** $n \in \mathbb{Z}^+, \ge 2$ và $P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$. Nếu P có n nghiệm thực thì

$$a_{n-1}^2 \ge 2a_na_{n-2}$$

Định lí 2.3 (Giá trị tại điểm nguyên của đa thức hệ số nguyên)**.** Cho $P(x) \in \mathbb{Z}[x], degP \neq 1$. Khi đó với mỗi bộ $(A, B, C) \in (\mathbb{Z}^+)^3$ thì $\exists y \in \mathbb{Z} : |y| > C$ và đoạn $[y - A, y + B] \cap P(\mathbb{Z}) = \emptyset$

Định lí 2.4 (Bổ đề bậc > 1 về cấp số cộng)**.** $P(x) \in \mathbb{Z}[x], degP \ge 1$. Khi đó tồn tại cấp số cộng vô hạn tăng không có số hạng nào có dạng $P(k), k \in \mathbb{Z}$

Chứng minh. Phản chứng, dùng tính chất của hàm có bậc lớn hơn 1 □

Định lí 2.5 (gcd đa thức)**.** Với $a, b \in \mathbb{Q}[x]$, tồn tại $m, n \in \mathbb{Q}[x]$ sao cho

$$(a(x), b(x)) = a(x)m(x) + b(x)n(x)$$

Định lí 2.6 (Bổ đề Gauss)**.** Với $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x], \neq 0$ thì

$$cont(fg) = cont(f)cont(g)$$

Chứng minh. Xét đa thức trên trường Z_p, nguyên lý cực hạn □

Định lí 2.7 (Định lí cơ bản của số học đa thức)**.** $f \in \mathbb{Q}[x] \neq 0$ thì tồn tại $p_i \in \mathbb{Q}[x]$ bất khả quy trên $\mathbb{N}$ đôi một nguyên tố cùng nhau và $k_i \in \mathbb{N}$ để

$$f = c.{p_1}^{k_1} \cdots {p_r}^{k_r}$$

Định lí 2.8. $f \in \mathbb{Z}[x]$ khác hằng. Khi đó f bất khả quy trên $\mathbb{Q}$ khi và chỉ khi f bất khả quy trên $\mathbb{Z}$

Định lí 2.9. $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + p \in \mathbb{Z}[x]$ với $p \in \mathbb{P}$, $p > |a_n| + ... + |a_1|$ thì f bất khả quy trên $\mathbb{Q}$

Định lí 2.10. $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ khác hằng, khi đó tồn tại $a \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $P(x)$ và $P(x + a)$ là hai đa thức nguyên tố cùng nhau

Chứng minh. Chứng minh bằng nghiệm của đa thức □

Định lí 2.11 (ĐỊnh lí nghiệm hữu tỉ)**.** $f(T) = a_nT^n + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Giả sư đa thức $f(T)$ có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$. Khi đó $p|a_0, q|a_n$

Định lí 2.12 (Bổ đề lạ)**.** $Q(x) = a_nx^n + ... + a_0$ với $0 < a_n < a_{n-1} < ... < a_0$. Khi đó các nghiệm z của đa thức $Q(x)$ đều thỏa mãn $|z| > 1$

Chứng minh. Rõ ràng 1 không là nghiệm của $Q(x)$. Xét đa thức

$$(x - 1)Q(x) = a_nx^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)x^n + ... + (a_0 - a_1)x - a_0$$

Giả sử $r \neq 1$ là nghiệm của $Q(x)$ mà $|r| \le 1$. Khi đó □