Parcial 1: Señales y Sistemas 2025-II

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, y Computación
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

Instrucciones

- Para recibir crédito total por sus respuestas, estas deben estar claramente justificadas e ilustrar sus procedimientos y razonamientos (paso a paso) de forma concreta, clara y completa.
- El parcial debe ser enviado al correo electrónico `amalvarezme@unal.edu.co` antes de las 23:59 del 11 de octubre de 2025, vía link de GitHub, con componentes teóricas de solución a mano en formato pdf y componentes de simulación en un cuaderno de Python `.ipynb`.
- Los códigos deben estar debidamente comentados en las celdas de código, y discutidos/explicados en celdas de texto (markdown). Códigos no comentados ni discutidos, no serán contabilizados en la nota final.

Preguntas

1. La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

   Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = Ae^{-jnw_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{jmw_0 t}$$

   con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. Compruebe sus resultados con Python.

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$ y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t).$$

   Realizar la simulación del proceso de discretización (incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$). En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

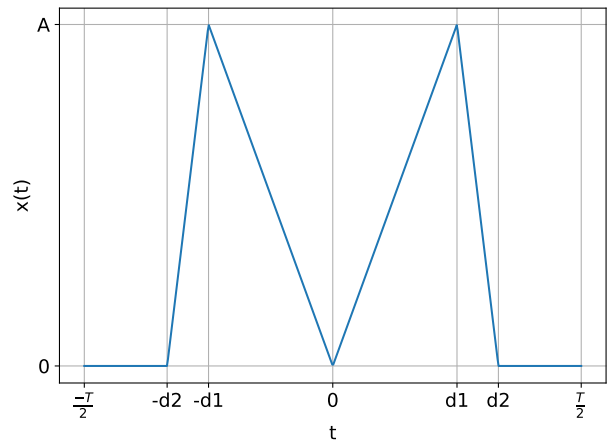

Figura 1: $x(t)$ para el ejercicio 1.4

3. Sea $x^{''}(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x^{''}(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

   ¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x^{''}(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x^{''}(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.

Solución.

1. Si $d(x_1, x_2) = 0$ significa que las señales son iguales.
Si $d(x_1, x_2)$ es grande, significa que las señales son muy distintas
d será mayor que cero.

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$$ Señales periódicas $(0, T)$

la diferencia $x_1(t) - x_2(t)$

$$x_1(t) - x_2(t) = Ae^{-jnw_0t} - Be^{jnw_0t}$$

Tenemos modulo cuadratico

$$|x_1 - x_2|^2 = [x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^*$$

Calculamos el producto

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_2)^* = (x_1 x_1)^* + (x_2 x_2^*) - x_1 x_2^* - x_1^* x_2$$

Reemplazamos valores.

$x_1 x_1^* = |x_1|^2 = A^2 \approx x_1 = Ae^{jnw_0t}$ y $|e^{j0}| = 1$

$x^2 x^{2*} = |x_2|^2 = B^2$

$x_1 x_2^* = Ae^{-jnw_0t} \cdot Be^{-jnw_0t} = ABe^{-j(n+m)w_0t}$

$x_1 x_2 = ABe^{j(n+m)w_0t}$

$\therefore$ Reemplazando.

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - ABe^{-j(n+m)w_0t} - ABe^{j(n+m)w_0t}$$

Simplificamos

Si se sabe que $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0t)$$

Promediando el tiempo

La distancia cuadratica:

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T |x_1 - x_2|^2 \, dt$$

Sustituimos

$$d^2(x_1 x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T (A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0 t))\, dt$$

Separamos la integral por partes:

$$d^2 = \frac{1}{T}\left[A^2\int_0^T dt + B^2\int_0^T dt - 2AB\int_0^T \cos((n+m)w_0 t)\, dt\right]$$

Calcular la integral, cada una.

$\int_0^T dt = T$ (porque es una constante)

$\int_0^T \cos((n+m)w_0 t)\, dt$

Se sabe que $\int \cos(\alpha t)\, dt = \frac{\operatorname{sen}(\alpha t)}{\alpha}$

Entonces:

$$\int_0^T \cos((n+m)w_0 t)\, dt \quad \frac{\operatorname{sen}((n+m)w_0 T)}{(n+m)w_0}$$

$w_0 T = 2\pi$

$\therefore \operatorname{Sen}((n+m)w_0 T) = \operatorname{sen}((n+m)2\pi) = 0$

$\int_0^T \cos((n+m)w_0 t)\, dt = 0 \quad \operatorname{Sen}(n+m) \neq 0$

$n+m=0$ Argumento del coseno es cero

$\cos((n+m)w_0 t) = \cos(0) = 1$

$\int_0^T \cos(0)\, dt = \int_0^T 1\, dt = T$

Sustituir resultado

Caso 1: $n+m \neq 0$

$$d^2 = \frac{1}{T}\left(A^2T + B^2T - 0\right) = A^2 + B^2 \approx d = \sqrt{A^2+B^2}$$

Caso 2: $n+m = 0$

$$d^2 = \frac{1}{T}\left(A^2T + B^2T - 2ABT\right) = (A-B)^2 -$$

$$d = |A-B|$$

$n+m=0$ componentes en fase opuesta $(e^{-jnw_0t};\ e^{+jnw_0t})$

La amplitud $A=B$ El conjugado complejo de la otra y su diferencia promedio es cero

$n+m \neq 0$ las dos señales oscilan a diferente frecuencia

R/

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} |A-B|, & \text{si } n+m=0 \\ \sqrt{A^2+B^2}, & \text{si } n+m \neq 0 \end{cases}$$

Punto 2.

Frecuencias (Hz)

$$w_1 = 100\pi \Rightarrow f_1 = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\ Hz$$

$$w_2 = 3000\pi \Rightarrow f_2 = \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500\ Hz$$

$$w_3 = 11000\pi \Rightarrow f_3 = \frac{11000}{2\pi} = 5500\ Hz$$

Periodos

$T_1 = 1/500 = 0{,}002\ s.$

$T_2 = 1/1500 = 0{,}0006666667\ s.$

$T_3 = 1/5500 = 0{,}0001818182\ s.$

Tomar 3 periodos del componente del menor frecuencia

$3T_1 = 3 \cdot 0{,}002 = 0{,}006\ s.$

Muestreo.

$f_s = 5000\ Hz \Rightarrow T_s = \frac{1}{5000} = 0{,}0002\ s.$

instantes: $t_n = nT_s$

Señal muestreada.

$$x[n] = 3\cos(1000\pi n T_s) + 5\sin(3000\pi n T_s) + 10\cos(11000\pi n T_s)$$

Sustituyendo $T_s = 1/5000$:

$$1000\pi n T_s = 1000\pi \frac{n}{5000} = 0{,}2\pi n,$$

$$3000\pi n T_s = 0{,}6\pi n.$$

$$11000\pi n T_s = 2{,}2\pi n$$

Reducción por propiedad angular

$\cos(2,2\pi n) = \cos(2\pi n + 0,2\pi n) = \cos(0,2\pi n)$

$$\boxed{x(n) = 13\cos(0,2\pi n) + 5\sin(0,6\pi n)}$$

Chequeo Nyquist/Aliasing

$f_s/2 = 2500$ Hz, como $f_s = 5500 > 2500$

Cuantización (4 bits)

$b = 4 \Rightarrow L = 2^4 = 16$ niveles

Estimación de amplitud pico

Amplitud maxima aproximada $\leq \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} \approx 13,928388$

Rango $\approx [-13,928, 13,928]$

Paso de cuantización:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L-1} = \frac{2 \cdot 13,928}{15} \approx \frac{27,856}{15} \approx 1,8570667.$$

Señal cuantizada (uniforme)

$$x_Q[n] = \Delta \cdot \text{round}\left(\frac{x[n] - x_{min}}{\Delta}\right) + x_{min}.$$

SNR teorico aproximado: $SNR(dB) \approx 6,02b + 1,76 = 6,02 \cdot 4 + 1,76$

$= 25,84\,dB$

Punto 3

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0 t} \, dt; \; n \in \mathbb{Z}$$

- Partimos del peso o espectro de Fourier

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jnw_0 t} \, dt$$

Integramos por partes

$u = x(t) \qquad du = x'(t)\, dt$

$dv = e^{-jnw_0 t} dt \qquad v = \frac{j e^{-jnw_0 t}}{n w_0}$

$$\int u\, dv = uv = \int v\, du$$

Sustituyendo

$$C_n = \frac{1}{T} \left[\left(x(t) \frac{j e^{-jnw_0 t}}{n w_0} \right] \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{j}{n w_0} \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} x'(t) e^{-jnw_0 t} \, dt \Big]}_{\text{Nuevamente se resuelve por partes}}$$

$u = x'(t) \rightarrow du = x'' t\, dt$

$dv = e^{-jnw_0 t} dt \rightarrow v = \frac{j e^{-jnw_0 t}}{n w_0}$

De esta manera se obtiene

$$\int_{-T/2}^{T/2} x'(t) e^{-jnw_0 t} \, dt = \left[x'(t) \frac{j e^{-jnw_0 t}}{n w_0} \right] \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{j}{n w_0} \int_{-T/2}^{T/2} x'(t) e^{-jnw_0 t_0} \, dt$$

Asi tenemos C_n de la siguiente manera.

$$C_n = \frac{1}{T}\left(\left[x(t)\frac{je^{-jnw_0t}}{nw_0}\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{j}{nw_0}\left(\left[x'(t)\frac{je^{-jnw_0t}}{nw_0}\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{j}{nw_0}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)e^{-jnwt}dt\right]\right.$$

$$= \frac{1}{T}\left(jx(t)\frac{e^{-jnw_0t}}{nw_0}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{1}{T}\left[x'(t)\frac{e^{-jnw_0t}}{n^2w^2_0}\right]\Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{1}{Tn^2w_0^2}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)e^{-jnw_0t}dt$$

Se evalua la primera integral teniendo en cuenta

$w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{1}{T}\left(jx(t)\frac{e^{-jnw_0t}}{nw_0}\right)\Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{1}{T}\left(jx(T/2)\,T\,e^{\frac{-jn\pi}{2n\pi}} - jx(-T/2)\,T\,e^{\frac{jn\pi}{2n\pi}}\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{jT}{2n\pi}\left[x(T/2)\,e^{-jn\pi} - x(-T/2)\,e^{jn\pi}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[x(T/2) + x(-T/2)\sin(n\pi)\right]$$

$$= 0$$

Se evalua la segunda integra pero en vez de $x(t)$ tenemos $x'(t)$, la cual sera igual a la anterior por lo que tambien será 0

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jnw_0t}dt = \frac{1}{Tn^2w_0^2}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)e^{-jnw_0t}dt$$

Tomamos el rango de $T = t_f - t_i$

$$= \frac{1}{(t_f-t_i)n^2w_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnw_0t}dt$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{(t_i-t_f)n^2w_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnw_0t}dt}$$

- Ahora para los coeficientes de la serie trigonometrica se tiene que el espectro de la serie de fourier se puede calcular como:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \left[\cos(nw_0 t) - j \sin(nw_0 t) \right] dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(nw_0 t) - \frac{j}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \sin(nw_0 t) dt$$

Utilizando la igualdad de la parte real de,

$a_n = 2 \operatorname{Re} \{C_n\}$ sostiene

$$\boxed{a_n = \frac{2}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(nw_0 t) dt}$$

Ahora para la parte imaginaria $b_n = -2 \operatorname{Im} \{C_n\}$ tenemos

$$\boxed{b_n = \frac{2}{(t_i - t_f) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \sin(nw_0 t) dt}$$