Írta:
GYŐRI ISTVÁN
PITUK MIHÁLY

KALKULUS INFORMATIKUSOKNAK I.

Egyetemi tananyag

TYPOTEX

2011

LEKTORÁLTA: Dr. Molnárka Győző, Széchenyi István Egyetem Műszaki Tudományi Kar Mechatronika és Gépszerkezettan Tanszék

TÁMOGATÁS:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0008 számú, „Tananyagfejlesztés mérnök informatikus, programtervező informatikus és gazdaságinformatikus képzésekhez” című projekt keretében.

ISBN 978-963-279-504-1

KÉSZÜLT: a Typotex Kiadó gondozásában
FELELŐS VEZETŐ: Votisky Zsuzsa
AZ ELEKTRONIKUS KIADÁST ELŐKÉSZÍTETTE: Juhász Lehel

KULCSSZAVAK:
egyváltozós valós függvény, sorozat, határérték, folytonosság, derivált, határozatlan integrál, Riemann-integrál, improprius integrál, Laplace-transzformált

ÖSSZEFOGLALÁS:
A jegyzet a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán oktatott *Matematikai analízis I.* kurzus anyagának összefoglalása informatikus és villamosmérnök hallgatók részére. Az olvasó megismerkedhet az egyváltozós valós függvények differenciálszámításával és integrálszámításával, ezen belül az analízis olyan központi fogalmaival, mint a határérték, folytonosság, derivált és az integrál. Egy villamosságtani probléma kapcsán ismertetésre kerül a Laplace transzformált fogalma és fontosabb tulajdonságai.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ebben a jegyzetben a Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Karán az általunk tartott „Matematikai analízis I.” kurzus anyagát foglaltuk össze. Célunk segíteni az informatikus és villamosmérnök hallgatóknak, hogy megismerjék az egyváltozós függvények differenciál- és integrálszámítását, és sikeresen felkészüljenek a vizsgára. A tárgyhoz gyakorlatok vannak előírva, amelyekhez a hallgatók külön feladatgyűjteményt kapnak, ezért a jegyzet gyakorlófeladatokat nem tartalmaz, csak mintapédákat. A tételek bizonyításait elhagytuk. Arra törekedtünk, hogy az analízis központi fogalmait, mint például a határérték, folytonosság, differenciálás és integrálás, és azok legfontosabb tulajdonságait összefoglaljuk. Ismertetjük többek között a szakmai tárgyakban gyakran használt Laplace transzformált fogalmát és annak alkalmazását a villamosságtanban.
Hangsúlyozzuk, hogy e jegyzet nem pótolja az előadásokon való részvételt, ahol további példákon és egyszerűbb bizonyításokon keresztül segítjük e nehéz anyag megértését. Azoknak a hallgatóknak, akiket a kihagyott bizonyítások és további lehetséges alkalmazások iránt érdeklődnek, melegen ajánljuk az irodalomjegyzékben feltüntetett tankönyveket.
A jegyzet a TÁMOP - 4.1.2-08/1/A program keretében készült.
Ezúton fejezzük ki köszönetünket Hartung Ferenc kollégánknak a jegyzet elkészítése során nyújtott értékes segítségéért.

Veszprém, 2011. január 31.

Győri István és Pituk Mihály

1. fejezet

Halmazok, függvények

1.1. Halmazok

Az *egész számok* halmazának jele $\mathbb{Z}$. A nemnegatív egész számokat *természetes számoknak* nevezzük. A természetes számok halmazát az $\mathbb{N}$, a pozitív egész számok halmazát pedig az $\mathbb{N}^+$ szimbólummal jelöljük. A *valós számok* halmazának jele $\mathbb{R}$. Az $\mathbb{R}$ halmazt *számegyenesnek* is szokás nevezni.
Egy x valós szám *abszolút értékét* az

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

képlettel definiáljuk. Geometrialag $|x|$ az x számnak 0-tól való távolsága a számegyenesen. Általánosabban, ha x és y két valós szám, akkor $|x-y|$ az x és y számok egymástól való távolsága a számegyenesen. Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$|x+y| \leq |x|+|y|. \qquad \textit{(háromszög-egyenlőtlenség)}$$

Ha H egy adott *halmaz*, akkor az $x \in H$ ($x \notin H$) szimbólum azt jelenti, hogy x eleme (x nem eleme) H-nak. Egy halmazt megadhatunk elemeinek a felsorolásával vagy azoknak a tulajdonságoknak a leírásával, amelyek a halmaz elemeit jellemzik. Az 1, 3 és 10 számokból álló halmazt a következőképpen jelöljük:

$$H = \{1,3,10\}.$$

Ha $T(x)$ egy állítás (tulajdonság), amely a benne szereplő x változótól függően lehet igaz vagy hamis, akkor

$$H = \{x \mid T(x)\}$$

azoknak az x elemeknek a halmazát jelöli, amelyekre $T(x)$ igaz. Legyen

$$H = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 3\}.$$

Az abszolút érték geometriai jelentéséből azonnal adódik, hogy H azon $x \in \mathbb{R}$ számokból áll, amelyekre $-2 < x < 4$.

Legyen A, B két halmaz. A *részhalmaza* B-nek, jelben $A \subset B$, ha A minden eleme B-nek is eleme. A és B *egyesítését*, *metszetét* és *különbségét* az

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\}$$

képletekkel definiáljuk. A és B *Descartes-szorzatának* jele $A \times B$. Az $A \times B$ halmaz azon (a, b) rendezett párokból áll, amelyekre $a \in A$ és $b \in B$. Tehát

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ és } b \in B\}.$$

Az *üres halmaz* jele $\emptyset$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor az A, B halmazokat *diszjunktaknak* mondjuk.

1.2. Számhalmazok

1.2.1. Definíció. $\mathbb{R}$ részhalmazait (valós) *számhalmazoknak* mondjuk.

1.2.2. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. A $c \in \mathbb{R}$ számot az A halmaz *felső korlátjának (alsó korlátjának)* mondjuk, ha minden $x \in A$ esetén $x \leq c$ $(x \geq c)$.
Az A halmaz *felülről korlátos (alulról korlátos),* ha létezik felső korlátja (alsó korlátja).
Az A halmaz *korlátos*, ha korlátos felülről és alulról is.

Könnyű belátni, hogy $A \subset \mathbb{R}$ éppen akkor korlátos, ha létezik $k > 0$ úgy, hogy minden $x \in A$-ra $|x| \leq k$.
Az *intervallumok* speciális számhalmazok. A *korlátos intervallumok* a következők:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Az első intervallum *nyílt*, a második *balról zárt, jobbról nyílt*, a harmadik *balról nyílt, jobbról zárt*, a negyedik pedig *zárt.* A

$$(c, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > c\},$$
$$[c, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq c\},$$
$$(-\infty, c) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < c\},$$
$$(-\infty, c] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq c\},$$

ahol $c \in \mathbb{R}$, valamint a

$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

nem korlátos intervallum.

1.2.3. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Az $m \in A$ számot az A halmaz *legnagyobb elemének vagy maximumának (legkisebb elemének vagy minimumának)* mondjuk, ha minden $x \in A$ esetén $x \le m$ ($x \ge m$). Jelölés: $m = \max A$, illetve $m = \min A$.

1.2.4. Példa. Ha $A = (0,1)$, akkor $\min A$ és $\max A$ sem létezik. Ha $A = [0,1)$, akkor $\min A = 0$, $\max A$ nem létezik. Ha $A = (0,1]$, akkor $\min A$ nem létezik, $\max A = 1$. Ha pedig $A = [0,1]$, akkor $\min A = 0$ és $\max A = 1$.

Az előző példa azt mutatja, hogy korlátos A esetén is előfordulhat, hogy $\min A$ és $\max A$ sem létezik. Ugyanakkor igaz a következő:

1.2.5. Tétel. *Ha $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos (alulról korlátos), akkor A felső korlátjai (alsó korlátjai) között mindig van legkisebb (legnagyobb).*

1.2.6. Definíció. Legyen $\emptyset \ne A \subset \mathbb{R}$. Ha A felülről korlátos (alulról korlátos), akkor A legkisebb felső korlátját (legnagyobb alsó korlátját) az A halmaz *felső határának vagy szuprémumának (alsó határának vagy infimumának)* nevezzük. Jelölés: $\sup A$, illetve $\inf A$.

1.3. A függvény definíciója

A függvény definíciója a következő:

1.3.1. Definíció. Legyenek A és B adott halmazok. Az $A \times B$ Descartes-szorzat Z részhalmazát *A-ból B-be vezető ($A \to B$ típusú) függvénynek (leképezésnek)* mondjuk, ha bármely $x \in A$ esetén legfeljebb egy $y \in B$ létezik úgy, hogy $(x, y) \in Z$. Ha ezt a leképezést f-fel jelöljük, akkor $(x, y) \in Z$ esetén y-t az *x elem f általi képének* mondjuk, és azt írjuk, hogy $y = f(x)$. Az f függvény *értelmezési tartományán* a

$$D(f) = \{x \in A \mid \text{létezik } y \in B \text{ úgy, hogy } (x, y) \in Z\}$$

halmazt, f *értékkészletén* pedig az

$$R(f) = \{y \in B \mid \text{létezik } x \in A \text{ úgy, hogy } (x, y) \in Z\}$$

halmazt értjük.

Azt, hogy f A-ból B-be vezető leképezés az $f : A \to B$ szimbólummal jelöljük. Más szóval az $f : A \to B$ szimbólum azt jelenti, hogy $D(f) \subset A$ és $R(f) \subset B$. Hangsúlyozzuk, hogy általában $D(f) \ne A$ és $R(f) \ne B$.

Ha $H \subset D(f)$, akkor a *H halmaz f általi képén* az

$$f(H) = \{f(x) \mid x \in H\}$$

halmazt értjük.

Legyen $H \subset D(f)$. Az *f függvény H halmazra való leszűkítésén (megszorításán)*, jele $f|_H$, azt a függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya $D\big(f|_H\big) = H$, és képlete

$$\big(f|_H\big)(x) = f(x), \qquad x \in H.$$

Az $f : A \to B$ függvény *grafikonja*

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\} \subset A \times B.$$

1.3.2. Példa. Legyen

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Z az x, y-sík azon pontjainak a halmaza, amelyek rajta vannak a $(0,0)$ középpontú 1 sugarú körvonalon. A Z halmaz nem leképezés $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be, mert $(0,1) \in Z$ és $(0,-1) \in Z$ is teljesül. Viszont a

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 1,\ \ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

halmaz, a $(0,0)$ középpontú 1 sugarú felső félkörvonal, már $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be vezető leképezés. Ha f-fel jelöljük, akkor a definícióban használt jelöléssel $D(f) = [-1,1]$, $R(f) = [0,1]$ és

$$y = f(x) = \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in [-1,1].$$

1.4. Az összetett függvény

1.4.1. Definíció. Legyen $f : A \to B$ és $g : B \to C$ két függvény. Minden olyan $x \in D(g)$ esetén, amelyre $g(x) \in D(f)$, legyen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Az $f \circ g$-vel jelölt függvényt, amelynek értelmezési tartománya

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \mid g(x) \in D(f)\},$$

f és g *kompozíciójának* nevezzük.

1.4.2. Példa. Legyen

$$f(x) = 4x+2, \qquad x \in [0,1],$$
$$g(x) = x-3, \qquad x \in [0,4].$$

Ekkor

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4g(x)+2 = 4(x-3)+2 = 4x-10.$$

Mivel $D(f) = [0,1]$, $g(x) = x-3 \in D(f)$ éppen akkor, ha $3 \leq x \leq 4$. Ha figyelembe vesszük, hogy $D(g) = [0,4]$, azt kapjuk, hogy

$$D(f \circ g) = [3,4].$$

1.5. Az inverz függvény

1.5.1. Definíció. Az f függvényt *invertálhatónak* (*egy-egyértelműnek*) mondjuk, ha bármely $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ esetén $f(x_1) \neq f(x_2)$.

1.5.2. Definíció. Ha $f : A \to B$ invertálható, $D(f) = A$ és $R(f) = B$, akkor azt mondjuk, hogy f *kölcsönösen egyértelmű leképezést* létesít A és B között. Más szóval f *bijektív leképezés* vagy röviden *bijekció*.

1.5.3. Definíció. Ha f invertálható, akkor f *inverz függvénye* az a függvény, amely $R(f)$-et képezi $D(f)$-be, és minden $y \in R(f)$-hez azt az $x \in D(f)$-et rendeli, amelyre $y = f(x)$. Az inverz függvény jele: f_{-1}.

A definícióból következik, hogy $D(f_{-1}) = R(f)$ és $R(f_{-1}) = D(f)$, továbbá minden $x \in$ $\in D(f)$-re

$$f_{-1}(f(x)) = x,$$

és minden $y \in R(f)$ esetén

$$f(f_{-1}(y)) = y.$$

1.5.4. Példa. A

$$g(x) = 1 - x^2, \qquad x \in [-1,1]$$

függvény nem invertálható, mert $g(-1) = g(1)$. Az

$$f(x) = 1 - x^2, \qquad x \in [-1,0]$$

függvény viszont invertálható, mert ha valamely $x_1, x_2 \in D(f) = [-1,0]$ esetén $f(x_1) = f(x_2)$, akkor azt kapjuk, hogy $x_1^2 = x_2^2$, s innen $|x_1| = |x_2|$, majd $-x_1 = -x_2$, és végül $x_1 = x_2$ adódik. Könnyű belátni, hogy $R(f) = [0,1]$. Az

$$y = f(x) = 1 - x^2, \qquad x \in D(f) = [-1,0], \; y \in R(f) = [0,1]$$

feltételekből kapjuk, hogy $x^2 = 1 - y$. Innen $|x| = \sqrt{1-y}$, majd $-x = \sqrt{1-y}$, és végül

$$x = -\sqrt{1-y} = f_{-1}(y)$$

adódik. Tehát f inverz függvénye:

$$f_{-1}(x) = -\sqrt{1-x}, \qquad x \in [0,1].$$

1.6. Egyváltozós valós függvények

1.6.1. Definíció. Az f függvényt *valós függvénynek* mondjuk, ha $R(f) \subset \mathbb{R}$. Az f függvényt *egyváltozós függvénynek* mondjuk, ha $D(f) \subset \mathbb{R}$.

A továbbiakban egyváltozós valós függvényeket, azaz $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be vezető függvényeket fogunk vizsgálni. Az egyváltozós valós függvények grafikonjait az x, y-síkban ábrázolhatjuk,

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Az inverz függvény definíciójából kapjuk, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ invertálható, akkor az f_{-1} inverz függvény grafikonját f grafikonjának az $y = x$ egyenesre való tükrözésével kapjuk.

1.6.2. Definíció. Ha f_1 és f_2 valós függvények, akkor az $f_1 \pm f_2$, $f_1 \cdot f_2$ és $\dfrac{f_1}{f_2}$ függvényeket az

$$(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x), \qquad x \in D(f_1 \pm f_2) = D(f_1) \cap D(f_2),$$
$$(f_1 \cdot f_2) = f_1(x) \cdot f_2(x), \qquad x \in D(f_1 \cdot f_2) = D(f_1) \cap D(f_2),$$
$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, \qquad x \in D\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \{x \in D(f_1) \cap D(f_2) \mid f_2(x) \neq 0\}$$

képletekkel definiáljuk.

1.6.3. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *felülről korlátos (alulról korlátos),* ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $x \in D(f)$-re $f(x) \le c$ ($f(x) \ge c$).
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos*, ha korlátos felülről és alulról is.

Könnyű belátni, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ éppen akkor korlátos, ha létezik $k > 0$ úgy, hogy minden $x \in D(f)$-re $|f(x)| \le k$.

1.6.4. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *monoton növekedő (monoton csökkenő),* ha bármely $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1 \ge f(x_2)$). Ha az utolsó egyenlőtlenséget $<$-re ($>$-ra) cseréljük, akkor a *szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő)* függvény definícióját kapjuk.
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *monoton* (*szigorúan monoton*), ha monoton növekedő vagy monoton csökkenő (szigorúan monoton növekedő vagy szigorúan monoton csökkenő).

1.6.5. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *páros (páratlan),* ha bármely $x \in D(f)$ esetén $-x \in D(f)$, és $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Minden páros függvény grafikonja szimmetrikus az y-tengelyre nézve, és minden páratlan függvény grafikonja szimmetrikus az origóra ((0,0) pontra) nézve.

1.6.6. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *periodikus* a p periódussal, ha bármely $x \in D(f)$ esetén $x + p \in D(f)$, és $f(x+p) = f(x)$.

1.6.7. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *állandó (konstans),* ha létezik $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy minden $x \in D(f)$ esetén $f(x) = c$.

1.6.8. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *zérushelyén* olyan $a \in D(f)$ pontot értünk, ahol $f(a) = 0$. Ha $f(a) = 0$, azt is mondjuk, hogy f *eltűnik az a helyen*.

2. fejezet

Egyváltozós valós függvények határértéke és folytonossága

2.1. Konvergens sorozatok

2.1.1. Definíció. *Sorozatnak* olyan függvényt nevezünk, amelynek értelmezési tartománya $\mathbb{N}$. Valós sorozatnak $\mathbb{N}$-en definiált valós függvényt nevezünk. Ha $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós sorozat, akkor az $a(n)$ számot a_n-nel szokás jelölni. Az a_n-et a sorozat *n-edik tagjának* mondjuk. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ helyett az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ vagy $\{a_n\}$ jelölés használatos.

A továbbiakban csak valós sorozatokkal fogunk foglalkozni.

2.1.2. Definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ számot az $\{a_n\}$ sorozat *határértékének (limeszének)* mondjuk, ha bármely $\epsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$-ra $|a_n - a| < \epsilon$. Jelölés: $a_n \to a$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. A definícióban szereplő n_0 számot az ϵ *hibakorláthoz* tartozó *küszöbszámnak* nevezzük.

Az $a_n \to a \in \mathbb{R}$ feltétel geometriailag azt jelenti, hogy bármely $\epsilon > 0$ esetén az $\{a_n\}$ sorozat tagjai véges számú kivétellel benne vannak az x, y - sík $a - \epsilon < y < a + \epsilon$ sávjában.

2.1.3. Definíció. Az $\{a_n\}$ sorozatot *konvergensnek* mondjuk, ha létezik $a \in \mathbb{R}$, úgy, hogy $a_n \to a$. Azokat a sorozatokat, amelyek nem konvergensek, *divergenseknek* nevezzük.

2.1.4. Tétel (A határérték egyértelműsége)**.** *Minden konvergens sorozatnak pontosan egy határértéke van.*

2.1.5. Példa. Legyen

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ha a törtet $\frac{1}{n}$-nel bővítjük, azt kapjuk, hogy

$$a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ebből könnyű megsejteni, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Ezt igazolni fogjuk a definíció szerint is. Legyen $\epsilon > 0$ adva. Ekkor az $|a_n - 1| < \epsilon$ feltétel ($n \in \mathbb{N}$ esetén) ekvivalens (egyenértékű) az

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon,$$

illetve

$$n \geq \frac{1}{\epsilon} - 1$$

egyenlőtlenséggel. Tehát bármely olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, amelyre $n_0 > \frac{1}{\epsilon} - 1$ az ϵ hibakorlátnak megfelelő küszöbszám. Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért $a_n \to 1$.

2.1.6. Definíció. Ha $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ természetes számok szigorúan monoton növekedő sorozata, akkor az $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ sorozatot az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat *részsorozatának* nevezzük.

Az alábbi tulajdonság nyilvánvaló.

2.1.7. Tétel. *Ha az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat konvergens, akkor $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ bármely $\{a_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ részsorozata is konvergens, és $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{n\to\infty} a_n$.*

A tételből következik, hogy az $a_n = (-1)^n$ sorozat divergens, hiszen

$$a_{2k} = 1 \to 1, \qquad \text{és} \qquad a_{2k+1} = -1 \to -1.$$

Mivel a sorozatok speciális valós függvények, a korlátosságukat (alulról és felülről is) már definiáltuk.

2.1.8. Tétel (A konvergencia és korlátosság kapcsolata)**.** *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Az $a_n = (-1)^n$ sorozat példája mutatja, hogy a fordított állítás nem igaz.
Közvetlenül a definícióból vezethető le a következő állítás.

2.1.9. Tétel. *Ha $a_n \to 0$ és a $\{b_n\}$ sorozat korlátos, akkor $a_n b_n \to 0$.*

A következő tétel azt mutatja, hogy konvergens sorozatokból az alapművelek alkalmazásával szintén konvergens sorozatokat kapunk.

2.1.10. Tétel (Műveletek határértékekkel)**.** *Ha $a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$, akkor*
(i) $a_n + b_n \to a + b$,
(ii) $a_n b_n \to ab$,
(iii) $b_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $b \neq 0$ további feltételek mellett $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

A $\leq$ egyenlőtlenség két konvergens sorozat tagjai között „öröklődik” a határértékekre is.

2.1.11. Tétel (Határátmenet egyenlőtlenségekben)**.** *Ha $a_n \leq b_n$ véges számú kivétellel, $a_n \to a \in \mathbb{R}$ és $b_n \to b \in \mathbb{R}$, akkor $a \leq b$.*

Az $a_n = 0$ és $b_n = \dfrac{1}{n}$ sorozatok példája mutatja, hogy az előző tételben a $\leq$ egyenlőtlenség nem cserélhető ki $<$-re.
Az előző tulajdonsághoz kapcsolódik a következő:

2.1.12. Tétel (Rendőrelv). *Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ véges számú kivétellel és valamely $h \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = h,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} b_n = h.$$

Nem minden korlátos sorozat konvergens. Viszont igaz a következő:

2.1.13. Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Egy konvergens sorozat tagjai nagy n-ekre közel kerülnek a határértékhez, és ezért egymáshoz is. Meg lehet mutatni, hogy ez a tulajdonság egyben a konvergencia kritériuma is.

2.1.14. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Az $\{a_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\epsilon > 0$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$ és $m \geq n_0$ esetén $|a_n - a_m| < \epsilon$.*

2.2. Végtelenhez tartó sorozatok

Most olyan sorozatokat fogunk vizsgálni, amelyek minden határon túl nőnek vagy csökkennek.

2.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\{a_n\}$ sorozat *tart a plusz végtelenhez (mínusz végtelenhez),* ha bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n \geq n_0$-ra $a_n > c$ ($a_n < c$).
Jelölés:

$$a_n \to \infty \quad (a_n \to -\infty), \qquad \text{illetve} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

Az $a_n \to \infty$ ($a_n \to -\infty$) feltétel geometriailag azt jelenti, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén az $\{a_n\}$ sorozat tagjai véges számú kivétellel benne vannak az x, y-sík $y > c$ ($y < c$) félsíkjában.

2.2.2. Példa. Megmutatjuk a definíció alapján, hogy $n^2 \to \infty$. Legyen $c \in \mathbb{R}$ adott. Ha $c < 0$, akkor az $n^2 > c$ egyenlőtlenség igaz minden $n \in \mathbb{N}$-re, $c \geq 0$ esetén pedig éppen akkor teljesül, ha $n > \sqrt{c}$. Tehát $c < 0$ esetén bármely $n_0 \in \mathbb{N}$, $c \geq 0$ esetén pedig az $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \sqrt{c}$ választás felel meg a definícióban előírt feltételnek.

A következő tulajdonság nyilvánvaló.

2.2.3. Tétel. *Ha $a_n \to \infty$ ($a_n \to -\infty$), akkor $\{a_n\}$ alulról (felülről) korlátos.*

A $\pm\infty$-be tartó sorozatokra érvényesek a következő szabályok.

2.2.4. Tétel (Műveletek végtelen határértékekkel)**.**
(i) Ha $a_n \to \infty$*, akkor* $-a_n \to -\infty$*.*
(ii) Ha $a_n \to \infty$ *és* $\{b_n\}$ *alulról korlátos, akkor* $a_n + b_n \to \infty$*.*
(iii) Ha $a_n \to \infty$ *és van olyan* $c > 0$ $(d < 0)$*, hogy* $b_n \geq c$ $(b_n \leq d)$ *véges számú kivétellel, akkor* $a_n b_n \to \infty$ $(a_n b_n \to -\infty)$*.*
(iv) Ha $a_n \to \infty$*, akkor* $\dfrac{1}{a_n} \to 0$*.*
(v) Ha $a_n \to 0$ *és* $a_n > 0$ $(a_n < 0)$ *véges számú kivétellel, akkor* $\dfrac{1}{a_n} \to \infty$ $\left(\dfrac{1}{a_n} \to -\infty\right)$*.*

Az (i)–(iv)-hez hasonló állításokat meg lehet fogalmazni arra az esetre is, amikor $a_n \to -\infty$.

2.2.5. Tétel (Határátmenet egyenlőtlenségben)**.** *Ha* $a_n \leq b_n$ *véges számú kivétellel és* $a_n \to \infty$ $(b_n \to -\infty)$*, akkor* $b_n \to \infty$ $(a_n \to -\infty)$*.*

2.3. Monoton sorozatok

Az $\{a_n\}$ sorozat éppen akkor monoton növekedő (monoton csökkenő), ha minden $n \in \mathbb{N}$-re $a_n \leq a_{n+1}$ $(a_n \geq a_{n+1})$, ha pedig a $\leq$ $(\geq)$ egyenlőtlenséget $<$-re ($>$-ra) cseréljük, akkor a szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő) sorozat jellemzését kapjuk.
Egy monoton sorozatnak mindig létezik (véges vagy végtelen) határértéke.

2.3.1. Tétel (Monoton sorozat határértéke)**.** *Ha az* $\{a_n\}$ *sorozat monoton növekedő (monoton csökkenő) és felülről nem korlátos (alulról nem korlátos), akkor* $a_n \to \infty$ $(a_n \to -\infty)$*.*
Ha az $\{a_n\}$ *sorozat monoton növekedő (monoton csökkenő) és felülről korlátos (alulról korlátos), akkor* $a_n \to \sup A$ $(a_n \to \inf A)$*, ahol* $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*.*
Speciálisan, minden monoton és korlátos sorozat konvergens.

2.3.2. Példa. Legyen $a_0 = \sqrt{2}$ és

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Teljes indukcióval bizonyítható, hogy $\{a_n\}$ monoton növekedő és minden $n \in \mathbb{N}$-re $\sqrt{2} \leq a_n \leq 2$. Az előző tétel szerint $a_n \to a$ valamely $a \in \mathbb{R}$-re. Elvégezve a határátmenetet az egyenletben és az utóbbi egyenlőtlenségben, azt kapjuk, hogy

$$a = \sqrt{2 + a} \qquad \text{és} \qquad \sqrt{2} \leq a \leq 2.$$

Innen $a^2 = 2 + a$, tehát $a = -1$ vagy $a = 2$. Mivel a $\sqrt{2} \leq a \leq 2$ feltételnek csak $a = 2$ felel meg, ezért $a = 2$.

2.4. Speciális sorozatok

Ismertetünk néhány fontos sorozatot és azok konvergenciatulajdonságait.

2.4.1. Tétel (A $\{q^n\}$ geometriai sorozat)**.** *Ha $q>1$, akkor $q^n\to\infty$. Ha $q=1$, akkor $q^n=1\to 1$. Ha $q\in(-1,1)$, akkor $q^n\to 0$. Ha pedig $q\le -1$, akkor a $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatnak sem véges, sem végtelen határértéke nem létezik.*

2.4.2. Példa.

$$\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}=\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n+\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}\longrightarrow 0,$$

miközben felhasználtuk a geometriai sorozat konvergenciatulajdonságait.

2.4.3. Tétel (Az $\{\sqrt[n]{a}\}$ sorozat)**.** *Bármely $a>0$ esetén $\sqrt[n]{a}\to 1$.*

2.4.4. Tétel (Az $\{\sqrt[n]{n}\}$ sorozat)**.** $\sqrt[n]{n}\to 1$.

2.4.5. Példa.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1,$$

mert minden $n\in\mathbb{N}^+$-ra

$$\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{2n}\le\sqrt[n]{2n+1}\le\sqrt[n]{3n}=\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n},$$

és

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}\right)=1.$$

2.4.6. Tétel (Az $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ sorozat)**.** *Az $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ sorozat monoton növekedő és korlátos, ezért konvergens is.*

2.4.7. Definíció. Az

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

határértéket *Euler-féle számnak* nevezzük. Közelítő értéke:

$$e\approx 2{,}7.$$

2.5. A bővített számegyenes

2.5.1. Definíció. Az

$$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$$

halmazt *bővített számegyenesnek* nevezzük.

A valós számok $<$ rendezési relációját kiterjesztjük $\overline{\mathbb{R}}$-ra a következőképpen: minden $a\in\mathbb{R}$ esetén

$$-\infty<a,\qquad \text{és}\qquad a<\infty,$$

valamint

$$-\infty<\infty.$$

A $\pm\infty$ szimbólumokkal a következő műveleteket definiáljuk:

$$-(\pm\infty) = \mp\infty;$$

$$\begin{aligned} +\infty + a = a + (+\infty) &= +\infty, \qquad \text{ha } a > -\infty, \\ -\infty + a = a + (-\infty) &= -\infty, \qquad \text{ha } a < +\infty; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pm\infty)\cdot a = a\cdot(\pm\infty) &= \pm\infty, \qquad \text{ha } a > 0, \\ (\pm\infty)\cdot a = a\cdot(\pm\infty) &= \mp\infty, \qquad \text{ha } a < 0; \end{aligned}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0, \qquad \text{ha } a \in \mathbb{R}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy a

$$+\infty - \infty, \qquad -\infty + \infty,$$

$$(\pm\infty)\cdot 0, \qquad 0\cdot(\pm\infty)$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}, \qquad \frac{a}{0} \qquad (a \in \overline{\mathbb{R}})$$

műveleteket nem értelmezzük.
Az előző definíciókat azért vezettük be, hogy a határértékszámítás szabályait egységesen fogalmazhassuk meg.

2.5.2. Tétel (Műveletek határértékekkel)**.** *Ha $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ és $b_n \to b \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor*
(i) $a_n + b_n \to a + b$,
(ii) $a_n b_n \to ab$,
(iii) $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$,
feltéve, hogy a jobb oldalon szereplő művelet értelmezve van a bővített számegyenesen.

2.6. Környezetek és pontozott környezetek

2.6.1. Definíció. Egy $a \in \mathbb{R}$ pont (ϵ*-sugarú*) *környezetén*

$$K_\epsilon(a) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \epsilon \,\} = (a - \epsilon, a + \epsilon)$$

alakú halmazt (intervallumot) értünk, ahol $\epsilon \in (0, \infty)$.
Az $a \in \mathbb{R}$ pont (ϵ*-sugarú*) *pontozott környezetén*

$$P_\epsilon(a) = K_\epsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon)$$

alakú halmazt értünk, ahol $\epsilon \in (0, \infty)$.

$K_\epsilon(a)$ azon $x \in \mathbb{R}$ pontok halmaza, amelyekre $|x-a| < \epsilon$, azaz a-tól való távolságuk kisebb, mint ϵ. Hasonlóképpen, $P_\epsilon(a)$ azon a-tól különböző $x \in \mathbb{R}$ pontok halmaza, amelyeknek a-tól való távolsága kisebb, mint ϵ.
A jobb oldali és bal oldali környezeteket hasonlóképpen definiáljuk.

2.6.2. Definíció. Az $a \in \mathbb{R}$ pont (ϵ*-sugarú) jobb oldali (bal oldali) környezetén*

$$K_\epsilon^+(a) = [a, a+\epsilon) \qquad (K_\epsilon^-(a) = (a-\epsilon, a])$$

alakú intervallumot értünk, ahol $\epsilon \in (0, \infty)$.
Az $a \in \mathbb{R}$ pont (ϵ*-sugarú) jobb oldali (bal oldali) pontozott környezetén*

$$P_\epsilon^+(a) = (a, a+\epsilon) \qquad (P_\epsilon^-(a) = (a-\epsilon, a))$$

alakú intervallumot értünk, ahol $\epsilon \in (0, \infty)$.

Most a $+\infty$ és $-\infty$ környezeteit és pontozott környezeteit definiáljuk.

2.6.3. Definíció. A $+\infty$ *környezetén és egyúttal pontozott környezetén* (c, ∞) alakú intervallumot értünk, ahol $c \in \mathbb{R}$.
A $-\infty$ *környezetén és egyúttal pontozott környezetén* $(-\infty, c)$ alakú intervallumot értünk, ahol $c \in \mathbb{R}$.

2.7. A függvény határértéke

2.7.1. Definíció. A $b \in \overline{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *határértékének* mondjuk az $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pontban, ha f értelmezve van a valamely pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in D(f)$, $x_n \neq a$ minden $n \in \mathbb{N}$-re, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata b-hez tart. Jelölés: $f(x) \to b$, ha $x \to a$ vagy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Hasonlóan definiáljuk a jobb oldali és bal oldali határértékeket is.

2.7.2. Definíció. A $b \in \overline{\mathbb{R}}$ számot az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *jobb oldali (bal oldali) határértékének* mondjuk az $a \in [-\infty, \infty)$ ($a \in (-\infty, \infty]$) pontban, ha f értelmezve van a valamely jobb oldali (bal oldali) pontozott környezetében és bármely olyan $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ sorozatra, amelyre $x_n \in D(f)$, $x_n > a$ ($x_n < a$) minden $n \in \mathbb{N}$-re, és $x_n \to a$, a függvényértékek $\{f(x_n)\}_{n=0}^\infty$ sorozata b-hez tart. Jelölés: $f(x) \to b$, ha $x \to a+$ ($f(x) \to b$, ha $x \to a-$) vagy $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$).

Nyilvánvaló, hogy $a = -\infty$ ($a = +\infty$) esetén a határérték és a jobb oldali (bal oldali) határérték fogalma megegyezik.
A határérték és a féloldali határértékek között a következő a kapcsolat.

2.7.3. Tétel. *Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$. A $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ határérték pontosan akkor létezik, ha $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ létezik, és*

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x).$$

A határértéket definiálhattuk volna a környezetek és pontozott környezetek segítségével is. Ugyanis igaz a következő állítás.

2.7.4. Tétel. *Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény határértéke az $a\in\overline{\mathbb{R}}$ pontban egyenlő a $b\in\overline{\mathbb{R}}$ számmal pontosan akkor, ha b bármely K környezetéhez létezik az a számnak olyan P pontozott környezete, amelyre $f(P)\subset K$.*

Hasonlóképpen fogalmazhatjuk át a jobb oldali és bal oldali határérték definícióját is.
A definícióból és a sorozatokra vontakozó eredményekből következik:

2.7.5. Tétel (A határértékszámítás szabályai)**.** *Legyen $a\in\overline{\mathbb{R}}$.*
(i) Ekkor

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x),$$
$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x),$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)},$$

feltéve, hogy $\lim_{x\to a}f(x)$ és $\lim_{x\to a}g(x)$ létezik, és a jobb oldalon szereplő művelet értelmezve van $\overline{\mathbb{R}}$-ban.
(ii) Ha $\lim_{x\to a}f(x)=0$ és g korlátos a valamely pontozott környezetében, akkor $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=0$.
(iii) Ha $\lim_{x\to a}f(x)=0$ és $f>0$ a valamely pontozott környezetében, akkor $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.
(iv) Ha $\lim_{x\to a}f(x)=0$ és $f<0$ a valamely pontozott környezetében, akkor $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=-\infty$.
(v) Ha $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$ létezik és $f\le g$ a valamely pontozott környezetében, akkor $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$.
(vi) (rendőrelv) Ha $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=b\in\overline{\mathbb{R}}$ és $f\le g\le h$ az a pont valamely pontozott környezetében, akkor $\lim_{x\to a}g(x)=b$.

Hasonló állításokat lehet megfogalmazni jobb oldali és bal oldali határértékekre is.
Most következzen két további fontos állítás.

2.7.6. Tétel (Az összetett függvény határértéke)**.** *Legyen $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Ha*

$$\lim_{x\to a}g(x)=b\in\overline{\mathbb{R}},\qquad \lim_{x\to b}f(x)=c\in\overline{\mathbb{R}},$$

és $g(x)\neq b$ minden x-re az a pont valamely pontozott környezetéből, akkor

$$\lim_{x\to a}f(g(x))=c.$$

2.7.7. Tétel (Monoton függvény határértéke)**.** *Legyen* $-\infty \le a < b \le +\infty$. *Ha* f *monoton* (a,b)*-ben, akkor* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *és* $\lim_{x\to b-} f(x)$ *létezik. Ha* f *monoton növekedő* (a,b)*-ben, akkor*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f((a,b)), \qquad \lim_{x\to b-} f(x) = \sup f((a,b)),$$

ha pedig f *monoton csökkenő* (a,b)*-ben, akkor*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f((a,b)), \qquad \lim_{x\to b-} f(x) = \inf f((a,b)),$$

ahol $f((a,b)) = \{f(x) \mid x \in (a,b)\}$.

2.8. Folytonosság

2.8.1. Definíció. Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt *folytonosnak* mondjuk az $a \in D(f)$ helyen, ha

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *jobbról (balról) folytonos* az $a \in D(f)$ helyen, ha

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \qquad \left(\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)\right).$$

Nyilvánvaló, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az a helyen, ha itt jobbról és balról is folytonos.
Ha figyelembe vesszük, hogy a határérték definícója átfogalmazható környezetek segítségével, akkor a folytonosság következő ekvivalens megfogalmazását kapjuk.

2.8.2. Tétel. *Az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény pontosan akkor folytonos az* $a \in D(f)$ *helyen, ha* f *értelmezve van a valamely környezetében és bármely* $\epsilon > 0$ *esetén létezik* $\delta > 0$ *úgy, hogy minden* $x \in D(f)$, $|x-a| < \delta$ *esetén* $|f(x)-f(a)| < \epsilon$.

Ha f nem folytonos az a helyen, azt is mondjuk, hogy f-nek itt *szakadása* van.
A definícióból és a határértékszámítás szabályaiból következnek az alábbi tulajdonságok.

2.8.3. Tétel (Műveletek folytonos függvényekkel)**.** *Ha* f *és* g *folytonosak az* a *helyen, akkor*
(i) ugyanilyen $f+g$ *is,*
(ii) ugyanilyen fg *is,*
(iii) $g(a)\ne 0$ *további feltétel mellett ugyanilyen* $\dfrac{f}{g}$ *is.*
Ha g *folytonos az* a *helyen és* f *folytonos a* $g(a)$ *helyen, akkor* $f\circ g$ *folytonos az* a *helyen.*

Most egy függvény intervallumon való folytonosságát definiáljuk.

2.8.4. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum a és b végpontokkal, ahol

$$-\infty \le a < b \le +\infty.$$

Az f függvényt *folytonosnak* nevezzük az I intervallumon, ha f folytonos minden $c \in (a,b)$ pontban, továbbá $a \in I$ esetén a-ban jobbról folytonos, $b \in I$ esetén pedig b-ben balról folytonos.

2.8.5. Tétel (Műveletek intervallumon folytonos függvényekkel)**.** *Ha f és g folytonosak az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor*
(i) ugyanilyen $f+g$ is,
(ii) ugyanilyen fg is,
(iii) ha g sehol sem tűnik el I-ben, akkor ugyanilyen $\frac{f}{g}$ is.

Most a korlátos, zárt intervallumon folytonos függvények fontosabb tulajdonságait ismertetjük.

2.8.6. Tétel (Weierstrass tétele)**.** *Ha az f függvény folytonos az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor az $[a,b]$-hez tartozó függvényértékek között mindig van legnagyobb és legkisebb is.*

A feltételek fontosságát illusztrálja a következő két példa.

2.8.7. Példa. Az

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in (0,1]$$

függvény folytonos a $(0,1]$ intervallumon. Ugyanakkor

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \infty,$$

ezért a $(0,1]$ intervallumhoz tartozó függvényértékek között nincs legnagyobb. Tehát Weierstrass tételében lényeges, hogy zárt intervallumról van szó.

2.8.8. Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in (0,1] \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Annak ellenére, hogy f csak 0-ban nem folytonos (jobbról), a függvényértékek között nincs legnagyobb.

2.8.9. Tétel (Bolzano-féle közbülsőérték-tétel)**.** *Ha f folytonos az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor bármely $f(a)$ és $f(b)$ közé eső d szám esetén van olyan $c \in [a,b]$, amelyre $f(c) = d$.*

Bolzano tételének két fontos következménye:

2.8.10. Tétel. *Ha f folytonos az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon és $f(a)f(b) < 0$, akkor létezik $c \in (a,b)$ úgy, hogy $f(c) = 0$.*

2.8.11. Tétel. *Ha az f függvény folytonos és nem állandó az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor $f(I)$ intervallum.*

A következő két állítás az összetett és inverz függvény folytonosságáról szól.

2.8.12. Tétel (Az összetett függvény folytonossága)**.** *Ha g folytonos és nem állandó az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon és f folytonos a $J = g(I)$ intervallumon, akkor $f \circ g$ folytonos az I intervallumon.*

2.8.13. Tétel (Az inverz függvény folytonossága)**.** *Ha f szigorúan monoton és folytonos az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor f invertálható az I intervallumon és f_{-1} folytonos a $J = f(I)$ intervallumon.*

2.9. Az elemi alapfüggvények

Az alábbiakban felsorolunk néhány elemi alapfüggvényt és azok fontosabb tulajdonságait.

Identikus függvény (id). Az

$$\mathrm{id}(x) = x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

képlettel definiált *identikus függvény* folytonos és szigorúan monoton növekedő a $(-\infty, \infty)$-n.

Pozitív kitevőjű hatványfüggvények (id^n, $n \in \mathbb{N}^+$). Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$\mathrm{id}^n(x) = x^n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

képlettel definiált *n-edik hatványfüggvény* folytonos a $(-\infty, \infty)$-n; páratlan n esetén a $(-\infty, \infty)$-n szigorúan monoton növekedő, ha pedig n páros, akkor a $(-\infty, 0]$-n szigorúan monoton csökkenő és a $[0, \infty)$-n szigorúan monoton növekedő. Ha n páros (páratlan), akkor az id^n függvény is páros (páratlan).

Negatív kitevőjű hatványfüggvények ((id^{-n}, $n \in \mathbb{N}^+$). Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$\mathrm{id}^{-n}(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

képlettel definiált $\mathrm{id}^{-n} : \mathbb{R}\setminus\{0\} :\to \mathbb{R}$ hatványfüggvény folytonos a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumon; a $(0, \infty)$-n szigorúan monoton csökkenő, továbbá páros vagy páratlan attól függően, hogy n páros vagy páratlan.

Gyökfüggvények ($\mathrm{id}^{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^+$). Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az *n-edik gyökfüggvényt*, jele $\mathrm{id}^{\frac{1}{n}}$, az

$$\mathrm{id}^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} \left(\mathrm{id}^n\right)_{-1} & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \left(\left(\mathrm{id}^n\right)|_{[0,\infty)}\right)_{-1} & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

képlettel definiáljuk. Jelölés:

$$\mathrm{id}^{\frac{1}{n}}(x) = \sqrt[n]{x}, \qquad x \in \begin{cases} (-\infty, \infty) & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ [0, \infty) & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$$

Az $\mathrm{id}^{\frac{1}{n}}$ függvény folytonos és szigorúan monoton növekedő a $[0, \infty)$-n, illetve a $(-\infty, \infty)$-n attól függően, hogy n páros vagy páratlan.

Polinomok. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ adottak. A

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n, \qquad x \in \mathbb{R},$$

képlettel definiált $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *n-edfokú polinomnak* nevezzük; az a_0 szám a p polinom *főegyütthatója* . A p polinom folytonos a $(-\infty, \infty)$-n.

Természetes logaritmusfüggvény (ln). Meg lehet mutatni, hogy létezik egy valós függvény, jele ln, a következő tulajdonságokkal:

$$D(\ln) = (0, \infty),$$
$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \qquad \text{ha } x,\, y \in (0, \infty),$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Ezek a tulajdonságok az ln függvényt egyértelműen meghatározzák. Az ln függvényt *természetes logaritmusfüggvénynek* nevezzük. Az ln függvény szigorúan monoton növekedő és folytonos a $(0, \infty)$-n, továbbá

$$\ln 1 = 0, \qquad \ln e = 1,$$
$$\ln x^n = n \ln x, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty.$$

Exponencális függvény (exp). Az *exponenciális függvényt*, jele exp, az

$$\exp = (\ln)_{-1}$$

képlettel definiáljuk. Az $\exp : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$ függvény pozitív, szigorúan monoton növekedő és folytonos a $(-\infty, \infty)$-n. További fontosabb tulajdonságai:

$$\exp 0 = 1, \qquad \exp 1 = e,$$
$$\exp(x+y) = \exp x \exp y, \qquad \text{ha } x,\, y \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \exp x = \infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp x,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Az exp és ln függvények segítségével definiálhatjuk egy pozitív szám tetszőleges hatványát.

2.9.1. Definíció. Bármely $a \in (0, \infty)$ és $b \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^b = \exp(b \ln a).$$

Mivel $\ln e = 1$, ezért a definíció szerint

$$e^x = \exp x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Általános alapú exponenciális függvény ($\exp_a$, $a > 0$, $a \neq 1$). Bármely $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ esetén az

$$\exp_a x = a^x = \exp(x \ln a), \qquad x \in \mathbb{R},$$

képlettel definiált $\exp_a : (-\infty, \infty) \to (0, \infty)$ függvényt *a alapú exponenciális függvénynek* nevezzük. Az $\exp_a$ függvény pozitív, folytonos, $a \in (0,1)$ esetén szigorúan monoton csökkenő, $a \in (1, \infty)$ esetén pedig szigorúan monoton növekedő. További fontosabb tulajdonságai:

$$a^0 = 1,$$
$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad \text{ha } x, y \in \mathbb{R},$$
$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}, \qquad \text{ha } x, y \in \mathbb{R},$$
$$\text{ha } a \in (0,1), \qquad \text{akkor } \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \text{ és } \lim_{x\to\infty} a^x = 0.$$
$$\text{ha } a \in (1,\infty), \qquad \text{akkor } \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \text{ és } \lim_{x\to\infty} a^x = \infty.$$

Általános alapú logaritmusfüggvény ($\log_a$, $a > 0$, $a \neq 1$). Bármely $a \in (0,1) \cup (1, \infty)$ esetén a $\log_a$-val jelölt *a alapú logaritmusfüggvény* definíciója:

$$\log_a = \left(\exp_a\right)_{-1}.$$

A $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, $a \in (0,1)$ esetén szigorúan monoton csökkenő, $a \in (1, \infty)$ esetén pedig szigorúan monoton növekedő. Fontosabb tulajdonságai:

$$\log_a 1 = 0,$$
$$\log_a(a^x) = x, \qquad \text{ha } x \in \mathbb{R},$$
$$a^{\log_a x} = x, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty),$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \qquad \text{ha } x, y \in (0, \infty),$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a x, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } y \in \mathbb{R};$$
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty),$$
$$\text{ha } a \in (0,1), \qquad \text{akkor } \lim_{x\to 0+} \log_a x = \infty \text{ és } \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty,$$
$$\text{ha } a \in (1,\infty), \qquad \text{akkor } \lim_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \text{ és } \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty.$$

Általános kitevőjű hatványfüggvény (id^b, $b \in \mathbb{R}$). Bármely $b \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\mathrm{id}^b(x) = x^b = \exp(b \ln x), \qquad x \in (0, \infty),$$

képlettel definiált $\mathrm{id}^b : (0, \infty)$ függvény folytonos a $(0, \infty)$-n. Ha $b \in (0, \infty)$, akkor szigorúan monoton növekedő, ha pedig $b \in (-\infty, 0)$, akkor szigorúan monoton csökkenő. További tulajdonságok:

$$x^{-b} = \frac{1}{x^b}, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } b \in \mathbb{R},$$
$$x^{b+c} = x^b x^c, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } b, c \in \mathbb{R},$$
$$(x^b)^c = x^{bc}, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } b, c \in \mathbb{R},$$

$$\text{ha } b \in (0, \infty), \qquad \text{akkor } \lim_{x\to 0+} x^b = 0 \text{ és } \lim_{x\to\infty} x^b = \infty.$$
$$\text{ha } b \in (-\infty, 0), \qquad \text{akkor } \lim_{x\to 0+} x^b = \infty \text{ és } \lim_{x\to\infty} x^b = 0.$$

A harmadik tulajdonság szerint ha $x \in (0, \infty)$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x.$$

Tehát

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \qquad \text{ha } x \in (0, \infty) \text{ és } n \in \mathbb{N}^+.$$

Trigonometrikus függvények (sin, cos, tg, ctg). Az x, y-sík 1 sugarú körvonalának minden P pontja azonosítható azzal a radiánban mért $x \in [0, 2\pi)$ szöggel, amelyet az OP szakasz ($O = (0,0)$) bezár az x-tengely pozitív irányával. A $[0, 2\pi)$-n úgy definiáljuk a sin és cos (*szinusz és koszinusz*) függvényeket, hogy az $x \in [0, 2\pi)$ szöggel azonosított P pont koordinátái: $P = (\cos x, \sin x)$. Ezután mindkét függvényt kiterjesztjük a $(-\infty, \infty)$-re a

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \qquad x \in [0, 2\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

képlettel. Ekkor $D(\sin) = D(\cos) = (-\infty, \infty)$, $R(\sin) = R(\cos) = [-1, 1]$. Mindkét függvény periodikus 2π periódussal és folytonos a $(-\infty, \infty)$-n. A sin függvény szigorúan monoton növekedő a $[-\pi/2, \pi/2]$-n és szigorúan monoton csökkenő a $[\pi/2, 3\pi/2]$-n. A cos függvény szigorúan monoton csökkenő a $[0, \pi]$-n és szigorúan monoton növekedő a $[\pi, 2\pi]$-n. További fontosabb tulajdonságok:

$$\sin 0 = 0, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\pi = 0,$$
$$\cos 0 = 1, \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cos\pi = -1,$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \qquad x \in \mathbb{R},$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

A tg (*tangens*) és ctg (*kotangens*) függvényeket a

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

illetve

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

képletekkel értelmezzük. Tehát

$$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, \qquad D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Megjegyezzük, hogy az angol nyelvű irodalomban a tan és cot jelölés használatos tg és ctg helyett. Mindkét függvény periodikus π periódussal, továbbá mindkét függvény folytonos az értelmezési tartományának részintervallumain. A tg függvény szigorúan monoton növekedő a $(-\pi/2, \pi/2)$ intervallumon, $\operatorname{tg} 0 = 0$, és

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

A ctg függvény szigorúan monoton csökkenő a $(0, \pi)$-n, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, és

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi-} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Arkuszfüggvények (arcsin, arccos, arctg, arcctg). Az arkusz szó latin eredetű, jelentése: ív. Az *arkuszszinusz-, arkuszkoszinusz-, arkusztangens-, és arkuszkotangens-függvényeket* a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned}
\arcsin &= \left(\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]} \right)_{-1} \\
\arccos &= \left(\cos|_{[0,\pi]} \right)_{-1} \\
\operatorname{arctg} &= \left(\operatorname{tg}|_{(-\pi/2, \pi/2)} \right)_{-1} \\
\operatorname{arcctg} &= \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)} \right)_{-1}
\end{aligned}$$

Az $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ páratlan, folytonos és szigorúan monoton növekedő a $[-$ $-1,1]$-n, továbbá

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \qquad \arcsin 0 = 0, \qquad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Az $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő a $[-1,1]$-n, továbbá

$$\arccos(-1) = \pi, \qquad \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \arccos 1 = 0.$$

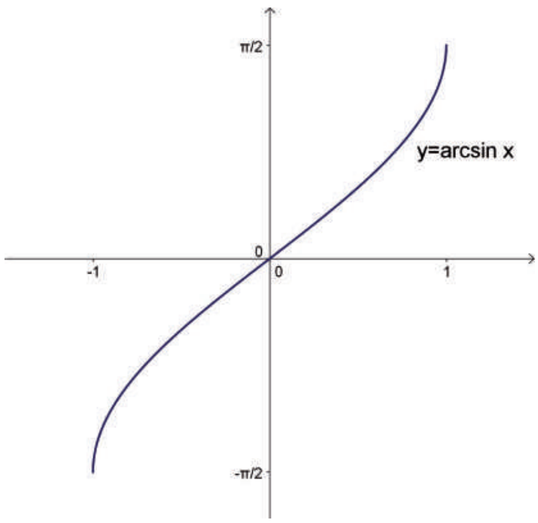
Az $\operatorname{arctg} : (-\infty, \infty) \to (-\pi/2, \pi/2)$ páratlan, folytonos és szigorúan monoton növekedő a $(-\infty, \infty)$-n, $\operatorname{arctg} 0 = 0$, valamint

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

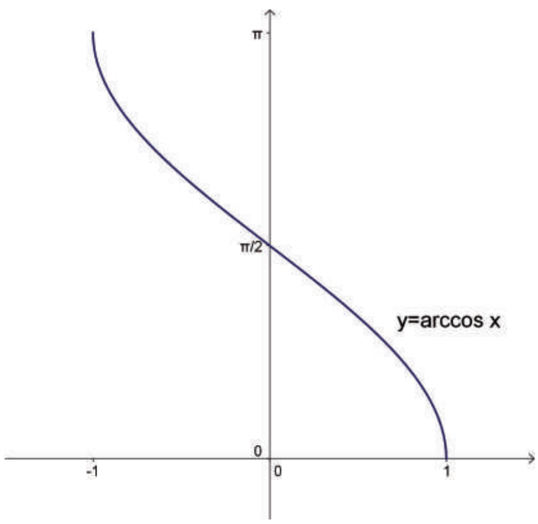
Az $\operatorname{arcctg} : (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$ folytonos és szigorúan monoton csökkenő a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, $\operatorname{arcctg} 0 = \pi/2$, továbbá

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{arcctg} x = 0.$$

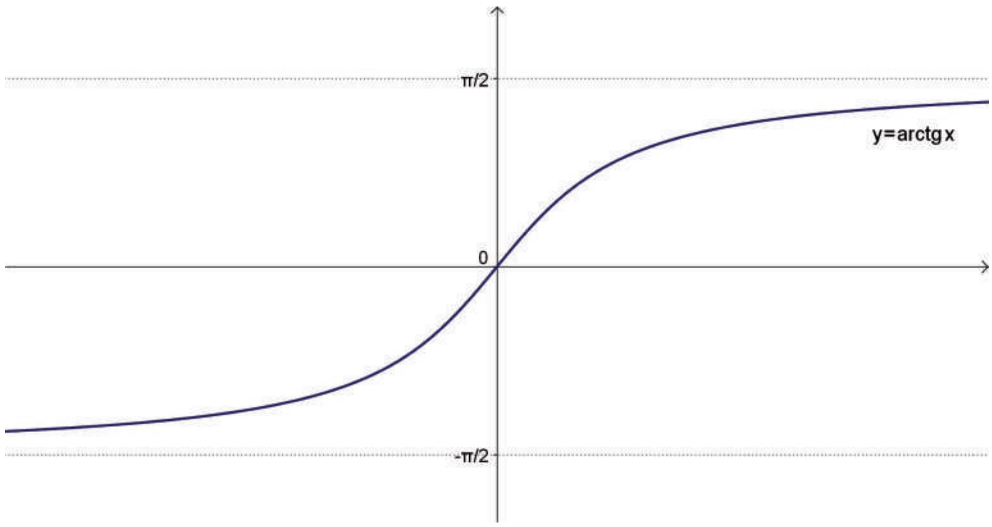
Az arkuszfüggvények grafikonjai:



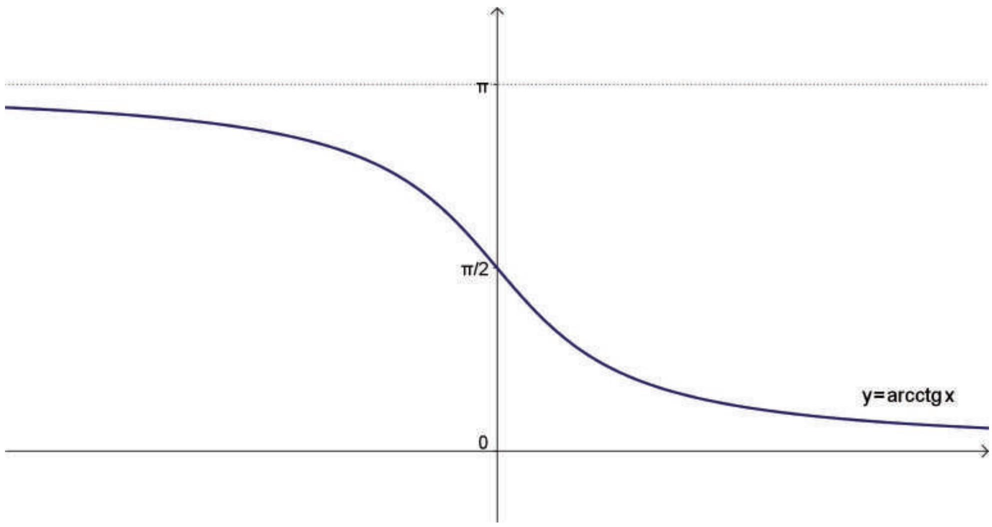
2.1. ábra.



2.2. ábra.



2.3. ábra.



2.4. ábra.

3. fejezet

Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása

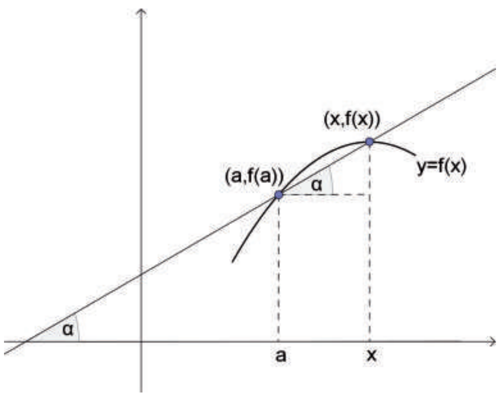
3.1. A differenciálhatóság fogalma

3.1.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ értelmezve az $a \in D(f)$ pont valamely környezetében, és legyen $x \in D(f) \setminus \{a\}$. Az

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

hányadost az f függvény a és x helyekhez tartozó *különbségi hányadosának* nevezzük.

Az a és x helyekhez tartozó különbségi hányados az f grafikonjának $(a, f(a))$ és $(x, f(x))$ pontjait összekötő egyenes (*szelő*) meredeksége (az ábrán látható α szög tangense).



3.1. ábra.

3.1.2. Definíció. Ha a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

határérték létezik és véges, akkor az f függvényt *differenciálhatónak* mondjuk az a helyen, a határértéket pedig az f függvény a pontbeli *differenciálhányadosának* nevezzük.

3.1.3. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *deriváltfüggvénye* röviden *deriváltja,* jele f' vagy $\frac{df}{dx}$, az a függvény, amelynek értelmezési tartománya $D(f)$ azon x pontjaiból áll, amelyekben f differenciálható, és minden ilyen x-hez az f függvény x pontbeli differenciálhányadosát rendeli hozzá.

Tehát

$$D(f') = \{a \in D(f) \mid f \text{ differenciálható az } a \text{ helyen}\}$$

és

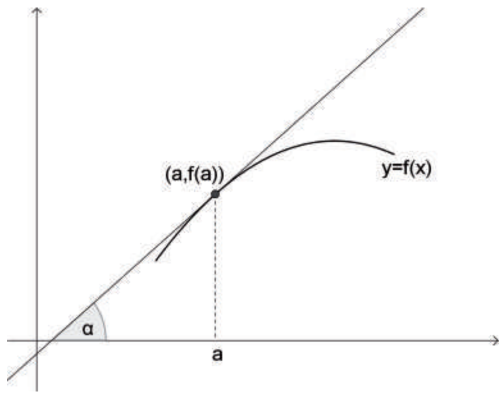
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad \text{ha } a \in D(f').$$

3.1.4. Definíció. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható az a helyen, akkor az

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

egyenest az f függvény a helyhez tartozó *érintőjének* nevezzük.

Tehát az $f'(a)$ differenciálhányados az f függvény a helyhez tartozó érintőjének a meredeksége (az ábrán látható α szög tangense).



3.2. ábra.

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény a pontbeli *jobb oldali* (*bal oldali*) *differenciálhányadosának* (*deriváltjának*) definícióját úgy kapjuk, hogy az a ponbeli differenciálhányados definíciójában szereplő határértéket jobb oldali (bal oldali) határértékkel helyettesítjük. Jele: $f'_+(a)$ ($f'_-(a)$). Tehát

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

és

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

feltéve, hogy a jobb oldali, illetve bal oldali határérték létezik és véges. A következő összefüggés nyilvánvaló.

3.1.5. Tétel. *$f'(a)$ éppen akkor létezik, ha $f'_+(a)$ és $f'_-(a)$ is létezik, és*

$$f'_+(a) = f'_-(a).$$

3.1.6. Példa. Az $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, függvény nem differenciálható 0-ban, mert

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

és

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x}{x} = -1.$$

A következő tétel a differenciálhatóság és folytonosság közötti kapcsolatról szól.

3.1.7. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható az a helyen, akkor itt folytonos is.*

A tétel megfordítása nem igaz, mert például az $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, függvény folytonos 0-ban, de itt nem differenciálható.

3.2. Differenciálási szabályok

A következő tételek a fontosabb differenciálási szabályokat írják le.

3.2.1. Tétel (Differenciálási szabályok)**.** *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható az a helyen, akkor ugyanilyen az $f \pm g$, $f \cdot g$, és a $g(a) \neq 0$ feltétel mellett az $\frac{f}{g}$ függvény is, mégpedig*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

3.2.2. Tétel (Az összetett függvény differenciálása)**.** *Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható az a helyen és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható a $g(a)$ helyen, akkor $f \circ g$ is differenciálható az a helyen, mégpedig*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

3.2.3. Tétel (Az inverz függvény differenciálása)**.** *Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton az a pont valamely környezetében, differenciálható az a helyen és $f'(a) \neq 0$, akkor f_{-1} is differenciálható a $b = f(a)$ helyen, mégpedig*

$$\left(f_{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f_{-1}(b))}.$$

3.3. Az elemi alapfüggvények deriváltjai

Az elemi alapfüggvények deriváltfüggvényeit táblázatban foglaltuk össze.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^b	bx^{b-1}
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

$$(c \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad a \in (0, \infty) \setminus \{1\})$$

A táblázat úgy értendő, hogy f differenciálható minden olyan x helyen, ahol f értelmezve van és az $f'(x)$ kifejezés értelmes.
Előfordul, hogy egy függvény az értelmezési tartományának feltüntetése nélkül, csak a képletével van megadva. Ilyenkor a függvény értelmezési tartományán minden olyan $x \in \mathbb{R}$ számnak a halmazát értjük, amelyekre a kifejezés értelmes. Kivételt csak a

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

alakú függvények képeznek, amelyek értelmezési tartományán a

$$D(h) = \{ x \in D(f) \cap D(g) \mid f(x) > 0 \}$$

halmazt értjük. Az ilyen esetekben a deriváltfüggvény jelölésére $f'(x)$ helyett a kényelmesebb $(f(x))'$ szimbólum használatos. Eszerint az $\ln(x-2)$ „függvény” értelmezési tartománya a $(2, \infty)$ intervallum, és itt

$$\big(\ln(x-2)\big)' = \frac{1}{x-2}.$$

3.3.1. Példa. Az x^x függvény értelmezési tartománya a $(0, \infty)$ intervallum, és itt

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left(1\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

3.4. Magasabb rendű deriváltak

3.4.1. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *első deriváltján* az f' deriváltfüggvényt értjük. Bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén f $(n+1)$*-edik deriváltjának* az n-edik derivált deriváltfüggvényét mondjuk. Az f n-edik deriváltját $f^{(n)}$-nel jelöljük. Ha $a \in D(f^{(n)})$, akkor f-et n*-szer differenciálhatónak* mondjuk az a helyen.

Magát f-et f *nulladik deriváltjának* is szokták nevezni, és $f^{(0)}$-val jelölik. Az n=2, 3 esetben inkább az

$$f^{(2)} = f'', \qquad f^{(3)} = f'''$$

jelölés használatos. Találkozhatunk az n-edik derivált

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

tört alakú jelölésével is.

3.5. Intervallumon való differenciálhatóság

3.5.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum a és b végpontokkal, ahol

$$-\infty \le a < b \le \infty.$$

Azt mondjuk, hogy az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható az I intervallumon*, ha f differenciálható minden $x \in (a, b)$ helyen, továbbá ha $a \in I$, akkor f a-ban jobbról differenciálható, ha pedig $b \in I$, akkor f b-ben balról differenciálható. Ekkor az

$$f'_I(x) = \begin{cases} = f'(x), & \text{ha } x \in (a, b) \\ = f'_+(a), & \text{ha } x = a \text{ és } a \in I \\ = f'_-(b), & \text{ha } x = b \text{ és } b \in I \end{cases}$$

képlettel definiált $f'_I : I \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény *I intervallumon vett deriváltfüggvényének* nevezzük.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő fogalomra is.

3.5.2. Definíció. Az f függvényt *folytonosan differenciálhatónak* nevezzük az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha f differenciálható I-n és az f'_I deriváltfüggvény folytonos I-n.

3.6. Középértéktételek

Ismertetjük a differenciálszámítás három fontos középértéktételét.

3.6.1. Tétel (Rolle tétele)**.** *Legyen* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Ha* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *folytonos* $[a,b]$*-n, differenciálható* (a,b)*-n és* $f(a)=f(b)$*, akkor létezik* $c\in(a,b)$ *úgy, hogy*

$$f'(c)=0.$$

A tétel feltételei mellett az f függvénynek van olyan érintője, amelyik párhuzamos az x-tengellyel.

3.6.2. Tétel (Lagrange tétele)**.** *Legyen* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Ha* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *folytonos* $[a,b]$*-n és differenciálható* (a,b)*-n, akkor létezik* $c\in(a,b)$ *úgy, hogy*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

A tétel feltételei mellett az f függvénynek van olyan érintője, amelyik párhuzamos az a és b helyekhez tartozó szelővel.
Az $f(b)=f(a)$ esetben Lagrange tétele Rolle tételébe megy át.

3.6.3. Tétel (Cauchy tétele)**.** *Legyen* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Ha* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *és* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *folytonosak* $[a,b]$*-n, differenciálhatók* (a,b)*-n és* g' *sehol sem tűnik el* (a,b)*-n, akkor létezik* $c\in(a,b)$ *úgy, hogy*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

A $g(x)=x$ esetben Cauchy tétele Lagrange tételébe megy át.

3.7. Monotonitási kritériumok

3.7.1. Definíció. Legyen $I\subset\mathbb{R}$ intervallum a és b végpontokkal, ahol

$$-\infty\le a<b\le\infty.$$

Az I *intervallum belsején* az (a,b) intervallumot értjük. Jele: $\operatorname{int} I$

A következő fontos tétel Lagrange tételének következménye.

3.7.2. Tétel (Monotonitási kritériumok)**.** *Legyen* $I\subset\mathbb{R}$ *intervallum. Ha az* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *függvény folytonos* I*-n, differenciálható* I *belsejében, és* $f'\ge 0$ $(f'\le 0)$ I *belsejében, akkor* f *az* I *intervallumon monoton növekedő (monoton csökkenő), ha pedig az* $f'\ge 0$ $(f'\le 0)$ *feltételt az* $f'>0$ $(f'<0)$ *feltételre cseréljük, akkor* f *szigorúan monoton növekedő (szigorúan monoton csökkenő)* I*-n.*

Az előző tétel speciális esete a következő:

3.7.3. Tétel. *Legyen* $I\subset\mathbb{R}$ *intervallum. Ha* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *folytonos* I*-n és* $f'=0$ I *belsejében, akkor* f *állandó.*

3.8. A L'Hospital-szabály

A Cauchy-féle középértéktétel segítségével lehet bizonyítani a következő állítást.

3.8.1. Tétel (L'Hospital-szabály)**.** *Legyen $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy vagy*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

vagy pedig

$$\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty.$$

Ha valamely $b \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b,$$

akkor

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$$

Hasonló állítások igazak jobb oldali és bal oldali határértékek esetén is.

3.8.2. Példa. A L'Hospital-szabály ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}.$$

3.8.3. Példa. A L'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+3x)^7}{\ln(2+5x)^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{7\ln(1+3x)}{4\ln(1+5x)} = \frac{7}{4} \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3}{1+3x}}{\dfrac{5}{2+5x}} = \frac{21}{20} \lim_{x\to\infty} \frac{2+5x}{1+3x} = \frac{7}{4}.$$

3.9. Abszolút és lokális szélsőértékek

3.9.1. Definíció. Legyen adva egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Az $a \in D(f)$ számot f *abszolút maximumhelyének (abszolút minimumhelyének)* mondjuk, ha minden $x \in D(f)$-re $f(x) \leq$ $\leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.
Az abszolút maximumhely és abszolút minimumhely közös neve *abszolút szélsőértékhely.* Az abszolút szélsőértékhely helyett a *globális szélsőértékhely* elnevezés is használatos.

3.9.2. Definíció. Az $a \in D(f)$ szám f *lokális maximumhelye (lokális minimumhelye)*, ha f definiálva van a valamely δ-sugarú környezetében ($\delta > 0$), továbbá minden $x \in (a-\delta, a) \cup$ $\cup (a, a+\delta)$ esetén $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$. Ha $\leq$ ($\geq$) egyenlőtlenséget $<$-re ($>$-ra) cseréljük, akkor a *szigorú lokális maximumhely (szigorú lokális minimumhely)* definícióját kapjuk. A (szigorú) lokális maximumhelyek és lokális minimuhelyek közös neve *(szigorú) lokális szélsőértékhely.*

A következő tételben lokális szélsőértékhely létezésének szükséges feltételét adjuk meg.

3.9.3. Tétel. *Ha a az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény lokális szélsőértékhelye és f differenciálható az a helyen, akkor $f'(a)=0$.*

3.9.4. Definíció. Azokat az a pontokat, amelyekre $f'(a)=0$ az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény *kritikus (stacionárius) pontjainak* nevezzük.

3.9.5. Példa. Könnyű ellenőrizni, hogy 0 az $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$, függvény kritikus pontja, ugyanakkor f szigorúan monoton növekedő a $(-\infty,\infty)$-n. Tehát egy kritikus pont általában nem lokális szélsőértékhely.

A monotonitási kritériumokból következik, hogy ha a az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény kritikus pontja, és az f' deriváltfüggvény előjelet vált az a pontban, akkor a f-nek lokális szélsőértékhelye. Weierstrass tételéből tudjuk, hogy bármely korlátos zárt intervallumon folytonos függvénynek van abszolút maximumhelye és abszolút minimumhelye. Ezeket a következőképpen határozhatjuk meg:

3.9.6. Tétel. *Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor legnagyobb (legkisebb) értékét vagy az intervallum valamelyik végpontjában, vagy pedig olyan $c\in(a,b)$ pontban veszi fel, ahol $f'(c)=0$ vagy $f'(c)$ nem létezik.*

3.9.7. Példa. Keressük meg az

$$f(x)=3x^4-20x^3+48x^2-48x+1,\qquad x\in[0,3],$$

függvény (abszolút) maximumát és minimumát. Mivel f folytonos és

$$f'(x)=12(x^3-5x^2+8x-4)=12(x-1)(x-2)^2,\qquad x\in(0,3),$$

ezért az előző tétel szerint f maximumhelye és minimuhelye az

$$x_1=0,\qquad x_2=1,\qquad x_3=2,\qquad x_4=3$$

pontok valamelyike. Összehasonlítva az

$$f(0)=1,\qquad f(1)=-16,\qquad f(2)=-15,\qquad f(3)=-8$$

függvényértékeket azt kapjuk, hogy a legnagyobb függvényérték 1, a legkisebb pedig -16.

3.10. Konvexség, konkávság

Emlékeztetőül: egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény $x_1,x_2\in D(f)$, $x_1<x_2$, helyekhez tartozó szelőjének meredeksége

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

a szelő egyenlete pedig

$$y=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1).$$

3.10.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$. Az f függvényt az I-n *konvexnek (konkávnak)* mondjuk, ha bármely $x_1, x, x_2 \in I$, $x_1 < x < x_2$, esetén

$$f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1), \qquad \left(f(x) \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)\right).$$

Ha $\leq$ ($\geq$) egyenlőtlenséget $<$-re ($>$-ra) cseréljük, akkor az I-n *szigorúan konvex (szigorúan konkáv)* függvény definícióját kapjuk.

Az f függvény akkor konvex (konkáv) az I intervallumon, ha bármely $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, esetén az x_1 és x_2 helyekhez tartozó szelő az (x_1, x_2) intervallumon f grafikonja fölött (alatt) fekszik.

3.10.2. Tétel (Konvexség és konkávság kritériuma)**.** *Ha f folytonos az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon és f' (szigorúan) monoton növekedő ((szigorúan) monoton csökkenő) I belsejében, akkor az f függvény I-n (szigorúan) konvex ((szigorúan) konkáv).*
Speciálisan, ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos az I-n és $f'' \geq 0$ ($f'' \leq 0$) I belsejében, akkor f I-n konvex (konkáv), ha pedig a $\geq$ ($\leq$) egyenlőtlenséget $>$-re ($<$-ra) cseréljük, akkor f I-n szigorúan konvex (szigorúan konkáv).

3.10.3. Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Az f függvény folytonos, továbbá

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $f'' < 0$ a $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ intervallumon és $f'' > 0$ a $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ intervallumokon, ezért a $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$-n f szigorúan konkáv, a $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$-n és az $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$-n pedig szigorúan konvex.

4. fejezet

Egyváltozós valós függvények integrálszámítása

4.1. Primitív függvény és határozatlan integrál

4.1.1. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum és f egy I-n definiált valós függvény. Az $F : I \to \mathbb{R}$ függvényt f *primitív függvényének* mondjuk az I intervallumon, ha F differenciálható I-n és itt $F_I' = f$.

Emlékeztetőül: F_I' az F függvény I-n vett deriváltját jelöli (lásd 3.5.1 Definíció).
A következő tulajdonság Lagrange tételének következménye.

4.1.2. Tétel. *Ha F az f függvény primitív függvénye az I intervallumon, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $F+c$ is primitív függvénye f-nek I-n, és f bármely primitív függvénye I-n $F+c$ alakú, ahol $c \in \mathbb{R}$.*

4.1.3. Definíció. Egy f valós függvény *határozatlan integrálján* az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon f I-n vett primitív függvényeinek halmazát értjük (ha nem üres). Jelölés: $\int f$ vagy $\int f(x)\,dx$. Az f függvényt *integrandusnak* nevezzük.

Ha F primitív függvénye f-nek I-n, akkor

$$\int f = \{\, F + c \mid c \in \mathbb{R} \,\} \qquad I\text{-n.}$$

Ezt a következő pontatlan, de rövidsége miatt kényelmes és ezért általánosan használt alakban szokás írni:

$$\int f = F + c, \qquad (\text{az } I \text{ intervallumon}),$$

vagy

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad (x \in I).$$

Mivel

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x, \qquad x \in (-\infty, \infty),$$

ezért

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

4.2. Alapintegrálok

A differenciálási szabályok megfordításával kapjuk a következő integrálokat.

$\int f(x)\,dx$	$F(x)+c$
$\int x^b\,dx$	$\frac{x^{b+1}}{b+1}+c$
$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\int e^x\,dx$	$e^x + c$
$\int a^x\,dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + c$
$\int \cos x\,dx$	$\sin x + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$-\operatorname{ctg} x + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\operatorname{arctg} x + c$

$$(b \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \quad a \in (0,\infty)\setminus\{1\})$$

A táblázatban szereplő integrálformulák érvényesek minden olyan nyílt intervallumon, ahol f és a jobb oldalon szereplő függvény értelmezve van.

4.3. Integrálás elemi átalakításokkal

4.3.1. Tétel (Linearitás)**.** *Ha f-nek és g-nek primitív függvénye az $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervallumon F, illetve G, továbbá $k \in \mathbb{R}$, akkor (kf)-nek primitív függvénye (a,b)-n kF, $(f+g)$-nek pedig*

$F+G$. Eszerint

$$\int (kf) = k\int f,$$
$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

Az első képletet úgy kell érteni, hogy az $\int (kf)$ függvényhalmaz elemei az $\int f$ függvényhalmaz elemeinek k-szorosai, a második képletet pedig úgy, hogy az $\int (f+g)$ függvényhalmaz elemei az $\int f$ és $\int g$ függvényhalmaz elemeinek összeadásával állnak elő. Hasonlóképpen értendők a további határozatlan integrálokkal kapcsolatos képletek is.

4.3.2. Tétel (Lineáris helyettesítés)**.** *Legyen f-nek az $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ intervallumon primitív függvénye F, továbbá $g(x)=ax+b$ lineáris függvény, $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, és (γ,δ) olyan intervallum, hogy $g((\gamma,\delta))\subset(\alpha,\beta)$. Ekkor az $f\circ g$ függvénynek (γ,δ)-n primitív függvénye $\frac{1}{a}(F\circ g)$, azaz*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c, \qquad x\in(\gamma,\delta).$$

4.3.3. Példa.

$$\int \sqrt{3x+5}\,dx = \int (3x+5)^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt{(3x+5)^3}+c,$$

ahol $x\in(-\frac{5}{3},\infty)$.

4.3.4. Példa.

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int 1\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+c = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c,$$

ahol $x\in(-\infty,\infty)$.

4.4. Parciális integrálás

A szorzat deriváltjából könnyen levezethető a következő tétel.

4.4.1. Tétel (Parciális integrálás)**.** *Legyen $(a,b)\subset\mathbb{R}$. Ha f és g differenciálhatók (a,b)-n és az fg' függvénynek van primitív függvénye (a,b)-n, akkor az $f'g$ függvénynek is van primitív függvénye (a,b)-n, és*

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx, \qquad x\in(a,b).$$

4.4.2. Példa.

$$\int (\cos x)x\,dx = \int (\sin x)'x\,dx = (\sin x)x - \int (\sin x)1\,dx = (\sin x)x+\cos x+c,$$

ahol $x\in(-\infty,\infty)$.

4.5. Integrálás helyettesítéssel

Az alábbi tétel az összetett függvény differenciálási szabályából következik.

4.5.1. Tétel (1. típusú helyettesítés)**.** *Legyen g differenciálható és nem állandó az $(a,b)\subset\mathbb{R}$ intervallumon. Ha F primitív függvénye f-nek a $g((a,b))$ intervallumon, akkor $F\circ g$ primitív függvénye f-nek (a,b)-n, azaz*

$$\int (f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))+c, \qquad x\in(a,b),$$

avagy

$$\int (f(g(x))g'(x)\,dx = \left[\int f(u)\,du\right]_{u=g(x)}.$$

Ez utóbbi képlethez formálisan úgy is eljuthatunk, hogy a bal oldali integrálban bevezetjük az $u=g(x)$ helyettesítést, majd a $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$ képletből a $g'(x)\,dx=du$ összefüggést származtatjuk, és így jutunk a jobb oldalon látható integrálhoz.

4.5.2. Példa. Az

$$\int (\sin^2 x)\cos x\,dx$$

integrálból az $u=\sin x$ helyettesítéssel, amikor $\dfrac{du}{dx}=\cos x$, s így $\cos x\,dx = du$, az

$$\left[\int u^2\,du\right]_{u=\sin x}$$

integrált kapjuk. Mivel

$$\int u^2\,du = \frac{u^3}{3}+c,$$

ezért

$$\int (\sin^2 x)\cos x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3}+c, \qquad x\in(-\infty,\infty).$$

4.5.3. Tétel (2. típusú helyettesítés)**.** *Tegyük fel, hogy g differenciálható az $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ intervallumon és g' sehol sem tűnik el (α,β)-n. Ha H primitív függvénye $(f\circ g)g'$-nek (α,β)-n, akkor $H\circ g_{-1}$ primitív függvénye f-nek a $g((\alpha,\beta))$ intervallumon, azaz*

$$\int f(x)\,dx = \left[\int (f(g(u)))g'(u)\,du\right]_{u=g_{-1}(x)}, \qquad x\in g((\alpha,\beta)).$$

A képlethez formálisan úgy juthatunk el, hogy a bal oldali integrálban elvégezzük az $x=g(u)$ helyettesítést, majd a $\dfrac{dx}{du}=g'(u)$ összefüggésből a $dx=g'(u)\,du$ kifejezést származtatjuk, végül megkapjuk a jobb oldali integrált. Ennek kiszámítása után u helyébe $g_{-1}(x)$-et kell írunk.

4.5.4. Példa. Az

$$\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$$

integrálból az $x=u^3+1$ helyettesítéssel a $\dfrac{dx}{du}=3u^2$ és $dx=3u^2du$ kifejezéseket használva az

$$\int (u^3+1)u\,3u^2\,du = 3\int (u^6+u^3)\,du$$

integrált kapjuk. Ezt már ki tudjuk számítani:

$$3\int (u^6+u^3)\,du = 3\left(\frac{u^7}{7}+\frac{u^4}{4}\right)+c = \frac{3}{7}u^7+\frac{3}{4}u^4+c.$$

Végül az $x=u^3+1$ összefüggésből nyert $u=\sqrt[3]{x-1}$ felhaszálásával kapjuk, hogy

$$\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx = \frac{3}{7}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^7+\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^4+c, \qquad x\in(-\infty,\infty).$$

4.6. A Riemann-integrál definíciója

Adott egy nemnegatív folytonos f az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon. Kiszámítandó annak a „görbevonalú" trapéznak a T területe, amelyet felülről az $y=f(x)$ görbe, oldalról az $x=a$ és $x=b$ egyenesek, alulról pedig az x-tengely határol. Az alábbiakban definiált fogalmak segítségével alsó és felső becslést adhatunk T-re. A konstrukció abban az általánosabb esetben is használható, amikor f csupán korlátos $[a,b]$-n.

4.6.1. Definíció. Az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallum *felosztásán* olyan véges $\{x_0,\dots,x_k\}$ sorozatot értünk, amelyre

$$a=x_0<x_1<\dots<x_k=b.$$

4.6.2. Definíció. Legyen adva egy korlátos f függvény az $[a,b]$ intervallumon és $\Phi=\{x_0,\dots,x_k\}$ legyen $[a,b]$ egy felosztása. A korlátosság miatt minden $i\in\{1,2,\dots,k\}$ esetén az

$$m_i=\inf f([x_{i-1},x_i]), \qquad M_i=\sup f([x_{i-1},x_i])$$

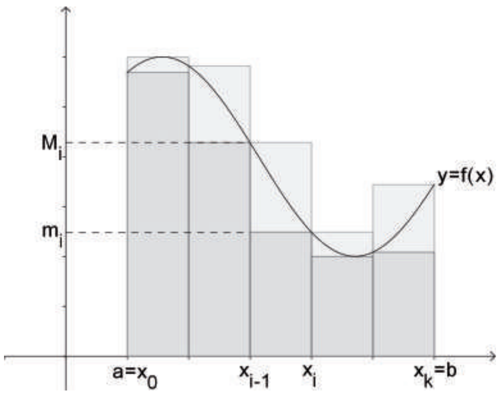
számok jól definiáltak. Az

$$s_\Phi=\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i-x_{i-1})$$

összeget az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *alsó összegének*, az

$$S_\Phi=\sum_{i=1}^{k} M_i(x_i-x_{i-1})$$

összeget az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *felső összegének* nevezzük (lásd a 4.1 ábra).



4.1. ábra.

Ha f korlátos $[a, b]$-n, akkor $[a, b]$ bármely Φ felosztására

$$\inf f([a, b]) \cdot (b-a) \le s_\Phi \le S_\Phi \le \sup f(([a, b]) \cdot (b-a).$$

4.6.3. Definíció. Bármely $[a, b]$-n korlátos f esetén legyen

$$I_A = \sup\{ s_\Phi \mid \Phi \text{ az } [a, b] \text{ felosztása} \},$$

és

$$I_F = \inf\{ S_\Phi \mid \Phi \text{ az } [a, b] \text{ felosztása} \}.$$

Az I_A számot az f függvény *(Darboux-féle) alsó integráljának*, az I_F számot pedig f *(Darboux-féle) felső integráljának* nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy ha f nemnegatív és folytonos $[a, b]$-n, akkor az $[a, b]$ bármely Φ felosztására

$$s_\Phi \le T \le S_\Phi,$$

és ezért

$$I_A \le T \le I_F$$

is teljesül, ahol T a kiszámítandó terület.

4.6.4. Definíció. Az f függvényt *integrálhatónak* mondjuk az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha f korlátos $[a, b]$-n és $I_A = I_F$. Ekkor az $I = I_A = I_F$ közös értéket az f függvény $[a, b]$-n vett *Riemann-féle határozott integráljának,* vagy röviden *Riemann-integráljának* nevezzük. Jele:

$$\int_a^b f \qquad \text{vagy} \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Szükségünk lesz a következő fogalomra.

4.6.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény *szakaszosan folytonos (szakaszosan monoton)* az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $[a, b]$-nek létezik $\{x_0, \dots, x_k\}$ felosztása ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$) úgy, hogy az (x_{i-1}, x_i), $i \in \{1, \dots, k\}$, részintervallumok mindegyikében f folytonos (monoton).

A következő tétel azt mutatja, hogy a függvények egy igen széles osztálya integrálható.

4.6.6. Tétel (Egzisztencia tétel)**.** *Ha f korlátos és szakaszosan folytonos vagy szakaszosan monoton az $[a, b]$ intervallumon, akkor f integrálható is $[a, b]$-n.*

Legyen f nemnegatív és folytonos $[a, b]$-n. Ekkor f integrálhatósága folytán $I_A = I_B = \int_a^b f$. Figyelembe véve, hogy $I_A \leq T \leq I_F$, azt kapjuk, hogy

$$T = \int_a^b f,$$

ahol T a szakasz elején említett síkidom területe.
A következő tétel azt mutatja, hogy az integrálhatóságot és az integrál értékét nem befolyásolja, ha az integrandust véges számú pontban megváltoztatjuk.

4.6.7. Tétel. *Legyenek f és g az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon definiált valós függvények. Ha f integrálható az $[a, b]$-n, és van $[a, b]$-nek olyan véges H részhalmaza, hogy $f = g$ az $[a, b] \setminus H$ halmazon, akkor g is integrálható $[a, b]$-n, és*

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

Ez a tétel motiválja az alábbi definíciót.

4.6.8. Definíció. A g függvényt az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon *tágabb értelemben integrálhatónak* mondjuk, ha van olyan az $[a, b]$-n integrálható f, amely g-vel $[a, b]$-n véges számú pont kivételével egyenlő. Ekkor definícióképpen

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

4.6.9. Példa. A

$$g(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad x \in (0, 1]$$

függvény ugyan nincs definiálva 0-ban, mégis tágabb értelemben integrálható a $[0, 1]$-en, mivel a

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

limeszreláció folytán korlátos, és ha a 0 helyen bárhogyan definiáljuk, akkor szintén korlátos és szakaszosan folytonos függvényt kapunk.

A továbbiakban az integrálhatóságot mindig tágabb értelemben fogjuk érteni.

4.7. A Riemann-integrál tulajdonságai

A következő tételekben összefoglaljuk a Riemann-integrál fontosabb tulajdonságait.

4.7.1. Tétel. *Ha f és g integrálható az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon és α, β állandók, akkor $\alpha f+\beta g$ is integrálható az $[a,b]$-n, és*

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g.$$

4.7.2. Tétel. *Ha f és g integrálható az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon és $f\le g$ az $[a,b]$-n, akkor*

$$\int_a^b f\le\int_a^b g.$$

4.7.3. Tétel. *Ha f integrálható az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon, akkor $|f|$ is integrálható az $[a,b]$-n, és*

$$\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b |f|.$$

4.7.4. Tétel. *Ha f integrálható az $[a,b]$ intervallumon és $c\in(a,b)$, akkor f integrálható $[a,c]$-n és $[c,b]$-n is, és*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

4.8. A Riemann-integrál kiszámítása

A Riemann-integrál kiszámítása szempontjából alapvető fontosságú a következő tétel.

4.8.1. Tétel (Newton-Leibniz-szabály). *Ha f integrálható az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon, F folytonos $[a,b]$-n, továbbá F primitív függvénye f-nek (a,b)-n, akkor*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

4.8.2. Definíció. Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallum. Az $F(b)-F(a)$ különbséget az $[F(x)]_a^b$ szimbólummal jelöljük, és az F függvény $[a,b]$ intervallumon vett *megváltozásának* nevezzük.

A Newton-Leiniz-szabályt a Lagrange-féle középértéktétel segítségével lehet igazolni.

4.8.3. Példa. A Newton-Leibniz-szabály szerint

$$\int_2^3 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3=\frac{3^3}{3}-\frac{2^3}{3}=\frac{27}{3}-\frac{8}{3}=\frac{19}{3}.$$

A parciális integrálás a következőképpen fogalmazható át határozott integrálra.

4.8.4. Tétel (Parciális integrálás)**.** *Ha f és g folytonosan differenciálható az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

4.8.5. Példa.

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \int_1^2 1\cdot\ln x\,dx = \int_1^2 (x)'\ln x\,dx = \left[\,x\ln x\,\right]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}\,dx$$
$$= 2\ln 2 - \int_1^2 1\,dx = 2\ln 2 - \left[\,x\,\right]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$$

Vezessük be a következő jelölést.

4.8.6. Definíció. Bármely $a\in D(f)$ esetén legyen

$$\int_a^a f = 0,$$

továbbá $b<a$ esetén

$$\int_a^b f = -\int_b^a f,$$

feltéve, hogy f integrálható a $[b,a]\subset\mathbb{R}$ intervallumon.

4.8.7. Tétel (Integrálás helyettesítéssel)**.** *Tegyük fel, hogy g nem állandó és folytonosan differenciálható az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon és f folytonos a $g([a,b])$ intervallumon. Ekkor*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(u))g'(u)\,du.$$

4.8.8. Példa. A $2-x=u$, avagy $x=g(u)=2-u$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx = -\int_{g(1)}^{g(2)} \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{2-u}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{2}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}\right)du = \left[4\sqrt{u} - \frac{2}{3}\sqrt{u^3}\right]_1^2 = 4(\sqrt{2}-1) - \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1).$$

4.9. Az integrálfüggvény

4.9.1. Definíció. Legyen $I\subset\mathbb{R}$ intervallum, és tegyük fel, hogy f integrálható I bármely zárt részintervallumán. Rögzített $c\in I$ esetén legyen

$$G(x) = \int_c^x f, \qquad \text{ha } x\in I.$$

A $G: I\to\mathbb{R}$ függvényt az f függvény c helyhez tartozó *integrálfüggvényének* nevezzük.

Ha f integrálható I minden zárt részintervallumán, akkor tetszőleges $c, d, x \in I$ esetén

$$\int_c^x f = \int_d^x f + \int_c^d f.$$

Ezért ha G az f függvény valamely $c \in I$ helyhez tartozó integrálfüggvénye, akkor f-nek bármely más helyhez tartozó integrálfüggvénye $G+k$ alakú, ahol k állandó.
A következő tételek az integrálfüggvény két fontos tulajdonságát írják le.

4.9.2. Tétel. *Ha G valamely $c \in I$ helyhez tartozó integrálfüggvénye f-nek az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor G folytonos I-n.*

4.9.3. Tétel. *Legyen G valamely $c \in I$ helyhez tartozó integrálfüggvénye f-nek az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, és $a \in I$. Ha a nem jobb oldali (bal oldali) végpontja I-nek, és itt f jobbról (balról) folytonos, akkor G jobbról (balról) differenciálható az a helyen, és*

$$G'_+(a) = f(a) \qquad (G'_-(a) = f(a)).$$

Az előző tétel egyik fontos következménye, hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye. Pontosabban:

4.9.4. Tétel. *Ha f folytonos az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor itt van primitív függvénye, és primitív függvényei egybeesnek integrálfüggvényeivel.*

4.10. Az improprius integrál

A Riemann-integrál két alapvető hátránya, hogy csak korlátos intervallumon és csak korlátos függvényekre definiált. Az integrálhatóság definíciójának egy lehetséges kiterjesztése nem korlátos függvényekre és nem korlátos intervallumokra a következő:

4.10.1. Definíció. Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, és tegyük fel, hogy f integrálható az (a, b) intervallum minden zárt részintervallumán. Azt mondjuk, hogy az f függvény *improprius integrálja (a, b)-n konvergens,* ha f valamely $c \in (a, b)$ helyhez tartozó

$$G(x) = \int_c^x f, \qquad \text{ha } x \in (a, b),$$

integrálfüggvényére a

$$\lim_{x \to a+} G(x) \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to b-} G(x)$$

határérték létezik és véges. Ekkor az

$$I = \lim_{x \to b-} G(x) - \lim_{x \to a+} G(x) = \lim_{x \to b-} \int_c^x f + \lim_{x \to a+} \int_x^c f$$

számot az f függvény (a, b)-n vett *improprius integráljának* mondjuk, és az

$$\int_a^b f, \qquad \text{illetőleg} \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

szimbólummal jelöljük. Ha f improprius integrálja (a, b)-n nem konvergens, akkor *divergensnek* mondjuk.

Az „improprius” latin eredetű szó jelentése „nem valódi”.
Az, hogy az improprius integrál értékét ugyanazzal az $\int_a^b f$ szimbólummal jelöljük, mint a Riemann-integrált nem okoz zavart, mert igaz a következő:

4.10.2. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, és f korlátos az $[a, b]$-n. Ekkor f-nek (a, b)-n pontosan akkor improprius integrálja az I szám, ha f (Riemann szerint) integrálható $[a, b]$-n, és integrálja I.*

Ha $a \in \mathbb{R}$ és f korlátos a-nak egy jobb oldali vagy bal oldali környezetében, akkor az improprius integrált egyszerűbben is jellemezhetjük.

4.10.3. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$), $a < b$. Tegyük fel, hogy f korlátos a-nak egy jobb oldali (b-nek egy bal oldali) környezetében, továbbá f integrálható (a, b) minden zárt részintervallumán. Az f függvény (a, b)-n vett improprius integrálja pontosan akkor konvergens, ha a*

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f \qquad \left(\lim_{x\to a+} \int_x^b f\right)$$

határérték létezik és véges, konvergencia esetén pedig

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f \qquad \left(\int_a^b f = \lim_{x\to a+} \int_x^b f\right).$$

A Newton-Leibniz-szabály módosítható improprius integrálok kiszámítására is.

4.10.4. Tétel. *Legyen $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$, f integrálható (a, b) minden zárt részintervallumán, és tegyük fel, hogy F primitív függvénye f-nek (a, b)-n. Ekkor f improprius integrálja (a, b)-n pontosan akkor konvergens, ha létezik és véges a*

$$\lim_{x\to a+} F(x) \qquad \text{\textit{és}} \qquad \lim_{x\to b-} F(x)$$

határérték, konvergencia esetén pedig

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

4.10.5. Definíció. A függvénymegváltozáshoz hasonlóan a

$$\lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x)$$

különbséget (amennyiben a bal és jobb oldali határérték létezik és véges) az

$$[\,F(x)\,]_{a+}^{b-}$$

szimbólummal jelöljük.

4.10.6. Példa. Az előző tétel szerint

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = [\,2\sqrt{x}\,]_{0+}^{1-} = \lim_{x\to 1-} 2\sqrt{x} - \lim_{x\to 0+} 2\sqrt{x} = 2.$$

Megjegyezzük, hogy ez az integrál a Riemann-féle értelemben nem létezik, mert

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

folytán az integrandus nem korlátos.

4.10.7. Példa.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi.$$

Az improprius integrál konvergenciájának gyakran jól használható elegendő feltétele a következő:

4.10.8. Tétel. *Legyen a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Ha f és g integrálható (a, b) minden zárt részintervallumán, továbbá az (a, b)-n $|f| \le g$, és az*

$$\int_a^b g$$

improprius integrál konvergens, akkor az

$$\int_a^b f$$

improprius integrál is konvergens.

4.10.9. Példa. Az

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

improprius integrál konvergens, mert

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}, \qquad \text{ha } x \in (1, \infty),$$

és az

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) + 1 = 1$$

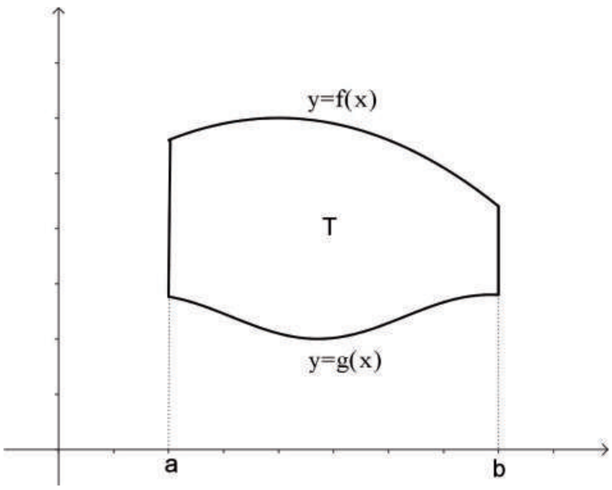
improprius integrál konvergens.

4.11. Az integrálszámítás néhány alkalmazása

A Riemann-integrál jól használható síkidomok területének és forgástestek térfogatának kiszámítására. (A terület és térfogat fogalmának részletesebb tárgyalásához később vissza fogunk térni.)

4.11.1. Tétel (Területszámítás)**.** *Legyen $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f és g olyan folytonos függvények $[a,b]$-n, amelyekre $g\le f$ az $[a,b]$-n. Annak a síkidomnak a területe, amelyet felülről f grafikonja, alulról g grafikonja, oldalról pedig az x=a és x=b egyenesek határolnak (lásd a következő ábra):*

$$T=\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx.$$



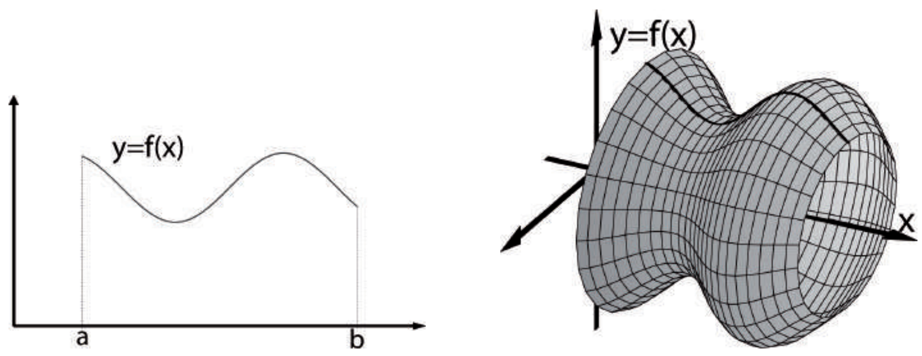
4.2. ábra.

4.11.2. Példa. Annak a síkidomnak a T területe, amelyet felülről az $f(x)=\sqrt{x}$, alulról pedig az $g(x)=x^2$ függvény grafikonja határol (a $[0,1]$ intervallumon):

$$T=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\;=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

4.11.3. Tétel (Forgástest térfogata)**.** *Ha f nemnegatív folytonos függvény az $[a,b]\subset\mathbb{R}$ intervallumon, akkor annak a testnek a térfogata, amely f grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkezik (lásd a következő ábra):*

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$



4.3. ábra.

4.11.4. Példa. Annak a testnek a térfogata, amely az $f(x) = 1+e^x$, $x \in [0,2]$, függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával keletkezik:

$$V = \pi \int_0^2 (1+e^x)^2\, dx = \pi \int_0^2 (1+2e^x+e^{2x})\, dx$$
$$= \pi \left[x+2e^x+\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^2 = 2\pi e^2 + \frac{\pi(e^4-1)}{2}.$$

A Riemann-integrál segítségével függvénygrafikon ívhosszát is kiszámíthatjuk. Az ívhossz definíciója a következő:

4.11.5. Definíció. Legyen adva egy f függvény az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon. Ha $\Phi = \{x_0, \ldots, x_k\}$ $[a,b]$ felosztása, akkor az f grafikonjának $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ és $(x_i, f(x_i))$ pontpárjait ($i \in \{1, \ldots, k\}$) összekötő szakaszok egy *törött vonalat (poligont)* alkotnak, amelynek hossza:

$$\ell_\Phi = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Ha

$$\ell = \sup\{\, \ell_\Phi \mid \Phi \text{ az } [a,b] \text{ felosztása} \,\} < \infty,$$

akkor f grafikonját *rektifikálhatónak* mondjuk, és az ℓ számot a grafikon *ívhosszának* nevezzük.

4.11.6. Tétel (Függvénygrafikon ívhossza)**.** *Ha f folytonosan differenciálható az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor f grafikonja rektifikálható, és ívhossza:*

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\, dx.$$

4.11.7. Példa. Az $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3}$ függvény deriváltja a $[0,1]$ intervallumon:

$$f'(x) = \sqrt{1+x}, \qquad x \in [0,1].$$

Ezért f grafikonjának ívhossza:

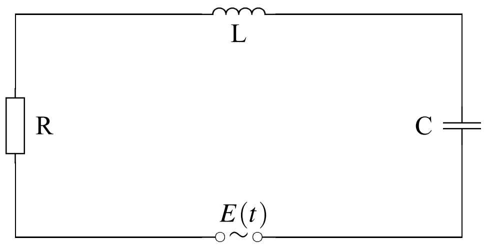
$$\ell = \int_0^1 \sqrt{2+x}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(\sqrt{27}-\sqrt{8}).$$

5. fejezet

Egy villamosságtani probléma

5.1. Soros RLC áramkör

Ha egy váltakozóáramú áramforráshoz sorosan egy R ohmos ellenállást, egy L induktivitású tekercset és egy C kapacitású kondenzátort kapcsolunk, akkor az ún. soros RLC áramkört kapjuk [1]:



5.1. ábra.

Tegyük fel, hogy R, L, C konstans értékek. Jelölje a t időpontban $E(t)$ az áramforrás által az áramkörbe juttatott „külső” feszültséget, $I(t)$ az áramkörben folyó áramerősséget, $Q(t)$ a kondenzátor töltését. Ekkor a tekercs két vége között $L\frac{dI}{dt}$ önindukciós feszültség, a kondenzátoron pedig Q/C feszültség lép fel, ezért Kirchoff második törvénye alapján

$$E = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI.$$

Figyelembe véve az $I = \frac{dQ}{dt} = Q'$ összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t).$$

Ehhez a *másodrendű differenciálegyenlethez* tartozó kezdeti értékek:

$$Q(0) = Q_0, \qquad Q'(0) = I(0) = I_0.$$

Ezt a problémát a következő részben bevezetett Laplace transzformált segítségével fogjuk vizsgálni.

5.2. Valós változójú komplex függvények

Bármely (x, y), $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esetén legyen

$$(x, y)+(u, v) = (x+u, y+v),$$
$$(x, y)\cdot(u, v) = (xu - yv, xv+yu).$$

Az $\mathbb{R}^2$ halmazt a fenti képletekkel definiált összeadás és szorzás műveletével *komplex számtestnek* nevezzük, és $\mathbb{C}$-vel jelöljük. Az $i=(0,1)$ komplex szám a *képzetes egység*. Ha az $(x,0)$ alakú komplex számokat azonosítjuk az x valós számmal, akkor $i^2 = -1$, továbbá bármely $z = (x, y)$ komplex szám felírható a $z = x+iy$ *algebrai alakban*, ahol $x = \operatorname{Re} z$ a z szám *valós része,* $y = \operatorname{Im} z$ pedig z *képzetes része*. A $z = x+iy$ szám *abszolút értéke (modulusa)*

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2},$$

és *konjugáltja*

$$\bar{z} = x - iy.$$

Bármely $0 \neq z = x+iy$ komplex szám a

$$z = r[\cos\varphi + i \sin\varphi]$$

trigonometrikus alakban is írható, ahol $r = |z|$, $\varphi \in \mathbb{R}$ (z *argumentuma*) pedig olyan, hogy $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ és $\sin\varphi = \frac{y}{r}$. Ha

$$z_1 = r_1[\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1] \qquad \text{és} \qquad z_2 = r_2[\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2]$$

két 0-tól különböző trigonometrikus alakban felírt komplex szám, akkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i \sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Az első összefüggésből kapjuk, hogy ha $z = r[\cos\varphi + i \sin\varphi]$ és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$z^n = r^n[\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)].$$

Ez *Moivre tétele.*
Valós változójú komplex függvények, azaz $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ típusú függvények véges határértékének, folytonosságának, differenciálhatóságának és integrálhatóságának a definícióját vissza lehet vezetni a korábban már tárgyalt $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények megfelelő definíciójára. Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, akkor $t \in D(f)$ esetén

$$f(t) = \operatorname{Re} f(t) + i \operatorname{Im} f(t).$$

A

$$(\operatorname{Re} f)(t) = \operatorname{Re} f(t), \qquad (\operatorname{Im} f)(t) = \operatorname{Im} f(t), \qquad t \in D(f),$$

képlettel definiált $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvény neve f *valós része*, illetve f *képzetes része*.
A $c \in \mathbb{C}$ szám f határértéke az $a \in \mathbb{R}$ helyen, jelben $\lim_{t\to a} f(t) = c$, ha

$$\lim_{t\to a}(\operatorname{Re} f)(t) = \operatorname{Re} c, \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to a}(\operatorname{Im} f)(t) = \operatorname{Im} c.$$

Tehát

$$\lim_{t\to a} f(t) = \lim_{t\to a}(\operatorname{Re} f)(t) + i \lim_{t\to a}(\operatorname{Im} f)(t),$$

feltéve, hogy a jobb oldalon szereplő határértékek léteznek és végesek.
Az f függvény éppen akkor folytonos az $a \in D(f)$ helyen vagy az $I \subset D(f)$ intervallumon, ha ugyanilyenek a $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvények.
Az f függvény differenciálhányadosa az $a \in D(f)$ helyen

$$f'(a) = (\operatorname{Re} f)'(a) + i(\operatorname{Im} f)'(a),$$

feltéve, hogy a jobb oldalon szereplő differenciálhányadosok léteznek.
Az f függvény éppen akkor integrálható az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha ugyanilyenek a $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvények, és integrálhatóság esetén

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f.$$

Ha $(a, b) \subset \mathbb{R}$, akkor f (a, b)-n vett improprius integrálja éppen akkor konvergens, ha konvergensek $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ (a, b)-n vett improprius integráljai, és konvergencia esetén

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f.$$

A fentiekből adódik, hogy a határértékszámítás, differenciálszámítás és integrálszámítás szabályainak nagy része átvihető valós változójú komplex függvényekre is.
A továbbiakban szükségünk lesz az exponenciális függvény kiterjesztésére komplex számokra. A kiterjesztés egyik lehetséges módja: bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén legyen

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z}[\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z)].$$

Ez az ún. *Euler-formula.*

5.3. A Laplace transzformált fogalma

5.3.1. Definíció. Legyen adva egy $[0, \infty)$-en definiált valós vagy komplex f függvény, és tegyük fel, hogy f integrálható (tágabb értelemben) a $[0, \infty)$ bármely korlátos zárt részintervallumán. Azt mondjuk, hogy az $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ függvény *Laplace transzformáltja létezik* az $s \in \mathbb{C}$ helyen, ha az

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

improprius integrál konvergens. Azt az $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt pedig, amelyet az

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

képlet definiál minden olyan $s \in \mathbb{C}$-re, amelyre az improprius integrál konvergens, az f függvény *Laplace transzformáltjának* nevezzük, és $F = \mathcal{L}\{f\}$-fel jelöljük. Az f függvény az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált *generátorfüggvénye.*

Használatos az $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ jelölés is, amely főleg akkor kényelmes, ha a generátorfüggvény nincs elnevezve, csak a képletét ismerjük.
Az $\mathcal{L}\{f\}$ függvény (ha létezik) komplex változójú komplex értékű függvény.

5.3.2. Definíció. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy a $[0, \infty)$-n definiált f függvény λ-exponenciálisan korlátos, ha létezik $M \geq 0$ úgy, hogy minden $t \geq 0$ esetén

$$|f(t)| \leq M e^{\lambda t}.$$

Legyen Λ azoknak a $[0, \infty)$-n definiált valós vagy komplex értékű függvényeknek a halmaza, amelyek integrálhatók $[0, \infty)$ minden zárt részintervallumán és valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén λ-exponenciálisan korlátosak.

Meg lehet mutatni, hogy a Λ-hoz tartozó függvények Laplace transzformáltja jól definiált. Pontosabban:

5.3.3. Tétel (Egzisztencia tétel)**.** *Ha $f \in \Lambda$ és $\operatorname{Re} s$ elegendően nagy, akkor az $\mathcal{L}\{f\}(s)$ Laplace-transzformált létezik.*

5.3.4. Tétel (Unicitás tétel)**.** *Legyen $f, g \in \Lambda$, és tegyük fel, hogy*

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \qquad \text{ha } \operatorname{Re} s \text{ elég nagy.}$$

Ha f és g folytonosak a $[0, \infty)$-n, akkor $f(t) = g(t)$ minden $t \geq 0$ esetén.

5.4. A Laplace transzformált tulajdonságai

A következő tételek a Laplace-transzformált fontosabb tulajdonságait foglalják össze.

5.4.1. Tétel (Linearitás)**.** *Ha $f, g \in \Lambda$ és $a, b \in \mathbb{C}$, akkor $af + bg \in \Lambda$, és*

$$\mathcal{L}\{af + bg\}(s) = a\mathcal{L}\{f\}(s) + b\mathcal{L}\{g\}(s), \qquad \text{ha } \operatorname{Re} s \text{ elég nagy.}$$

5.4.2. Tétel (Deriváltak transzformáltjai)**.** *Ha $f, f' \in \Lambda$, akkor*

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0+), \qquad \text{ha } \operatorname{Re} s \text{ elegendően nagy,}$$

ahol

$$f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t).$$

Általánosabban, ha valamely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $f, f' \ldots, f^{(n)} \in \Lambda$, akkor

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+),$$

ha $\operatorname{Re} s$ elég nagy.

Vezessük be a következő fogalmat.

5.4.3. Definíció. Legyenek f és g a $[0, \infty)$-n definiált komplex függvények. Tegyük fel, hogy f és g integrálható a $[0, \infty)$ bármely zárt részintervallumán. Bármely $t \in [0, \infty)$ esetén legyen

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du.$$

Az $f * g$ függvényt f és g *konvolúciójának* nevezzük.

5.4.4. Tétel (Konvolúciós tétel)**.** *Ha $f, g \in \Lambda$, akkor $f * g \in \Lambda$, és*

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g\}(s), \qquad \textit{ha } \operatorname{Re} s \textit{ elegendően nagy.}$$

5.4.5. Tétel (Csillapítási tétel)**.** *Legyen $f \in \Lambda$ és $z \in \mathbb{C}$. Ekkor a*

$$g(t) = e^{-zt} f(t), \qquad t \in [0, \infty),$$

függvény is a Λ osztályba tartozik, és az $\mathcal{L}\{f\} = F$ jelöléssel

$$\mathcal{L}\{e^{-zt} f(t)\}(s) = F(s+z), \qquad \textit{ha } \operatorname{Re} s \textit{ elég nagy.}$$

A következő táblázat a Λ osztályba tartozó néhány elemi függvény Laplace transzformáltját tartalmazza.

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
$t \cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$

($n \in \mathbb{N}$, a és $b \in \mathbb{R}$)

A Laplace tanszformált differenciálegyenletekre történő alkalmazását teszi lehetővé a következő tétel.

5.4.6. Tétel. *Legyen* $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *és* $g \in \Lambda$. *Tegyük fel, hogy* x *a* $[0, \infty)$*-en* n*-szer differenciálható valós függvény, továbbá*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = g(t), \qquad \text{ha } t > 0.$$

Ekkor $x, x', \ldots, x^{(n)} \in \Lambda$.

5.5. A soros RLC áramkör vizsgálata

Most térjünk vissza a bevezetőben tárgyalt soros RLC áramkör kapcsán felmerült

$$\begin{aligned} &LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \\ &Q(0) = Q_0, \qquad Q'(0) = I(0) = I_0 \end{aligned}$$

kezdetiérték-feladat vizsgálatához.
Az első egyenlet mindkét oldalának Laplace transzformáltját véve kapjuk

$$Ls^2\mathcal{L}\{Q\}(s) - LsQ(0) - LQ'(0) + Rs\mathcal{L}\{Q\}(s) - RQ(0) + \frac{1}{C}\mathcal{L}\{Q\}(s) = \mathcal{L}\{E\}(s).$$

Innen

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Phi(s) + \Psi(s),$$

ahol

$$\Phi(s) = \frac{(Ls+R)Q_0 + LI_0}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}, \qquad \Psi(s) = \frac{\mathcal{L}\{E\}(s)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}.$$

Vegyük észre, hogy ha ϕ az

$$Ly''(t) + Ry'(t) + \frac{1}{C}y(t) = 0, \qquad y(0) = Q_0, \quad y'(0) = I_0$$

feladat megoldása, ψ pedig az

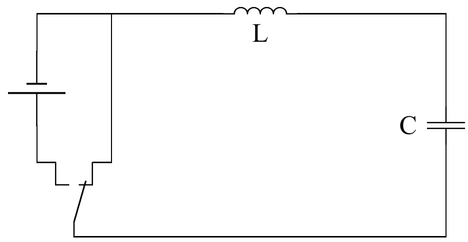
$$Ly''(t) + Ry'(t) + \frac{1}{C}y(t) = E(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

feladat megoldása, akkor

$$\mathcal{L}\{\phi(t)\}(s) = \Phi(s) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{L}\{\psi(t)\}(s) = \Psi(s),$$

azaz $Q = \phi + \psi$.

Most tekintsük a kezdetiérték-feladat 4 speciális esetét.



5.2. ábra.

1. eset: Tegyük fel, hogy áramkörben levő elemek ellenállása 0 (ún. LC kör), azaz $R = 0$, és nincs külső feszültség a rendszeren ($E(t) = 0$), azaz feltöltjük egy teleppel a kondenzátort, majd a telepet lekapcsoljuk az áramkörről:
Ekkor a differenciálegyenlet alakja:

$$L Q''(t) + \frac{1}{C} Q(t) = 0.$$

Amint azt már beláttuk,

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Phi(s) = \frac{L(sQ_0 + I_0)}{Ls^2 + \frac{1}{C}}.$$

Vezessük be az

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

jelölést. Ekkor

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = Q_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{I_0}{\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2},$$

és ezért

$$Q(t) = \phi(t) = Q_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Tehát a rendszer egy ω_0 frekvenciájú szabadrezgést végez. (Az ω_0 számot a rendszer *saját-frekvenciájának* nevezzük.)

2. eset: Tegyük fel, hogy $R = 0$, $Q_0 = 0$, $I_0 = 0$, és $E(t) = E_0 \cos \omega t$ külső feszültség hat a rendszerre, ahol $\omega \neq \omega_0$, $E_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\mathcal{L}\{Q\}(s) = \Psi(s) = \frac{E_0}{L\omega_0} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

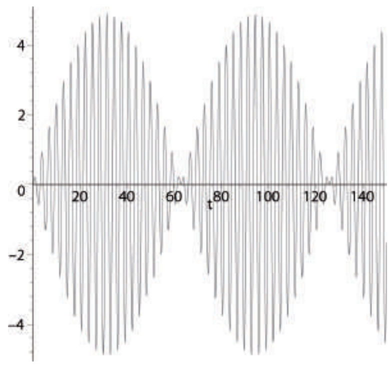
és ezért a konvolúciós és unicitás tétel szerint

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \psi(t) \\
&= \frac{E_0}{L\omega_0}\int_0^t \sin(\omega_0(t-u))\cos\omega u\,du \\
&= \frac{E_0}{2L\omega_0}\int_0^t \Big(\sin(\omega_0(t-u)+\omega u)+\sin(\omega_0(t-u)-\omega u)\Big)du \\
&= \frac{E_0}{2L\omega_0}\left(\frac{\cos\omega t-\cos\omega_0 t}{\omega_0-\omega}+\frac{\cos\omega t-\cos\omega_0 t}{\omega_0+\omega}\right) \\
&= \frac{E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_0 t) \\
&= \frac{2E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}.
\end{aligned}$$

Ha $|\omega_0-\omega|$ kicsi, akkor $\omega_0+\omega>|\omega_0-\omega|$, és így a megoldás utóbbi képletét úgy is tekinthetjük, hogy az egy gyorsan oszcilláló függvény, $\sin\frac{(\omega_0+\omega)t}{2}$, amelynek az amplitúdója,

$$\frac{2E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}\sin\frac{(\omega_0-\omega)t}{2}$$

lassan oszcillál. Ezt a jelenséget *lebegésnek* hívják, amely tehát akkor figyelhető meg, ha a külső erő frekvenciája közel megegyezik a rendszer sajátfrekvenciájával. Egy ilyen megoldás grafikonja látható a következő ábrán:



$L=2$, $C=1/8$, $E_0=1$, $\omega_0=2$, $\omega=2.1$.

5.3. ábra.

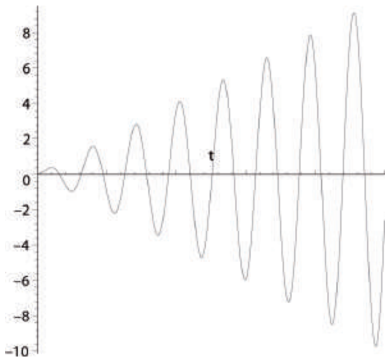
3. eset: Tegyük fel, hogy $R=0$, $Q_0=0$, $I_0=0$, és $E(t)=E_0\cos\omega_0 t$, azaz a rendszer sajátfrekvenciájával megegyező frekvenciájú külső erő hat a rezgőkörre. Ekkor

$$\mathcal{L}\{Q\}(s)=\Psi(s)=\frac{E_0}{L\omega_0}\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\frac{s}{s^2+\omega_0^2},$$

és ezért a konvolúciós tétel szerint

$$\begin{aligned} Q(t) &= \psi(t) \\ &= \frac{E_0}{L\omega_0}\int_0^t \sin(\omega_0(t-u))\cos\omega_0 u\,du \\ &= \frac{E_0}{2L\omega_0}\int_0^t \Big(\sin(\omega_0(t-u)+\omega_0 u)+\sin(\omega_0(t-u)-\omega_0 u)\Big)du \\ &= \frac{E_0}{2L\omega_0} t\sin\omega_0 t. \end{aligned}$$

Egy olyan oszcilláló megoldást kaptunk, amelynek amplitúdója tart végtelenbe, ha $t \to \infty$. Ezt a jelenséget *rezonanciának* hívják.



$L = 1$, $C = 1/25$, $E_0 = 1$, $\omega_0 = 5$.

5.4. ábra.

4. eset: Tegyük fel, hogy $R = 0$, $Q_0 \in \mathbb{R}$, $I_0 \in \mathbb{R}$, és $E(t) = E_0 \cos\omega t$ külső feszültség hat a rendszerre, ahol $\omega \neq \omega_0$, $E_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor a megoldás az 1. és 2. esetben kiszámított két függvény összege lesz:

$$Q(t) = Q_0\cos\omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{E_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos\omega_0 t).$$

Irodalomjegyzék

[1] Borrelli, R. L.–Coleman, C. S.: *Differential Equations. A Modeling Perspective.* John Wiley & Sons, New York, 1996

[2] Császár Ákos: *Valós analízis I.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

[3] Hatvani László: *Kalkulus közgazdászoknak.* Polygon, Szeged, 2006

[4] Koltay László és Szalkai István: *Analízis I. feladatgyűjtemény.* Pannon Egyetemi Kiadó, 2009

[5] Laczkovich Miklós–T. Sós Vera: *Analízis I.* Nemzeti Tankönykiadó, Budapest, 2005