Írta:
SZALKAI ISTVÁN
DÓSA GYÖRGY

KALKULUS PÉLDATÁR INFORMATIKUSOKNAK II.

Egyetemi tananyag

TYPOTEX

2011

COPYRIGHT: © 2011–2016, Dr. Szalkai István, Dr. Dósa György, Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kar Matematika Tanszék

LEKTORÁLTA: Dr. Molnárka Győző, Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Kar Mechatronika és Gépszerkezettan Tanszék

Creative Commons NonCommercial-NoDerivs 3.0 (CC BY-NC-ND 3.0)
A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.

TÁMOGATÁS:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.

ISBN 978-963-279-522-5

KÉSZÜLT: a Typotex Kiadó gondozásában
FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa
AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Juhász Lehel

KULCSSZAVAK:
többváltozós integrálás és deriválás, közönséges differenciálegyenletek, parciális törtekre bontás, Laplace-transzformáció, Fourier-sorok.

ÖSSZEFOGLALÁS:
A példatárban található feladatok felölelik a többváltozós integrálás és deriválás, közönséges differenciál- és integro- egyenletek, a parciális törtekre bontás, Laplace-transzformáció és Fourier-sorok, az RLC elektronikus áramkörök alapjait. A bőséges útmutatóban röviden megtaláljuk a legfontosabb megoldási módszerek leírását is. A feladatgyűjtemény legnagyobb részét a feladatok részletes megoldásai (esetenként magyarázatokkal, megjegyzésekkel) teszik ki. A függelékben a legfontosabb tételek, képletek, táblázatok és tárgymutató kaptak helyet. Két animáció és két szemléltető program is segíti a megértést és egyszerűbb feladatok kiszámíttatását. Mind egyéni, mind csoportos felkészüléshez ajáljuk ezt a példatárat.

Tartalomjegyzék

Bevezetés **7**

Feladatok **9**
F1. Többváltozós függvények folytonossága és deriválhatósága . . . 9
Folytonosság . . . 9
Parciális deriváltak . . . 9
Differenciálhatóság . . . 10
Iránymenti derivált . . . 10
Összetett függvény deriválása . . . 11
Magasabbrendű deriváltak . . . 11
Szélsőértékszámítás . . . 12
Érintősík, Taylor-polinom, közelítő módszerek . . . 12
F2. Két- és többváltozós integrálok . . . 12
Szukcesszív integrálás . . . 12
Transzformációk . . . 14
Többváltozós integrálok . . . 15
F3. Többváltozós integrálok alkalmazásai . . . 15
F4. Közönséges differenciálegyenletek alapjai . . . 16
F5. Elsőrendű differenciálegyenletek . . . 17
Szétválasztható változójú egyenletek . . . 17
Visszavezethető típusok . . . 17
Lineáris egyenletek . . . 17
Bernoulli-egyenletek . . . 18
Egzakt egyenletek . . . 18
F6. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai . . . 18
F7. Parciális törtekre bontás . . . 19
F8. Laplace-transzformáció és inverze . . . 20
F9. Integro-differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval . . . 21
Lineáris differenciálegyenletek és -rendszerek . . . 21
Integro-differenciálegyenletek és -rendszerek . . . 22
Alkalmazások . . . 22
F10. Fourier-sorok, alkalmazások . . . 24
Fourier-sorok . . . 24
Alkalmazások . . . 25

© *Szalkai István, Dósa György, Pannon Egyetem* © *www.tankonyvtar.hu*

Útmutatások **26**
U1. Többváltozós függvények folytonossága és deriválhatósága . . . 26
U2. Két- és többváltozós integrálok, transzformációk . . . 29
Transzformációk . . . 30
U3. Többváltozós integrálok alkalmazásai . . . 32
Fizikai képletek . . . 32
U4. Közönséges differenciálegyenletek alapjai . . . 33
U5. Elsőrendű differenciálegyenletek . . . 34
Szétválasztható változójú egyenletek . . . 34
Visszavezethető típusok . . . 34
Lineáris egyenletek . . . 34
Bernoulli-egyenletek . . . 35
Egzakt egyenletek . . . 35
U6. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai . . . 36
U7. Parciális törtekre bontás . . . 36
U8. Laplace-transzformáció és inverze . . . 37
U9. Integro-differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval . . . 37
Alkalmazások . . . 37
U10. Fourier-sorok, alkalmazások . . . 38
R-L-C áramkörökről . . . 39

Megoldások **40**
M1. Többváltozós függvények folytonossága és deriválhatósága . . . 40
Folytonosság . . . 40
Parciális deriváltak . . . 41
Differenciálhatóság . . . 43
Iránymenti derivált . . . 47
Összetett függvény deriválása . . . 49
Magasabbrendű deriváltak . . . 51
Szélsőértékszámítás . . . 53
Érintősík, Taylor-polinom, közelítő módszerek . . . 61
M2. Két- és többváltozós integrálok, transzformációk . . . 63
Szukcesszív integrálás . . . 63
Transzformációk . . . 71
Többváltozós integrálok . . . 73
M3. Többváltozós integrálok alkalmazásai . . . 75
M4. Közönséges differenciálegyenletek alapjai . . . 80
M5. Elsőrendű differenciálegyenletek . . . 82
Szétválasztható változójú egyenletek . . . 82
Visszavezethető típusok . . . 83
Lineáris egyenletek . . . 87
Bernoulli-egyenletek . . . 88
Egzakt egyenletek . . . 89
M6. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai . . . 91

M7. Parciális törtekre bontás 96
M8. Laplace-transzformáció és inverze 100
M9. Integro-differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval 105
Lineáris differenciálegyenletek és -rendszerek 105
Integro-differenciálegyenletek és -rendszerek 112
Alkalmazások 113
M10. Fourier-sorok, alkalmazások 118
Fourier-sorok 118
Alkalmazások 127

Javasolt irodalom **130**

Név- és tárgymutató **131**

Bevezetés

Feladatgyűjteményünk újdonsága, hogy (majdnem) minden feladat részletes, lépésenkénti megoldását tartalmazza, rövid elméleti magyarázatokkal. A megoldás elolvasása előtt azonban olvassuk el a 2. részben írt rövid *Útmutatást*, ahol a legtöbb elméleti képletet is megtaláljuk.

Két *animációt* és **két** *interaktív* **programot** is mellékelünk:
ARAMKOR-ANIM.GIF (+html) és TRAKTRIX-ANIM.GIF (+html), IRANYMEZO.EXE és EULERTV.EXE, ez utóbbiakhoz tömör HELP vagy HELP használati útmutató és mintaképek is tartoznak.

A válogatott gyakorlati példák elsősorban a matematikai számítási *módszerek* (többváltozós integrál- és differenciálszámítás, közönséges differenciálegyenletek) és azok *alkalmazásainak* (modell-állítás) jobb megértését kívánják elősegíteni. Kiemelten kezeltük az elektronikai alkalmazásokat. Bár nem a szokásos analízishez tartozik: közelítő módszereket is igyekeztünk minél többet bemutatni: érintősíkok, Euler-töröttvonal, Fourier-sorok, stb. felhasználásával. Ezek nagy része a folytonos mennyiséget/módszert közelíti *diszkrét* mennyiségekkel illetve módszerekkel, ami az informatikai módszerek egyik alappillére.

Természetesen *nem* csak informatikusok forgathatják haszonnal a feladatgyűjteményt: a feladatokat szigorú matematikai alapossággal oldjuk meg, az alkalmazások megértéséhez középiskolai ismeretek is elegendőek.

A feladatok nehézségi foka nagyon sokféle: az egyszerű bevezető példáktól egészen a „tanárizzasztó” méretűig minden megtalálható benne.

Terjedelmi okokból kimaradtak: komplex számok és alkalmazásaik; differenciálegyenleteknél az „*állandók variálása*” és a „*klasszikus*” módszerek, hiányos egyenletek. Legtöbb feladattípusra csak *egy* megoldási módszert ismertetünk, mégpedig azokat a módszereket részesítettük előnyben, melyek K.É.P. nélkül általános megoldásokat adnak. Magasabbrendű egyenleteket csak Laplace transzformációval oldunk meg. Részletes *Laplace-*, *differenciálás egyéb* **táblázatokat** (és egyéb oktatási segédanyagokat) találunk **Szalkai István** honlapjának **Analízis** c. részében: HTTP://MATH.UNI-PANNON.HU/~SZALKAI/ címen.

Elemi analízis problémák gyakorlására javasoljuk **dr. Koltay László – dr. Szalkai István:** *Analízis I. feladatgyűjteményét* (Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2008), amely szintén részletes megoldásokat és megjegyzéseket, képleteket is tartalmaz.

Néhány alkalmazott **jelölés:** $y = f(x)$ helyett sokszor csak y-t vagy $y(x)$-t írunk, e^x helyett néha $\exp(x)$-et; $\operatorname{arctg}(x) = \arctan(x)$, $\operatorname{sh}(x) = \sinh(x)$, $\operatorname{ch}(x) = \cosh(x)$, $\operatorname{th}(x) = \tanh(x)$, stb.;
többváltozós függvényeknél: $z = f(x, y)$ vagy $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

többdimemziós pontoknál: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vagy $\underline{a}$ csak egyszerűen a, P;
parciális deriváltakra: $D_1 f$, $\frac{\partial}{\partial x_1} f$, $\frac{d}{dx_1} f$, f_1' vagy csak $D_x f$, $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{d}{dx} f$, f_x';
DIFE = *„differenciálegyenlet”*, K.É.P. = *„Kezdeti Érték Probléma”*;
$H(t) = 1$ $(t \geq 0)$ és $H(t) = 0$ máskor – ún. *Heaviside* függvény.

Köszönetünket fejezzük ki **dr. Gróf Józsefnek** és **dr. Székely Sándornak**, a Matematika Tanszék lelkes oktatóinak az alkalmazások terén nyújtott sok segítségért!

Feladatok

F1. Többváltozós függvények folytonossága és deriválhatósága

Folytonosság

1.1. Számítsuk ki a következő függvények határértékét és ellenőrizzük lehetséges folytonosságukat a feltüntetett „kritikus” helyeken:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} \cos(y)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{xy}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$,

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$,

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$,

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$, $\quad \lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \sin\left(\frac{\pi x}{6x+y}\right)$.

Parciális deriváltak

1.2. Adjuk meg a parciális deriváltak értékét az adott helyeken!

a) $f(x,y) = 2x^2 + y - \frac{\sqrt{x}}{y} + \pi \quad x \geq 0,\, y \neq 0$

$\frac{\partial}{\partial x} f(1,2)$, $\quad \frac{\partial}{\partial y} f(1,2)$, $\quad \frac{\partial}{\partial x} f(0,-4)$, $\quad \frac{\partial}{\partial y} f(0,-4)$.

b) $f(x,y,z) = ze^{-\frac{x}{y}} \quad x,\, z \in \mathbb{R},\ y \neq 0$

$\frac{\partial}{\partial x} f(0,1,2)$, $\quad \frac{\partial}{\partial y} f(1,2,0)$, $\quad \frac{\partial}{\partial z} f(1,1,0)$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, $\quad \frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$, $\quad \frac{\partial}{\partial y} f(0,1)$, $\quad \frac{\partial}{\partial x} f(1,2)$.

1.3. Adjuk meg a parciális derivált függvényeket!

a) $f(x,y,z) = x^2 + x\cdot y^2 + 3z^2 \quad x,\, y,\, z \in \mathbb{R}$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$, $\quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)$, $\quad \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)$.

b) $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (x^2+y^2>0)$, $\quad \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$, $\quad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$.

Differenciálhatóság

1.4. Vizsgáljuk meg az alábbi függvények differenciálhatóságát!

a) $f(x,y)=x^2-xy+y^2$

b) $f(x,y)=y\sin^2 x+x\cos^2 y$

c) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

d) $f(x,y)=\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$

e) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2>0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

1.5. Adjuk meg a gradiensvektort az adott pontokban!

a) $f(x,y)=x^3+y^2-3xy$ $\quad (0,0)$, $\quad (0,1)$, $\quad (x,y)$,

b) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad (1,1,1)$, $\quad (x,y,z)$,

c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ $\quad (1,2,3)$, $\quad (x,y,z)$,

d) $f(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (3,4,5)$, $\quad (x,y,z)$.

Iránymenti derivált

1.6. Adjuk meg az f függvény iránymenti deriváltját az a pontban a v vektor illetve α szög irányában!

a) $f(x,y,z)=e^{x^2+y^2}$ $\quad a=(-1,2)$, $\quad v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

b) $f(x,y,z)=z\sin(x+y)$ $\quad a=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6},1\right)$, $\quad v=\left(3,\sqrt{11},4\right)$,

c) $f(x,y)=\ln(x+y)$ $\quad a=(1,1)$, $\quad \alpha=30^\circ$,

d) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2>0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ $\quad a=(0,0)$, $\quad v=\left(1,\sqrt{3}\right)$.

1.7. Adjuk meg az $f(x,y)=x^2-2x^2y+xy^2+1$ függvény $P(1,2)$ pontbeli, $\overrightarrow{Q}(4,6)$ vektor irányába vett iránymenti deriváltját!

1.8. Milyen irányban változik „legjobban” az $f(x,y)=x^2+4y^2$ függvény a $P(2,1)$ pontban?

Összetett függvény deriválása

1.9. Adjuk meg az összetett függvény deriváltját!

a) $f(x,y,z) = xyz, \qquad x(u,v) = u^2 + v, \qquad y(u,v) = u - v^2, \qquad z(u,v) = \sin u,$

b) $f(x,y) = \frac{x}{y}, \qquad x(t) = \ln t, \qquad y(t) = e^t,$

c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}, \qquad x(r,\phi) = r\cos\phi, \qquad y(r,\phi) = r\sin\phi.$

1.10. Adjuk meg az $f \circ (x,y)$ összetett függvény gradiensét az $\underline{a}$ pontban (azaz $f(x(\underline{a}), y(\underline{a}))$ értékét), ha

a) $f(x,y) = x^2 + xy, \qquad \underline{a} = (1,2), \qquad x(1,2) = 3, \qquad y(1,2) = 4,$

$\operatorname{grad} x(1,2) = (-1,0), \qquad \operatorname{grad} y(1,2) = (\sqrt{2}, 10),$

b) $\frac{\partial}{\partial x} f(-1,1) = 3, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(-1,1) = 2,$

$x(u,v) = u^2 - v^2, \quad y(u,v) = -\frac{uv}{\sqrt{2}}, \qquad \underline{a} = (-1, \sqrt{2}).$

1.11. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és legyen

$f(x,y) = xy + g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0).$ Mutassuk meg, hogy teljesül az

$x \cdot \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + y \cdot \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2xy$ összefüggés.

Magasabbrendű deriváltak

1.12. Adjuk meg az alábbi parciális derivált függvényeket:

a) $f(x,y) = \sqrt{2xy + y^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f,$

b) $f(x,y,z) = 2x^2y - 3y^2z + xyz \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f, \qquad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} f, \qquad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f,$

c) $f(x,y) = x^y \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f, \qquad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f, \qquad \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x} f.$

1.13. Számítsuk ki a következő parciális deriváltak értékét a megadott helyen:

a) $f(x,y) = \frac{1+x}{1+y} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,1), \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(2,2),$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0), \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0).$

1.14. Ha $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvények, mutassuk meg, hogy az

$f(x,y) = g(xy) + \sqrt{xy} \cdot h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (xy > 0)$ függvényre teljesül, hogy

$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) - y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0.$

Szélsőértékszámítás

1.15. Hol vannak stacionárius pontjai (hol lehet szélsőértéke) az alábbi függvényeknek?

a) $f(x,y,z) = x^2 + 2xy - 2x + 2y^2 - 2y + z^2 + 1$

b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \sin x + \cos y + x - y.$

1.16. Keressük az alábbi függvények szélsőértékeit:

a) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

b) $f(x,y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$

d) $f(x,y) = xy\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (x^2+y^2 \le 1)$

e) $f(x,y) = \dfrac{1-x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

Érintősík, Taylor-polinom, közelítő módszerek

1.17. i) Írja fel az alábbi függvények érintősíkjának egyenletét a megadott $\underline{a}$ pontokban,
ii) az érintősík segítségével közelítse a függvényt az $\underline{a}$ pont egy környezetében,
iii) számítsa ki a függvény értékét közelítőleg a $\underline{b}$ pontban:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \underline{a} = (4{,}3), \quad \underline{b} = (4{,}01; 2{,}97),$

b) $f(x,y) = x^y + \frac{x}{y}, \quad \underline{a} = (3{,}2), \quad \underline{b} = (2{,}98; 2{,}03),$

c) $x^3 + x - y^3 + 2y + z^3 + 15 = 0, \quad P = (-1{,}3, 2), \quad b(-1{,}03; 2{,}96).$

1.18. Keresse meg az alábbi egyenletrendszer egy közelítő megoldását a függvények érintősíkjainak segítségével a megadott kezdő értékekből kiindulva, 6 tizedesjegy pontossággal:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + 37 = 0 \\ g(x,y) = 3x^2 - 5x^2y + 2y^3 - 6 = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 1{,}5, \quad y_0 = 2{,}5 \quad$ ill. $\quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$

1.19. Írja fel az $f(x,y,z) = \frac{x^2y}{x+3z}$ függvény $a = (2, -1{,}8)$ pont körüli 3-rendű Taylor-polinomját, és ennek felhasználásával becsülje meg az $f(1{,}99, -0{,}89, 8{,}06)$ függvényértéket!

F2. Két- és többváltozós integrálok

Szukcesszív integrálás

2.1. Számítsuk ki az alábbi *szukcesszív* (ismételt) integrálokat:

a) $\int\limits_3^7 \left(\int\limits_4^5 x^2 + y^3 \, dx \right) dy, \quad \int\limits_1^2 \left(\int\limits_8^9 x^5y^3 \, dy \right) dx,$

b) $\int\int\limits_H f$ ahol $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ és H az $A(2,3)$, $B(2,5)$, $C(6,5)$, $D(6,3)$ pontok által határolt téglalap.

c) $\int\limits_{[1,2]\times}\int\limits_{[0,3]} (2x^2+3xy+4y^2)\,dxdy.$

2.2. Számítsa ki az alábbi $\int\limits_a^b \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dydx$ integrálokat, ahol

a) $u(x)=x^2-2x-4$, $v(x)=3x^2+8x$, $f(x,y)=3x^2+8y^2-xy$, $a=-6{,}83$, $b=8{,}49$,

b) $u(x)=x^2+x-4$, $v(x)=3\sqrt{x}+8x$, $f(x,y)=x^2+xy$, $a=3$, $b=9$.

2.3. Számítsa ki az alábbi $\int\int\limits_H f$ integrálokat, ahol a H korlátos tartományt alulról és felülről a g és h függvénygörbék határolják:

a) $f(x,y)=x+y,\quad g(x)=x^2+2x,\quad h(x)=4-x^2,$

b) $f(x,y)=2y,\quad g(x)=x^2,\quad h(x)=x+2,$

c) $f(x,y)=y\cos(x),\quad g(x)=\sin(x),\quad h(x)=2\sin(x),\quad 0\le x\le\pi.$

2.4. Számítsa ki az alábbi $\int\int\limits_H f$ integrálokat. (Minden esetben rajzolja fel a H tartományt is. Ahol lehet, számítsa ki az integrált mind függőlegesen, mind vízszintesen is.)

a) $f(x,y)=x^2+y+1$, H-t az x-tengely, y-tengely és az $x+2y=1$ egyenes határolják,

b) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}$ és $H=\{(x,y): x\le y\le 1,\ 0\le x\le 1\}$,

c) $f(x,y)=xy$ és H a koordinátatengelyek és az $y=1-x$ egyenes által bezárt korlátos halmaz,

d!) $f(x,y)=x^2+y^3$, $H=ABC_\triangle=$ az $A(3,2)$, $B(5,8)$ és $C(9,4)$ pontok által meghatározott háromszög,

e) $f(x,y)=yx$ és $H=$ az $(1,0)$ középpontú egységsugarú kör x tengely feletti fele,

f) $f(x,y)=y$ és $H=$ origó középpontú egységsugarú kör I. síknegyedbe eső negyede,

g) $f(x,y)=1+2xy$ és H az $y=\sqrt{x}$, $y=2x-1$ és $x=0$ görbék által határolt korlátos halmaz,

h) $f(x,y)=xe^y$ és H-t az $x=0$, $y=0$, $y=2$ és $y=4-2x$ egyenesek határolják.

2.5. Adja meg a H tartományt az alábbi feladatokban:

a) $\int\limits_1^3 \int\limits_1^{4x-x^2} f(x,y)\,dydx,$ *b)* $\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int\limits_{1/2}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy,$

c) $\int\limits_0^2 \int\limits_y^{1+\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dxdy.$

2.6. Cserélje fel az integrálás sorrendjét (azaz vízszintes és függőleges irányát) az alábbi feladatokban:

a) $\int\limits_0^{1,5}\int\limits_0^{3-y/2} f(x,y)\,dxdy$, $\int\limits_0^{1}\int\limits_y^{1} f(x,y)\,dxdy$, $\int\limits_1^{3}\int\limits_1^{4x-x^2} f(x,y)\,dydx$,

$\int\limits_0^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dxdy$, $\int\limits_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2}\int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$,

b)* $\int\limits_0^{3}\int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dydx + \int\limits_3^{4}\int\limits_{2x-6}^{x^2} f(x,y)\,dydx$,

c) a 2.5. feladatban szereplő integrálokban.

2.7. Számítsa ki az $\int\int\limits_H e^{x^2}\,dxy$ integrált, ahol H-t az x-tengely, az $y = x$ és az $x = 1$ egyenesek határolják.

Transzformációk

2.8. Számítsuk ki az alábbi $\int\int\limits_H f$ integrálokat *polártranszformáció* segítségével, ahol:

a) $f(x,y) = y$ és $H =$ origó közepű egységsugarú kör I. síknegyedbe eső negyede,

b) $f(x,y) = yx$ és $H =$ az $(1,0)$ közepű egységsugarú kör x tengely feletti fele,

c$_1$*)* $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$ és $H = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ y > -x\}$,

c$_2$*)* $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ és $H = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$,

c$_3$*)* $f(x,y) = x^3 - 2xy$ és $H = \left\{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$,

d) $f(x,y) = 3x + y$ és $H = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1\right\}$.

2.9. Számítsuk ki az alábbi $\int\int\limits_H f$ integrálokat *lineáris transzformáció* segítségével, ahol:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$ és $H =$ az $A(0,0)$, $B(3,1)$, $C(5,4)$, $D(2,3)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

b) $f(x,y) = xy$ és $H =$ az $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(1,3)$, $D(2,1)$ pontok által meghatározott paralelogramma,

c) $f(x,y) = x + y$ és $H =$ az $A(-2,0)$, $B(0,3)$, $C(2,0)$, $D(0,-3)$ pontok által meghatározott paralelogramma.

2.10. Számítsuk ki az alábbi $\int\int\limits_H f$ integrálokat *egyéb* transzformáció segítségével, ahol:

a) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$, $H =$ az $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{4}{x}$, $y = x$ és $y = 2x$ görbék által meghatározott korlátos síkrész,

b)* $f(x,y)=1$, $H=$ az $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{4}{x}$, $y=x^2/2$ és $y=2x^2$ görbék által meghatározott korlátos síkrész,

c) $f(x,y)=2x+3y$, $H=$ az $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$ és $y=5\sqrt{x}$ görbék által meghatározott korlátos síkrész.

Többváltozós integrálok

2.11. Számítsuk ki az alábbi szukcesszív többszörös integrálokat:

a) $\int\int\limits_H\int (x+3y^5+xz^2)\,dxyz$ ahol H az $(-1{,}2,-3)$ és $(4,5,9)$ átlós csúcsokkal meghatározott téglatest,

b) $\int\limits_1^2\int\limits_{2-x}^{2+3x}\int\limits_{x-7y}^{x+y}(x^2-3y^3+xz)\,dzdydx$, *c*)* $\int\limits_0^a\int\limits_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}\frac{yz}{\sqrt{x}}\,dzdydx.$

F3. Többváltozós integrálok alkalmazásai

3.1. Számítsuk ki az alábbi görbék közötti *területet*:

a) $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{4}{x}$, $y=x$ és $y=2x$,

b) $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{4}{x}$, $y=x^2/2$ és $y=2x^2$.

3.2. Határozza meg az $f(x,y)=1-x^2-2y^2$ ellipszis keresztmetszetű „paraboloid” $[x,y]$ sík feletti részének *térfogatát*.

3.3. Határozza meg az $x^2+z^2=r^2$ és $y^2+z^2=r^2$ egymásra merőleges hengerek *metszetének térfogatát*.

3.4. Mekkora *térfogatot* metsz ki az origó középpontú, $R=2$ sugarú gömbből az $\rho=R/2$ sugarú, az origót érintő henger (*Viviani- féle test*)?

3.5. Határozza meg a $z=xy$ ún. „**nyeregfelület**” $x^2+y^2=R$ kör „feletti” részének *felszínét*.

3.6. Határozza meg a $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ forgási paraboloid alakú tükör *felszínét*.

3.7. Határozzuk meg az alábbi, $[x,y]$ síkban fekvő síkidomok *súlypontjainak* koordinátáit:

a) az $y=x^2$ görbe és $y=0$, $x=4$ egyenesek által határolt (homogén) paraboladarab,

b) az $x^2+y^2\le R^2$ homogén körlemez $y\ge 0$ fele,

c) $\left\{(x,y):x^{2/3}+y^{2/3}\le R^2\right\}$ homogén *asztroid* I. síknegyedbe eső negyede.

3.8. Az $[x, y]$ sík $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ négyzete fölé állított (z tengellyel párhuzamos) négyzetes hasábot elvágjuk a $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,2)$, $(0,1,1)$ pontokon átmenő S síkkal.

a) Határozzuk meg a keletkezett test *súlypontjának* $[x, y]$ síkra való *vetületét*.

b) Határozzuk meg a súlypont z koordinátáját is!

3.9. Határozzuk meg a $z = 0$, $x = a$, $y = b$ síkokkal és a $z^2 = xy$ felülettel határolt homogén test *súlypontját*.

3.10. Határozzuk meg az R sugarú, m tömegű homogén körlap középpontjára vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát*!

3.11. Határozzuk meg az $a \times b$ méretű homogén téglalap oldalaira vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát.*

3.12. Határozzuk meg az $y = x^2$ görbe és az $y = x$ egyenes közötti homogén síklemez origóra vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát.*

3.13. Határozzuk meg az a élű kocka középpontján átmenő, az élekkel párhuzamos tengelyre vonatkozó *tehetetlenségi nyomatékát.*

F4. Közönséges differenciálegyenletek alapjai

4.0. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek értelmezési tartományát:

a) $y' = x^2 - y^2$, $\quad y' = 2\sqrt{y}$, $\quad y' = \dfrac{x \cdot y}{x^2 - 1}$, $\quad y' = \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{2x}$,

b) $x \cdot y' + 2y = 3x$, $\quad x - \dfrac{y^2}{x^3} + \dfrac{y}{x^2} \cdot y' = 0$.

4.1. Számítsuk ki az alábbi explixit egyenletek kezdetiérték-feladatai megoldásgörbéinek megadott pontbeli érintői egyenletét! Számítsuk ki y'' értékét is a megadott pontokban!

a) $y' = x^2 - y^2$, $\quad y(1) = 2$,

b) $y'(x) = \dfrac{x^2}{y \cdot (1 + x^3)}$, $\quad y(2) = 3$,

c) $y'(x) = \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{2x}$, $\quad y(-1) = -2$,

d)* $x \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = 3x$, $\quad y(0) = 0$.

4.2. Vázoljuk az alábbi explicit egyenletek iránymezőjét, a megadott tartományok legalább 4×4 pontjában, majd vázoljuk a megoldás-sereget („*általános megoldás*"). Végül rajzoljuk fel a K.É.P. megoldását vázlatosan.

(Csak a megoldás elkészítése *után* használjuk a Feladatgyűjteményhez **mellékelt** IRANYMEZO.EXE *interaktív* **programot**!)

a) $y' = x^2 - y^2$, $\quad 2 \le x \le 5, 1 \le y \le 4$, $\quad y(3) = 2$,

b) $y' = 2\sqrt{y}$, $\quad -2 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$, $\quad y(1) = 2$,

c) $y' = \dfrac{x \cdot y}{x^2 - 1}$, $\quad 1 < x \le 4, 0 \le y \le 4$, $\quad y(2) = 1$.

4.3. Oldjuk meg az előző feladat K.É.P.-t *közelítőleg* $\delta = 0{,}1$ lépésközzel: számoljunk ki legalább 10 lépést (Euler „*töröttvonal*” közelítő módszere).

(Csak a megoldás elkészítése *után* használjuk a Feladatgyűjteményhez **mellékelt** EULERTV.EXE *interaktív* **programot**!)

4.4. Ellenőrizzük, hogy az alábbi egyenleteket kielégítik-e a megadott függvények:

a) $y' = \dfrac{y}{x}, \quad y(x) = c \cdot x \ \ (c \in \mathbb{R})$,

b) $y' = \dfrac{x \cdot y}{x^2 - 1}$ ahol $x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0, |x| \leq 1, y > 0)$,

c) $y' = 2\sqrt{y}$ ha $y_1(x) = (x-c)^2$ ill. $y_2(x) = \begin{cases} (x-c)^2 & \text{ha} \quad x \geq c \\ 0 & \text{máskor} \end{cases} \quad (c \in \mathbb{R})$.

F5. Elsőrendű differenciálegyenletek

Oldjuk meg az alábbi elsőrendű differenciálegyenleteket.

Szétválasztható változójú egyenletek

5.1. *a)* $y'(x) = y^2(x) \cdot \cos(x), \quad y(0) = 2$,

b) $y'(x) = \frac{x^2}{y \cdot (1+x^3)}, \quad y(1) = 2$,

c) $y'(x) - 1 - x - y^2 - xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$.

Visszavezethető típusok

A következő típusú differenciálegyenleteket bizonyos transzformációkkal szétválasztható változójú egyenletekké alakíthatjuk.

5.2. *a)* $y'(x) = (y-x)^2, \quad y(1) = 3$,

b) $y'(x) = (2x+3y)^2 + 1, \quad y(0) = -1$,

c) $y'(x) = \cos(x+y), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$.

5.3. *a)* $y'(x) = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 3$,

b) $y'(x) = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}, \quad y(-1) = -2$,

c) $y'(x) = \frac{y}{x} - \cos\frac{y}{x}, \quad y(3) = \pi$.

Lineáris egyenletek

5.4. $y'(x) - x \cdot y(x) = x, \quad y(0) = 1$.

5.5. *a)* $y'(x) + \frac{y(x)}{x} + e^x = 0, \quad y(1) = 0$,

b) $y'(x) - \frac{2x}{1+x^2} \cdot y(x) = 1, \quad y(0) = 1$,

c) $y'(x) + \frac{1-x}{x^2} \cdot y(x) = e^{1/x}, \quad y(-1) = 2$.

5.6. *a)* $y'(x) + y(x) = e^{-x}, \quad y(1) = 0$,

b) $x \cdot y'(x) + 2y(x) = 3x, \quad y(0) = 0$,

c) $(1-x^2) \cdot y'(x) + x \cdot y(x) = 1, \quad y(0) = 1$,

d) $y'(x) + \mathrm{tg}(x) \cdot y(x) = \sin(2x), \quad y(0) = 2$.

Bernoulli-egyenletek

5.7. *a)* $y'(x) - \frac{y(x)}{x} = 2y^2(x), \quad y(1) = 2,$ *b)* $y'(x) - y(x) = x \cdot \sqrt{y(x)}, \quad y(0) = 1,$

c) $y'(x) - \frac{2y}{x} = \frac{y^3}{x^3}, \quad y(-1) = 2.$

Egzakt egyenletek

5.8. *a)* $(x^2 + y) - (y - x)y'(x) = 0, \quad y(2) = 3,$

b) $y'(x) = \frac{2x+3y\cdot x^2}{3y^2-x^3}, \quad y(0) = 0,$

c) $x - \frac{y^2}{x^3} + \frac{y}{x^2} \cdot y'(x) = 0, \quad y(1) = -2,$

d) $\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 \cdot y'(x) = 0, \quad y(2) = 3.$

F6. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

6.1. Határozzuk meg azon függvénygörbéket, melyeket az y tengely körül állandó ω szögsebességgel megforgatva *tetszőleges* pontjára helyezett pontszerű test egyensúlyban marad.

6.2. Határozzuk meg azon görbék egyenletét, amelyeknél az érintési pont felezi az érintőnek a koordinátatengelyek közötti szakaszát.

6.3. Keressük meg azokat az $y = f(x)$ görbéket, amelyeknek bármely $E(x_0, y_0)$ pontjára teljesül a következő: az E-ben húzott *érintő*, az érintési pontban húzott „függőleges” *egyenes* (egyenlete: $x = x_0$) és a „vízszintes” ordináta- (y-) *tengely* által határolt háromszög területe (mindig) egységnyi.

6.4. Egy test 10 perc alatt 100 °C-ról 60 °C-ra hűlt le. A környező levegő hőmérsékletét 20 °C-on tartják. Mikorra hűl le a test 25 °C-ra, ha a hűlés sebessége arányos a test és a környezet hőmérsékletének különbségével?

6.5. 100 gr sóra vizet öntünk és keverjük, az oldódás sebessége a még fel nem oldódott só tömegével arányos. 1 perc elteltével még 50 gr feloldatlan só volt az oldatban. Adjuk meg a feloldott só tömegének időtől való függését!

6.6. Egy 50 literes tartályban 8%-os sóoldat van. Egyszerre megnyitunk két csapot: az egyiken 4 ℓ/perc sebességgel 10%-os sóoldat folyik be, a másikon (egyenletes elkeveredést feltételezve) ugyancsak 4 ℓ/perc sebességgel folyik ki az oldat. Mennyi só lesz a tartályban 15 perc múlva?

6.7. * A járda szélén húzunk h hosszú kötélen egy (pontszerű) kiskocsit, amely kezdetben $d > 0$ távolságban van a járdától. Milyen görbe mentén halad a kocsi?

6.8. Tetszőleges edény alján levő, az edény méreteihez képest kisméretű lyukon keresztül a víz kifolyási sebessége $v = 0{,}6\sqrt{2gh}$, ahol h a nyílás feletti vízoszlop magassága Mennyi idő alatt folyik ki a víz az A területű lyukon keresztül, ha az edény

a) alapkörén álló henger,
b) csúcsán álló (lefelé szűkülő) kúp,
c) felül nyitott félgömb.

6.9. Milyen alakot vesz fel a két rögzített végénél felfüggesztett homogén, nem nyúló kötél, amit csak a saját súlya terhel?

6.10. $u(t)$ feszültségforrásra kapcsoltunk sorosan egy $R = 20\Omega$ ellenállást és egy $L = 10H$ önindukciójú tekercset. Határozzuk meg a $t \geq 0$ idő függvényében az $i(t)$ áramerősséget, ha $i(0) = 0$ és

a) $u(t) = 100$ V (egyenfeszültség),
b) $u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ V (váltófeszültség), $\omega = 100\pi$, $U_0 = 240$ V.

F7. Parciális törtekre bontás

7.1. Végezze el a következő polinomok maradékos osztását:

a) $(x^4 + x^2) : (x - 2)$,

b) $(x^3 + 3x + 5) : (2x^2 - 7x + 9)$,

c) $(4x^5 + 5x - 2) : (2x^3 + 3)$.

7.2. Bontsa fel irreducibilis tényezők szorzatára az alábbi polinomokat:

a) $x^3 - 1, \quad x^3 + 1, \quad x^4 - 1, \quad x^4 + 1, \quad x^2 - 3x + 1, \quad x^2 + 5x + 7,$

b) $2x^3 - 5x^2 + 3x - 2, \quad 2x^3 - x^2 - 1,$

c)* $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1.$

7.3. Bontsa fel az alábbi törteket egy *valódi* tört és egy polinom összegére:

$$\frac{x^4 + 3x - 6}{x^2 + x - 2}, \quad \frac{2x^3 - 7x}{x^4 - 3}, \quad \frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 - 8x + 15}, \quad \frac{x^5 + 1}{x^5 - 3x}, \quad \frac{x^5 + 2x^2 + 3}{x + 1}.$$

7.4. Írja fel az alábbi törtek racionális tört alakját, a konstansok kiszámítása nélkül:

$$\frac{x^3 - 8x^2 + 12}{(x-1)^2\,(x^2 + 4x + 9)}, \quad \frac{x^4 + 5x^2 + 3}{(x+7)\,(x^2 + 5x + 7)^2},$$

$$\frac{x^2 + 8x + 2}{(x-1)^3\,(x^2 + 4x + 9)^2\,(x+7)\,(x^2 + 5)}, \quad \frac{3x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 - 8x + 15}.$$

7.5. Bontsa fel az alábbi törteket parciális törtekre:

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)}, \quad \frac{x + 6}{x^2 + x - 2}, \quad \frac{3x + 2}{(x^2 + 2x + 5)\,(x+1)}, \quad \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2}, \quad \frac{x}{(1 - 2x)^2},$$

$$\frac{x}{(x-1)^3}, \quad \frac{x^3}{(x^2+1)^2}, \quad \frac{x^2+5}{x^4-16}, \quad \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}, \quad \frac{3x^3-2x^2+4}{x^2-8x+15},$$

(*) $$\frac{7s^4+23s^3-30s^2-172s-150}{(s+2)^4(s-5)}.$$

F8. Laplace-transzformáció és inverze

8.1. *a)* Vázoljuk az alábbi függvényeket és számítsuk ki Laplace-transzformáltjukat a definíció alapján:

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ha} \quad 2 \le t < 3 \\ 0 & \textit{máskor} \end{cases}, \qquad f_2(t) = \begin{cases} 1 & \textit{ha} \quad 2 \le t \\ 0 & \textit{máskor} \end{cases},$$

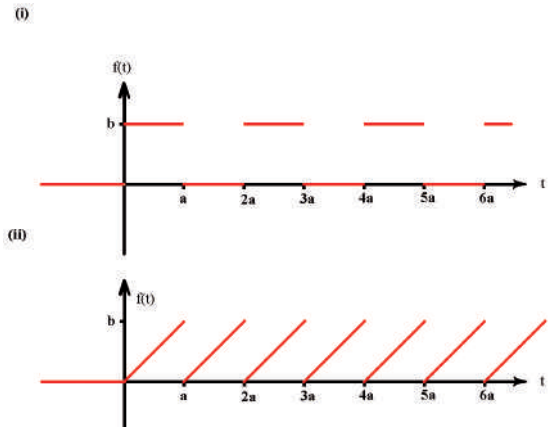
$$f_3(t) = \begin{cases} t & \textit{ha} \quad 3 \le t \\ 0 & \textit{máskor} \end{cases}, \qquad \textbf{(!)}\ f_4(t) = \begin{cases} t-1 & \textit{ha} \quad 1 \le t < 2 \\ 1 & \textit{ha} \quad 2 \le t \\ 0 & \textit{máskor} \end{cases},$$

$f_5(t) = a\ (3,2)$ *és* $(5,7)$ *pontokat összekötő szakasz,*

$$f_6(t) = \begin{cases} \sin(t) & \textit{ha} \quad 2\pi \le t \le 4\pi \\ 0 & \textit{máskor} \end{cases},$$

$$f_7(t) = \begin{cases} k & \textit{ha} \quad k-1 \le t < k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ 0 & \textit{máskor} \end{cases}.$$

b) Az alábbi periodikus függvényekhez keressünk képletet, majd határozzuk meg Laplace-transzformáltjaikat (használjuk a *Heaviside*-függvényt:
$H(t) = 1$ ha $t \ge 0$ és $H(t) = 0$ máskor).



1. ábra. 8.1.*b)*

8.2. Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltját az alapfüggvények és a műveleti szabályok segítségével:

a) $7t^2 - 3t + 5$, $\quad 3 - 4e^{(5+6i)t}$, $\quad e^{5t}\cos(2t)$, $\quad t^3e^{-7t}$, $\quad t^3e^{it}$, $\quad \mathrm{sh}(2t)$, $\quad t \cdot \mathrm{ch}(3t)$, $t^2e^{6t}\sin(4t)$,

b)* 5^t, $\quad \cos^2(t)$, $\quad \cos^3(4t)$, $\quad \frac{1-e^{-t}}{t}$,

c) $f_1(t)$ és $f_4(t)$ a 8.1. feladatból.

8.3. Számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltját:
$t \cdot \cos(\omega t)$, $\quad t \cdot \sin(\omega t)$, $\quad t \cdot \mathrm{ch}(\omega t)$, $\quad t \cdot \mathrm{sh}(\omega t)$.

8.4. Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények *inverz Laplace*-transzformáltját parciális törtekre bontással:

a) $\dfrac{1}{5s-3}$, $\quad \dfrac{1}{s^2-4}$, $\quad \dfrac{1}{s^2+4}$, $\quad \dfrac{5s+3}{s^2+4}$, $\quad \dfrac{s+10}{s^2+4s+3}$, $\quad \dfrac{1}{(s+3)^5}$, $\quad \dfrac{1}{(2s-1)^3}$,

$\dfrac{s+1}{(s+3)^5}$, $\quad \dfrac{4s+2}{s^2+6s+13}$, $\quad \dfrac{1}{s^3+6s^2+13s}$, $\quad \dfrac{s^2}{(s-3)^5}$,

b)* $\dfrac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\quad \dfrac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\quad \dfrac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$,

c) $\dfrac{3s+6}{(s^2+4)^2}$, $\quad \dfrac{s^2-3}{(s^2+4)^2}$, $\quad \dfrac{s^3}{(s^2+9)^2}$, $\quad \dfrac{5s+3}{(s^2-1)^2}$.

8.5. Számítsuk ki a következő konvolúciókat:

$e^{\alpha x} * e^{\beta x}$, $\quad x * e^{\lambda x}$, $\quad x^2 * e^{\lambda x}$, $\quad 1 * f(x)$, $\quad \frac{x^n}{n!} * \frac{x^k}{k!}$ $(n, k \in \mathbb{N})$.

F9. Integro-differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

Lineáris differenciálegyenletek és -rendszerek

Laplace-transzformációval oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenleteket:

9.1. *a)* $y' + 3y = e^x + \cos(2x)$, $\quad y(0) = 1$,

b) $y'' - 2y' - 3y = e^{3x} + 2e^x$, $\quad y(0) = 0, y'(0) = 0$,

c) $y'' - 6y' + 13y = 16xe^x$, $\quad y(0) = 2, y'(0) = 4$,

d) $y'' + 6y' + 13y = e^{3x}\cos(2x)$, $\quad y(0) = 0, y'(0) = 0$,

e) $y''' + 4y' = \cos(2x)$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 0, y''(0) = 0$,

f) $y'' - 3y' - 10y = x^2e^{-2x}$, $\quad y(0) = 7, y'(0) = 2$.

9.2. *a)* $y^{(3)}(x) + y'(x) = 1, \quad y(\pi) = 2, y'(\pi) = 0, y''(\pi) = \pi,$

b) $y^{(3)}(x) - y''(x) = -6x, \quad y(1) = 7, y'(1) = 10, y''(1) = 12.$

9.3. *a)* $y''(x) - y(x) = \frac{1}{1+e^x}, \quad y(0) = y'(0) = 0,$

b) $y''(x) = \text{arctg}(x), \quad y(0) = y'(0) = 0,$

c) $y''(x) - y(x) = \text{th}(x), \quad y(0) = y'(0) = 0,$

d)* $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 1 - e^{-x^2}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

9.4. Laplace-transzformációval oldjuk meg az alábbi lineáris differenciálegyenlet-rendszereket:

a) $\begin{cases} x'(t) = 7x(t) + 9y(t) & x(0) = 8 \\ y'(t) = x(t) - y(t) & y(0) = 2 \end{cases},$

b) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + e^{3t} & x(0) = 0 \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) & y(0) = 0 \end{cases},$

c) $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) - y(t) + 5e^t & x(0) = -1 \\ y'(t) = x(t) - 3y(t) - 50te^t & y(0) = 2 \end{cases},$

d) $\begin{cases} x'(t) = y(t) + 1 & x(0) = 0 \\ y'(t) = z(t) + 2 & y(0) = 0 \\ z'(t) = x(t) + 3 & z(0) = 0 \end{cases}.$

Integro-differenciálegyenletek és -rendszerek

9.5. Laplace-transzformációval oldjuk meg az alábbi integro- differenciálegyenleteket és -rendszereket:

a) $y(x) = \sin(x) + \int_0^x e^{x-t} \cdot y(t)\, dt,$

b) $y'(x) + 2y(x) + \int_0^x y(t)\, dt = \sin(x), \quad y(0) = 1,$

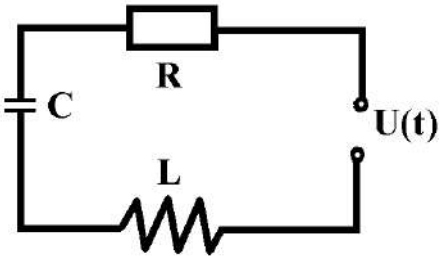
c) $\begin{cases} y_1(x) = 2 - \int_0^x (x-t) \cdot y_1(t)\, dt - 4\int_0^x y_2(t)\, dt \\ y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(t)\, dt - \int_0^x (x-t) \cdot y_2(t)\, dt \end{cases}.$

Alkalmazások

9.6. Egy $R = 3\Omega$ ellenállás, egy $L = 1$ Henry önindukciójú tekercs és egy $C = 0{,}001F$ kondenzátor sorban van kapcsolva az $u(t)$ feszültségre. Mekkora lesz az áramerősség t sec múlva? Az alábbi adatok esetén készítsen számításokat:

a) $u(t) = u_0$, $i(0) = i'(0) = 0$ illetve $i(0) = i_0 > 0$, $i(0) = i_1 \geq 0$ (magára hagyott rezgőkör),

b) $u(t) = \sin(10t)$, $i(0) = i'(0) = 0$ (gerjesztett rezgőkör),



2. ábra. 9.6.*d**)*

c)* vizsgáljuk meg a megoldás tendenciáját ($\lim\limits_{t\to\infty} i(t)$ értékét) a gerjesztő ω_g frekvenciától függően, azaz $u(t) = \sin(\omega_g t)$, $i(0) = i'(0) = 0$,

*d**)* oldjuk meg általánosan $R, L, c \in \mathbb{R}$-re ha $u(t) = U_0 \cdot \sin(\omega_g t)$, $i(0) = i'(0) = 0$, majd hasonlítsuk össze a *c)* feladattal.

9.7. Sűrű anyagban lefelé süllyedő test sebessége $m \cdot v'(t) = mg - k \cdot v(t)$, $v(0) = v_0$, ahol g a gravitációs állandó, $m, k, v_0 \in \mathbb{R}^+$ valós számok. Keresendő $v(t)$ és a„végleges" sebesség, azaz $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$.

9.8. Egy ideális, k rugóállandójú, súlytalan rugó végén m állandó tömegű test függ, a rugót s_0 hosszan megnyújtjuk / összenyomjuk ($s_0 > 0$ vagy $s_0 < 0$), ezen felül a rugó végét időben változó $F_K(t)$ kényszererővel terheljük (pl. egy másik, ráakasztott, időben változtatható tömeggel). Írjuk le és értékeljük a rugó végének $s(t)$ kitérési függvényét, ha

a) $F_K(t) = 0$, $s(0) = s_0$ (elengedett azaz terheletlen rugó),

b) $F_K(t) = mB \cdot \sin(\omega_K t)$ ha $\omega_K \neq \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $s(0) = s_0$ (az ω_K kényszerfrekvencia különbözik a rendszer saját frekvenciájától),

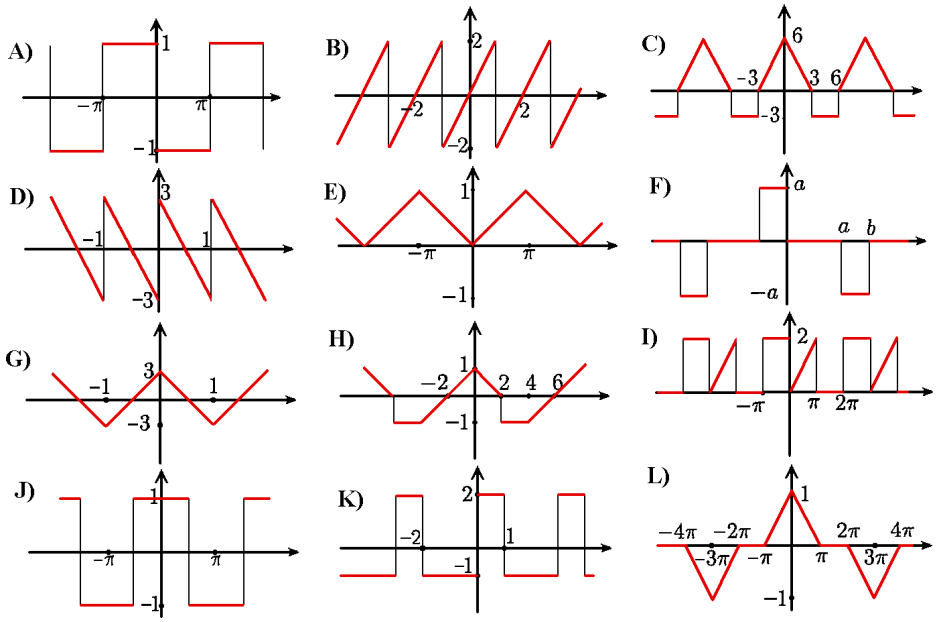
c) ugyanaz, mint *b)* csak $\omega_K = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

F10. Fourier-sorok, alkalmazások

Fourier-sorok

10.1. Az alábbi ábrákhoz adja meg a függvényt definiáló formulát, majd számítsa ki Fourier-sorukat:

a)



3. ábra. 10.1.*a)*

b) lásd a 8.1.*b)* feladat ábráját.

10.2. Az alábbi képletekkel megadott periodikus függvényeket rajzolja fel és számítsa ki Fourier-sorukat:

$$f_0(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}; \quad f_1(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

$$f_2(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]; \quad f_3(x) = 5x^2 - 4x + 7, \quad x \in [-\pi, \pi];$$

$$f_4(x) = \cos(3x), \quad x \in [-2{,}2]; \quad f_5(x) = |\sin(x)|;$$

$$f_6(x) = e^{-2x}, \quad x \in [-2{,}2];$$

$$f_7(x) = \begin{cases} 1 & ha \quad -\pi \le x < 0 \\ 0 & ha \quad 0 \le x < \pi \end{cases}, \qquad f_8(x) = \begin{cases} -1 & ha \quad -\pi \le x < 0 \\ +1 & ha \quad 0 \le x < \pi \end{cases},$$

$$f_{u,v}(x) = \begin{cases} u & ha \quad -L \le x < 0 \\ v & ha \quad 0 \le x < L \end{cases}, \qquad f_{10}(x) = \begin{cases} 0 & ha \quad -\pi \le x < 0 \\ x & ha \quad 0 \le x < \pi \end{cases},$$

$$f_{11}(x) = \begin{cases} x & ha \quad -1 \le x < 0 \\ 2x & ha \quad 0 \le x < 1 \end{cases}, \qquad f_{12}(x) = \begin{cases} -1 & ha \quad -2 \le x < -1 \\ 0 & ha \quad -1 \le x < 1 \\ 3 & ha \quad 1 \le x < 2 \end{cases}.$$

10.3. Terjessze ki az alábbi függvényeket

a) párosan /= y tengelyre szimmetrikusan/

b) páratlanul /=origóra szimmetrikusan/

majd számítsa ki Fourier-sorukat mindkét esetben:

$$g_1(x) = x, \quad \text{ha} \quad x \in [0,2]; \qquad g_2(x) = x^2, \quad \text{ha} \quad x \in [0,3];$$
$$g_3(x) = x(3-x), \quad \text{ha} \quad x \in [0,3]; \qquad g_4(x) = |x-1|, \quad \text{ha} \quad x \in [0,2];$$
$$g_4(x) = \sin(x), \quad \text{ha} \quad x \in [0,\pi]; \qquad g_5(x) = \cos(x), \quad \text{ha} \quad x \in [0,\pi].$$

10.4. Az 10.1.*a)* feladat *B)* és *J)* függvényeit hogyan közelíti a Fourier-összegének első négy tagja? Néhány pontban számítsa ki az eltérést, esetleg készítsen vázlatot.

Alkalmazások

10.5. A bemenetre egyenirányított váltófeszültséget kapcsoltunk: $U_{in}(t) = 240 \cdot |\sin(100\pi t)|$ (azaz 50 Hz, $T = \frac{1}{100}$). Fejtse Fourier-sorba $U_{in}(t)$-t, majd ennek segítségével határozza meg a kimeneti potenciál Fourier-sorának első három tagját!

4. ábra. 10.5.*a)*, *b)*

Útmutatások

U1. Többváltozós függvények folytonossága és deriválhatósága

1.1. Először közelítsük az (x, y) pontot a megadott (a, b) helyhez egy görbe (pl. egyenes) mentén, azaz pl. $(x, y) \to (0, 0)$ esetén legyen $y = tx$ és vizsgáljuk a $\lim\limits_{x\to 0} f(x, tx)$ határtéket, ahol $t \in \mathbb{R}$ rögzített, de tetszőleges valós szám. Ezen határértékeknek *minden* $t \in \mathbb{R}$ esetén meg kell egyezniük ahhoz, hogy $f(x, y)$-nak *lehessen* határértéke az (a, b) pontban, bár ez még *nem elégséges* a $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ határérték létezéséhez.

1.2. Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in Dom(f)$, adjuk meg, pl. az első változó szerinti $x \mapsto f(x, a_2, \cdots a_n)$ parciális függvény ($a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}$ rögzített) deriváltját az $x = a_1$ helyen, ami valós szám:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\underline{a}) := \lim_{x\to a_1} \frac{f(x, a_2, \cdots a_n) - f(a_1, a_2, \cdots a_n)}{x - a_1} \in \mathbb{R}$$

1.3. Vizsgáljuk meg, hogy $Dom(f)$ mely pontjaiban adható meg pl. az első változó szerinti $x \mapsto f(x, x_2, \cdots x_n)$ ($x_2, \cdots x_n$ rögzített) parciális függvény derivált függvénye, ami az $x_2, \cdots x_n$ változóktól is függő függvény:

$$\frac{\partial}{\partial x} f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, x_2, \cdots x_n) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x, x_2, \cdots x_n).$$

1.4. Használjuk a következő **tételek**et:

i) *Ahol a parciális derivált függvények folytonosak, ott a függvény (totálisan) differenciálható.*

ii) *Ahol a függvény* nem *folytonos, ott* nem *lehet differenciálható.*

iii) *Az* $\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots a_n) \in Dom(f)$ *pontban differenciálható függvényre teljesülnek az* $\underline{a}$ *pont egy környezetében az alábbiak:*

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = f(\underline{a}) + \frac{\partial}{\partial x_1} f(\underline{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} f(\underline{a}) \cdot (x_n - a_n) + R(x_1, x_2, \cdots x_n)$$

és

$$\lim_{x_1\to a_1,\ldots,x_n\to a_n} \frac{R(x_1, x_2, \cdots x_n)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + \cdots}} = 0. \qquad \square$$

1.5. Ellenőrizzük a differenciálhatóságot, és adjuk meg a parciális derivált függvények értékét az adott helyen, amivel az f függvény gradiense kiszámolható:

$$\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\underline{a}), \frac{\partial}{\partial x_2} f(\underline{a}), \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} f(\underline{a}) \right) \in \mathbb{R}^n. \qquad \square$$

1.6. Legyen $\underline{v}$ egységvektor, adjuk meg a $t \mapsto f(\underline{a} + t \cdot \underline{v})$ függvény deriváltját a $t = 0$ pontban, tehát az iránymenti derivált:

$$D_{\underline{v}} f(\underline{a}) := \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a} + t \cdot \underline{v}) - f(\underline{a})}{t}.$$

Ha f differenciálható az $\underline{a}$ pontban, és $\underline{v}$ egységvektor, használhatjuk a

$$D_{\underline{v}} f(\underline{a}) = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{v}$$

formulát is.

1.8. Ha f differenciálható az $\underline{a}$ pontban, és $\underline{v}$ egységvektor, akkor a $D_{\underline{v}} f(\underline{a}) = \operatorname{grad} f(\underline{a}) \cdot \underline{v}$ formulából és az

$$|\underline{u} \cdot \underline{v}| \leq |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$$

*Cauchy-Schwarz-Bunyjakovszkij egyenlőtlenség*ből következik, hogy

$$-|\operatorname{grad} f(a)| \leq D_v f(a) \leq |\operatorname{grad} f(a)|,$$

és egyenlőség pontosan akkor van, ha $\operatorname{grad} f(\underline{a})$ és $\underline{v}$ párhuzamosak. Adjuk meg tehát a gradiens vektor és ellentettje irányában az iránymenti deriváltakat!

1.9. Ha

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, & (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) \\ x &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto x(u, v) \\ y &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto y(u, v) \\ z &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, & (u, v) &\mapsto z(u, v) \end{aligned}$$

differenciálható függvények, használjuk az

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ F(u, v) &= f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right) \end{aligned}$$

összetett függvény deriválásához a következő, ún. *többdimenziós láncszabály*t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} F(u, v) = {} & \frac{\partial}{\partial x} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial}{\partial u} x(u, v) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial u} y(u, v) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} f\left(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right) \cdot \frac{\partial}{\partial u} z(u, v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v}F(u,v) = &\frac{\partial}{\partial x}f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial v}x(u,v)+\\ &+\frac{\partial}{\partial y}f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial v}y(u,v)+\\ &+\frac{\partial}{\partial z}f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial v}z(u,v).\end{aligned}$$

□

1.12. Készítsük el a megfelelő parciális derivált függvényeket (jelölésüknek megfelelő sorrendben), tehát például:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y,\cdots) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,\cdots)\right)\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y,\cdots) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,\cdots)\right)\\ \frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}f(x,y,\cdots) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,\cdots)\right)\right).\end{aligned}$$

1.15. Keressünk **stacionárius** $\underline{a}\in Dom(f)$ pontokat: ahol grad $f(\underline{a})=\underline{0}$.

1.16. Vizsgáljuk az $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvény $\underline{a}\in\mathbb{R}^2$ *stacionárius* pontjában a

$$\Delta_f(\underline{a}) := \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\underline{a})\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\underline{a}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(\underline{a})\right)^2$$

kifejezés értékét, és ha

$$\Delta_f(\underline{a})>0 \Longrightarrow \text{VAN szélsőérték, ami}\begin{cases}\text{minimum, ha} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a)>0\\ \text{maximum, ha} & \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(a)<0\end{cases},$$

ha $\Delta_f(\underline{a})<0 \Longrightarrow$ NINCS szélsőérték,
ha $\Delta_f(\underline{a})=0 \Longrightarrow$ LEHET szélsőérték (további bonyolult vizsgálat szükséges).

1.17. Az érintősík egyenlete éppen az 1-rendű Taylor-polinom:

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

és így a közelítés:

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0).$$

1.18. Ha az f és g függvény mindegyikére az (x_0,y_0) pont közelében a fenti közelítést használjuk, akkor az $\{f(x,y)=0, g(x,y)=0\}$ egyenletrendszer helyett, az x,y ismeretlenekre az

$$\begin{cases}f'_x(x_0,y_0)\cdot x + f'_y(x_0,y_0)\cdot y = b_1\\ g'_x(x_0,y_0)\cdot x + g'_y(x_0,y_0)\cdot y = b_2\end{cases}$$

lineáris egyenletrendszert kapjuk, ahol

$$b_1 = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot x_0 + f'_y(x_0, y_0) \cdot y_0 - f(x_0, y_0),$$
$$b_2 = g(x_0, y_0) + g'_x(x_0, y_0) \cdot x_0 + g'_y(x_0, y_0) \cdot y_0 - g(x_0, y_0).$$

Ennek megoldása legyen (x_1, y_1), melyből kiindulva a módszert ismételgetve egyre pontosabb gyököket kapunk. (*Newton módszere*).

1.19. Az n-változós $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\underline{a} \in Dom(f)$ pontjában N-edrendű **Taylor – polinom**jának képlete

$$\left(T_{\underline{a}}^{(N)} f\right)(\underline{x}) = \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{|\overrightarrow{m}|=k} \frac{f^{(\overrightarrow{m})}(\underline{a})}{k!} (\underline{x} - \underline{a})^{\overrightarrow{m}} \right)$$

ahol az $\overrightarrow{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$ ún. „*multiindex*” szerinti derivált

$$f^{(\overrightarrow{m})} := \frac{\partial^k}{\partial x_{m_1} \partial x_{m_2} \ldots \partial x_{m_k}} f$$

és

$$(\underline{x} - \underline{a})^{\overrightarrow{m}} := (x_{m_1} - a_{m_1}) \cdot (x_{m_2} - a_{m_2}) \cdot \cdots \cdot (x_{m_k} - a_{m_k}).$$

U2. Két- és többváltozós integrálok, transzformációk

2.1. Amennyiben H az $x = a$, $x = b$, $y = c$ és $y = d$ egyenesek által határolt téglalap, akkor *szukcesszíve* („egymás után”) integrálunk:
„vízszintes” integrálás esetén

$$\iint\limits_H f = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int\limits_c^d \left(F_x(b, y) - F_x(a, y) \right) dy = G(d) - G(c),$$

ahol $F_x(x, y)$ az $f(x, y)$ függvény x szerinti primitív függvénye, azaz $\frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y) = f(x, y)$ $((x, y) \in Dom(f))$ és $G(y)$ az $y \mapsto F_x(b, y) - F_x(a, y)$ egyváltozós függvény primitív függvénye y szerint; míg *„függőleges” integrálás* esetén pedig

$$\iint\limits_H f = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int\limits_a^b \left(F_y(x, d) - F_y(x, c) \right) dx = H(b) - H(a),$$

ahol $F_y(x, y)$ az $f(x, y)$ függvény y szerinti primitív függvénye, azaz

$$\frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y) = f(x, y) \qquad ((x, y) \in Dom(f))$$

és $H(x)$ a

$$h : x \mapsto F_y(x, d) - F_y(x, c)$$

egyváltozós függvény primitív függvénye x szerint, azaz

$$H(x) = \int h(x)\,dx.$$

Fubini tétele szerint a fenti két számítási módszer egyenértékű (ugyanazt az eredményt adja).

2.2. Használjuk az előző feladatban ismertetett szukcesszív integrálás alábbi, *általánosított* képletét:

$$\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \left(F_y\left(x, v(x)\right) - F_y\left(x, u(x)\right) \right) dx = K(b) - K(a)$$

ahol $K(x)$ a $k(x) := F_y\left(x, v(x)\right) - F_y\left(x, u(x)\right)$ egyváltozós függvény primitív függvénye.

2.3. Először számítsa ki a g és h függvénygörbék metszéspontjait, majd állapítsa meg, hogy g és h közül melyik alkotja H alsó- és felső határát, végül számoljon a 2.2. feladat mintájára.

2.4. *d)* Az $ABC\triangle$ oldalegyeneseihez használhatja az alábbi középiskolai képletet:
az $U(u_1, u_2)$, $V(v_1, v_2)$ *pontokon átmenő egyenes egyenlete*

$$(x - v_1)(u_2 - v_2) = (u_1 - v_1)(y - v_2).$$

2.7. Néhány feladatban az integrál *csak* egyik irányban lehetséges (vagy függőlegesen, vagy vízszintesen.)

Transzformációk

ÁLTALÁBAN a transzformációkról: Az $\int\int_H f(x,y)\,dxdy$ integrálban az $x = u(k,\ell)$, $y = v(k,\ell)$ *helyettesítés*t alkalmazva a $J(k,\ell) = (u(k,\ell), v(k,\ell))$ függvény determinánsára (ún. **Jacobi-determináns**) van szükségünk:

$$\det(J) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial k} u(k,\ell) & \frac{\partial}{\partial \ell} u(k,\ell) \\ \frac{\partial}{\partial k} v(k,\ell) & \frac{\partial}{\partial \ell} v(k,\ell) \end{vmatrix},$$

ami alapján

$$\int\int_H f(x,y)\,dxdy = \int\int_M f\left(u(k,\ell), v(k,\ell)\right) \cdot |\det(J)|\; dkd\ell,$$

ahol $Dom(J) = M$ és $\mathrm{Im}(J) = H$, azaz $J : M \to H$.

2.8. *Kör* alakú H tartományok esetén $((u_0, v_0) =$ a kör középpontja$)$ használjuk az $x = r \cdot \cos(\varphi) + u_0,\ y = r \cdot \sin(\varphi) + v_0$ ún. **polártranszformációt**, determinánsa

$$J(r, \varphi) = r.$$

Ellipszis alakú H tartomány esetén az ún. **Yvory transzformáció**t használjuk: $x = a \cdot r \cdot \cos(\varphi) + u_0,\ y = b \cdot r \cdot \sin(\varphi) + v_0$, determinánsa

$$Y(r, \varphi) = r \cdot a \cdot b.$$

2.9. Ha a H tartomány paralelogramma alakú, vagyis az $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1)$ és $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2)$ vektorok feszítik ki, kezdőcsúcsa $A(c_1, c_2)$, akkor a **lineáris transzformációt** alkalmazzuk: $x = a_1 k + b_1 \ell + c_1,\ y = a_2 k + b_2 \ell + c_2\ \ (0 \le k, \ell \le 1)$, determinánsa

$$\det\left(J(k, \ell)\right) = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

2.10. Általában: *ha* a H tartományt az $y = k_1 \cdot \varphi(x),\ y = k_2 \cdot \varphi(x)$ illetve az $y = \ell_1 \cdot \psi(x)$, $y = \ell_2 \cdot \psi(x)$ görbék zárják közre, akkor H minden $P(x, y)$ pontja az $y = k \cdot \varphi(x)$ és $y = \ell \cdot \psi(x)$ görbék metszéspontjaként megkapható ($k_1 \le k \le k_2,\ \ \ell_1 \le \ell \le \ell_2$), ami alapján felírhatunk egy $J : (k, \ell) \longmapsto (x, y)$ transzformációt.

a) $k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ \ell_1 = 1,\ \ell_2 = 2$. Az $y = \frac{k}{x}$ és $y = \ell x$ görbék $P(x, y)$ metszéspontját az $y = \frac{k}{x} = \ell x$ egyenletrendszer megoldásából kapjuk, vagyis $P(x, y) = \left(\sqrt{\frac{k}{\ell}}, \sqrt{k\ell}\right)$. Tehát a $J : (k, \ell) \longmapsto \left(\sqrt{\frac{k}{\ell}}, \sqrt{k\ell}\right)$ helyettesítést alkalmazzuk, determinánsa

$$\det(J) = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{k\ell}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{k}} \\ \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{k}{\ell^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{\ell}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\ell}.$$

b) $k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ \ell_1 = \frac{1}{2},\ \ell_2 = 2$. Az

$$y = \frac{k}{x} = \ell x^2$$

egyenletrendszer megoldása:

$$P(x, y) = J(k, \ell) = \left(\sqrt[3]{\frac{k}{\ell}}, \sqrt[3]{k^2 \ell}\right) = \left(k^{1/3} \ell^{-1/3}, k^{2/3} \ell^{1/3}\right)$$

és így

$$\det(J) = \det \begin{vmatrix} \frac{1}{3} k^{-2/3} \ell^{-1/3} & \frac{2}{3} k^{-1/3} \ell^{1/3} \\ \frac{-1}{3} k^{1/3} \ell^{-4/3} & \frac{1}{3} k^{2/3} \ell^{-4/3} \end{vmatrix} = \frac{1}{9\ell^{\frac{5}{3}}}\left(2\ell^{\frac{2}{3}} + 1\right) = \frac{2}{9}\ell^{-1} + \frac{1}{9}\ell^{-5/3}.$$

c) Az $y = \dfrac{k}{x} = \ell\sqrt{x}$ egyenletrendszer megoldása:

$$P(x,y) = J(k,\ell) = \left(k^{2/3}\ell^{-2/3}, k^{1/3}\ell^{2/3}\right)$$

és

$$\det(J) = \det\begin{vmatrix} \frac{2}{3}k^{-1/3}\ell^{-2/3} & \frac{1}{3}k^{-2/3}\ell^{2/3} \\ \frac{-2}{3}k^{2/3}\ell^{-5/3} & \frac{2}{3}k^{1/3}\ell^{-1/3} \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\ell^{-1} = \frac{2}{3\ell}.$$

U3. Többváltozós integrálok alkalmazásai

3.1. $H \subseteqq \mathbb{R}^2$ sík- ill. $P \subseteqq \mathbb{R}^3$ térbeli tartomány területe ill. térfogata

$$T_H = \int\limits_H\int 1\,dxdy, \qquad V_P = \int\int\limits_P\int 1\,dxdydz.$$

3.3. Az $[x,y]$ sík feletti rész darabjait felülről egy-egy megfelelő függvényfelület határolja.

3.4. A henger egyenlete $(x-1)^2 + y^2 = \rho^2$, a keresett térfogatot felülről a gömb határolja.

3.5.–3.6. A $z = f(x,y)$ egyenlettel meghatározott felület *felszíne*

$$A = \int\int\limits_H \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}f\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}f\right)^2}\,dxdy.$$

Fizikai képletek

3.7.–3.13. *feladatokhoz:*

Ha a H síklemez az $[x,y]$ síkban fekszik és $(x,y) \in H$ pontjában a sűrűsége $\rho(x,y)$, akkor H súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int\limits_H\int x\cdot\rho(x,y)\,dxy}{\int\limits_H\int \rho(x,y)\,dxy}, \qquad y_s = \frac{\int\limits_H\int y\cdot\rho(x,y)\,dxy}{\int\limits_H\int \rho(x,y)\,dxy}.$$

A fenti H síklemeznek az x illetve y tengelyekre vett másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékai

$$\Theta_x = \int\limits_H\int y^2\cdot\rho(x,y)\,dxy, \qquad \Theta_y = \int\limits_H\int x^2\cdot\rho(x,y)\,dxy.$$

míg a z tengelyre (=origóra) vett tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_z = \Theta_x + \Theta_y.$$

Ha a $K \subset \mathbb{R}^3$ térbeli tartomány és $(x, y, z) \in K$ pontjában a sűrűsége $\rho(x, y, z)$, akkor K tömege

$$m = \int\int\limits_K\int \rho(x, y, z)\, dxyz$$

és súlypontjának koordinátái:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{m}\int\int\limits_K\int x \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz, \\ y_s &= \frac{1}{m}\int\int\limits_K\int y \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz, \\ z_s &= \frac{1}{m}\int\int\limits_K\int z \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz. \end{aligned}$$

Ugyanennek a K tartománynak az x, y ill. z tengelyekre vett másodrendű (tehetetlenségi) nyomatékai

$$\Theta_x = \int\int\limits_K\int \left(y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz, \quad \Theta_y = \int\int\limits_K\int \left(x^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz,$$

$$\Theta_z = \int\int\limits_K\int \left(x^2 + y^2\right) \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz, \quad \Theta_0 = \int\int\limits_K\int \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz,$$

ahol Θ_0 az origóra vett tehetetlenségi nyomaték.

Tetszőleges e egyenesre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka pedig

$$\Theta_e = \int\int\limits_K\int f(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z)\, dxyz,$$

ahol $f(x, y, z)$ megadja az (x, y, z) pontnak az e egyenestől való távolságának négyzetét.

3.8. A sík egyenlete $x + y - z = 0$, vagyis a test (x, y) pontbeli magassága $f(x, y) = x + y$ vehető a négyzet alakú lemez $\rho(x, y)$ tömegeloszlásának.

U4. Közönséges differenciálegyenletek alapjai

4.0. x-re és y-ra mindig egy (összefüggő) intervallumot kell megadnunk!

4.1. *a)* Tehát $x_0 = 1$ és $y_0 = 2$.
Az érintő egyenes általános egyenlete: $y = y(x_0) + y'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

4.2. Először a választott pontokban az érintő egy kis darabját kell felrajzolnunk.

4.3. A függvényt egy δ hosszú intervallumon az érintőjével közelítjük, majd a végpontban a közelítést az újabb érintővel folytatjuk, s.í.t.

U5. Elsőrendű differenciálegyenletek

Szétválasztható változójú egyenletek

5.1. Az

$$y'(x) = H\left(y(x)\right) \cdot G(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

differenciálegyenletek *megoldása:* az egyenlet mindkét oldalát $H(y)$-al osztjuk ($Dom(y)$-t eközben vizsgáljuk), integráljuk dx szerint és használjuk a helyettesítéses integrál szabályát:

$$\int \frac{y'(x)}{H\left(y(x)\right)}\,dx = \int \frac{1}{H(y)}\,dy = \mathcal{H}\left(y(x)\right) = \int G(x)\,dx = \mathcal{G}(x) + C \tag{2}$$

tehát az *általános megoldás*

$$y(x) = \mathcal{H}^{-1}\left(\mathcal{G}(x) + C\right), \quad (C \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

ahol $\mathcal{H}$ primitív függvénye $\dfrac{1}{H}$-nek és $\mathcal{G}$ primitív függvénye G-nek.

A K.É.P. megoldása: $y(x_0) = y_0$ alapján az $\mathcal{H}^{-1}\left(\mathcal{G}(x_0) + C\right) = y_0$ egyenletből C meghatározható. $Dom(y)$ meghatározásához a számolás során kapott kikötéseket, x_0 értékét, és azt a tényt kell figyelembe vennünk, hogy $Dom(y)$ egyetlen (összefüggő) intervallum.

Visszavezethető típusok

5.2. Az $y'(x) = F(ax + by + c)$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ alakú differenciálegyenletekből az $u(x) := ax + by + c$ helyettesítéssel szétválasztható egyenletet kapunk:

$$y'(x) = \frac{1}{b}u'(x) - \frac{a}{b}.$$

5.3. Az $y'(x) = F\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú, ún. *„homogén fokszámú”* egyenleteknél az $u(x) := \dfrac{y(x)}{x}$ helyettesítéssel szétválasztható differenciálegyenlet adódik:

$$y(x) = x \cdot u(x) \quad \text{és} \quad y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x).$$

Lineáris egyenletek

5.4.

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q\left(x\right), \quad y\left(x_0\right) = x_0. \tag{4}$$

I. Direkt módszer: Legyen $P(x)$ *egy primitív függvénye* $p(x)$-nek. Szorozzuk be a fenti egyenlet mindkét oldalát $e^{P(x)}$-el:

$$y'(x) \cdot e^{P(x)} + p(x) \cdot e^{P(x)} \cdot y(x) = q(x) \cdot e^{P(x)} \tag{5}$$

ahonnan az $\left(e^{P(x)}\right)' = e^{P(x)} \cdot P'(x)$ összefüggés alapján kapjuk:

$$\left(y(x) \cdot e^{P(x)}\right)' = q(x) \cdot e^{P(x)} \tag{6}$$

vagyis *az általános megoldás*

$$y(x) = e^{-P(x)} \cdot \int q(x) e^{P(x)}\, dx. \tag{7}$$

A K.É.P. megoldása: $y(x_0) = y_0$ és (7) alapján C meghatározható. $Dom(y)$ meghatározásához a számolás során kapott kikötéseket és x_0 értékét kell figyelembe vennünk. (A fenti gondolatmenet a Laplace-transzformáció alapja.)

II. „Állandó variálása" módszer: Az (4) egyenlet *homogén* változata

$$y'(x) + p(x) \cdot y(x) = 0$$

szétválasztható, melynek általános megoldása $y(x) = \pm e^{-P(x)} \cdot D \quad (D \in \mathbb{R}^+,\ P(x) = \int p(x)\, dx)$. Az „állandó variálása" elnevezés azt takarja, hogy a (4) *inhomogén* egyenlet megoldását $y(x) = \pm e^{-P(x)} \cdot D(x)$ alakban keressük. Ez pedig a

$$\pm e^{-P(x)} \cdot D'(x) = q(x)$$

egyenletre vezet, ahonnan

$$D(x) = \pm \int q(x) e^{P(x)}\, dx + C$$

és

$$y(x) = \pm e^{-P(x)} \cdot \left(\pm \int q(x) e^{P(x)}\, dx + C \right).$$

A K.É.P. megoldása és $Dom(y)$ meghatározása a (7) után írtak szerint lehetséges.

Bernoulli-egyenletek

Általános alakjuk: $y'(x) + a(x) \cdot y(x) = b(x) \cdot y^{\beta}(x)$ $(\beta \in \mathbb{R})$.
Az $u(x) := y^{1-\beta}(x)$ helyettesítés után lineáris differenciálegyenletet kapunk.

Egzakt egyenletek

Általános alakjuk:

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y'(x) = 0 \quad \text{ahol} \quad \frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y),$$

az egyenletet szokás $P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0$ alakban is írni.

Megoldása: $\int P(x,y)\,dx$ és $\int Q(x,y)\,dy$ kiszámítása után felírjuk az

$$\int P(x,y)\,dx + \psi(y) = \int Q(x,y)\,dy + \varphi(x) \tag{8}$$

egyenlőséget, melyből $\psi(y)$ és $\varphi(x)$ meghatározhatók.

Jelöljük a (8) egyenlet (bármelyik) oldalát $F(x,y)$-el, számítsuk ki a K.É.P. alapján c_0 értékét:

$$F(x,y) = c_0 \tag{9}$$

majd oldjuk meg a fenti (*implicit*) egyenletet y-ra, a megoldás lesz a keresett $y(x)$ függvény.

U6. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

6.9. Írjuk fel a kötél két közeli, $(x_0, f(x_0))$ és $(x_0+h, f(x_0+h))$ pontjaiban ható erőket: az érintő irányú kötélerők vízszintes összetevői kiegyenlítik egymást, míg függőleges összetevőinek különbsége megegyezik a gravitációs erővel. (A kötél sűrűsége legyen ρ, keresztmetszete Q.)

Ha nem sikerül a differenciálegyenletet felállítanunk, akkor a megoldást csak az (13) egyenlet felírásáig olvassuk el, és próbáljuk önállóan megoldani az egyenletet.

6.10. A feladat áramkörére

$$R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) = u(t).$$

(Lásd még a 10. fejezet útmutatójában található általános elektronikai összefoglalót is.)

U7. Parciális törtekre bontás

7.2. Az **Algebra Alaptétele** (valós változat) szerint: *minden, legalább harmadfokú polinom felbontható alacsonyabb fokú polinomok szorzatára.* □

(Lásd pl. Szalkai István honlapján:

HTTP://MATH.UNI-PANNON.HU/~SZALKAI/PARCTORT-PDFW.PDF

vagy *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet* c. könyvének (Veszprémi Egyetemi Kiadó, 2000) függelékében.)

A középiskolából jól ismert az alábbi összefüggés:

Egy $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú *polinom akkor és csak akkor* **reducibilis** (felbontható), *ha diszkriminánsa* $D \geq 0$, *ebben az esetben*

$$p(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

(„gyöktényezős alak”).

A $D < 0$ *esetben* $p(x)$ **irreducibilis** (felbonthatatlan). □

7.3.–7.5. feladatok: A *parciális*- (más néven: *elemi*- vagy *rész*-) törtekre bontás módszere röviden megtalálható *Szalkai István* oktatói honlapján:

HTTP://MATH.UNI-PANNON.HU/~SZALKAI/PARCTORT-PDFW.PDF

vagy *Diszkrét matematika és algoritmuselmélet* c. könyvének függelékében.

U8. Laplace-transzformáció és inverze

A Laplace- és inverz- transzformáció alaptulajdonságai és az alapfüggvények transzformáltjai megtalálhatóak *Szalkai István* oktatói honlapján:
HTTP://MATH.UNI-PANNON.HU/~SZALKAI/LAPLACE-TABL+.PDF

8.1. A Laplace-transzformáció **definíciója:**

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$

amennyiben az improprius integrál konvergens.

8.4. A Laplace-transzformáció inverzének **definíciója**:

$$f(t) = \int_{x_0 - i\infty}^{x_0 + i\infty} F(s) \cdot e^{st}\, ds$$

amennyiben az improprius integrál konvergens, $x_0 > \alpha$ pedig tetszőleges (rögzített) valós szám, ahol $Dom(F) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > \alpha\}$.

U9. Integro - differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

9.2. Ha a K.É.P nem az $x_0 = 0$ pontban van megadva, akkor a függvényt vízszintesen eltolva alkalmazzuk az **Eltolási tételt**:

$$\mathcal{L}\left(f(t-b)\right) = e^{-bs} F(s).$$

9.3. Ha az egyenlet jobb oldalán levő $f(x)$ függvénynek nincs Laplace-transzformáltja, akkor használjuk az $F(s) = \mathcal{L}\left(f(x)\right)$ rövidítést, majd vissza transzformáláskor a **Konvolúciótétel**t: $\mathcal{L}\left(f * g\right) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$, vagy másképpen

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F \cdot G\right) = \mathcal{L}^{-1}(F) * \mathcal{L}^{-1}(G).$$

Alkalmazások

9.6. Az ábrán vázolt rezgőkörök esetén

$$L \cdot i''(t) + R \cdot i'(x) + \frac{1}{C} \cdot i(t) = u'(t)$$

(lásd még a 10. fejezet útmutatójában található általános elektronikai összefoglalót is).

9.7. Ha csak $v(t)$ határértékére vagyunk kíváncsiak, akkor használhatjuk a következő összefüggést:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$$

ahol $F = \mathcal{L}(f)$.

9.8. Alkalmazzuk az

$$F_{rugó} = -k \cdot s \quad \text{és} \quad F_{össz} = m \cdot a = m \cdot s'' = F_{rugó} + F_K$$

összefüggéseket.

U10. Fourier-sorok, alkalmazások

A **Fourier-sor definíciója** („képlete”):
ha az f függvény periódusa $[-L, L]$, akkor

$$\mathcal{F}\left(f(x)\right) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right)$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad \square$$

Speciálisan $L = \pi$ esetén

$$\mathcal{F}\left(f(x)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)\right)$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad \square$$

10.1. Ha valamely függvény megkapható egy másik *lineáris transzformációival*, akkor Fourier-transzformáltját már könnyen előállíthatjuk.

Pontosabban: ha $g(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta$ és $h(x) = f(\gamma \cdot x)$ akkor

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(g) &= \mathcal{F}\left(\alpha f_{(x)} + \beta\right) = \alpha \cdot \mathcal{F}\left(f_{(x)}\right) + \beta \\ \mathcal{F}(h) &= \mathcal{F}\left(f_{(\gamma x)}\right)(x) = \mathcal{F}\left(f_{(x)}\right)(\gamma x)\,. \end{aligned}$$

R-L-C áramkörökről

Soros kapcsolásnál

$$i_{fo}(t) = i_1(t) = \cdots = i_n(t), \quad u_{fo}(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t),$$

párhuzamos kapcsolásnál

$$i_{fo}(t) = i_1(t) + \cdots + i_n(t), \quad u_{fo}(t) = u_1(t) = \cdots = u_n(t) \text{ bármely } t \in \mathbb{R} \text{ időpillanatban,}$$

továbbá:

R ellenállásnál $\quad u_R(t) = R \cdot i(t) \qquad (R \in \mathbb{R})$,

L tekercsnél $\quad u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) \qquad (L \in \mathbb{R})$,

C kapacitásnál $\quad u_C(t) = \dfrac{1}{C} \cdot \int\limits_0^t i(\tau)\, d\tau \qquad (C \in \mathbb{R})$.

A jegyzetben a 6.10, 9.6, 10.5 sorszámú feladatok vonatkoznak elektronikai áramkörökre.

10.5. Mivel a bemeneti körre felírt egyenlet $|\sin(100\pi t)|$ miatt nem számolható, ezért helyette Fourier-sorát véve tagonként oldjuk meg az egyenletet és a megoldásokat összegezzük.

Megoldások

M1. Többváltozós függvények folytonossága és deriválhatósága

Folytonosság

1.1. *a)* $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,0)} \cos(y)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1\cdot 1 = 1.$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{yx}\cdot y = 1\cdot 1 = 1.$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{xy}$ nem létezik, mert $y = tx$ esetén $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{xy} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{tx^2}$ különböző t számokra különböző eredményt ad, pl. $t = 1$ esetén $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ míg pl. $t = -1$ esetén $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{-x^2} = -\infty$. Azonban $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{1}{xy}\right| = +\infty$ könnyen belátható.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$ nem létezik, mert $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{tx}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{t-1}{tx}\right) = 0$ vagy $\pm\infty$, t-től és x előjelétől függően.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$ nem létezik, mert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{t^2x^2}{x^2+t^2x^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$ nem csak egy értéket vesz fel.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$ mert $y = tx$ esetén $\frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{tx^3}{x^2+t^2x^2} = x\cdot\frac{t}{1+t^2}$, de mivel $\left|\frac{t}{1+t^2}\right| < K$ valamilyen $K \in \mathbb{R}$ korlátra ($\forall t \in \mathbb{R}$, K értéke lényegtelen), így $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| < |x|\cdot K \to 0$ midőn $x \to 0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2}$ nem létezik, mert $y = tx$ esetén a

$$\frac{\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2} = \frac{\sin(x)\sin(tx)}{x^2\left(1+t^2\right)} = \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(tx)}{tx}\cdot\frac{t}{1+t^2}$$

kifejezés határértéke függ t értékétől.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ nem létezik, mert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+tx}{x-tx} = \frac{1+t}{1-t}$ függ t értékétől.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nem létezik, mert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+t^2x^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+t^2}}$ függ t értékétől.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ mert $y = tx$ esetén $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2t}{\sqrt{x^2+x^2t^2}} = x\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, továbbá $\left|\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right| < K$ valamilyen $K \in \mathbb{R}$ korlátra ($\forall t \in \mathbb{R}$, K értéke lényegtelen), így $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| < |x| \cdot K \to 0$ midőn $x \to 0$.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ az előző feladathoz hasonlóan.

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ nem létezik, mert ugyan $\left|\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right| \to \infty$ (a számláló korlátos és a nevező $\to 0$), de a nevező előjele instabil, vagyis $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \to$ „$\pm\infty$" – ami nem lehetséges.

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}$,

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0$, mert $y = tx$ esetén $\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x+tx}{x^2+t^2x^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1+t}{1+t^2}$ és $\left|\frac{1}{x}\frac{1+t}{1+t^2}\right| < \left|\frac{1}{x}\right| \cdot K \to 0$ midőn $x \to \infty$, a *b)* 2/ feladathoz hasonlóan.

$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2-y^2}$ nem létezik, mert $\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{1}{x-y}$, és az $y = x + h$ helyettesítés alapján $\frac{1}{x-y} = \frac{-1}{h}$, ami minden $h \in \mathbb{R}$ esetén más.

$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ nem létezik, mert $y = tx$ esetén $\frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = \frac{t}{1+t^2}$ minden $t \in \mathbb{R}$-re más.

$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \sin\left(\frac{\pi x}{6x+y}\right)$ nem létezik, mert $y = tx$ esetén $\frac{\pi x}{6x+y} = \frac{\pi}{6+t}$ minden $t \in \mathbb{R}$-re más.

Parciális deriváltak

1.2. *a)* Az x változó szerinti parciális függvény és deriváltja $y = 2$ esetén:
$x \mapsto f(x,2) = 2x^2 + 2 - \frac{\sqrt{x}}{2} + \pi$, $\quad x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,2) = 4x - \frac{1}{4\sqrt{x}} \quad (x > 0)$,

$$x = 1 \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(1,2) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Az y változó szerinti parciális függvény és deriváltja $x = 1$ esetén:
$y \mapsto f(1,y) = 2 + y - \frac{1}{y} + \pi$, $\quad y \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(1,y) = 1 + \frac{1}{y^2} \quad (y \neq 0)$,

$$y = 2 \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(1,2) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Az x változó szerinti parciális függvény $y = -4$ esetén:
$x \mapsto f(x,-4) = 2x^2 - 4 + \frac{\sqrt{x}}{4} + \pi \quad (x \geq 0)$
ami $x = 0$ pontban nem differenciálható, tehát $\frac{\partial}{\partial x} f(0,-4)$ nem létezik.

Az y változó szerinti parciális függvény és deriváltja $x = 0$ esetén:
$y \mapsto f(0,y) = y + \pi$, $\quad y \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(0,y) = 1 \quad (y \neq 0)$,

$$y = -4 \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(0,-4) = 1.$$

b) Az x változó szerinti parciális függvény és deriváltja $y = 1$, $z = 2$ esetén:
$x \mapsto f(x,1,2) = 2e^{-x}$, $\quad x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,1,2) = -2e^{-x}$,

$$x = 0 \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(0,1,2) = -2.$$

Az y változó szerinti parciális függvény és deriváltja $x = 1$, $z = 0$ esetén:
$y \mapsto f(1,y,0) = 0$, $\quad y \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(1,y,0) = 0 \quad (y \neq 0)$,

$$y = 2 \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(1,2,0) = 0.$$

A z változó szerinti parciális függvény és deriváltja $x = 1$, $y = 1$ esetén:
$z \mapsto f(1,1,z) = ze^{-1}$, $\quad z \mapsto \frac{\partial}{\partial z} f(1,1,z) = e^{-1}$

$$z = 0 \mapsto \frac{\partial}{\partial z} f(1,1,0) = \frac{1}{e}.$$

c) Az x változó szerinti parciális függvény és deriváltja $y = 0$ esetén:
$x \mapsto f(x,0) = 0$, $\quad x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,0) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$,

$$x = 0 \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(0,0) = 0.$$

Az y változó szerinti parciális függvény és deriváltja $x = 0$ esetén:
$y \mapsto f(0,y) = 0$, $\quad y \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(0,y) = 0 \quad (y \in \mathbb{R})$,

$$y = 0 \mapsto \frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = 0.$$

Az x változó szerinti parciális függvény és deriváltja $y = 2$ esetén:
$x \mapsto f(x,2) = \frac{2x}{x^2+4}$, $\quad x \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(x,2) = \left(\frac{2x}{x^2+4}\right)' = -\frac{2x^2-8}{(x^2+4)^2} \quad (x \in \mathbb{R})$,

$$x = 1 \mapsto \frac{\partial}{\partial x} f(1,2) = \frac{6}{25}.$$

1.3. *a)* $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + x \cdot y^2 + 3z^2\right) = 2x + y^2$,
$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + x \cdot y^2 + 3z^2\right) = 2xy$, $\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + x \cdot y^2 + 3z^2\right) = 6z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$.

b)
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad x^2 + y^2 > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad x^2 + y^2 > 0$$

Differenciálhatóság

1.4. *a)* Mivel
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2x - y \quad x, y \in \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + y^2\right) = 2y - x \quad x, y \in \mathbb{R}$$

folytonosak, f (totálisan) differenciálható minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban.

b) Mivel
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y\sin^2 x + x\cos^2 y\right) = y\sin 2x + \cos^2 y \quad x, y \in \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y\sin^2 x + x\cos^2 y\right) = \sin^2 x - x\sin 2y \quad x, y \in \mathbb{R}$$

folytonosak, f (totálisan) differenciálható minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban.

c)
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + 0^2 + 0^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}|x| = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1 & \textit{ha } x < 0 \\ +1 & \textit{ha } x < 0 \end{cases}, \; x \neq 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \textit{mivel} \quad y^2 + z^2 > 0$$

tehát
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \textit{ha} \quad x^2 + y^2 + z^2 > 0$$

és hasonlóan
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \textit{ha} \quad x^2 + y^2 + z^2 > 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \textit{ha} \quad x^2 + y^2 + z^2 > 0$$

folytonos függvények *az origót kivéve*, ezért f (totálisan) differenciálható minden $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pontban.

d)
$$\tfrac{\partial}{\partial x}\ln\left(1 + \tfrac{y}{x}\right) = -\tfrac{1}{x} \cdot \tfrac{y}{x+y} \qquad \textit{ha} \quad x \neq 0 \text{ és } \tfrac{y}{x} > -1$$
$$\tfrac{\partial}{\partial y}\ln\left(1 + \tfrac{y}{x}\right) = \tfrac{1}{x+y} \qquad \textit{ha} \quad x \neq 0 \text{ és } \tfrac{y}{x} > -1$$

folytonos függvények, ezért f (totálisan) differenciálható a $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ és } \frac{y}{x} > -1\right\}$ halmaz minden pontjában.

e) Mivel
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{xy}{x^2 + y^2} = -y \cdot \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \qquad \textit{ha} \quad x^2 + y^2 > 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{xy}{x^2 + y^2} = -x \cdot \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \qquad \textit{ha} \quad x^2 + y^2 > 0,$$

$f(x,0)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=0, \qquad f(0,y)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=0,$
így a parciális derivált függvények folytonosak minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ pontban, tehát ezekben a pontokban f differenciálható. Az origóban viszont, bár léteznek a parciális deriváltak, f nem folytonos, ugyanis

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=(0,0) \qquad \lim_{n\to\infty}f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=2\neq f(0,0)=0$$

tehát f *nem* differenciálható a $(0,0)$ pontban.

f) Mivel

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|y|^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \textit{ha} \quad y\neq 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\operatorname{sign}(y)\cdot\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \textit{hay}\neq 0$$

folytonos függvények, f differenciálható minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(a,0)\mid a\in\mathbb{R}\}$ pontban.

Vizsgáljuk most a differenciálhatóságot az x tengely pontjaiban:

A $(0,0)$ pontban *nem* differenciálható, ugyanis $\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)=0$ miatt a differenciálhatóság esetén

$$f(x,y)=f(0,0)+x\frac{\partial}{\partial x}f(0,0)+y\frac{\partial}{\partial y}f(0,0)+R(x,y)=R(x,y)$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ teljesülne.

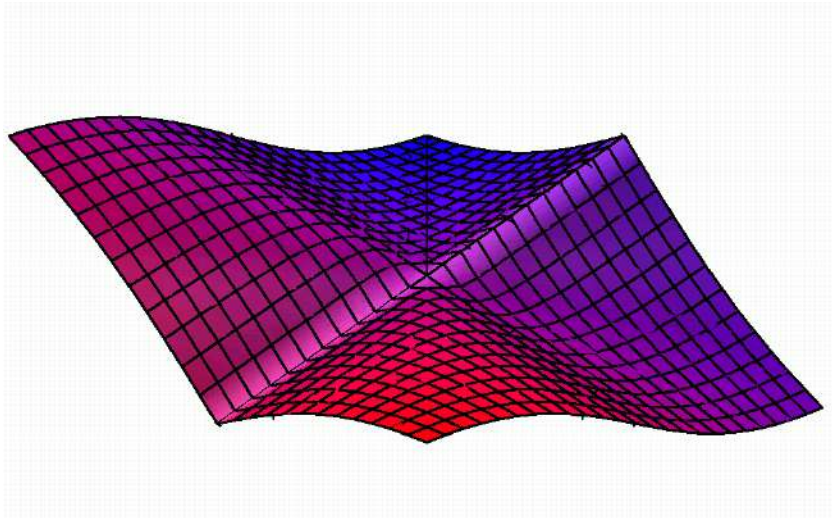
Most azonban $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=(0,0)$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{R(\frac{1}{n},\frac{1}{n})}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}=\dfrac{1}{2}\neq 0.$ Egy $(a,0)$, $a\neq 0$ pontban $\frac{\partial}{\partial x}f(a,0)=\frac{\partial}{\partial y}f(a,0)=0$, és differenciálhatóság esetén

$$f(x,y)=f(a,0)+x\cdot\frac{\partial}{\partial x}f(a,0)+y\cdot\frac{\partial}{\partial y}f(a,0)+R(x,y)=R(x,y),$$

és $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)}\dfrac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ teljesülne.

Most azonban $\lim\limits_{n\to\infty}(a+\frac{1}{n},\frac{1}{n})=(a,0)$ és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)\left|\frac{1}{n}\right|}{\sqrt{\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}}}{\sqrt{\left(a+\frac{1}{n}-a\right)^2+\frac{1}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(a+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}}}{\sqrt{2}}=\frac{\operatorname{sign}(a)}{\sqrt{2}}\neq 0.$$



5. ábra. 1.4.*f)* megoldás

$$\boxed{z = \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

1.5. *a)* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + y^2 - 3xy\right) = 3x^2 - 3y$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + y^2 - 3xy\right) = 2y - 3x$$

folytonos függvények, ezért

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f(0,0) &= (0,0)\\
\operatorname{grad} f(0,1) &= (-3,2)\\
\operatorname{grad} f(x,y) &= \left(3x^2 - 3y, 2y - 3x\right) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

b) Használjuk az 1.4.*c)* feladat megoldását:

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

és $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ esetén

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Megjegyzés: Az $r = (x, y, z)$ jelöléssel függvényünk

$$f(r) = |r| \quad r \in \mathbb{R}^3$$

alakban írható, és deriváltja, azaz gradiense

$$f'(r) = \operatorname{grad} f(r) = \frac{r}{|r|} \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

ami megfelel az

$$f(x) = |x| \quad x \in \mathbb{R}$$

függvény deriválásaként kapható, igaz egyszerűbb alakban is írható

$$f'(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0)\}$$

eredménynek.

c) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2y$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 2z$$

folytonos függvények, ezért

$$\operatorname{grad} f(1,2,3) = (2,4,6)$$
$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Megjegyzés Az $r = (x, y, z)$ jelöléssel függvényünk $f(r) = |r|^2 \quad (r \in \mathbb{R}^3)$ alakban írható, és deriváltja (gradiense) $f'(r) = \operatorname{grad} f(r) = 2r \quad (r \in \mathbb{R}^3)$, ami megfelel az $f(x) = |x|^2 = x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény deriválásaként kapható $f'(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R})$ eredménynek.

d) $x^2 + y^2 > 0$ esetén

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-yz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

folytonos függvények, ezért

$$\operatorname{grad} f(3,4,5) = \left(\frac{-3}{25}, \frac{-4}{25}, \frac{1}{5}\right)$$
$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{-xz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{-yz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad x^2 + y^2 > 0.$$

Iránymenti derivált

1.6. *a)* $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ egységvektor, és

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{x^2+y^2} = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} e^{x^2+y^2} = 2ye^{x^2+y^2}$$

folytonos függvények, tehát grad $f(-1,2) = (-2e^6, 4e^6)$ ezért

$$D_v f(-1,2) = -2e^6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4e^6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e^6 \approx 570{,}53.$$

b) $v = (3, \sqrt{11}, 4)$ normáltja: $\left(\frac{3}{6}, \frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{4}{6}\right)$, és

$$\frac{\partial}{\partial x} z\sin(x+y) = z\cos(x+y)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} z\sin(x+y) = z\cos(x+y)$$
$$\frac{\partial}{\partial z} z\sin(x+y) = \sin(x+y)$$

folytonos függvények, tehát grad $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ezért

$$D_v f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{6} = \frac{3 + 2\sqrt{11} + 8\sqrt{3}}{24} \approx 0{,}978\,74.$$

c) Az $\alpha\,(= 30^\circ) = \frac{\pi}{6}$ szög irányába mutató egységvektor

$$v = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

és

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+y) = \frac{\partial}{\partial y}\ln(x+y) = \frac{1}{x+y} \qquad x+y>0$$

folytonos függvények, tehát grad $f(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ezért

$$D_{30^\circ} f(1,1) = D_v f(1,1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \approx 0{,}683\,01.$$

d) $\underline{v}$ normáltja: $\underline{e}_v = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Mivel f a $(0,0)$ pontban *nem* differenciálható (lásd az 1.4.*f)* feladat megoldása), ezért adjuk meg a

$$g(t) := \begin{cases} f\left(\frac{t}{2}, \frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\frac{t}{2}\left|\frac{t\sqrt{3}}{2}\right|}{|t|} = \frac{t\sqrt{3}}{4} & \text{ha } t \neq 0 \\ f(0,0) = 0 & \text{ha } t \neq 0 \end{cases}$$

függvény deriváltját $t = 0$ helyen:

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = g'(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy minden α irányban létezik az iránymenti derivált az origóban, mivel

$$t \mapsto f(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \frac{t\cos\alpha\,|t\sin\alpha|}{\sqrt{(t\cos\alpha)^2 + (t\sin\alpha)^2}} = t\cos\alpha\,|\sin\alpha|$$

és a derivált értéke a $t = 0$ pontban: $D_\alpha f(0,0) = \cos\alpha\,|\sin\alpha|$.

Tehát minden iránymenti derivált létezik, de f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban (lásd az 1.4.*f)* feladat megoldása).

1.7. $v = \overrightarrow{PQ}(3,4)$, normálva $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2x^2y + xy^2 + 1\right) = y^2 - 4xy + 2x$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2x^2y + xy^2 + 1\right) = -2x(x-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(1,2) = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1 = -2$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(1,2) = -2\cdot 1(1-2) = 2$$
$$\text{grad}\, f(1,2) = (-2,2)$$

$$D_{\overrightarrow{PQ}} f(1,2) = -2\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

1.8.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 4y^2\right) = 2x \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(2,1) = 4$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 4y^2\right) = 8y \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(2,1) = 8$$

$$\text{grad}\, f(2,1) = (4,8)$$

Tehát a „legnagyobb növekedés” iránya és értéke

$$v = (4,8) \qquad D_v f(1,2) = |\text{grad}\, f(2,1)| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

a „legnagyobb csökkenés” iránya és értéke

$$-v = (-4,-8) \qquad D_{-v} f(1,2) = -\,|\text{grad}\, f(2,1)| = -4\sqrt{5}.$$

Összetett függvény deriválása

1.9. *a)* $f(x,y,z) = xyz,\ x(u,v) = u^2 + v,\ y(u,v) = u - v^2$ és $z(u,v) = \sin u$ parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = yz \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = xz \qquad \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = xy,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} x(u,v) = 2u \quad \frac{\partial}{\partial u} y(u,v) = 1 \quad \frac{\partial}{\partial u} z(u,v) = \cos u \\ &\frac{\partial}{\partial v} x(u,v) = 1 \quad \frac{\partial}{\partial v} y(u,v) = -2v \quad \frac{\partial}{\partial v} z(u,v) = 0. \end{aligned}$$

Tehát az összetett függvény parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u} f\left(u^2 + v, u - v^2, \sin u\right) = \\ &\qquad = \left(u - v^2\right) \cdot \sin u \cdot 2u + \left(u^2 + v\right) \cdot \sin u \cdot 1 + (u^2 + v) \cdot \left(u - v^2\right) \cdot \cos u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v} f\left(u^2 + v, u - v^2, \sin u\right) = \\ &\qquad = \left(u - v^2\right) \cdot \sin u \cdot 1 + \left(u^2 + v\right) \cdot \sin u \cdot (-2v) + (u^2 + v) \cdot \left(u - v^2\right) \cdot 0. \end{aligned}$$

b) $f(x,y) = \frac{x}{y},\ x(t) = \ln t,\ y(t) = e^t$ parciális deriváltjai

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} x(t) = x'(t) = \frac{1}{t} \\ &\frac{\partial}{\partial t} y(t) = y'(t) = e^t. \end{aligned}$$

Tehát az összetétellel kapott egyváltozós függvény deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left(\ln t, e^t\right) = \left(f(\ln t, e^t)\right)' = \frac{1}{e^t} \cdot \frac{1}{t} - \frac{\ln t}{e^{2t}} \cdot e^t = \frac{1 - t \cdot \ln t}{te^t}.$$

c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2},\ x(r,\phi) = r\cos\phi,\ y(r,\phi) = r\sin\phi$ parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2ye^{x^2+y^2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} x(r,\phi) = \cos\phi \qquad \frac{\partial}{\partial r} y(r,\phi) = \sin\phi \\ &\frac{\partial}{\partial \phi} x(r,\phi) = -r\sin\phi \qquad \frac{\partial}{\partial \phi} y(r,\phi) = r\cos\phi. \end{aligned}$$

Tehát az összetett függvény parciális deriváltjai:

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r\cos\phi, r\sin\phi) = 2r\cos^2\phi \cdot e^{r^2} + 2r\sin^2\phi \cdot e^{r^2} = 2re^{r^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial \phi} f(r\cos\phi, r\sin\phi) = -r^2\sin(2\phi)\cdot e^{r^2} + r^2\sin(2\phi)\cdot e^{r^2} = 0$$

felhasználva a $2\sin\phi\cdot\cos\phi = \sin(2\phi)$ azonosságot.

1.10. *a)* $\operatorname{grad} x(1,2) = (-1,0)$, $\operatorname{grad} y(1,2) = (\sqrt{2},10)$ és $f(x,y) = x^2 + xy$ parciális deriváltjai az

$$(x(1,2), y(1,2)) = (3,4)$$

pontban:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x + y \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(3,4) = 2\cdot 3 + 4 = 10$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(3,4) = 4$$

Tehát az $F(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ összetett függvény deriváltja az $(1,2)$ pontban:

$$\operatorname{grad} F(1,2) = \left(10\cdot(-1) + 4\cdot\sqrt{2}, 10\cdot 0 + 4\cdot 10\right) = \left(4\sqrt{2} - 10, 40\right).$$

b) $\operatorname{grad} f(-1,1) = (3,2)$, és az $x(u,v) = u^2 - v^2$ $y(u,v) = -\dfrac{uv}{\sqrt{2}}$ „helyettesítő” függvények és parciális deriváltjaik értéke az $\underline{a} = (u,v) = (-1,\sqrt{2})$ pontban

$$x\left(-1,\sqrt{2}\right) = -1 \qquad x\left(-1,\sqrt{2}\right) = 1$$
$$\frac{\partial}{\partial u} x(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(u^2 - v^2\right) = 2u \qquad \frac{\partial}{\partial u} x\left(-1,\sqrt{2}\right) = -2$$
$$\frac{\partial}{\partial u} y(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{uv}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{v}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\partial}{\partial u} y\left(-1,\sqrt{2}\right) = -1$$
$$\frac{\partial}{\partial v} x(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(u^2 - v^2\right) = -2v \qquad \frac{\partial}{\partial v} x\left(-1,\sqrt{2}\right) = -2\sqrt{2}$$
$$\frac{\partial}{\partial v} y(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} y\left(-\frac{uv}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{u}{\sqrt{2}} \qquad \frac{\partial}{\partial v} y\left(-1,\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát az $F(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ függvény deriváltja a $\left(-1,\sqrt{2}\right)$ pontban

$$\operatorname{grad} F\left(-1,\sqrt{2}\right) = \left(3(-2) + 2(-1), 3\left(-2\sqrt{2}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-8, -5\sqrt{2}\right).$$

1.11. Mivel

$$\frac{\partial}{\partial x} g\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y} g\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

kapjuk

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy+g\left(\frac{y}{x}\right)\right)=y+g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y-\frac{y}{x^2}\cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+g\left(\frac{y}{x}\right)\right)=x+g'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}\cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

amiket szorozva az x illetve y változóval, majd összegezve kapjuk a bizonyítandó

$$x\cdot\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+y\cdot\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=2xy$$

összefüggést (mivel $\frac{y}{x}\cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$ kiesik).

Magasabbrendű deriváltak

1.12. *a)* Ha $2xy+y^2>0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)&=\frac{y}{\sqrt{y^2+2xy}}\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+2xy}}\right)=\frac{-y^2}{(y^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{y^2+2xy}}\right)=\frac{xy}{(y^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{2xy+y^2}\right)\right)=\\
&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{\sqrt{y^2+2xy}}\right)=\frac{-x^2}{(y^2+2xy)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y-3y^2z+xyz\right)&=4xy+yz\\
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(2x^2y-3y^2z+xyz\right)&=\frac{\partial}{\partial y}(4xy+yz)=4x+z\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2x^2y-3y^2z+xyz\right)&=\frac{\partial}{\partial x}(4xy+yz)=4y\\
\frac{\partial^3}{\partial x\partial y\partial z}\left(2x^2y-3y^2z+xyz\right)&=\frac{\partial}{\partial z}(4x+z)=1\\
\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial y}\left(2x^2y-3y^2z+xyz\right)&=\frac{\partial}{\partial y}(4y)=4.
\end{aligned}$$

c) Ha $x > 0$ akkor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(x^y\right) &= y \cdot x^{y-1} \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(x^y\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y \cdot x^{y-1}\right) = x^{y-1}(y \ln x + 1) \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(x^y\right) &= x^y \ln x \\
\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(x^y\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y \ln x\right) = x^{y-1}(y \ln x + 1) \\
\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\left(x^y\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(y \cdot x^{y-1}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{y-2}\left(y^2 - y\right)\right) = \\
&= x^{y-2}\left(2y + y^2 \ln x - y \ln x - 1\right) \\
\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x}\left(x^y\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{y-1}(y \ln x + 1)\right) = x^{y-2}\left(2y + y^2 \ln x - y \ln x - 1\right).
\end{aligned}$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a kapott parciális derivált függvények folytonosak, ezért az eredmény nem függ a deriválás változóinak sorrendjétől, tehát:

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f \quad \text{és} \quad \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f = \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial x} f.$$

1.13. *a)* Ha $y \neq -1$ akkor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+x}{1+y}\right) &= \frac{1}{y+1} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1+x}{1+y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y+1}\right) = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0) = 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{1+x}{1+y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y+1}\right) = \frac{-1}{(y+1)^2} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,1) = \frac{-1}{2} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+x}{1+y}\right) &= -\frac{x+1}{(y+1)^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1+x}{1+y}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x+1}{(y+1)^2}\right) = 2\frac{x+1}{(y+1)^3} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(2,2) = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$, ezért $f(x,0) = f(0,y) = 0$ és

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & x \neq 0 y \in \mathbb{R} \\ 0 & x = 0\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \begin{cases} -\frac{x\left(-x^4+4x^2y^2+y^4\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & y \neq 0 x \in \mathbb{R} \\ 0 & y = 0\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tehát $\frac{\partial}{\partial x}f(0,y) = -y \quad y \in \mathbb{R}$ és $\frac{\partial}{\partial y}f(x,0) = x \quad x \in \mathbb{R}$, ezért

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}f(0,y)\right) = -1 \quad y \in \mathbb{R} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(0,0) = -1$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,0)\right) = 1 \quad x \in \mathbb{R} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(0,0) = 1.$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a másodrendű parciális derivált függvények nem folytonosak, ugyanis például

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)}{(x^2+y^2)^2}\right) & x \neq 0 y \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial y}(-y) & x = 0 y \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & x \neq 0 y \in \mathbb{R} \\ -1 & x = 0 y \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\left(\frac{1}{n},\ 0\right) \to (0,\ 0) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f\left(\frac{1}{n},0\right) = 1 \neq \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(0,0) = -1,$$

ezért nem következik a vegyes másodrendűek egyenlősége!

1.14. Ha $xy > 0$ akkor

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(xy) + \sqrt{xy}\cdot h\left(\frac{y}{x}\right)\right) = g'(xy)y + \frac{y}{2\sqrt{xy}}h\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y\sqrt{xy}}{x^2}h'\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) = g''(xy)y^2 - \frac{y^2}{4\sqrt{x^3y^3}}h\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^2\sqrt{xy}}h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2\sqrt{xy}}{x^4}h''\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(g(xy) + \sqrt{xy}h\left(\frac{y}{x}\right)\right) = g'(xy)x + \frac{x}{2\sqrt{xy}}h\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\sqrt{xy}}{x}h'\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = g''(xy)x^2 - \frac{x^2}{4\sqrt{x^3y^3}}h\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{xy}}\cdot h'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\sqrt{xy}}{x^2}h''\left(\frac{y}{x}\right)$$

amiből kapjuk

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) - y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = 0.$$

Szélsőértékszámítás

1.15. *a)* Az

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2xy-2x+2y^2-2y+z^2+1\right) = 2x+2y-2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+2xy-2x+2y^2-2y+z^2+1\right) = 2x+4y-2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+2xy-2x+2y^2-2y+z^2+1\right) = 2z = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása a $P(1,0,0)$ *stacionárius* pont.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a függvényünk a következő alakban írható:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + 2xy - 2x + 2y^2 - 2y + z^2 + 1 = \\ &= ((x-1)+y)^2 + y^2 + z^2 \geq 0 = f(1,0,0) \end{aligned}$$

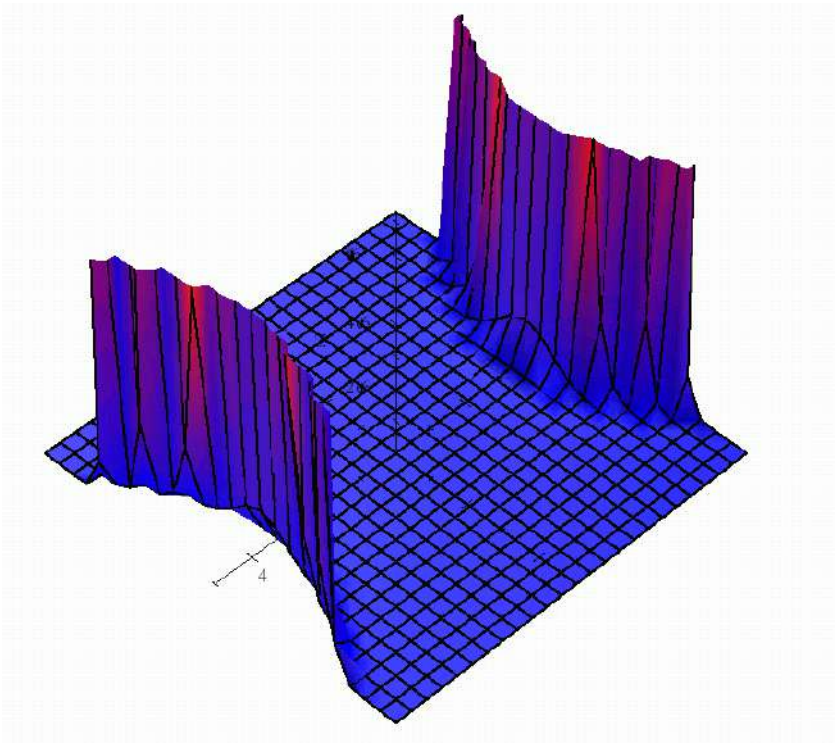
tehát a $P(1,0,0)$ stacionárius pont – most szemmel láthatóan – (globális) minimum hely!

b) Az

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} e^{x^2-y^2} = 2xe^{x^2-y^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2-y^2} = -2ye^{x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldása a $P(0,0)$ stacionárius pont.

Megjegyzés: A $z = e^{x^2-y^2}$ egyenletű



6. ábra. 1.15.*b)* megoldás

$$\boxed{z = e^{x^2-y^2}}$$

felülettel adott függvénynek a $P(0,0)$ stacionárius pontban nincs szélsőértéke, mert:

$$f(x,0) = e^{x^2} > 1 = f(0,0) \qquad \textit{ha } x \neq 0$$

és

$$f(0,y) = e^{-y^2} < 1 = f(0,0) \qquad \textit{ha } y \neq 0.$$

c) Az

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sin x + \cos y + x - y) = \cos x + 1 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\sin x + \cos y + x - y) = -\sin y - 1 = 0$$

egyenletrendszer megoldásai a $P_{k,l}\left(\pi + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2l\pi\right)$ $(k, l \in \mathbb{N})$ stacionárius pontok.

1.16. *a)* A

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2\right) = 8x^3 - 2x = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2\right) = 4y(y^2 - 1) = 0$$

egyenletrendszer megoldásai $P_1\left(\frac{-1}{2}, 1\right)$, $P_2(0,1)$, $P_3\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $P_4\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$, $P_5(0,0)$, $P_6\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $P_7\left(\frac{-1}{2}, -1\right)$, $P_8(0,-1)$, $P_9\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, továbbá

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2\right) = 24x^2 - 2$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2\right) = 12y^2 - 4$$
$$\frac{\partial^2}{\partial xy}\left(2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2\right) = 0$$

vagyis

$$\Delta(x,y) = \left(24x^2 - 2\right)\left(12y^2 - 2\right) - 0^2.$$

$\Delta\left(P_1\right) = (24/4 - 2)\,(12 - 2) = 40 > 0$ tehát P_1-ben van szélsőérték,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P_1\right) = 4 > 0$$

miatt P_1 minimumhely, a minimum értéke

$$f\left(P_1\right) = f\left(\frac{-1}{2}, 1\right) = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 1^4 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1^2 = \frac{-9}{8},$$

$\Delta\left(P_2\right) = (-2)(12 - 2) = -20 < 0$ tehát P_2-ben nincs szélsőérték (P_2 nyeregpont),

$\Delta\left(P_3\right) = (24/4 - 2)(12 - 2) = 40 > 0$ és $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P_3\right) = 4 > 0$ tehát P_3-ban minimum van,

$\Delta\left(P_4\right) = (24/4 - 2)(-2) = -8 < 0$ tehát P_4-ben nincs szélsőérték (P_4 nyeregpont),

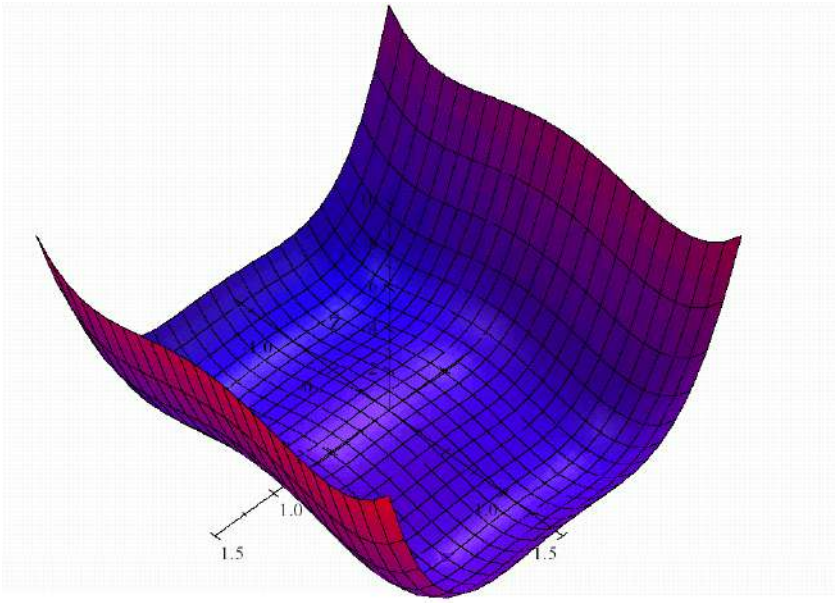
$\Delta\left(P_5\right) = (-2)(-2) = 4 > 0$ és $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P_5\right) = -2$ tehát P_5-ben maximum van,

$\Delta(P_6) = (24/4-2)(-2) = -8 < 0$ tehát P_6-ban nincs szélsőérték (P_6 nyeregpont),

$\Delta(P_7) = (24/4-2)(12-2) = 40 > 0$ és $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(P_7) = 4 > 0$ tehát P_7-ben minimum van,

$\Delta(P_8) = (-2)(12-2) = -20 < 0$ tehát P_8-ban nincs szélsőérték (P_8 nyeregpont),

$\Delta(P_9) = (24/4-2)(12-2) = 40 > 0$ és $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(P_9) = 4 > 0$ tehát P_9-ben minimum van.



7. ábra. 1.16.*a)* megoldás

$$\boxed{2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2}$$

b) Az

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = \left(x^2-1\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = -xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = 0$$

egyenletrendszer megoldásai a $P(1,0)$, $Q(-1,0)$ stacionárius pontok, továbbá

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = x\left(x^2-3\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = x\left(y^2-1\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\left(xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right) = y\left(x^2-1\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

vagyis

$$\Delta(x,y) = x\left(x^2-3\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \cdot x\left(y^2-1\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} - \left(y\left(x^2-1\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\right)^2.$$

A $P(1,0)$ pontban $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\right)(P) = \frac{-2}{\sqrt{e}}$, $\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}f\right)(P) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f\right)(P) = 0$, így

$$\Delta(P) = \frac{-2}{\sqrt{e}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{e}}\right) - 0 = \frac{2}{e} > 0$$

tehát P-ben van f-nek szélsőértéke, és $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\right)(P) = \frac{-2}{\sqrt{e}} < 0$ miatt a $P(1,0)$ pont lokális maximumhely, ahol a maximum értéke $f(P) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

A $Q(-1,0)$ pontban $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\right)(Q) = \frac{2}{\sqrt{e}}$, $\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}f\right)(Q) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, $\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f\right)(Q) = 0$, így

$$\Delta(Q) = \frac{2}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} - 0 = \frac{2}{e} > 0$$

tehát Q-ban is van szélsőértéke f-nek, és $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\right)(Q) = \frac{2}{\sqrt{e}} > 0$ miatt a $Q(-1,0)$ pont lokális minimumhely, ahol a minimum értéke $f(Q) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$.

c) A

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2\right) = 4x^3-4x+4y = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2\right) = 4y^3-4y+4x = 0$$

egyenletrendszer megoldásai a $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, $Q\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, $R(0,0)$ stacionárius pontok. Továbbá

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(4x^3-4x+4y) = 12x^2-4$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(4y^3-4y+4x) = 12y^2-4$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4x^3-4x+4y\right) = 4$$

vagyis

$$\Delta(x,y) = \left(12x^2-4\right)\left(12y^2-4\right) - 4^2.$$

A $P(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ pontban

$$\Delta(P) = \left(12\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\right)\left(12\left(\sqrt{2}\right)^2-4\right) - 4^2 = 384 > 0,$$
$$12\left(-\sqrt{2}\right)^2-4 = 20 > 0$$

tehát a $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ pont lokális minimumhely és $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$.

A $Q(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ pontban

$$\Delta(Q) = \left(12\left(\sqrt{2}\right)^2 - 4\right)\left(12\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 4\right) - 4^2 = 384 > 0,$$
$$12\left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 = 20 > 0$$

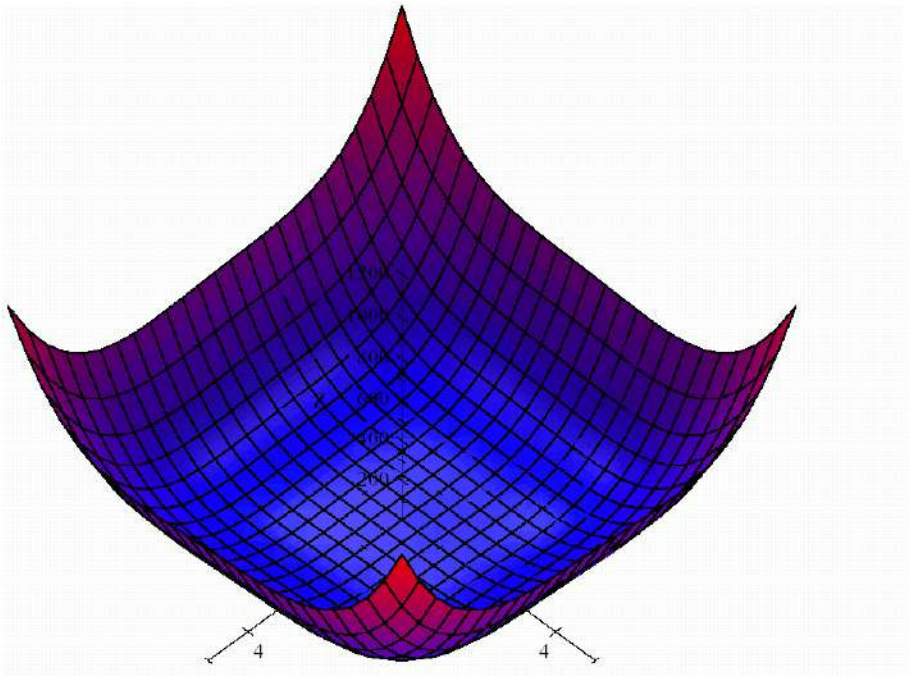
tehát a $Q(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ pont lokális minimumhely, és $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

Az $R(0, 0)$ pontban

$$\Delta(R) = (-4)(-4) - 4^2 = 0,$$

tehát az $R(0, 0)$ pontról Δ segítségével nem dönthető el, hogy szélsőérték hely-e.

Megjegyzés: A függvény grafikonjáról



8. ábra. 1.16.*c)* megoldás

$$\boxed{z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2}$$

is látható, hogy az R pontban (origóban) az $f(x, 0) = x^4 - 2x^2$ és $f(0, y) = y^4 - 2y^2$ parciális függvényeknek *maximuma* van, de a $H = \{(a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ pontokban vett $f(a, a) = 2a^4$ függvényértékeknek az origóban *minimumhelye* van, tehát az origó nyeregpont, vagyis nem szélsőérték hely.

d) A

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\sqrt{1-x^2-y^2}\right) = -y\frac{2x^2+y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\sqrt{1-x^2-y^2}\right) = -x\frac{x^2+2y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0$$

egyenletrendszer megoldásai a $P(0,0)$, $Q_{1,2,3,4}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ stacionárius pontok, továbbá

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{2x^2+y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) = xy\frac{2x^2+3y^2-3}{(1-x^2-y^21)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-x\frac{x^2+2y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) = xy\frac{3x^2+2y^2-3}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\frac{2x^2+y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) = \frac{2x^4+3x^2y^2-3x^2+2y^4-3y^2+1}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

A $P(0,0)$ esetén $\Delta(P) = -1 < 0$ tehát nincs szélsőérték.

$Q_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ esetén

$$\Delta\left(Q_1\right) = \left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = 4 > 0$$

és

$$-\frac{4}{3}\sqrt{3} < 0,$$

tehát Q_1 maximumhely és

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9}\sqrt{3}.$$

$Q_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ esetén

$$\Delta\left(Q_2\right) = \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = 4 > 0$$

és

$$\frac{4}{3}\sqrt{3} > 0,$$

tehát Q_2 minimumhely és

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{9}\sqrt{3}.$$

$Q_3\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ esetén

$$\Delta\left(Q_3\right) = \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = 4 > 0$$

és

$$\frac{4}{3}\sqrt{3} > 0,$$

tehát Q_3 minimumhely és

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{9}\sqrt{3}.$$

$Q_4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ esetén

$$\Delta\left(Q_4\right) = \left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 = 4 > 0$$

és

$$-\frac{4}{3}\sqrt{3} < 0,$$

tehát Q_4 maximumhely és

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9}\sqrt{3}.$$

e) A

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1-x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{-\left(y^2+xy+x+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{1-x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{\left(x^2+yx-y+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = 0 \qquad \text{(II)}$$

egyenletrendszer megoldása: $(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -(x-y-1)(x+y) = 0$ alapján $y = -x$ vagy $y = x-1$. Csak az első esetben kapunk valós gyököket: $x = -1$, $y = 1$ vagyis $P(-1,1)$ az egyetlen stacionárius pont.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) = \frac{-\left(-2x^2y-2x^2-3xy^2-3x+y^3+y^2+y+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = \frac{-\left(-x^3+3x^2y+x^2+2xy^2-x-2y^2+3y+1\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y) = \frac{-x^3-2x^2y+2xy^2+3xy-x+y^3+y}{\left(x^2+y^2+1\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

így

$$\Delta(P) = \left(\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)\cdot\left(\frac{-2\sqrt{3}}{9}\right) - \left(\frac{-1\sqrt{3}}{9}\right)^2 = \frac{1}{9} > 0$$

és

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P) = \frac{-2\sqrt{3}}{9} < 0,$$

tehát P-ben maximuma van a függvénynek.

Érintősík, Taylor-polinom, közelítő módszerek

1.17. *a)* $f(x_0, y_0) = 4^2 + 3^2 = 25$, $f'_x = 2x$, $f'_x(a) = 2 \cdot 4$, $f'_y = 2y$, $f'_y(a) = 2 \cdot 3$, tehát az érintősík $z = 25 + 8 \cdot (x-4) + 6 \cdot (y-3)$, vagy átrendezve: $8x + 6y - z = 25$.

A függvény közelítése: $f(x,y) \approx 25 + 8 \cdot (x-4) + 6 \cdot (y-3) = 8x + 6y - 25$, így közelítése a $\underline{b}$ pontban: $f(\underline{b}) \approx 8 \cdot 4{,}01 + 6 \cdot 2{,}97 - 25 = 24{,}9$.

Megjegyzés: $f(\underline{b})$ valódi értéke: $f(\underline{b}) = 4{,}01^2 + 2{,}97^2 = 24{,}901$.

b) $f'_x = y \cdot x^{y-1} + \frac{1}{y}$, $f'_y = x^y \ln x - \frac{x}{y^2}$,

$$\begin{aligned} z &= \left(3^2 + \frac{3}{2}\right) + \left(2 \cdot 3^{2-1} + \frac{1}{2}\right)(x-3) + \left(3^2 \ln 3 - \frac{3}{2^2}\right)(y-2) = \\ &= \frac{13}{2}x + (9 \ln 3 - 3/4)\, y - (18 \ln 3 + 15/2) \\ &\approx 6{,}5x + 9{,}1375y - 27{,}2750 \approx f(x,y), \\ f(b) &\approx 6{,}5 \cdot 2{,}98 + 9{,}1375 \cdot 2{,}03 - 27{,}2750 = 10{,}6441. \end{aligned}$$

c) Az egyenlet z-re könnyen megoldható:

$$z = -\sqrt[3]{x^3 + x - y^3 + 2y + 15} = f(x,y), \qquad \underline{a} = (-1, 3)$$

és P valóban illeszkedik a felületre: $f(-1,3) = 2$.

Továbbá: $\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{-1}{3} \frac{3x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3+x-y^3+2y+15)^2}}$, $\frac{\partial}{\partial y} f = \frac{1}{3} \frac{3y^2-2}{\sqrt[3]{(x^3+x-y^3+2y+15)^2}}$, p

$z = 2 - \frac{1}{3}(x+1) + \frac{25}{12}(y-3) = \frac{-1}{3}x + \frac{25}{12}y - \frac{55}{12} \approx f(x,y)$,

$f(b) \approx \frac{1{,}03}{3} + \frac{25}{12} \cdot 2{,}96 - \frac{55}{12} \approx 1{,}9267$.

1.18. *a)* $x_0 = 1{,}5$, $y_0 = 2{,}5$, $f(x_0, y_0) = 20{,}06250$, $g(x_0, y_0) = 3{,}87500$, $f'_x(x_0, y_0) = 19{,}25000$, $f'_y(x_0, y_0) = -47{,}50000$, $g'_x(x_0, y_0) = -28{,}50000$, $g'_y(x_0, y_0) = 26{,}25000$, $b_1 = -109{,}93750$, $b_2 = 19{,}00000$, az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 19{,}25 \cdot x - 47{,}50 \cdot y = -109{,}937\,50 \\ -28{,}50 \cdot x + 26{,}25 \cdot y = 19{,}000\,00 \end{cases}$$

melynek megoldása: $\{x_1 = 2{,}33766, y_1 = 3{,}26184\}$.

A fenti eljárást iterálva (többször megismételve) kapjuk: $x_1 = 2{,}33766$, $y_1 = 3{,}26184$, $f(x_1, y_1) = -13{,}68319$, $g(x_1, y_1) = -9{,}32084$, $f'_x(x_1, y_1) = 37{,}67320$, $f'_y(x_1, y_1) = -108{,}31858$, $g'_x(x_1, y_1) = -62{,}22484$, $g'_y(x_1, y_1) = 36{,}51437$, $b_1 = -251{,}56769$, $b_2 = -17{,}03566$, az új egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 37{,}67320 \cdot x - 108{,}31858 \cdot y = -251{,}56769 \\ -62{,}22484 \cdot x + 36{,}51437 \cdot y = -17{,}03566, \end{cases}$$

$x_2 = 2{,}05632$, $y_2 = 3{,}03767$, $f(x_2, y_2) = -1{,}50124$, $g(x_2, y_2) = -1{,}47810$, $f'_x(x_2, y_2) = 31{,}14020$, $f'_y(x_2, y_2) = -87{,}13373$, $g'_x(x_2, y_2) = -50{,}12624$, $g'_y(x_2, y_2) = 34{,}22229$, $b_1 = -199{,}14784$, $b_2 = 2{,}35845$,

$x_3 = 2{,}00176$, $y_3 = 3{,}00094$, $f(x_3, y_3) = -0{,}02613$, $g(x_3, y_3) = -0{,}05246$, $f'_x(x_3, y_3) = 30{,}03235$, $f'_y(x_3, y_3) = -84{,}07278$, $g'_x(x_3, y_3) = -48{,}06094$, $g'_y(x_3, y_3) = 33{,}99864$, $b_1 = -192{,}15366$, $b_2 = 5{,}87399$,

$x_4 = 2{,}00000$, $y_4 = 3{,}00000$, $f(x_4, y_4) = -0{,}00001$, $g(x_4, y_4) = -0{,}00005$, $f'_x(x_4, y_4) = 30{,}00003$, $f'_y(x_4, y_4) = -84{,}00004$, $g'_x(x_4, y_4) = -48{,}00005$, $g'_y(x_4, y_4) = 33{,}99999$, $b_1 = -192{,}00008$, $b_2 = 5{,}99987$,

$x_5 = 2{,}00000$, $y_5 = 3{,}00000$, $f(x_5, y_5) = -0{,}00000$, $g(x_5, y_5) = 0{,}00000$.
Tehát (x_5, y_5) a megadott pontossággal közelítik az eredeti egyenletrendszer (egyik) gyökét.

b) Az $(x_0, y_0) = (1{,}000\,00, 1{,}000\,00)$ kiinduló értékek 13 (fentihez hasonló) lépés után adnak kívánt pontosságú gyököt: $(x_{13}, y_{13}) = (-1{,}374\,87, -2{,}156\,24)$.

1.19. $f = \frac{x^2y}{x+3z}$, $f(a) = \frac{-2^2}{2+3\cdot 8} = \frac{-4}{26}$; $f'_x = \frac{2xy(x+3z)-x^2y}{(x+3z)^2}$, $f'_x(a) = \frac{-25}{169}$; $f'_y = \frac{x^2}{x+3z}$, $f'_y(a) = \frac{2}{13}$; $f'_z = \frac{-3x^2y}{(x+3z)^2}$, $f'_z(a) = \frac{3}{169}$;

$f''_{xx} = \frac{18yz^2}{(x+3z)^3}$, $f''_{xx}(a) = \frac{-144}{2197}$; $f''_{yy} = 0 = f''_{yy}(a)$; $f''_{zz} = \frac{18x^2y}{(x+3z)^3}$, $f''_{zz}(a) = \frac{-9}{2197}$; $f''_{xy} = \frac{x(x+6z)}{(x+3z)^2}$, $f''_{xy}(a) = \frac{25}{169}$; $f''_{xz} = \frac{-18xyz}{(x+3z)^3}$, $f''_{xz}(a) = \frac{36}{2197}$; $f''_{yz} = \frac{-3x^2}{t(x+3z)^2}$, $f''_{yz}(a) = \frac{-3}{169}$;

$f'''_{yyy} = f'''_{xyy} = f'''_{yyz} = 0$; $f'''_{xxx} = \frac{-54yz^2}{(x+3z)^4}$, $f'''_{xxx}(a) = \frac{216}{28561}$; $f'''_{zzz} = \frac{-162\cdot x^2y}{(x+3z)^4}$, $f'''_{zzz}(a) = \frac{81}{57122}$; $f'''_{xxy} = \frac{18z^2}{(x+3z)^3}$, $f'''_{xxy}(a) = \frac{144}{2197}$; $f'''_{xxz} = \frac{18yz(2x-3z)}{(x+3z)^4}$, $f'''_{xxz}(a) = \frac{180}{28561}$; $f'''_{xzz} = \frac{-18xy(x-6z)}{(x+3z)^4}$, $f'''_{xzz}(a) = \frac{-207}{57122}$; $f'''_{yzz} = \frac{18x^2}{(x+3z)^3}$, $f'''_{yzz}(a) = \frac{9}{2197}$; $f'''_{xyz} = \frac{-18xz}{(x+3z)^3}$, $f'''_{xyz}(a) = \frac{-36}{2197}$;
tehát $(T_a^3, f)(x, y, z) =$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{-4/26}{0!}\cdot 1 + \frac{-25/169}{1!}(x-2) + \frac{2/13}{1!}(y+1) + \frac{3/169}{1!}(z-8) + \\
&+ \frac{-144/2197}{2!}(x-2)^2 + \frac{0}{2!}(y+1)^2 + \frac{-9/2197}{2!}(z-8)^2 + \\
&+ \frac{25/169}{2!}(x-2)(y+1) + \frac{36/2197}{2!}(x-2)(y+1) + \frac{-3/169}{2!}(y+1)(z-8) + \\
&+ \frac{216/28561}{3!}(x-2)^3 + \frac{0}{3!}(y+1)^3 + \frac{81/57122}{3!}(z-8)^3 + \\
&+ \frac{144/2197}{3!}(x-2)^2(y+1) + \frac{0}{3!}(y+1)^2(x-2) + \frac{180/28561}{3!}(x-2)^2(z-8) + \\
&+ \frac{-207/57122}{3!}(z-8)^2(x-2) + \frac{0}{3!}(y+1)^2(z-8) + \frac{9/2197}{3!}(y+1)^2(z-8) + \\
&+ \frac{-36/2197}{3!}(x-2)(y+1)(z-8) \approx \\
\approx& -0{,}1538 - 0{,}1479(x-2) + 0{,}153\,8(y+1) + 0{,}0178(z-8) +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 0{,}0328(x-2)^2 - 0{,}0020(z-8)^2 + 0{,}0739(x-2)(y+1)+\\
&+ 0{,}0082(x-2)(y+1) - 0{,}0089(y+1)(z-8) + 0{,}0013(x-2)^3+\\
&+ 0{,}0002(z-8)^3 + 0{,}0109(x-2)^2(y+1) + 0{,}0011(x-2)^2(z-8)+\\
&- 0{,}0006(z-8)^2(x-2) + 0{,}0007(y+1)^2(z-8)-\\
&- 0{,}0027(x-2)(y+1)(z-8),
\end{aligned}
$$

és így $f(1{,}99, -0{,}89,\ 8{,}06) \approx$

$$
\begin{aligned}
\approx &- 0{,}1538 - 0{,}1479(1{,}99-2) + 0{,}1538(-0{,}89+1) + 0{,}0178(8{,}06-8)-\\
&- 0{,}0328(1{,}99-2)^2 - 0{,}0020(8{,}06-8)^2 + 0{,}0739(1{,}99-2)(-0{,}89+1)+\\
&+ 0{,}0082(1{,}99-2)(-0{,}89+1) - 0{,}0089(-0{,}89+1)(8{,}06-8)+\\
&+ 0{,}0013(1{,}99-2)^3 + 0{,}0002(8{,}06-8)^3 + 0{,}0109(1{,}99-2)^2(-0{,}89+1)+\\
&+ 0{,}0011(1{,}99-2)^2(8{,}06-8) - 0{,}0006(8{,}06-8)^2(1{,}99-2)+\\
&+ 0{,}0007(-0{,}89+1)^2(8{,}06-8) - 0{,}0027(1{,}99-2)(-0{,}89+1)(8{,}06-8) \approx\\
\approx &0{,}000\,000\,708.
\end{aligned}
$$

M2. Két- és többváltozós integrálok, transzformációk

Szukcesszív integrálás

2.1. *a_1)* Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int x^2 + y^3\,dx = \frac{1}{3}x^3 + y^3x + C,$$

$$\int_4^5 x^2 + y^3\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + y^3x\right]_{x=4}^{x=5} = \left(\frac{1}{3}5^3 + y^3 5\right) - \left(\frac{1}{3}4^3 + y^3 4\right) = \frac{61}{3} + y^3,$$

ezután $\int \frac{61}{3} + y^3\,dy = \frac{61}{3}y + \frac{1}{4}y^4 + C$,

végül $\int\int_H f = \int_3^7 \frac{61}{3} + y^3\,dy = \left[\frac{61}{3}y + \frac{1}{4}y^4\right]_{y=3}^{y=7} = \left(\frac{61}{3}\cdot 7 + \frac{1}{4}7^4\right) - \left(\frac{61}{3}\cdot 3 + \frac{1}{4}3^4\right) \approx$
$\approx 661{,}333\dot{3}$.

a_2) Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int x^5y^3\,dy = x^5\frac{1}{4}y^4 + C,$$

$$\int_8^9 x^5y^3\,dy = x^5\frac{1}{4}\left[y^4\right]_{y=8}^{y=9} = x^5\frac{1}{4}\left(9^4 - 8^4\right) = \frac{2465}{4}x^5,$$

ezután $\int \frac{2465}{4}x^5\,dx = \frac{2465}{4}\cdot\frac{1}{6}x^6 + C = \frac{2465}{24}x^6 + C$,

végül $\int\int_H f = \int_1^2 \frac{2465}{4}x^5\,dx = \frac{2465}{24}\left[x^6\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2465}{24}\left(2^6 - 1\right) = 6470{,}625.$

b) „Függőlegesen” integrálva: $\int\int\limits_H f = \int\limits_2^6 \left(\int\limits_3^5 \frac{x}{y}\, dy \right) dx.$
Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int \frac{x}{y}\, dy = x \int \frac{1}{y}\, dy = x \ln|y| + C,$$
$$\int\limits_3^5 \frac{x}{y}\, dy = x \left[\ln|y|\right]_{y=3}^{y=5} = x\left(\ln(5) - \ln(3)\right) = x \ln\left(\frac{5}{3}\right),$$

ezután $\int x \ln\left(\frac{5}{3}\right)\, dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}x^2 + C,$ végül

$$\int\int\limits_H f = \int\limits_2^6 x \ln\left(\frac{5}{3}\right)\, dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^6 = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(6^2 - 2^2\right) \approx 8{,}1732.$$

„Vízszintesen” integrálva: $\int\int\limits_H f = \int\limits_3^5 \left(\int\limits_2^6 \frac{x}{y}\, dx \right) dy.$
Először a belső zárójelet számítjuk ki:

$$\int \frac{x}{y}\, dx = \frac{1}{y} \int x\, dy = \frac{1}{2y}x^2 + C,$$
$$\int\limits_2^6 \frac{x}{y}\, dy = \frac{1}{2y}\left[x^2\right]_{x=2}^{x=6} = \frac{1}{2y}\left(6^2 - 2^2\right) = \frac{16}{y},$$

ezután $\int \frac{16}{y}\, dy = 16 \ln|y| + C,$ végül

$$\int\int\limits_H f = \int\limits_3^5 \frac{16}{y}\, dy = 16\left[\ln|y|\right]_3^5 = 16\left(\ln(5) - \ln(3)\right) \approx 8{,}1732.$$

2.2. *a)* Először

$$\int\limits_{x^2-2x-4}^{3x^2+8x} \left(3x^2 + 8y^2 - xy\right)\, dy = \left[3x^2y + \frac{8}{3}y^3 - \frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2-2x-4}^{y=3x^2+8x} =$$
$$= \left(3x^2\left(3x^2+8x\right) + \frac{8}{3}\left(3x^2+8x\right)^3 - \frac{1}{2}x\left(3x^2+8x\right)^2\right) -$$
$$- \left(3x^2\left(x^2-2x-4\right) + \frac{8}{3}\left(x^2-2x-4\right)^3 - \frac{1}{2}x\left(x^2-2x-4\right)^2\right) =$$
$$= \frac{208}{3}x^6 + 588x^5 + 1516x^4 + \frac{3764}{3}x^3 + 20x^2 + 264x + \frac{512}{3},$$

másodszor

$$\int\limits_{-6{,}83}^{8{,}49}\left(\frac{208}{3}x^6+588x^5+1516x^4+\frac{3764}{3}x^3+20x^2+264x+\frac{512}{3}\right)\,dx=$$

$$=\left[\frac{208}{21}x^7+98x^6+\frac{1516}{5}x^5+\frac{941}{3}x^4+\frac{20}{3}x^3+132x^2+\frac{512}{3}x\right]_{x=\,-6{,}83}^{x=8{,}49}=$$

$$=(\frac{208}{21}\cdot 8{,}49^7+98\cdot 8{,}49^6+\frac{1516}{5}\cdot 8{,}49^5+\frac{941}{3}\cdot 8{,}49^4+\frac{20}{3}\cdot 8{,}49^3+$$

$$+132\cdot 8{,}49^2+\frac{512}{3}\cdot 8{,}49)-$$

$$-(\frac{208}{21}\cdot(-6{,}83)^7+98\cdot(-6{,}83)^6+\frac{1516}{5}\cdot(-6{,}83)^5+\frac{941}{3}\cdot(-6{,}83)^4+$$

$$+\frac{20}{3}\cdot(-6{,}83)^3+132\cdot(-6{,}83)^2+\frac{512}{3}\cdot(-6{,}83))\approx 8{,}3951\times 10^7.$$

b)

$$\int\limits_{x^2+x-4}^{3\sqrt{x}+8x}\left(x^2+xy\right)\,dy=\left[x^2y+\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2+x-4}^{y=3\sqrt{x}+8x}=$$

$$=\left(x^2\left(3\sqrt{x}+8x\right)+\frac{1}{2}x\left(3\sqrt{x}+8x\right)^2\right)-\left(x^2\left(x^2+x-4\right)+\frac{1}{2}x\left(x^2+x-4\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}x^5-2x^4+\frac{85}{2}x^3+\frac{25}{2}x^2-8x+27\left(\sqrt{x}\right)^5,$$

$$\int\int\limits_H f=\int\limits_3^9\left(-\frac{1}{2}x^5-2x^4+\frac{85}{2}x^3+\frac{25}{2}x^2-8x+27\left(\sqrt{x}\right)^5\right)\,dx=$$

$$=\left[\frac{54}{7}\left(\sqrt{x}\right)^7+\frac{85}{8}x^4+\frac{25}{6}x^3-\frac{2}{5}x^5-\frac{1}{12}x^6-4x^2\right]_3^9=$$

$$-\frac{1458}{7}\sqrt{3}+\frac{721\,341}{35}\approx 20248{,}9814.$$

2.3. *a)* g és h metszéspontjai pontosan a $g(x)=h(x)$ azaz az $x^2+2x=4-x^2$ egyenlet megoldásai: $x_1=-2$, $x_2=1$.

A $[-2,1]$ intervallumon $x^2+2x\le 4-x^2$, tehát

$$\int\int\limits_H f=\int\limits_{-2}^{1}\left(\int\limits_{x^2+2x}^{4-x^2}(x+y)\,dy\right)\,dx=\int\limits_{-2}^{1}\left(\left[xy+y^2/2\right]_{y=x^2+2x}^{y=4-x^2}\right)\,dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(x\left(4-x^2\right)+\left(4-x^2\right)^2/2-x\left(x^2+2x\right)-\left(x^2+2x\right)^2/2\right)\,dx=$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(-4x^3 - 8x^2 + 4x + 8\right)\, dx = \left[-x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 8x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(-1 - \frac{8}{3} + 2 + 8\right) - \left(-(-2)^4 - \frac{8}{3}(-2)^3 + 2(-2)^2 + 8(-2)\right) = 9.$$

b) g és h metszéspontjai: az $x^2 = x + 2$ egyenlet megoldásai: $x_1 = -1,\ x_2 = 2.$ A $[-1, 2]$ intervallumon $x^2 \le x + 2,$ tehát

$$\iint_H f = \int_{-1}^{2} \left(\int_{x^2}^{x+2} 2y\, dy \right) dx = \int_{-1}^{2} \left(\left[y^2\right]_{y=x^2}^{y=x+2} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} \left((x+2)^2 - x^4\right)\, dx = \int_{-1}^{2} (-x^4 + x^2 + 4x + 4)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{72}{5}.$$

2.4. *a)* Függőlegesen:

$$\iint_H f = \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{y=1/2-x/2} (x^2 + y + 1)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2}y^2 + y\right]_{y=0}^{y=1/2-x/2} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right) - 0 \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}\right) dx = \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{24}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{5}{24} - \frac{3}{8} + \frac{5}{8} - 0 = \frac{1}{3}.$$

Vízszintesen:

$$\iint_H f = \int_0^{1/2} \left(\int_{x=0}^{x=1-2y} \left(x^2 + y + 1\right)\, dx \right) dy = \int_0^{1/2} \left(\left[\frac{1}{3}x^3 + yx + x\right]_{x=0}^{x=1-2y} \right) dy =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{3}(1-2y)^3 + y(1-2y) + (1-2y) - 0 \right) dy =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(-\frac{8}{3}y^3 + 2y^2 - 3y + \frac{4}{3} \right) dy = \left[-\frac{2}{3}y^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{4}{3}y \right]_0^{1/2} =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{3}.$$

b) Függőlegesen:

$$\int\int_H f = \int_0^1 \left(\int_{y=x}^{y=1} \sqrt{1-x^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[y\sqrt{1-x^2} \right]_{y=x}^{y=1} dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 -2x\left(1-x^2\right)^{1/2} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\cdot\arcsin(x)) \right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\arcsin(1) + \frac{1}{4}\sin(2\cdot\arcsin(1)) - 0 \right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(0-1) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + 0 \right) - \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \approx 0{,}4521$$

mivel

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\cdot\arcsin(x)) + C. \tag{10}$$

Vízszintesen:

$$\int\int_H f = \int_0^1 \left(\int_{x=0}^{x=y} \sqrt{1-x^2}\, dx \right) dy = \quad \text{ismét (10) szerint:}$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\cdot\arcsin(x)) \right]_{x=0}^{x=y} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\arcsin(y) + \frac{1}{4}\sin(2\cdot\arcsin(y)) - 0 \right) dy = \tag{✠}$$

ahol $\frac{1}{2}\int \arcsin(y)\, dy = \frac{1}{2}\left(y\cdot\arcsin(y) + \sqrt{1-y^2} \right)$ /I. típ. helyettesítés/
és $\sin(2\cdot\arcsin(y)) = 2y\sqrt{1-y^2}$ miatt

$$\tfrac{1}{4}\int 2y\sqrt{1-y^2}\, dy = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{-2}{3}(1-y^2)^{3/2}$$ /I. típ. helyettesítés/

TEHÁT

$$(✠) = \left[\frac{1}{2}\left(y\cdot\arcsin(y)+\sqrt{1-y^2}\right)+\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{3}\left(1-y^2\right)^{3/2}\right]_0^1 =$$
$$= \left(\frac{1}{2}(\arcsin(1)+0)+0\right)-\left(\frac{1}{2}(0+1)+\frac{1}{4}\cdot\frac{-2}{3}\cdot 1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\approx 0{,}4521.$$

d) $a = BC$ egyenes egyenlete $(x-5)(4-8)=(9-5)(y-8)$
azaz $y=-x+13$ vagy $x=-y+13$,

$b = AC$ egyenes egyenlete $(x-3)(4-2)=(9-3)(y-2)$
azaz $y=\frac{1}{3}x+1$ vagy $x=3y-3$,

$c = AB$ egyenes egyenlete $(x-3)(8-2)=(5-3)(y-2)$
azaz $y=3x-7$ vagy $x=\frac{1}{3}y+\frac{7}{3}$.

„Függőlegesen” integrálva ($x=5$-nél el kell vágnunk):

$$\iint\limits_H f = \int\limits_3^5 \left(\int\limits_{y=b\text{ egyenes}}^{y=c\text{ egyenes}} f(x,y)\,dy\right)dx + \int\limits_5^9 \left(\int\limits_{y=b\text{ egyenes}}^{y=a\text{ egyenes}} f(x,y)\,dy\right)dx,$$

az első tényező

$$\int\limits_3^5 \left(\int\limits_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=3x-7} \left(x^2+y^3\right)\,dy\right)dx = \int\limits_3^5 \left(\left[x^2y+\frac{1}{4}y^4\right]_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=3x-7}\right)dx =$$
$$= \int\limits_3^5 \left(x^2(3x-7)+\frac{1}{4}(3x-7)^4-x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+1\right)^4\right)dx =$$
$$= \int\limits_3^5 \left(\frac{1640}{81}x^4-\frac{5032}{27}x^3+\frac{1960}{3}x^2-\frac{3088}{3}x+600\right)dx =$$
$$= \left[\frac{328}{81}x^5-\frac{1258}{27}x^4+\frac{1960}{9}x^3-\frac{1544}{3}x^2+600x\right]_{x=3}^{x=5} =$$
$$= \left(\frac{328}{81}\cdot 5^5-\frac{1258}{27}\cdot 5^4+\frac{1960}{9}\cdot 5^3-\frac{1544}{3}\cdot 5^2+600\cdot 5\right)-$$
$$-\left(\frac{328}{81}\cdot 3^5-\frac{1258}{27}\cdot 3^4+\frac{1960}{9}\cdot 3^3-\frac{1544}{3}\cdot 3^2+600\cdot 3\right)=\frac{51\,152}{81}\approx \mathbf{631{,}5062},$$

a második tényező

$$= \int_5^9 \left(\int_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=-x+13} \left(x^2+y^3\right)\, dy \right) dx = \int_5^9 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=\frac{1}{3}x+1}^{y=-x+13} \right) dx =$$

$$= \int_5^9 \left(x^2(-x+13) + \frac{1}{4}(-x+13)^4 - x^2\left(\frac{1}{3}x+1\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x+1\right)^4 \right) dx =$$

$$= \int_5^9 \left(\frac{20}{81}x^4 - \frac{388}{27}x^3 + \frac{796}{3}x^2 - \frac{6592}{3}x + 7140 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{4}{81}x^5 - \frac{97}{27}x^4 + \frac{796}{9}x^3 - \frac{3296}{3}x^2 + 7140x \right]_{x=5}^{x=9} =$$

$$= \left(\frac{4}{81}\cdot 9^5 - \frac{97}{27}\cdot 9^4 + \frac{796}{9}\cdot 9^3 - \frac{3296}{3}\cdot 9^2 + 7140\cdot 9 \right) -$$

$$- \left(\frac{4}{81}\cdot 5^5 - \frac{97}{27}\cdot 5^4 + \frac{796}{9}\cdot 5^3 - \frac{3296}{3}\cdot 5^2 + 7140\cdot 5 \right) = \frac{153\,184}{81} \approx \mathbf{1891{,}1605},$$

tehát

$$\iint_H f = \frac{51\,152}{81} + \frac{153\,184}{81} = \frac{7568}{3} \approx \mathbf{2522{,}6667}.$$

„Vízszintes” integrálás esetén $y = 4$-nél kell elvágni:

$$\iint_H f = \int_2^4 \left(\int_{x=c}^{x=b} f(x,y)\, dx \right) dy + \int_4^8 \left(\int_{x=c}^{x=a} f(x,y)\, dx \right) dy = \cdots = \frac{7568}{3} \approx \mathbf{2522{,}6667}.$$

e) H képlete: $H = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le y\}$, ezért

$$\iint_H f = \iint_H yx\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y\cdot x\, dy \right) dx = \int_0^2 x \cdot \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x\left(1-(x-1)^2-0\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(-x^3+2x^2\right) dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cdot 2^4 + \frac{2}{3}\cdot 2^3 - 0 \right) = \frac{2}{3}.$$

(Lásd még a 2.8.*b)* feladat megoldását is.)

f) H képlete: $H = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le x,\ 0 \le y\}$, ezért „Függőlegesen” integrálva:

$$\int\!\!\int_H f = \int_0^1 \left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 1-x^2\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3},$$

„Vízszintesen” integrálva:

$$\int\!\!\int_H f = \int_0^1 \left(\int_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} y\,dx \right) dy = \int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = \frac{-1}{2}\int_0^1 -2y\left(1-y^2\right)^{1/2} dy =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(1-y^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}\cdot\frac{2}{3}(0-1) = \frac{1}{3}.$$

(Lásd még a 2.8.*a)* feladat megoldását is)

2.5. *a)* $H = \{(x,y) : 1 \le y \le 4x-x^2,\ 1 \le x \le 3\}$, tehát H-t az $y = 4x-x^2$ parabola és az $x=1$, $x=3$ és $y=1$ egyenesek határolják.

b) $H = \left\{(x,y) : \frac{1}{2} \le x \le \sqrt{1-y^2},\ \frac{-\sqrt{3}}{2} \le y \le \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, tehát H-t az $x^2+y^2=1$ körnek az $x=\frac{1}{2}$ egyenestől jobbra eső szeletének az $y=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ és $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenesek közötti darabja alkotja. Mivel azonban ez utóbbi egyenesek éppen a körszelet „csúcsain” haladnak át, nincs is szerepük H határolásában.

Ez azt jelenti, hogy H pontosan az origó középpontú, egyégsugarú körből az $x=\frac{1}{2}$ egyenes által levágott kisebbik körszelet.

c) $H = \left\{(x,y) : y \le x \le 1+\sqrt{1-y},\ 0 \le y \le 2\right\}$. Mivel azonban $1 < y$ esetén a $\sqrt{1-y}$ kifejezés nem értelmezhető, ezért ilyen y-ok nem adnak tényleges pontokat H-hoz. Így

$$H = \left\{(x,y) : y \le x \le 1+\sqrt{1-y},\ 0 \le y \le 1\right\},$$

tehát H-t az $y = 1-(x-1)^2$ parabola és az $y=x$ (jobbra), $y=0$ ($=x$ tengely, felfelé) és $y=1$ egyenes (lefelé) határolják. Az $y=1$ egyenesre nincs szükség, az előző feladathoz hasonló okok miatt.

2.6. *a_1)* A feladatban felírt képlet vízszintesen integrál. Ekkor H éppen az $A(0,0)$, $B(0,1{,}5)$, $C(2{,}25,1{,}5)$ és $D(3,0)$ pontok által meghatározott trapéz (készítsen ábrát!), ezért függőleges integráláskor $x=2{,}25$-nál ketté kell vágnunk a H tartományt. Mivel az $x = 3-\frac{1}{2}y$ egyenes

ekvivalens $y = 6 - 2x$-el, így

$$\int_0^{1,5} \left(\int_{x=0}^{x=3-y/2} f(x,y)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^{2,25} \left(\int_{y=0}^{y=1,5} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{2,25}^{3} \left(\int_{y=0}^{y=6-2x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

b)* A feladatban felírt képlet függőlegesen integrál. A H tartományt az x tengely, az $y = x^2$ parabola, az $x = 4$ függőleges és az $y = 2x - 6$ (ferde) egyenes határolják (készítsen ábrát!). A két egyenes a $(4, 2)$ pontban metszi egymást, ezért vízszintes integráláskor $y = 2$-nél ketté kell vágnunk a H tartományt. Mivel az $y = 2x-6$ egyenlet ekvivalens $x = \frac{y}{2}+6$-tal, így

$$\int\int_H f = \int_0^2 \left(\int_{x=\sqrt{y}}^{x=y/2+6} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_2^{16} \left(\int_{x=\sqrt{y}}^{x=4} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

2.7. *a)* H tulajdonképpen az $O(0,0)$, $A(1,1)$ és $B(1,0)$ pontok által meghatározott háromszög. A vízszintes és a függőleges lehetőségek:

$$\int\int_H f = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\,dy \right) dx.$$

Liouville tétele szerint az $\int e^{x^2}\,dx$ primitív függvény képlettel nem írható fel, ezért csak függőlegesen tudunk integrálni:

$$\int\int_H f = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[ye^{x^2} \right]_{y=0}^{y=x} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(xe^{x^2} - 0 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} \approx 1{,}3591.$$

Transzformációk

2.8. *a)* Az $\{x = r \cdot \cos(\varphi) + u_0, y = r \cdot \sin(\varphi) + v_0\}$ helyettesítésnél $(u_0, v_0) = (0, 0)$ a kör középpontja, $0 \le r \le 1$ és $0 \le \varphi \le \pi/2$, tehát

$$\int\int_H f = \int\int_H y\,dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r \cdot \sin(\varphi) \cdot r\,dr \right) d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) \cdot \left(\int_0^1 r^2\,dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) \cdot \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{3} \left[-\cos(\varphi) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

b) Használjuk az $\{x = r\cdot\cos(\varphi)+u_0, y = r\cdot\sin(\varphi)+v_0\}$ helyettesítést: $(u_0,v_0) = (1,0)$, $0\le r\le 1$ és $0\le\varphi\le\pi$, tehát

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_H f &= \int\!\!\int_H yx\,dxdy = \int_0^\pi\left(\int_0^1 r\sin(\varphi)\,(r\cos(\varphi)+1)\,r\,dr\right)d\varphi = \\ &= \int_0^\pi\left(\int_0^1 r^3\sin(\varphi)\cos(\varphi)+r^2\sin(\varphi)\,dr\right)d\varphi = \\ &= \int_0^\pi\left(\sin(\varphi)\cos(\varphi)\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1+\sin(\varphi)\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1\right)d\varphi = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{3}\int_0^\pi\sin(\varphi)\,d\varphi = \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(-\cos(2\varphi)\right)\right]_0^\pi+\frac{1}{3}\left[(-\cos(\varphi))\right]_0^\pi = \frac{1}{16}\cdot 0+\frac{1}{3}(1+1) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(Lásd még a 2.4.*e)* feladat megoldását is.)

2.9. *a)* A paralelogrammát az $\overrightarrow{u} = (3,1)$ és $\overrightarrow{v} = (2,3)$ vektorok feszítik ki (ell: $B+\overrightarrow{v} = D+\overrightarrow{u} = C$), tehát alkalmazzuk az $\{x = 3k+2\ell, y = k+3\ell\}$ helyettesítést:

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_H f &= \int_0^1\int_0^1\left((3k+2\ell)^2-(k+3\ell)^2\right)(3\cdot 3-1\cdot 2)\,dkd\ell = \\ &= \int_0^1\int_0^1(8k^2+6k\ell-5\ell^2)\cdot 7\,dkd\ell = 7\int_0^1\left(\int_0^1(8k^2+6k\ell-5\ell^2)\,dk\right)d\ell = \\ &= 7\int_0^1\left(\left[\frac{8}{3}k^3+\frac{6}{2}k^2\ell-5\ell^2k\right]_{k=0}^{k=1}\right)d\ell = 7\int_0^1\left(\frac{8}{3}+\frac{6}{2}\ell-5\ell^2-0\right)d\ell = \\ &= 7\left[\frac{8}{3}\ell+\frac{3}{2}\ell^2-\frac{5}{3}\ell^3\right]_0^1 = 7\left(\frac{8}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{3}-0\right) = \frac{35}{2}.\end{aligned}$$

2.10. *a)* Az Útmutatás alapján $\left\{x = \sqrt{\frac{k}{\ell}}, y = \sqrt{k\ell}\right\}$, $\det(J) = \frac{1}{2\ell}$ és $1\le k\le 4$, $1\le\ell\le 2$. Ezek alapján

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_H y/x\,dxdy &= \int_1^2\left(\int_1^4\sqrt{k\ell}/\sqrt{\frac{k}{\ell}}\cdot\frac{1}{2\ell}\,dk\right)d\ell = \int_1^2\left(\int_1^4\frac{\ell}{2\ell}\,dk\right)d\ell = \\ &= \int_1^2\left(\int_1^4\frac{1}{2}\,dk\right)d\ell = \int_1^2\left[\frac{1}{2}k\right]_{k=1}^{k=4}d\ell = \int_1^2\frac{3}{2}\,d\ell = \left[\frac{3}{2}\ell\right]_1^2 = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

b) Az Útmutató szerint $x = k^{1/3}\ell^{-1/3},\ y = k^{2/3}\ell^{1/3},\ k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ \ell_1 = \frac{1}{2},\ \ell_2 = 2,$ $\det(J) = \frac{2}{9}\ell^{-1} + \frac{1}{9}\ell^{-5/3}$, így

$$\int\int_H 1\,dxdy = \int_{\ell_1}^{\ell_2}\int_{k_1}^{k_2}\left(\frac{2}{9}\ell^{-1} + \frac{1}{9}\ell^{-5/3}\right)dkd\ell = 3\left[\frac{2}{9}\ln(\ell) - \frac{1}{6}\ell^{-2/3}\right]_{\ell=1/2}^{\ell=2} =$$
$$= \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}2^{-2/3} + \frac{1}{2}2^{2/3} \approx 1{,}4029.$$

c) $x = k^{2/3}\ell^{-2/3},\ y = k^{1/3}\ell^{2/3},\ k_1 = 1,\ k_2 = 3,\ \ell_1 = \frac{1}{2},\ \ell_2 = 5,\ \det(J) = \frac{2}{3}\ell^{-1}$, így

$$\int\int_H (2x+3y)\,dxdy = \int_{1/2}^{5}\int_{1}^{3}\left(2k^{2/3}\ell^{-2/3} + 3k^{1/3}\ell^{2/3}\right)\frac{2}{3}\ell^{-1}\,dkd\ell =$$
$$= \int_{1/2}^{5}\left[\left(\frac{6}{5}k^{5/3}\ell^{-2/3} + \frac{9}{4}k^{4/3}\ell^{2/3}\right)\cdot\frac{2}{3}\ell^{-1}\right]_{k=1}^{k=3}d\ell =$$
$$= \int_{1/2}^{5}\left(\frac{9}{2}\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{\ell}} + \frac{12}{5}\frac{3^{\frac{2}{3}}}{\ell^{\frac{5}{3}}} - \frac{3}{2\sqrt[3]{\ell}} - \frac{4}{5\ell^{\frac{5}{3}}}\right)d\ell \approx 25{,}0029.$$

Többváltozós integrálok

2.11. *a)*

$$\int_{-3}^{9}\int_{2}^{5}\int_{-1}^{4}\left(x + 3y^5 + xz^2\right)dxdydz = \int_{-3}^{9}\int_{2}^{5}\left[\frac{1}{2}x^2 + 3y^5x + \frac{1}{2}x^2z^2\right]_{x=-1}^{x=4}dydz =$$
$$= \int_{-3}^{9}\int_{2}^{5}\left(\frac{1}{2}\cdot(4^2-1) + 3y^5(4+1) + \frac{1}{2}z^2(4^2-1)\right)dydz =$$
$$= \int_{-3}^{9}\left[\frac{15}{2}y + \frac{15}{6}y^6 + \frac{15}{2}z^2y\right]_{y=2}^{y=5}dz =$$
$$= \int_{-3}^{9}\left(\frac{45}{2} + \frac{15}{6}(5^6-2^6) + \frac{45}{2}z^2\right)dz = \left[\frac{45}{2}z + \frac{15}{6}(5^6-2^6)z + \frac{45}{2\cdot 3}z^3\right]_{z=-3}^{z=9} =$$
$$= \left(\frac{45}{2}(9+3) + \frac{15}{6}(5^6-2^6)(9+3) + \frac{45}{6}(9^3+3^3)\right) = 472\,770.$$

b)

$$\int_1^2 \int_{2-x}^{2+3x} \int_{x-7y}^{x+y} (x^2 - 3y^3 + xz)\, dzdydx = \int_1^2 \int_{2-x}^{2+3x} \left[x^2 z - 3y^3 z + \frac{1}{2} x z^2 \right]_{z=x-7y}^{z=x+y} dydx =$$

$$= \int_1^2 \int_{2-x}^{2+3x} \left((x^2 - 3y^3)(y+7y) + \frac{1}{2} x \left((x+y)^2 - (x-7y)^2 \right) \right) dydx =$$

$$= \int_1^2 \int_{2-x}^{2+3x} (8x^2 y - 24y^4 + 8x^2 y - 24xy^2)\, dydx =$$

$$= \int_1^2 \left[8x^2 y^2 - \frac{24}{5} y^5 - 8xy^3 \right]_{y=2-x}^{y=2+3x} dx =$$

$$= \int_1^2 \Big(8x^2 \left((2+3x)^2 - (2-x)^2 \right) -$$

$$- \frac{24}{5} \left((2+3x)^5 - (2-x)^5 \right) - 8x \left((2+3x)^3 - (2-x)^3 \right) \Big) dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{-5856}{5} x^5 - 4000x^4 - 5632x^3 - 3456x^2 - 1536x \right) dx =$$

$$= \left[\frac{-976}{5} x^6 - 800x^5 - 1408x^4 - 1152x^3 - 768x^2 \right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \frac{-342\,928}{5} = -68585{,}6.$$

c)

$$\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} \frac{yz}{\sqrt{x}}\, dz \right) dydx = \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \left[\frac{yz^2}{2\sqrt{x}} \right]_{z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{z=c} dydx =$$

$$= \int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{yc^2}{2\sqrt{x}} \left(1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right) dydx =$$

$$= \int_0^a \left(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{yc^2}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{y^3 c^2}{2b^2\sqrt{x}}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^a \left[\frac{y^2 c^2}{4\sqrt{x}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{y^4 c^2}{8b^2\sqrt{x}} \right]_{y=0}^{y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx =$$

$$= \int_0^a \frac{c^2b^2}{4\sqrt{x}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 - \frac{b^4c^2}{8b^2\sqrt{x}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{c^2b^2}{8}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^2 dx = \frac{c^2b^2}{8}\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{a^2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{a^4}x^{\frac{7}{2}}\, dx =$$

$$= \frac{c^2b^2}{8}\left[2\sqrt{x} - \frac{4}{5a^2}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9a^4}x^{\frac{9}{2}}\right]_{x=0}^{x=a} =$$

$$= \frac{c^2b^2}{8}\left(2\sqrt{a} - \frac{4}{5a^2}a^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9a^4}a^{\frac{9}{2}}\right) = \frac{8}{45}\sqrt{a}b^2c^2.$$

M3. Többváltozós integrálok alkalmazásai

3.1. *a)* A 2.10.*a)* feladat transzformációját alkalmazva:

$$T_H = \int\int_H 1\, dxdy = \int_1^2 \left(\int_1^4 \frac{1}{2\ell}\, dk\right) d\ell \approx \frac{3}{2}\ln(2) = 1{,}0397.$$

b) A 2.10.*b)* feladatban már kiszámoltuk:

$$T_H = \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{1}{2}2^{-2/3} + \frac{1}{2}2^{2/3} \approx 1{,}4029.$$

3.2. A felület az $[x, y]$ síkot az $1-x^2-2y^2 = 0$ egyenletű ellipszisben metszi, tehát a térfogat $V = \int\int_H f$ ahol $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \le 1\}$.

Polártranszformációt alkalmazva

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right)\frac{r}{\sqrt{2}}\, drd\varphi = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \approx 1{,}1107.$$

3.3. A két henger forgástengelyei az x és y koordinátatengelyek. Felülről nézve a két henger metszésvonalai az $y = x$ és $y = -x$ egyenesek. A közös rész egyik nyolcada pl. a $(0, 0)$, $(r, 0)$ és (r, r) pontok által határolt háromszög alatt és felett van, határfelülete az $x^2+z^2 = r^2$ henger, azaz a $z = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ függvény. Tehát a térfogat

$$V = 16\int_0^r\int_0^x \sqrt{r^2 - x^2}\, dydx = 16\int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{16}{3}r^3.$$

Megjegyzés: A térfogat kiszámítására *Bláthy Ottó* rövid, szemléletes megoldást adott: „*A közös test elöl- és oldalnézete kör, felülnézete és* minden *vízszintes metszete pedig a megfelelő kör köré írt négyzet. Tehát a közös test köbtartalma úgy viszonylik a gömbéhez, mint a négyzet területe a beírt köréhez, vagyis arányuk* $4 : \pi$. *Tehát a közös test köbtartalma* $\frac{4}{\pi}\cdot\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{16}{3}r^3$.”

3.4. A testet felülről határoló gömb egyenlete $x^2+y^2+z^2=R^2$ azaz $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, az $\int\int$ tartománya a henger és az $[x,y]$ sík metszete:

$$T=\left\{(x,y):(x-1)^2+y^2\le\rho^2\right\}$$

egy origót érintő kör, így a térfogat $V=2\int\limits_T\int\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dydx$. Az $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ polártranszformáció után $T=\left\{(r,\varphi):\dfrac{-\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le r\le R\cos\varphi\right\}$ és

$$V=2\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{R\cos\varphi}r\sqrt{R^2-r^2}\,drd\varphi=2\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{2}\left[\frac{2}{3}\left(R^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=R\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{-2}{3}R^3\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1-\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]\,d\varphi=\frac{-4}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\varphi-1)\,d\varphi=$$

$$=\frac{-4}{3}R^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)-1\right)\,d\varphi=\frac{4}{3}R^3\left[\cos\varphi-\frac{1}{3}\cos^3\varphi+\varphi\right]_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\approx 1{,}2055R^3.$$

3.5. $\frac{\partial}{\partial x}f=y$ és $\frac{\partial}{\partial y}f=x$, tehát $A=\int\limits_H\int\sqrt{1+x^2+y^2}$. Polártranszformáció után

$$A=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}r\sqrt{1+(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi)^2}\,drd\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R}r\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[(r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^R=\frac{2\pi}{3}\left((R^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\right).$$

3.6. $\frac{\partial}{\partial x}f=-2x$, $\frac{\partial}{\partial y}f=-2y$ így a felszín

$$A=\int\limits_{x^2+y^2\le 1}\int\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxy=\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{125}-1\right)$$

(polárkoordinátás helyettesítés után).

3.7. *a)* A nevező

$$T=\int\limits_0^4\int\limits_0^{\sqrt{x}}1\,dydx=\int\limits_0^4\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=4}=\frac{16}{3},$$

x_s számlálója $\int\limits_0^4 \int\limits_0^{\sqrt{x}} x\,dydx = \int\limits_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{64}{5}$,

y_s számlálója $\int\limits_0^4 \int\limits_0^{\sqrt{x}} y\,dydx = \int\limits_0^4 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}\left[x^2\right]_{x=0}^{x=4} = 4$,

tehát $x_s = \frac{64}{5}/\frac{16}{3} = \frac{12}{5}$, $y_s = 4/\frac{16}{3} = \frac{3}{4}$, $S = \left(\frac{12}{5}, \frac{3}{4}\right)$.

b) Mivel a félkör szimmetrikus az y tengelyre ezért $x_s = 0$. A lemez homogenitása miatt $\rho(x,y) = 1$ és a nevező éppen a félkör területe $= R^2\pi/2$.

A számláló pedig $= \int\limits_H\int y\,dxy = \int\limits_{-R}^{R}\int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dydx = \frac{2}{3}R^3$, tehát $y_s = \frac{2}{3}R^3/\frac{R^2\pi}{2} = \frac{4R}{3\pi}$, és így a súlypont $S(x_s, y_s) = \left(0, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

c) Az $x = r\cos^3\varphi$, $y = r\sin^3\varphi$, $\det(J) = 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi$ transzformáció után a nevező

$$= \int\limits_H\int 1\,dxy = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^R 3r\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,drd\varphi = \frac{3R^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{3R^2}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(4\varphi)}{2}\,d\varphi = \frac{3R^2}{16}\left[\varphi - \frac{1}{4}\sin(4\varphi)\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= \frac{3R^2}{16}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{3\pi}{32}R^2;$$

mindkét számláló

$$= \int\limits_H\int x\,dxy = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^R 3r^2\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,drd\varphi =$$

$$= R^3\int\limits_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\cdot\left(1-\sin^2(\varphi)\right)^2\cdot\sin^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= R^3\int\limits_0^{\pi/2}\cos(\varphi)\cdot(\sin^6\varphi - 2\sin^4\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= R^3\left[\frac{1}{7}\sin^7\varphi - \frac{2}{5}\sin^5\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} =$$

$$= R^3\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{105}R^3$$

hiszen H szimmetrikus az $y = x$ egyenesre.

Így a súlypontra $x_s = y_s = \frac{8}{105}R^3/\frac{3\pi}{32}R^2 = \frac{256}{315\pi}R$ azaz $S = \left(\frac{256}{315\pi}R, \frac{256}{315\pi}R\right)$.

3.8. *a)* A test szimmetrikus az $y = x$ egyenesre, vagyis $x_s = y_s$. Ha csak a súlypont vetületére vagyunk kíváncsiak, akkor a test tekinthető egy $[x, y]$ síkban fekvő négyzetlemeznek, melynek (x, y) pontjában sűrűsége $\rho(x, y) = f(x, y) = x + y$.

Ekkor a számlálók $= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x(x+y)\,dyx = \frac{7}{12}$, a nevező $= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 x + y\,dyx = 1$ (= a megmaradt test térfogata), tehát a súlypont vetülete $\overline{S} = \left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}\right)$.

b) A térbeli súlypont z koordinátájának meghatározásához hármas integrál kell (most $\rho(x, y, z) = 1$).

$$z_s \text{ számlálója} = \int\int\limits_K\int z\,dxyz = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x+y} z\,dzdxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1}{2}(x+y)^2\,dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x^2 + 2xy + y^2)\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2\right]_{x=0}^{x=1} dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{3} + y + y^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{12},$$

míg z_s nevezője $= \int\int\limits_K\int 1\,dxyz = V_K = 1$ (= K térfogata).

Tehát a súlypont $S = \left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12}\right)$.

3.9. A közös nevező

$$m = V = \int\int\limits_K\int 1\,dxyz = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^{\sqrt{xy}} 1\,dzdydx = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \sqrt{xy}\,dydx = \frac{4}{9}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}},$$

$$x_s \text{ számlálója} = \int\int\limits_K\int x\,dxyz = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^{\sqrt{xy}} x\,dzdydx = \int\limits_0^a \int\limits_0^b x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}\,dydx = \frac{4}{15}a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}},$$

$$y_s \text{ számlálója} = \int\int\limits_K\int y\,dxyz = \int\limits_0^a \int\limits_0^b \int\limits_0^{\sqrt{xy}} y\,dzdydx = \int\limits_0^a \int\limits_0^b x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}\,dydx = \frac{4}{15}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{5}{2}},$$

z_s számlálója $= \int\int\limits_K\int z\,dxyz = \int\limits_0^a\int\limits_0^b\int\limits_0^{\sqrt{xy}} z\,dzdydx = \frac{1}{2}\int\limits_0^a\int\limits_0^b xy\,dydx = \frac{1}{8}a^2b^2,$

tehát $S = \left(\frac{3}{5}a,\ \frac{3}{5}b,\ \frac{9}{32}\sqrt{ab}\right)$.

3.10. $\rho(x,y) = \dfrac{m}{R^2\pi}$ állandó, így az integrál elé kiemelhető:

$$\Theta_z = \frac{m}{R^2\pi}\int\int\limits_{x^2+y^2\le R^2}\left(x^2+y^2\right)\,dxy = \frac{m}{R^2\pi}\cdot\frac{2\pi R^4}{4} = \frac{1}{2}R^2m$$

(polárkoordinátás helyettesítést alkalmazva).

3.11. $H = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ választással

$$\Theta_x = \rho\int\int\limits_H y^2\,dxy = \frac{\rho}{3}ab^3 = \frac{1}{3}mb^2$$

és

$$\Theta_y = \rho\int\int\limits_H x^2\,dxy = \frac{1}{3}ma^2$$

ahol $m = \rho ab$ a test tömege.

Megjegyzés: A feladat és végeredménye egy b illetve a hosszúságú, m tömegű rúd végpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának is tekinthető.

3.12. $\Theta_{(0,0)} = \Theta_x + \Theta_y = 1\cdot\int\int\limits_H\left(x^2+y^2\right)\,dxy = \int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^x\left(x^2+y^2\right)\,dydx =$

$$= \int\limits_0^1\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=x^2}^{y=x}dx = \int\limits_0^1\left(x^3+\frac{1}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\right)dx = \frac{3}{35}.$$

3.13. Legyen a kocka középpontja az origó, a vonatkoztatási egyenes a x tengely. Ekkor

$$\Theta_x = \rho\cdot\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-a/2}^{a/2}\left(y^2+z^2\right)\,dxyz = \rho a\int\limits_{-a/2}^{a/2}\int\limits_{-a/2}^{a/2}\left(y^2+z^2\right)\,dydz =$$

$$= \rho a\int\limits_{-a/2}^{a/2}\left[\frac{1}{3}y^3+z^2y\right]_{y=-a/2}^{y=a/2}dz = \rho a\int\limits_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{1}{12}a^3+z^2a\right)dz =$$

$$= \rho a\left[\frac{1}{12}a^3z+\frac{1}{3}z^3a\right]_{z=-a/2}^{z=a/2} = \rho a\left[\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{12}a^4\right] = \frac{1}{6}\rho a^5 = \frac{1}{6}ma^2$$

hiszen $m = \rho a^3$.

M4. Közönséges differenciálegyenletek alapjai

4.0. *a)* $y' = x^2 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},$

$y' = 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R},\ y \geq 0,$

$y' = \dfrac{x \cdot y}{x^2 - 1} \quad \Longrightarrow \quad x > 1$ vagy $x < 1$, mindkét esetben $y \in \mathbb{R}$,

$y' = \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{2x} \quad \Longrightarrow \quad (x > 0$ vagy $x < 0)$ és $(y > 0$ vagy $y < 0) =$ valamelyik síknegyed.

b) $x \cdot y' + 2y = 3x \quad \Longrightarrow \quad y' = 3 - 2\dfrac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad x > 0$ vagy $x < 0$, mindkét esetben $y \in \mathbb{R}$,

$x - \dfrac{y^2}{x^3} + \dfrac{y}{x^2} \cdot y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \dfrac{x^2}{y} \cdot \left(\dfrac{y^2}{x^3} - x\right) = \dfrac{y^2 - x^4}{xy} \quad \Longrightarrow \quad (x > 0$ vagy $x < 0)$ és $(y > 0$ vagy $y < 0) =$ valamelyik (nyílt) síknegyed.

4.1. *a)* $m = y'(1) = 1^2 - 2^2 = -3$, tehát az érintő egyenlete:

$$y = 2 - 3\,(x - 1) = 5 - 3x. \quad y'' = \frac{d}{dx}\left(x^2 - y^2\right) = 2x - 2y \cdot y',$$

tehát $y''(1) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-3) = 14.$

b) $m = y'(2) = \dfrac{2^2}{3 \cdot (1 + 2^3)} = \dfrac{4}{27}$, az érintő:

$$y = 3 + \frac{4}{27}(x - 2) = \frac{4}{27}x + \frac{73}{27},$$
$$y'' = \frac{d}{dx}\frac{x^2}{y \cdot (1 + x^3)} = \frac{x \cdot (2 - x^3)}{y\,(x^3 + 1)^2},$$
$$y''(2) = \frac{-4}{81}.$$

c) $m = y'(-1) = \dfrac{5}{4},\ y = -2 + \dfrac{5}{4}(x+1),\ y'' = \frac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{2x}\right) = \dfrac{x^2 - y^2}{2x^2 y},\ y''(-1) = \dfrac{3}{4}.$

d)* $x = y = 0$ esetén az egyenletből $y'(0)$ nem határozható meg, ezért a K.É.P.-nak *nincs* megoldása.

4.2. A Feladatgyűjteményhez **mellékelt** IRANYMEZO.EXE *interaktív* **program** segítségével *tetszőleges explicit elsőrendű* differenciálegyenletet beírhatunk, iránymezőket rajzolhatunk és tanulmányozhatunk, a program **Help**-jében például a *c)* **feladat megoldását** láthatjuk.

4.3. *a)* $P_0 = (x_0; y_0) = (3; 2),\ y'(x_0) = 5,\ y = 2 + 5(x - 3),$

$$x_1 = x_0 + \delta = 3{,}1 \quad \Longrightarrow \quad y_1 = 2 + 5 \cdot \delta = 2{,}5,$$

$$P_1 = (x_1; y_1) = (3{,}1; 2{,}5),\ y'(x_1) = 3{,}36,\ y = 2{,}5 + 3{,}36(x - 3{,}1),$$

$$x_2 = x_1 + \delta = 3{,}2 \quad \Longrightarrow \quad y_2 = 2{,}5 + 3{,}36 \cdot 0{,}1 = 2{,}836,$$

$$P_2 = (3{,}2; 2{,}836),\ y'(x_2) \approx 2{,}1971,\ x_3 = 3{,}3,$$

$$y_1 = 2{,}836 + 2{,}1971 \cdot 0{,}1 \approx 3{,}0557,$$

vagyis a folytatás:

i	x_i	y_i	y'_i
0	3,0	2,0000	5,0000
1	3,1	2,5000	3,3600
2	3,2	2,8360	2,1971
3	3,3	3,0557	1,5526
4	3,4	3,2110	1,2496
5	3,5	3,3359	1,1215
6	3,6	3,4481	1,0707
7	3,7	3,5552	1,0509
8	3,8	3,6602	1,0426
9	3,9	3,7645	1,0385
10	4,0	3,8684	1,0358

b), c) hasonlóan:

i	x_i	y_i	y'_i
0	1,0	2,0000	2,8284
1	1,1	2,2828	3,0218
2	1,2	2,5850	3,2156
3	1,3	2,9066	3,4097
4	1,4	3,2476	3,6042
5	1,5	3,6080	3,7989
6	1,6	3,9878	3,9939
7	1,7	4,3873	4,1892
8	1,8	4,8062	4,3846
9	1,9	5,2446	4,5802
10	2,0	5,7027	4,7761

i	x_i	y_i	y'_i
0	2,0	1,0000	0,6667
1	2,1	1,0667	0,6568
2	2,2y	1,1324	0.6y487
3	2,3y	1,1972	0.6y418
4	2,4y	1.2y614	0,6360
5	2,5	1.3y250	0,6309
6	2,6y	1.3yy881	0,6265
7	2,7y	1,4507	0,6227
8	2,8	1,5130	0,6193
9	2,9	1,5749	0,6163
10	3,0	1,6366	0,6137

A jelen feladatgyűjteményhez **mellékelt** EULERTV.EXE *interaktív* **program** segítségével *tetszőleges explicit elsőrendű* differenciálegyenlet bármely (egyszerre legfeljebb tíz) K.É.P.

pontjából kiinduló megoldását közelíthetjük, álló- és mozgóképeket készíthetünk, a számítások részleteit táblázatba menthetjük. A program Help-jében például a *c)* **feladat egy animált megoldását** láthatjuk.

4.4. *a)* $y'(x) = (cx)' = c$ és $\dfrac{y(x)}{x} = \dfrac{c \cdot x}{x} = c$, tehát valóban $y' = \dfrac{y}{x}$.

b) $y(x) = b\sqrt{1-x^2}$, tehát $y'(x) = \dfrac{-2bx}{2\sqrt{1-x^2}}$, míg

$$\frac{x \cdot y(x)}{x^2-1} = \frac{x \cdot b\sqrt{1-x^2}}{x^2-1} = \frac{xb}{-\sqrt{1-x^2}},$$

ami ugyanaz.

c) $y_1' = 2(x-c)$, $2\sqrt{y_1} = 2\,|x-c|$ CSAK $x \geq c$ esetén egyenlő!

$y_2' = 2\sqrt{y_2}$ hiszen y_2 kizárólag $x \geq c$ esetén értelmezett.

M5. Elsőrendű differenciálegyenletek

Szétválasztható változójú egyenletek

5.1. *a)* $\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \cos(x)\,dx$, $\frac{-1}{y} = -\sin(x) + C$, az *általános megoldás:* $y(x) = \frac{1}{\sin(x)+C}$ $(C \in \mathbb{R})$. K.É.P.:

$$y(0) = \frac{1}{\sin(0)+C} = 2 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{2}. \quad Dom(y)$$

kikötései: $y \neq 0$, $\sin(x) + C \neq 0$, $x_0 = 0$, így $-\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) < x < \pi + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$, azaz: $-0{,}523\,60 < x < 3{,}6652$.

b) $\int y'(x) \cdot y(x)\,dx = \int y dy = \frac{1}{2}y^2(x) = \int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C$, $y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\ln|1+x^3| + C}$, K.É.P.:

$$2 = \sqrt{\frac{2}{3}\ln 2 + C} \quad \Longrightarrow \quad C = 4 - \frac{2}{3}\ln 2 \approx 3{,}5379. \quad Dom(y)$$

kikötései: $x \neq -1$ azaz $-1 < x$, $0 \leq \frac{2}{3}\ln(1+x^3) + C$ azaz $\sqrt[3]{e^{\frac{-3}{2}C} - 1} \approx -0{,}9983 \leq x$, vagyis: $-1 < x$.

c) $y'(x) = 1 + x + y^2 + xy^2 = (1+x)\cdot(1+y^2)$, $\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \operatorname{arctg}(y) = \int 1 + x\,dx = x + \frac{1}{2}x^2 + C$, $y(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + C\right)$, K.É.P.:

$$1 = \operatorname{tg}(0+C) \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{\pi}{4}. \quad Dom(y)$$

kikötései ($x_0 = 0$ és $C = \frac{\pi}{4}$ miatt):

$$\frac{-\pi}{2} < x + \frac{1}{2}x^2 + C < \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad -\sqrt{1+\frac{\pi}{2}} - 1 < x < \sqrt{1+\frac{\pi}{2}} - 1 \approx$$
$$\approx -2{,}6034 < x < 0{,}6034.$$

Visszavezethető típusok

5.2. *a)* $u(x) = y(x) - x,\ y'(x) = u'(x) + 1 = u^2(x),$

$$u'(x) = u^2(x) - 1,$$
$$\int \frac{u'(x)}{u^2(x)-1}\,dx = \int \frac{1}{u^2-1}\,du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \int 1\,dx = x + C,$$
$$\frac{u(x)-1}{u(x)+1} = \pm e^{2(x+C)}.$$

A $\pm$ eldöntéséhez használjuk a K.É.P.-t: $u(1) = 3 - 1 = 2$ és

$$\frac{u(x)-1}{u(x)+1} = \frac{2-1}{2+1} = +e^{2\cdot(1+C)}.$$

Így

$$\frac{u(x)-1}{u(x)+1} = 1 - \frac{2}{u(x)+1} = e^{2(x+C)},$$
$$u(x) = \frac{2}{1-e^{2(x+C)}} - 1,$$
$$y(x) = \frac{2}{1\mp e^{2(x+C)}} - 1 + x.$$

K.É.P.: $C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) - 1 \approx -1{,}5493$ és

$$y(x) = \frac{2}{1-e^{2(x+C)}} - 1 + x. \quad Dom(y)$$

kikötései: $1 - e^{2(x+C)} \neq 0$ azaz $x \neq -C$ és

$$u(x) = y(x) - x = \frac{2}{1-e^{2(x+C)}} - 1 \neq \pm 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathbb{R},$$

végülis $x < -C \approx 1{,}5493$.

b) $u(x) = 2x + 3y,\ y'(x) = \frac{1}{3}u'(x) - \frac{2}{3} = u^2(x) + 1,$

$$u'(x) = 3u^2(x) + 5,$$
$$\int \frac{u'(x)}{3u^2(x)+5}\,dx = \int \frac{1}{3u^2+5}\,du = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}u(x)\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \int 1\,dx = x + C,$$

$$u(x) = \frac{5}{\sqrt{15}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{15}(x+C) + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y(x) = \frac{5}{3\sqrt{15}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{15}(x+C) + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{3}x.$$

K.É.P.

$$y(0) = \frac{5}{3\sqrt{15}} \operatorname{tg}\left(\sqrt{15}C + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\operatorname{arctg}\left(-3\sqrt{15}/5\right) - \frac{\pi}{2}\right) \approx$$
$$\approx -0{,}7062. \quad Dom(y)$$

kikötései:

$$\frac{-\pi}{2} < \sqrt{15}(x+C) + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

($x_0 = 0$ miatt), $\frac{-\pi}{\sqrt{15}} - C < x < -C$ vagyis $\approx -0{,}1049 < x < 0{,}7062$.

c) $u(x) = x + y,\ y'(x) = u'(x) - 1 = \cos(u(x))$,

$$\int \frac{u'(x)}{\cos(u(x)) + 1}\,dx = \int \frac{1}{\cos(u) + 1}\,du = \frac{\sin u}{\cos u + 1} = \int 1\,dx = x + C,$$
$$\frac{\sin(u)}{\cos(u) + 1} = \operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right) = x + C,$$
$$u(x) = 2\operatorname{arctg}(C + x),$$
$$y(x) = 2\operatorname{arctg}(C + x) - x.$$

K.É.P.:

$$y(0) = 2\operatorname{arctg}(C) = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad C = 1. \quad Dom(y)$$

kikötései: $\cos(u) + 1 = \cos(2\operatorname{arctg}(1 + x)) + 1 \neq 0$ azaz $x \in \mathbb{R}$.

5.3. *a)* Az $u(x) := \frac{y}{x}$ helyettesítés után kapjuk: $u(x) + x \cdot u'(x) = u^2(x) + u(x)$,

$$u'(x) = \frac{1}{x} \cdot u^2(x),$$
$$\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}\,dx = \int u^{-2}\,du = \frac{-1}{u(x)} = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$$

(mert $x_0 > 0$),

$$u(x) = \frac{-1}{\ln(x) + C},$$
$$y(x) = \frac{-x}{\ln(x) + C}.$$

K.É.P.:

$$y(1) = \frac{-1}{\ln(1) + C} = 3 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{-1}{3}. \quad Dom(y)$$

kikötései: $x \neq 0$,

$$u(x) = \frac{-1}{\ln(x) + C} \neq 0,$$
$$\ln(x) + C = \ln(x) - \frac{1}{3} \neq 0$$

azaz

$$x \neq e^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}3956.$$

Tehát $x_0 = 1$ miatt $1 < x < e^{\frac{1}{3}}$.

b) $u(x) := \frac{y}{x}$,

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x) = \frac{1}{2u(x)} + \frac{u(x)}{2},$$
$$u'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2u(x)} - \frac{u(x)}{2}\right) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - u^2(x)}{2u(x)},$$
$$\int \frac{2u(x)}{1 - u^2(x)} u'(x)\, dx = \int \frac{2u}{1 - u^2}\, du = -\ln\left|1 - u^2(x)\right| = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) + C$$

(mert $x_0 < 0$),

$$\frac{1}{1 - u^2(x)} = \pm\left(-x \cdot e^C\right),$$
$$1 - u^2(x) = \frac{\mp 1}{x \cdot e^C}.$$

A $\pm$ eldöntése a K.É.P.-val:

$$1 - u^2(-1) = 1 - \left(\frac{-2}{-1}\right)^2 = -3 = \frac{+1}{(-1) \cdot e^C} \quad \Longrightarrow \quad C = \ln\frac{1}{3},$$

tehát

$$u(x) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{x \cdot e^C}},$$
$$u(-1) = \frac{-2}{-1} = 2$$

miatt

$$u(x) = +\sqrt{1 - \frac{1}{x \cdot e^C}}$$

és

$$y(x) = x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x \cdot e^C}}. \quad Dom(y)$$

kikötései: $x \neq 0$,

$$u(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x \cdot e^C}} \neq 0$$

és

$$y(x) = x \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x \cdot e^C}} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq e^{-C} = 3,$$

$1 - u^2(x) \neq 0$ vagyis

$$\sqrt{1 - \frac{1}{x \cdot e^C}} \neq \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tehát $x_0 = -1$ miatt $x < 0$.

c) $u(x) := \frac{y}{x}$,

$$y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x) = u(x) - \cos\left(u(x)\right),$$
$$u'(x) = \frac{-1}{x} \cos\left(u(x)\right),$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos\left(u(x)\right)}\, dx = \int \frac{1}{\cos(u)} du = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}\right) = \int \frac{-1}{x}\, dx = -\ln(x) + C$$

(mert $x_0 > 0$),

$$\ln\left(\frac{1 + \sin u}{1 - \sin u}\right) = -2\ln(x) + C,$$
$$\frac{1 + \sin u}{1 - \sin u} = \frac{2}{1 - \sin u} - 1 = x^{-2} D \quad (D = e^C > 0),$$
$$1 - \sin u = \frac{2}{1 + x^{-2} D},$$

$$u(x) = \arcsin\left(1 - \frac{2}{1 + x^{-2} D}\right),$$
$$y(x) = x \cdot \arcsin\left(1 - \frac{2}{1 + x^{-2} D}\right).$$

K.É.P.:

$$y(3) = 3 \arcsin\left(1 - \frac{2}{1 + 3^{-2} D}\right) = \pi \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{-9}{\sqrt{3}/4 - 1/2} - 9 \approx$$
$$\approx 125{,}3538. \quad Dom(y)$$

kikötései: $x \neq 0$,

$$\cos\left(u(x)\right) = \cos\left(\arcsin\left(1 - \frac{2}{1 + x^{-2} D}\right)\right) \neq 0$$

és

$$\sin\left(u(x)\right) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R},$$
$$1 + x^{-2} D \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R},$$
$$-1 < 1 - \frac{2}{1 + x^{-2} D} < 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tehát $x_0 = 3$ miatt $0 < x$.

Lineáris egyenletek

5.4. $P(x) = \int -x\,dx = \frac{-1}{2}x^2$,

$$\int q(x)e^{P(x)}\,dx = \int x \cdot e^{-x^2/2}\,dx = \\ = -e^{-x^2/2} + C,$$

így (7) szerint az általános megoldás

$$y(x) = e^{x^2/2} \cdot \left(-e^{-x^2/2} + C\right) = Ce^{x^2/2} - 1.$$

K.É.P.: $y(0) = Ce^0 - 1 = 1$ tehát $C = 2$. $Dom(y) = \mathbb{R}$.

5.5. *a)* $P(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$ /mivel $x_0 > 0$/,

$$\int q(x)e^{P(x)}\,dx = \int -e^x \cdot e^{\ln(x)} = -\int xe^x\,dx = -e^x(x-1) + C,$$

így

$$y(x) = e^{-\ln(x)} \cdot (-e^x(x-1) + C) = -e^x\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{C}{x}.$$

K.É.P.: $y(1) = C = 0$. $Dom(y) = \mathbb{R}^+$.

b) $P(x) = \int \frac{-2x}{1+x^2}\,dx = -\ln\left(x^2+1\right)$,

$$\int q(x)e^{P(x)}\,dx = \int 1 \cdot e^{-\ln\left(x^2+1\right)}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \text{arctg}(x) + C,$$
$$y(x) = \left(x^2+1\right) \cdot (\text{arctg}(x) + C)\,.$$

K.É.P.: $y(0) = 1 \cdot C = 1$, $Dom(y) = \mathbb{R}$.

c) $P(x) = \int \frac{1-x}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\left(x\ln(-x) + 1\right) = -\ln(-x) - \frac{1}{x}$ (mert $x_0 < 0$),

$$\int q(x)e^{P(x)}\,dx = \int e^{1/x} \cdot \exp\left(-\ln(-x) - \frac{1}{x}\right)\,dx = \int \frac{-1}{x}dx = -\ln(-x) + C$$

(mert $x_0 < 0$),

$$y(x) = \exp\left(\ln(-x) + \frac{1}{x}\right) \cdot (-\ln(-x) + C) = xe^{\frac{1}{x}}\left(\ln(-x) - C\right).$$

K.É.P.: $y(-1) = -e^{-1} \cdot (-C) = 2 \quad \Longrightarrow \quad C = 2e \approx 5{,}4366$. $Dom(y) = \mathbb{R}^-$.

Bernoulli-egyenletek

5.7. *a)* $u(x) := y^{1-2}(x) = y^{-1}(x)$,

$$y'(x) = \left(u^{-1}(x)\right)' = \frac{-u'(x)}{u^2(x)} = \frac{y(x)}{x} + 2y^2(x) = \frac{u^{-1}(x)}{x} + 2u^{-2}(x),$$

$$u'(x) + \frac{u(x)}{x} = -2,$$

$$P(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x)$$

(mert $x_0 > 0$),

$$\int -2e^{\ln(x)}\,dx = \int -2x\,dx = -x^2 + C,$$

$$u(x) = e^{-\ln(x)} \cdot \left(-x^2 + C\right) = \frac{-x^2 + C}{x},$$

$$y(x) = u^{-1}(x) = \frac{x}{C - x^2}.$$

K.É.P.: $y(1) = \frac{1}{C-1^2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{3}{2}$. $Dom(y)$ kikötései: $x \neq 0$,

$$u(x) = \frac{-x^2 + C}{x} \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}2247,$$

tehát $0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$.

b) $u(x) = y^{1-1/2}(x) = y^{1/2}(x)$,

$$y'(x) = \left(u^2(x)\right)' = 2u(x) \cdot u'(x) = y(x) + x \cdot \sqrt{y(x)} = u^2(x) + x \cdot u(x),$$

$$u'(x) - \frac{1}{2}u(x) = \frac{x}{2},$$

$$P(x) = \int -\frac{1}{2}\,dx = \frac{-x}{2},$$

$$\int \frac{x}{2}e^{-x/2}\,dx = -e^{-x/2}(x+2) + C,$$

$$u(x) = e^{x/2} \cdot \left(-e^{-x/2}(x+2) + C\right),$$

$$y(x) = \left(e^{x/2} \cdot \left(-e^{-x/2}(x+2) + C\right)\right)^2,$$

K.É.P.: az $y(0) = \left(e^0 \cdot (-e^{-0}(0+2) + C)\right)^2 = 1$ egyenletből $C = 3$ mert $u(x) > 0$. $Dom(y)$ kikötései: $y(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in \mathbb{R}$.

c) $u(x) = y^{1-3}(x) = y^{-2}(x)$,

$$y'(x) = \left(u^{-1/2}(x)\right)' = \frac{-1}{2}u^{-3/2}(x) \cdot u'(x) =$$

$$= \frac{2y}{x} + \frac{y^3}{x^3} = \frac{2}{x}u^{-1/2}(x) + \frac{1}{x^3}u^{-3/2}(x),$$

$$u'(x) + \frac{4}{x}u(x) = \frac{-2}{x^3},$$
$$P(x) = \int \frac{4}{x}\,dx = 4\ln(-x) \qquad (\text{mert } x_0 < 0),$$
$$u(x) = e^{-4\ln(-x)} \cdot \int \frac{-2}{x^3} e^{4\ln(-x)}\,dx = x^{-4} \cdot \left(-x^2 + C\right) = \frac{-x^2 + C}{x^4},$$
$$y(x) = u^{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{x^4}{C - x^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{C - x^2}}.$$

K.É.P.:

$$y(-1) = \frac{1}{\sqrt{C-1}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{5}{4}.$$

$Dom(y)$ kikötései: $x \neq 0,\ x < 0,$

$$C - x^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \sqrt{C},$$

tehát $-\sqrt{\frac{5}{4}} < x < 0.$

Egzakt egyenletek

5.8. *a)* Ellenőrzés:

$$\frac{\partial}{\partial y}P = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y\right) = 1 \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}Q = \frac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1$$

OK.

$$\int P(x,y)\,dx = \int x^2 + y\,dx = \frac{1}{3}x^3 + yx + \psi(y),$$
$$\int Q(x,y)\,dy = \int x - y\,dy = xy - \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x),$$

így (*)

$$F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + yx - \frac{1}{2}y^2 = c$$

(ha $\psi(y) = -\frac{1}{2}y^2$ és $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3$).
K.É.P.: $F(2,3) = \frac{1}{3} \cdot 2^3 + 3 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{25}{6} = c.$
$y(x)$ meghatározásához a (*) egyenletet kell megoldanunk y-ra:

$$y(x) = \frac{1}{-1}\left(-x \pm \sqrt{x^2 - 4 \cdot \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3 - c\right)}\right) = x \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 25},$$

a K.É.P. miatt a $\pm$ jel helyén $+$ áll.

b) Az egyenlet $(2x + 3y \cdot x^2) + (x^3 - 3y^2)\,y'(x) = 0$ alakban is írható.

Ellenőrzés:

$$\frac{\partial}{\partial y}P = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x + 3y \cdot x^2\right) = 3x^2 \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}Q = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - 3y^2\right) = 3x^2$$

OK,

$$\begin{aligned}
\int P(x,y)\,dx &= \int 2x + 3yx^2 dx = x^2 + yx^3 + \psi(y),\\
\int Q(x,y)\,dy &= \int x^3 - 3y^2 dy = x^3y - y^3 + \varphi(x),\\
F(x,y) &= x^2 + yx^3 - y^3 = c = F(0,0) = 0,\\
y(x) &= \mathcal{R}(x) + \frac{x^3}{3\mathcal{R}(x)}
\end{aligned}$$

ahol

$$\mathcal{R}(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x^4/4 - x^9/27} + x^2/2}.$$

c) Ellenőrzés:

$$\frac{\partial}{\partial y}P = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{y^2}{x^3}\right) = \frac{-2y}{x^3} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}Q = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-2y}{x^3}$$

OK,

$$\begin{aligned}
\int P(x,y)\,dx &= \int x - \frac{y^2}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}y^2 + \psi(y),\\
\int Q(x,y)\,dy &= \int \frac{y}{x^2}\,dy = \frac{1}{2x^2}y^2 + \varphi(x),\\
F(x,y) &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}y^2 = c = F(1,-2) = \frac{5}{2},\\
y(x) &= -x\sqrt{5 - x^2}.
\end{aligned}$$

d) Ellenőrzés:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}P = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x+y}\right)^2 &= \frac{2xy}{(x+y)^3} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}Q =\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right)^2 = \frac{2xy}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

OK,

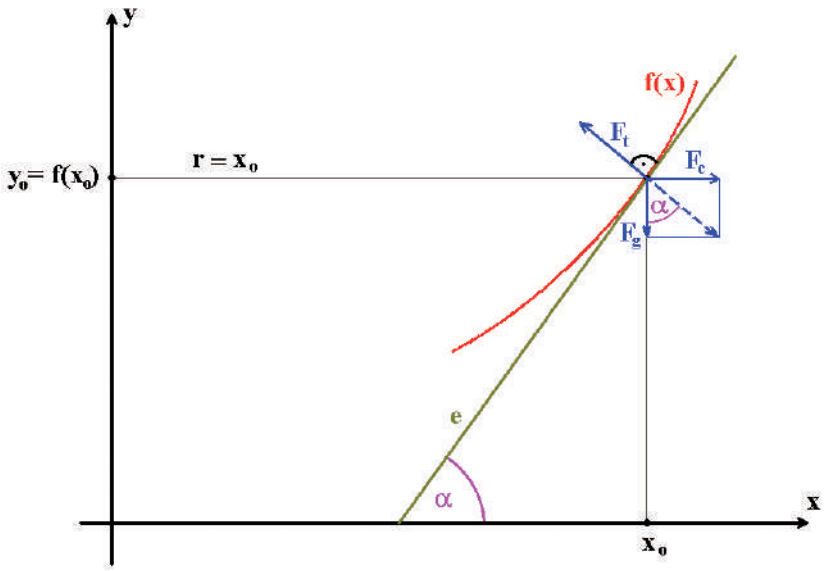
$$\begin{aligned}
\int P(x,y)\,dx &= \int \left(\frac{y}{x+y}\right)^2 dx = \frac{-y^2}{x+y} + \psi(y),\\
\int Q(x,y)dy &= \int \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 dy = \frac{-x^2}{x+y} + \varphi(x),\\
F(x,y) &= \frac{xy}{x+y}
\end{aligned}$$

(ugyanis $\frac{-y^2}{x+y} - \frac{-x^2}{x+y} = x - y$ azaz $\psi(y) = y$ és $\varphi(x) = x$), az $\frac{xy}{x+y} = F(2,3) = \frac{6}{5}$ egyenletből pedig $y(x) = \frac{6x}{5x-6}$.

Megjegyzés: az egyenlet $y'(x) = \frac{-y^2}{x^2}$ alakra is hozható, vagyis szeparálható is.

M6. Elsőrendű differenciálegyenletek alkalmazásai

6.1.



9. ábra. 6.1.

Az $y = f(x)$ görbe egy $P(x_0, f(x_0))$ pontjára ható erőkre az

$$\left(\overrightarrow{F}_g + \overrightarrow{F}_c\right) \parallel \overrightarrow{F}_t \qquad \text{és} \qquad \overrightarrow{F}_t \perp e$$

feltételeknek kell teljesülnie (e az érintő), azaz

$$f'(x_0) = \text{tg}(\alpha) = F_c/F_g = mx_0\omega^2/mg = kx_0 \qquad (k > 0),$$

ahonnan $f(x) = \int kx\,dx = \frac{k}{2}x^2 + C$. Tehát a forgó/megkevert pohár víz valóban forgási paraboloid alakú.

6.2. Az $y = f(x)$ függvénygörbét $E(x_0, f(x_0))$ pontjában érintő egyenes egyenlete

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

ennek tengelymetszetei $A(0, y_M)$ és $B(x_M, 0)$ ahol

$$y_M = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

és

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_M - x_0)$$

alapján

$$x_M = \frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(feltéve $f'(x_0) \neq 0$). E akkor felezőpontja AB-nek, ha $x_0 = \frac{1}{2}x_M$ és $f(x_0) = \frac{1}{2}y_M$.

Mindkét egyenlőség ekvivalens az $x_0 \cdot f'(x_0) = -f(x_0)$ egyenlőséggel ($x_0 \in Dom(f)$), vagyis az $x \cdot f'(x) = -f(x)$ szétválasztható differenciálegyenlettel. Ennek megoldása (ha csak az I. síknegyedben keressük):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{1}{f}\,df = \ln(f(x)) = \int \frac{-1}{x}\,dx = -\ln(x) + C,$$

vagyis

$$f(x) = \frac{e^C}{x} = \frac{D}{x}$$

minden $D > 0$ számra.

6.3. Az előző feladat szerint az $y = f(x)$ függvénygörbét $E(x_0, f(x_0))$ pontjában érintő egyenes tengelymetszetei $A(0, y_M)$ és $B(x_M, 0)$, ahol

$$y_M = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

és

$$x_M = \frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

A körülírt háromszög területe $T(x_0) = \pm\frac{1}{2}(x_M - x_0) \cdot f(x_0)$ (előjel attól függően, hogy f monoton nő vagy csökken). Tehát

$$1 = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} - x_0\right) \cdot f(x_0) = \mp\frac{1}{2}\frac{f^2(x_0)}{f'(x_0)},$$

vagyis az $f'(x) = \mp\frac{1}{2}f^2(x_0)$ szétválasztható egyenlethez jutunk, aminek megoldása $f(x) = \frac{-1}{\mp x/2 + C} = \frac{2}{\pm x + D}$ $(C, D \in \mathbb{R})$.

6.4. Legyen $x(t) =$ a test hőmérséklete $t \geq 0$ időpontban, az egyenlet:

$$x'(t) = k \cdot (x(t) - 20) \qquad (k < 0),$$

$x(0) = 100$, $x(10) = 60$. A lineáris egyenlet általános megoldása:

$$x(t) \cdot e^{-kt} = 20e^{-kt} + C.$$

A K.É.P. megoldása $C = 80$, $k = \frac{-1}{10}\ln 2 \approx -0{,}0693$.

A keresett időpontot az $x(t_0) = 20 + Ce^{kt_0} = 25$ egyenlet megoldása adja: $t_0 = 40$ (perc).

6.5. Jelölje $x(t)$ a még *fel nem oldott* só mennyiségét, azaz $x(0) = 100$ és $x(1) = 50$. A feltétel szerint $x'(t) = k \cdot x(t)$ ahol $k < 0$. Ennek megoldása $x(t) = e^{kt} \cdot C$, a K.É.P. alapján $C = 100$ és $k = -\ln 2 \approx -0{,}6931$. A *feloldott* só mennyisége pedig $100 - x(t) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)$.

6.6. Jelölje $c(t)$ az oldat töménységét az idő függvényében: $c(0) = 0{,}08$, ekkor a tartályban oldott anyag $m(t) = 50c(t)$, $m(0) = 4$ és

$$m'(t) = 4 \cdot 0{,}1 - 4 \cdot c(t) = 0{,}4 - \frac{4}{50} m(t).$$

A lineáris egyenlet megoldása $m(t) = Ce^{-0{,}08t} + 5$, a K.É.P. miatt $C = -1$. 15 perc múlva az oldatban $m(15) = 5 - e^{-0{,}08 \cdot 15} \approx 4{,}6988$ g só lesz, a koncentráció pedig

$$c(15) = \frac{1}{50} m(15) \approx 0{,}09399 \approx 9{,}4\% \text{ lesz.}$$

6.7. * Legyen a járda az y tengely. Az $y = f(x)$ függvénygörbét $E\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ pontjában érintő egyenes y-tengelymetszete $A\left(0, y_1\right)$ ahol $y_1 = f\left(x_0\right) - f'\left(x_0\right) \cdot x_0$ (a 6.2. feladat alapján). Az EA távolság négyzete $(x_0)^2 + \left(f(x_0) - y_1\right)^2 = (x_0)^2 + \left(f'(x_0) \cdot x_0\right)^2 = h^2$ azaz $f'(x_0) = \pm\sqrt{\frac{h^2 - (x_0)^2}{(x_0)^2}}$ ahonnan

$$f(x) = \pm \int \sqrt{\frac{h^2 - x^2}{x^2}}\, dx = h \ln\left(\frac{\sqrt{h^2 - x^2} - h}{x}\right) + \sqrt{h^2 - x^2} + C.$$

Ha a kocsi a $(d, 0)$ pontból indul, akkor az $f(d) = 0$ K.É.P.-ból C kiszámítható. (A kocsi által leírt görbe neve: *vonszolási görbe* vagy *traktrix*.)

A mellékelt TRAKTRIX-ANIM.GIF (+html) **mozgóképen szemléltetjük a kocsi mozgását.**

6.8. Ha $V(t)$ és $h(t)$ jelöli az edényben levő víz térfogatát és a nyílás feletti magasságát, akkor minden esetben $V'(t) = -A \cdot 0{,}6\sqrt{2g \cdot h(t)}$. Az alábbi példákban legyen a lyuk az edény legalján, a víz magassága $h(0) = h_0$.

a) Ha a henger alapterülete T akkor $V(t) = T \cdot h(t)$, $V'(t) = T \cdot h'(t) = -A \cdot 0{,}6\sqrt{2g \cdot h(t)}$ vagyis a $h'(t) = -K \cdot \sqrt{h(t)}$ $\left(K = \frac{A \cdot 0{,}6\sqrt{2g}}{T} \in \mathbb{R}^+\right)$ szétválasztható egyenletet kapjuk, melynek megoldása $h(t) = \left(C - \frac{K}{2}t\right)^2$, a K.É.P. miatt $C = \sqrt{h_0}$ és $0 \le t \le \frac{C}{K} = \frac{\sqrt{h_0}}{K}$.

b) Ha a lyuk nagyon kicsi a kúp méreteihez képest, akkor nem kell csonkakúpként számítanunk. Jelöljük a kezdeti h_0 magas vízoszlop térfogatát V_0-al, ekkor

$$V(t) = V_0 \cdot \left(\frac{h(t)}{h_0}\right)^3,$$

$$V'(t) = \frac{V_0}{h_0^3} \cdot 3h^2(t) \cdot h'(t) = -A \cdot 0{,}6\sqrt{2g \cdot h(t)},$$

vagyis a

$$h'(t) = -K \cdot h^{-3/2}(t)$$

($K = \frac{A \cdot 0{,}6\sqrt{2g} \cdot h_0^3}{3V_0} \in \mathbb{R}^+$) egyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$h(t) = \left(\frac{5}{2}\left(C - Kt\right)\right)^{2/5}.$$

A K.É.P. miatt $C = \frac{2}{5}\left(h_0\right)^{5/2}$ és $0 \leq t \leq \frac{C}{K}$.

c) Az R sugarú gömb h magasságú süvegének térfogata

$$V = \frac{\pi}{3}h^2 \cdot (3R - h) = R\pi h^2 - \frac{\pi}{3}h^3,$$

tehát

$$V'(t) = h'(t) \cdot \pi\left(2Rh(t) - h^2(t)\right) = -A \cdot 0{,}6\sqrt{2g \cdot h(t)}.$$

Így a

$$h'(t) \cdot \left(2Rh^{1/2}(t) - h^{3/2}(t)\right) = -K$$

$$(K = \frac{-A \cdot 0{,}6\sqrt{2g}}{\pi} \in \mathbb{R}^+)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$(✠) \quad \frac{4}{3}Rh^{3/2}(t) - \frac{2}{5}h^{5/2}(t) = -Kt + C$$

ahol a K.É.P. miatt

$$C = \frac{4}{3}Rh_0^{3/2} - \frac{2}{5}h_0^{5/2}$$

és

$$0 \leq t \leq \frac{C}{K}.$$

A (✠) algebrai egyenletet (közelítőleg, pl.„intervallum-felezés” módszerrel) megoldva megkapjuk a $h(t)$ függvényt.

6.9. Ha a kötél (függvény) monoton ágában vagyunk és $\Delta x = h$ nagyon kicsi, akkor az $P_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ és $P_h\left(x_0 + h, f\left(x_0 + h\right)\right)$ pontokban az $\mathbf{F_k}$ kötélerők ellentétes irányban hatnak: $\mathbf{F_v}$ vízszintes összetevőjük összege $\underline{0}$:

$$F_{\mathbf{v}}\left(x_0\right) = F_{\mathbf{v}}\left(x_0 + h\right) \tag{11}$$

(általában az $\mathbf{F}$ erővektor hosszát F-el jelöljük), míg $\mathbf{F_f}$ függőleges összetevőjük a közöttük levő kötéldarab súlyával (gravitációs erő) együtt ad $\underline{0}$-t:

$$F_{\mathbf{f}}\left(x_0 + h\right) = F_{\mathbf{f}}\left(x_0\right) + mg$$

és

$$m = \rho Q\sqrt{h^2 + \left(h \cdot f'\left(x_0\right)\right)^2} = \rho Q h\sqrt{1 + \left(f'\left(x_0\right)\right)^2}$$

ahol a kötél sűrűsége ρ, keresztmetszete Q, és a kötelet az $[x_0, x_0 + h]$ intervallumon az x_0-beli érintővel közelítettük, tehát

$$F_{\mathbf{f}}(x_0 + h) - F_{\mathbf{f}}(x_0) = \rho Q h g \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}. \tag{12}$$

Az $(\mathbf{F_v}, \mathbf{F_f}, \mathbf{F_k})$ derékszögű háromszögek hasonlóak a megfelelő (ugyanazon pontban vett)

$$\left(1, f', \sqrt{(f')^2 + 1}\right)$$

derékszögű háromszögekhez, tehát (11) és (12) alapján ($F_{\mathbf{v}}$ és h-val egyszerűsítve)

$$\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \frac{\rho Q g}{F_{\mathbf{v}}} \sqrt{1 + (f'(x_0))^2},$$

majd $\lim\limits_{h \to 0}$ határátmenetet véve kapjuk a keresett differenciálegyenletet:

$$f''(x_0) = K \cdot \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \tag{13}$$

ahol $K \in \mathbb{R}^+$ állandó, $x_0 \in [x_A, x_B]$ tetszőleges, $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ a kötél rögzítési pontjai.

Az (13) egyenlet megoldása: vezessük be az $u = f'$ új változót, ekkor $u'(x) = K\sqrt{1 + u^2(x)}$,

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1 + u^2(x)}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}\, du = Ar\sinh(u(x)) = \int K\, dx = Kx + C_1 f(x) =$$
$$= \int u(x)\, dx = \int \sinh(Kx + C_1) = \frac{1}{K}\cosh(Kx + C_1) + C_2,$$

tehát a végeredmény:

$$f(x) = \frac{1}{K}\cosh(Kx + C_1) + C_2.$$

A kötél rögzítési pontjait figyelembe véve az

$$\begin{cases} y_A = f(x_A) = \dfrac{1}{K}\cosh(Kx_A + C_1) + C_2 \\ y_B = f(x_B) = \dfrac{1}{K}\cosh(Kx_B + C_1) + C_2 \end{cases}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A

$$\cosh(\alpha) - \cosh(\beta) = 2\sinh\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sinh\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

azonosság alapján az

$$y_A - y_B = \frac{2}{K}\sinh\left(K\frac{x_A + x_B}{2} + C_1\right)\sinh\left(K\frac{x_A - x_B}{2}\right)$$

összefüggésből C_1 és C_2 kiszámítható.

6.10. *a)* $R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) = U_0 \quad (U_0 = 100V) \quad \Longrightarrow \quad i'(t) = \dfrac{U_0 - R \cdot i(t)}{L}$ szeparálható egyenlet $\Longrightarrow \dfrac{i'(t)}{U_0 - R \cdot i(t)} = \dfrac{1}{L} \quad \Longrightarrow \quad \int \dfrac{i'(t)}{U_0 - R \cdot i(t)}\, dt = \int \dfrac{1}{U_0 - R \cdot i}\, di =$
$= \dfrac{-1}{R} \ln\left(U_0 - R \cdot i\right) = \dfrac{1}{L} t + C$ azaz

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(U_0 - e^{-\left(\frac{R}{L}t + RC\right)}\right) = \frac{U_0}{R} - \frac{K}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

(hiszen $i \leq \frac{U_0}{R}$), $K \in \mathbb{R}^+$. Az $i(0) = 0$ K.É.P. miatt $K = U_0$ vagyis

$$i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

tehát $\lim\limits_{t \to \infty} i(t) = \dfrac{U_0}{R}$. A feladat adataival $i(t) = 5 - 5e^{-2t}$.

b) $L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$ lineáris egyenlet, általános megoldása

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_0}{L^2\omega^2 + R^2}\left(R \sin(\omega t) - L\omega \cos(\omega t)\right) + Ce^{-\frac{R}{L}t} = \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}} \sin\left(\omega t - \operatorname{arctg}\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right) + Ce^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

a 10.5. feladat megoldásánál ismertetett (15) összefüggés alapján, és az $i(0) = 0$ K.É.P. miatt

$$C = \frac{L\omega U_0}{L^2\omega^2 + R^2} = \frac{10 \cdot (100\pi)\, 240}{10^2 \cdot (100\pi)^2 + 20^2} = \approx 0{,}07639.$$

A feladat paramétereivel az

$$10i'(t) + 20i(t) = 240 \sin\left(2\pi 50 \cdot t\right)$$

egyenlet megoldása

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{240}{10^2 \cdot (100\pi)^2 + 20^2}\left(20 \sin(100\pi t) - 10 \cdot 100\pi \cos(100\pi t)\right) + Ce^{-2t} = \\ &= \frac{240}{\sqrt{10^2(100\pi)^2 + 20^2}} \sin\left(100\pi t - \operatorname{arctg}\left(\frac{10 \cdot 100\pi}{20}\right)\right) + Ce^{-2t} \approx \\ &\approx 2{,}4316 \cdot 10^{-5} \cdot \left(20 \sin(314t) - 1000\pi \cdot \cos(314t)\right) + 0{,}07639 \cdot e^{-2t} \\ &\approx 0{,}07639 \cdot \sin\left(314t - 1{,}5644\right) + 0{,}07639 \cdot e^{-2t}. \end{aligned}$$

M7. Parciális törtekre bontás

7.1. *a)*

$$\begin{array}{lllll} \left(x^4 + x^2\right) : (x-2) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10 & & & & \\ 2x^3 + x^2 & & & & \\ \quad 5x^2 & & & & \\ \qquad\quad 10x & & & & \\ \qquad\qquad\quad 20 & & & & \end{array}$$

azaz $(x^4 + x^2) = (x-2)\cdot(x^3 + 2x^2 + 5x + 10) + (20)$.

b) $(x^3 + 3x + 5) = (2x^2 - 7x + 9)\cdot\left(\frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\right) + \left(\frac{43}{4}x - \frac{43}{4}\right)$.

c) $4x^5 + 5x - 2 = (2x^3 + 3)\cdot 2x^2 + (-6x^2 + 5x - 2)$.

7.2. *a)* $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$, $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, $x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

$x^4 + 1$ *reducibilis* az Algebra Alaptétele szerint. Próbálkozzunk $x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)\,(x^2 + cx + d)$ alakú felbontással, ahonnan az együtthatók összehasonlítása alapján a

$$\begin{cases} 0 &= c + a \\ 0 &= d + ac + b \\ 0 &= ad + bc \\ 1 &= bd \end{cases}$$

(nemlineáris) egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása az

$$x^4 + 1 = \left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right) \tag{14}$$

irreducibilis felbontást adja. (Az $x^4 + 1 = 0$ egyenlet komplex gyökeinek segítségével is megkaphatjuk ezt a felbontást.)

b) $2x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ harmadfokú, ezért $\mathbb{R}[x]$-ben van gyöke. Egész együtthatós, ezért a konstans tag osztóit kipróbálva kapjuk az $x = 2$ gyököt. Polinomosztással kapjuk: $(2x^3 - 5x^2 + 3x - 2) = (x-2)\cdot(2x^2 - x + 1)$.

Hasonlóan: $2x^3 - x^2 - 1 = (x-1)\cdot(2x^2 + x + 1)$.

c)* A $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = 0$ negyedfokú egyenlet gyökei *közelítőleg* $x_1 \approx 0{,}3392$, $x_2 \approx -1{,}7130$, $x_{3,4} \approx -0{,}3131 \pm 1{,}2739\cdot i$, tehát

$$\begin{aligned} p(x) &\approx (x - 0{,}339)(x + 1{,}713)(x + 0{,}313 - 1{,}274i)(x + 0{,}313 + 1{,}274i) \\ &\approx (x - 0{,}3392)(x + 1{,}7130)(x^2 + 0{,}6263x + 1{,}7208). \end{aligned}$$

Másik megoldás: Az $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x - 1 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$ próbálkozásból $(A, B, C, D \in \mathbb{R})$ a

$$\begin{cases} 2 &= C + A \\ 2 &= D + AC + B \\ 2 &= AD + BC \\ -1 &= BD \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk, ami szintén elvezet az előző végeredményhez.

7.3. Ha a számláló fokszáma nem kisebb a nevező fokánál, akkor a számlálót el kell osztanunk polinomosztással a nevezővel.

$$\frac{x^4+3x-6}{x^2+x-2}=\left(x^2-x+3\right)+\frac{-2x}{x^2+x-2},$$
$$\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2-8x+15}=(3x+22)+\frac{131x-326}{x^2-8x+15},$$
$$\frac{x^5+1}{x^5-3x}=1+\frac{3x}{x^5-3x},$$
$$\frac{x^5+2x^2+3}{x+1}=\left(x^4-x^3+x^2+x-1\right)+\frac{4}{x+1}.$$

7.4. $\dfrac{x^3-8x^2+12}{(x-1)^2(x^2+4x+9)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+4x+9}$, $\dfrac{x^4+5x^2+3}{(x+7)\left(x^2+5x+7\right)^2}=$
$=\dfrac{A}{x+7}+\dfrac{Bx+C}{x^2+5x+7}+\dfrac{Dx+E}{\left(x^2+5x+7\right)^2}$,

$$\frac{x^2+8x+2}{(x+8)^3\left(x^2+4x+9\right)^2(x+7)\left(x^2+5\right)}=$$
$$=\frac{A}{x+8}+\frac{B}{(x+8)^2}+\frac{C}{(x+8)^3}+\frac{Dx+E}{x^2+4x+9}+\frac{Fx+G}{\left(x^2+4x+9\right)^2}+\frac{H}{x+7}+\frac{Ix+J}{x^2+5},$$

$$\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2-8x+15}=(3x+22)+\frac{131x-326}{x^2-8x+15}=(3x+22)+\frac{131x-326}{(x-3)(x-5)}=$$
$$=(3x+22)+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}.$$

7.5. $\dfrac{1}{k\cdot(k+1)}=\dfrac{A}{k}+\dfrac{B}{k+1}=\dfrac{A(k+1)+Bk}{k\cdot(k+1)}$, vagyis a számlálók egyezősége: $1=$ $=A(k+1)+Bk$. Helyettesítsük be k helyére 0-át ill. -1-et, ahonnan $A=1,\ B=-1$, vagyis $\dfrac{1}{k\cdot(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

$$\frac{x+6}{x^2+x-2}=\frac{x+6}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

vagyis $x+6=A(x-1)+B(x+2)$.
Az $x=-2$ és $x=1$ helyettesítés után kapjuk:

$$\frac{x+6}{x^2+x-2}=\frac{\frac{-4}{3}}{x+2}+\frac{\frac{7}{3}}{x-1}.$$
$$\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+5\right)(x+1)}=\frac{\frac{-1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{13}{4}+\frac{x}{4}}{x^2+2x+5},$$
$$\frac{x^2-1}{x^3+2x^2}=\frac{\frac{-1}{2}}{x^2}+\frac{\frac{1}{4}}{x}+\frac{\frac{3}{4}}{x+2},$$

$$\frac{x}{(1-2x)^2}=\frac{-1/2}{1-2x}+\frac{1/2}{(1-2x)^2},\quad \frac{x}{(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2},$$
$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{x}{x^2+1},\quad \frac{x^2+5}{x^4-16}=\frac{\frac{9}{32}}{x-2}-\frac{\frac{9}{32}}{x+2}-\frac{\frac{1}{8}}{x^2+4};$$
$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)}=\frac{1}{(1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)}=$$
$$=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{(1-x)^2}+\frac{C}{1+x}+\frac{Dx+E}{1+x+x^2},$$

közös nevezőre hozás után a számlálók egyenlősége:

$$1=A(1-x)(1+x)\left(1+x+x^2\right)+B(1+x)\left(1+x+x^2\right)+$$
$$+C(1-x)^2\left(1+x+x^2\right)+(Dx+E)(1-x)^2(1+x).$$

Az $x=1,-1,0$ és például a $-2,+2$ értékek behelyettesítése után kapjuk: $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{6}$, $C=\frac{1}{4}$, $D=0$ és $E=\frac{1}{3}$, vagyis

$$\frac{1}{\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)}=\frac{\frac{1}{4}}{1-x}+\frac{\frac{1}{6}}{(1-x)^2}+$$
$$+\frac{\frac{1}{4}}{1+x}+\frac{\frac{1}{3}}{1+x+x^2}.$$
$$\frac{3x^3-2x^2+4}{x^2-8x+15}=(3x+22)+\frac{131x-326}{x^2-8x+15}=3x+22+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-5}=$$
$$=3x+22+\frac{-33{,}5}{x-3}+\frac{164{,}5}{x-5}.$$
$$\frac{7s^4+23s^3-30s^2-172s-150}{(s+2)^4(s-5)}=$$
$$=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{(s+2)^2}+\frac{C}{(s+2)^3}+\frac{D}{(s+2)^4}+\frac{E}{s-5}$$

közös nevezőre hozás után a számlálók egyenlősége:

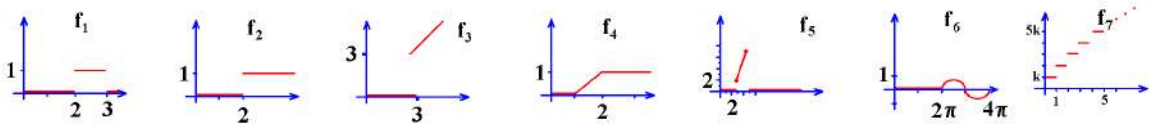
$$7s^4+23s^3-30s^2-172s-150=$$
$$=A(s+2)^3(s-5)+B(s+2)^2(s-5)+C(s+2)(s-5)+D(s-5)+E(s+2)^4.$$

Az $s=5,-2,0,1,-1$ értékeket behelyettesítve kapjuk: $E=\frac{5490}{2401}\approx 2{,}2865$, $D=\frac{-2}{7}\approx -0{,}2857$, $A=\frac{11\,317}{2401}\approx 4{,}7135$, $B=-\frac{2}{343}\approx -0{,}0058$, $C=-\frac{2}{49}\approx -0{,}0408$. Tehát a keresett felbontás

$$\frac{7s^4+23s^3-30s^2-172s-150}{(s+2)^4(s-5)}=\frac{\frac{11\,317}{2401}}{s+2}-\frac{\frac{2}{343}}{(s+2)^2}-\frac{\frac{2}{49}}{(s+2)^3}-\frac{\frac{2}{7}}{(s+2)^4}+\frac{\frac{5490}{2401}}{s-5}$$

M8. Laplace-transzformáció és inverze

8.1. *a)*



10. ábra. 8.1.*a)*

$\mathcal{L}(f_1) = \int_2^3 1 \cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_{t=2}^{t=3} = \dfrac{e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$,

(lásd még a 8.2.*c)* feladat megoldását is),

$\mathcal{L}(f_2) = \int_2^\infty e^{-st}\,dt = \lim\limits_{\omega\to\infty} \left[\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_{t=2}^{t=\omega} = \frac{1}{s}e^{-2s}$,

$$\mathcal{L}(f_3) = \int_3^\infty t \cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{-t}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}\,dt\right]_3^\infty = \lim_{\omega\to\infty}\left[-\left(\frac{t}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-st}\right]_{t=3}^{t=\omega} =$$
$$= 0 + \left(\frac{3}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-3s} = \frac{3s+1}{s^2}e^{-3s}.$$

Megjegyzés: Az „eltolási” tételt most nem használhatjuk, hiszen f_3 *nem* az $id(t) = t$ függvény „eltoltja”. Ez utóbbi $f_3^{(el)}(t) = \begin{cases} t-3 & \textit{ha } 3 \le t \\ 0 & \textit{máskor} \end{cases}$, melynek Laplace- transzformáltja

$$\mathcal{L}(f_3^{(el)}) = \int_3^\infty (t-3)e^{-st}\,dt = \left[\frac{-(t-3)}{s}e^{-st} + \frac{1}{s}\int e^{-st}\,dt\right]_3^\infty =$$
$$= \lim_{\omega\to\infty}\left[-\left(\frac{t-3}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-st}\right]_{t=3}^{t=\omega} =$$
$$= 0 + \left(\frac{0}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-3s} = \frac{1}{s^2}e^{-3s} = \text{ az „eltolási” tétel szerint is.}$$

$$\mathcal{L}(f_4) = \int_1^2 (t-1)\cdot e^{-st}\,dt + \int_2^\infty 1 \cdot e^{-st}\,dt =$$
$$= \left[-e^{-st}\left(\frac{t-1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\right]_{t=1}^{t=2} + \frac{1}{s}e^{-2s} = \frac{1}{s^2}e^{-s} - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-2s} + \frac{1}{s}e^{-2s} =$$
$$= \frac{1}{s^2}\left(e^{-s} - e^{-2s}\right)$$

(lásd még a 8.2.*c)* feladat megoldását is),

a két ponton átmenő egyenes egyenlete $y = 2{,}5x - 5{,}5$, ezért

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_5) &= \int_3^5 (2{,}5t - 5{,}5)e^{-st}\,dt = \left[\frac{-1}{2s^2}e^{-st}(5st - 11s + 5)\right]_{t=3}^{t=5} = \\
&= \frac{-1}{2s^2}\left(e^{-5s}(14s+5) - e^{-3s}(4s+5)\right), \\
\mathcal{L}(f_6) &= \int_{2\pi}^{4\pi} \sin(t)\cdot e^{-st}\,dt = \left[-e^{-st}\frac{\cos t + s\sin t}{s^2+1}\right]_{t=2\pi}^{t=4\pi} = \frac{1}{s^2+1}\left(e^{-2\pi s} - e^{-4\pi s}\right), \\
\mathcal{L}(f_7) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\int_{k-1}^{k} e^{-st}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-k}{s}\left(e^{-sk} - e^{-s(k-1)}\right) = \frac{1-e^s}{s}\sum_{k=0}^{\infty}(-k)e^{-sk} = \\
&= \frac{1-e^s}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d}{ds}e^{-sk} = \frac{1-e^s}{s}\frac{d}{ds}\left(\sum_{k=0}^{\infty}e^{-sk}\right) = \frac{1-e^s}{s}\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1-e^{-s}}\right) = \\
&= \frac{e^{-s}\left(e^s-1\right)}{s\left(e^{-s}-1\right)^2} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)\,.
\end{aligned}$$

Másképpen: a $H(t) = 1\ \ (t \geq 0)$ *Heaviside* – függvény és az Eltolási tétel segítségével:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_7) &= \mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\left(H\left(t-(k-1)\right) - H(t-k)\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(e^{-s(k-1)} - e^{-sk}\right)\frac{1}{s} = \\
&= \left(1-e^s\right)\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}(-k)\cdot e^{-sk},
\end{aligned}$$

innen ugyanaz, mint az előző megoldásban.

b)

$$\begin{aligned}
f(t) &= b\cdot\left(H(t) - H(t-a) + H(t-2a) - + \dots\right), \\
\mathcal{L}(f) &= \frac{b}{s}\left(1 - e^{-as} + e^{-2as} - + \dots\right) = \frac{b}{s\left(1+e^{-as}\right)}, \\
g(t) &= \frac{b}{a}t\cdot H(t) - bH(t-a) - bH(t-2a) - \dots, \\
\mathcal{L}(g) &= b\left(\frac{1}{as^2} - e^{-as} - e^{-2as} - \dots\right) = \frac{b}{as^2} - \frac{be^{-as}}{s\left(1-e^{-as}\right)}.
\end{aligned}$$

8.2. *a)* $\mathcal{L}\left(7t^2 - 3t + 5\right) = \frac{7\cdot 2}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{5}{s}$,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left(3 - 4e^{(5+6i)t}\right) = \mathcal{L}(3) - 4\mathcal{L}\left(e^{(5+6i)t}\right) = \frac{3}{s} - \frac{4}{s-(5+6i)}, \\
&\mathcal{L}(e^{5t}\cos(2t)) = \frac{s-5}{(s-5)^2+2^2},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(t^3e^{-7t}) = \frac{3!}{(s+7)^4} = \frac{6}{(s+7)^4},$$
$$\mathcal{L}(t^3e^{it}) = \frac{6}{(s-i)^4},$$
$$\mathcal{L}(sh(2t)) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left(e^{2t}\right) - \mathcal{L}\left(e^{-2t}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2}\right) = \frac{2}{s^2-4},$$
$$\mathcal{L}(t\cdot ch(3t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(ch(3t)) = -\left(\frac{s}{s^2-3^2}\right)' = \frac{s^2+9}{\left(s^2-9\right)^2},$$
$$\mathcal{L}(t^2e^{6t}\sin(4t)) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}(e^{6t}\sin(4t)) = \left(\frac{4^2}{(s-6)^2+4^2}\right)'' = \frac{32\left(3s^2-36s+92\right)}{\left(s^2-12s+52\right)^3}.$$

b)* $5^t = e^{t\cdot\ln 5}$ miatt $\mathcal{L}\left(5^t\right) = \frac{1}{s-\ln 5}$,

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \text{ miatt } \mathcal{L}(\cos^2(t)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+2^2}\right) = \frac{s^2+2}{s\left(s^2+4\right)},$$
$$\cos^3\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + \cos\alpha) = \cos^3\alpha = \frac{1}{4}\cos 3\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha$$

miatt

$$\mathcal{L}(\cos^3(4t)) = \frac{1}{4}\frac{s}{s^2+12^2} + \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4^2} = \frac{s\left(s^2+112\right)}{\left(s^2+144\right)\left(s^2+16\right)},$$

az $f(t) = \frac{1-e^{-t}}{t}$ jelölést és a $\mathcal{L}(t\cdot f(t)) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f)$ azonosságot használva: $\frac{d}{ds}\mathcal{L}(f) = -\mathcal{L}\left(1-e^{-t}\right) = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s+1}$, ahonnan $\mathcal{L}(f) = \int \frac{-1}{s} + \frac{1}{s+1}ds = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right) + C$. Mivel $\lim\limits_{|s|\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$, ezért $C = 0$ vagyis $\mathcal{L}(f) = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$.

c) A 8.1 feladat jelöléseit használjuk:

Mivel $f_1(t) = f_2(t) - f_2(t-1)$, ezért

$$\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2) - \mathcal{L}(f_2)\cdot e^{-s} = \mathcal{L}(f_2)\cdot\left(1-e^{-s}\right) = \frac{1}{s}e^{-2s}\left(1-e^{-s}\right) = \frac{1}{s}\left(e^{-2s} - e^{-3s}\right),$$

Mivel $f_4(t) = f_3(t+2) - f_3(t+1)$, ezért

$$\mathcal{L}(f_4)(s) = e^{2s}\cdot\mathcal{L}(f_3)(s) - e^{s}\cdot\mathcal{L}(f_3)(s) = \left(e^{2s}-e^{s}\right)\cdot\frac{1}{s^2}e^{-3s} = \frac{1}{s^2}\left(e^{2s}-e^{s}\right).$$

8.3. A $\mathcal{L}\left(t\cdot f(t)\right)=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(f(t)\right)$ szabályt alkalmazzuk:

$$\mathcal{L}\left(t\cos\left(\omega t\right)\right)=-\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+\omega^2}=\frac{s^2-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2},$$
$$\mathcal{L}\left(t\sin\left(\omega t\right)\right)=-\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{2\omega s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2},$$
$$\mathcal{L}\left(t\cdot ch\left(\omega t\right)\right)=-\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2-\omega^2}=\frac{s^2+\omega^2}{\left(s^2-\omega^2\right)^2},$$
$$\mathcal{L}\left(t\cdot sh\left(\omega t\right)\right)=-\frac{d}{ds}\frac{\omega}{s^2-\omega^2}=\frac{2\omega s}{\left(\omega^2-s^2\right)^2}.$$

8.4. *a)* $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{5s-3}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{5(s-3/5)}\right)=\frac{1}{5}e^{\frac{3}{5}t}$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4(s-2)}-\frac{1}{4(s+2)}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{2t}-e^{-2t}\right)=\frac{1}{2}sh(2t),$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)=\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)=\frac{1}{2}\sin(2t),$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s+3}{s^2+4}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(5\frac{s}{s^2+2^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{s^2+2^2}\right)=5\cos(2t)+\frac{3}{2}\sin(2t),$$
$$\frac{s+10}{s^2+4s+3}=\frac{s+10}{(s+1)(s+3)}=\frac{9/2}{s+1}-\frac{7/2}{s+3}$$

így

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+10}{s^2+4s+3}\right)=\frac{9}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)-\frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+3}\right)=\frac{9}{2}e^{-t}-\frac{7}{2}e^{-3t},$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^5}\right)=\frac{1}{4!}t^4e^{-3t},$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(2s-1)^3}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{8}\frac{1}{(s-1/2)^3}\right)=\frac{1}{8\cdot 2!}t^2e^{t/2},$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+3)^5}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^4}-\frac{2}{(s+3)^5}\right)=e^{-3t}\left(\frac{1}{3!}t^3-\frac{2}{4!}t^4\right),$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4s+2}{s^2+6s+13}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4(s+3)-10}{(s+3)^2+4}\right)=$$
$$=\mathcal{L}^{-1}\left(4\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}-5\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right)=\left(4\cos(2t)-5\sin(2t)\right)\cdot e^{-3t},$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s\left((s+3)^2+4\right)}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{13s}-\frac{1}{13}\frac{s+6}{(s+3)^2+4}\right)=$$
$$=\frac{1}{13}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}-\frac{3}{2}\frac{2}{(s+3)^2+2^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{13}-\frac{1}{13}\left(\cos(2t)+\frac{3}{2}\sin(2t)\right)\cdot e^{-3t},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s-3)^5}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^3}+\frac{6}{(s-3)^4}+\frac{9}{(s-3)^5}\right)=e^{3t}\left(\frac{1}{2}t^2+t^3+\frac{9}{4!}t^4\right).$$

b)* a 8.3 feladat eredményeit használjuk:

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\frac{1}{2\omega}t\sin(\omega t)$,

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\int_0^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}\right)dx=$

$=\int_0^t\frac{1}{2\omega}x\cdot\sin(\omega x)\,dx=\frac{1}{2\omega^3}\left[\sin(x\omega)-x\omega\cdot\cos(x\omega)\right]_{x=0}^{x=t}=$

$=\frac{1}{2\omega^3}\left(\sin(\omega t)-t\omega\cos(\omega t)\right)$,

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}+\omega^2\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}\right)=$

az előző eredmény segítségével

$=t\cos(\omega t)+\frac{\omega^2}{2\omega^3}\left(\sin(\omega t)-t\omega\cos(\omega t)\right)=$

$=\frac{1}{2\omega}\left(\sin(t\omega)+t\omega\cos(t\omega)\right)$.

c) a *b)* feladat eredményei alapján:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+6}{(s^2+4)^2}\right)=\frac{3}{2\cdot 2}t\sin(2t)+\frac{6}{2\cdot 2^3}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)=$$
$$=\left(\frac{3}{4}t+\frac{3}{8}\right)\sin 2t-\frac{3}{4}t\cos 2t,$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-3}{(s^2+4)^2}\right)=\frac{1}{2\cdot 2}\left(\sin(2t)+2t\cos(2t)\right)-\frac{3}{2\cdot 2^3}\left(\sin(2t)-2t\cos(2t)\right)=$$
$$=\frac{1}{16}\sin 2t+\frac{7}{8}t\cos 2t,$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{(s^2+9)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}-\frac{9s}{(s^2+9)^2}\right)=\cos(3t)-\frac{9}{2\cdot 3}t\sin(3t),$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s+3}{(s^2-1)^2}\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{4(s+1)}-\frac{3}{4(s-1)}+\frac{2}{(s-1)^2}-\frac{1}{2(s+1)^2}\right)=$$
$$=\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{t}+2te^{t}-\frac{1}{2}te^{-t}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t\right)e^{-t}+\left(\frac{-3}{4}+2t\right)e^{t}.$$

8.5.

$$e^{\alpha x}*e^{\beta x}=\int_0^x e^{\alpha(x-t}\cdot e^{\beta t}\,dt=e^{\alpha x}\int_0^x e^{(\beta-\alpha)t}\,dt=$$
$$=e^{\alpha x}\left[\frac{e^{(\beta-\alpha)t}}{\beta-\alpha}\right]_{t=0}^{t=x}=\frac{e^{\alpha x}}{\beta-\alpha}\left[e^{(\beta-\alpha)x}-1\right]=\frac{e^{\beta x}-e^{\alpha x}}{\beta-\alpha},$$
$$x*e^{\lambda x}=\int_0^x(x-t)\cdot e^{\lambda t}\,dt=x\int_0^x e^{\lambda t}\,dt-\int_0^x t\cdot e^{\lambda t}\,dt=$$

$$= x\left[\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\right]_{t=0}^{t=x} - \left[\frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda t}(\lambda t-1)\right]_{t=0}^{t=x} = x\frac{1}{\lambda}\left[e^{\lambda x}-1\right] - \frac{1}{\lambda^2}\left[e^{\lambda x}(\lambda x-1)+1\right] =$$
$$= \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda x} - x\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2},$$
$$x^2 * e^{\lambda x} = \int_0^x (x-t)^2\cdot e^{\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda^3}\left[e^{t\lambda}\left(t^2\lambda^2 - 2tx\lambda^2 - 2t\lambda + x^2\lambda^2 + 2x\lambda + 2\right)\right]_{t=0}^{t=x} =$$
$$= \frac{1}{\lambda^3}\left(2e^{x\lambda} - x^2\lambda^2 - 2x\lambda - 2\right),$$

$1 * f(x) = \int_0^x 1\cdot f(t)\,dt = F(x) - F(0)$ ahol $F(x)$ az $f(x)$ egy primitív függvénye,

$$\frac{x^n}{n!} * \frac{x^k}{k!} = \frac{1}{n!\cdot k!}\int_0^x (x-t)^n\cdot t^k\,dt = \text{/teljes indukcióval } n\in\mathbb{N}\text{-re/}$$
$$= \frac{1}{n!\cdot k!}\left(\left[(x-t)^n\cdot\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{n}{k+1}\int_0^x (x-t)^{n-1}\cdot t^{k+1}\,dt\right) = \cdots =$$
$$= \frac{1}{n!\cdot k!}\left[(x-t)^n\cdot\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{(n-1)!\cdot(k+1)!}\left[(x-t)^{n-1}\cdot\frac{t^{k+2}}{k+2}\right]_{t=0}^{t=x} +$$
$$+\cdots + \frac{1}{1!\cdot(k+n-1)!}\left(\left[(x-t)^1\cdot\frac{t^{k+n}}{k+n}\right]_{t=0}^{t=x} + \frac{1}{k+n}\int_0^x t^{k+n}\,dt\right) =$$
$$= 0 + \frac{1}{(k+n)!}\int_0^x t^{k+n}\,dt = \frac{1}{(k+n+1)!}\left[t^{k+n+1}\right]_{t=0}^{t=x}\,dt = \frac{1}{(k+n+1)!}\cdot x^{k+n+1}.$$

M9. Integro-differenciálegyenletek megoldása Laplace-transzformációval

Lineáris differenciálegyenletek és -rendszerek

9.1. Az egyenlet mindkét oldalának vesszük a Laplace-transzformáltját („mérleg-elv”): az $Y = \mathcal{L}(y)$ jelölést és az $\mathcal{L}(y') = s\cdot Y(s) - y(0)$ összefüggést felhasználva:

a) $\mathcal{L}(y'+3y) = sY(s) - 1 + 3Y(s) = \mathcal{L}(e^x + \cos(2x)) = \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+2^2}$,
$Y(s)\cdot(s+3) - 1 = \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+2^2}$,
$Y(s)\cdot(s+3) = \frac{1}{s-1} + \frac{s}{s^2+2^2} + 1 = \frac{s\left(s^2+s+3\right)}{(s-1)(s^2+2^2)}$,
$$Y(s) = \frac{s\left(s^2+s+3\right)}{(s-1)\left(s^2+2^2\right)(s+3)} = \frac{\frac{3}{13}s + \frac{4}{13}}{s^2+4} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{27}{52(s+3)},$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{3}{13}s + \frac{4}{13}}{s^2+4} + \frac{1}{4(s-1)} + \frac{27}{52(s+3)}\right) =$$
$$= \frac{3}{13}\cos(2x) + \frac{4}{13\cdot 2}\sin(2x) + \frac{1}{4}e^x + \frac{27}{52}e^{-3x}.$$

b) $\mathcal{L}(y'' - 2y' - 3y) = s(sY(s) - 0) - 0 - 2(sY(s) - 0) - 3Y(s) =$

$$= Y(s)\left(s^2-2s-3\right) = \mathcal{L}\left(e^{3x}+2e^x\right) = \tfrac{1}{s-3}+\tfrac{2}{s-1} = \frac{3s-7}{(s-3)(s-1)},$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{3s-7}{(s-3)(s-1)\left(s^2-2s-3\right)} = \frac{3s-7}{(s-3)^2(s-1)(s+1)} = \\
&= \frac{5}{16(s+1)} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{3}{16(s-3)} + \frac{1}{4(s-3)^2}, \\
y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = \frac{5}{16}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + \left(\frac{3}{16}+\frac{1}{4}t\right)e^{3x}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y''-6y'+13y\right) &= s\left(sY(s)-2\right)-4-6\left(sY(s)-2\right)+13Y(s) = \\
&= Y(s)+(8-2s) = \mathcal{L}\left(16xe^x\right) = \frac{16}{(s-1)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{\frac{16}{(s-1)^2}-(8-2s)}{(s^2-6s+13)} = \frac{2\left(s^3-6s^2+9s+4\right)}{(s-1)^2\left((s-3)^2+4\right)} = \\
&= \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{s-5}{(s-3)^2+4} = \\
&= \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{s-3}{(s-3)^2+2^2} - \frac{2}{(s-3)^2+2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = e^x + 2xe^x + e^{3x}\cos(2x) - e^{3x}\sin(2x) = \\
&= e^x(1+2x) + e^{3x}\left(\cos(2x)-\sin(2x)\right).
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(y''+6y'+13y\right) &= s^2Y(s)+6sY(s)+13Y(s) = \\
&= Y(s)\left(s^2+6s+13\right) = \mathcal{L}\left(e^{3x}\cos(2x)\right) = \frac{s-3}{(s-3)^2+2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s-3}{\left((s-3)^2+2^2\right)\left(s^2+6s+13\right)} = \frac{s-3}{\left((s-3)^2+2^2\right)\left((s+3)^2+2^2\right)} = \\
&= \frac{\frac{1}{52}s-\frac{5}{156}}{(s-3)^2+2^2} - \frac{\frac{1}{52}s+\frac{31}{156}}{(s+3)^2+2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{52}(s-3)+\left(\frac{-5}{156}+\frac{3}{52}\right)}{(s-3)^2+2^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{52}(s+3)+\left(\frac{31}{156}-\frac{3}{52}\right)}{(s+3)^2+2^2}\right) = \\
&= e^{3x}\left(\frac{1}{52}\cos(2x)+\frac{1}{39\cdot 2}\sin(2x)\right) - e^{-3x}\left(\frac{1}{52}\cos(2x)+\frac{11}{78\cdot 2}\sin(2x)\right).
\end{aligned}$$

e) $\mathcal{L}\left(y''' + 4y'\right) = s^3Y(s) + 4sY(s) = Y(s)\left(s^3 + 4s\right) = \mathcal{L}(\cos 2x) = \frac{s}{s^2+2^2}$,

$Y(s) = \dfrac{s}{\left(s^3+4s\right)\left(s^2+2^2\right)} = \dfrac{1}{\left(s^2+4\right)^2}$,

$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+2^2)^2}\right) = \frac{1}{2\cdot 2^3}\left(\sin(2x) - 2x\cos(2x)\right)$ a **8.4.***b*)* feladat alapján.

f) $\mathcal{L}\left(y'' - 3y' - 10y\right) = \left(s\left(sY(s) - 7\right) - 2\right) - 3\left(sY(s) - 7\right) - 10Y(s) =$
$= \left(s^2 - 3s - 10\right)Y(s) - 7s + 19 = \mathcal{L}\left(x^2e^{-2x}\right) = \frac{2}{(s+2)^3}$,

$$Y(s) = \frac{\frac{2}{(s+2)^3} + 7s - 19}{(s^2 - 3s - 10)} = \frac{7s^4 + 23s^3 - 30s^2 - 172s - 150}{(s+2)^4(s-5)} =$$
$$= \frac{11\,317/2401}{s+2} - \frac{2/343}{(s+2)^2} - \frac{2/49}{(s+2)^3} - \frac{2/7}{(s+2)^4} + \frac{5490/2401}{s-5},$$

(a 7.5. feladat számításai szerint), ahonnan

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{11\,317}{2401}e^{-2x} - \frac{2}{343}xe^{-2x} - \frac{2}{49}\cdot\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}x^3e^{-2x} + \frac{5490}{2401}e^{5x} =$$
$$= \frac{5490}{2401}e^{5x} + e^{-2x}\left(-\frac{1}{21}x^3 - \frac{2}{98}x^2 - \frac{2}{343}x + \frac{11\,317}{2401}\right).$$

9.2. *a)* Vezessük be a $z(x) := y(x+\pi)$ új ismeretlent. Ekkor az egyenlet:

$$z^{(3)}(x) + z'(x) = 1, \quad z(0) = 2, \quad z'(0) = 0, \quad z''(0) = \pi,$$

vagyis $\mathcal{L}\left(z^{(3)}(x) + z'(x)\right) = s^3\cdot Z(s) - 2s^2 - \pi + s\cdot Z(s) - 2 = \mathcal{L}(1) = \dfrac{1}{s}$,

$Z(s) = \dfrac{\frac{1}{s} + 2s^2 + 2 + \pi}{s^3 + s} = \dfrac{1 + 2s^3 + (2+\pi)s}{s^2\left(s^2+1\right)} = \dfrac{2+\pi}{s} - \dfrac{1+\pi s}{s^2+1} + \dfrac{1}{s^2}$,

$z(x) = 2 + \pi - \sin(x) - \pi\cos(x) + x$,

$y(x) = z(x-\pi) = 2 + x - \sin(x-\pi) - \pi\cos(x-\pi) = x + 2 + \sin(x) + \pi\cos(x)$.

b) Vezessük be a $z(x) := y(x+1)$ új ismeretlent. Ekkor az egyenlet:

$z^{(3)}(x) - z''(x) = -6(x+1)$, $z(0) = 7$, $z'(0) = 10$, $z''(0) = 12$, megoldása:

$\mathcal{L}\left(z^{(3)}(x) - z''(x)\right) = s^3\cdot Z(s) - 7s^2 - 10s - 12 - s^2\cdot Z(s) + 7s + 10 =$

$= Z(s)\left(s^3 - s^2\right) - 7s^2 - 3s - 2 = \mathcal{L}(-6x - 6) = -\dfrac{6}{s} - \dfrac{6}{s^2}$,

$Z(s) = \dfrac{-\frac{6}{s} - \frac{6}{s^2} + 7s^2 + 3s + 2}{s^3 - s^2} = \dfrac{7s^4 + 3s^3 + 2s^2 - 6s - 6}{s^4(s-1)} = \frac{7}{s} + \frac{10}{s^2} + \frac{12}{s^3} + \frac{6}{s^4}$,

$z(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 7$,

$y(x) = z(x-1) = (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 10(x-1) + 7 = x^3 + 3x^2 + x + 2$.

9.3. *a)* $\mathcal{L}\left(y''(x)-y(x)\right)=s^2Y(s)-Y(s)=\left(s^2-1\right)Y(s)=$

$$=\mathcal{L}\left(\frac{1}{1+e^x}\right)=F(s),$$

$Y(s)=\frac{1}{s^2-1}\cdot F(s),$

$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\cdot F\left(s\right)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=$

$$=sh(x)*\tfrac{1}{1+e^x}=\int_0^x sh\left(x-t\right)\cdot\tfrac{1}{1+e^t}\,dt=\int_0^x \tfrac{1}{2}\cdot\frac{e^{x-t}-e^{-x+t}}{1+e^t}\,dt=$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^x e^x\frac{e^{-t}}{1+e^t}-e^{-x}\frac{e^t}{1+e^t}\,dt=$$

$$=\tfrac{1}{2}e^x\left[\ln\left(1+e^{-t}\right)-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=x}-\tfrac{1}{2}e^{-x}\left[\ln\left(e^t+1\right)\right]_{t=0}^{t=x}=$$

$$=\tfrac{1}{2}e^x\left[\left(\ln\left(1+e^{-x}\right)-e^{-x}\right)-\left(\ln(2)-1\right)\right]-\tfrac{1}{2}e^{-x}\left[\ln\left(e^x+1\right)-\ln(2)\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(e^x\ln\left(\tfrac{1+e^{-x}}{2}\right)-e^{-x}\ln\left(\tfrac{e^x+1}{2}\right)+e^x-1\right).$$

b) $y''(x)=\arctan\left(x\right)\quad\Longrightarrow\quad s^2Y(s)=F\left(s\right)$ így

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\cdot F\left(s\right)\right)=x*\arctan(x)=\int_0^x\left(x-t\right)\cdot\arctan(t)\,dt=$$

$$=\left[\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{2}\arctan t-\tfrac{1}{2}t^2\arctan t-\tfrac{1}{2}x\ln\left(t^2+1\right)+tx\arctan t\right]_{t=0}^{t=x}=$$

$$=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\arctan x-\tfrac{1}{2}x^2\arctan x-\tfrac{1}{2}x\ln\left(x^2+1\right)+x^2\arctan x=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(x^2-1\right)\cdot\arctan(x)+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}x\ln\left(x^2+1\right).$$

Megjegyzés: A feladat ismételt integrállal is kiszámolható:

$y'(x)=\int\arctan(x)\,dx=x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1,$

$y(x)=\int x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1\,dx=$

$$=\tfrac{1}{2}\left(x^2-1\right)\arctan(x)-\tfrac{1}{2}x\ln\left(x^2+1\right)+x\left(\tfrac{1}{2}+C_1\right)+C_2,$$

K.É.P.: $\quad y(0)=C_2=0\quad\Longrightarrow\quad C_2=0,$

$y'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\arctan(x)-\frac{1}{2}x\ln\left(x^2+1\right)+x\left(\frac{1}{2}+C_1\right)+C_2\right)=$

$$=C_1-\tfrac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+x\arctan x,\quad y'(0)=C_1+0=0\quad\Longrightarrow\quad C_1=0,$$

Tehát $\quad y(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\arctan(x)-\frac{1}{2}x\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}x.$

c) $\mathcal{L}\left(y''(x)-y(x)\right)=s^2\cdot Y(s)-0-Y(s)=\mathcal{L}\left(\tanh(x)\right)=F(s),$

$Y(s)=\frac{1}{s^2-1}\cdot F(s),$

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(\tfrac{1}{s^2-1}\right)*\mathcal{L}^{-1}\left(F(s)\right)=\sinh(x)*\tanh(x)=\int_0^x\sinh\left(x-t\right)\cdot\frac{\sinh(t)}{\cosh(t)}dt=$$

$$=\int_0^x\frac{1}{\cosh(t)}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\cosh(x)-\cosh\left(x-2t\right)\right)dt=$$

$$= \tfrac{\cosh(x)}{2} \int\limits_0^x \frac{1}{\cosh(t)} dt - \tfrac{1}{2} \int\limits_0^x \frac{\cosh(x-2t)}{\cosh(t)} dt = \tfrac{\cosh(x)}{2} \cdot [A]_{t=0}^{t=x} - \tfrac{1}{2} [B]_{t=0}^{t=x} \qquad \text{ahol}$$

$$A = \int \frac{1}{\cosh(t)} dt = 2 \arctan(e^t),$$

$$B = \int \frac{\cosh(x-2t)}{\cosh(t)} dt = \int \frac{e^{x-2t} + e^{-x+2t}}{e^t + e^{-t}} dt = \int \frac{\frac{e^x}{u^2} + \frac{u^2}{e^x}}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{u}\, du =$$

$$= \int \frac{e^{2x} + u^4}{e^x u^2 (u^2+1)} du = \int \tfrac{1}{e^x} + \tfrac{e^x}{u^2} - \tfrac{1}{u^2+1} \left(e^x + \tfrac{1}{e^x}\right) du =$$

$$= \tfrac{1}{e^x} u - \tfrac{e^x}{u} - (e^x + e^{-x}) \arctan u = \tfrac{e^t}{e^x} - \tfrac{e^x}{e^t} - (e^x + e^{-x}) \arctan(e^t) =$$

$$= 2\sinh(t-x) - 2\cosh(x) \cdot \arctan(e^t), \qquad \text{tehát}$$

$$y(x) = \tfrac{\cosh(x)}{2} \cdot [2\arctan(e^t)]_{t=0}^{t=x} - \tfrac{1}{2} [2\sinh(t-x) - 2\cosh(x) \cdot \arctan(e^t)]_{t=0}^{t=x} =$$

$$= \cosh(x) \cdot (\arctan(e^x) - \arctan(1)) -$$

$$- (\sinh(0) - \cosh(x) \cdot \arctan(e^x) - \sinh(-x) + \cosh(x) \cdot \arctan(1)) =$$

$$= \cosh(x) \cdot \left(2\arctan(e^x) - \frac{\pi}{2}\right) - \sinh(x) = \cosh(x) \cdot \left(\ln\left(\tfrac{1+e^x}{1-e^x}\right) - \frac{\pi}{2}\right) - \sinh(x).$$

d)* $\mathcal{L}(y'' - 2y' + y) = s^2 Y(s) - 2sY(s) + Y(s) = \mathcal{L}\left(1 - e^{-x^2}\right) = F(s),$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 1} \cdot F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \cdot F(s),$$

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) * \mathcal{L}^{-1}(F) =$$

$$= xe^x * \left(1 - e^{-x^2}\right) = \int\limits_0^x (x-t)e^{x-t}\left(1 - e^{-t^2}\right) dt$$

a primitív függvény:

$$\int (x-t)e^{x-t}\left(1 - e^{-t^2}\right) dt = xe^x \int e^{-t}\, dt - e^x \int te^{-t}\, dt + e^x \int te^{-t^2-t}\, dt - xe^x \int e^{-t^2-t}\, dt =$$

$$= xe^x \int e^{-t}\, dt - e^x \int te^{-t}\, dt + e^x \int \frac{-1}{2}(-2t - 1 + 1)e^{-t^2-t}\, dt - xe^x \int e^{-t^2-t}\, dt =$$

$$= -xe^x e^{-t} + e^x e^{-t}(t+1) + e^x \left(\frac{-1}{2} e^{-t^2-t} + \frac{-1}{2} \int e^{-t^2-t}\, dt\right) - xe^x \int e^{-t^2-t}\, dt =$$

$$= -xe^x e^{-t} + e^x e^{-t}(t+1) - \frac{1}{2} e^x e^{-t^2-t} - \left(\frac{1}{2} e^x + xe^x\right) \cdot \int e^{-t^2-t}\, dt.$$

Az $F(t) = \int e^{-t^2-t}\,dt$ integrál ugyan **Newton tétele** szerint létezik, de **Liouville tétele** szerint nem írható fel *képlettel*. Tehát csak annyit írhatunk:

$$y(x) = \left[-xe^xe^{-t} + e^xe^{-t}(t+1) - \frac{1}{2}e^xe^{-t^2-t}\right]_{t=0}^{t=x} - \left(\frac{1}{2}e^x + xe^x\right)\cdot\int_0^x e^{-t^2-t}\,dt =$$

$$= 1 + xe^x - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x^2} - \left(\frac{1}{2}e^x + xe^x\right)\cdot\int_0^x e^{-t^2-t}\,dt.$$

Megjegyzés: Mivel bármely *folytonos* $f(t)$ függvény esetén $\int_0^x f(t)\,dt$ tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ értékre könnyen (és tetszőleges pontossággal) kiszámolható, ezért $y(x)$-et lényegében kiszámoltuk.

Használatosak az

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

és a

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{erf}(x) + \frac{1}{2}$$

jelölések (és értékeik táblázatban is megtalálhatóak), melyek segítségével $y(x)$ így írható:

$$y(x) = 1 + xe^x - \tfrac{1}{2}e^x - \tfrac{1}{2}e^{-x^2} - \left(\tfrac{1}{2}e^x + xe^x\right)\cdot\frac{\sqrt{\pi}e^{1/4}}{2}\cdot\left(\operatorname{erf}\left(x+\tfrac{1}{2}\right) - \operatorname{erf}\left(\tfrac{1}{2}\right)\right).$$

9.4. Az $X = \mathcal{L}(x)$ és $Y = \mathcal{L}(y)$ jelöléseket használjuk.

a) $\begin{cases} sX(s) - 8 = 7X(s) + 9Y(s) \\ sY(s) - 2 = X(s) - Y(s) \end{cases}$,

$Y(s) = \frac{1}{9}\left(sX(s) - 8 - 7X(s)\right)$,

$\Longrightarrow \quad \frac{1}{9}s\left(sX(s) - 8 - 7X(s)\right) - 2 = X(s) - \frac{1}{9}\left(sX(s) - 8 - 7X(s)\right)$,

$X(s)\left(\frac{1}{9}s^2 - \frac{7}{9}s - 1 + \frac{s}{9} - \frac{7}{9}\right) = \frac{8}{9}s + 2 + \frac{8}{9}$,

$X(s) = \frac{\frac{8}{9}s+2+\frac{8}{9}}{\left(\frac{1}{9}s^2-\frac{7}{9}s-1+\frac{s}{9}-\frac{7}{9}\right)} = \frac{8s+26}{s^2-6s-16} = \frac{8s+26}{(s+2)(s-8)} = \frac{9}{s-8} - \frac{1}{s+2}$,

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = 9e^{8t} - e^{-2t}$,

és az első differenciálegyenletből:

$y(t) = \frac{1}{9}x'(t) - \frac{7}{9}x(t) = \frac{1}{9}\left(9e^{8t} - e^{-2t}\right)' - \frac{7}{9}\left(9e^{8t} - e^{-2t}\right) =$

$= 8e^{8t} + \frac{2}{9}e^{-2t} - 7e^{8t} + \frac{7}{9}e^{-2t} = e^{8t} + e^{-2t}$.

b) $\begin{cases} sX(s) = X(s) + 2Y(s) + \dfrac{1}{s-3} \\ sY(s) = X(s) + 2Y(s) \end{cases}$,

a második egyenletből $Y(s) = \dfrac{X(s)}{s-2}$, majd visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$sX(s) = X(s) + 2\tfrac{X(s)}{s-2} + \tfrac{1}{s-3} \quad \Longrightarrow \quad X(s)\left(s - 1 - \tfrac{2}{s-2}\right) = \tfrac{1}{s-3},$$

$$X(s) = \frac{\frac{1}{s-3}}{s - 1 - \frac{2}{s-2}} = \frac{s-2}{s\,(s-3)^2} = \tfrac{2}{9(s-3)} + \tfrac{1}{3(s-3)^2} - \tfrac{2}{9s},$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = \tfrac{2}{9}e^{3t} + \tfrac{1}{3}te^{3t} - \tfrac{2}{9},$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s-2} = \tfrac{1}{s(s-3)^2} = \tfrac{1}{3(s-3)^2} - \tfrac{1}{9(s-3)} + \tfrac{1}{9s},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = \tfrac{1}{3}te^{3t} - \tfrac{1}{9}e^{3t} + \tfrac{1}{9}.$$

c) $\begin{cases} sX(s) + 1 = -5X(s) - Y(s) + \frac{5}{s-1} \\ sY(s) - 2 = \quad X(s) - 3Y(s) - \frac{50}{(s-1)^2} \end{cases}$

azaz

$$\begin{cases} (s+5)\,X(s) + \qquad Y(s) = \frac{5}{s-1} - 1 \quad = \frac{-s+6}{s-1} \\ \quad -X(s) + (s+3)\,Y(s) = 2 - \frac{50}{(s-1)^2} = \frac{2s^2-4s-48}{(s-1)^2} \end{cases}.$$

A (lineáris algebrai) egyenletrendszert Cramer szabállyal is megoldhatjuk:

$$X(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} \frac{-s+6}{s-1} & 1 \\ \frac{2s^2-4s-48}{(s-1)^2} & s+3 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{-s^3+2s^2+19s+30}{s^2-2s+1}}{s^2+8s+16} = \tfrac{2}{(s-1)^2} - \tfrac{1}{s+4} + \tfrac{2}{(s+4)^2},$$

$$Y(s) = \frac{\det\begin{bmatrix} s+5 & \frac{-s+6}{s-1} \\ -1 & \frac{2s^2-4s-48}{(s-1)^2} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}} = \frac{\frac{2s^3+5s^2-61s-246}{s^2-2s+1}}{s^2+8s+16} =$$

$$= \frac{2s^3+5s^2-61s-246}{(s-1)^2\,(s+4)^2} = \tfrac{3}{s-1} - \tfrac{12}{(s-1)^2} - \tfrac{1}{s+4} - \tfrac{2}{(s+4)^2},$$

ahonnan

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right) = 2te^{t} - e^{-4t} + 2te^{-4t},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y(s)\right) = 3e^{t} - 12te^{t} - e^{-4t} - 2te^{-4t}.$$

d) $\begin{cases} sX(s) = Y(s) + \frac{1}{s} \\ sY(s) = Z(s) + \frac{2}{s} \\ sZ(s) = X(s) + \frac{3}{s} \end{cases}$

ahonnan

$$X(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^4-s} = \frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{s-1} - \frac{3}{s},$$

$$Y(s) = \frac{2s^2+3s+1}{s^4-s} = \frac{-s-1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s},$$

$$Z(s)=\frac{3s^2+s+2}{s^4-s}=\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{2}{s-1}-\frac{2}{s},$$

és

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}\right)+2e^t-3=$$

$$=e^{\frac{-1}{2}t}\left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}t\right)-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{4}{3}}\sin\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}t\right)\right)+2e^t-3,$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right)=-e^{\frac{-1}{2}t}\left(\cos\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}t\right)+\tfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}t\right)\right)+2e^t-1,$$

$$z(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(X(s)\right)=\sqrt{\tfrac{4}{3}}e^{\frac{-1}{2}t}\cdot\sin\left(\sqrt{\tfrac{3}{4}}t\right)+2e^t-2.$$

Integro-differenciálegyenletek és -rendszerek

9.5. *a)* Mivel $\int_0^x e^{x-t}\cdot y(t)\,dt=\exp *y$ (konvolúció), ezért
$\mathcal{L}\left(\int_0^x e^{x-t}\cdot y(t)\,dt\right)=\mathcal{L}\left(e^t\right)\cdot\mathcal{L}\left(y(t)\right)=\frac{1}{s-1}\cdot Y(s)$.
Az eredeti egyenlet mindkét oldalát $\mathcal{L}$ -transzformálva:

$$\mathcal{L}(y)=Y(s)=\mathcal{L}\left(\sin(x)+\int_0^x e^{x-t}\cdot y(t)\;dt\right)=\frac{1}{1+s^2}+\frac{1}{s-1}\cdot Y(s),$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{1+s^2}}{1-\frac{1}{s-1}}=\frac{s-1}{\left(s^2+1\right)(s-2)}=\frac{1}{5\,(s-2)}-\frac{1}{5}\cdot\frac{s-3}{s^2+1},$$

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=\tfrac{1}{5}e^{2x}-\tfrac{1}{5}\cos x+\tfrac{3}{5}\sin x.$$

b) $\mathcal{L}\left(y'(x)+2y\left(x\right)+\int_0^x y(t)dt\right)=$

$$sY(s)-1+2Y(s)+\tfrac{1}{s}Y(s)=\mathcal{L}\left(\sin(x)\right)=\tfrac{1}{s^2+1},$$

$$Y(s)=\frac{\frac{1}{s^2+1}+1}{s+2+\frac{1}{s}}=\frac{s^3+2s}{\left(s^2+1\right)\left(s+1\right)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{3}{2\left(s+1\right)^2}+\frac{1}{2\left(s^2+1\right)},$$

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}(Y)=e^{-x}-\tfrac{3}{2}xe^{-x}+\tfrac{1}{2}\sin x.$$

c) Vegyük észre, hogy $\int_0^x\;(x-t)\cdot y_i(t)\;dt=x*y_i(x)$, ezért

$$\begin{cases} Y_1(s)=\frac{2}{s}-\mathcal{L}(x)\cdot Y_1(s)-4\cdot\frac{1}{s}Y_2(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s^2}\cdot Y_1(s)-\frac{4}{s}\cdot Y_2\left(s\right)\\ Y_2(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}Y_1(s)-\mathcal{L}(x)\cdot Y_2(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\cdot Y_1(s)-\frac{1}{s^2}\cdot Y_2(s)\end{cases},$$

azaz

$$\begin{cases}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\cdot Y_1(s)+\frac{4}{s}Y_2(s)=\frac{2}{s}\\ \frac{1}{s}\cdot Y_1(s)+\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\cdot Y_2(s)=\frac{1}{s}\end{cases},$$

ahonnan

$$Y_1(s)=\frac{2s}{(s+1)^2}=\frac{2(s+1)}{(s+1)^2}-\frac{2}{(s+1)^2}\quad\Longrightarrow\quad y_1(x)=\mathcal{L}^{-1}\left(Y_1\right)=2e^{-x}\left(1-x\right),$$

$$Y_2(s)=\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{1}{2}Y_1(s)\qquad\Longrightarrow\qquad y_2\left(x\right)=\mathcal{L}^{-1}\left(Y_2\right)=e^{-x}\left(1-x\right).$$

Alkalmazások

9.6. Az egyenlet mindegyik esetben $1 \cdot i''(t) + 3i'(t) + \frac{1}{0{,}001} i(t) = u'(t)$.
Az egyenlet bal oldalának Laplace-transzformáltja :

$$\mathcal{L} = s^2 I(s) - s \cdot i_0 - i_1 + 3\left(sI(s) - i_0\right) + \frac{1}{0{,}001} I(s) =$$
$$= I(s) \cdot \left(s^2 + 3s + \frac{1}{0{,}001}\right) + \left(s \cdot i_0 + i_1 + 3i_0\right).$$

a) $i(0) = i'(0) = 0$ esetén

$$\mathcal{L} = I(s) \cdot \left(s^2 + 3s + \frac{1}{0{,}001}\right) = \mathcal{L}\left(u'(t)\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad i(t) \equiv 0 \qquad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

$i(0) = i_0,\ i'(0) = i_1$ esetén

$$\mathcal{L} = s^2 I(s) - s \cdot i_0 - i_1 + 3\left(sI(s) - i_0\right) + \frac{1}{0{,}001} I(s) = 0,$$

$$I(s) = \frac{s \cdot i_0 + i_1 + 3 \cdot i_0}{s^2 + 3s + 1000},$$

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(I(s)\right) = i_0 \cdot e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3991}}{2}t\right) + \frac{2}{\sqrt{3991}}\left(\frac{3}{2} + \frac{i_1}{i_0}\right) \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3991}}{2}t\right)\right) =$$
$$= i_0 T \cdot e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3991}}{2}t + \delta\right) \qquad \text{egy csillapodó szinuszhullám}$$

($T \in \mathbb{R}^+$, $\delta \in \mathbb{R}$).

b) $\mathcal{L} = I(s) \cdot \left(s^2 + 3s + \frac{1}{0{,}001}\right) = \mathcal{L}\left(\sin'(10t)\right) = \mathcal{L}\left(10\cos(10t)\right) = \frac{10s}{s^2+100}$,
ahonnan

$$I(s) = \frac{10s}{\left(s^2 + 100\right)\left(s^2 + 3s + 1000\right)} = \frac{\frac{10}{901}s + \frac{10}{2703}}{s^2 + 100} - \frac{\frac{10}{901}s + \frac{100}{2703}}{s^2 + 3s + 1000}$$

és $\mathcal{L}^{-1}$ után (a 10.5. feladatban ismertetett (15) összefüggés felhasználásával)

$$i(t) = \frac{1}{2703}\sin(10t) + \frac{10}{901}\cos(10t) - \frac{10}{901}e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3991}}{2}t + \frac{11\sqrt{3991}}{11\,973}\sin\frac{\sqrt{3991}}{2}t\right)$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{901}}\sin\left(10t + \arctan(30)\right) - \frac{10}{901}e^{-\frac{3}{2}t} \cdot \frac{2\sqrt{9010}}{3\sqrt{3991}}\sin\left(\frac{\sqrt{3991}}{2}t + \arctan\left(\frac{3\sqrt{3991}}{11}\right)\right)$$
$$\approx 0{,}0111\sin\left(10t + 1{,}5375\right) - 0{,}0111e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(31{,}5872t + 1{,}5128\right)$$

egy beálló szinuszhullám hiszen $t \to \infty$ esetén $e^{-\frac{3}{2}t} \to 0$.

c)* A *b)* feladathoz hasonlóan

$$\mathcal{L} = I(s)\cdot\left(s^2+3s+\tfrac{1}{0{,}001}\right) = \mathcal{L}\left(u'(t)\right) = \mathcal{L}\left(\omega_g\cos\left(\omega_g t\right)\right) = \frac{s\omega_g}{s^2+\omega_g^2}$$

ahonnan

$$I(s) = \frac{s\omega_g}{\left(s^2+\omega_g^2\right)\left(s^2+3s+1000\right)} = \omega_g\cdot\left(\frac{As+B}{s^2+\omega_g^2}+\frac{Cs+D}{s^2+3s+1000}\right)$$

ahol

$$A = C = \frac{\omega_g^2-1000}{nev},\qquad B = \frac{-3\omega_g^2}{nev},\qquad D = \frac{-3000}{nev}$$

és

$$nev = \omega_g^4 - 1991\omega_g^2 + 1000\,000,$$

a nevezőnek nincs valós gyöke.

$$\begin{aligned}
i(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(I(s)\right) = \\
&= \omega_g\cdot\left(A\cos t\omega_g + \frac{B}{\omega_g}\sin t\omega_g\right) + \omega_g C e^{-\frac{3}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3991}}{2}t + \frac{2\frac{D}{C}-3}{\sqrt{3991}}\sin\frac{\sqrt{3991}}{2}t\right) = \\
&= T_1\cdot\sin\left(\omega_g t+v_1\right) + C\cdot T_2\cdot e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3991}}{2}t+v_2\right),
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sqrt{A^2+\left(\frac{B}{\omega_g}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{nev}},\\
T_2 &= \sqrt{1^2+\left(\frac{2\frac{D}{C}-3}{\sqrt{3991}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4000}{3991}}\cdot\frac{\sqrt{nev}}{\left|\omega_g^2-1000\right|},\\
v_1 &= \arctan\left(\frac{A\omega_g}{B}\right) = \arctan\left(\frac{\omega_g^2-1000}{-3}\right)
\end{aligned}$$

és

$$v_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{3991}}{\frac{2}{C}D-3}\right) = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3991}\left(\omega_g^2-1000\right)}{3\omega_g^2+3000}\right)$$

a (15) azonosság alapján, tehát

$$i(t) =$$

$$= \omega_g\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{nev}}\sin\left(\omega_g t+v_1\right) + \frac{\omega_g^2-1000}{nev}\cdot\frac{-3\left(\omega_g^2+1000\right)}{\omega_g^2-1000}\cdot e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3991}}{2}t+v_2\right)\right) =$$

$$= \omega_g\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{nev}}\sin\left(\omega_g t+v_1\right) + \frac{-3\left(\omega_g^2+1000\right)}{nev}\cdot e^{-\frac{3}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3991}}{2}t+v_2\right)\right).$$

Elemzés: $t \to \infty$ esetén az $e^{-\frac{3}{2}t}$ tag elenyésző, ekkor

$$i(t) \approx \frac{\omega_g}{\sqrt{nev}} \sin(\omega_g t + v_1) = \frac{\omega_g}{\sqrt{\omega_g^4 - 1991\omega_g^2 + 1000\,000}} \sin(\omega_g t + v_1)$$

ami egy tiszta szinuszhullám.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban fellépő sok $u(t)$ függvény esetén a megoldást Laplace -transzformációval nem lehet előállítani, a megoldás közelítése $u(t)$ Fourier-sorával lehetséges. A 10.5. feladatban látunk erre példát.

*d**)* Az $Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{c}i(t) = u'(t) = U_0\omega_g \cos(\omega_g t)$ egyenlet *általános* megoldása:

$$\begin{aligned} i(t) = & \frac{c\omega_g U_0 \cos t\omega_g - Lc^2\omega_g^3 U_0 \cos t\omega_g + Rc^2\omega_g^2 U_0 \sin t\omega_g}{L^2c^2\omega_g^4 - 2Lc\omega_g^2 + R^2c^2\omega_g^2 + 1} + \\ & + C_2 \exp\left(\frac{1}{L}t\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}(R^2c - 4L)} - \frac{1}{2}R\right)\right) + \\ & + C_3 \exp\left(-\frac{1}{L}t\left(\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{c}(R^2c - 4L)}\right)\right). \end{aligned}$$

Az $i(0) = D_t i(0) = 0$ K.É.P. megoldása

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{c\omega_g U_0 \cos(t\omega_g) - Lc^2\omega_g^3 U_0 \cos(t\omega_g) + Rc^2\omega_g^2 U_0 \sin(t\omega_g)}{L^2c^2\omega_g^4 - 2Lc\omega_g^2 + R^2c^2\omega_g^2 + 1} = \\ &= U_0 \cdot \frac{\left(\frac{1}{c\omega_g} - L\omega_g\right) \cdot \cos(t\omega_g) + R\sin(t\omega_g)}{L^2\omega_g^2 - 2\frac{L}{c} + R^2 + \frac{1}{c^2\omega_g^2}} = \\ &= \frac{U_0}{R^2 + \left(L\omega_g - \frac{1}{c\omega_g}\right)^2} \cdot \left(R\sin(t\omega_g) + \left(\frac{1}{c\omega_g} - L\omega_g\right) \cdot \cos(t\omega_g)\right) = \\ &= \frac{U_0}{R^2 + \left(L\omega_g - \frac{1}{c\omega_g}\right)^2} \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{c\omega_g} - L\omega_g\right)^2} \cdot \sin\left(t\omega_g + \arctan\left(\frac{\frac{1}{c\omega_g} - L\omega_g}{R}\right)\right) = \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_g - \frac{1}{c\omega_g}\right)^2}} \cdot \sin\left(t\omega_g - \arctan\left(\frac{L\omega_g - \frac{1}{c\omega_g}}{R}\right)\right) = \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_g - \frac{1}{c\omega_g}\right)^2}} \cdot \sin\left(\omega_g t - \arctan\left(\frac{L\omega_g}{R} - \frac{1}{Rc\omega_g}\right)\right) \end{aligned}$$

(a 10.5. feladatban ismertetett (15) azonosság felhasználásával).

Elemzés: Az amplitúdó $A(\omega_g) = \dfrac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_g - \frac{1}{c\omega_g}\right)^2}}$

pontosan akkor *maximális*, ha $L\omega_g - \dfrac{1}{c\omega_g} = 0$, azaz

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{Lc}},$$

ekkor $A(\omega_g) = \dfrac{U_0}{R}$ és az áramerősség $i(t) = \dfrac{U_0}{R} \cdot \sin(\omega_g t)$, továbbá fáziseltolódás sincs (mintha L és c egymást kompenzálná).

Ha c-t tudjuk változtatni, akkor $c = \dfrac{1}{L\omega_g^2}$ kell; ha L változtatható, akkor legyen $L = \dfrac{1}{c\omega_g^2}$; míg ω_g-re a feltétel $\omega_g = \dfrac{1}{\sqrt{Lc}}$.

9.7. $\mathcal{L}(m \cdot v'(t)) = ms \cdot V(s) - mv_0 = \mathcal{L}(mg - kv(t)) = \frac{mg}{s} - k \cdot V(s)$,

$$V(s) = \frac{\frac{mg}{s} + mv_0}{ms + k} = \frac{mg + smv_0}{s(ms + k)} = \frac{mv_0 - \frac{g}{k}m^2}{k + ms} + \frac{gm}{ks},$$

$$v(t) = \frac{-1}{km} e^{-\frac{k}{m}t}\left(gm^2 - kmv_0\right) + \frac{gm}{k}, \qquad \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{k}.$$

Megjegyzés: az Útmutatóban említett tétel szerint is

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot V(s) = \frac{mg}{k}.$$

9.8. A differenciálegyenlet mindegyik esetben $m \cdot s''(t) = -k \cdot s(t) + F_K(t)$.

a) Az $m \cdot s''(t) = -k \cdot s(t)$ azaz $s''(t) = \dfrac{-k}{m} \cdot s(t)$ egyenlet megoldása (a $\mathcal{L}(s(t)) = S(\xi)$ és $s'(0) = s_1$ jelölésekkel):

$$\mathcal{L}(s''(t)) = \xi \cdot (\xi \cdot S(\xi) - s_0) - s_1 = S(\xi)\xi^2 - s_0\xi - s_1 = \frac{-k}{m} \cdot S(\xi),$$

$$S(\xi)\left(\xi^2 + \frac{k}{m}\right) = s_0\xi + s_1 \quad \Longrightarrow \quad S(\xi) = \frac{s_0\xi + s_1}{\xi^2 + \frac{k}{m}},$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(\xi)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s_0\xi + s_1}{\xi^2 + \frac{k}{m}}\right) = s_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \frac{s_1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) =$$

$$= \sqrt{s_0^2 + \frac{s_1}{\omega_R}} \cdot \sin\left(\omega_R + \operatorname{arctg}\left(\tfrac{s_0}{s_1}\omega_R\right)\right)$$

a 10.5. feladat megoldásában ismertetett (15) azonosság alapján, ahol $\omega_R = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a „*rugó+m tömegű test*”-rendszer saját frekvenciája.

Elemzés: A mozgás legnagyobb kitérése= amplitúdó= $A = \sqrt{s_0^2 + \frac{s_1}{\omega_R}}$. Ha csak elengedjük a rendszert, akkor $s_1 = 0$, ekkor a fenti megoldás

$$s(t) = s_0 \cdot \sin\left(\omega_R + \frac{\pi}{2}\right) = s_0 \cdot \cos(\omega_R),$$

ez esetben $A = s_0$ és a fáziskésés $\delta = \operatorname{arctg}\left(\frac{s_0}{s_1}\omega_R\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Az egyenlet most $s''(t) = \dfrac{-k}{m} \cdot s(t) + B \cdot \sin(\omega_K t)$, megoldása az *a)* részben használt jelölésekkel:

$$\mathcal{L}\left(s''(t)\right) = \xi^2 \cdot S(\xi) - s_0\xi - s_1 = \frac{-k}{m} \cdot S(\xi) + B\frac{\omega_K}{s^2 + \omega_K^2},$$

$$S(\xi)\left(\xi^2 + \frac{k}{m}\right) = s_0\xi + s_1 + B\frac{\omega_K}{\xi^2 + \omega_K^2} \quad \Longrightarrow$$

$$S(\xi) = \frac{s_0\xi + s_1 + B\frac{\omega_K}{\xi^2+\omega_K^2}}{\xi^2 + \frac{k}{m}} = \frac{s_0\xi^3 + s_1\xi^2 + s_0\xi\omega_K^2 + s_1\omega_K^2 + B\omega_K}{\left(\xi^2 + \omega_R^2\right)\left(\xi^2 + \omega_K^2\right)} =$$

$$= \frac{\xi s_0 + E}{\xi^2 + \omega_R^2} - \frac{F}{\xi^2 + \omega_K^2} \quad \text{ahol} \quad F = B\frac{\omega_K}{\omega_K^2 - \omega_R^2}, \quad E = s_1 + F, \quad \omega_R = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\xi s_0 + E}{\xi^2 + \omega_R^2} - \frac{F}{\xi^2 + \omega_K^2}\right) = s_0\cos(t\omega_R) + \frac{E}{\omega_R}\sin(t\omega_R) - \frac{F}{\omega_K}\sin(t\omega_K) =$$

$$= s_0\cos(t\omega_R) + \left(\frac{s_1}{\omega_R} + \frac{\omega_K}{\omega_R}\frac{B}{\omega_K^2 - \omega_R^2}\right)\sin(t\omega_R) - \frac{B}{\omega_K^2 - \omega_R^2} \cdot \sin(t\omega_K) =$$

$$= A_2 \cdot \sin(\omega_R + \delta_2) + \frac{B}{\omega_K^2 - \omega_R^2}\left(\frac{\omega_K}{\omega_R}\sin(t\omega_R) - \sin(t\omega_K)\right).$$

Elemzés: ha a kényszerfrekvencia ω_K megközelíti ω_R-et, a rendszer saját frekvenciáját, akkor az amplitúdó nagyon nagy lehet.

c) Az egyenlet most $s''(t) = \dfrac{-k}{m} \cdot s(t) + B \cdot \sin(\omega_R t)$, megoldása a *b)*-ben számoltak felhasználásával:

$$S(\xi) = \frac{s_0\xi + s_1 + B\frac{\omega_R}{\xi^2+\omega_R^2}}{\xi^2 + \omega_R^2} = \frac{s_0\xi^3 + s_1\xi^2 + s_0\xi\omega_R^2 + s_1\omega_R^2 + B\omega_R}{\left(\xi^2 + \omega_R^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\xi s_0 + s_1}{\xi^2 + \omega_R^2} + \frac{B\omega_R}{\left(\xi^2 + \omega_R^2\right)^2},$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\xi s_0 + s_1}{\xi^2 + \omega_R^2} + \frac{B\omega_R}{\left(\xi^2 + \omega_R^2\right)^2}\right) =$$

$$= s_0\cos(t\omega_R) + \left(\frac{s_1}{\omega_R} + \frac{B}{2\omega_R^2}\right)\sin(t\omega_R) - \frac{B}{2\omega_R}t\cos(t\omega_R) =$$

$$= A_3 \cdot \sin(\omega_R + \delta_3) - \frac{B}{2\omega_R}t\cos(t\omega_R).$$

Elemzés: $t \to \infty$ esetén az amplitúdó mindenképpen $+\infty$-be tart.

Megjegyezzük, hogy a feladatban megoldott *állandó együtthatójú másodrendű lineáris homogén* differenciálegyenleteket az ún. „klasszikus” módszerrel egyszerűbben és áttekinthetőbben oldhatjuk meg, ez sajnos jelen Feladatgyűjteménybe terjedelmi korlátozások miatt nem fért be.

M10. Fourier-sorok, alkalmazások

Fourier-sorok

10.1. *a)* $f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\pi \le x < 0 \\ -1 & \text{ha } 0 \le x < \pi \end{cases}$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \cos(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} -\cos(kx)dx\right) = 0$$

(páratlan függvény „koszinuszos” tagjai nullák),

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} \sin(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} -\sin(kx)\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_{x=-\pi}^{x=0} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(0)}{k} - \frac{-\cos(k\pi)}{k}\right) = \frac{2}{\pi k}\left(-1+\cos(k\pi)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{-4}{\pi k} & \text{ha } \quad k \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } \quad k \text{ páros} \end{cases}$$

tehát

$$\mathcal{F}\left(f_A(x)\right) = \frac{-4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \dots\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)\pi}\sin\left((2k-1)x\right).$$

$f_B(x) = 2x$ ha $x \in [-1, 1)$;

$$a_k = 1 \cdot \int_{-1}^{1} 2x \cdot \cos(k\pi x)\,dx = 0 \qquad \text{mert az integrandus páratlan függvény,}$$

$$b_k = 1 \cdot \int_{-1}^{1} 2x\sin(k\pi x)\,dx = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left[\sin(\pi k x) - \pi k x \cdot \cos(\pi k x)\right]_{x=-1}^{x=+1} = \frac{4}{\pi k}(-1)^{k+1}$$

tehát $\mathcal{F}\left(f_B(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin(k\pi x)$.

$$f_C(x) = \begin{cases} cl - 3 & \text{ha } -4{,}5 \le x < -3 \\ 6 + 2x & \text{ha } -3 \le x < 0 \\ 6 - 2x & \text{ha } \quad 0 \le x < 3 \\ -3 & \text{ha } \quad 3 \le x < 4{,}5 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{4{,}5} \int\limits_{-4{,}5}^{+4{,}5} f_C(x)\, dx = 2,$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{1}{4{,}5} \left(\int\limits_{-4{,}5}^{-3} (-3) \cos\left(\frac{k\pi x}{4{,}5}\right) dx + \int\limits_{-3}^{0} (6 + 2x) \cos\left(\frac{k\pi x}{4{,}5}\right) dx \right) =$$

$$= \frac{-81}{2\pi^2 k^2} \cos(\frac{2\pi k}{3}) + \frac{27}{2\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + \frac{81}{2\pi^2 k^2},$$

$b_k = 0$ mert az integrandus páros függvény,

tehát

$$\mathcal{F}\left(f_C(x)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-81}{2\pi^2 k^2} \cos(\frac{2\pi k}{3}) + \frac{27}{2\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + \frac{81}{2\pi^2 k^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{4{,}5}\right) =$$

$$\approx 1 + 9{,}8767 \cdot \cos\left(0{,}6981x\right) - 0{,}3219 \cdot \cos\left(1{,}3962x\right) + \ldots.$$

$f_D(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{ha } \quad -1 \le x < 0 \\ -6x + 3 & \text{ha } \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$, $a_k = 0$ mert az integrandus páratlan függvény,

$$b_k = \frac{2}{1} \cdot \int\limits_0^1 (3 - 6x) \sin(k\pi x)\, dx = \frac{-2}{\pi^2 k^2} \left[6 \sin(\pi k x) + 3\pi k (1 - 2x) \cos(\pi k x)\right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \frac{-2}{\pi^2 k^2} \left(6 \sin(\pi k) - 3\pi k \cos(\pi k) - 6 \sin(0) - 3\pi k \cos(0)\right) = \frac{6}{\pi k} \left(\cos\left(\pi k\right) + 1\right) =$$

$$= \frac{12}{\pi k} \text{ ha } k \text{ páros, tehát } \quad \mathcal{F}\left(f_D(x)\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{12}{2\ell\pi} \sin\left(2\ell\pi x\right).$$

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{-1}{\pi}x & \text{ha} \quad -\pi \le x < 0 \\ \frac{1}{\pi}x & \text{ha} \quad 0 \le x < \pi \end{cases}, \text{ páros függvény, tehát } b_k = 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}T = 1,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi^2k^2}\left[\cos(kx) + kx\sin(kx)\right]_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2k^2}\left(\cos(k\pi) - 1\right) = \frac{-4}{\pi^2k^2} \text{ ha } k \text{ páratlan, tehát}$$

$$\mathcal{F}\left(f_E(x)\right) = \frac{1}{2} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{-4}{(2\ell+1)^2\pi^2}\cos\left((2\ell+1)x\right).$$

$$f_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad -b \le x < a-b \\ c & \text{ha} \quad a-b \le x < 0 \\ 0 & \text{ha} \quad 0 \le x < a \\ -c & \text{ha} \quad a \le x < b \end{cases} \qquad (a < b),\ L = b,\ a_0 = \frac{1}{L}T = 0,$$

$$a_k = \frac{c}{b}\left(\int_{a-b}^{0} \cos\left(\frac{k\pi x}{b}\right)dx - \int_a^b \cos\left(\frac{k\pi x}{b}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{c}{k\pi}\left(\sin\left(k\pi - \frac{k\pi a}{b}\right) - \sin(k\pi) + \sin\left(\frac{k\pi a}{b}\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2c}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi a}{b}\right) & \text{ha} \quad k \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha} \quad k \text{ páros} \end{cases},$$

$$b_k = \frac{c}{b}\left(\int_{a-b}^{0} \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)dx - \int_a^b \sin\left(\frac{k\pi x}{b}\right)dx\right) =$$

$$= \frac{-c}{k\pi}\left(-\cos\left(\frac{k\pi a}{b} - k\pi\right) - \cos(k\pi) + \cos\left(\frac{k\pi a}{b}\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{c}{k\pi}\left(2\cos\left(\pi k\frac{a}{b}\right) + 1\right) & \text{ha} \quad k \text{ páratlan} \\ \frac{c}{k\pi} & \text{ha} \quad k \text{ páros} \end{cases},$$

$$f_G(x) = -6 \cdot \left(f_E(x\cdot\pi) - \frac{1}{2}\right) = 3 - 6f_E(x\cdot\pi),$$

tehát

$$\mathcal{F}\left(f_G(x)\right) = 3 - 6\mathcal{F}\left(f_E\right)(x\cdot\pi) = 3 - 6\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^2}\cos\left((2\ell+1)\pi x\right)\right) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{24}{(2\ell+1)^2\pi^2} \cos\left((2\ell+1)\pi x\right).$$

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{ha} \quad -4 \le x < 0 \\ \frac{-1}{2}x+1 & \text{ha} \quad 0 \le x < 2 \\ -1 & \text{ha} \quad 2 \le x < 4 \end{cases} \qquad L=4,\ a_0 = \frac{1}{L}T = \frac{-1}{4},$$

$$a_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{2}\left(\frac{-1}{2}x+1\right)\cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{2}^{4}\cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx = \frac{1}{4\pi^2k^2}\left[8\cos\left(\frac{\pi kx}{4}\right)+4\pi k\sin\left(\frac{\pi kx}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+2\pi kx\sin\left(\frac{\pi kx}{4}\right)\right]_{x=-4}^{x=0} + \frac{-1}{4\pi^2k^2}\left[8\cos\left(\frac{\pi kx}{4}\right)-4\pi k\sin\left(\frac{\pi kx}{4}\right)+\right.$$

$$\left.+2\pi kx\sin\left(\frac{\pi kx}{4}\right)\right]_{x=0}^{x=2} - \frac{1}{\pi k}\left[\sin\left(\frac{\pi kx}{4}\right)\right]_{x=2}^{x=4} =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2k^2}\left(2\pi k\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)-4\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)-4\cos(\pi k)+8\right) =$$

$$= \frac{12+2\pi}{2\pi^2},\ \frac{1}{\pi^2},\ \frac{12-6\pi}{18\pi^2},\ 0,\ \frac{12+10\pi}{50\pi^2},\ \frac{1}{9\pi^2},\ \frac{12-14\pi}{98\pi^2},\ 0,$$

$$\frac{12+18\pi}{162\pi^2},\ \frac{1}{25\pi^2},\ \frac{12-22\pi}{242\pi^2},\ \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{4}\int_{-4}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx + \frac{1}{4}\int_{0}^{2}\left(\frac{-1}{2}x+1\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{2}^{4}\sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)dx = \frac{-1}{4\pi^2k^2}\left[4\pi k\cos\left(\frac{1}{4}\pi kx\right)-8\sin\left(\frac{1}{4}\pi kx\right)+\right.$$

$$\left.+2\pi kx\cos\left(\frac{1}{4}\pi kx\right)\right]_{x=-4}^{x=0} + \frac{-1}{4\pi^2k^2}\left[8\sin\left(\frac{1}{4}\pi kx\right)+4\pi k\cos\left(\frac{1}{4}\pi kx\right)-\right.$$

$$\left.-2\pi kx\cos\left(\frac{1}{4}\pi kx\right)\right]_{x=0}^{x=2} - \frac{-1}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{1}{4}\pi kx\right)\right]_{x=2}^{x=4} =$$

$$= \frac{-1}{\pi^2k^2}\left(2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)+\pi k\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{-2}{\pi^2},\ \frac{1}{2\pi},\ \frac{2}{9\pi^2},\ \frac{-1}{4\pi},\ \frac{-2}{25\pi^2},\ \frac{1}{6\pi},\ \frac{2}{49\pi^2},\ \frac{-1}{8\pi},\ \frac{-2}{81\pi^2},\ \frac{1}{10\pi},\ \ldots$$

$$f_I(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha} \quad -\pi \le x < 0 \\ \frac{2}{\pi} & \text{ha} \quad 0 \le x < \pi \\ 0 & \text{máskor} \end{cases} \qquad L = \frac{3}{2}\pi,\ a_0 = \frac{1}{L}T = \frac{2}{3\pi} \cdot 3\pi = 2,$$

$$a_k = \frac{2}{3\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\cos\left(\frac{2k\pi x}{3\pi}\right)\,dx + \frac{2}{3\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{2k\pi x}{3\pi}\right)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left[\sin\left(\frac{2}{3}kx\right)\right]_{x=-\pi}^{x=0} + \frac{2}{\pi^2 k}\left[\sin\left(\frac{2}{3}kx\right)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\pi+2}{k\pi^2}\cdot\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$b_k = \frac{2}{3\pi}\int_{-\pi}^{0} 2\sin\left(\frac{2k\pi x}{3\pi}\right)\,dx + \frac{2}{3\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{2k\pi x}{3\pi}\right)\,dx =$$

$$= \frac{-2}{\pi k}\left[\cos\left(\frac{2}{3}kx\right)\right]_{x=-\pi}^{x=0} + \frac{-2}{\pi^2 k}\left[\cos\left(\frac{2}{3}kx\right)\right]_{x=0}^{x=\pi} =$$

$$= \frac{-2}{\pi k} - \frac{-2}{\pi k}\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + \frac{-2}{\pi^2 k}\cos\left(\frac{2}{3}k\pi\right) + \frac{2}{\pi^2 k} = \frac{2-2\pi}{\pi^2 k}\left(1-\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$f_J(x) = f_A\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ tehát

$$\mathcal{F}\left(f_J(x)\right) = \mathcal{F}\left(f_A\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{(2k-1)\pi}\sin\left((2k-1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{-4}{\pi}\left(\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{5\pi}{2}\right) + \dots\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - + \dots\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{-4(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)\pi}\cos\left((2\ell+1)x\right).$$

$$f_K(x) = \begin{cases} 2 & \text{ha} \quad -3 \le x < -2 \\ -1 & \text{ha} \quad -2 \le x < 0 \\ 2 & \text{ha} \quad 0 \le x < 1 \\ -1 & \text{ha} \quad 1 \le x < 3 \end{cases} \qquad L = 3,\ a_0 = \frac{1}{L}T = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{3}\int_{-3}^{-2}\cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx - \frac{1}{3}\int_{-2}^{0}\cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx + \frac{2}{3}\int_{0}^{1}\cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx -$$

$$-\frac{1}{3}\int_{1}^{3}\cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx = \frac{2}{k\pi}\left(\sin\left(\frac{-2k\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{-3k\pi}{3}\right)\right) -$$

$$-\frac{1}{k\pi}\left(\sin(0) - \sin\left(\frac{-2k\pi}{3}\right)\right) + \frac{2}{k\pi}\left(\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) - \sin(0)\right) -$$

$$-\frac{1}{k\pi}\left(\sin\left(\frac{3k\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)=\boxed{\frac{3}{\pi k}\left(\sin\left(k\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right)}=$$

$$=0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2\pi},\ 0,\ \frac{-3\sqrt{3}}{4\pi},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3\sqrt{3}}{8\pi},\ 0,\ \frac{-3\sqrt{3}}{10\pi},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3\sqrt{3}}{14\pi},\ 0,$$
$$\frac{-3\sqrt{3}}{16\pi},\ \dots\ (k=1,2,\dots)$$

$$b_k=\frac{2}{3}\int_{-3}^{-2}\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx-\frac{1}{3}\int_{-2}^{0}\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx+\frac{2}{3}\int_{0}^{1}\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx-$$
$$-\frac{1}{3}\int_{1}^{3}\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx=\frac{-2}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{-2k\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{-3k\pi}{3}\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{k\pi}\left(\cos(0)-\cos\left(\frac{-2k\pi}{3}\right)\right)-\frac{2}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)-\cos(0)\right)+\frac{1}{k\pi}\left(\cos\left(\frac{3k\pi}{3}\right)-\right.$$
$$\left.-\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)\right)=\boxed{\frac{3}{\pi k}\left(\cos(\pi k)-\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)+1\right)}=$$
$$=0,\ \frac{9}{2\pi},\ 0,\ \frac{9}{4\pi},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{9}{8\pi},\ 0,\ \frac{9}{10\pi},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{9}{14\pi},\ 0,\ \frac{9}{16\pi},\ \dots\ (k=1,2,\dots)$$

$$f_L(x)=\begin{cases}0 & \text{ha}\quad -2\pi\le x<-\pi\\ \frac{1}{\pi}x+1 & \text{ha}\quad -\pi\le x<0\end{cases},$$

páros függvény, tehát $b_k=0,\ L=2\pi,\ a_0=\frac{1}{\pi}T=1,$ és

$$a_k=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{\pi}x\right)\cos\left(\frac{kx}{2}\right)\,dx=\frac{-1}{\pi^2k^2}\left[4\cos\left(\frac{1}{2}kx\right)+2k(x-\pi)\sin\left(\frac{1}{2}kx\right)\right]_{x=0}^{x=\pi}=$$
$$=\frac{4}{\pi^2k^2}\left(1-\cos\left(\frac{1}{2}k\pi\right)\right)=\frac{4}{\pi^2k^2},\ \frac{8}{\pi^2k^2},\ \frac{4}{\pi^2k^2},\ 0,\ \frac{4}{\pi^2k^2},\ \frac{8}{\pi^2k^2},\ \frac{4}{\pi^2k^2},\ 0,\ \dots$$

rövidítve: $=\dfrac{4}{\pi^2k^2}\cdot(1,2,1,0,1,2,1,0,\dots).$

10.1.*b)* $f(x)=f_{0,1}(x)$ 10.2. feladatban, $L=1$ választással,

$$g(x)=\frac{-1}{6}f_D(x)+\frac{1}{2}\ \text{tehát}\ \mathcal{F}\left(g(x)\right)=\frac{-1}{6}\mathcal{F}\left(f_D(x)\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ell\pi}\sin\left(2\ell\pi x\right).$$

10.2. $f_0(x)=1$: periódus: $L>0$ tetszőleges rögzített,
$a_0=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}1dx=2,\ a_k=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}1\cdot\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx=0,\ b_k=0$ mert $f(x)$ páros függvény, tehát

$\mathcal{F}(1) = 1.$

$$\mathcal{F}(f_1(x)) = 2\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \dots\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k-1}}{k}\sin(kx),$$

$$\mathcal{F}(f_2(x)) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f_3(x)) &= 5\mathcal{F}\left(x^2\right) - 4\mathcal{F}(x) + 7\mathcal{F}(1) = \\ &= 5\left(\frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx)\right) - 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{k-1}}{k}\sin(kx)\right) + 7\cdot 1 = \\ &= \left(\frac{5\pi^2}{3} + 7\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{20(-1)^k}{k^2}\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8(-1)^{k-1}}{k}\sin(kx),\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(f_4(x)) = \frac{1}{6}\sin(6) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12(-1)^k\sin(6)}{k^2\pi^2 - 36}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right),$$

$$\mathcal{F}(f_5(x)) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2x) + \frac{1}{3\cdot 5}\cos(4x) + \frac{1}{5\cdot 7}\cos(6x) + \dots\right),$$

$$\mathcal{F}(f_6(x)) = \frac{e^4 - e^{-4}}{8} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^k\cdot(e^4 - e^{-4})}{k^2\pi^2 + 16}\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right),$$

$$\mathcal{F}(f_7(x)) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x),$$

$f_8(x) = -f_A(x)$ (lásd a 10.1.*a)* feladatot), így $\mathcal{F}(f_8(x)) = -\mathcal{F}(f_A(x))$,

$$f_{u,v}(x) = \begin{cases} u & \textit{ha} \quad -L \le x < 0 \\ v & \textit{ha} \quad 0 \le x < L \end{cases}:$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}(u+v)L = u + v,$$

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} u\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx + \int_{0}^{L} v\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx\right) = \frac{u+v}{L}\int_{0}^{L}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx = \\ &= \frac{u+v}{L}\cdot\frac{L}{k\pi}\left[\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]_{x=0}^{x=L} = \frac{u+v}{k\pi}(\sin(k\pi) - \sin(0)) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_k &= \frac{1}{L}\left(\int_{-L}^{0} u\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx + \int_{0}^{L} v\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\,dx\right) = \\ &= \frac{1}{L}\cdot\frac{L}{k\pi}\left(u\left[-\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]_{x=-L}^{x=0} + v\left[-\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\right]_{x=-L}^{x=0}\right) =\end{aligned}$$

$$= \frac{u}{k\pi}\left(\cos(-k\pi) - \cos(0)\right) + \frac{v}{k\pi}\left(\cos(0) - \cos(k\pi)\right) = 0 \text{ páros } k \text{ esetén, és}$$

$$b_k = \frac{u}{k\pi}\cdot(-2) + \frac{v}{k\pi}\cdot 2 = \frac{2(v-u)}{k\pi} \text{ ha } k \text{ páratlan, vagyis}$$

$$\mathcal{F}\left(f_{u,v}(x)\right) = \frac{u+v}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,(v-u)}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Megjegyzés: $f_{u,v}(x)$-nek speciális esetei az 10.1.*a)* feladatból $f_A(x)$, 10.1.*b)* feladatból $f_a(x)$, 10.2. feladatból f_6 és f_7 függvények.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f_{10}(x)\right) &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \dots\right) + \\
&\quad + \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \dots\right) = \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{(2k-1)^2\,\pi}\cos\left((2k-1)x\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx), \\
\mathcal{F}\left(f_{11}(x)\right) &= \frac{1}{4} + \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{(2\ell+1)^2\pi^2}\cos\left((2\ell+1)\pi x\right)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-3(-1)^k}{k\pi}\sin(k\pi x)\right), \\
\mathcal{F}\left(f_{12}(x)\right) &= \frac{1}{2} + \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{-2(-1)^\ell}{(2\ell+1)\pi}\cos\left(\frac{(2\ell+1)\pi}{2}x\right)\right) + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - (-1)^k\right)}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right).
\end{aligned}$$

10.3. Ezek a feladatokat önállóan oldjuk meg.

10.4. Láttuk, hogy $f_B(x) = 2x_{|x\in[-1,1)}$ és $\mathcal{F}\left(f_B(x)\right) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi k}\sin(k\pi x)$, vagyis

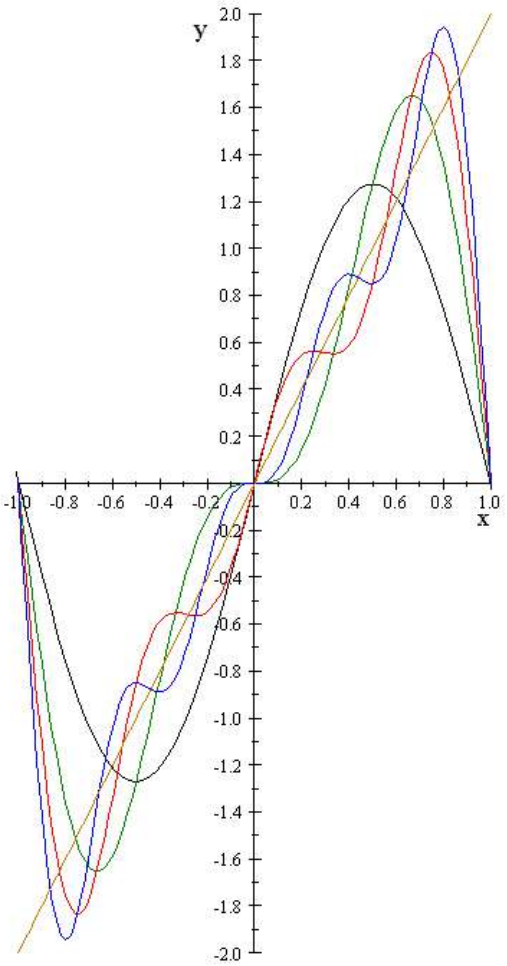
$$f_B(x) = 2x \approx \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{4}{2\pi}\sin(2\pi x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi x) - \frac{4}{4\pi}\sin(4\pi x) + - \dots,$$

tehát az f_B függvényt az $\mathcal{F}\left(f_B(x)\right)$ „kezdőszeleteivel” közelíthetjük:

$$s_1 = \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) \qquad \textbf{(fekete)},$$

$$s_2 = \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{4}{2\pi}\sin(2\pi x) \qquad \textbf{(zöld)},$$

$$s_3 = \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{4}{2\pi}\sin(2\pi x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi x) \qquad \textbf{(piros)},$$



11. ábra. 10.4.

$$s_4 = \frac{4}{\pi}\sin(\pi x) - \frac{4}{2\pi}\sin(2\pi x) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi x) - \frac{4}{4\pi}\sin(4\pi x) \qquad \textbf{(kék)},$$

narancsárga $= f_{\mathbf{B}}$

$$f_J(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha} \quad -\pi \le x < \pi/2 \\ +1 & \text{ha} \quad -\pi/2 \le x < \pi/2 \\ -1 & \text{ha} \quad \pi/2 \le x < \pi \end{cases} \approx \frac{4}{\pi}\cos(x) - \frac{4}{3\pi}\cos(3x) + \frac{4}{5\pi}\cos(5x) - \dots .$$

Láthatjuk, hogy mindkét függvénynél a periódus végpontjai felé közeledve f_B és s_i eltéréseri még mindig nagyok, de azon intervallum, ahol a hiba pl. $\delta = 10\%$-nál kisebb – egyre nő, és δ is csökkenthető, ha $\mathcal{F}\left(f_B(x)\right)$-nek egyre több tagját vesszük.

Alkalmazások

10.5. $\mathcal{F}\left(U(t)\right) = \mathcal{F}\left(|\sin(100\pi t)|\right)$ meghatározása: $b_k = 0$ minden $k \in \mathbb{N}$ sorszámra, mert f páros függvény. $L = \frac{1}{200}$ így

$$a_0 = 2 \cdot 200 \int\limits_0^{1/200} \sin(100\pi t)\, dt = \frac{400}{100\pi}\cos(0) = \frac{4}{\pi},$$

$$a_k = 2 \cdot 200 \int\limits_0^{1/200} \sin(100\pi t)\cos(200k\pi t)\, dt =$$

$$= \frac{-2}{\pi^2 - (2k\pi)^2}\left[(\pi - 2k\pi)\cos\left((100\pi + 200k\pi)t\right) + \right.$$

$$\left. +(\pi + 2k\pi)\cos\left((100\pi - 200k\pi)t\right)\right]_{t=0}^{t=1/200} =$$

$$= \frac{-2}{\pi^2 - (2k\pi)^2}\left(\left((\pi - 2k\pi)\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right) + (\pi + 2k\pi)\cos\left(\frac{\pi - 2k\pi}{2}\right)\right) - 2\pi\right),$$

tehát $\mathcal{F}\left(U_{be}(t)\right) = 240\mathcal{F}\left(|\sin(100\pi t)|\right) =$

$$= \frac{480}{\pi} - \frac{320}{\pi}\cos(200\pi t) - \frac{64}{\pi}\cos(400\pi t) - \frac{192}{7\pi}\cos(600\pi t) - \frac{320}{21\pi}\cos(800\pi t) - \cdots =$$

$$= \frac{480}{\pi} - \frac{960}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos(200\pi t) + \frac{1}{3\cdot 5}\cos(400\pi t) + \frac{1}{5\cdot 7}\cos(600\pi t) + \dots\right).$$

Az útmutató alapján a bemeneti körben

$$1 \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = U_{be}(t), \quad i(0) = 0$$

és a kimeneti körben

$$U_{ki}(t) = R \cdot i(t).$$

Mivel $\mathcal{L}\left(U_{be}(t)\right)$ nem számolható, ezért Fourier-sorának $u_k(t)$ tagjaira külön-külön oldjuk meg a bemeneti kör egyenletét, a végső megoldás $U_{ki}(t)$ pedig az egyes „részmegoldások” összege.

$$u_0(t) = \frac{480}{\pi}: \quad \text{az} \quad i'(t) + R \cdot i(t) = \frac{480}{\pi}$$

egyenlet megoldása

$$i(t) = \frac{-480}{R\pi}\left(e^{-Rt} - 1\right).$$

Mivel $e^{-Rt} \to 0$, ezért

$$i(t) = \frac{480}{R\pi}$$

vehető megoldásnak, azaz

$$u_{ki,0}(t) = \frac{480}{\pi}.$$

(Rövidebb, „fizikus” megoldás: egyenáram esetén a tekercs ellenállása 0, így az ellenálláson folyó áram $u_{ki,0}(t) = U_{be}(t) = \dfrac{480}{\pi}$ $(t \in \mathbb{R})$.)

$$u_k(t) = v_k \cos(\omega_k t) \quad (v_k, \omega_k \in \mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \text{az}$$

$$i'(t) + R \cdot i(t) = v_k \cos(\omega_k t)$$

egyenlet megoldása

$$i_k(t) = Ce^{-Rt} + \frac{1}{R^2 + \omega_k^2} \left(R v_k \cos(t\omega_k) + v_k \omega_k \sin(t\omega_k) \right).$$

Ismét elhagyhatjuk az exponenciális tagot mivel $t \to 0$.

Továbbá érdemes alkalmaznunk a *középiskolából jól ismert*

$$A \sin(u) + B \cos(u) = T \cdot \sin(u + v) \tag{15}$$

$$= T \cdot \cos\left(u + v - \tfrac{\pi}{2}\right) = T \cdot \cos(u - w) \tag{16}$$

ahol $T = \sqrt{A^2 + B^2}$, $v = \text{arctg}\left(\frac{B}{A}\right)$ és $w = \text{arctg}\left(\frac{A}{B}\right)$

és

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

azonosságokat:

$$i_k(t) = \frac{v_k}{\sqrt{R^2 + \omega_k^2}} \cos\left(t\omega_k - \text{arctg}\left(\frac{\omega_k}{R}\right)\right).$$

Tehát, az

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega_k^2}} = \frac{1000}{\sqrt{1000^2 + (k \cdot 200\pi)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \frac{\pi^2}{25}}}$$

átalakítás után

$$u_{ki,k}(t) = R \cdot i_k(t) = \frac{v_k}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{25}}} \cos\left(t\omega_k - \text{arctg}\left(\frac{\omega_k}{R}\right)\right),$$

vagyis

$$U_{ki}(t) = u_{ki,0}(t) + u_{ki,1}(t) + u_{ki,1}(t) + \cdots =$$

$$= \frac{480}{\pi} - \frac{960}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3\sqrt{1+\frac{\pi^2}{25}}}\cos\left(200\pi t - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3\cdot 5\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{25}}}\cos\left(400\pi t - \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) + \dots\right)$$

$$\approx 152{,}7887 - 86{,}2340\cos\left(628{,}3185t - 0{,}5610\right) - 17{,}2346\cos\left(1256{,}6371 - 0{,}8986\right).$$

A mellékelt ARAMKOR-ANIM.GIF (+html) **mozgóképen szemléltetjük a kimenő feszültség változását a bemeneti feszültségtől függően.**

Javasolt irodalom

Feladatgyűjtemények:

[FZ] Fekete Zoltán – Zalay Miklós: *Többváltozós függvények analízise, Példatár* („Bolyai-könyvek”), Műszaki Kiadó, Budapest, 1985.

[KKM] Krasnov, M., Kiselev, A., Makarenko, G.: *Problems and excercises in integral equations*, Mir, Moscow, 1971.

[P] Ponomarjov, K. K.: *Differenciálegyenletek felállítáa és megoldása*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[L] Lajkó Károly: *Kalkulus II. példatár,* mobiDIÁK könyvtár, Debreceni Egyetem Kiadó, 2004. HTTP://WWW.MATH.KLTE.HU/~LAJKO/JEGYZET/KALK2PT.PDF

[KSz1] Koltay László – Szalkai István: *Analízis I. feladatgyűjtemény*, Pannon Egyetemi Kiadó, Veszprém, 2009.

[KSz2] Koltay László – Szalkai István: *Analízis feladatok és interaktív megoldásuk,* Pannon Egyetem Könyvtár DIGITOOL digitális gyűjteménye (jelenleg szünetel), vagy: HTTP://MATH.UNI-PANNON.HU/~SZALKAI/.

Tankönyvek:

[GyP] Győri István – Pituk Mihály: *Kalkulus informatikusoknak II.*, HTTP://WWW.TANKONYVTAR.HU, megjelenés alatt

Online lexikon:

[w] http://mathworld.wolfram.com/

Név- és tárgymutató

$A\cos(u) + B\sin(u)$, 128
Algebra Alaptétele, 36
„Állandó variálása” módszer, 35
$\arctan(1/x)$, 128

Bláthy Ottó, 75

Cauchy-Schwarz-Bunyjakovszkij egyenlőtlenség, 27

$\Delta_f(\underline{a})$, 28

Egzakt egyenletek, 35
egyenes egyenlete, 30
egyéb transzformáció, 14
elemi törtek, 36
Eltolási tétel, 37
erf(x), 110
exp(x), 7
érintősík egyenlete, 28

$\Phi(x)$, 110
felület felszíne, 32
Fourier-sor definíciója, 38
Fubini tétele, 30
„függőleges” integrálás, 29

gradiens, 27
Gróf József, 8

Heaviside függvény, 8, 20
henger egyenlete, 32

integrál helyettesítés, 30
iránymenti derivált, 27

Jacobi-determináns, 30
jelölések, 7

K.É.P., 8

Konvolúció – tétel, 37

lineáris függvény-transzformáció, 38
lineáris integrál-transzformáció, 14
lineáris transzformáció, 31
Liouville tétele, 71

multiindex, 29
multiindex szerinti derivált, 29

Newton módszere, 29

összetett függvény deriválása, 27

parciális függvény, 26
parciális törtek, 36
polártranszformáció, 14, 31

R-L-C áramkörök, 39
reducibilis polinom, 36
rezgőkörök, 22
résztörtek, 36

stacionárius pont, 28
súlypont koordinátái, 32
súlypontjának koordinátái, 33
szeparálható differenciálegyenletek, 34
Székely Sándor, 8
szukcesszív integrálás, 12, 29

Taylor-polinom, 29
táblázatok, 7
tehetetlenségi nyomatékok, 32, 33
totális derivált, 26
többdimenziós láncszabály, 27
tömeg kiszámítása, 33
traktrix, 93

„vízszintes” integrálás, 29

© *Szalkai István, Dósa György, Pannon Egyetem* © *www.tankonyvtar.hu*

vonszolási görbe, 93

x szerinti primitív függvény, 29

y szerinti primitív függvény, 29
Yvory transzformáció, 31