Universidad de Valparaíso
CHILE

Filtrado mediante la ecuación de difusión

Unidad 2

BME423 · Procesamiento de imágenes médicas

Alejandro Veloz

Ingeniería Biomédica

La difusión como fenómeno físico

La difusión es el movimiento de partículas desde un lugar de mayor a menor concentración.

Es provocada por un gradiente de concentración a través del medio.

La densidad de flujo j es proporcional al gradiente de concentración:

$$j = -D\nabla u$$

donde D es el coeficiente de difusión y ∇u es el gradiente de la concentración u (primera ley de difusión de Fick).

La difusión como fenómeno físico

La ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} j$$

donde t es el tiempo y div es el operador de divergencia, es una consecuencia del hecho de que el número de partículas permanece constante o se conserva.

La divergencia de una función $f(x, y, z)$ es igual al producto punto del operador de divergencia ∇ y la función f:

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

La difusión como fenómeno físico

Al reemplazar la expresión de la primera ley de Fick en la ecuación de continuidad, se obtiene la segunda ley de difusión de Fick:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}(D\nabla u) = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

La difusión como fenómeno físico

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)}_{\text{Operador Laplaciano } \nabla^2 u}$$

Difusión de partículas y filtrado

- Las **intensidades** de una imagen se pueden considerar como **partículas** en un espacio de dos o más dimensiones.

Tipos de difusión:

- **Lineal -** Coeficiente de difusión $D = \texttt{constante}$.
- **No lineal isotrópica -** D es función de características diferenciales (e.g., gradiente), $D = g(\|\nabla u\|)$.
- **Difusión no lineal anisotrópica -** D es un tensor (el término anisotrópico indica que la difusión depende de la dirección).

Formulación de Perona-Malik

Considere la imagen de entrada 2D en escala de grises

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Se comienza por una imagen inicial u_0 que se modifica mediante la ecuación:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \mathrm{div}(\underbrace{g(\|\nabla u(t)\|)}_{\text{Coeficiente de difusión } D} \nabla u(t)) \qquad u(0) = u_0$$

$u(t)$ es la imagen (filtrada) en el tiempo t,

$\|\nabla u(t)\|$ es la magnitud del gradiente de $u(t)$, y

$g(\|\nabla u(t)\|)$ es una *función de difusión*.

Formulación de Perona-Malik

$g(x)$ debe ser no negativa, monótonamente decreciente, tendiendo a cero a medida que $x \to \infty$.

Esto resultará en que el proceso de difusión se realizará en el **interior de las regiones y no afectará los bordes**, donde la magnitud del gradiente es suficientemente grande.

No sólo preserva los bordes, sino que los refuerza (mejora en el contraste).

Formulación de Perona-Malik

Consideremos el caso donde u es 1D (señal) y definida en el dominio $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \operatorname{div}\left(g\left(\|\nabla u(t,x)\|\right)\nabla u(t,x)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right\|\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

Funciones de difusión

$$g_1(x) = 1/\left(1 + x^2/\delta^2\right)$$

$$g_2(x) = \exp\left(-x^2/\delta^2\right)$$

$$g_3(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-3.15/(x/\delta)^4\right], & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$g_4(x) = 0.5 \cdot ((\tanh(0.2 \cdot (\delta - x))) + 1)$$

$$g_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1 - (x/\delta)^2\right]^2, & |x| > \delta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_6(x) = \begin{cases} \frac{p(T+\varepsilon)^{p-1}}{T}, x < T \\ \frac{p(x+\varepsilon)^{p-1}}{x}, x \geq T \end{cases}$$

$$g_7(x) = \begin{cases} \frac{p(T+\varepsilon)^{p-1}}{T} + \frac{1}{T}, x < T \\ \frac{p(x+\varepsilon)^{p-1}}{x} + \frac{1}{x}, x \geq T \end{cases}$$

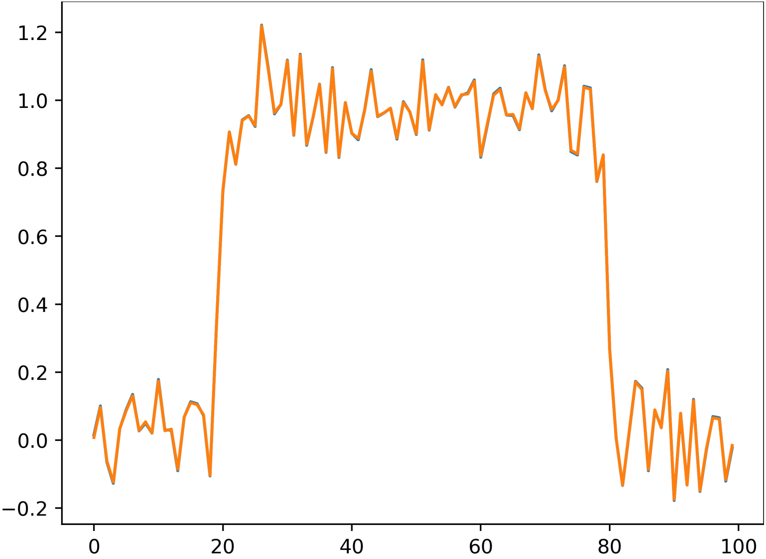
Formulación de Perona-Malik

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathrm{div}\left(g\left(\|\nabla u(t,x)\|\right)\nabla u(t,x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right\|\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)$$

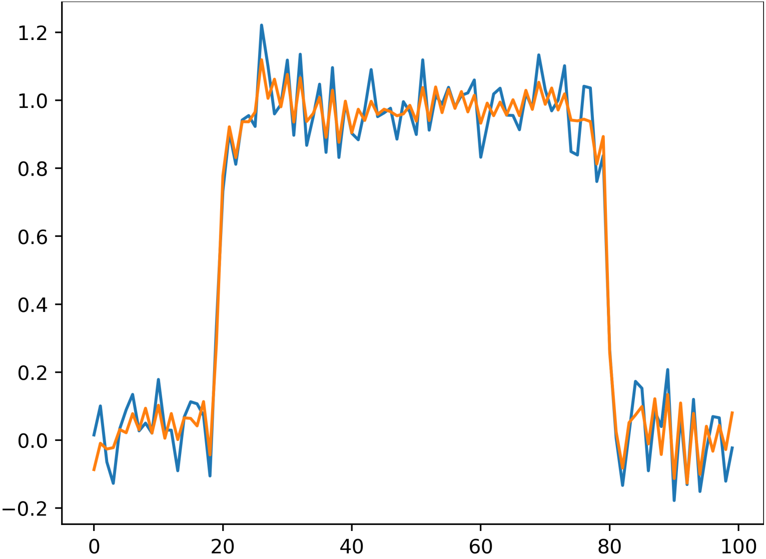
```
import numpy as np

u = f.copy() # f es una funcion 1D
numit = 100
delta_t=0.1
kappa=0.1
diff_fcn = lambda nabla_u, kappa: \
    np.exp(-(nabla_u**2) / (kappa**2))
for it in range(numit):
    nabla_u = np.gradient(u)
    g = diff_fcn(np.abs(nabla_u), kappa)
    u = u + delta_t * (np.gradient(g * nabla_u))
```

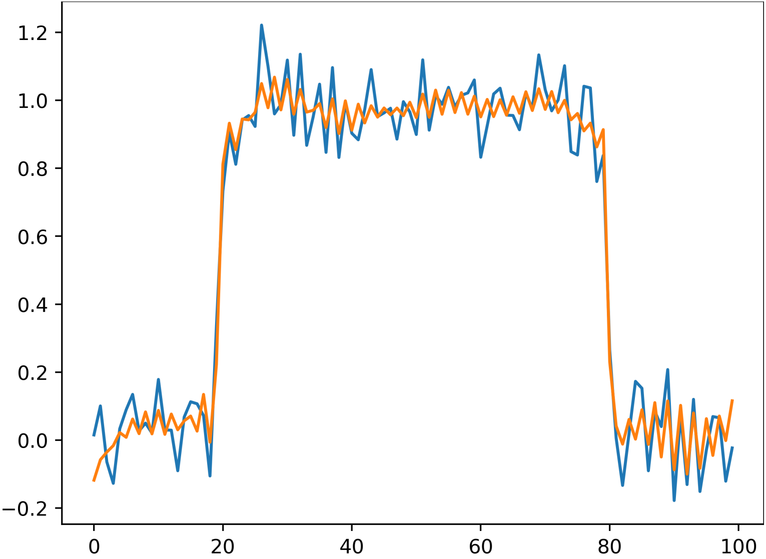
t=0



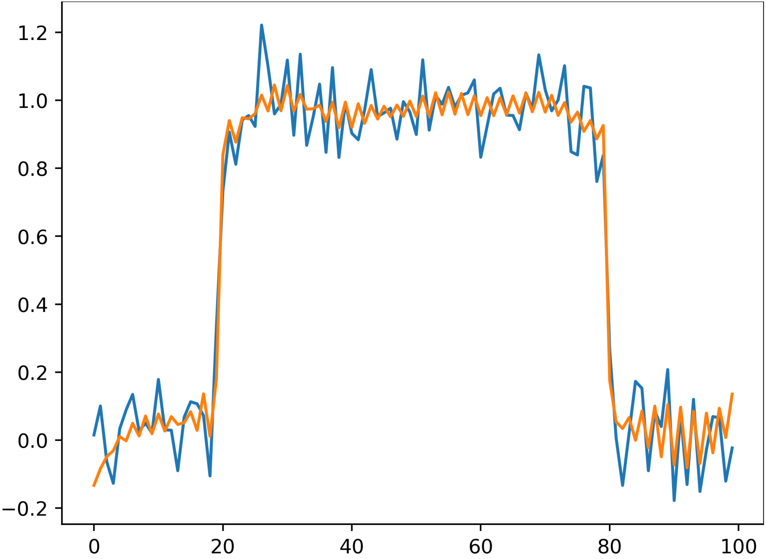
t=30



t=60



t=90



Formulación de Perona-Malik

Consideremos el caso donde u es 2D y definida en el dominio $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} &= \operatorname{div}\left(g\left(\|\nabla u(t,x,y)\|\right)\nabla u(t,x,y)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}
$$

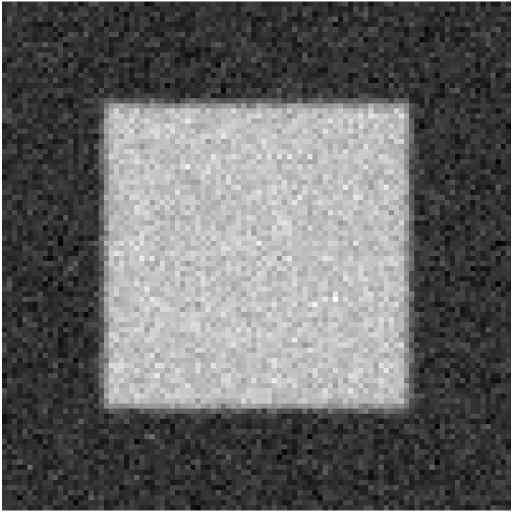
Formulación de Perona-Malik

$$\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

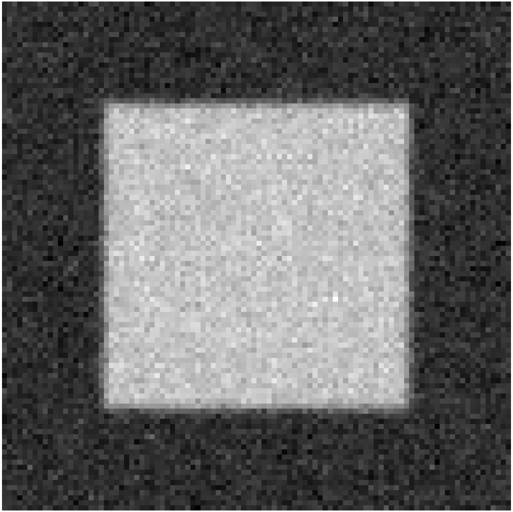
```python
import numpy as np

u = f.copy() # f es una funcion 2D
numit = 10
delta_t = 1
kappa = 0.1
diff_fcn = lambda mag_grad, kappa: \
    np.exp(-(nabla_u**2) / (kappa**2))
for it in range(numit):
    nabla_u_x = np.gradient(u, axis=1)
    nabla_u_y = np.gradient(u, axis=0)
    mag_g = np.sqrt(nabla_u_x**2 + nabla_u_y**2)
    g = diff_fcn(mag_g, kappa)
    u = u + delta_t * (np.gradient(g * nabla_u_x, axis=1) \
                       + np.gradient(g * nabla_u_y, axis=0))
```

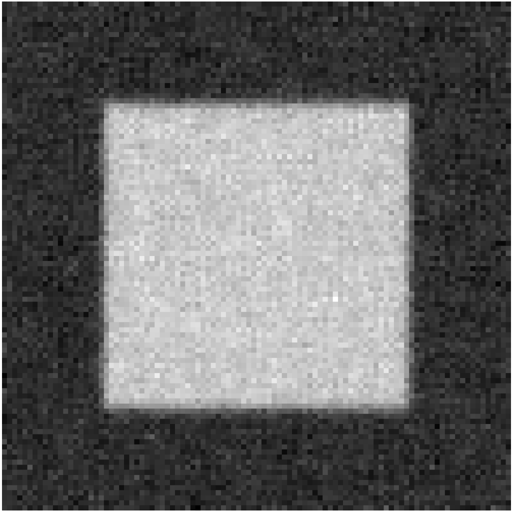
t=0



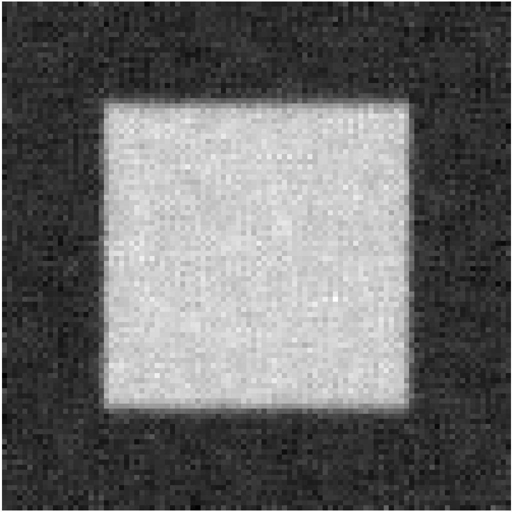
t=1



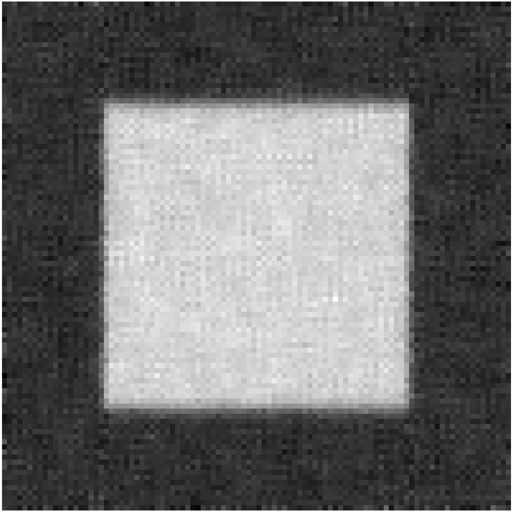
t=3



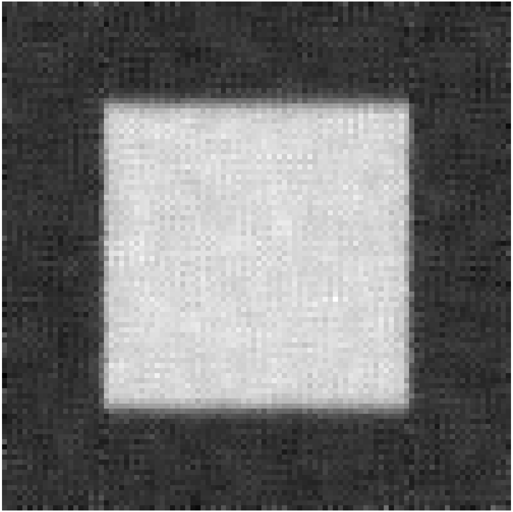
t=5



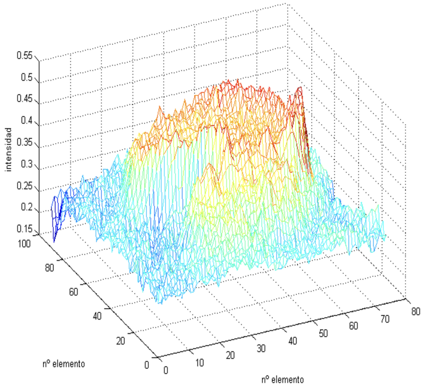
t=7



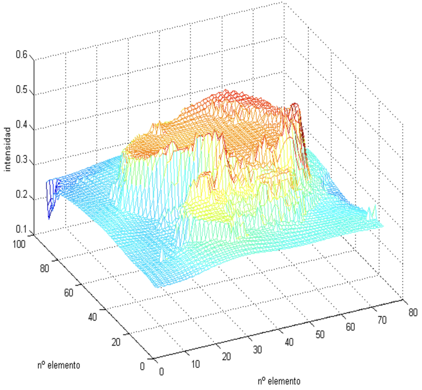
t=9



Ejemplo

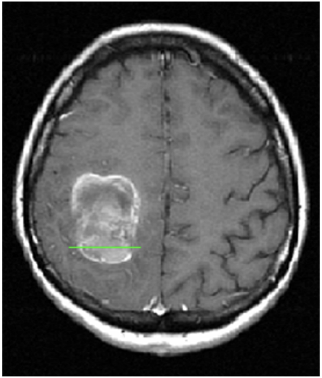


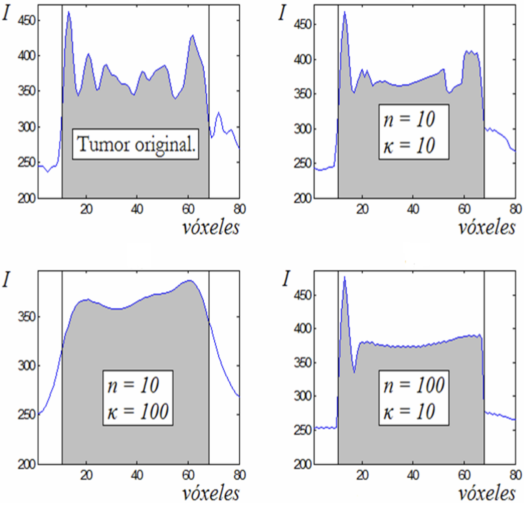
intensidad
0.55
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
100
80
60
40
20
0
nº elemento
0
10
20
30
40
50
60
70
80
nº elemento



intensidad
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
100
80
60
40
20
0
nº elemento
0
10
20
30
40
50
60
70
80
nº elemento

Ejemplo





Formulación de Perona-Malik

Consideremos el caso donde u es 3D y definida en el dominio $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x,y,z)}{\partial t} &= \operatorname{div}\left(g\left(\|\nabla u(t,x,y,z)\|\right)\nabla u(t,x,y,z)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(g\left(\|\nabla u\|\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(g\left(\|\nabla u\|\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&\qquad\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(g\left(\|\nabla u\|\right)\frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

donde $\|\nabla u\| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$