2) Encuentra la función de densidad espectral (transf. de Fourier) para las siguientes señales (sin aplicar propiedades).

a) $e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}^+$

$$x(t) \doteq \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ e^{at}, & t < 0 \end{cases} \qquad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} (e^{at} e^{-j\omega t}) dt + \int_{0}^{\infty} (e^{-j\omega t} e^{-at}) dt$$

$$\int_{-\infty}^{0} (e^{at} e^{-j\omega t}) dt = \int_{-\infty}^{0} (e^{(a-j\omega)t}) dt = \left[\frac{e^{(a-j\omega)t}}{a-j\omega} \Big|_{-\infty}^{0} \right] = \left(\frac{1}{a-j\omega}\right) - 0 = \boxed{\frac{1}{-j\omega}}$$

$$\int_{0}^{\infty} (e^{-(a+j\omega)t}) dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \Big|_{0}^{\infty} \right] = 0 - \left(-\frac{1}{(a+j\omega)}\right) = \boxed{\frac{1}{a+j\omega}}$$

$$X(\omega) = \frac{1}{-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

b) $\cos(\omega_c t)$ $\omega_c \in \mathbb{R}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\cos(\omega_c t) = \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$ • ampliamos el coseno

$$X(\omega_c) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2} \right) e^{-j\omega t} \right] dt$$

$$X(\omega_c) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j(\omega_c - \omega)t}) dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-j(\omega_c + \omega)}) dt$$

Al tener la integral de una exponencial compleja tenemos que esta es igual a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha t} dt = 2\pi \delta(\alpha)$

Así tenemos:

$$X(\omega) = \frac{1}{2}\left[2\pi\delta(\omega-\omega_c) + 2\pi\delta(\omega+\omega_c)\right]$$

$$X(\omega) = \pi\left(\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega+\omega_c)\right]$$

c) $x(t) = \text{Sen}(\omega_s t)$; $\omega_s \in \mathbb{R}^+$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sin}(\omega_s t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

ampliamos seno en su forma: $\text{Sen}(\omega_s t) = \dfrac{e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_s t}}{2j}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{e^{j\omega_s t} - e^{-j\omega_s t}}{2j}\right) e^{-j\omega t}\right] dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_s-\omega)t} - e^{-j(\omega_s+\omega)t}\, dt$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2j}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_s-\omega)t}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega_s+\omega)t}\, dt\right]$$

nuevamente se usa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j(a)t}\, dt = 2\pi\delta(a)\ ;$$

primera int; $a = (\omega_s - \omega) \rightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_s)$

seg. integral; $a = a = -(\omega_s+\omega) \rightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_s)$

$$\therefore \boxed{X(\omega) = j\pi\left[\delta(\omega+\omega_s) - \delta(\omega+\omega_s)\right]}$$

d) $f(t)\,\text{Cos}(\omega_c t)$, $\omega_c \in \mathbb{R}$. $f(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{Cos}(\omega_c t)\, e^{-j\omega_c t}\, dt$$

ampliando $\text{Cos}(\omega_c t) = \dfrac{e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}}{2}$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}\right)\cdot e^{-j\omega_c t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(e^{j(\omega_c-\omega)t}+e^{-j(\omega_c+\omega)t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j(\omega-\omega_c)t}\,dt+\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j(\omega_c+\omega)t}\,dt\right)$$

$$\therefore\ X(\omega)=\frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_c)+F(\omega+\omega_c)\right] \quad F(\omega)=\mathcal{F}\{f\}$$

e) $x(t)=e^{-a(t)^2}$; $a\in\mathbb{R}^+$ Señal Gaussiana

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2-j\omega t}\,dt$$

Se lleva $-at^2-j\omega t=-\cancel{a}\left(\frac{-at^2}{-\cancel{a}}+\frac{-j\omega t}{a}\right)$ Se factoriza como

$$\boxed{=-a\left(t^2+\frac{j\omega t}{a}\right)}\rightarrow (a-b)^2 \qquad t^2+\frac{j\omega}{a}t$$

$$\text{o } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\underbrace{t^2+\frac{j\omega}{a}t+\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2}-\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2 \qquad x=t \quad = \quad 2bt=\frac{j\omega}{a}t$$

$$\left.\right] -at^2-j\omega t=-a\left[\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2-\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right] \qquad \boxed{b=\frac{j\omega}{2a}}$$

$$=-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2-\frac{j^2\omega^2}{4a^2}\,j \qquad j^2=1$$

$$=-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2-\left(\frac{(-1)\omega^2}{4a^2}\right)=-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2+\frac{\omega^2}{4\cancel{a^2}}\ \cancel{(-a)}$$

$$=-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2-\frac{\omega^2}{4a}$$

Se sustituye y simplifica en la integral:

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2-\frac{\omega^2}{4a}\right)}$$

Se separa la parte constante del exponente que no depende de t.

$$X(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2}dt$$

Se realiza la integral por sustitución con cambio de variable: $u=t+\frac{j\omega}{2a}$ $du=dt$

$$t=\begin{cases} t\rightarrow -\infty \;;\; u\rightarrow -\infty+\frac{j\omega}{2a}\simeq -\infty \\ t\rightarrow \infty \;;\; u\rightarrow \infty+\frac{j\omega}{2a}\simeq \infty \end{cases}$$

$$X(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au}\,du$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{c}}}$$

En este caso, $c=a$ y la variable es u por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}du=\sqrt{\frac{\pi}{a}} \longrightarrow \boxed{X(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\omega^2}{4a}}}$$

F) $x(t)=A\,\text{recta}_d(t)$, $A, d \in \mathbb{R}$

$$\text{recta}_d(t)=\begin{cases}1, & \text{si } |t|\leq d/2\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$

$x(t)=A$ si $|t|\leq d/2$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A\,\text{recta}_d(t)\,e^{-j\omega t}\,dt.$$

Se acotan los límites de integración

$$X(\omega) = A\int_{-d/2}^{d/2} e^{-j\omega t}\,dt = A\left(\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\Big|_{-d/2}^{d/2}\right)$$

$$= A \cdot \frac{1}{-j\omega}\left(e^{-j\omega(d/2)} - e^{-j\omega(-d/2)}\right)$$

Aplicando la identidad trigonometrica:

$$e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -2j\,\mathrm{Sen}\,\theta$$

$$X(\omega) = \frac{A}{-j\omega}\left(-2j\,\mathrm{Sen}(\omega d/2)\right) = \frac{A \cdot 2\,\mathrm{Sen}(\omega d/2)}{\omega}$$

Se utiliza la definición de sinc normalizado en radianes.

$$\mathrm{Sinc}(x) = \frac{\mathrm{Sinc}(x)}{x}, \quad X(\omega) = A \cdot d\,\frac{\mathrm{Sen}(\omega d/2)}{(\omega d/2)}$$

$$\boxed{X(\omega) = A \cdot d \cdot \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega d}{2}\right)}$$

1.4) Aplique las propiedades de la transformada de Fourier para resolver:

a) $F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\}$ ω_1, $\omega_c \in \mathbb{R}$

Se aplica la identidad trigonometrica

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$$

$$e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t) = e^{-j\omega_1 t}\cdot\frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{-j(\omega_1-\omega_c)t} + e^{-j(\omega_1+\omega_c)t}$$

Se aplica la transformada de Fourier

$$F\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}[F\{e^{-j(\omega_1-\omega_c)t}\} + F\{e^{-j(\omega_1+\omega_c)t}\}]$$

$$F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}[2\pi\delta(\omega-(\omega_1-\omega_c)) + 2\pi\delta(\omega-(\omega_1+\omega_c))$$

$$F\{e^{-j\omega_1 t}\cos(\omega_c t)\} = \pi[\delta(\omega-(\omega_1-\omega_c)) + \delta(\omega-(\omega_1+\omega_c))]$$

---

b) $F\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\}$; $\omega_c \in \mathbb{R}$ $u(t)$ = Funcion escalon

Se aplica la identidad trigonometrica

$$\cos^2(\omega_c t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)$$

$$u(t)\cos^2(\omega_c t) = u(t)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t)\right) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2}u(t)\cos(2\omega_c t)$$

def _init_(self, mascota[perro])
def _init_(self, tipo mascota)

Aplicando propiedades lineales de la transformada de Fourier:

$$F\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}F\{u(t)\} + \frac{1}{2}F\{u(t)\cos(2\omega_c t)\}$$

La transformada de Fourier de $u(t)$ es:

$$\boxed{F\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

Ahora para $u(t)\cos(2\omega_c t)$ se utiliza la propiedad de modulación

$$F\{u(t)\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}\left[F\{u(t)e^{j\omega_0 t}\} + F\{u(t)e^{-j\omega_0 t}\}\right]$$

Además,

$$\boxed{F\{u(t)e^{\pm j\omega_0 t}\} = \pi\delta(\omega \mp \omega_0) + \frac{1}{j(\omega \mp \omega_c)}}$$

$$F\{u(t)\cos(2\omega_c t)\} = \frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{j(\omega - 2\omega_c)} + \pi\delta(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{j(\omega + 2\omega_c)}\right]$$

$$F\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\} = \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right) + \frac{1}{4}\left[\pi\delta(\omega - \omega_c) + \frac{1}{j(\omega - \omega_c)} + \pi\delta(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{j(\omega/2\omega_c)}\right]$$

$$F\{u(t)\cos^2(\omega_c t)\} = \frac{\pi}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{2j\omega} + \frac{\pi}{4}[\delta(\omega - 2\omega_c) + \delta(\omega + 2\omega_c)] + \frac{1}{4j}\left[\frac{1}{\omega - 2\omega_c} + \frac{1}{\omega + 2\omega_c}\right]$$

Norma

c) $F^{-1}\left\{\frac{7}{\omega^2+6\omega+45}\cdot\frac{10}{(8+\frac{j\omega}{3})^2}\right\}$

Se aplica el teorema de convolución para la transformada de Fourier:

$$F^{-1}\{F(\omega)\cdot G(\omega)\} = 2\pi\cdot f(t)\cdot g(t)$$

Donde:

$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\}$; $g(t) = F^{-1}\{G(\omega)\}$

Se calcula la transformada inversa de la primera función $f(t)$.

$F(\omega) = \frac{7}{\omega^2+6\omega+45} \xrightarrow[\text{factorización}]{} \omega^2+6\omega+45 = (\omega^2+6\omega+9)+36) = (\omega+3)^2+6^2$

$F(\omega) = \frac{7}{(\omega+3)^2+6^2}$, Aplicamos la propiedad par de transformada (decaimiento exponencial)

$F\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \longrightarrow H(\omega) = \frac{7}{\omega^2+6^2} \rightarrow a=6$

$F^{-1}\left\{\frac{2(6)}{6^2+\omega^2}\right\} = e^{-6|t|}$, Ajustando las constantes.

$$H(\omega) = \frac{7}{12}\cdot\frac{12}{\omega^2+6^2} \longrightarrow h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{7}{12}e^{-6|t|}$$

Luego se aplica la propiedad de desplazamiento en frecuencia. $H(\omega+3) \longrightarrow \omega+3=0$; $\omega_0=-3$

$$f(t) = F^{-1}\{H(\omega+3)\} = e^{-j3t}\,h(t)$$

$$\boxed{f(t) = \frac{7}{12}e^{-j3t}\,e^{-6|t|}}$$

Powered by CamScanner

Se calcula la transformada inversa de la Segunda función $g(t)$.

$G(\omega) = \frac{10}{\left(8 + \frac{j\omega}{3}\right)^2}$; Se aplica la par de transformada:

$$F\{t e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

Reescribiendo $G(\omega)$:

$$\frac{10}{\left(\frac{1}{3}(24+j\omega)\right)^2} = \frac{10}{\frac{1}{9}(24+j\omega)^2} = \boxed{\frac{90}{(24+j\omega)^2}}$$

La expresión $\frac{90}{(24+j\omega)^2}$ coincide con $\frac{1}{(a+j\omega)^2}$

$$g(t) = F^{-1}\left\{\frac{90}{(24+j\omega)^2}\right\} = 90 \cdot F^{-1}\left\{\frac{1}{(24+j\omega)^2}\right\}$$

$$\boxed{g(t) = 90 t e^{-24t} u(t)}$$

Se aplica el teorema de convolución:

$$y(t) = 2\pi . f(t) . g(t)$$

$$y(t) = 2\pi\left(\frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6|t|}\right) \cdot \left(\overset{15}{\cancel{90}} t e^{-24t} u(t)\right)$$

$$u(t) \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

$|t|$

$$e^{-6|t|} e^{-24t} = e^{-6t} \cdot e^{-24t} = e^{-30t} \quad (\text{para } t \geq 0)$$

$$\boxed{y(t) = 105\pi . t . e^{-(30+3j)t} u(t)}$$

Se calcula la transformada inversa de la segunda función $g(t)$.

$G(\omega) = \dfrac{10}{\left(8 + \frac{j\omega}{3}\right)^2}$; Se aplica la par de transformada:

$$F\{t e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

Reescribiendo $G(\omega)$:

$$\frac{10}{\left(\frac{1}{3}(24+j\omega)\right)^2} = \frac{10}{\frac{1}{9}(24+j\omega)^2} = \boxed{\frac{90}{(24+j\omega)^2}}$$

La expresión $\dfrac{90}{(24+j\omega)^2}$ coincide con $\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$

$$g(t) = F^{-1}\left\{\frac{90}{(24+j\omega)^2}\right\} = 90 \cdot F^{-1}\left\{\frac{1}{(24+j\omega)^2}\right\}$$

$$\boxed{g(t) = 90\, t\, e^{-24t} u(t)}$$

Se aplica el teorema de convolución:

$$y(t) = 2\pi \cdot f(t) \cdot g(t)$$

$$y(t) = 2\pi\left(\frac{7}{12} e^{-j3t} e^{-6|t|}\right) \cdot \left(\overset{15}{\cancel{90}}\, t\, e^{-24t} u(t)\right)$$

$$u(t)\,|t| \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ t & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

$$e^{-6|t|} e^{-24t} = e^{-6t} \cdot e^{-24t} = e^{-30t} \quad (\text{para } t \geq 0)$$

$$\boxed{y(t) = 105\pi \cdot t \cdot e^{-(30+3j)t}\, u(t)}$$

d) $F\{3t^3\}$, Aplicando la propiedad de linealidad

$F\{3t^3\} = 3F\{t^3\}$; propiedad de diferenciación en frecuencia

$F\{t^n x(t)\} = j^n \frac{d^n}{d\omega^n} X(\omega) \xrightarrow[x(t)=1]{n=3}$ $X(\omega) = F\{x(t)=1\}$

$$\boxed{F\{1\} = 2\pi\delta(\omega)}$$

$F\{t^3\} = j^3 \frac{d^3}{d\omega^3}[2\pi\delta(\omega)] \rightarrow j^3 = j^2 \cdot j = (-1)j = -j$

$F\{t^3\} = -j2\pi \frac{d^3}{d\omega^3}\delta(\omega) \rightarrow \boxed{\frac{d^3}{d\omega^3}\delta(\omega) = \delta^{(3)}\omega}$

$F\{3t^3\} = 3\cdot(-j2\pi\delta^{(3)}\omega) \rightarrow \boxed{F\{3t^3\} = -j\,6\,2\pi\,\delta^{(3)}(\omega)}$

---

e) $\frac{B}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2+(\omega-n\omega_0)^2} + \frac{1}{a+j(\omega-n\omega_0)}\right)$; donde $n \in \{0, \pm1, \pm2 \dots\}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, y $B, T \in \mathbb{R}^+$

$X(\omega) = C\sum_{-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$; Si $x(t) = f(t)\sum_{K=-\infty}^{+\infty}\delta(t-KT)$

Multiplicación de una señal aperiodica f(t) por un tren de impulsos periodicos

$X(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{K=-\infty}^{+\infty} F(\omega - n\omega_0)$

La constante de escala es B La función de forma base en frecuencia es:

$F(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2} + \frac{1}{a+j(\omega)}$

$f(t) = F^{-1}\{F(\omega)\}$; Como $F(\omega)$ es una suma, se puede aplicar la propiedad de linealidad.

$$F^{-1}\left\{\frac{1}{a^2+w^2}\right\}+F^{-1}\left\{\frac{1}{a+jw}\right\}$$

Para el primer termino aplicando la misma propiedad anterior:

$$F^{-1}\{e^{-a|t|}u(t)\}=\frac{1}{a+jw} \longrightarrow F^{-1}\left\{\frac{1}{a+jw}\right\}=e^{-at}u(t)$$

Entonces la función base f(t) es:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2a}e^{-a|t|}+e^{-at}u(t)}$$

Ahora, se construye la señal final en el dominio del tiempo.

$$X(t)=B.\,F(t)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-KT)\right)$$

$$X(t)=B\left(\frac{1}{2a}e^{-a|t|}+e^{-at}u(t)\right)\sum_{n=-\infty}\delta(t-KT)$$

$$X(t)=B\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(KT)\cdot\delta(t-KT)\,;\quad F(KT)=\frac{1}{2a}e^{-a|KT|}+e^{-aKT}u(KT)$$

Entonces, la expresión final para la señal en el tiempo es:

$$\boxed{X(t)=B\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2a}e^{-|KT|}+e^{-aKT}u(KT)\right)\delta(t-KT)}$$