

BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A csaknem 40 éve indult, igen sikeres Bolyai-könyvek példatárak sorozat újjászületését éli. Közülük elsőként az Integrálszámítást adjuk ki. A sorozat könyveiben a szerzők a középiskolai tanulóknak, továbbá főiskolai és egyetemi hallgatóknak adnak szerencsésen választott, bőséges példát, kidolgozott feladatokat. Kíváncsi, hogy a feladatokat mindenki igyekezzék előbb önállóan megoldani, és csak utána hasonlítsa össze az eredményt és a megoldás menetét a könyvben található megoldásokkal. A sorozat három témakört ölel fel: a matematikát, a fizikát és a kémiát. E könyvben a szerző a határozott és határozatlan integrálokkal, az integrálási módszerekkel és gyakorlati alkalmazásokkal (pl. terület, ívhosszszámítás, forgástestek térfogatszámítása stb.) foglalkozik. Ajánljuk a könyvet elsősorban egyetemi és főiskolai hallgatóknak és azoknak a középiskolás diákoknak, akik a reáltudományok terén kíváncsiak folytatni tanulmányaikat.

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

BOLYAI-KÖNYVEK



BÁRCZY BARNABÁS

INTEGRÁL- SZÁMÍTÁS

$$\int \frac{dx}{ch^2 x} =$$
$$= \frac{th x + C}{\quad}$$

BÁRCZY BARNABÁS

INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

PÉLDATÁR

6. kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1992

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

© Bárczy Barnabás, 1969, 1992

ETO: 517.3

ISBN 963 10 3752 5 (első kiadás)

ISBN 963 10 9731 5

I. Alapfogalmak	7
1. A határozatlan integrál fogalma és főbb tulajdonságai	7
2. Alapintegrálok	9
II. Integrálási módszerek	21
1. Bevezetés	21
2. $f(ax+b)$ alakú integrandus	21
3. $f''(x)f'(x)$ alakú integrandus	23
4. $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandus	25
5. Integrálás helyettesítéssel	27
6. Parciális integrálás	44
III. Racionális törtfüggvények integrálása	59
1. Egyszerűbb speciális típusok	59
2. Parciális törtekre bontás módszere	73
IV. Trigonometrikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása	101
1. Egyszerűbb speciális típusok	101
2. Trigonometrikus függvények általános alakú racionális kifejezéseinek integrálása	106
V. Exponenciális és hiperbolikus függvények racionális kifejezéseinek integrálása	119
1. Egyszerűbb speciális típusok	119
2. Exponenciális függvények általános alakú racionális kifejezéseinek integrálása	125
VI. Néhány további speciális alakú kifejezés integrálása	131
1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ alakú integrandus	131

2. $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ alakú integrandus	135
3. $R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ alakú integrandus	144
4. $R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ alakú integrandus	147
5. $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ alakú integrandus	152
6. $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ alakú integrandus	156
7. $\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ alakú integrandus	164

HATÁROZOTT INTEGRÁL

VII. Alapfogalmak	167
1. A határozott integrál fogalma és főbb tulajdonságai	167
2. Egyszerű feladatok	169
VIII. Határozott integrál kiszámítása parciális integrálással és helyettesítéssel	177
1. Parciális integrálás	177
2. Integrálás helyettesítéssel	186
IX. Improprius integrál	194
1. Végtelen integrálási intervallum	194
2. Nem korlátos függvények improprius integrálja	205
X. A határozott integrál alkalmazása	213
1. Területszámítás	213
2. Ívhossz-számítás	245
3. Forgástestek felszíne	268
4. Súlypontszámítás	287
5. Térfogatszámítás	300
6. Numerikus integrálás	318
7. Fizikai feladatok	349

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

I. ALAPFOGALMAK

1. A határozatlan integrál fogalma és főbb tulajdonságai

Valamely adott függvény határozatlan integrálja minden olyan függvény, amelynek deriváltja az adott függvény.

Legyen egy függvény deriváltja $2x$. Határozzuk meg az eredeti függvényt! Mint előző tanulmányainkból tudjuk, az eredeti függvény, amit differenciáltunk, lehetett pl. $y=x^2$. Ha bármely olyan függvényt differenciálunk, amely ettől csak egy konstans összeadandóban különbözik, a derivált szintén $2x$. Belátható, hogy az összes olyan függvény, amelynek deriváltja $2x$, csak $y=x^2+C$ alakú lehet, ahol C tetszőleges valós szám. (A valós értéket azért kötjük ki, mert e könyvben csak valós változójú és értékű függvényekkel foglalkozunk.)

Általában: Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény *primitív* függvényének (*határozatlan integráljának*) nevezzük az (a, b) véges vagy végtelen intervallumban, ha differenciálhányadosa (deriváltja) ezen intervallum minden pontjában $f(x)$. (Az (a, b) intervallum lehet $f(x)$ teljes értelmezési tartománya is.)

Jelölés:

$$\text{ha } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x), \text{ akkor } \int f(x) dx = F(x).$$

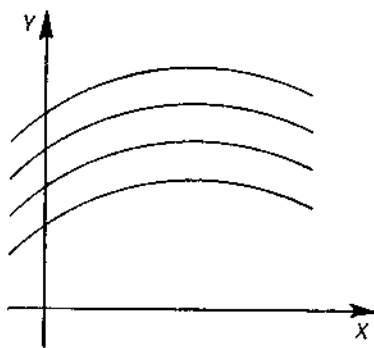
Az integráljel mögött álló függvény az *integrandus*.

Legyen az $f(x)$ függvény valamely primitív függvénye $F(x)$; akkor $F(x)+C$ is primitív függvénye $f(x)$ -nek:

$$[F(x)+C]' = F'(x),$$

mert $\frac{dC}{dx} = 0$, konstans deriváltja nulla.

Valamely $f(x)$ függvény primitív függvényei koordinátarendszerben ábrázolva görbesereget határoznak meg (1. ábra). Az XY -sik bármely olyan pontján, amelynek abszcisszája $f(x)$ értelmezési tartományához tartozik, áthalad egy ilyen görbe.



1. ábra

E görbék egymásba párhuzamos eltolással átvihetők. Vagyis a görbesereg minden egyes görbéjének ugyanaz az értelmezési tartománya, értékkészlete pedig $F(x)$ értékkészletén kívül C értékétől is függ.

Figyelembe véve az utóbb elmondottakat, a primitív függvényt ezentúl a konstans feltüntetésével jelöljük:

$$y = \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Ha a primitív függvények közül egy bizonyosat keresünk, akkor annak egy pontját meg kell adnunk. Legyen ez a pont $P_0(x_0; y_0)$. A pont koordinátáinak ismeretében a C konstans értékét egyértelműen meg tudjuk határozni.

Legyen az $f(x)$ függvény primitív függvénye:

$$y = F(x) + C.$$

Ebbe P_0 koordinátáit helyettesítve, C az alábbi módon fejezhető ki:

$$y_0 = F(x_0) + C, \quad C = y_0 - F(x_0).$$

A feladat megoldása tehát:

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)].$$

Igazolható, hogy ha egy függvény valamely $[a, b]$ intervallumban folytonos, akkor ott van primitív függvénye.

A határozatlan integrálás, vagy más szavakkal, a primitív függvények keresése, bizonyos értelemben a differenciálás megfordítása. A differenciálással szemben azonban itt általában nincs „rutin módszer”, amellyel adott függvény primitív függvényét megtalálhatjuk, sőt viszonylag egyszerű alakú függvényekre sem bizonyos, hogy létezik zárt alakú primitív függvényük (ilyen pl. $y = e^{-x^2}$). Viszont az elemi függvények differenciálhányadosának ismeretében, az integrálási szabályok és néhány gyakran célravezető fogás segítségével nagyon sok függvény primitív függvénye meghatározható.

A határozatlan integrál két fontos tulajdonságát említjük meg:

1. Ha egy (a, b) intervallumban — amely lehet véges vagy végtelen —

$$\int f(x) dx = F(x) + C_1 \quad \text{és} \quad \int g(x) dx = G(x) + C_2,$$

akkor az (a, b) intervallumban a két függvény összege, ill. különbsége is integrálható, és

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = F(x) \pm G(x) + C.$$

Az összegfüggvény tehát tagonként integrálható.

2. Legyen c tetszőleges szám, akkor

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

A c állandó szorzótényező az integráljel elé kiemelhető.

2. Alapintegrálok

Azokat az integrálokat, amelyeket valamilyen elemi függvény deriválásának megfordításakor kapunk, alapintegráloknak nevezzük.

$$a) \int dx = x + C.$$

$$b) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{ahol } n \text{ bármilyen egész vagy tört}$$

lehet, de $n \neq -1$ (mert akkor $n+1=0$, és így a szabályt mechanikusan alkalmazva, értelmetlen kifejezést kapnánk).

$$c) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

Ellenőrizzük az integrál helyességét! Legyen $x > 0$, akkor

$$[\ln |x| + C]' = [\ln x + C]' = \frac{1}{x};$$

ha $x < 0$, akkor

$$[\ln |x| + C]' = [\ln (-x) + C]' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

$$d) \int e^x dx = e^x + C.$$

$$e) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ ahol } a > 0 \text{ és } a \neq 1.$$

$$f) \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$g) \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$h) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$i) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$j) \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

$$k) \int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar} \operatorname{th} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, \text{ ha } |x| < 1;$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{ar} \operatorname{cth} x + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C, \text{ ha } |x| > 1.$$

Az $\frac{1}{1-x^2}$ függvény tehát olyan függvény, amelynek 1-nél kisebb és 1-nél nagyobb abszolút értékű számokra más a primitív függvénye. A kidolgozott példák tárgyalása során mindig megadjuk mind a két megoldást.

$$l) \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$m) \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$n) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$o) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$p) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C.$$

$$r) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

$$s) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{ar} \operatorname{ch} x + C = \pm \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=x^5$ függvény összes primitív függvényét!

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

$$\text{Próba: } \left[\frac{x^6}{6} + C \right]' = \frac{6x^5}{6} = x^5.$$

A továbbiakban a próba elvégzését az Olvasóra bízuk.

$$2. \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

$$3. \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C.$$

$$4. \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + C = \frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + C.$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C.$$

Az eddigiekben olyan függvények integrálját határoztuk meg, amelyek hatvány alakba írhatók voltak. Most olyan függvények integrálásával foglalkozunk majd, amelyek az előbbi típusok valamelyikére vezethetők vissza.

$$6. \int \sqrt[3]{x} \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{5}{6}} dx = \int x^{\frac{5}{6}} dx = \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + C = \frac{6}{11} x \sqrt[6]{x^5} + C.$$

7. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$. Az integrálandó függvényt előbb egyszerűbb alakra hozzuk és csak azután integráljuk.

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{3-2}{6}} = x^{\frac{1}{6}}.$$

$$\int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + C = \frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} + C = \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + C.$$

$$8. y = \frac{x}{\sqrt[5]{x^4}} = \frac{x}{x^{\frac{4}{5}}} = x^{\frac{1}{5}}.$$

$$\int x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{x^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + C = \frac{5}{6} \sqrt[5]{x^6} + C = \frac{5}{6} x \sqrt[5]{x} + C.$$

$$9. y = \sqrt{x \sqrt{x}} = (x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{3}{4}}.$$

$$\int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{7} \sqrt[4]{x^7} + C = \frac{4}{7} x \sqrt[4]{x^3} + C.$$

$$10. y = \frac{\sqrt[4]{x \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{(x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{1}{4}} x^{\frac{1}{8}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{3}{8}}}{x^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{3}{8}}}{x^{\frac{2}{8}}} = x^{\frac{1}{8}} = x^{\frac{1}{8}}.$$

$$\int x^{\frac{1}{8}} dx = \frac{x^{\frac{9}{8}}}{\frac{9}{8}} + C = \frac{8}{9} \sqrt[9]{x^9} + C = \frac{8}{9} x \sqrt[9]{x} + C.$$

$$11. y = 3x^4 + \frac{4}{x^5} = 3x^4 + 4x^{-5}.$$

Az integrandus összegfüggvény, ennek határozatlan integrálja a tagok határozatlan integráljának összege.

$$\int (3x^4 + 4x^{-5}) dx = \frac{3x^5}{5} + 4 \frac{x^{-4}}{-4} + C = \frac{3}{5} x^5 - \frac{1}{x^4} + C.$$

$$12. y = \sqrt{2x} - 3\sqrt{x} = (\sqrt{2} - 3) \sqrt{x} = (\sqrt{2} - 3) x^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{2} - 3) x^{\frac{1}{2}} dx &= (\sqrt{2} - 3) \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(\sqrt{2} - 3) x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 3) x \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Ha olyan törtfüggvényt kell integrálnunk, amelynek számlálója több tagú és nevezője egytagú, akkor a számláló minden tagját osztjuk a nevezővel, és az így kapott hatványfüggvényt integráljuk.

$$13. y = \frac{x^3 + 4x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^3 + 4x^2}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}}.$$

$$\int (x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 4 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{7} \sqrt{x^7} + \frac{8}{5} \sqrt{x^5} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \sqrt{x} + \frac{8}{5} x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x} + C.$$

$$14. y = \frac{x^4 - 4x^3 + 2\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^4}} = \frac{x^{\frac{40}{6}} - 4x^{\frac{18}{6}} + 2x^{\frac{6}{6}}}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{\frac{16}{3}} - 4x^{\frac{11}{3}} + 2x^{-\frac{7}{3}}.$$

$$\int (x^{\frac{16}{3}} - 4x^{\frac{11}{3}} + 2x^{-\frac{7}{3}}) dx = \frac{x^{\frac{19}{3}}}{\frac{19}{3}} - 4 \frac{x^{\frac{14}{3}}}{\frac{14}{3}} + 2 \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{5}{21} \sqrt[3]{x^{19}} - \frac{5}{4} \sqrt[3]{x^{14}} + \frac{15}{4} \sqrt[3]{x^8} + C = \frac{5}{21} x^{\frac{19}{3}} \sqrt[3]{x} - \frac{5}{4} x^{\frac{14}{3}} \sqrt[3]{x} + \frac{15}{4} \sqrt[3]{x^8} + C.$$

A továbbiakban olyan feladatokat oldunk meg, amelyekben a keresett primitív függvény egy pontja adott, és az ezen a ponton áthaladó függvényt keressük.

$$15. y = 3x; \quad P_0(3; 2).$$

A feladat tehát a következő: Határozzuk meg az $y = 3x$ függvény primitív függvényei közül azt, amelyik a koordináta-rendszer $P_0(3; 2)$ pontján halad át.

A függvény határozatlan integrálja:

$$\int 3x dx = \frac{3x^2}{2} + C.$$

A feltételt kielégítő függvény legyen:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + C_0.$$

Mivel $f(3) = 2$, ezért

$$2 = \frac{3 \cdot 3^2}{2} + C_0,$$

ebből

$$C_0 = 2 - \frac{27}{2} = -\frac{23}{2}.$$

A feltételt is kielégítő megoldás tehát

$$f(x) = \frac{3}{2} x^2 - 11,5.$$

A függvény görbéje — mint erről behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk — átmegy a $P_0(3; 2)$ ponton. Bármely más C értékre kapott primitív függvény görbéje nem megy át a P_0 ponton!

$$16. y = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}; \quad P_0(4; 1).$$

Az $y(4) = 1$ feltételt kielégítő primitív függvényt $F_0(x)$ -szel, a határozatlan integrált pedig $F(x)$ -szel jelölve,

$$F(x) = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}} + C = \sqrt{x} + C.$$

Mivel $F_0(4) = 1$, ezért $1 = \sqrt{4} + C_0$, ebből

$$C_0 = 1 - 2 = -1.$$

Tehát

$$F_0(x) = \sqrt{x} - 1$$

a keresett primitív függvény.

$$17. y = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad P_0(-3; 4).$$

A határozatlan integrál ismét az $F(x) = \sqrt{x} + C$ függvény lenne, de mivel sem az $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, sem az $F(x) = \sqrt{x} + C$ függvény nincs értelmezve negatív x értékekre, nem létezik a feltételt teljesítő primitív függvény.

Valamely integrálási feladatot tehát akkor tekinthetünk megoldottnak, ha azt is megadjuk, hogy a megoldásul kapott primitív függvénynek mi az értelmezési tartománya. Az értelmezési tartomány meghatározását általában az Olvasóra bizzuk.

Megemlítjük, hogy a független változót nem mindig x -szel, a függvényértéket pedig nem mindig y -nal jelöljük. Most egy fizikai feladatot oldunk meg, a fizikában szokásos jelöléseket használva.

18. Az egyenletesen változó, egyenes vonalú mozgás pillanatnyi sebességét megadó függvény $v=at$, ha a $t_0=0$ időpillanatban a testnek nincs kezdősebessége: $v=0$. Itt v a sebességet, a a gyorsulást, t az időt jelenti. Határozzuk meg a test által megtett s utat mint az idő függvényét! Legyen $s(t_0)=s_0=12$ m. Ez azt jelenti, hogy az időmérés megkezdésekor a test a vonatkozási ponttól — pl. a koordinátarendszer kezdőpontjától — 12 m távolságra van.

Az utat mint az idő függvényét, a sebesség—idő függvény határozatlan integrálja adja meg.

$$s = \int v dt = \int at dt = \frac{at^2}{2} + C.$$

A C konstans értékét a feltételből határozzuk meg:

$$12 = \frac{a \cdot 0}{2} + C, \text{ vagyis } C = 12.$$

$$s = \frac{at^2}{2} + 12.$$

Ez a függvény a tetszőleges a gyorsulással, de nulla kezdősebességgel, az origótól 12 m távolságból induló pont mozgását adja meg.

Ezután a többi alapintegrál felhasználásával megoldható feladatokat tárgyalunk.

$$19. \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

$$20. \int 2e^x dx = 2 \int e^x dx = 2e^x + C.$$

$$21. \int (6 \sin x + 5 \cos x) dx = 6(-\cos x) + 5 \sin x + C = \\ = -6 \cos x + 5 \sin x + C.$$

$$22. \int (5 \cdot 2^x + 4 \sin x - 3 \cos x) dx = 5 \frac{2^x}{\ln 2} - 4 \cos x - 3 \sin x + C.$$

$$23. \int \operatorname{tg}^2 x dx = ?$$

A feladatot egy lépésben nem tudjuk megoldani, hiszen nem szerepel az alapintegrálok között. Ezért az integrandust ismert trigonometrikus összefüggések felhasználásával trigonometrikus vagy más alapintegrálokra igyekszünk visszavezetni.

$$\operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \\ = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

24. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = ?$ Az integrandust átalakítjuk:

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$25. \int \frac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 5}{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \\ = \int \frac{\cos^2 x - 5}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{2} - \int \frac{5}{2 \cos^2 x} dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \operatorname{tg} x + C.$$

$$26. \int \frac{1 + \cos 2x}{\cos^3 x - 1} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x}{-\sin^2 x} dx = \\ = -2 \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = -2 \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \\ = -2[-\operatorname{ctg} x - x] + C = 2 \operatorname{ctg} x + 2x + C.$$

$$27. \int \frac{5 \cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{5(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} dx = \\ = 5 \int (\cos x - \sin x) dx = 5 \sin x + 5 \cos x + C.$$

A határozatlan integrál C konstansát nem szoktuk semmilyen számegyütthatóval megszorozni, hiszen C amúgy is tetszőleges konstans lehet.

$$28. \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{7}{5 \sin^2 x} \right) dx = 3 \operatorname{tg} x + \frac{7}{5} \operatorname{ctg} x + C.$$

Most hiperbolikus függvények integrálját határozzuk meg úgy, hogy előbb — ha kell — az integrandust alapintegrállal alakítjuk át.

$$29. \int (4 \operatorname{sh} x + 2 \operatorname{ch} x) dx = 4 \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x + C.$$

$$30. \int \frac{5}{\operatorname{sh}^3 x} dx = -5 \operatorname{cth} x + C.$$

$$31. \int \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}^3 x} dx = \sqrt{2} \operatorname{th} x + C.$$

$$32. \int 5 \operatorname{th}^3 x dx = ?$$

Mivel $\operatorname{th}^2 x = \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$, és $\operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1$, ezért

$$\int 5 \operatorname{th}^3 x dx = 5 \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^3 x} dx = 5 \int dx - 5 \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x} = 5x - 5 \operatorname{th} x + C.$$

$$33. \int \operatorname{cth}^3 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x} + \int dx = -\operatorname{cth} x + x + C.$$

$$34. \int \frac{\operatorname{ch}^3 x - 2}{\operatorname{ch} 2x + 1} dx = ?$$

Mivel $\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x = 1$ és $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$, ezért

$$\int \frac{\operatorname{ch}^3 x - 2}{(\operatorname{ch}^3 x - \operatorname{sh}^3 x) + (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^3 x - 2}{2 \operatorname{ch}^2 x} dx = \int \frac{dx}{2} - \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{x}{2} - \operatorname{th} x + C.$$

$$35. \int \frac{1}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} dx =$$

$$= \int (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) dx = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x + C.$$

$$36. \int \frac{-5}{2+2x^2} dx = ? \text{ Az integrandus — kiemeléssel — alapintegrállá alakítható.}$$

$$= -\frac{5}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{5}{2} \arctg x + C.$$

$$37. \int \frac{1}{4\sqrt{5-5x^2}} dx = \frac{1}{4\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{4\sqrt{5}} \arcsin x + C.$$

$$38. \int (6+6x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{6+6x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arsh} x + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln C_1(x + \sqrt{1+x^2}),$$

ahol a $C = \frac{1}{\sqrt{6}} \ln C_1$ összefüggés felírásával a tetszőleges konstans tag helyett a logaritmus argumentumában tetszőleges szorzótényező lép fel.

$$39. \int \frac{5}{4-4x^2} dx = \frac{5}{4} \int \frac{1}{1-x^2} dx = \begin{cases} F_1(x), & \text{ha } |x| < 1, \\ F_2(x), & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

A függvény határozatlan integrálja két függvény.

$$F_1(x) = \frac{5}{4} \operatorname{arctg} x + C = \frac{5}{8} \ln \frac{1+x}{1-x} + C, \text{ ha } |x| < 1;$$

$$F_2(x) = \frac{5}{4} \operatorname{arctg} x + C = \frac{5}{8} \ln \frac{x+1}{x-1} + C, \text{ ha } |x| > 1.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$F_1'(x) = \left[\frac{5}{8} \ln \frac{1+x}{1-x} + C \right]' = \frac{5}{8} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x) \cdot 1 - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1-x^2}.$$

Az $F_1(x)$ függvény deriváltja valóban $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1-x^2}$, de $F_1(x)$ csak $|x| < 1$ értékekre van értelmezve, mivel különben a logaritmus argumentuma 0, ∞ vagy negatív.

Meghatározzuk az $F_2(x)$ függvény deriváltját. Természetes, hogy a derivált csak azokhoz az x értékekhez tartozhat, amelyekre $F_2(x)$ értelmezett.

$$F_2'(x) = \left[\frac{5}{8} \ln \frac{x+1}{x-1} + C \right]' = \frac{5}{8} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{(x-1) \cdot 1 - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{5}{8} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{-1}{x^2-1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1-x^2}.$$

Tehát az $F_2(x)$ függvény deriváltja is $\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1-x^2}$.

$$40. \int \left(\frac{4x^3-4}{3} \right)^{-\frac{1}{3}} dx = \int \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4x^3-4}} dx =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}} dx = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \operatorname{ar ch} x + C.$$

$$41. \int \frac{x^3}{x^3+1} dx = \int \frac{(x^3+1)-1}{x^3+1} dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{1}{x^3+1} dx = x - \operatorname{arc tg} x + C.$$

II. INTEGRÁLÁSI MÓDSZEREK

1. Bevezetés

Ha egy adott függvény integrálját — primitív függvényét — keressük, akkor feladatunk abból áll, hogy az integrálandó függvényt — ha az nem alapintegrál — igyekszünk azonos átalakításokkal, valamint az eddig ismertetett és a továbbiakban ismertetendő integrálási szabályok, módszerek felhasználásával úgy átalakítani, hogy egy vagy több alapintegrált kapjunk. Ezt a célt sokszor többféle módon is el lehet érni.

A legegyszerűbb esetek azok, amelyekben néhány azonos átalakítással érhetünk célt. Ilyen példákat már az előző fejezet tárgyalása során is megoldottunk.

2. $f(ax+b)$ alakú integrandus

Differenciálással ellenőrizhető, hogy

$$\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + C,$$

ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvényét jelöli.

Ugyanis — a közvetett (összetett) függvények differenciálási szabályát felhasználva —

$$\left[\frac{F(ax+b)}{a} + C \right]' = \frac{F'(ax+b)}{a} a = F'(ax+b) = f(ax+b).$$

Gyakorló feladatok

$$1. \int (3x+2)^3 dx = \frac{(3x+2)^4}{4 \cdot 3} + C = \frac{1}{12} (3x+2)^4 + C.$$

A megoldás helyességét differenciálással ellenőrizzük:

$$\left[\frac{1}{12} (3x+2)^4 + C \right]' = \frac{4(3x+2)^3 \cdot 3}{12} = (3x+2)^3.$$

A továbbiakban az ellenőrzést az Olvasóra bizzuk!

$$2. \int (5x-4)^5 dx = \frac{(5x-4)^6}{6 \cdot 5} + C = \frac{1}{30} (5x-4)^6 + C.$$

$$3. \int \sqrt[4]{7x-16} dx = \int (7x-16)^{\frac{1}{4}} dx = \frac{(7x-16)^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4} \cdot 7} + C = \\ = \frac{4}{35} \sqrt[4]{(7x-16)^5} + C = \frac{4}{35} (7x-16) \sqrt[4]{7x-16} + C.$$

$$4. \int \frac{1}{(-3x+4)^4} dx = \int (-3x+4)^{-4} dx = \frac{(-3x+4)^{-3}}{-3(-3)} + C = \\ = \frac{1}{9} (-3x+4)^{-3} + C = \frac{1}{9(-3x+4)^3} + C.$$

$$5. \int e^{5x+4} dx = \frac{e^{5x+4}}{5} + C.$$

$$6. \int 3^{4x-7} dx = \frac{3^{4x-7}}{4 \ln 3} + C.$$

$$7. \int 5^{3-2x} dx = \frac{5^{3-2x}}{-3 \ln 5} + C = -\frac{5^{3-2x}}{3 \ln 5} + C.$$

$$8. \int \sin(6x+4) dx = \frac{-\cos(6x+4)}{6} + C.$$

$$9. \int \cos(-4-5x) dx = \frac{\sin(-4-5x)}{-5} + C = -\frac{\sin(-4-5x)}{5} + C.$$

$$10. \int \frac{1}{\sin^3(3x+2)} dx = -\frac{\operatorname{ctg}(3x+2)}{3} + C = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3x+2) + C.$$

$$11. \int \frac{5}{\cos^3(-6x+4)} dx = \frac{5 \operatorname{tg}(-6x+4)}{-6} + C = -\frac{5}{6} \operatorname{tg}(-6x+4) + C.$$

$$12. \int \operatorname{sh}(2-7x) dx = \frac{\operatorname{ch}(2-7x)}{-7} + C = -\frac{1}{7} \operatorname{ch}(2-7x) + C.$$

3. $f^n(x)f'(x)$ alakú integrandus

Differenciáljuk az alábbi függvényt:

$$\frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad (n \neq -1)!$$

$$\left[\frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \right]' = \frac{(n+1)f^n(x)f'(x)}{n+1} = f^n(x)f'(x).$$

Ebből következik, hogy

$$\int f^n(x)f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + C \quad (n \neq -1).$$

Ennek speciális esete $n=1$, vagyis

$$\int f(x)f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} + C.$$

Először az utóbbira, azután az előbbire oldunk meg feladatokat. Sokszor gyakorlott szem kell annak megállapításához, hogy az integrandus ilyen alakú, ill. hogy egyszerű átalakításokkal ilyen alakra hozható.

Gyakorló feladatok

$$1. \int x^3(2x^3+4) dx = ?$$

Mivel $(2x^3+4)' = 6x^2$, tehát az alábbi átalakítást végezzük:

$$\int x^3(2x^3+4) dx = \frac{1}{6} \int 6x^2(2x^3+4) dx = \frac{1}{6} \frac{(2x^3+4)^2}{2} + C. \\ = \frac{1}{12} (2x^3+4)^2 + C.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\left[\frac{1}{12} (2x^3+4)^2 + C \right]' = \frac{2(2x^3+4) \cdot 6x^2}{12} = x^3(2x^3+4).$$

$$2. \int \sin x \cos x dx = \int \sin x \cdot (\sin x)' dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

$$3. \int \frac{\ln x}{x} dx = \int (\ln x) \frac{1}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

$$4. \int (2x^3+4)^5 x^3 dx = \frac{1}{6} \int 6x^3 (2x^3+4)^5 dx = \\ = \frac{1}{6} \frac{(2x^3+4)^6}{6} + C = \frac{1}{36} (2x^3+4)^6 + C.$$

Ez már az általános esetre volt példa! Ellenőrizzük a megoldás helyességét:

$$\left[\frac{1}{36} (2x^3+4)^6 + C \right]' = \frac{6(2x^3+4)^5 \cdot 6x^2}{36} = x^2 (2x^3+4)^5.$$

A többi feladatmegoldás helyességének ellenőrzését az Olvasóra bízunk.

$$5. \int x^2 \sqrt[5]{6x^3+4} dx = \frac{1}{18} \int 18x^2 (6x^3+4)^{\frac{1}{5}} dx = \frac{1}{18} \frac{(6x^3+4)^{\frac{6}{5}}}{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{27} \sqrt[5]{(6x^3+4)^3} + C = \frac{1}{27} (6x^3+4) \sqrt[5]{6x^3+4} + C.$$

$$6. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+6}} dx = \frac{1}{2} \int 2x (x^2+6)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ = \frac{1}{2} \frac{(x^2+6)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+6} + C.$$

$$7. \int e^x (1-e^x)^3 dx = - \int -e^x (1-e^x)^3 dx = \frac{-(1-e^x)^4}{4} + C.$$

$$8. \int \sin^4 x \sin 2x dx = ?$$

Itt először trigonometrikus összefüggés felhasználásával igyekszünk a kétszeres szöveget kiküszöbölni.

$$\int \sin^4 x \sin 2x dx = \int \sin^4 x 2 \sin x \cos x dx = 2 \int \sin^5 x \cos x dx = \\ = 2 \frac{\sin^6 x}{6} + C = \frac{1}{3} \sin^6 x + C.$$

$$9. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx = \int \sin x (\cos x)^{-\frac{2}{3}} dx = \\ = - \int (-\sin x) (\cos x)^{-\frac{2}{3}} dx = - \left[\frac{(\cos x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C \right] = -3 \sqrt[3]{\cos x} + C.$$

$$10. \int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{\tan^5 x}{5} + C.$$

$$11. \int \frac{(\arctg x)^2}{1+x^2} dx = \int (\arctg x)^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{(\arctg x)^3}{3} + C.$$

$$4. \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ alakú integrandus}$$

Differenciáljuk a következő függvényt:

$$\ln |f(x)| + C.$$

$$[\ln |f(x)| + C]' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Ez egyszerűen belátható külön $f(x) > 0$ és külön $f(x) < 0$ esetére.

Ebből következik, hogy

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C.$$

Gyakorló feladatok

$$1. \int \frac{2x}{x^2+7} dx = \ln(x^2+7) + C.$$

Ha a nevező bármely x -re pozitív, akkor felesleges kiírunk az abszolút érték jelét!

2. $\int \frac{5x^2}{x^3+4} dx = ?$ A nevező deriváltja $3x^2$, ezért kiemeléssel, ill. bővítéssel átalakítjuk az integrandust:

$$\int \frac{5x^2}{x^3+4} dx = \frac{5}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+4} dx = \frac{5}{3} \ln |x^3+4| + C.$$

3. $\int \frac{4 \sin x}{5 \cos x + 4} dx = -\frac{4}{5} \int \frac{-5 \sin x}{5 \cos x + 4} dx = -\frac{4}{5} \ln |5 \cos x + 4| + C.$

4. $\int \frac{5 \sin 2x}{\sin^2 x + 12\pi} dx = ?$ A nevező deriváltja: $(\sin^2 x + 12\pi)' = 2 \sin x \cos x$. A számlálót átalakítva: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$\int \frac{5 \sin 2x}{\sin^2 x + 12\pi} dx = 5 \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^2 x + 12\pi} dx = 5 \ln (\sin^2 x + 12\pi) + C.$$

5. $\int \frac{-\sin 2x}{5 + \cos^2 x} dx = ?$ A nevező deriváltja: $(5 + \cos^2 x)' = 2 \cos x (-\sin x) = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$.

$$\int \frac{-\sin 2x}{5 + \cos^2 x} dx = \ln (5 + \cos^2 x) + C.$$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tg} x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \operatorname{ctg} x} = -\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} x} dx = -\ln |\operatorname{ctg} x| + C.$

8. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C.$

9. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln |\ln x| + C.$

10. $\int \frac{1}{(x^2-1) \operatorname{ar} \operatorname{th} x} dx = \int \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{\operatorname{ar} \operatorname{th} x} dx = \ln |\operatorname{ar} \operatorname{th} x| + C.$

11. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3} dx = \ln |e^{2x}+3| + C.$

5. Integrálás helyettesítéssel

Differenciáljuk az $y = F[u(x)]$ közvetett függvényt x szerint!

$$y' = \frac{dF[u(x)]}{du(x)} \cdot \frac{du(x)}{dx},$$

ill. rövidebben felírva

$$y' = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u) u', \text{ ahol } F'(x) = f(x).$$

Ebből következik, hogy

$$\int f[u(x)] u'(x) dx = \int \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du = F[u(x)] + C.$$

A fentiek alapján könnyen belátható a következő szabály: Ha egy olyan szorzatot kell integrálnunk, amelynek egyik tényezője egy közvetett függvény, másik tényezője pedig e közvetett függvény belső függvényének deriváltja, akkor a belső függvényt új változóval helyettesítjük, majd úgy integrálhatunk, mintha a belső függvényünk lett volna a független változó.

Sokszor nem látható közvetlenül, hogy az integrandus ilyen alakú, ill. átalakítással ilyen alakra hozható — és még ha ilyen alakra hozzuk, sem biztos, hogy integrálható függvényt kapunk —, mégis érdemes behelyettesítéssel próbálkoznunk, mivel az — főleg bizonyos gyakorlat szerzése után — számos esetben eredményre vezet.

Más esetekben bizonyos típusú helyettesítés *mindig* célra vezet. Ezeket később tárgyaljuk.

A helyettesítést az alábbi módon végezzük: Ha $u(x) = t$, akkor $\frac{dt}{dx} = u'(x)$, és így $u'(x) dx = dt$, vagyis

$$\int f[u(x)] u'(x) dx = \int f(t) dt = F(t) + C,$$

ahol most már visszahelyettesíthetjük $t = u(x)$ -et.

Gyakorló feladatok

1. $\int (3x+2)^3 dx = ?$

Ezt a feladatot már a 2. pontban is megoldottuk, de most alkalmazzuk a helyettesítés módszerét.

Mivel hatvány integrálása igen egyszerű, ezért legyen $3x+2 = t$, vagyis $x = \frac{t-2}{3}$, tehát $dx = \frac{dt}{3}$.

Vagyis

$$\int (3x+2)^3 dx = \frac{1}{3} \int t^3 dt = \frac{1}{3 \cdot 4} t^4 + C = \frac{1}{12} (3x+2)^4 + C.$$

2. $\int \sqrt[4]{7x-16} dx = ?$ A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg.

Legyen $7x-16 = t$, vagyis $x = \frac{t+16}{7}$, ebből $dx = \frac{dt}{7}$,

$$\int \sqrt[4]{7x-16} dx = \frac{1}{7} \int \sqrt[4]{t} dt = \frac{1}{7} \int t^{\frac{1}{4}} dt = \frac{4}{7 \cdot 5} t^{\frac{5}{4}} + C =$$

$$= \frac{4}{35} (7x-16)^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{35} \sqrt[4]{(7x-16)^5} + C =$$

$$= \frac{4}{35} (7x-16) \sqrt[4]{7x-16} + C.$$

3. $\int \frac{1}{(-3x+4)^4} dx = ?$

Helyettesítés az előbbi módon: $-3x+4 = t$; vagyis $x = \frac{t-4}{-3} = \frac{4-t}{3}$
és $dx = -\frac{dt}{3}$.

$$\int \frac{1}{(-3x+4)^4} dx = \int (-3x+4)^{-4} dx = -\int t^{-4} \frac{dt}{3} =$$

$$= -\frac{1}{3} \int t^{-4} dt = -\frac{1}{3} \frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{t^3} + C = \frac{1}{9} \frac{1}{(-3x+4)^3} + C.$$

4. $\int e^{5x+4} dx = ?$

Legyen $5x+4 = t$, ekkor $x = \frac{t-4}{5}$ és $dx = \frac{dt}{5}$.

$$\int e^{5x+4} dx = \frac{1}{5} \int e^t dt = \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{5x+4} + C.$$

5. $\int 3^{4x-7} dx = ?$

Legyen $4x-7 = t$, ebből $x = \frac{t+7}{4}$ és $dx = \frac{dt}{4}$.

$$\int 3^{4x-7} dx = \frac{1}{4} \int 3^t dt = \frac{1}{4} \frac{3^t}{\ln 3} + C = \frac{3^{4x-7}}{4 \ln 3} + C.$$

6. $\int 5^{2-3x} dx = ?$

Legyen $2-3x = t$, ebből $x = \frac{t-2}{-3} = \frac{2-t}{3}$, és $dx = -\frac{dt}{3}$.

$$\int 5^{2-3x} dx = -\frac{1}{3} \int 5^t dt = -\frac{1}{3} \frac{5^t}{\ln 5} + C = \frac{-5^{2-3x}}{3 \ln 5} + C.$$

7. $\int \sin(6x+4) dx = ?$

Legyen $6x+4 = t$, ekkor $x = \frac{t-4}{6}$ és $dx = \frac{dt}{6}$.

$$\int \sin(6x+4) dx = \frac{1}{6} \int \sin t dt = -\frac{\cos t}{6} + C = -\frac{\cos(6x+4)}{6} + C.$$

8. $\int \cos(-4-5x) dx = ?$

Legyen $-4-5x = t$, ekkor $x = \frac{t+4}{-5} = -\frac{t+4}{5}$ és $dx = -\frac{dt}{5}$.

$$\int \cos(-4-5x) dx = -\frac{1}{5} \int \cos t dt = -\frac{\sin t}{5} + C =$$

$$= -\frac{1}{5} \sin(-4-5x) + C.$$

$$9. \int \frac{1}{\sin^2(3x+2)} dx = ?$$

Legyen $3x+2 = t$, ebből $x = \frac{t-2}{3}$ és $dx = \frac{dt}{3}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2(3x+2)} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{3} \operatorname{ctg} t + C = \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}(3x+2) + C. \end{aligned}$$

$$10. \int \frac{5}{\cos^2(-6x+4)} dx = ?$$

Legyen $-6x+4 = t$, ebből $x = \frac{4-t}{6}$ és $dx = -\frac{dt}{6}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{\cos^2(-6x+4)} dx &= -\frac{5}{6} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = -\frac{5}{6} \operatorname{tg} t + C = \\ &= -\frac{5}{6} \operatorname{tg}(-6x+4) + C. \end{aligned}$$

$$11. \int \operatorname{sh}(2-7x) dx = ?$$

Legyen $2-7x = t$, ebből $x = \frac{2-t}{7}$ és $dx = -\frac{dt}{7}$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}(2-7x) dx &= -\frac{1}{7} \int \operatorname{sh} t dt = -\frac{1}{7} \operatorname{ch} t + C = \\ &= -\frac{\operatorname{ch}(2-7x)}{7} + C. \end{aligned}$$

$$12. \int \frac{dx}{25+x^2} = ? \text{ Próbáljuk meg az integrandust } \frac{1}{1+t^2} \text{ alakra hozni!}$$

Ehhez előbb kiemeljük az integráljel elé a nevezőből a 25-öt:

$$\int \frac{dx}{25+x^2} = \frac{1}{25} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}.$$

Most az $\frac{x}{5} = t$ helyettesítés vezet célhoz.

$$x = 5t \quad \text{és} \quad dx = 5 dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{25+x^2} &= \frac{1}{25} \int \frac{5 dt}{1+t^2} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{5} + C. \end{aligned}$$

13. Az előbbi feladatot általánosan is megoldjuk:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = ?$$

a^2 -et kiemeljük a nevezőből:

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Legyen $\frac{x}{a} = t$, ebből $x = at$ és $dx = a dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C = \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

$$14. \int \frac{dx}{36+16x^2} = ? \text{ Az integrandus nevezőjéből 36-ot kiemelünk, így}$$

érjük el azt, hogy a tört $\frac{1}{1+t^2}$ alakra hozható.

$$\int \frac{dx}{36+16x^2} = \frac{1}{36} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{4x}{6}\right)^2} = \frac{1}{36} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{2}{3}x\right)^2}.$$

Legyen $\frac{2x}{3} = t$, ebből $x = \frac{3}{2}t$ és $dx = \frac{3}{2}dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{36+16x^2} &= \frac{1}{36} \int \frac{\frac{3}{2} dt}{1+t^2} = \frac{1}{24} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{24} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C = \\ &= \frac{1}{24} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{3} + C. \end{aligned}$$

15. Az előző típusú feladatot általánosan is megoldjuk:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = ?$$

Az integrandust a^2 kiemelésével alakítjuk át:

$$\int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

Legyen $\frac{bx}{a} = t$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{\frac{a}{b} dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{ab} \arctan t + C = \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a} + C. \end{aligned}$$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{36 - 16x^2}} = ?$ Tudjuk, hogy $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ alapintegrál. Úgy próbáljuk átalakítani az integrandust, hogy az új változóban ilyen alakú legyen:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36 - 16x^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}}} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{3}\right)^2}}.$$

Helyettesítsünk:

$$t = \frac{2x}{3}, \text{ ebből } x = \frac{3}{2}t \text{ és } dx = \frac{3}{2}dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{36 - 16x^2}} &= \frac{1}{6} \int \frac{\frac{3}{2}dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \\ &= \frac{1}{4} \arcsin t + C = \frac{1}{4} \arcsin \frac{2x}{3} + C. \end{aligned}$$

17. A fenti típusú általános feladat:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}.$$

Elvégezve az alábbi helyettesítést:

$$t = \frac{bx}{a}, \text{ ebből } x = \frac{a}{b}t, \text{ és } dx = \frac{a}{b}dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} &= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{a}{b} dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \\ &= \frac{1}{b} \arcsin t + C = \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a} + C. \end{aligned}$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{16 + 25x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{5x}{4}\right)^2}}.$$

Legyen $t = \frac{5x}{4}$, ebből $x = \frac{4}{5}t$ és $dx = \frac{4}{5}dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{16 + 25x^2}} &= \frac{1}{4} \int \frac{\frac{4}{5} dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{arsh} t + C = \frac{1}{5} \operatorname{arsh} \frac{5x}{4} + C = \frac{1}{5} \ln \left[\frac{5x}{4} + \sqrt{1 + \left(\frac{5x}{4}\right)^2} \right] + C. \end{aligned}$$

19. A fenti típusú feladat általános alakja:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}}.$$

Legyen $t = \frac{bx}{a}$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}} &= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{a}{b} dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \\ &= \frac{1}{b} \operatorname{ar sh} t + C = \frac{1}{b} \operatorname{ar sh} \frac{bx}{a} + C = \frac{1}{b} \ln \left[\frac{bx}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{bx}{a} \right)^2} \right] + C.\end{aligned}$$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 36}} = ?$ Reméljük, hogy az integrandus kiemeléssel és helyettesítéssel $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$ alapintegrállá alakítható. Ennek érdekében az alábbi átalakításokat és helyettesítést végezzük el:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 36}} = \frac{1}{6} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5x}{6}\right)^2 - 1}}.$$

Legyen $t = \frac{5x}{6}$, ebből $x = \frac{6}{5}t$, és $dx = \frac{6}{5}dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 36}} &= \frac{1}{6} \int \frac{\frac{6}{5} dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \\ &= \frac{1}{5} \operatorname{ar ch} t + C = \frac{1}{5} \operatorname{ar ch} \frac{5x}{6} + C = \pm \ln \left(\frac{5x}{6} + \sqrt{\frac{25}{36}x^2 - 1} \right) + C.\end{aligned}$$

21. A fenti típusú feladat általános alakja:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - 1}}.$$

Legyen $t = \frac{bx}{a}$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}} &= \frac{1}{a} \int \frac{\frac{a}{b} dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \\ &= \frac{1}{b} \operatorname{ar ch} t + C = \frac{1}{b} \operatorname{ar ch} \frac{bx}{a} + C = \pm \ln \left[\frac{bx}{a} + \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - 1} \right] + C.\end{aligned}$$

22. $\int \frac{dx}{49 - 25x^2}$? Az integrandust igyekezzünk $\frac{1}{1-t^2}$ alakra hozni:

$$\int \frac{dx}{49 - 25x^2} = \frac{1}{49} \int \frac{dx}{1 - \left(\frac{5x}{7}\right)^2}.$$

Legyen $t = \frac{5x}{7}$, ebből $x = \frac{7}{5}t$ és $dx = \frac{7}{5}dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{49 - 25x^2} &= \frac{1}{49} \int \frac{\frac{7}{5} dt}{1 - t^2} = \frac{1}{35} \int \frac{dt}{1 - t^2} = \\ &= \begin{cases} F_1(t) = \frac{1}{35} \operatorname{ar th} t + C_1 = \frac{1}{70} \ln \frac{1+t}{1-t} + C_1, & \text{ha } |t| < 1. \\ F_2(t) = \frac{1}{35} \operatorname{ar cth} t + C_2 = \frac{1}{70} \ln \frac{t+1}{t-1} + C_2, & \text{ha } |t| > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{49 - 25x^2} &= \\ &= \begin{cases} \frac{1}{70} \operatorname{ar th} \frac{5x}{7} + C_1 = \frac{1}{70} \ln \frac{1 + \frac{5x}{7}}{1 - \frac{5x}{7}} + C_1, & \text{ha } |x| < \frac{7}{5}; \\ \frac{1}{70} \operatorname{ar cth} \frac{5x}{7} + C_2 = \frac{1}{70} \ln \frac{\frac{5x}{7} + 1}{\frac{5x}{7} - 1} + C_2, & \text{ha } |x| > \frac{7}{5}. \end{cases}\end{aligned}$$

23. A fenti feladattípus általános alakja:

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 - \left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

Legyen $t = \frac{bx}{a}$, ebből $x = \frac{a}{b}t$ és $dx = \frac{a}{b}dt$.

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{\frac{a}{b} dt}{1 - t^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dt}{1 - t^2} =$$

$$= \begin{cases} F_1(t) = \frac{1}{ab} \operatorname{ar th} t + C_1 = \frac{1}{2ab} \ln \frac{1+t}{1-t} + C_1, & \text{ha } |t| < 1; \\ F_2(t) = \frac{1}{ab} \operatorname{ar cth} t + C_2 = \frac{1}{2ab} \ln \frac{t+1}{t-1} + C_2, & \text{ha } |t| > 1. \end{cases}$$

Tehát

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{ab} \operatorname{ar th} \frac{bx}{a} + C_1 = \frac{1}{2ab} \ln \frac{1 + \frac{bx}{a}}{1 - \frac{bx}{a}} + C_1, & \text{ha } |x| < \frac{a}{b}; \\ \frac{1}{ab} \operatorname{ar cth} \frac{bx}{a} + C_2 = \frac{1}{2ab} \ln \frac{\frac{bx}{a} + 1}{\frac{bx}{a} - 1} + C_2, & \text{ha } |x| > \frac{a}{b}. \end{cases}$$

24. $\int e^{\sin x} \cos x dx = ?$ Mivel e^t integrálása igen egyszerű, próbálkozzunk a $t = \sin x$ helyettesítéssel;

Itt az inverz függvény felírására és differenciálására nincs is szükség, mert ebből $\frac{dt}{dx} = \cos x$ és így $dt = \cos x dx$ az integrandusba közvetlenül behelyettesíthető:

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

25. $\int 5^{\cos x} \sin x dx = ?$ Most helyettesítéssel a^t alakú kifejezést igyekszünk kapni az integrandusban.

Legyen $t = \cos x$, ebből $dt = -\sin x dx$ és

$$\int 5^{\cos x} \sin x dx = -\int 5^t dt = -\frac{5^t}{\ln 5} + C = -\frac{5^{\cos x}}{\ln 5} + C.$$

$$26. \int (3x^2 + 2) \sin(x^3 + 2x - 4) dx = ?$$

Legyen $t = x^3 + 2x - 4$, ekkor $\frac{dt}{dx} = 3x^2 + 2$ és $dt = (3x^2 + 2) dx$.

$$\int (3x^2 + 2) \sin(x^3 + 2x - 4) dx = \int \sin t dt = -\cos t + C =$$

$$= -\cos(x^3 + 2x - 4) + C.$$

$$27. \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = ?$$

I. Megoldás:

Legyen $x = \ln t$, és így $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^{2 \ln t}}{1 + e^{\ln t}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{1 + t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{1 + t} dt.$$

Az átalakítás során felhasználtuk az $e^{\ln t} = t$, ill. $e^{2 \ln t} = t^2$ azonosságokat.

$$\int \frac{t}{1 + t} dt = \int \frac{1 + t - 1}{1 + t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt = t - \ln |1 + t| + C.$$

A primitív függvény most még t függvénye, ezt x függvényévé kell alakítanunk.

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = e^x - \ln |1 + e^x| + C,$$

ugyanis $x = \ln t$ -ből $t = e^x$.

II. Megoldás:

Ezt a feladatot megoldjuk még úgy is, hogy függvényt helyettesítünk új független változóval:

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = ?$$

Legyen $t = e^x$, ekkor $\frac{dt}{dx} = e^x = t$ és így $dx = \frac{dt}{t}$.

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{t^2}{1 + t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t}{1 + t} dt.$$

Látható, hogy most is az előbbi integrandust kaptuk, amelynek primitív függvénye $t - \ln |1 + t| + C$, amint ezt az előbbieken kiszámítottuk.

$$28. \int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Ha most az x független változó helyett a t -nek szinuszt vagy koszinuszt vezetjük be, akkor a gyökkifejezés kiküszöbölhető.

I. Megoldás:

Legyen $x = \sin t$; $dx = \cos t dt$.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \cos t \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Mivel $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, ezért

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} + C. \end{aligned}$$

A primitív függvény a t változó függvénye. Ezt kell átalakítanunk az x változó függvényévé.

Mivel $x = \sin t$, ezért $t = \arcsin x$, ill. $\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} = 2x \sqrt{1-x^2}$, így

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x \sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

II. Megoldás:

Oldjuk meg a feladatot $x = \cos t$ helyettesítéssel is:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Legyen $x = \cos t$, ebből $dx = -\sin t dt$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\cos^2 t} (-\sin t) dt = \int -\sin t \sin t dt = \\ &= -\int \sin^2 t dt. \end{aligned}$$

Mivel $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$, ezért

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= -\int \frac{1-\cos 2t}{2} dt = \int \frac{\cos 2t - 1}{2} dt = \\ &= \frac{\sin 2t}{4} - \frac{1}{2} t + C. \end{aligned}$$

Az eredményt ismét x változójává alakítjuk: $x = \cos t$, és ebből $t = \arccos x$;

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \sqrt{1-\cos^2 t} \cos t = 2x \sqrt{1-x^2}.$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{\arccos x}{2} + C.$$

A két módszerrel kapott primitív függvény alakja különbözik egymástól, mivel azonban $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, ezért

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\arcsin x}{2} + C = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin x}{2} + C - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A két primitív függvény tehát csak a konstansban különbözik egymástól, vagyis lényegében megegyeznek.

29. $\int \sqrt{1+x^2} dx = ?$ Az integrandusban levő gyökkifejezés sokszor kiküszöbölhető, ha felhasználjuk a hiperbolikus függvényekre tanult néhány azonosságot, amelyek közül néhányat most felírunk:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x;$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x.$$

Ezekből kapható még:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2};$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}.$$

Legyen most $x = \operatorname{sh} t$, ugyanis ekkor a négyzetek különbségére vonatkozó azonosságot használhatjuk fel:

$$dx = \operatorname{ch} t \, dt;$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t \, dt = \int \operatorname{ch}^2 t \, dt = \\ &= \int \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2} \, dt = \frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} + C.\end{aligned}$$

Visszaalakítjuk az eredményt x függvényévé: $x = \operatorname{sh} t$, ebből $t = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x$.

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = 2x \sqrt{1+x^2}.$$

Így a feladat megoldása:

$$\int \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{\operatorname{ar} \operatorname{sh} x}{2} + \frac{x \sqrt{1+x^2}}{2} + C.$$

30. $\int \sqrt{x^2-1} \, dx = ?$ Most az $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítés vezet célhoz, ugyanis $dx = \operatorname{sh} t \, dt$, és így

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-1} \, dx &= \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \operatorname{sh} t \, dt = \int \operatorname{sh}^2 t \, dt = \\ &= \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} \, dt = \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} - \frac{t}{2} + C = \frac{2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}{2} - \frac{t}{2} + C.\end{aligned}$$

Az eredményt x függvényévé alakítjuk:

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2x \sqrt{x^2-1}; \quad t = \operatorname{ar} \operatorname{ch} x.$$

$$\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \frac{x \sqrt{x^2-1}}{2} - \frac{\operatorname{ar} \operatorname{ch} x}{2} + C.$$

31. $\int \sqrt{16-x^2} \, dx = ?$ Ez az integrandus a 28. feladatára vezethető vissza.

$$\int \sqrt{16-x^2} \, dx = 4 \int \sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2} \, dx.$$

Itt már függvényt helyettesítünk függvénnyel:

$$\frac{x}{4} = \sin t; \quad x = 4 \sin t; \quad dx = 4 \cos t \, dt.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{16-x^2} \, dx &= 4 \int \sqrt{1-\sin^2 t} 4 \cos t \, dt = 16 \int \cos^2 t \, dt = \\ &= 16 \int \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = 8 \int dt + 8 \int \cos 2t \, dt = \\ &= 8t + 8 \frac{\sin 2t}{2} + C = 8t + 4 \sin 2t + C.\end{aligned}$$

$$t = \arcsin \frac{x}{4}; \quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \frac{x}{4} \sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}.$$

$$\int \sqrt{16-x^2} \, dx = 8 \arcsin \frac{x}{4} + 2x \sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2} + C.$$

32. A típus általános alakja és megoldása:

$$\int \sqrt{a^2-b^2x^2} \, dx = a \int \sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2} \, dx.$$

$$\frac{bx}{a} = \sin u; \quad x = \frac{a}{b} \sin u; \quad dx = \frac{a}{b} \cos u \, du.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-b^2x^2} \, dx &= a \int \sqrt{1-\sin^2 u} \cdot \frac{a}{b} \cos u \, du = \frac{a^2}{b} \int \cos^2 u \, du = \\ &= \frac{a^2}{b} \int \frac{1+\cos 2u}{2} \, du = \frac{a^2}{b} \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right] + C.\end{aligned}$$

$$u = \arcsin \frac{bx}{a}; \quad \sin 2u = 2 \sin u \cos u = 2 \frac{bx}{a} \sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-b^2x^2} \, dx &= \frac{a^2}{b} \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{bx}{a} + \frac{1}{2} \frac{bx}{a} \sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2} \right] + C = \\ &= \frac{a^2}{2b} \arcsin \frac{bx}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1-\left(\frac{bx}{a}\right)^2} + C.\end{aligned}$$

33. $\int \sqrt{25+x^2} \, dx = ?$

$$\int \sqrt{25+x^2} \, dx = 5 \int \sqrt{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} \, dx.$$

Legyen $\frac{x}{5} = \operatorname{sh} u$; vagyis $x = 5 \operatorname{sh} u$; így $dx = 5 \operatorname{ch} u \, du$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{25+x^2} dx &= 5 \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \operatorname{ch} u du = 5 \int \operatorname{ch}^2 u du = \\ &= 5 \int \frac{1+\operatorname{ch} 2u}{2} du = 5 \left[\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2u}{4} \right] + C = \frac{5}{2} u + \frac{5}{4} \operatorname{sh} 2u + C.\end{aligned}$$

$$u = \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{x}{5}; \quad \operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2 \cdot \frac{x}{5} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{5}\right)^2}.$$

$$\int \sqrt{25+x^2} dx = \frac{5}{2} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{x}{5} + \frac{1}{2} x \sqrt{1 + \left(\frac{x}{5}\right)^2} + C.$$

34. A típus általános alakja és megoldása:

$$\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx = a \int \sqrt{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2} dx.$$

Legyen $\frac{bx}{a} = \operatorname{sh} u$; vagyis $x = \frac{a}{b} \operatorname{sh} u$ és $dx = \frac{a}{b} \operatorname{ch} u du$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx &= a \int \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \cdot \frac{a}{b} \operatorname{ch} u du = \frac{a^2}{b} \int \operatorname{ch}^2 u du = \\ &= \frac{a^2}{b} \int \frac{1 + \operatorname{ch} 2u}{2} du = \frac{a^2}{b} \left[\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2u}{4} \right] + C.\end{aligned}$$

$$x = \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{bx}{a}; \quad \operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2 \frac{bx}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx &= \frac{a^2}{b} \left[\frac{1}{2} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{bx}{a} + \frac{bx}{2a} \sqrt{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2} \right] + C = \\ &= \frac{a^2}{2b} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{bx}{a} + \frac{ax}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2} + C = \\ &= \frac{a^2}{2b} \operatorname{ar} \operatorname{sh} \frac{bx}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + b^2 x^2} + C.\end{aligned}$$

$$35. \int \sqrt{x^2 - 16} dx = 4 \int \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1} dx.$$

Legyen $\frac{x}{4} = \operatorname{ch} t$; vagyis $x = 4 \operatorname{ch} t$; így $dx = 4 \operatorname{sh} t dt$.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 - 16} dx &= 4 \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \cdot 4 \operatorname{sh} t dt = 16 \int \operatorname{sh}^2 t dt = \\ &= 16 \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt = 8 \int (\operatorname{ch} 2t - 1) dt = 8 \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - 8t + C = \\ &= 4 \operatorname{sh} 2t - 8t + C.\end{aligned}$$

$$t = \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{x}{4}; \quad \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \frac{x}{4} \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 - 16} dx &= 2x \sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2 - 1} - 8 \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{x}{4} + C = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 16} - 8 \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{x}{4} + C.\end{aligned}$$

36. A típus általános alakja és megoldása:

$$\int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx = a \int \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - 1} dx$$

$$\frac{bx}{a} = \operatorname{ch} t; \quad x = \frac{a}{b} \operatorname{ch} t; \quad dx = \frac{a}{b} \operatorname{sh} t dt.$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx &= a \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} \frac{a}{b} \operatorname{sh} t dt = \frac{a^2}{b} \int \operatorname{sh}^2 t dt = \\ &= \frac{a^2}{b} \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt = \frac{a^2}{b} \left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{4} - \frac{t}{2} \right] + C = \frac{a^2}{4b} \operatorname{sh} 2t - \frac{a^2}{2b} t + C.\end{aligned}$$

Mivel $t = \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{bx}{a}$ és $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \frac{bx}{a} \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - 1}$, ezért

$$\begin{aligned}\int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx &= \frac{a^2}{4b} \cdot \frac{2bx}{a} \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - 1} - \frac{a^2}{2b} \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{bx}{a} + C = \\ &= \frac{ax}{2} \sqrt{\left(\frac{bx}{a}\right)^2 - 1} - \frac{a^2}{2b} \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{bx}{a} + C = \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{b^2 x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2b} \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{bx}{a} + C.\end{aligned}$$

6. Parciális integrálás

A parciális integrálás szabálya a szorzatfüggvény deriválási szabályából kapható az alábbi módon:

Legyen $u=u(x)$ és $v=v(x)$, akkor $(uv)' = u'v + uv'$.

Mivel $u'v = (uv)' - uv'$, ezért

$$\int u'v \, dx = \int (uv)' \, dx - \int uv' \, dx,$$

vagyis

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx.$$

A módszert általában akkor érdemes alkalmazni, ha az integrandus olyan szorzatként írható fel, melyben az egyik — u' -ként felfogott — tényező integrálja ismert, a másik — v -vel jelölt — tényező v' deriváltját könnyen meghatározhatjuk, és $\int uv' \, dx$ könnyebben meghatározható, mint $\int u'v \, dx$. Általános módszert nem adhatunk arra, hogy a szorzat melyik tényezőjét válasszuk u' -nek, ill. v -nek, de az egyes feladatok, ill. feladat típusok megoldásakor választásunkat megindokoljuk.

a) *Hatványfüggvényvel szorzott exponenciális, trigonometrikus és hiperbolikus függvények parciális integrálása.* A deriválás a hatványfüggvény fokszámát csökkenti, az integrálás a trigonometrikus (csak szinusz és koszinusz), exponenciális és hiperbolikus (csak a szinusz és koszinusz hiperbolikus) függvényekét nem változtatja. Pl.: $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$ stb. Ebből következik, hogy az ilyen típusú integrandusok úgy alakíthatók át egyszerűbb alakra, hogy a hatványfüggvényt válaszjuk v -nek és az exponenciális, trigonometrikus, ill. hiperbolikus függvényt u' -nek.

Gyakorló feladatok

1. $\int x e^{kx} \, dx = ?$ (Itt és a továbbiakban k valós számot jelent.)

Legyen $v = x$ és $u' = e^{kx}$; ekkor $v' = 1$ és $u = \frac{1}{k} e^{kx}$.

Így

$$\int x e^{kx} \, dx = \frac{x e^{kx}}{k} - \int \frac{e^{kx}}{k} \, dx = \frac{x e^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2} + C.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\left(\frac{x e^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k^2} + C \right)' = x e^{kx} + \frac{e^{kx}}{k} - \frac{e^{kx}}{k} = x e^{kx}.$$

A deriválás alkalmával vigyázzunk arra, hogy az első tag szorzatfüggvény! A többi feladat megoldásának ellenőrzését az Olvasóra bizzuk.

2. $\int 2x \sin 6x \, dx = ?$

Legyen $v = 2x$; $u' = \sin 6x$; tehát $v' = 2$; $u = \frac{-\cos 6x}{6}$. Így

$$\begin{aligned} \int 2x \sin 6x \, dx &= \frac{-2x \cos 6x}{6} - \int \frac{-2 \cos 6x}{6} \, dx = \\ &= -\frac{x \cos 6x}{3} + \frac{1}{3} \int \cos 6x \, dx = -\frac{x \cos 6x}{3} + \frac{\sin 6x}{18} + C. \end{aligned}$$

3. $\int 4x \cos 4x \, dx = ?$

Legyen $v = 4x$; $u' = \cos 4x$; ekkor $v' = 4$; $u = \frac{\sin 4x}{4}$.

$$\int 4x \cos 4x \, dx = x \sin 4x - \int \sin 4x \, dx = x \sin 4x + \frac{\cos 4x}{4} + C.$$

4. $\int 6x \operatorname{sh} 7x \, dx = ?$

Legyen $v = 6x$; $u' = \operatorname{sh} 7x$; ekkor $v' = 6$; $u = \frac{\operatorname{ch} 7x}{7}$.

$$\int 6x \operatorname{sh} 7x \, dx = \frac{6x \operatorname{ch} 7x}{7} - \int \frac{6 \operatorname{ch} 7x}{7} \, dx = \frac{6x \operatorname{ch} 7x}{7} - \frac{6 \operatorname{sh} 7x}{49} + C.$$

5. $\int 3x \operatorname{ch} 4x \, dx = ?$

Legyen $v = 3x$; $u' = \operatorname{ch} 4x$; ekkor $v' = 3$; $u = \frac{\operatorname{sh} 4x}{4}$.

$$\int 3x \operatorname{ch} 4x \, dx = \frac{3x \operatorname{sh} 4x}{4} - \int \frac{3 \operatorname{sh} 4x}{4} \, dx = \frac{3x \operatorname{sh} 4x}{4} - \frac{3 \operatorname{ch} 4x}{16} + C.$$

Ha a hatványfüggvényben x magasabb hatványa is szerepel, akkor a parciális integrálás módszerét szükség szerint ismételt alkalommal alkalmazzuk. Most ilyen típusú feladatokat oldunk meg.

6. $\int x^2 e^{4x} dx = ?$

Legyen $v = x^2$; $u' = e^{4x}$; ekkor $v' = 2x$; $u = \frac{e^{4x}}{4}$.

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{2} \int x e^{4x} dx.$$

A parciális integrálás módszerét alkalmazva, a második tagban integrandusként ismét szorzatfüggvényt kaptunk, de ebben a hatványfüggvény fokszáma már eggyel kisebb, mint előbb volt, az exponenciális tényező lényegében változatlan. Erre ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét.

$$\int x e^{4x} dx = ?$$

Legyen $v_1 = x$; $u'_1 = e^{4x}$; ekkor $v'_1 = 1$; $u_1 = \frac{e^{4x}}{4}$.

$$\int x e^{4x} dx = \frac{x e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4} dx = \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{16} e^{4x} + C.$$

A kapott eredményt visszahelyettesítve:

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{1}{4} x^2 e^{4x} - \frac{1}{8} x e^{4x} + \frac{1}{32} e^{4x} + C.$$

7. $\int 3x^2 \sin 5x dx = ?$

Legyen $v = 3x^2$; $x' = \sin 5x$; ekkor $v' = 6x$; $u = \frac{-\cos 5x}{5}$.

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \sin 5x dx &= \frac{-3x^2 \cos 5x}{5} - \int -\frac{6x \cos 5x}{5} dx = \\ &= -\frac{3}{5} x^2 \cos 5x + \frac{6}{5} \int x \cos 5x dx. \end{aligned}$$

A második tag integrandusa szorzatfüggvény, amit ismét parciálisan integrálunk.

$$\int x \cos 5x dx = ?$$

Legyen $v_1 = x$; $u'_1 = \cos 5x$; $v'_1 = 1$; $u_1 = \frac{\sin 5x}{5}$.

$$\begin{aligned} \int x \cos 5x dx &= \frac{1}{5} x \sin 5x - \frac{1}{5} \int \sin 5x dx = \\ &= \frac{1}{5} x \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + C. \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int 3x^2 \sin 5x dx = -\frac{3}{5} x^2 \cos 5x + \frac{6}{25} x \sin 5x + \frac{6}{125} \cos 5x + C.$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\begin{aligned} \left(-\frac{3}{5} x^2 \cos 5x + \frac{6}{25} x \sin 5x + \frac{6}{125} \cos 5x + C \right)' &= \\ &= -\frac{6}{5} x \cos 5x + 3x^2 \sin 5x + \frac{6}{25} \sin 5x + \frac{6}{5} x \cos 5x - \frac{6}{25} \sin 5x = \\ &= 3x^2 \sin 5x. \end{aligned}$$

A feladatot tehát helyesen oldottuk meg.

8. $\int x \operatorname{sh} x dx = ?$

Legyen $v = x$; $u' = \operatorname{sh} x$; ekkor $v' = 1$; $u = \operatorname{ch} x$.

$$\int x \operatorname{sh} x dx = x \operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C.$$

9. $\int x^2 \operatorname{sh} 2x dx = ?$

Legyen $v = x^2$; $u' = \operatorname{sh} 2x$; ekkor $v' = 2x$; $u = \frac{\operatorname{ch} 2x}{2}$.

$$\int x^2 \operatorname{sh} 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{ch} 2x - \frac{3}{2} \int x \operatorname{ch} 2x dx.$$

A második tagra ismét a parciális integrálást alkalmazzuk:

$$\int x \operatorname{ch} 2x dx = ?$$

Legyen $v_1 = x$; $u'_1 = \operatorname{ch} 2x$; ekkor $v'_1 = 1$; $u_1 = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}$.

$$\int x \operatorname{ch} 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sh} 2x - \int x \operatorname{sh} 2x dx.$$

A szorzatfüggvényt újra parciálisan integráljuk.

$$\int x \operatorname{sh} 2x \, dx = ?$$

Legyen $v_2 = x$; $u_2' = \operatorname{sh} 2x$; vagyis $v_2' = 1$; $u_2 = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x$.

$$\int x \operatorname{sh} 2x = \frac{1}{2} x \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} x \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$$

Az eredeti integrál tehát

$$\int x^3 \operatorname{sh} 2x \, dx = \frac{1}{2} x^3 \operatorname{ch} 2x - \frac{3}{4} x^2 \operatorname{sh} 2x + \frac{3}{4} x \operatorname{ch} 2x - \frac{3}{8} \operatorname{sh} 2x + C.$$

b) Logaritmus-, area- és arkuszfüggvények integrálása. Ezek a függvények olyanok, hogy integráljukat nem tudjuk közvetlenül felírni, deriváltjukat viszont ismerjük. Ha ilyen esetben az integrandust olyan függvényszorzatnak tekintjük, amelynek egyik tényezője az azonosan egy függvény, a másik tényezője pedig az integrandus, akkor a feladat gyakran megoldható. Ezzel a fogással esetleg más típusú integrandus esetében is célt érhetünk.

Gyakorló feladatok

10. $\int \ln x \, dx = ?$

Legyen $v = \ln x$; $u' = 1$; ekkor $v' = \frac{1}{x}$; $u = x$. Ekkor

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx = x \ln x - x + C.$$

11. $\int \lg x \, dx = ?$

Legyen $v = \lg x$; $u = 1$; tehát $v' = \frac{1}{x} \lg e$; $u = x$.

$$\int \lg x \, dx = x \lg x - \int \lg e \, dx = x \lg x - x \lg e + C.$$

Megjegyzés: Itt $\lg e \approx 0,4343$ értékkel számolhatunk.

12. $\int \arcsin x \, dx = ?$

Legyen $v = \arcsin x$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $u = x$.

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

Vegyük észre, hogy a második tag integrandusát csekély átalakítással $f''(x)f'(x)$ alakra hozhatjuk, melynek integrálja már közvetlenül felírható:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Az integrálási konstans előjelváltását természetesen figyelmen kívül hagyhatjuk!

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\begin{aligned} (x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C)' &= \\ &= \arcsin x + x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x. \end{aligned}$$

13. $\int \arcsin(ax+b) \, dx = ?$

Az integrandust először helyettesítéssel alakítjuk át úgy, hogy az $ax+b$ függvény helyett a t új változót vezetjük be.

Legyen $ax+b=t$, ekkor $dt=a \, dx$ és így $dx = \frac{dt}{a}$.

$$\int \arcsin(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \int \arcsin t \, dt.$$

Az előbbi példa eredményét felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned}\int \arcsin(ax+b) dx &= \frac{1}{a} (t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}) + C = \\ &= \frac{ax+b}{a} \arcsin(ax+b) + \frac{1}{a} \sqrt{1-(ax+b)^2} + C.\end{aligned}$$

14. $\int \arccos x dx = ?$

Legyen $v = \arccos x$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $u = x$.

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Vegyük észre, hogy $(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, ezért

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

15. $\int \arccos \frac{x}{3} dx = ?$

Legyen $v = \arccos \frac{x}{3}$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$; $u = x$,

$$\int \arccos \frac{x}{3} dx = x \arccos \frac{x}{3} - \int \frac{-\frac{x}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dx.$$

Vegyük észre, hogy a második tag integrandusa egyszerűen az $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható:

$$\begin{aligned}\int \frac{-\frac{x}{3}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} dx &= \int \frac{-\frac{x}{3}}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int -2x(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{9-x^2} + C.\end{aligned}$$

Ezt figyelembe véve a feladat megoldása:

$$\int \arccos \frac{x}{3} dx = x \arccos \frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2} + C.$$

16. $\int \arctg 6x dx = ?$

Legyen $v = \arctg 6x$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{6}{1+36x^2}$; $u = x$.

$$\begin{aligned}\int \arctg 6x dx &= x \arctg 6x - \int \frac{6x}{1+36x^2} dx = \arctg 6x - \\ &- \frac{1}{12} \int \frac{72x}{1+36x^2} dx = x \arctg 6x - \frac{1}{12} \ln(1+36x^2) + C.\end{aligned}$$

Tehát itt is a parciális integrálás után kapott integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakra volt hozható.

17. $\int \operatorname{arctg} cx dx = ?$

Legyen $v = \operatorname{arctg} cx$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{c}{1+c^2 x^2}$; $u = x$.

$$\int \operatorname{arctg} cx dx = x \operatorname{arctg} cx + \int \frac{cx}{1+c^2 x^2} dx.$$

Vegyük észre, hogy a második tag integrandusa $f^n(x)f'(x)$ alakra hozható!

$$\int \frac{cx}{1+c^2 x^2} dx = \frac{1}{2c} \int \frac{2c^2 x}{1+c^2 x^2} dx = \frac{1}{2c} \ln(1+c^2 x^2) + C.$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \operatorname{arctg} cx dx = x \operatorname{arctg} cx + \frac{1}{2c} \ln(1+c^2 x^2) + C.$$

18. $\int \operatorname{arsh} 7x dx = ?$

Legyen $v = \operatorname{arsh} 7x$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{7}{\sqrt{1+49x^2}}$; $u = x$.

$$\int \operatorname{arsh} 7x dx = x \operatorname{arsh} 7x - \int \frac{7x}{\sqrt{1+49x^2}} dx.$$

A második tag integrandusa egyszerű átalakítással $f''(x)f'(x)$ alakra hozható:

$$\begin{aligned}\int \frac{7x}{\sqrt{1+49x^2}} dx &= \frac{1}{14} \int (1+49x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 98x dx = \\ &= \frac{1}{14} \frac{(1+49x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{7} \sqrt{1+49x^2} + C.\end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \operatorname{ar sh} 7x dx = x \operatorname{ar sh} 7x - \frac{1}{7} \sqrt{1+49x^2} + C.$$

$$19. \int \operatorname{ar ch} x dx = \int 1 \cdot \operatorname{ar ch} x dx = ?$$

Legyen $v = \operatorname{ar ch} x$; $u' = 1$, ekkor $v' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $u = x$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ar ch} x dx &= x \operatorname{ar ch} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \\ &= x \operatorname{ar ch} x - \frac{1}{2} \int 2x (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = x \operatorname{ar ch} x - \sqrt{x^2-1} + C.\end{aligned}$$

$$20. \int \operatorname{ar ch} 5x dx = \int 1 \cdot \operatorname{ar ch} 5x dx = ?$$

Legyen $v = \operatorname{ar ch} 5x$; $u' = 1$, ekkor $v' = \frac{5}{\sqrt{25x^2-1}}$; $u = x$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ar ch} 5x dx &= x \operatorname{ar ch} 5x - \int \frac{5x}{\sqrt{25x^2-1}} dx = \\ &= x \operatorname{ar ch} 5x - \frac{1}{10} \int 50x (25x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= x \operatorname{ar ch} 5x - \frac{1}{5} \sqrt{25x^2-1} + C.\end{aligned}$$

A megoldás során felhasználtuk, hogy a parciális integrálással kapott integrandus $f''(x)f'(x)$ alakra hozható volt.

$$21. \int \operatorname{ar th} x dx = ?$$

Legyen $v = \operatorname{ar th} x$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{1}{1-x^2}$; $u = x$,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ar th} x dx &= x \operatorname{ar th} x - \int \frac{x}{1-x^2} dx = x \operatorname{ar th} x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \\ &= \operatorname{ar th} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C.\end{aligned}$$

A parciális integrálással kapott integrandust $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakra hoztuk. A függvény és az integrál értelmezési tartománya $|x| < 1$.

$$22. \int \operatorname{ar cth} x dx = ?$$

Legyen $v = \operatorname{ar cth} x$; $u' = 1$, tehát $v' = \frac{1}{1-x^2}$; $u = x$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ar cth} x dx &= x \operatorname{ar cth} x - \int \frac{x}{1-x^2} dx = \\ &= x \operatorname{ar cth} x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = x \operatorname{ar cth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + C.\end{aligned}$$

A függvény és integrálja csak $|x| > 1$ értékekre értelmezett. A parciális integrálással kapott integrandust $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakra hoztuk.

c) *Exponenciális függvényvel szorzott trigonometrikus és hiperbolikus függvények parciális integrálása.*

Gyakorló feladatok

$$23. \int e^{3x} \sin 2x dx =$$

1. Megoldás:

Alkalmazzuk a parciális integrálást, mégpedig legyen $u = e^{3x}$; $v' = \sin 2x$, tehát $u' = 3e^{3x}$; $v = \frac{-\cos 2x}{2}$.

$$\begin{aligned}\int e^{3x} \sin 2x dx &= \frac{-e^{3x} \cos 2x}{2} - \int \frac{-3e^{3x} \cos 2x}{2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x dx.\end{aligned}$$

Ismét parciálisan integrálunk, most a jobb oldal második tagjában legyen

$$u_1 = e^{3x}; v_1' = \cos 2x, \text{ tehát } u_1' = 3e^{3x}; v_1 = \frac{\sin 2x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 2x \, dx &= \\ &= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \int \frac{3}{2} e^{3x} \sin 2x \, dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \sin 2x - \frac{9}{4} \int e^{3x} \sin 2x \, dx. \end{aligned}$$

Azt látjuk, hogy a jobb oldal utolsó tagjában az eredeti integrál lépett fel; most már az egyenlőséget rendezve, megkaphatjuk a keresett integrált.

$$\begin{aligned} \frac{13}{4} \int e^{3x} \sin 2x \, dx &= e^{3x} \left(\frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right), \\ \text{ebből} \quad \int e^{3x} \sin 2x \, dx &= \frac{4e^{3x}}{13} \left(\frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C = \\ &= \frac{e^{3x}}{13} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

Mivel az integrandus mindkét tényezőjének egyaránt egyszerű a deriváltja és az integrálja, megpróbálhatjuk a fordított szereposztást is. Mint látni fogjuk, ez szintén célhoz vezet. Legyen tehát most

$$v' = e^{3x} \text{ és } u = \sin 2x, \text{ ekkor } v = \frac{1}{3} e^{3x} \text{ és } u' = 2 \cos 2x;$$

$$\int e^{3x} \sin 2x \, dx = \frac{e^{3x} \sin 2x}{3} - \frac{2}{3} \int e^{3x} \cos 2x \, dx.$$

A kapott integrálra a parciális integrálást a fentihez hasonló szereposztásban végezzük el; legyen

$$\begin{aligned} u_1 &= \cos 2x \text{ és } v_1' = e^{3x}, \text{ tehát } v_1 = \frac{1}{3} e^{3x} \text{ és } u_1' = -2 \sin 2x; \text{ így} \\ \int e^{3x} \sin 2x \, dx &= \\ &= \frac{e^{3x} \sin 2x}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{e^{3x} \cos 2x}{3} + \frac{2}{3} \int e^{3x} \sin 2x \, dx \right) = \\ &= \frac{e^{3x} \sin 2x}{3} - \frac{2}{9} e^{3x} \cos 2x - \frac{4}{9} \int e^{3x} \sin 2x \, dx; \end{aligned}$$

rendezve az egyenlőséget:

$$\frac{13}{9} \int e^{3x} \sin 2x \, dx = \frac{e^{3x}}{9} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C;$$

$$\int e^{3x} \sin 2x \, dx = \frac{e^{3x}}{13} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x) + C.$$

A kétféle úton kapott eredmény természetesen megegyezik.

$$24. \int e^{5x} \cos 3x \, dx = ?$$

$$\text{Legyen } u = e^{5x}; v' = \cos 3x, \text{ tehát } u' = 5e^{5x}; v = \frac{\sin 3x}{3}.$$

$$\begin{aligned} \int e^{5x} \cos 3x \, dx &= \frac{e^{5x} \sin 3x}{3} - \int \frac{5e^{5x} \sin 3x}{3} \, dx = \\ &= \frac{1}{3} e^{5x} \sin 3x - \frac{5}{3} \int e^{5x} \sin 3x \, dx. \end{aligned}$$

A második tagbeli integrálásra ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét az eredetihez hasonló szereposztással; legyen $u_1 = e^{5x}$; $v_1' = \sin 3x$, tehát $u_1' = 5e^{5x}$; $v_1 = \frac{-\cos 3x}{3}$.

$$\begin{aligned} \int e^{5x} \cos 3x \, dx &= \\ &= \frac{1}{3} e^{5x} \sin 3x - \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{3} e^{5x} \cos 3x - \int \frac{-5e^{5x} \cos 3x}{3} \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{3} e^{5x} \sin 3x + \frac{5}{9} e^{5x} \cos 3x - \frac{25}{9} \int e^{5x} \cos 3x \, dx. \end{aligned}$$

Ebből fejezzük ki a keresett integrált:

$$\frac{34}{9} \int e^{5x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} e^{5x} \sin 3x + \frac{5}{9} e^{5x} \cos 3x;$$

$$\int e^{5x} \cos 3x \, dx = \frac{9}{34} e^{5x} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + \frac{5}{9} \cos 3x \right) + C.$$

Ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha mindkét lépésben a fordított szereposztást választottuk volna.

Megoldunk egy ilyen típusú általánosabb feladatot.

$$25. \int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx = ?$$

Legyen $u = e^{ax+b}$; $v' = \cos(cx+d)$, tehát $u' = ae^{ax+b}$; $v = \frac{\sin(cx+d)}{c}$.

$$\begin{aligned} \int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx &= \\ &= \frac{1}{c} e^{ax+b} \sin(cx+d) - \int \frac{a}{c} e^{ax+b} \sin(cx+d) dx. \end{aligned}$$

A második tagra ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Legyen $u_1 = e^{ax+b}$; $v_1' = \sin(cx+d)$, tehát $u_1' = ae^{ax+b}$; $v_1 = -\frac{\cos(cx+d)}{c}$.

$$\begin{aligned} \int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx &= \frac{1}{c} e^{ax+b} \sin(cx+d) - \\ &- \frac{a}{c} \left[-\frac{1}{c} e^{ax+b} \cos(cx+d) + \frac{a}{c} \int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx \right] = \\ &= \frac{e^{ax+b}}{c} \left[\sin(cx+d) + \frac{a}{c} \cos(cx+d) \right] - \\ &- \frac{a^2}{c^2} \int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx. \end{aligned}$$

Rendezve az egyenlőséget:

$$\frac{a^2 + c^2}{c^2} \int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx =$$

$$= \frac{e^{ax+b}}{c} \left[\sin(cx+d) + \frac{a}{c} \cos(cx+d) \right],$$

ebből

$$\begin{aligned} \int e^{ax+b} \cos(cx+d) dx &= \\ &= \frac{ce^{ax+b}}{a^2 + c^2} \left[\sin(cx+d) + \frac{a}{c} \cos(cx+d) \right] + C. \end{aligned}$$

26. $\int e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx = ?$ Az integrált kétféle módon határozzuk meg:

1. Parciális integrálással.

2. A $\operatorname{sh} 4x = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}$ azonosság felhasználásával.

1. Megoldás:

Legyen $u = e^{2x}$; $v' = \operatorname{sh} 4x$, tehát $u' = 2e^{2x}$; $v = \frac{\operatorname{ch} 4x}{4}$,

$$\int e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx = \frac{1}{4} e^{2x} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \int e^{2x} \operatorname{ch} 4x dx.$$

Legyen most $u_1 = e^{2x}$; $v_1' = \operatorname{ch} 4x$, tehát $u_1' = 2e^{2x}$; $v_1 = \frac{\operatorname{sh} 4x}{4}$.

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx &= \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} e^{2x} \operatorname{sh} 4x - \int \frac{1}{2} e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{8} e^{2x} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \int e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx. \end{aligned}$$

Ebből rendezéssel a keresett integrált kifejezzük:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \int e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx &= \frac{1}{4} e^{2x} \left(\operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4x \right); \\ \int e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx &= \frac{e^{2x}}{3} \left(\operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4x \right) + C. \end{aligned}$$

Az eredmény ugyanez lett volna akkor is, ha bármelyik esetben u és v szerepét felcseréljük.

II. Megoldás:

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \operatorname{sh} 4x dx &= \int e^{2x} \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} dx = \frac{1}{2} \int (e^{6x} - e^{-2x}) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{6x}}{6} - \frac{e^{-2x}}{-2} \right) + C = \frac{e^{6x}}{12} + \frac{e^{-2x}}{4} + C. \end{aligned}$$

Összehasonlítjuk eredményünket az előbb kapott eredménnyel.

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x}}{3} \left(\operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 4x \right) + C &= \frac{e^{2x}}{3} \left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} - \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{4} \right) + C = \\ &= \frac{e^{6x} + e^{-2x}}{6} - \frac{e^{6x} - e^{-2x}}{12} + C = \\ &= \frac{2e^{6x} - e^{6x} + 2e^{-2x} + e^{-2x}}{12} + C = \frac{e^{6x}}{12} + \frac{e^{-2x}}{4} + C. \end{aligned}$$

A második megoldás sokkal rövidebb; ezért nemcsak azt kell megnézni, hogy egy szorzatfüggvény parciálisan integrálható-e, hanem azt is, hogy ez tűnik-e a legcélszerűbb módszernek az adott esetben.

Szögfüggvények szorzatát is lehet parciálisan integrálni, mivel azonban az integrandus megfelelő átalakításával a szorzatfüggvény összegfüggvénnyé alakítható, nem foglalkozunk vele.

III. RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

1. Egyszerűbb speciális típusok

Először egyszerűbb speciális típusokat vizsgálunk, a bonyolultabb eseteket majd ezekre vezetjük vissza.

a) *Az integrandus nevezője elsőfokú, számlálója konstans.*
Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{A}{ax+b} dx.$$

Az integrandust úgy alakítjuk át, hogy a számláló a nevező deriváltja legyen.

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{A}{a} \ln |ax+b| + C.$$

b) *Az integrandus nevezője egy elsőfokú függvény n -edik ($n \neq 1$) hatványa, számlálója konstans.* Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{A}{(ax+b)^n} dx.$$

Az integrandust $f^n(x)f'(x)$ alakra hozzuk (ilyen típusú függvényeket már integráltunk a II. pontban).

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(ax+b)^n} dx &= \frac{A}{a} \int a(ax+b)^{-n} dx = \\ &= \frac{A}{a} \frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n} + C = \frac{A}{a(1-n)} \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} + C \quad (n \neq 1). \end{aligned}$$

c) Az integrandus nevezője egy elsőfokú függvény n -edik hatványa ($n \neq 1$), számlálója elsőfokú. Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{Ax}{(ax+b)^n} dx.$$

($Ax+B$ alakú számláló esetén az integrandus két taggá bontható, és a második tag éppen a b eset.)

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax}{(ax+b)^n} dx &= \frac{A}{a} \int \frac{ax+b-b}{(ax+b)^n} dx = \\ &= \frac{A}{a} \int \frac{1}{(ax+b)^{n-1}} dx - \frac{A}{a} \int \frac{b}{(ax+b)^n} dx = \\ &= \frac{A}{a^2} \int a(ax+b)^{1-n} dx - \frac{Ab}{a^2} \int a(ax+b)^{-n} dx = \\ &= \frac{A}{a^2} \frac{(ax+b)^{2-n}}{2-n} - \frac{Ab}{a^2} \frac{(ax+b)^{1-n}}{1-n} + C. \end{aligned}$$

Gyakorló feladatok

$$1. \int \frac{4}{3x-5} dx = \frac{4}{3} \int \frac{3}{3x-5} dx = \frac{4}{3} \ln |3x-5| + C.$$

$$2. \int \frac{5}{2-3x} dx = -\frac{5}{3} \int \frac{3}{3x-2} dx = -\frac{5}{3} \ln |3x-2| + C.$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{5}{(2x-4)^8} dx &= \frac{5}{2} \int 2(2x-4)^{-8} dx = \frac{5}{2} \frac{(2x-4)^{-7}}{-7} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2x-4)^7} + C = -\frac{1}{2(2x-4)^7} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \frac{14}{(6-4x)^7} dx &= -\frac{14}{4} \int -4(6-4x)^{-7} dx = \\ &= -\frac{7}{2} \frac{(6-4x)^{-6}}{-6} + C = \frac{7}{12} \frac{1}{(6-4x)^6} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \int \frac{x}{(2x+3)^4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+3-3}{(2x+3)^4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(2x+3)^3} dx - \frac{3}{4} \int \frac{2}{(2x+3)^4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int 2(2x+3)^{-3} dx - \frac{3}{4} \int 2(2x+3)^{-4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \frac{(2x+3)^{-2}}{-2} - \frac{3}{4} \frac{(2x+3)^{-3}}{-3} + C = \\ &= -\frac{1}{8} \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{(2x+3)^3} + C = \frac{-(2x+3)+2}{8(2x+3)^3} + C = \\ &= -\frac{2x+1}{8(2x+3)^3} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \int \frac{5x}{(3x-4)^8} dx &= \frac{5}{3} \int \frac{3x-4+4}{(3x-4)^8} dx = \\ &= \frac{5}{3} \int \frac{1}{(3x-4)^8} dx + \frac{20}{3} \int \frac{1}{(3x-4)^8} dx = \\ &= \frac{5}{9} \int 3(3x-4)^{-8} dx + \frac{20}{9} \int 3(3x-4)^{-8} dx = \\ &= \frac{5}{9} \frac{(3x-4)^{-7}}{-7} + \frac{20}{9} \frac{(3x-4)^{-7}}{-7} + C = \\ &= -\frac{5}{36} \frac{1}{(3x-4)^7} - \frac{4}{9} \frac{1}{(3x-4)^7} + C = \frac{-5(3x-4)-16}{36(3x-4)^7} + C = \\ &= \frac{4-15x}{36(3x-4)^7} + C. \end{aligned}$$

d) Az integrandus nevezője másodfokú polinom, számlálója konstans. Az integrál általános alakja:

$$\int \frac{A}{ax^2+bx+c} dx.$$

Az integrandus célszerű átalakítása:

$$\begin{aligned}\frac{A}{ax^2+bx+c} &= \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} = \\ &= \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \\ &= \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)}.\end{aligned}$$

A továbbiakat az dönti el, hogy a $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$ kifejezés előjele pozitív, negatív vagy pedig nulla-e.

Ha $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = B^2 > 0$, akkor az integrál helyettesítéssel alapintegrállá alakítható át:

$$\begin{aligned}\int \frac{A}{ax^2+bx+c} dx &= \frac{A}{a} \int \frac{1}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + B^2} dx = \\ &= \frac{A}{aB^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x + \frac{b}{2a}}{B}\right)^2 + 1} dx.\end{aligned}$$

Ha az $\frac{x + \frac{b}{2a}}{B} = u$ új változót vezetjük be, akkor az integrandus — a konstans szorzóktól eltekintve — $\frac{1}{u^2+1}$ alakú lesz, és ennek primitív függvényei $\arctg u + C$ alakúak.

Ha $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = -B^2 < 0$, akkor az integrandus az előző módon

$\frac{1}{u^2-1}$ alakra hozható, és ennek primitív függvényei ar $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$ alakúak.

Ha $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$, akkor a nevezőben levő másodfokú polinom teljes négyzet, és így az integrál a b)-ben tárgyalt módon számítható ki.

Gyakorló feladatok

$$\begin{aligned}7. \int \frac{1}{x^2+4x+8} dx &= \int \frac{1}{x^2+4x+4+8-4} dx = \\ &= \int \frac{1}{(x+2)^2+4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} dx.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk most az $u = \frac{x+2}{2}$ helyettesítést, ekkor $u = \frac{x+2}{2}$, ebből $x = 2u - 2$ és $\frac{dx}{du} = 2$, vagyis $dx = 2du$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4x+8} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{u^2+1} 2 du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+1} du = \\ &= \frac{1}{2} \arctg u + C = \frac{1}{2} \arctg \frac{x+2}{2} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8. \int \frac{1}{x^2+6x+20} dx &= \int \frac{1}{x^2+6x+9+20-9} dx = \\ &= \int \frac{1}{(x+3)^2+11} dx = \frac{1}{11} \int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{\sqrt{11}}\right)^2+1} dx = ?\end{aligned}$$

Az alábbi helyettesítést végezzük:

$$u = \frac{x+3}{\sqrt{11}}; \text{ vagyis } \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad dx = \sqrt{11} du.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+6x+20} dx &= \frac{1}{11} \int \frac{1}{u^2+1} \sqrt{11} du = \frac{1}{\sqrt{11}} \int \frac{du}{u^2+1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{11}} \arctg u + C = \frac{1}{\sqrt{11}} \arctg \frac{x+3}{\sqrt{11}} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad \int \frac{1}{3x^2+6x+15} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2+2x+1+4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \\
 &= \frac{1}{12} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx.
 \end{aligned}$$

Helyettesítés: $u = \frac{x+1}{2}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$; $dx = 2 du$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{3x^2+6x+15} dx &= \frac{1}{12} \int \frac{2 du}{u^2+1} = \frac{1}{6} \int \frac{du}{u^2+1} = \\
 &= \frac{1}{6} \arctg u + C = \frac{1}{6} \arctg \frac{x+1}{2} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10. \quad \int \frac{1}{2x^2-3x+20} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+10} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+10} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{151}{16}} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{151} \int \frac{1}{\frac{16}{151}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+1} dx = \frac{8}{151} \int \frac{1}{\left(\frac{4x-3}{\sqrt{151}}\right)^2+1} dx.
 \end{aligned}$$

Most helyettesítjük be a $\frac{4x-3}{\sqrt{151}} = u$ új változót:

$$x = \frac{\sqrt{151}u+3}{4}; \quad dx = \frac{\sqrt{151}}{4} du.$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2x^2-3x+20} dx &= \frac{8}{151} \int \frac{1}{u^2+1} \cdot \frac{\sqrt{151}}{4} du = \\
 &= \frac{2}{\sqrt{151}} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{2}{\sqrt{151}} \arctg u + C = \frac{2}{\sqrt{151}} \arctg \frac{4x-3}{\sqrt{151}} + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11. \quad \int \frac{1}{x^2+6x+9} dx &= \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = \int (x+3)^{-2} dx = \\
 &= \frac{(x+3)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x+3} + C.
 \end{aligned}$$

Ilyen típusú feladatok megoldásával már foglalkoztunk.

$$\begin{aligned}
 12. \quad \int \frac{1}{x^2+8x+12} dx &= \int \frac{1}{x^2+8x+16-4} dx = \int \frac{1}{(x+4)^2-4} dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1} dx.
 \end{aligned}$$

Helyettesítés: $u = \frac{x+4}{2}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$; $dx = 2 du$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2+8x+12} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{2 du}{u^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2-1} = \\
 &= \begin{cases} F_1(u) = -\frac{1}{2} \operatorname{ar th} u + C_1 = -\frac{1}{4} \ln \frac{1+u}{1-u} + C_1, & \text{ha } |u| < 1, \\ F_2(u) = -\frac{1}{2} \operatorname{ar cth} u + C_2 = -\frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1} + C_2, & \text{ha } |u| > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tehát visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^2+8x+12} dx &= \\
 &= \begin{cases} -\frac{1}{2} \operatorname{ar th} \frac{x+4}{2} + C_1 = -\frac{1}{4} \ln \frac{1+\frac{x+4}{2}}{1-\frac{x+4}{2}} + C_1 = \\ \quad = -\frac{1}{4} \ln \frac{x+6}{-2-x} + C_1, & \text{ha } \left| \frac{x+4}{2} \right| < 1. \\ -\frac{1}{2} \operatorname{ar cth} \frac{x+4}{2} + C_2 = -\frac{1}{4} \ln \frac{\frac{x+4}{2}+1}{\frac{x+4}{2}-1} + C_2 = \\ \quad = -\frac{1}{4} \ln \frac{x+6}{x+2} + C_2, & \text{ha } \left| \frac{x+4}{2} \right| > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$13. \int \frac{1}{x^2 - 10x + 20} dx = \int \frac{1}{x^2 - 10x + 25 - 5} dx = \int \frac{1}{(x-5)^2 - 5} dx =$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x-5}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} dx.$$

Helyettesítés: $u = \frac{x-5}{\sqrt{5}}; \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{5}}; dx = \sqrt{5} du.$

$$\int \frac{1}{x^2 - 10x + 20} dx = \frac{1}{5} \int \frac{\sqrt{5} du}{u^2 - 1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{du}{u^2 - 1} =$$

$$= \begin{cases} F_1(u) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{ar th} u + C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{10} \ln \frac{1+u}{1-u} + C_1, & \text{ha } |u| < 1, \\ F_2(u) = -\frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{ar cth} u + C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} \ln \frac{u+1}{u-1} + C_2, & \text{ha } |u| > 1. \end{cases}$$

Tehát visszahelyettesítve

$$\int \frac{1}{x^2 - 10x + 20} dx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{\sqrt{5}}{10} \ln \frac{1 + \frac{x-5}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{x-5}{\sqrt{5}}} + C_1 = -\frac{\sqrt{5}}{10} \ln \frac{x + \sqrt{5} - 5}{\sqrt{5} + 5 - x} + C_1, & \text{ha } \left| \frac{x-5}{\sqrt{5}} \right| < 1, \\ -\frac{\sqrt{5}}{10} \ln \frac{\frac{x-5}{\sqrt{5}} + 1}{\frac{x-5}{\sqrt{5}} - 1} + C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{10} \ln \frac{x-5 + \sqrt{5}}{x-5 - \sqrt{5}} + C_2, & \text{ha } \left| \frac{x-5}{\sqrt{5}} \right| > 1. \end{cases}$$

$$14. \int \frac{1}{5x^2 + 4x - 6} dx = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{6}{5}} =$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{6}{5} - \frac{4}{25}} =$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{34}{25}} = \frac{1}{5 \cdot \frac{34}{25}} \int \frac{dx}{\left(\frac{x + \frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{34}{25}}}\right)^2 - 1} =$$

$$= \frac{5}{34} \int \frac{dx}{\left(\frac{5x+2}{\sqrt{34}}\right)^2 - 1}.$$

Helyettesítés: $u = \frac{5x+2}{\sqrt{34}}; \frac{du}{dx} = \frac{5}{\sqrt{34}}; dx = \frac{\sqrt{34}}{5} du.$

$$\int \frac{1}{5x^2 + 4x - 6} dx = \frac{5}{34} \int \frac{\frac{\sqrt{34}}{5} du}{u^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{34}} \int \frac{du}{u^2 - 1} =$$

$$= \begin{cases} F_1(u) = -\frac{1}{\sqrt{34}} \operatorname{ar th} u + C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{34}} \ln \frac{1+u}{1-u} + C_1, & \text{ha } |u| < 1, \\ F_2(u) = -\frac{1}{\sqrt{34}} \operatorname{ar cth} u + C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{34}} \ln \frac{u+1}{u-1} + C_2, & \text{ha } |u| > 1. \end{cases}$$

Tehát — visszahelyettesítve —

$$\int \frac{1}{5x^2 + 4x - 6} dx =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{34}} \operatorname{ar th} \frac{5x+2}{\sqrt{34}} + C_1 = -\frac{1}{2\sqrt{34}} \ln \frac{1 + \frac{5x+2}{\sqrt{34}}}{1 - \frac{5x+2}{\sqrt{34}}} + C_1 = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{34}} \ln \frac{5x+2 + \sqrt{34}}{\sqrt{34} - 5x - 2} + C_1, & \text{ha } \left| \frac{5x+2}{\sqrt{34}} \right| < 1, \\ -\frac{1}{\sqrt{34}} \operatorname{ar cth} \frac{5x+2}{\sqrt{34}} + C_2 = -\frac{1}{2\sqrt{34}} \ln \frac{\frac{5x+2}{\sqrt{34}} + 1}{\frac{5x+2}{\sqrt{34}} - 1} + C_2 = \\ = -\frac{1}{2\sqrt{34}} \ln \frac{5x+2 + \sqrt{34}}{5x+2 - \sqrt{34}} + C_2, & \text{ha } \left| \frac{5x+2}{\sqrt{34}} \right| > 1. \end{cases}$$

e) Az integrandus számlálója elsőfokú, nevezője másodfokú polinom. Az integrandus számlálóját két részre bontjuk: az egyik részben előállítjuk a nevező deriváltját, a másik rész egy konstans; így az egyik integrandus $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú, míg a másik az előbbi, d) típusú. A módszert az első kidolgozott példán mutatjuk be.

Gyakorló feladatok

15. $\int \frac{2x-3}{x^2+4x-5} dx = ?$

A nevező deriváltja: $2x+4$. Ennek megfelelően alakítjuk át a számlálót:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{x^2+4x-5} dx &= \int \frac{2x+4-7}{x^2+4x-5} dx = \\ &= \int \frac{2x+4}{x^2+4x-5} dx - 7 \int \frac{dx}{x^2+4x-5}. \end{aligned}$$

Az első integrál értéke: $\ln |x^2+4x-5| + C_0$.
A második az előbbi módszerrel számítható ki.

$$-7 \int \frac{dx}{x^2+4x-5} = -7 \int \frac{dx}{(x+2)^2-9} = -\frac{7}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2-1}.$$

Helyettesítés: $u = \frac{x+2}{3}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$; $dx = 3 du$.

$$-\frac{7}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2-1} = -\frac{7}{9} \int \frac{3 du}{u^2-1} = \frac{7}{3} \int \frac{du}{1-u^2} =$$

$$= \begin{cases} F_1(u) = \frac{7}{3} \operatorname{ar th} u + C = \frac{7}{6} \ln \frac{1+u}{1-u} + C, & \text{ha } |u| < 1. \\ F_2(u) = \frac{7}{3} \operatorname{ar cth} u + C = \frac{7}{6} \ln \frac{u+1}{u-1} + C, & \text{ha } |u| > 1. \end{cases}$$

Tehát — visszahelyettesítve —

$$\begin{aligned} -7 \int \frac{dx}{x^2+4x-5} &= \\ &= \begin{cases} G_1(x) = \frac{7}{3} \operatorname{ar th} \frac{x+2}{3} + C_1 = \frac{7}{6} \ln \frac{1+\frac{x+2}{3}}{1-\frac{x+2}{3}} + C_1 = \\ = \frac{7}{6} \ln \frac{3+x+2}{3-x-2} + C_1 = \frac{7}{6} \ln \frac{5+x}{1-x} + C_1, & \text{ha } \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1, \\ G_2(x) = \frac{7}{3} \operatorname{ar cth} \frac{x+2}{3} + C_2 = \frac{7}{6} \ln \frac{\frac{x+2}{3}+1}{\frac{x+2}{3}-1} + C_2 = \\ = \frac{7}{6} \ln \frac{x+2+3}{x+2-3} + C_2 = \frac{7}{6} \ln \frac{x+5}{x-1} + C_2, & \text{ha } \left| \frac{x+2}{3} \right| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \frac{2x-3}{x^2+4x-5} dx = \ln |x^2+4x-5| + \begin{cases} G_1(x), & \text{ha } \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1, \\ G_2(x), & \text{ha } \left| \frac{x+2}{3} \right| > 1. \end{cases}$$

Az egyenlőtlenséget x -re is felírjuk:

$$\text{Ha } \left| \frac{x+2}{3} \right| < 1, \text{ akkor } -5 < x < 1, \text{ ha } \left| \frac{x+2}{3} \right| > 1, \text{ akkor } x < -5, \text{ ill. } x > 1.$$

16. $\int \frac{5x-6}{x^2-2x+10} dx = ?$ A nevező deriváltja: $2x-2$, ennek megfelelően alakítjuk át a tört számlálóját.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-6}{x^2-2x+10} dx &= \frac{5}{2} \int \frac{2x-\frac{12}{5}}{x^2-2x+10} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x-2-\frac{2}{5}}{x^2-2x+10} dx = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} dx - \int \frac{dx}{x^2-2x+10}. \end{aligned}$$

Az első integrál értéke: $\frac{5}{2} \ln |x^2-2x+10| + C_1$.

A második integrált számítjuk ki:

$$\begin{aligned} -\int \frac{dx}{x^2-2x+10} &= -\int \frac{dx}{x^2-2x+1+9} = -\int \frac{dx}{(x-1)^2+9} = \\ &= -\frac{1}{9} \int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1}. \end{aligned}$$

Helyettesítés: $u = \frac{x-1}{3}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{3}$; $dx = 3 du$.

$$\begin{aligned} -\int \frac{dx}{x^2-2x+10} &= -\frac{1}{9} \int \frac{3 du}{u^2+1} = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2+1} = \\ &= -\frac{1}{3} \arctg \frac{x-1}{3} + C_3. \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \frac{5x-6}{x^3-2x+10} dx = \frac{5}{2} \ln |x^2-2x+10| - \frac{1}{3} \arctg \frac{x-1}{3} + C.$$

17. $\int \frac{3x-6}{x^3+2x+8} dx = ?$ A nevező deriváltja $2x+2$, ennek megfelelően alakítjuk át a számlálót.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-6}{x^3+2x+8} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^3+2x+8} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2-6}{x^3+2x+8} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^3+2x+8} dx - 9 \int \frac{dx}{x^3+2x+8}. \end{aligned}$$

Az első integrál közvetlenül felírható:

$$\frac{3}{2} \ln |x^2+2x+8| + C_1.$$

A második integrál kiszámítása:

$$\begin{aligned} -9 \int \frac{dx}{x^3+2x+8} &= -9 \int \frac{dx}{x^3+2x+1+7} = -9 \int \frac{dx}{(x+1)^2+7} = \\ &= -\frac{9}{7} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}. \end{aligned}$$

Helyettesítés: $u = \frac{x+1}{\sqrt{7}}$; $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{7}}$; $dx = \sqrt{7} du$.

$$\begin{aligned} -9 \int \frac{dx}{x^3+2x+8} &= -\frac{9}{7} \int \frac{\sqrt{7} du}{u^2+1} = -\frac{9}{\sqrt{7}} \int \frac{du}{u^2+1} = \\ &= -\frac{9}{\sqrt{7}} \arctg u + C_2 = -\frac{9}{\sqrt{7}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{7}} + C_2. \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát

$$\int \frac{3x-6}{x^3+2x+8} dx = \frac{3}{2} \ln |x^2+2x+8| - \frac{9}{\sqrt{7}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

f) $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ alakú integrandus

Ha az integrandus $\frac{1}{(x^2+a^2)^n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) alakú, akkor rekurziós formulát alkalmazunk.

Legyen

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \quad \text{és} \quad v' = 1,$$

akkor

$$u' = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \quad \text{és} \quad v = x.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx.$$

A második tagot átalakítjuk úgy, hogy az integrandus számlálójához hozzáadunk a^2 -et, ill. levonunk a^2 -et.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Kifejezzük az utolsó tagot:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Legyen $I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, ill. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, akkor

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n.$$

Gyakorló feladatok

18. Alkalmazzuk a rekurziós formulát $n=1$, ill. $n=2$ esetre.

a) $n=1$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} I_1 = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \\ &= \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C = \\ &= \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

b) $n=2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \left(\frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x}{a} \right) + C = \\ &= \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5} \arctg \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

19. $\int \frac{x}{(x^2+9)^2} dx = ?$ A rekurziós formulát kell alkalmaznunk az $a=3$, I_2 esetére, ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{(x^2+9)^2} dx &= \frac{1}{2 \cdot 9} \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{2 \cdot 27} \arctg \frac{x}{3} + C = \\ &= \frac{1}{18} \frac{x}{x^2+9} + \frac{1}{54} \arctg \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

20. $\int \frac{1}{(x^2+4x+20)^3} dx = ?$ A rekurziós formulát most nem lehet közvetlenül alkalmazni, mert a zárójelen belüli kifejezés nem x^2+a^2 alakú. Átalakítjuk az integrandus nevezőjét, majd helyettesítünk.

$$\int \frac{1}{(x^2+4x+20)^3} dx = \int \frac{dx}{[(x+2)^2+16]^3}.$$

Legyen $x+2 = u$, ekkor $dx = du$, és az integrál:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+20)^3} = \int \frac{du}{(u^2-16)^3} = I_3.$$

A rekurziós képletben: $a=4$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+4x+20)^3} &= \\ &= \frac{1}{4 \cdot 16} \frac{u}{(u^2+16)^2} + \frac{3}{8 \cdot 256} \frac{u}{u^2+16} + \frac{3}{8 \cdot 1024} \arctg \frac{u}{4} + C = \\ &= \frac{1}{64} \frac{x+2}{[(x+2)^2+16]^2} + \frac{3}{2048} \frac{x+2}{(x+2)^2+16} + \frac{3}{8192} \arctg \frac{x+2}{4} + C. \end{aligned}$$

2. Parciális törtekre bontás módszere

Legyen most az integrandus tetszőleges racionális törtfüggvény, vagyis $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ alakú, ahol $p(x)$ egy m -edfokú, $q(x)$ pedig egy n -edfokú polinom. A tárgyalás során feltehetjük, hogy $m < n$, vagyis $f(x)$ valódi törtfüggvény. Ellenkező esetben ui. az osztás elvégzésével $f(x)$ -et felbonthatjuk egy racionális egész függvény és egy racionális valódi törtfüggvény összegére; előbbi egyszerűen integrálható, így elegendő csak az utóbbi integrálásával foglalkoznunk. Feltehetjük továbbá azt is, hogy $\frac{p(x)}{q(x)}$ már nem egyszerűsíthető, és hogy a nevező legmagasabb fokú tagjának együtthatója 1.

A racionális törtfüggvényeknek mindig létezik zárt alakú integrálja. Ahhoz azonban, hogy ezt az integrált ki is tudjuk számítani, ismernünk kell a nevező gyökeit. Az alábbiakban előbb egyszerűbb, majd bonyolultabb eseteket tárgyalunk. Mindegyi-

ket visszavezetjük az ún. *parciális törtekre bontás* segítségével az 1. a)...f) pontokban tárgyalt egyszerű speciális típusú integrálok meghatározására.

a) *A nevezőnek csak egyszeres, valós gyökei vannak.* Az algebrából ismeretes, hogy ha $q(x)$ gyökei x_1, x_2, \dots, x_n , akkor $q(x)$ egyértelműen felírható az ún. *gyöktényezős alakban*:

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Igazolható, hogy ekkor $\frac{p(x)}{q(x)}$ az alábbi résztörtökre (parciális törtökre) bontható:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)} = \\ &= \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_n}{x - x_n}. \end{aligned}$$

Az ismeretlen A_1, A_2, \dots, A_n számok meghatározására a példák megoldása során három módszert mutatunk be. (A példákban az ismeretlen számlálók — a könnyebb megkülönböztethetőség kedvéért — index nélküli A, B, \dots nagybetűkkel jelöljük.)

Gyakorló feladatok

1. $\int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx = ?$ Az integrandust — amelynek számlálója konstans és nevezője másodfokú — gyöktényezős alakban írtuk fel. Ebből látható, hogy a nevezőnek csak egyszeres valós gyökei vannak. Vagyis az alábbi alakú résztörtökre bontható:

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+4}.$$

A felírt azonosság x bármely értékére egyenlő (amelyre értelmezett). A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, vagyis ezzel a bal és jobb oldal nevezője, s így számlálója is azonosan egyenlő lesz:

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A(x+4) + B(x-2)}{(x-2)(x+4)},$$

tehát

$$1 = A(x+4) + B(x-2).$$

A két oldal csak akkor lehet azonosan egyenlő, ha az egyenlő foksámú tagok együtthatói rendre egyenlők. Az *együtthatók egyeztetése* céljából a jobb oldalt x hatványai szerint rendezzük:

$$1 = Ax + 4A + Bx - 2B; \quad 1 = (A+B)x + 4A - 2B.$$

A bal oldalon elsőfokú tag nincs, tehát a megfelelő együttható a jobb oldalon is zérus: $A+B=0$; a konstans a bal oldalon 1, a jobb oldalon $4A-2B$, és e kettőnek egyenlőnek kell lennie. Felírva a két kapcsolatot, egy olyan elsőfokú kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, amelyből az ismeretlen A és B együtthatók meghatározhatók:

$$A+B=0$$

$$4A-2B=1$$

$$A=-B; \quad 6A=1; \quad A=\frac{1}{6}; \quad B=-\frac{1}{6}.$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-2)(x+4)} dx &= \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x+4} = \\ &= \frac{1}{6} \ln|x-2| - \frac{1}{6} \ln|x+4| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-2}{x+4} \right| + C. \end{aligned}$$

A parciális tört együtthatóinak meghatározására most ismertetett módszer, az ún. *együtthatók egyeztetése*, mint látni fogjuk, *minden esetben alkalmazható*, vagyis akkor is, ha a nevezőnek többszörös valós vagy komplex gyökei is vannak. Most megismerkedünk egy másik — legtöbbször kevesebb számolással járó — módszerrel, ez azonban csak akkor alkalmazható, ha a nevezőnek csakis egyszeres valós gyökei vannak.

Írjuk fel újra az előbbi számlálók azonosságát!

$$1 = A(x+4) + B(x-2).$$

Az azonosság x bármely értékére igaz. Legyenek a tetszőlegesen választható x értékek éppen a nevező gyökei, vagyis $x_1 = -4$, ill. $x_2 = 2$. Ezeket behelyettesítve, mindig csak az egyik ismeretlen marad meg, és így annyi egyismeretlenes egyenletet kapunk, ahány ismeretlen van.

A két egyenlet a jelen esetben:

$$1 = 6A; \quad A = \frac{1}{6} \quad \text{és} \quad 1 = -6B; \quad B = -\frac{1}{6}.$$

Az együtthatók meghatározásának harmadik módszere az ún. *differenciálási módszer*, amelynek egyszeres valós gyökökre vonatkozó alakját az alábbiakban ismertetjük.

Legyen

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n}.$$

Igazolható, hogy

$$A_1 = \frac{p(x_1)}{q'(x_1)}; \quad A_2 = \frac{p(x_2)}{q'(x_2)}; \quad A_n = \frac{p(x_n)}{q'(x_n)}.$$

Alkalmazzuk ezt a módszert az előbb megoldott feladatra!

$$\frac{1}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{x^2+2x-8} = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

$$q'(x) = 2x+2.$$

$$A_1 = \frac{p(2)}{q'(2)} = \frac{1}{6}; \quad A_2 = \frac{p(-4)}{q'(-4)} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}.$$

Az együtthatók természetesen megegyeznek az előbbieken kapottakkal.

2. $\int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} dx = ?$ A nevező gyöktényezős alakban van, így közvetlenül felírhatjuk az integrandus parciális törtekre bontott alakját.

$$\frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-4};$$

$$14 \equiv A(x+2)(x-4) + B(x-3)(x-4) + C(x+2)(x-3).$$

Mivel az integrandus nevezőjében csak egyszeres elsőfokú gyöktényezők vannak, az ismeretlen együtthatók a nevező gyökeinek behelyettesítésével határozhatók meg a leggyorsabban.

$$\text{Legyen } x=3, \text{ akkor } 14=5(-1)A; A=-\frac{14}{5}.$$

$$\text{Legyen } x=-2, \text{ akkor } 14=(-5)(-6)B; B=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}.$$

$$\text{Legyen } x=4, \text{ akkor } 14=6 \cdot 1 C; C=\frac{7}{3}.$$

Az együtthatókat a differenciálási módszerével is meghatározhatjuk:

$q(x) = (x-3)(x+2)(x-4)$, és így a nevező deriváltja a szorzat deriválási szabálya alapján számítva:

$$q'(x) = (x+2)(x-4) + (x-3)(x-4) + (x-3)(x+2).$$

A kijelölt szorzást nem végezzük el, mert így a derivált helyettesítési értéke könnyebben számolható ki.

$$A = \frac{p(3)}{q'(3)} = \frac{14}{5(-1)} = -\frac{14}{5}.$$

$$B = \frac{p(-2)}{q'(-2)} = \frac{14}{(-5)(-6)} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

$$C = \frac{p(4)}{q'(4)} = \frac{14}{1 \cdot 6} = \frac{7}{3}.$$

Az együtthatók ismeretében az integrál meghatározható.

$$\begin{aligned} \int \frac{14}{(x-3)(x+2)(x-4)} dx &= \\ &= \int \left(-\frac{14}{5} \frac{1}{x-3} + \frac{7}{15} \frac{1}{x+2} + \frac{7}{3} \frac{1}{x-4} \right) dx = \\ &= -\frac{14}{5} \int \frac{dx}{x-3} + \frac{7}{15} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x-4} = \\ &= -\frac{14}{5} \ln|x-3| + \frac{7}{15} \ln|x+2| + \frac{7}{3} \ln|x-4| + C. \end{aligned}$$

3. $\int \frac{x^3-4}{5x^3-x} dx = ?$ A számláló és nevező fokszáma megegyezik, ezért előbb a számlálót osztjuk a nevezővel, azután alkalmazzuk a parciális törtekre bontás módszerét:

$$(x^3-4):(5x^3-x) = \frac{1}{5}$$

$$\frac{-x^3 + \frac{x}{5}}{\frac{x}{5} - 4}$$

$$\int \frac{x^3-4}{5x^3-x} dx = \int \left(\frac{1}{5} + \frac{\frac{x}{5}-4}{5x^3-x} \right) dx = \int \frac{dx}{5} + \frac{1}{25} \int \frac{x-20}{x^3-\frac{1}{5}x} dx.$$

$$3A = -1; \quad A = -\frac{1}{3}. \quad B = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

A és B értékét a differenciálás módszerével is meghatározzuk:

$$p(x) = 5x - 6; \quad q(x) = (x-1)(x+2); \quad q'(x) = x+2+x-1 = 2x+1.$$

$$A = \frac{p(1)}{q'(1)} = \frac{-1}{3}; \quad B = \frac{p(-2)}{q'(-2)} = \frac{-16}{-3} = \frac{16}{3}.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{(x-1)(x+2)} dx &= \\ &= \int (x^2 - x + 3) dx - \int \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{x-1} + \frac{16}{3} \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{16}{3} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

b) A nevezőnek csak valós gyökei vannak, de többszörös gyökök is előfordulnak. Ekkor $q(x)$ gyöktényezős alakja:

$$q(x) = (x-x_1)^{r_1} (x-x_2)^{r_2} \dots (x-x_r)^{r_r}, \text{ ahol } \sum_{i=1}^r r_i = n;$$

tehát az n -edfokú $q(x)$ polinomnak r különböző valós gyöke van.

Igazolható, hogy ebben az esetben $\frac{p(x)}{q(x)}$ az alábbi alakú résztörtekre bontható:

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{(x-x_1)^{r_1} (x-x_2)^{r_2} \dots (x-x_r)^{r_r}} = \\ &= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x-x_1)^{r_1}} + \\ &+ \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{A_{2r_2}}{(x-x_2)^{r_2}} + \dots \\ &\dots + \frac{A_{r1}}{x-x_r} + \frac{A_{r2}}{(x-x_r)^2} + \dots + \frac{A_{rr_r}}{(x-x_r)^{r_r}}. \end{aligned}$$

Gyakorló feladatok

5. $\int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} dx = ?$ A nevezőnek csak egy gyöke van, és az valós és háromszoros. Ezenkor a parciális törtek együtthatói az együtthatók egyeztetésével határozhatók meg a legegyszerűbben. Az együtthatókat ismét index nélküli nagybetűkkel jelöljük.

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}.$$

A jobb oldalt közös (a bal oldallal egyező) nevezőre hozva, a számlálókra az alábbi azonosság érvényes:

$$3x^2+4x-6 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C.$$

A jobb oldalt is x fogyó hatványai szerint rendezzük:

$$3x^2+4x-6 = A(x^2+4x+4) + Bx+2B+C;$$

$$3x^2+4x-6 = Ax^2 + (4A+B)x + 4A+2B+C.$$

Az együtthatók egyeztetéséből adódó egyenletrendszer:

$$A=3$$

$$4A+B=4$$

$$4A+2B+C=-6$$

$$A=3; \quad B=4-12=-8; \quad C=-6-12+16=-2.$$

Ha a differenciálás módszerét akarjuk alkalmazni az egyetlen — többszörös — valós gyökkel rendelkező nevező esetén parciális törtek számlálóinak meghatározására, akkor ismernünk kell a $p(x)$ -szel jelölt számláló deriváltjait. Ha ugyanis $\frac{p(x)}{q(x)} =$

$= \frac{p(x)}{(x-x_1)^n}$ alakú, akkor a parciális törtekre bontott alak:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n},$$

és ekkor

$$A_1 = \frac{p^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!}; \quad A_2 = \frac{p^{(n-2)}(x_1)}{(n-2)!}; \quad \dots;$$

$$A_n = \frac{p(x_1)}{0!} = p(x_1), \text{ általában } A_k = \frac{p^{(n-k)}(x_1)}{(n-k)!}, \text{ ahol } 1 \leq k \leq n.$$

Példákra visszatérve:

$$p(x) = 3x^2 + 4x - 6; \quad p'(x) = 6x + 4; \quad p''(x) = 6.$$

Most a megfelelő számlálók:

$$A = \frac{p''(-2)}{2!} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$B = \frac{p'(-2)}{1!} = \frac{-12+4}{1} = -8;$$

$$C = p(-2) = 3 \cdot 4 + 4(-2) - 6 = -2.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} dx &= \int \left[\frac{3}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+2)^3} \right] dx = \\ &= 3 \ln|x+2| + \frac{8}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} + C. \end{aligned}$$

Felhasználhatjuk a feladat megoldásához a nevező gyökeinek helyettesítését is, de mivel egyetlen gyöktényező van, ezért csak egy ismeretlent tudunk ezzel az eljárással meghatározni. Felírjuk a parciális tört alakot:

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}.$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, majd a két (egyenlő nevezőjű) tört számlálóját tesszük egyenlővé:

$$\frac{3x^2+4x-6}{(x+2)^3} \equiv \frac{A(x+2)^2 + B(x+2) + C}{(x+2)^3};$$

$$3x^2+4x-6 \equiv A(x+2)^2 + B(x+2) + C.$$

Behelyettesítjük az $x = -2$ értéket (ez az egyetlen gyök):

$$12 - 8 - 6 = C; \quad C = -2.$$

Több együtthatót nem tudunk meghatározni ezzel a módszerrel. A további két ismeretlent úgy számítjuk ki, hogy az azonosságban x helyébe lehetőleg kis egész számokat helyettesítünk, majd az így kapott kétismeretlenes egyenletrendszert megoldjuk.

Legyen mondjuk $x=0$, ill. -1 .

$$-6 = 4A + 2B - 2$$

$$3 - 4 - 6 = A + B - 2$$

$$B = -2 - 2A$$

$$-7 = A - 2 - 2A - 2$$

$$A = 3; \quad B = -2 - 6 = -8.$$

$$6. \quad \int \frac{x^3 - 4x^2 + 2}{(x-3)^4} dx = ?$$

I. Megoldás:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 2}{(x-3)^4} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x-3)^3} + \frac{D}{(x-3)^4}.$$

A határozatlan együtthatókat először a differenciálás módszerével számítjuk ki.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2; \quad f'(x) = 3x^2 - 8x; \quad f''(x) = 6x - 8; \quad f'''(x) = 6;$$

$$A = \frac{f'''(3)}{3!} = \frac{6}{6} = 1; \quad B = \frac{f''(3)}{2!} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$C = \frac{f'(3)}{1!} = \frac{27-24}{1} = 3; \quad D = f(3) = 27-36+2 = -7.$$

II. Megoldás:

Határozzuk meg az együtthatókat az együtthatók egyeztetése útján is:

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 2}{(x-3)^4} \equiv \frac{A(x-3)^3 + B(x-3)^2 + C(x-3) + D}{(x-3)^4}.$$

$$x^3 - 4x^2 + 2 \equiv A(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + B(x^2 - 6x + 9) + Cx - 3C + D;$$

$$x^3 - 4x^2 + 2 \equiv Ax^3 + (-9A+B)x^2 + (27A-6B+C)x - 27A+9B-3C+D;$$

Az ebből leolvasható egyenletrendszer:

$$A = 1$$

$$-9A + B = -4$$

$$27A - 6B + C = 0$$

$$-27A + 9B - 3C + D = 2$$

$$B = -4 + 9 = 5;$$

$$C = 6B - 27A = 30 - 27 = 3;$$

$$D = 2 + 27A - 9B + 3C = 2 + 27 - 45 + 9 = -7.$$

Mindkét módszerrel természetesen ugyanazokat az együtthatókat kaptuk.

Az integrál tehát:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 4x^2 + 2}{(x-3)^4} dx &= \int \left[\frac{1}{x-3} + \frac{5}{(x-3)^2} + \frac{3}{(x-3)^3} - \frac{7}{(x-3)^4} \right] dx = \\ &= \ln|x-3| + 5 \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + 3 \frac{(x-3)^{-2}}{-2} - 7 \frac{(x-3)^{-3}}{-3} + C = \\ &= \ln|x-3| - \frac{5}{x-3} - \frac{3}{2} \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{7}{3} \frac{1}{(x-3)^3} + C.\end{aligned}$$

$$7. \int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} dx = ?$$

$$\frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-3} + \frac{B_2}{(x-3)^2}.$$

(Ilyen esetben a differenciálás módszere már nagyon komplikált, ezért nem alkalmazzuk.)

I. Megoldás:

Meghatározzuk az együtthatókat az egyenlő fokszámú tagok együtthatóinak összehasonlításával.

$$\frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} \equiv \frac{A(x-3)^2 + B_1(x-1)(x-3) + B_2(x-1)}{(x-1)(x-3)^2}.$$

$$5x-3 \equiv A(x-3)^2 + B_1(x-1)(x-3) + B_2(x-1);$$

$$5x-3 \equiv A(x^2-6x+9) + B_1(x^2-4x+3) + B_2x-B_2;$$

$$5x-3 \equiv (A+B_1)x^2 + (-6A-4B_1+B_2)x + 9A+3B_1-B_2.$$

Az adódó egyenletrendszer:

$$A+B_1=0$$

$$-6A-4B_1+B_2=5$$

$$9A+3B_1-B_2=-3$$

$$A=-B_1$$

$$6B_1-4B_1+B_2=5$$

$$-9B_1+3B_1-B_2=-3$$

$$A=-B_1$$

$$2B_1+B_2=5$$

$$-6B_1-B_2=-3$$

$$2B_1-6B_1=2; \quad B_1=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

$$-1+B_2=5; \quad B_2=6.$$

$$A=\frac{1}{2}.$$

II. Megoldás:

A nevező gyökeinek behelyettesítésével csak részben határozhatjuk meg az együtthatókat, mert a nevezőnek többszörös gyökei vannak.

$$5x-3 \equiv A(x-3)^2 + B_1(x-1)(x-3) + B_2(x-1).$$

A megfelelő gyökök $x=1$ és 3 , ezeket behelyettesítjük:

$$\text{ha } x=1, \quad 5-3=4A; \quad A=\frac{1}{2};$$

$$\text{ha } x=3, \quad 12=2B_2; \quad B_2=6.$$

Több együtthatót ezzel a módszerrel már nem tudunk meghatározni, ezért a két együttható ismeretében egy tetszőleges x érték behelyettesítése révén határozzuk meg B_1 értékét.

Legyen $x=0$.

$$-3=9A+3B_1-B_2;$$

$$-3=\frac{9}{2}+3B_1-6;$$

$$3B_1=3-\frac{9}{2}=-\frac{3}{2}; \quad B_1=-\frac{1}{2}.$$

Az integrál tehát:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-3}{(x-1)(x-3)^2} dx &= \int \left[\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x-3} + \frac{6}{(x-3)^2} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-3} + 6 \int \frac{dx}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x-3| + 6 \frac{(x-3)^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{6}{x-3} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x-3} \right| - \frac{6}{x-3} + C.\end{aligned}$$

8. $\int \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2} dx = ?$ A nevezőben két kétszeres gyök van.
A parciális törtek:

$$\frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2};$$

közös nevezőre hozva:

$$\begin{aligned} \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2} &= \\ &= \frac{A_1(x+1)(x-1)^2 + A_2(x-1)^2 + B_1(x-1)(x+1)^2 + B_2(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}, \end{aligned}$$

I. Megoldás:

A_1, A_2, B_1, B_2 értékét az együtthatók egyeztetésével számítjuk ki. Ezért fogyó hatványok szerint rendezzük a számlálót:

$$\begin{aligned} 2x-4 &\equiv A_1(x+1)(x^2-2x+1) + A_2(x^2-2x+1) + \\ &+ B_1(x-1)(x^2+2x+1) + B_2(x^2+2x+1); \\ 2x-4 &\equiv A_1(x^3+x^2-2x^2-2x+x+1) + A_2(x^2-2x+1) + \\ &+ B_1(x^3-x^2+2x^2-2x+x-1) + B_2(x^2+2x+1); \\ 2x-4 &\equiv (A_1+B_1)x^3 + (-A_1+A_2+B_1+B_2)x^2 + \\ &+ (-A_1-2A_2-B_1+2B_2)x + A_1+A_2-B_1+B_2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= 0 \\ -A_1 + A_2 + B_1 + B_2 &= 0 \\ -A_1 - 2A_2 - B_1 + 2B_2 &= 2 \\ \underline{A_1 + A_2 - B_1 + B_2 = -4} \end{aligned}$$

$$A_1 = -B_1 \quad \text{I.}$$

$$2B_1 + A_2 + B_2 = 0 \quad \text{II.}$$

$$-2A_2 + 2B_2 = 2 \quad \text{III.}$$

$$\underline{-2B_1 + A_2 + B_2 = -4} \quad \text{IV.}$$

II.-IV.:

$$4B_1 = 4; \quad B_1 = 1.$$

I.-be:

$$A_1 = -1.$$

Ezeket felhasználva:

$$2 + A_2 + B_2 = 0 \quad \text{II.}$$

$$\underline{A_2 - B_2 = -1} \quad \text{III.}$$

II. + III.

$$2A_2 + 2 = -1; \quad A_2 = -\frac{3}{2}.$$

III.-ba:

$$B_2 = A_2 + 1 = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}.$$

Az együtthatók tehát:

$$A_1 = -1; \quad A_2 = -\frac{3}{2}; \quad B_1 = 1; \quad B_2 = -\frac{1}{2}.$$

II. Megoldás:

Az együtthatókat a nevező gyökeinek és alkalmasan választott x értékeknek a behelyettesítésével is meghatározzuk.

$$2x-4 \equiv A_1(x+1)(x-1)^2 + A_2(x-1)^2 + B_1(x-1)(x+1)^2 + B_2(x+1)^2.$$

$$\text{Legyen } x = -1, \text{ akkor } -6 = 4A_2; \quad A_2 = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Legyen } x = 1, \text{ akkor } -2 = 4B_2; \quad B_2 = -\frac{1}{2}.$$

Legyenek $x=0$, ill. $x=2$ az önkényesen választott x értékek, akkor

$$-4 = A_1 + A_2 - B_1 + B_2$$

$$\underline{0 = 3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2}$$

Ide behelyettesítjük A_1 és B_1 ismert értékét, ezután már csak kétismeret-
lenes egyenletrendszert kell megoldanunk.

$$-4 = A_1 - \frac{3}{2} - B_1 - \frac{1}{2}$$

$$0 = 3A_1 - \frac{3}{2} + 9B_1 - \frac{9}{2}$$

$$-2 = A_1 - B_1 \quad \text{I.}$$

$$2 = A_1 + 3B_1 \quad \text{II.}$$

II. - I.

$$4 = 4B_1; \quad B_1 = 1.$$

$$A_1 = B_1 - 2 = -1.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-4}{(x+1)^2(x-1)^2} dx &= \\ &= \int \left[\frac{-1}{x-1} - \frac{3}{2} \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \\ &= -\ln|x+1| - \frac{3}{2} \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \\ &= -\ln|x+1| + \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} + \ln|x-1| + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + C = \\ &= \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{3}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} + C. \end{aligned}$$

9. $\int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 5}{(x+2)^2(x-1)^2} dx = ?$ Az integrandust parciális törtre bont-
juk, majd az ismeretlen együtthatókat az előbbi feladat megoldása során
felhasznált mindkét módszerrel meghatározzuk.

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 5}{(x+2)^2(x-1)^2} &= \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2}; \\ \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 5}{(x+2)^2(x-1)^2} &= \\ &= \frac{A_1(x+2)(x-1)^2 + A_2(x-1)^2 + B_1(x-1)(x+2)^2 + B_2(x+2)^2}{(x+2)^2(x-1)^2}; \end{aligned}$$

I. Megoldás:

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + 2x + 5 &\equiv A_1(x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2) + A_2(x^3 - 2x + 1) + \\ &+ B_1(x^2 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4) + B_2(x^2 + 4x + 4) \equiv \\ &\equiv (A_1 + B_1)x^3 + (A_2 + 3B_1 + B_2)x^2 + (-3A_1 - 2A_2 + 4B_2)x + \\ &+ 2A_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2; \end{aligned}$$

Az együtthatók egyeztetéséből adódó egyenletrendszer:

$$A_1 + B_1 = 2 \quad \text{I.}$$

$$A_2 + 3B_1 + B_2 = -1 \quad \text{II.}$$

$$-3A_1 - 2A_2 + 4B_2 = 2 \quad \text{III.}$$

$$2A_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2 = 5 \quad \text{IV.}$$

Az első egyenletből:

$$A_1 = 2 - B_1, \quad \text{I.}$$

ezt behelyettesítve:

$$A_2 + 3B_1 + B_2 = -1 \quad \text{II.}$$

$$-6 + 3B_1 - 2A_2 + 4B_2 = 2 \quad \text{III.}$$

$$4 - 2B_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2 = 5 \quad \text{IV.}$$

A második egyenletből:

$$3B_1 = -A_2 - B_2 - 1, \quad \text{II.}$$

ezt behelyettesítve:

$$-A_2 - B_2 - 1 - 2A_2 + 4B_2 = 8 \quad \text{III.}$$

$$2A_2 + 2B_2 + 2 + A_2 + 4B_2 = 1 \quad \text{IV.}$$

rendezve:

$$3B_2 - 3A_2 = 9 \quad \text{III.}$$

$$3A_2 + 6B_2 = -1 \quad \text{IV.}$$

III. + IV.:

$$9B_2 = 8; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

$$3A_2 + \frac{16}{3} = -1; \quad A_2 = -\frac{19}{9}.$$

Visszahelyettesítve II.-be:

$$3B_1 = \frac{19}{9} - \frac{8}{9} - \frac{9}{9} = \frac{2}{9}; \quad B_1 = \frac{2}{27}.$$

Visszahelyettesítve I.-be:

$$A_1 = 2 - \frac{2}{27} = \frac{52}{27}.$$

Tehát a kapott együtthatók:

$$A_1 = \frac{52}{27}; \quad A_2 = -\frac{19}{9}; \quad B_1 = \frac{2}{27}; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

II. Megoldás:

Az együtthatókat meghatározzuk még a nevező gyökhelyeinek, ill. tetszőleges más x értékeknek behelyettesítésével is. Felírjuk újra a számlálókra adódó azonosságot:

$$2x^3 - x^2 + 2x + 5 \equiv A_1(x+2)(x-1)^2 + A_2(x-1)^2 + B_1(x-1)(x+2)^2 + B_2(x+2)^2.$$

A nevező gyökei 1 és -2, ezért legyen $x=1$, akkor

$$2-1+2+5 = 9B_2; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Legyen } x=-2, \text{ akkor } -16-4-4+5 = 9A_2; \quad A_2 = -\frac{19}{9}.$$

Legyen $x=0$, ill. $x=-1$ (ezek már tetszőleges számok); akkor

$$5 = 2A_1 + A_2 - 4B_1 + 4B_2$$

$$-2-1-2+5 = 4A_1 + 4A_2 - 2B_1 + B_2$$

Behelyettesítjük A_2 és B_2 értékét, majd megoldjuk a kétismeretlenes egyenletrendszert:

$$5 = 2A_1 - \frac{19}{9} - 4B_1 + \frac{32}{9} \quad \text{I.}$$

$$0 = 4A_1 - \frac{76}{9} - 2B_1 + \frac{8}{9} \quad \text{II.}$$

$$\frac{45}{9} - \frac{13}{9} = 2A_1 - 4B_1 \quad \text{I.}$$

$$\frac{68}{9} = 4A_1 - 2B_1 \quad \text{II.}$$

$$\frac{32}{9} = 2A_1 - 4B_1 \quad \text{I.}$$

$$\frac{68}{9} = 4A_1 - 2B_1 \quad \text{II.}$$

$-2 \cdot \text{I.} + \text{II.}:$

$$+\frac{4}{9} = 6B_1; \quad B_1 = \frac{2}{27}.$$

$$2A_1 = \frac{32}{9} + \frac{8}{27}; \quad A_1 = \frac{16}{9} + \frac{4}{27} = \frac{52}{27}.$$

Az együtthatók tehát

$$A_1 = \frac{52}{27}; \quad A_2 = -\frac{19}{9}; \quad B_1 = \frac{2}{27}; \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

A feladat megoldása:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - x^2 + 2x + 5}{(x+2)^2(x-1)^2} dx &= \\ &= \int \left[\frac{52}{27} \frac{1}{x+2} - \frac{19}{9} \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{27} \frac{1}{x-1} + \frac{8}{9} \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \\ &= \frac{52}{27} \ln|x+2| - \frac{19}{9} \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + \frac{2}{27} \ln|x-1| + \frac{8}{9} \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{52}{27} \ln|x+2| + \frac{19}{9} \frac{1}{x+2} + \frac{2}{27} \ln|x-1| - \frac{8}{9} \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

c) A $\frac{p(x)}{q(x)}$ alakú integrandus nevezőjének, $q(x)$ -nek, nem minden gyöke valós. Mint az algebrából ismeretes, a komplex gyök-

kök párosával lépnek fel: ha egy z_0 komplex szám gyöke $q(x)$ -nek, akkor konjugáltja, \bar{z}_0 szintén gyök. Az ezeknek megfelelő elsőfokú gyöktényező, $(x - z_0)$, ill. $(x - \bar{z}_0)$, már nem valós kifejezés, azonban a konjugált gyökök gyöktényezőinek szorzata egy valós másodfokú gyöktényezőt ad, amely nem bontható fel valós elsőfokú kifejezések szorzatára. Ha a nevezőnek többszörös valós gyöktényezői, valamint egyszeres komplex gyöktényezői vannak, vagyis a nevező gyöktényezősz alakja

$$q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} (x^2 + b_1x + c_1) \dots (x^2 + b_sx + c_s),$$

akkor

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1i}}{(x - x_1)^i} + \dots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x - x_r)^j} +$$

$$+ \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{B_sx + C_s}{x^2 + b_sx + c_s}.$$

Amennyiben a nevezőnek többszörös komplex gyökei is vannak, vagyis a valós elsőfokú gyöktényezők szorzatára nem bontható másodfokú gyöktényezőknek egynél magasabb hatványa is szerepel, akkor a nevező:

$$q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_r)^{\alpha_r} (x^2 + b_1x + c_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + b_sx + c_s)^{\beta_s},$$

és a parciális tört alakja:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{\alpha_1} \frac{A_{1i}}{(x - x_1)^i} + \dots + \sum_{j=1}^{\alpha_r} \frac{A_{rj}}{(x - x_r)^j} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\beta_1} \frac{B_{1k}x + C_{1k}}{(x^2 + b_1x + c_1)^k} + \dots + \sum_{l=1}^{\beta_s} \frac{B_{sl}x + C_{sl}}{(x^2 + b_sx + c_s)^l}.$$

Megjegyzés: A feladatokban az együtthatókat index nélküli nagybetűkkel jelöljük.

Gyakorló feladatok

10. $\int \frac{5}{x(x^2+4)} dx = ?$ A nevező nem alakítható át elsőfokú tényezők szorzatává, hiszen az (x^2+4) tényező diszkriminánsa $D < 0$. Tehát az integrandus parciális tört alakja a következő:

$$\frac{5}{x(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4};$$

$$\frac{5}{x(x^2+4)} \equiv \frac{A(x^2+4) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+4)}.$$

A számlálók azonossága — x hatványai szerint rendezve —

$$5 \equiv (A+B)x^2 + Cx + 4A.$$

Az együtthatók egyeztetéséből adódó egyenletrendszer:

$$A+B=0$$

$$C=0$$

$$4A=5$$

$$A = \frac{5}{4}; \quad B = -\frac{5}{4}; \quad C = 0.$$

Tehát:

$$\int \frac{5}{x(x^2+4)} dx = \int \left(\frac{5}{4} \frac{1}{x} - \frac{5}{4} \frac{x}{x^2+4} \right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{5}{4} \frac{1}{x} - \frac{5}{8} \frac{2x}{x^2+4} \right) dx = \frac{5}{4} \ln|x| - \frac{5}{8} \ln(x^2+4) + C =$$

$$= \frac{5}{8} \ln x^2 - \frac{5}{8} \ln(x^2+4) + C = \frac{5}{8} \ln \frac{x^2}{x^2+4} + C.$$

Meghatározhatjuk az ismeretlen együtthatókat alkalmas x értékek helyettesítésével is, bár — mint látni fogjuk — ez a módszer jelen esetben nem egyszerűbb.

$$5 \equiv A(x^2+4) + Bx^2 + Cx.$$

Legyen $x=0$ (az egyetlen valós gyök), akkor $5=4A$, és $A=\frac{5}{4}$.

Legyen $x=1$ és $x=-1$ a két tetszőleges helyettesítési érték; ezekből

$$5 = \frac{5}{4} \cdot 5 + B + C \quad \text{I.}$$

$$5 = \frac{5}{4} \cdot 5 + B - C \quad \text{II.}$$

I. + II.:

$$10 = \frac{50}{4} + 2B; \quad B = -\frac{5}{4}.$$

$$C = 5 - \frac{25}{4} + \frac{5}{4} = 0.$$

$$11. \int \frac{2x^2}{x^4-1} dx = \int \frac{2x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} dx = \int \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} dx = ?$$

A nevező két elsőfokú egyszerűs gyöktényezőt és egy elsőfokú tényezőzők szorzatára nem bontható másodfokú egyszerűs gyöktényezőt tartalmaz. Végezzük el a parciális törtre bontást:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} &\equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}; \\ \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} &\equiv \\ &\equiv \frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x^2+1)}; \end{aligned}$$

$$2x^2 \equiv A(x^3 - x^2 + x - 1) + B(x^3 + x^2 + x + 1) + C(x^3 - x) + D(x^2 - 1);$$

$$2x^2 \equiv (A+B+C)x^3 + (-A+B+D)x^2 + (A+B-C)x - A+B-D.$$

Az együtthatók egyeztetéséből felírható egyenletrendszer:

$$A+B+C=0 \quad \text{I.}$$

$$-A+B+D=2 \quad \text{II.}$$

$$A+B-C=0 \quad \text{III.}$$

$$-A+B-D=0 \quad \text{IV.}$$

I. - III.

$$2C=0; \quad C=0.$$

III.-ba:

$$A+B=0 \quad A=-B$$

$$2B+D=2 \quad \text{II.}$$

$$2B-D=0 \quad \text{IV.}$$

$$4B=2; \quad B=\frac{1}{2}; \quad A=-\frac{1}{2}; \quad D=1.$$

A keresett együtthatók tehát:

$$A=-\frac{1}{2}; \quad B=\frac{1}{2}; \quad C=0; \quad D=1.$$

Most meghatározzuk az együtthatókat alkalmasan választott x értékek behelyettesítésével is:

$$2x^2 \equiv A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1).$$

$$\text{Legyen } x=1 \text{ (az egyik valós gyök), akkor } 2=4B; \quad B=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Legyen } x=-1 \text{ (a másik valós gyök), akkor } 2=-4A; \quad A=-\frac{1}{2}.$$

Ezenkívül valasszuk még x értékét 0-nak és 2-nek. Ekkor

$$0 = -A + B - D$$

$$8 = 5A + 15B + 6C + 3D$$

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - D$$

$$8 = -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} + 6C + 3D$$

$$D=1$$

$$3 = 6C + 3; \quad C=0.$$

A feladat megoldása tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2}{x^4-1} dx &= \int \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \arctg x + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \arctg x + C. \end{aligned}$$

12. $\int \frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2} dx = ?$ A nevezőben levő másodfokú polinom nem alakítható valós gyöktényezőkre szoroztatva, mert az $x^2-2x+5=0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa negatív ($D=4-20=-16$). A tört nevezőjében tehát kétszeres komplex gyökök vannak.

$$\frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2-2x+5)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+5}.$$

A jobb oldalon közös nevezőre hozunk, majd az egyenlő fokszámú tagok együtthatóit egyenlőségét felhasználva felírjuk az ismeretlen A, B, C, D együtthatók egyenletrendszerét.

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2} = \\ &= \frac{Ax+B+Cx^3+Dx^2-2Cx^2-2Dx+5Cx+5D}{(x^2-2x+5)^2} = \\ &= \frac{Cx^3+(D-2C)x^2+(A+5C-2D)x+5D+B}{(x^2-2x+5)^2}. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ll} C=0 & \text{I.} \\ D-2C=3 & \text{II.} \\ A+5C-2D=0 & \text{III.} \\ 5D+B=6 & \text{IV.} \end{array}$$

$C=0$, tehát II.-ből $D=3$, ezt a III.-ba helyettesítve:

$$A-6=0, \text{ vagyis } A=6.$$

A IV.-ből kapjuk: $15+B=6$, vagyis $B=-9$.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2} dx &= \int \frac{6x-9}{(x^2-2x+5)^2} dx + \int \frac{3}{x^2-2x+5} dx = \\ &= 3 \int \frac{2x-2-1}{(x^2-2x+5)^2} dx + \int \frac{3}{x^2-2x+5} dx = \\ &= 3 \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx - 3 \int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} + 3 \int \frac{dx}{x^2-2x+5}. \end{aligned}$$

Legyen

$$I_1 = 3 \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx, \quad I_2 = -3 \int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2},$$

$$I_3 = 3 \int \frac{dx}{x^2-2x+5}.$$

$$I_1 = 3 \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+5)^2} dx =$$

$$= 3 \int (2x-2)(x^2-2x+5)^{-2} dx = -\frac{3}{x^2-2x+5} + C_1.$$

$$I_2 = -3 \int \frac{dx}{[(x-1)^2+4]^2},$$

ezt $x-1=u$, $dx=du$ helyettesítéssel alakítjuk át, majd az 1. f) pontban levezetett rekurziós formulával határozzuk meg.

$$I_2 = -3 \int \frac{du}{(u^2+4)^2}.$$

Mivel

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x}{a} + C,$$

ezért

$$I_2 = -\frac{3}{2 \cdot 4} \frac{u}{u^2+4} - \frac{3}{2 \cdot 8} \arctg \frac{u}{2} + C_2 =$$

$$= -\frac{3}{8} \frac{x-1}{(x-1)^2+4} - \frac{3}{16} \arctg \frac{x-1}{2} + C_2.$$

$$I_3 = 3 \int \frac{dx}{x^2-2x+5} = 3 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$$

Ezt is az $x-1=u$, $dx=du$ helyettesítéssel alakítjuk át, majd figyelembe vesszük, hogy

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C.$$

$$I_3 = 3 \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{3}{2} \arctg \frac{u}{2} + C_3 = \frac{3}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C_3.$$

Összegezve a részeredményeket, a feladat megoldása:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2+6}{(x^2-2x+5)^2} dx &= \\ &= -\frac{3}{x^2-2x+5} - \frac{3}{8} \frac{x-1}{(x-1)^2+4} - \frac{3}{16} \arctg \frac{x-1}{2} + \frac{3}{2} \arctg \frac{x-1}{2} + C = \\ &= -\frac{3}{x^2-2x+5} - \frac{3}{8} \frac{x-1}{x^2-2x+5} + \frac{21}{16} \arctg \frac{x-1}{2} + C. \end{aligned}$$

$$13. \int \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2+4)^2} dx = ? \text{ A nevezőben egy valós gyöktényező}$$

és egy kétszeres komplex gyöktényező van.

A törtet parciális törtek összegére bontjuk:

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2+4)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}.$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, elvégezzük a kijelölt műveleteket, majd az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlőségéből felírható egyenletrendszert megoldjuk.

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2+4)^2} &\equiv \\ &\equiv \frac{A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1) + (Dx+E)(x^2+4)(x-1)}{(x-1)(x^2+4)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 4x^2 + x - 5 &\equiv \\ &\equiv A(x^4 + 8x^2 + 16) + Bx^3 + Cx - Bx - C + Dx^4 + Ex^3 + 4Dx^2 + \\ &+ 4Ex - Dx^3 - Ex^3 - 4Dx - 4E \equiv x^4(A+D) + x^3(E-D) + \\ &+ x^2(8A+B+4D-E) + x(C-B+4E-4D) + (16A-C-4E). \end{aligned}$$

Az együtthatók egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} A+D &= 0 & \text{I.} \\ E-D &= 2 & \text{II.} \\ 8A+B+4D-E &= -4 & \text{III.} \\ C-B+4E-4D &= 1 & \text{IV.} \\ 16A-C-4E &= -5 & \text{V.} \end{aligned}$$

D-vel kifejezzük A-t és E-t:

$$\begin{aligned} A &= -D; \quad E = 2+D. \\ -8D+B+4D-2-D &= -4 & \text{III.} \\ C-B+8+4D-4D &= 1 & \text{IV.} \\ -16D-C-8-4D &= -5 & \text{V.} \\ B-5D &= -2 & \text{III.} \\ C-B &= -7 & \text{IV.} \\ -20D-C &= 3 & \text{V.} \end{aligned}$$

$$C = B - 7$$

$$B - 5D = -2$$

$$-20D - B + 7 = 3.$$

A két egyenletet összeadjuk:

$$-25D = -6, \text{ ebből } D = \frac{6}{25};$$

$$B = 5 \cdot \frac{6}{25} - 2 = \frac{6}{5} - \frac{10}{5} = -\frac{4}{5};$$

$$C = B - 7 = -\frac{4}{5} - \frac{35}{5} = -\frac{39}{5};$$

$$A = -D = -\frac{6}{25}; \quad E = 2+D = \frac{50}{25} + \frac{6}{25} = \frac{56}{25}.$$

Az együtthatók:

$$A = -\frac{6}{25}; \quad B = -\frac{4}{5}; \quad C = -\frac{39}{5}; \quad D = \frac{6}{25}; \quad E = \frac{56}{25}.$$

Az integrandus törzstényezős felbontása:

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2+4)^2} &\equiv -\frac{6}{25} \frac{1}{x-1} + \frac{-\frac{4}{5}x - \frac{39}{5}}{(x^2+4)^2} + \frac{\frac{6}{25}x + \frac{56}{25}}{x^2+4} = \\ &= -\frac{6}{25} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{5} \frac{4x+39}{(x^2+4)^2} + \frac{1}{25} \frac{6x+56}{x^2+4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2+4)^2} dx &= \\ &= -\frac{6}{25} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{5} \int \frac{4x+39}{(x^2+4)^2} dx + \frac{1}{25} \int \frac{6x+56}{x^2+4} dx = \\ &= -\frac{6}{25} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{5} \int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx - \frac{39}{5} \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} + \\ &+ \frac{3}{25} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \frac{56}{25} \int \frac{dx}{x^2+4}. \end{aligned}$$

Az egyes integrálok meghatározása:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C_1;$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx = \int 2x(x^2+4)^{-2} dx = -\frac{1}{x^2+4} + C_2;$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = ?$$

A III. 1. pontban meghatároztuk az integrált:

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2 \cdot 8} \arctg \frac{x}{2} + C_3 =$$

$$= \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{16} \arctg \frac{x}{2} + C_3;$$

$$\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \ln(x^2+4) + C_4;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C_5.$$

A feladat megoldása:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 4x^2 + x - 5}{(x-1)(x^2+4)^2} dx &= \\ &= -\frac{6}{25} \ln|x-1| + \frac{2}{5} \frac{1}{x^2+4} - \frac{39}{5} \cdot \frac{1}{8} \frac{x}{x^2+4} - \frac{39}{5} \cdot \frac{1}{16} \arctg \frac{x}{2} + \\ &+ \frac{3}{25} \ln(x^2+4) + \frac{56}{25} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + C = \\ &= -\frac{6}{25} \ln|x-1| + \frac{2}{5} \frac{1}{x^2+4} - \frac{39}{40} \frac{x}{x^2+4} - \frac{39}{80} \arctg \frac{x}{2} + \\ &+ \frac{3}{25} \ln(x^2+4) + \frac{28}{25} \arctg \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

IV. TRIGONOMETRIKUS FÜGGVÉNYEK RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEINEK INTEGRÁLÁSA

1. Egyszerűbb speciális típusok

a) $\sin^{2n+1} x \cos^k x$ alakú integrandus. Amennyiben az integrandusban $\sin x$ páratlan hatvánnyal lép fel ($\cos x$ pedig tetszőleges hatvánnyal), akkor a szinuszt tartalmazó tényezőt átalkíthatjuk az alábbi módon:

$$\sin^{2n+1} x = \sin x \sin^{2n} x = \sin x (1 - \cos^2 x)^n.$$

Az integrandus így a következő alakot veszi fel:

$$\sin^{2n+1} x \cos^k x = \sin x (1 - \cos^2 x)^n \cos^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, az összeg minden egyes tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ típusú lesz, tehát az integrálás tagonként elvégezhető.

b) $\cos^{2n+1} x \sin^k x$ alakú integrandus. Ha az integrandusban $\cos x$ páratlan hatványa lép fel ($\sin x$ -nek pedig tetszőleges hatványa), akkor a $\cos^{2n+1} x$ tényezőt alakíthatjuk szorzattá:

$$\cos^{2n+1} x \sin^k x = \cos x (1 - \sin^2 x)^n \sin^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, az integrandus minden tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ alakú lesz, vagyis integrálja közvetlenül felírható.

Gyakorló feladatok

$$\begin{aligned} 1. \quad \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \\ &= \int (\sin x - \cos^2 x \sin x) dx = \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad \int \sin^5 x \, dx &= \int \sin^4 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx = \\
&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx = \\
&= \int (\sin x - 2\cos^2 x \sin x + \cos^4 x \sin x) \, dx = \\
&= \int \sin x \, dx - 2 \int \cos^2 x \sin x \, dx + \int \cos^4 x \sin x \, dx.
\end{aligned}$$

Mindhárom integrál közvetlenül felírható, mert az első alapintegrál, a másik kettő integrandusa pedig $f''(x)f'(x)$ alakú.

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \, dx &= -\cos x + 2 \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + C = \\
&= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad \int \cos^5 x \sin^4 x \, dx &= \int \cos^4 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \\
&= \int \cos^4 x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx = \\
&= \int (\cos^5 x \sin x - 2\cos^6 x \sin x + \cos^9 x \sin x) \, dx = \\
&= -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{2\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^{10} x}{10} + C = \\
&= -\frac{1}{6} \cos^6 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{10} \cos^{10} x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \int \cos^7 x \, dx &= \int \cos^6 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^3 \cos x \, dx = \\
&= \int (1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x \, dx = \\
&= \int (\cos x - 3\sin^2 x \cos x + 3\sin^4 x \cos x - \sin^6 x \cos x) \, dx = \\
&= \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x \, dx = \\
&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x \, dx = \\
&= \int (\sin^3 x \cos x - 2\sin^4 x \cos x + \sin^6 x \cos x) \, dx = \\
&= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + C = \\
&= \frac{1}{4} \sin^4 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C.
\end{aligned}$$

Ha az integrandus mindkét szögfüggvényben páratlan hatványú, akkor természetesen teljesen mindegy, hogy melyiket alakítjuk át. Most erre oldunk meg feladatot.

6. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = ?$ Mindkét módszerrel meghatározzuk az integrált.

I. Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \cos^3 x \, dx = \\
&= \int (1 - \cos^2 x) \cos^3 x \sin x \, dx = \int (\cos^3 x \sin x - \cos^5 x \sin x) \, dx = \\
&= -\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6} + C = -\frac{1}{4} \cos^4 x + \frac{1}{6} \cos^6 x + C.
\end{aligned}$$

II. Megoldás:

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx = \\
&= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int (\sin^3 x \cos x - \sin^5 x \cos x) \, dx = \\
&= \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.
\end{aligned}$$

c) $\sin^{2n} x \cos^{2k} x$ alakú integrandus. Ha az integrandusban mindkét tényező páros kitevőjű, akkor a kétszeres szögfüggvényekre tanult azonosságokat használhatjuk fel az integrandus átalakítására:

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Gyakorló feladatok

7. $\int \cos^2 x \, dx = ?$ A harmadik azonosságot írva az integrandus helyébe:

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

8. $\int \sin^2 x \, dx = ?$ A második azonosságot felhasználva kapjuk:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

9. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = ?$ Az integrandus előbb az első, majd a második azonosság felhasználásával hozható könnyen integrálható alakra:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 2x}{4} \, dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{8} \right] + C = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \int \sin^6 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \sin^4 x \, dx = \\ &= \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \frac{1}{16} \int \sin^2 2x (1 - \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin^2 2x (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cos^2 2x \, dx. \end{aligned}$$

Mindhárom integrált külön számítjuk ki.

Az első integrál:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, dx &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \\ &= \frac{1}{32} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{32} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C_1. \end{aligned}$$

A második integrál integrandusa könnyen $f''(x)f'(x)$ alakra hozható, ezért

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx &= -\frac{1}{16} \int \sin^2 2x (2 \cos 2x) dx = \\ &= -\frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C_2 = -\frac{1}{48} \sin^3 2x + C_2. \end{aligned}$$

A harmadik integrál:

$$\begin{aligned} \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{16} \int (\sin 2x \cos 2x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \left(\frac{\sin 4x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{64} \int \sin^2 4x \, dx = \frac{1}{64} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 8x \right) dx = \\ &= \frac{1}{128} \int (1 - \cos 8x) dx = \frac{1}{128} \left(x - \frac{\sin 8x}{8} \right) + C_3 = \frac{x}{128} - \frac{\sin 8x}{1024} + C_3. \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int \sin^6 x \cos^2 x \, dx = \frac{5x}{128} - \frac{\sin 4x}{128} - \frac{\sin^3 2x}{48} - \frac{\sin 8x}{1024} + C,$$

ahol $C_1 + C_2 + C_3 = C$.

$$11. \int \sin^4 x \, dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \frac{2 \sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C = \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12. \int \cos^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) dx = \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x + \frac{2 \sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C = \\
 &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
 \end{aligned}$$

2. Trigonometrikus függvények általános alakú racionális kifejezésének integrálja

A $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, valamint $\operatorname{ctg} x$ függvények tetszőleges $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ racionális kifejezése integrálható. Mégpedig mindig célravezető a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítés, amelynek segítségével az integrandus racionális (egész vagy tört) kifejezésbe megy át — ennek integrálásával az előző II., ill. III. fejezetben foglalkoztunk — és ez mindig integrálható.

Ezzel a helyettesítéssel ui. — mint az könnyen belátható —

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\
 \operatorname{tg} x &= \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1-t^2}{2t}.
 \end{aligned}$$

Gyakorló feladatok

1. $\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x} dx = ?$ Az integrandus $\sin x$ -re, ill. $\cos x$ -re nézve racionális törtfüggvény.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1+\sin x}{1-\cos x} dx &= \int \frac{1+\frac{2t}{t^2+1}}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1-t^2} = \\
 &= \int \frac{t^2+1+2t}{1+t^2-1+t^2} \cdot \frac{2 dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2+2t+1}{2t^2(1+t^2)} \cdot 2 dt = \int \frac{t^2+2t+1}{t^2(t^2+1)} dt.
 \end{aligned}$$

Az integrandus t -ben racionális törtfüggvény, amit parciális törtekre bontunk.

$$\frac{t^2+2t+1}{t^2(t^2+1)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1};$$

$$t^2+2t+1 \equiv At(t^2+1) + B(t^2+1) + (Ct+D)t^2;$$

$$t^2+2t+1 \equiv At^3 + At + Bt^2 + B + Ct^2 + Dt^2;$$

$$t^2+2t+1 \equiv (A+C)t^3 + (B+D)t^2 + At + B.$$

Az együtthatók egyenlőségéből kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$A+C=0$$

$$B+D=1$$

$$A=2$$

$$B=1$$

Ebből $C=-A=-2$, és $D=1-B=1-1=0$.

Behelyettesítve az együtthatókat:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{t^2+2t+1}{t^2(t^2+1)} dt &= \int \left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2t}{t^2+1} \right) dt = \\
 &= 2 \ln t - \frac{1}{t} - \ln(t^2+1) + C = -\frac{1}{t} + \ln \frac{t^2}{t^2+1} + C = \\
 &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + C = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \ln \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} + C = \\
 &= -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2 \ln \sin \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

Ellenőrizzük a megoldás helyességét!

$$\begin{aligned} \left(-\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2 \ln \sin \frac{x}{2} + C\right)' &= -\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}. \end{aligned}$$

A feladatot tehát helyesen oldottuk meg.

$$2. \int \frac{1}{1 + \cos x} dx = ?$$

I. Megoldás:

A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítéssel

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{és} \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1 + t^2} = \int \frac{2 dt}{1 + t^2 + 1 - t^2} = \\ &= \int dt = t + C = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Differenciáljuk az eredményt!

$$\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + C\right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

Mivel $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$, ezért $\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{1 + \cos x}$, és így számítá-
sunk helyes volt.

II. Megoldás:

Megoldjuk a feladatot egy másik módon:

$$\text{Mivel } \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}, \text{ ezért } \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$3. \int \frac{1}{1 + \sin x} dx = ?$$

$$\sin x = \frac{2t}{t^2 + 1}; \quad dx = \frac{2 dt}{t^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{t^2 + 1}} \cdot \frac{2 dt}{t^2 + 1} = \int \frac{2 dt}{t^2 + 1 + 2t} = \\ &= \int \frac{2}{(t + 1)^2} dt = -\frac{2}{t + 1} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + C. \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{4}{5 + 6 \cos x} dx = ?$$

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{5 + 6 \cos x} dx &= \int \frac{4}{5 + \frac{6(1 - t^2)}{1 + t^2}} \cdot \frac{2 dt}{1 + t^2} = \\ &= \int \frac{8}{5 + 5t^2 + 6 - 6t^2} dt = \int \frac{8 dt}{11 - t^2}. \end{aligned}$$

A t -re kapott racionális törtfüggvényt 11 kiemelésével alakítjuk át, hogy alapintegrálra jussunk,

$$\frac{1}{11} \int \frac{8 dt}{1 - \left(\frac{t}{\sqrt{11}}\right)^2} = ?$$

Legyen most $u = \frac{t}{\sqrt[3]{11}}$; tehát $dt = \sqrt[3]{11} du$.

$$\frac{8}{11} \int \frac{dt}{1 - \left(\frac{t}{\sqrt[3]{11}}\right)^3} = \frac{8}{11} \int \frac{\sqrt[3]{11} du}{1 - u^3} = \frac{8\sqrt[3]{11}}{11} \int \frac{du}{1 - u^3} = I.$$

Az integrál $|u| < 1$ esetén:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{8\sqrt[3]{11}}{11} \operatorname{ar th} u + C_1 = \frac{8\sqrt[3]{11}}{11} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} + C_1 = \\ &= \frac{4\sqrt[3]{11}}{11} \ln \frac{1 + \frac{t}{\sqrt[3]{11}}}{1 - \frac{t}{\sqrt[3]{11}}} + C_1 = \frac{4\sqrt[3]{11}}{11} \ln \frac{\sqrt[3]{11} + t}{\sqrt[3]{11} - t} + C_1 = \\ &= \frac{4\sqrt[3]{11}}{11} \ln \frac{\sqrt[3]{11} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{11} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C_1. \end{aligned}$$

Az integrál $|u| > 1$ esetén:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{8\sqrt[3]{11}}{11} \operatorname{ar cth} u + C_2 = \frac{8\sqrt[3]{11}}{11} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1} + C_2 = \\ &= \frac{4\sqrt[3]{11}}{11} \ln \frac{\frac{t}{\sqrt[3]{11}} + 1}{\frac{t}{\sqrt[3]{11}} - 1} + C_2 = \frac{4\sqrt[3]{11}}{11} \ln \frac{t + \sqrt[3]{11}}{t - \sqrt[3]{11}} + C_2 = \\ &= \frac{4\sqrt[3]{11}}{11} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt[3]{11}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt[3]{11}} + C_2. \end{aligned}$$

Az első integrál értelmezési tartománya: $|u| < 1$, de $u = \frac{t}{\sqrt[3]{11}}$, tehát

$$\left| \frac{t}{\sqrt[3]{11}} \right| < 1, \text{ vagyis } |t| < \sqrt[3]{11}.$$

Mivel $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ezért $\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| < \sqrt[3]{11}$, amiből $\left| \frac{x}{2} \right| < \operatorname{arc tg} \sqrt[3]{11} \approx \operatorname{arc tg} 3,317 \approx 73^\circ \approx 1,27$ (radián), vagyis $|x| < 2,54$.

A második integrál értelmezési tartománya ebből következően $|x| > 2,54$.

$$5. \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = ?$$

1. Megoldás:

A $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítést alkalmazva, vagyis ha

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

akkor

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1+t^2}{t(1-t^2)} dt.$$

Az integrandus parciális tört előállítás:

$$\begin{aligned} \frac{1+t^2}{t(1+t)(1-t)} &\equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{1-t}; \\ \frac{1+t^2}{t(1+t)(1-t)} &\equiv \frac{A(1-t^2) + Bt(1-t) + Ct(1+t)}{t(1+t)(1-t)}. \end{aligned}$$

Az azonosság a számlálók azonosságát is jelenti:

$$1+t^2 \equiv A - At^2 + Bt - Bt^2 + Ct + Ct^2;$$

$$1+t^2 \equiv (C-A-B)t^2 + (B+C)t + A.$$

Az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlők:

$$C-A-B=1 \quad \text{I.}$$

$$B+C=0 \quad \text{II.}$$

$$A=1 \quad \text{III.}$$

$$C-B=2 \quad \text{I. + II.}$$

$$B+C=0$$

$$2C=2; \quad C=1; \quad B=-1.$$

Az együtthatókat beírva:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx &= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \\ &= \ln t - \ln(1+t) - \ln(1-t) + C = \ln \frac{t}{1-t^2} + C = \\ &= \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + C.\end{aligned}$$

Mivel $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, ezért

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x}{2} \right| + C = \ln |\operatorname{tg} x| - \ln 2 + C = \ln |\operatorname{tg} x| + C_1.$$

II. Megoldás:

Most $t = \cos x$ -et helyettesítve alakítjuk át az integrandust racionális törtfüggvénné.

Az integrandust bővítjük $\sin x$ -szel.

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x}.$$

Mivel $\cos x = t$, ezért $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$, és $dt = -\sin x dx$. Mindezeket figyelembe véve:

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x} dx = \int \frac{-dt}{(1-t^2)t} = -\int \frac{dt}{t(1-t)(1+t)}.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\begin{aligned}\frac{1}{t(1-t)(1+t)} &\equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}; \\ \frac{1}{t(1-t)(1+t)} &\equiv \frac{A(1-t^2) + Bt(1+t) + Ct(1-t)}{t(1-t)(1+t)}; \\ 1 &\equiv A - At^2 + Bt + Bt^2 + Ct - Ct^2; \\ 1 &\equiv (B-A-C)t^2 + (B+C)t + A.\end{aligned}$$

Az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlők:

$$B-A-C=0$$

$$B+C=0$$

$$A=1$$

$$B-C=1$$

$$B+C=0$$

$$2B=1; \quad B=\frac{1}{2}; \quad C=-\frac{1}{2}.$$

Eredményeinket felhasználva

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx &= -\int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} \right) dt = \\ &= -\ln t + \frac{1}{2} \ln(1-t) + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C = \ln \left| \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| + C = \ln |\operatorname{tg} x| + C.\end{aligned}$$

III. Megoldás:

A feladatot még egy harmadik módon is megoldjuk:

$$\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{1}{\sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} dx = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

$$6. \quad \int \frac{2}{1+2 \operatorname{tg} x} dx = ?$$

I. Megoldás:

$$\text{Legyen } \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2} \text{ és } dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+2 \lg x} dx &= \int \frac{2}{1+2 \frac{2t}{1-t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \\&= \int \frac{2}{\frac{1-t^2+4t}{1-t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{4-4t^2}{(1+t^2)(1-t^2+4t)} dt = \\&= \int \frac{4t^2-4}{(1+t^2)(t^2-4t-1)} dt.\end{aligned}$$

A nevezőt gyöktényezős alakba kell írunk:

$$t^2-4t-1=0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}; \quad t_1 = 2 + \sqrt{5}; \quad t_2 = 2 - \sqrt{5}.$$

$$\int \frac{4t^2-4}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)} dt.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk.

$$\frac{4t^2-4}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)} = \frac{A}{t-2-\sqrt{5}} + \frac{B}{t-2+\sqrt{5}} + \frac{Ct+D}{t^2+1};$$

$$\begin{aligned}\frac{4t^2-4}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)} &= \\&= \frac{A(t^2+1)(t-2+\sqrt{5}) + B(t^2+1)(t-2-\sqrt{5}) + (Ct+D)(t^2-4t-1)}{(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})(t^2+1)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4t^2-4 &\equiv A(t^3-2t^2+t^2\sqrt{5}+t-2+\sqrt{5}) + \\&+ B(t^3-2t^2-t^2\sqrt{5}+t-2-\sqrt{5}) + Ct^3-4Ct^2-Ct+ \\&+ Dt^2-4Dt-D;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4t^2-4 &= (A+B+C)t^3 + (-2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-4C+D)t^2 + \\&+ (A+B-C-4D)t - 2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-D.\end{aligned}$$

Az egyenlő fokszámú tagok együtthatóinak egyenlőségéből:

$$A+B+C=0 \quad \text{I.}$$

$$-2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-4C+D=4 \quad \text{II.}$$

$$A+B-C-4D=0 \quad \text{III.}$$

$$-2A+A\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-D=-4 \quad \text{IV.}$$

$$\text{II.}-\text{IV.}: -4C+D+D=8; \quad D=4+2C.$$

D értékét a III. egyenletbe helyettesítjük:

$$A+B-C-4(4+2C)=0;$$

$$A+B-C-16-8C=0;$$

$$A+B-9C-16=0.$$

Az I. egyenletet ebből kivonjuk.

$$-10C-16=0; \quad C=-\frac{16}{10}=-\frac{8}{5}.$$

$$D=4-\frac{16}{5}=\frac{4}{5}.$$

$$A+B-\frac{8}{5}=0, \quad A+B=\frac{8}{5}, \quad A=\frac{8}{5}-B.$$

Fredményünket a IV. egyenletbe helyettesítjük:

$$-\frac{16}{5}+2B+\frac{8\sqrt{5}}{5}-B\sqrt{5}-2B-B\sqrt{5}-\frac{4}{5}=-4 \cdot 5$$

$$-16+8\sqrt{5}-10B\sqrt{5}-4=-20;$$

$$8\sqrt{5}=10B\sqrt{5};$$

$$B=\frac{4}{5}.$$

$$A=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}=\frac{4}{5}.$$

A keresett együtthatók tehát:

$$A=\frac{4}{5}; \quad B=\frac{4}{5}; \quad C=-\frac{8}{5}; \quad D=\frac{4}{5}.$$

Felírjuk az integrált:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+2\operatorname{tg} x} dx &= \\&= \int \left(\frac{4}{5} \frac{1}{t-2-\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \frac{1}{t-2+\sqrt{5}} + \frac{-\frac{8}{5}t + \frac{4}{5}}{t^2+1} \right) dt = \\&= \frac{4}{5} \int \left(\frac{1}{t-2-\sqrt{5}} + \frac{1}{t-2+\sqrt{5}} + \frac{-2t+1}{t^2+1} \right) dt = \\&= \frac{4}{5} \int \frac{dt}{t-2-\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \int \frac{dt}{t-2+\sqrt{5}} - \frac{4}{5} \int \frac{2t-1}{t^2+1} dt.\end{aligned}$$

Először a harmadik integrált számítjuk ki, mert azt még át kell alakítanunk.

$$\begin{aligned}-\frac{4}{5} \int \frac{2t-1}{t^2+1} dt &= -\frac{4}{5} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \\&= -\frac{4}{5} \ln(t^2+1) + \frac{4}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C_1. \\ \int \frac{2}{1+2\operatorname{tg} x} dx &= \frac{4}{5} \ln(t-2-\sqrt{5}) + \frac{4}{5} \ln(t-2+\sqrt{5}) - \\&- \frac{4}{5} \ln(t^2+1) + \frac{4}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C = \\&= \frac{4}{5} \ln \frac{t^2-4t-1}{t^2+1} + \frac{4}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C = \\&= \frac{4}{5} \ln \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{4}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

II. Megoldás:

Legyen $t = \operatorname{tg} x$, így $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ és ekkor $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$, vagyis $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Ekkor az integrál

$$\int \frac{2}{1+2\operatorname{tg} x} dx = \int \frac{2}{1+2t} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{(1+2t)(1+t^2)} dt.$$

Az integrandust parciális törtre bontva:

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1+2t)(1+t^2)} &= \frac{A}{1+2t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}; \\ \frac{2}{(1+2t)(1+t^2)} &= \frac{A(1+t^2) + (Bt+C)(1+2t)}{(1+2t)(1+t^2)},\end{aligned}$$

azaz

$$2 \equiv A(1+t^2) + (Bt+C)(1+2t) \equiv (A+2B)t^2 + (B+2C)t + A+C,$$

ami csak úgy állhat fenn, ha

$$0 = A+2B \quad \text{I.}$$

$$0 = B+2C \quad \text{II.}$$

$$2 = A+C \quad \text{III.}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

III.-ből

$$A = 2 - C,$$

ezt II.-be helyettesítve

$$0 = 2 - C + 2B$$

II.-t újból leírva

$$0 = B + 2C, \text{ ebből } B = -2C.$$

$$0 = 2 - C - 4C; \quad 5C = 2; \quad C = \frac{2}{5}.$$

$$B = -\frac{4}{5}; \quad A = \frac{8}{5}.$$

Az integrál így

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+2\operatorname{tg} x} dx &= \frac{8}{5} \int \frac{dt}{1+2t} - \frac{2}{5} \int \frac{2t-1}{t^2+1} dt = \\&= \frac{8}{5} \int \frac{dt}{1+2t} - \frac{2}{5} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \frac{2}{5} \int \frac{1}{t^2+1} dt = \\&= \frac{8}{5} \frac{\ln|1+2t|}{2} - \frac{2}{5} \ln(t^2+1) + \frac{2}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C.\end{aligned}$$

Mivel $\arctg t = x$ és $t = \operatorname{tg} x$, ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{1+2 \operatorname{tg} x} dx &= \frac{2}{5} \ln (1+2 \operatorname{tg} x)^5 - \frac{2}{5} \ln (\operatorname{tg}^2 x + 1) + \frac{2}{5} x + C = \\ &= \frac{2}{5} \left[\ln \frac{(1+2 \operatorname{tg} x)^5}{\operatorname{tg}^2 x + 1} + x \right] + C.\end{aligned}$$

V. EXPONENCIÁLIS ÉS HIPERBOLIKUS FÜGGVÉNYEK RACIONÁLIS KIFEJEZÉSEINEK INTEGRÁLÁSA

1. Egyszerűbb speciális típusok

a) $\operatorname{sh}^{2n+1} x \operatorname{ch}^k x$ alakú integrandus. Amennyiben az integrandusban $\operatorname{sh} x$ páratlan és $\operatorname{ch} x$ tetszőleges egész kitevőjű hatványa van, akkor a $\operatorname{sh} x$ tényezőt átalakíthatjuk az alábbi módon:

$$\operatorname{sh}^{2n+1} x = \operatorname{sh} x \operatorname{sh}^{2n} x = \operatorname{sh} x (\operatorname{ch}^2 x - 1)^n.$$

Az átalakítás során felhasználtuk a hiperbolikus függvényekre tanult $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ azonosságot.

Az integrandus így a következő alakot veszi fel:

$$\operatorname{sh}^{2n+1} x \operatorname{ch}^k x = \operatorname{sh} x (\operatorname{ch}^2 x - 1)^n \operatorname{ch}^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve az összeg minden egyes tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ típusú lesz, tehát az integrálás tagonként elvégezhető.

b) $\operatorname{ch}^{2n+1} x \operatorname{sh}^k x$ alakú integrandus. Ha az integrandusban $\operatorname{ch} x$ páratlan hatványa, $\operatorname{sh} x$ -nek pedig tetszőleges hatványa lép fel, akkor a $\operatorname{ch}^{2n+1} x$ tényezőt alakíthatjuk szorzattá:

$$\operatorname{ch}^{2n+1} x \operatorname{sh}^k x = \operatorname{ch} x (\operatorname{sh}^2 x + 1)^n \operatorname{sh}^k x.$$

A kijelölt műveleteket elvégezve, az integrandus minden tagja — legfeljebb egy kivételével, amely alapintegrál — $f^n(x)f'(x)$ alakú lesz, vagyis integrálja közvetlenül felírható.

Gyakorló feladatok

1. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x dx = ?$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^4 x dx &= \int \operatorname{ch}^4 x (\operatorname{ch}^2 x - 1) \operatorname{sh} x dx = \\ &= \int (\operatorname{ch}^6 x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch}^4 x \operatorname{sh} x) dx = \frac{\operatorname{ch}^7 x}{7} - \frac{\operatorname{ch}^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

$$2. \int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^3 x \, dx = ?$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^3 x \, dx &= \int \operatorname{sh}^4 x (1 + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} x \, dx = \\ &= \int (\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^6 x \operatorname{ch} x) \, dx = \frac{\operatorname{sh}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{sh}^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

$$3. \int \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^7 x \, dx = ?$$

I. Megoldás:

Először a $\operatorname{sh}^5 x$ -et alakítjuk szorzattá:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ch}^7 x \operatorname{sh}^4 x \operatorname{sh} x \, dx &= \int \operatorname{ch}^7 x (\operatorname{ch}^2 x - 1)^2 \operatorname{sh} x \, dx = \\ &= \int \operatorname{ch}^7 x (\operatorname{ch}^4 x - 2 \operatorname{ch}^2 x + 1) \operatorname{sh} x \, dx = \\ &= \int (\operatorname{ch}^{11} x - 2 \operatorname{ch}^9 x + \operatorname{ch}^7 x) \operatorname{sh} x \, dx. \end{aligned}$$

Legyen $t = \operatorname{ch} x$, akkor $dt = \operatorname{sh} x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^7 x \, dx &= \int (t^{11} - 2t^9 + t^7) \, dt = \frac{t^{12}}{12} - \frac{2t^{10}}{10} + \frac{t^8}{8} + C = \\ &= \frac{1}{12} \operatorname{ch}^{12} x - \frac{1}{5} \operatorname{ch}^{10} x + \frac{1}{8} \operatorname{ch}^8 x + C. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

A feladatot most a másik tényező átalakításával oldjuk meg.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^7 x \, dx &= \int \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^6 x \operatorname{ch} x \, dx = \int \operatorname{sh}^5 x (1 + \operatorname{sh}^2 x)^3 \operatorname{ch} x \, dx = \\ &= \int \operatorname{sh}^5 x (1 + 3 \operatorname{sh}^2 x + 3 \operatorname{sh}^4 x + \operatorname{sh}^6 x) \operatorname{ch} x \, dx = \\ &= \int (\operatorname{sh}^5 x + 3 \operatorname{sh}^7 x + 3 \operatorname{sh}^9 x + \operatorname{sh}^{11} x) \operatorname{ch} x \, dx. \end{aligned}$$

Most $t = \operatorname{sh} x$ -et helyettesítünk, ekkor $dt = \operatorname{ch} x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^5 x \operatorname{ch}^7 x \, dx &= \int (t^5 + 3t^7 + 3t^9 + t^{11}) \, dt = \\ &= \frac{t^6}{6} + \frac{3t^8}{8} + \frac{3t^{10}}{10} + \frac{t^{12}}{12} + C = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{sh}^6 x + \frac{3}{8} \operatorname{sh}^8 x + \frac{3}{10} \operatorname{sh}^{10} x + \frac{1}{12} \operatorname{sh}^{12} x + C. \end{aligned}$$

Az eredmények összehasonlítását az Olvasóra bízunk.

c) $\operatorname{sh}^{2n} x$, $\operatorname{ch}^{2n} x$, ill. $\operatorname{sh}^{2n} x \operatorname{ch}^{2k} x$ alakú integrandus. Amennyiben az integrandusban a $\operatorname{sh} x$, ill. $\operatorname{ch} x$ függvényeknek csak páros kitevőjű hatványa szerepel, úgy az alábbi összefüggések felhasználásával alakítjuk át az integrandust:

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.$$

Gyakorló feladatok

4. $\int \operatorname{ch}^2 x \, dx = ?$ A feladatot — az összehasonlítás kedvéért — két féle módon is megoldjuk.

I. Megoldás:

Az exponenciális alak felhasználásával:

$$\operatorname{ch}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{ch}^2 x \, dx &= \frac{1}{4} \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} \right) + C = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

A hiperbolikus integrandust átalakítjuk a második azonosság szerint:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ch}^2 x \, dx &= \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 2x + 1) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2x}{2} + x \right) + C = \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

A két eredmény tehát megegyezik.

5. $\int \operatorname{sh}^2 x \, dx = ?$ Ezt a feladatot is mind a két módszerrel megoldjuk.

I. Megoldás:

Az exponenciális alak felhasználásával:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^2 x \, dx &= \int \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \, dx = \int \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \, dx = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2x}}{2} - 2x + \frac{e^{-2x}}{-2} \right) + C = \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{8} + C = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} + C = \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.\end{aligned}$$

II. Megoldás:

Az integrandus átalakításával a harmadik azonosság alapján:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^2 x \, dx &= \int \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 2x - 1) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 2x}{2} - x \right) + C = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

A két eredmény tehát megegyezik.

6. $\int \operatorname{ch}^4 x \, dx = ?$ Tudjuk azt, hogy $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$; ezt írjuk az integrandusba:

$$\int \operatorname{ch}^4 x \, dx = \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (\operatorname{ch}^2 2x + 2 \operatorname{ch} 2x + 1) \, dx.$$

A fenti linearizáló formulát ismételt alkalommal alkalmazzuk, most a $\operatorname{ch}^2 2x$ -re:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{ch}^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} + 2 \operatorname{ch} 2x + 1 \right) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\operatorname{ch} 4x}{2} + 2 \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{2} \right) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{sh} 4x}{8} + 2 \cdot \frac{\operatorname{sh} 2x}{2} + \frac{3}{2} x \right) + C = \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{3}{8} x + C.\end{aligned}$$

7. $\int \operatorname{sh}^4 x \, dx = ?$ Most a $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$ linearizáló formulát alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sh}^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \right)^2 \, dx = \\ &= \int \frac{\operatorname{ch}^2 2x - 2 \operatorname{ch} 2x + 1}{4} \, dx = \frac{1}{4} \int (\operatorname{ch}^2 2x - 2 \operatorname{ch} 2x + 1) \, dx.\end{aligned}$$

A $\operatorname{ch}^2 2x = \frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2}$ azonosságot felhasználva:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} - 2 \operatorname{ch} 2x + 1 \right) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\operatorname{ch} 4x}{2} - 2 \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{2} \right) \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\operatorname{sh} 4x}{8} - \frac{2 \operatorname{sh} 2x}{2} + \frac{3x}{2} \right) + C = \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{3}{8} x + C.\end{aligned}$$

8. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^3 x \, dx = ?$ A feladatot a linearizáló módszerrel oldjuk meg:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^3 x \, dx &= \int \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \, dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 2x - 1}{4} \, dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (\operatorname{ch}^2 2x - 1) \, dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} - 1 \right) \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4x - 1) \, dx = \frac{1}{8} \left(\frac{\operatorname{sh} 4x}{4} - x \right) + C = \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x - \frac{1}{8} x + C.\end{aligned}$$

9. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x \, dx = ?$ Felhasználjuk, hogy $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$ és

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.$$

$$\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x \, dx = \int \left(\frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \right)^2 \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \, dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{ch}^2 2x - 2 \operatorname{ch} 2x + 1}{4} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \, dx =$$

$$= \int \frac{\frac{\operatorname{ch} 4x + 1}{2} - 2 \operatorname{ch} 2x + 1}{4} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int (\operatorname{ch} 4x + 1 - 4 \operatorname{ch} 2x + 2) (\operatorname{ch} 2x + 1) \, dx = ?$$

A feladatot az exponenciális alak felhasználásával oldjuk meg.

$$\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x \, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left[\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} - 4 \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 3 \right) \left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} + 1 \right) \right] \, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left[\frac{e^{6x} + e^{-2x} + e^{2x} + e^{-6x}}{4} (e^{4x} + 1 + 1 + e^{-4x}) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} (e^{2x} + e^{-2x}) + \frac{e^{4x}}{2} + \frac{e^{-4x}}{2} - 2e^{2x} - 2e^{-2x} + 3 \right] \, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(\frac{e^{6x}}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{-6x}}{4} - \frac{4e^{4x}}{4} - 2 - \frac{4e^{-4x}}{4} + \frac{6e^{2x}}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{6e^{-2x}}{4} + \frac{2e^{4x}}{4} + \frac{2e^{-4x}}{4} - \frac{8e^{2x}}{4} - \frac{8e^{-2x}}{4} + 3 \right) \, dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(\frac{e^{6x}}{4} - \frac{2e^{4x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} + 1 - \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{2e^{-4x}}{4} + \frac{e^{-6x}}{4} \right) \, dx =$$

$$= \frac{1}{64} \int (e^{6x} - 2e^{4x} - e^{2x} + 4 - e^{-2x} - 2e^{-4x} + e^{-6x}) \, dx =$$

$$= \frac{1}{64} \left(\frac{e^{6x}}{6} - \frac{e^{4x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + 4x + \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-4x}}{2} - \frac{e^{-6x}}{6} \right) + C.$$

2. Exponenciális függvények

általános alakú racionális kifejezéseinek integrálása

Amennyiben az integrandus az e^x függvény $R(e^x)$ racionális kifejezése, akkor a $t = e^x$, vagyis $x = \ln t$ és $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítéssel átalakítjuk t racionális függvényévé, és ily módon racionális (egész vagy tört) függvényként integrálhatjuk.

Gyakorló feladatok

1. $\int \frac{4}{e^{2x} - 4} \, dx = ?$

Az $e^x = t$; vagyis $dx = \frac{dt}{t}$, helyettesítéssel;

$$\int \frac{4}{e^{2x} - 4} \, dx = \int \frac{4}{t^2 - 4} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{4 \, dt}{t(t^2 - 4)} = \int \frac{4 \, dt}{t(t+2)(t-2)}.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{4}{t(t+2)(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{t-2}.$$

$$4 \equiv A(t^2 - 4) + Bt(t-2) + Ct(t+2).$$

Az ismeretlen együtthatók értékét alkalmas t értékek (a nevező gyökei) behelyettesítésével határozzuk meg:

ha $t=0$, akkor $4 = -4A$, vagyis $A = -1$;

ha $t=-2$, akkor $4 = 8B$, vagyis $B = \frac{1}{2}$;

ha $t=2$, akkor $4 = 8C$, vagyis $C = \frac{1}{2}$.

Az integrál tehát

$$\int \frac{4}{e^{2x} - 4} \, dx = \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-2} \right) \, dt =$$

$$= -\ln t + \frac{1}{2} \ln(t+2) + \frac{1}{2} \ln(t-2) + C =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{t^2 - 4}}{t} + C = \ln \frac{\sqrt{e^{2x} - 4}}{e^x} + C.$$

2. $\int \frac{5}{e^{3x}+1} dx = ?$ A $t = e^x$; $dx = \frac{dt}{t}$, helyettesítéssel:

$$\int \frac{5}{e^{3x}+1} dx = \int \frac{5}{t^3+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{5}{t(t^3+1)} dt.$$

Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{5}{t(t^3+1)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{t^3+1};$$

$$\frac{5}{t(t^3+1)} \equiv \frac{A(t^3+1) + (Bt+C)t}{t(t^3+1)};$$

$$5 \equiv At^3 + A + Bt^2 + Ct;$$

$$5 \equiv (A+B)t^3 + Ct + A.$$

Az együtthatókat összehasonlítjuk:

$$A+B=0$$

$$C=0$$

$$A=5$$

$$B=-5$$

$$\int \frac{5}{e^{3x}+1} dx = \int \left(\frac{5}{t} - \frac{5t}{t^3+1} \right) dt = 5 \ln t - \frac{5}{2} \ln(t^3+1) + C =$$

$$= 5 \ln e^x - \frac{5}{2} \ln(e^{3x}+1) + C = 5x - \frac{5}{2} \ln(e^{3x}+1) + C.$$

3. $\int \frac{e^{3x}}{e^x+2} dx = ?$ A számláló e^x -ben magasabbfokú, mint a nevező,

ezért a $t=e^x$, $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítés után a számlálót osztjuk a nevezővel.

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+2} dx = \int \frac{t^3}{t+2} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{t+2} dt.$$

$$t^3:(t+2) = t-2$$

$$\frac{-t^2 \pm 2t}{-2t}$$

$$-2t$$

$$\frac{\mp 2t \mp 4}{+4}$$

$$+4$$

Az integrál:

$$\int \frac{t^2}{t+2} dt = \int \left(t-2 + \frac{4}{t+2} \right) dt =$$

$$= \frac{t^3}{2} - 2t + 4 \ln(t+2) + C = \frac{1}{2} e^{3x} - 2e^x + 4 \ln(e^x+2) + C.$$

4. $\int \frac{e^x}{e^{-x}+2} dx = ?$ A $t = e^x$, $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{e^x}{e^{-x}+2} dx = \int \frac{t}{\frac{1}{t}+2} \frac{dt}{t} = \int \frac{t}{1+2t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(2t+1)-1}{1+2t} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+2t} \right) dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \ln|1+2t| + C =$$

$$= \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{4} \ln|1+2e^x| + C.$$

5. $\int \frac{3}{e^x+e^{-x}} dx = \int \frac{3e^x}{e^{3x}+1} dx = ?$

$$t = e^x; \quad dx = \frac{dt}{t}.$$

$$\int \frac{3e^x}{e^{3x}+1} dx = \int \frac{3t}{t^3+1} \frac{dt}{t} = \int \frac{3dt}{t^3+1} = 3 \arctg t + C =$$

$$= 3 \arctg e^x + C.$$

6. $\int \frac{e^x}{(e^x+2)^3} dx = ?$

1. Megoldás:

A $t = e^x$; $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)^3} dx = \int \frac{t}{(t+2)^3} \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{(t+2)^3} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{e^x+2} + C.$$

11. Megoldás:

Az integrandus számlálójában a nevező belső függvényének deriváltja van, ezért az integrandus $f'(x)f'(x)$ alakú és a feladat helyettesítés nélkül is megoldható.

$$\int \frac{e^x}{(e^x+2)^2} dx = \int (e^x+2)^{-2} e^x dx = \frac{(e^x+2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{e^x+2} + C.$$

7. $\int \frac{e^x+4}{e^{2x}+4e^x+3} dx = ?$ A $t = e^x$; $dx = \frac{dt}{t}$, helyettesítéssel:

$$\int \frac{t+4}{t^2+4t+3} \frac{dt}{t} = \int \frac{t+4}{t(t^2+4t+3)} dt.$$

A nevezőben levő másodfokú polinomot szorzattá alakítjuk:

$$t^2+4t+3 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1;$$

$$t_1 = -1; \quad t_2 = -3.$$

$$t^2+4t+3 = (t+1)(t+3).$$

$$\int \frac{t+4}{t(t^2+4t+3)} dt = \int \frac{t+4}{t(t+1)(t+3)} dt.$$

Az integrandust parciális törtre bontjuk:

$$\frac{t+4}{t(t+1)(t+3)} \equiv \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{t+3};$$

$$\frac{t+4}{t(t+1)(t+3)} \equiv \frac{A(t+1)(t+3) + Bt(t+3) + Ct(t+1)}{t(t+1)(t+3)};$$

$$t+4 \equiv A(t+1)(t+3) + Bt(t+3) + Ct(t+1).$$

Behelyettesítjük a nevező gyökeit:

ha $t=0$, akkor $4=3A$, ebből $A=\frac{4}{3}$;

ha $t=-1$, akkor $3=-2B$, ebből $B=-\frac{3}{2}$;

ha $t=-3$, akkor $1=6C$, ebből $C=\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{t+4}{t(t+1)(t+3)} dt &= \int \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{t} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t+3} \right) dt = \\ &= \frac{4}{3} \ln t - \frac{3}{2} \ln(t+1) + \frac{1}{6} \ln(t+3) + C = \\ &= \frac{4}{3} \ln e^x - \frac{3}{2} \ln(e^x+1) + \frac{1}{6} \ln(e^x+3) + C = \\ &= \frac{4}{3} x - \frac{3}{2} \ln(e^x+1) + \frac{1}{6} \ln(e^x+3) + C. \end{aligned}$$

8. $\int \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^x(e^{2x}+7e^x+6)} dx = ?$ A $t = e^x$; $dx = \frac{dt}{t}$ helyettesítés után:

$$\int \frac{t^2+t-1}{t(t^2+7t+6)} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2+t-1}{t^2(t^2+7t+6)} dt.$$

A nevezőben levő másodfokú polinomot szorzattá alakítjuk.

$$t^2+7t+6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2};$$

$$t_1 = -1; \quad t_2 = -6;$$

$$t^2+7t+6 = (t+1)(t+6).$$

$$\int \frac{t^2+t-1}{t^2(t+1)(t+6)} dx = ?$$

Az integrandust parciális törtre bontjuk:

$$\begin{aligned} \frac{t^2+t-1}{t^2(t+1)(t+6)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t+6} = \\ &= \frac{At(t+1)(t+6) + B(t+1)(t+6) + Ct^2(t+6) + Dt^2(t+1)}{t^2(t+1)(t+6)}; \end{aligned}$$

$$t^2+t-1 \equiv At(t+1)(t+6) + B(t+1)(t+6) + Ct^2(t+6) + Dt^2(t+1).$$

Az együtthatókat alkalmasan választott t értékek behelyettesítésével határozzuk meg (ezek közül 3 a nevező gyöke):

ha $t=0$, akkor $-1=6B$, ebből $B=-\frac{1}{6}$;

ha $t = -1$, akkor $-1 = 5C$, ebből $C = -\frac{1}{5}$;

ha $t = -6$, akkor $36 - 6 - 1 = D36(-5)$; $D = -\frac{29}{180}$.

Legyen végül $t = 1$, és a már ismert három együtthatót helyettesítsük be:

$$1 = A \cdot 14 - \frac{1}{6} \cdot 14 - \frac{1}{5} \cdot 7 - \frac{29}{180} \cdot 2 = 14A - \frac{7}{3} - \frac{7}{5} - \frac{29}{90} =$$

$$= 14A - \frac{210 + 126 + 29}{90} = 14A - \frac{365}{90} = 14A - \frac{73}{18};$$

$$\frac{91}{18} = 14A; \quad A = \frac{91}{18 \cdot 14} = \frac{91}{252}.$$

A feladat megoldása:

$$\int \frac{t^2 + t - 1}{t^2(t^2 + 7t + 6)} dt = \int \left(\frac{91}{252} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t^2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{t+1} - \frac{29}{180} \cdot \frac{1}{t+6} \right) dt =$$

$$= \frac{91}{252} \ln t + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{5} \ln |t+1| - \frac{29}{180} \ln |t+6| + C =$$

$$= \frac{91}{252} \ln e^x + \frac{1}{6e^x} - \frac{1}{5} \ln(e^x + 1) - \frac{29}{180} \ln(e^x + 6) + C =$$

$$= \frac{91}{252} x + \frac{1}{6} e^{-x} - \frac{1}{5} \ln(e^x + 1) - \frac{29}{180} \ln(e^x + 6) + C.$$

VI. NÉHÁNY TOVÁBBI SPECIÁLIS ALAKÚ KIFEJEZÉS INTEGRÁLÁSA

1. $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x -nek) és $\sqrt[n]{ax+b}$ -nek racionális függvénye, akkor az integrandus a $t = \sqrt[n]{ax+b}$ új változó bevezetésével racionális függvénné alakítható.

Ha $t = \sqrt[n]{ax+b}$, akkor $x = \frac{t^n - b}{a}$ és $dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$.

Gyakorló feladatok

1. $\int x \sqrt{5x+3} dx = ?$

$$t = \sqrt{5x+3}; \quad t^2 = 5x+3; \quad x = \frac{t^2-3}{5}; \quad dx = \frac{2t}{5} dt.$$

A helyettesítést elvégezve:

$$\int x \sqrt{5x+3} dx = \int \frac{t^2-3}{5} \cdot \frac{2t}{5} dt = \frac{2}{25} \int (t^3 - 3t) dt.$$

Látható, hogy az új t változóban az integrandus racionális egész függvény.

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{5x+3} dx &= \frac{2}{25} \left(\frac{t^4}{4} - \frac{3t^2}{2} \right) + C = \\ &= \frac{2}{125} (5x+3)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{25} (5x+3)^{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{125} (5x+3)^2 \sqrt{5x+3} - \frac{2}{25} (5x+3) \sqrt{5x+3} + C = \\ &= \frac{2}{25} (5x+3) \sqrt{5x+3} \left[\frac{1}{5} (5x+3) - 1 \right] + C = \\ &= \frac{2}{25} (5x+3) \sqrt{5x+3} \left(x - \frac{2}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

$$2. \int (3x+6)\sqrt{2x-4} \, dx = ?$$

Az elvégzendő helyettesítés:

$$t = \sqrt{2x-4}; \quad t^2 = 2x-4; \quad x = \frac{t^2+4}{2}; \quad dx = t \, dt.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \int (3x+6)\sqrt{2x-4} \, dx &= \int \left(\frac{3t^2+12}{2} + 6 \right) t \cdot t \, dt = \\ &= \int \left(\frac{3t^4}{2} + 12t^2 \right) dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{12t^3}{3} + C = \\ &= \frac{3}{10} \sqrt{(2x-4)^5} + 4\sqrt{(2x-4)^3} + C = \\ &= (2x-4)\sqrt{2x-4} \left[\frac{3}{10}(2x-4) + 4 \right] + C = \\ &= 2(x-2)\sqrt{2x-4} \left(\frac{3}{5}x - \frac{14}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

$$3. \int (x^2-2x+3)\sqrt{2x-1} \, dx = ?$$

A helyettesítés:

$$t = \sqrt{2x-1}; \quad t^2 = 2x-1; \quad x = \frac{t^2+1}{2}; \quad dx = t \, dt.$$

$$\begin{aligned} \int \left[\left(\frac{t^2+1}{2} \right)^2 - t^2 - 1 + 3 \right] t \cdot t \, dt &= \int \left(\frac{t^4+2t^2+1}{4} - t^2 + 2 \right) t^2 \, dt = \\ &= \int \left(\frac{t^6}{4} + \frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{4} - t^4 + 2t^2 \right) dt = \int \left(-\frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{9}{4}t^2 \right) dt = \\ &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{t^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} + \frac{9}{4} \cdot \frac{t^3}{3} + C = -\frac{3}{20}t^5 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{3}{4}t^3 + C = \\ &= \frac{t^3}{4} \left(-\frac{3}{5}t^2 + \frac{1}{2}t + 3 \right) + C = \\ &= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{2x-1} \left[-\frac{3}{5}(2x-1) + \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + 3 \right] + C = \\ &= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{2x-1} \left(-\frac{6}{5}x + \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + 3\frac{3}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

$$4. \int (2x-1)\sqrt{(5x-3)^3} \, dx = ?$$

Helyettesítünk:

$$t = \sqrt{5x-3}; \quad t^2 = \sqrt{(5x-3)^2}; \quad t^3 = 5x-3; \quad x = \frac{t^3+3}{5};$$

$$dx = \frac{2}{5} t \, dt.$$

$$\begin{aligned} \int (2x-1)\sqrt{(5x-3)^3} \, dx &= \int \left[\frac{2}{5}(t^3+3) - 1 \right] t^3 \cdot \frac{2}{5} t \, dt = \\ &= \int \left(\frac{2}{5}t^3 + \frac{6}{5} - \frac{5}{5} \right) \cdot \frac{2}{5} t^4 \, dt = \int \left(\frac{2}{5}t^3 + \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{2}{5} t^4 \, dt = \\ &= \int \left(\frac{4}{25}t^7 + \frac{2}{25}t^4 \right) dt = \frac{4}{25} \cdot \frac{t^8}{8} + \frac{2}{25} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \\ &= \frac{2}{25}t^5 \left(\frac{2}{7}t^3 + \frac{1}{5} \right) + C = \\ &= \frac{2}{25}(5x-3)^2 \sqrt{5x-3} \left[\frac{2}{7}(5x-3) + \frac{1}{5} \right] + C = \\ &= \frac{2}{25}(5x-3)^2 \sqrt{5x-3} \left(\frac{10}{7}x - \frac{23}{35} \right) + C. \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}} \, dx = ?$$

Helyettesítünk:

$$t = \sqrt{6x+4}; \quad t^2 = 6x+4; \quad x = \frac{t^2-4}{6}; \quad dx = \frac{t}{3} \, dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{\sqrt{6x+4}} \, dx &= \int \frac{\frac{t^2-4}{6}}{t} \cdot \frac{t}{3} \, dt = \int \frac{t^2-4}{9} \, dt = \\ &= \frac{t^3}{27} - \frac{4}{9}t + C = \frac{\sqrt{(6x+4)^3}}{27} - \frac{4}{9}\sqrt{6x+4} + C. \end{aligned}$$

$$6. \int x \sqrt[4]{5x+3} dx = ?$$

Helyettesítünk:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[4]{5x+3}, \quad t^4 = 5x+3, \quad x = \frac{t^4-3}{5}, \quad \text{ebből } dx = \frac{4}{5} t^3 dt. \\ \int x \sqrt[4]{5x+3} dx &= \int \frac{t^4-3}{5} t \frac{4}{5} t^3 dt = \frac{4}{25} \int t^4 (t^4-3) dt = \\ &= \frac{4}{25} \int (t^8-3t^4) dt = \frac{4}{25} \left(\frac{t^9}{9} - 3 \frac{t^5}{5} \right) + C = \frac{4}{225} t^9 - \frac{12}{125} t^5 + C = \\ &= \frac{4}{225} \sqrt[4]{(5x+3)^9} - \frac{12}{125} \sqrt[4]{(5x+3)^5} + C = \\ &= \frac{4}{25} (5x+3) \left(\frac{5x+3}{9} \sqrt[4]{5x+3} - \frac{3}{5} \sqrt[4]{5x+3} \right) + C = \\ &= \frac{4}{25} (5x+3) \sqrt[4]{5x+3} \cdot \frac{25x+15-27}{45} + C = \\ &= \frac{5(5x+3)(25x-12) \sqrt[4]{5x+3}}{1125} + C. \end{aligned}$$

$$7. \int \frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{6x-4}} dx = ?$$

Helyettesítünk:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt[3]{6x-4}; \quad t^3 = 6x-4; \quad x = \frac{t^3+4}{6}, \quad \text{ebből} \\ dx &= \frac{3t^2}{6} dt = \frac{t^2}{2} dt. \\ \int \frac{3x^3+2}{\sqrt[3]{6x-4}} dx &= \int \frac{3 \left(\frac{t^3+4}{6} \right)^3 + 2}{t} \cdot \frac{t^2}{2} dt = \\ &= \int \left(3 \frac{t^6+8t^3+16}{36} + 2 \right) \frac{t}{2} dt = \int \frac{t^6+8t^3+16+24}{12} \cdot \frac{t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{24} \int (t^7+8t^4+40t) dt = \frac{1}{24} \left(\frac{t^8}{8} + \frac{8t^5}{5} + \frac{40t^2}{2} \right) + C = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{t^8}{24} \left(\frac{1}{8} t^8 + \frac{8}{5} t^3 + 20 \right) + C = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(6x-4)^8}}{24} \left(\frac{1}{8} \sqrt[3]{(6x-4)^8} + \frac{8}{5} \sqrt[3]{(6x-4)^5} + 20 \right) + C = \\ &= \frac{\sqrt[3]{(6x-4)^8}}{24} \left[\frac{1}{8} (6x-4)^8 + \frac{8}{5} (6x-4)^5 + 20 \right] + C. \end{aligned}$$

A további átalakításokat az olvasóra bizzuk.

$$2. R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) \text{ alakú integrandus}$$

Az integrandust racionálissá tehetjük, ha új változót vezetünk be.

Legyen $u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ($n = 2, 3, 4, \dots$, és $ad \neq bc$), ekkor $u^n = \frac{ax+b}{cx+d}$, és ebből kifejezzük x -et mint az u új változó függvényét:

$$u^n(cx+d) = ax+b;$$

$$cxu^n + du^n = ax+b;$$

$$x(cu^n - a) = b - du^n;$$

$$x = \frac{b - du^n}{cu^n - a}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{-n du^{n-1}(cu^n - a) - (b - du^n) cnu^{n-1}}{(cu^n - a)^2} = \\ &= \frac{nu^{n-1}(da - bc)}{(cu^n - a)^2}, \end{aligned}$$

vagyis

$$dx = \frac{n(da-bc)}{(cu^n-a)^2} u^{n-1} du.$$

Ha (előbbi feltételezésünkkel ellentétben) $ad=bc$, akkor a gyökjel alatti tört a következő módon alakítható át:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c},$$

ugyanis $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ miatt a tört egyszerűsíthető és a törtfüggvény helyett konstans van a gyökjel alatt.

A feladatok megoldása során nem a végképletet, hanem a módszert alkalmazzuk.

Gyakorló feladatok

$$1. \int \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} dx = ?$$

$$\text{Legyen } u = \sqrt{\frac{x-3}{x-1}}, \text{ vagyis } u^2 = \frac{x-3}{x-1}.$$

Kifejezzük x -et mint az u új változó függvényét:

$$u^2 x - u^2 = x - 3, \quad x(u^2 - 1) = u^2 - 3, \quad \text{ebből } x = \frac{u^2 - 3}{u^2 - 1}.$$

Differenciáljuk x -et u szerint, majd kifejezzük a dx -et:

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u(u^2-1) - (u^2-3) \cdot 2u}{(u^2-1)^2} = \frac{2u^3 - 2u - 2u^3 + 6u}{(u^2-1)^2} = \frac{4u}{(u^2-1)^2},$$

ebből

$$dx = \frac{4u}{(u^2-1)^2} du.$$

Behelyettesítünk:

$$\int \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} dx = \int \frac{4u^3}{(u^2-1)^2} du.$$

Az integrandust parciális törtek összegére bontjuk:

$$\begin{aligned} \frac{4u^3}{(u^2-1)^2} &= \frac{4u^3}{(u+1)^2(u-1)^2} \equiv \frac{A}{(u+1)^2} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{(u-1)^2} + \frac{D}{u-1} = \\ &= \frac{A(u-1)^2 + B(u+1)(u-1)^2 + C(u+1)^2 + D(u-1)(u+1)^2}{(u+1)^2(u-1)^2} = \\ &= \frac{(u-1)^2(A+Bu+B) + (u+1)^2(C+Du-D)}{(u+1)^2(u-1)^2}. \end{aligned}$$

A számlálók azonosan egyenlők, tehát

$$\begin{aligned} 4u^3 &\equiv (u^2-2u+1)(A+Bu+B) + (u^2+2u+1)(C+Du-D) = \\ &= Au^3 + Bu^3 + Bu^2 - 2Au - 2Bu^2 - 2Bu + A + Bu + B + \\ &+ Cu^3 + Du^3 - Du^2 + 2Cu + 2Du^2 - 2Du + C + Du - D = \\ &= (B+D)u^3 + (A+B-2B+C-D+2D)u^2 + \\ &+ (-2A-2B+B+2C-2D+D)u + (A+B+C-D) = \\ &= (B+D)u^3 + (A-B+C+D)u^2 + (-2A-B+2C-D)u + \\ &+ (A+B+C-D). \end{aligned}$$

Az azonosság bal és jobb oldalán levő egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlők:

$$\begin{array}{ll} B+D = 0 & \text{I.} \\ A-B+C+D = 4 & \text{II.} \\ -2A-B+2C-D = 0 & \text{III.} \\ A+B+C-D = 0 & \text{IV.} \end{array}$$

I. + III.

$$-2A+2C = 0, \text{ vagyis } A=C.$$

I. + IV.

$$A+2B+C = 0, \text{ de } A=C \text{ és ezért } 2A+2B = 0, \text{ vagyis } B = -A = -C$$

I.-ből.

$$D = -B = C.$$

A II.-be helyettesítve:

$$C+C+C+C = 4, \quad C=1.$$

A keresett együtthatók:

$$A=1; \quad B=-1; \quad C=1; \quad D=1.$$

Az integrandus parciális törtkre bontva:

$$\frac{4u^2}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u-1}.$$

A feladat megoldása:

$$\begin{aligned} \int \frac{4u^2}{(u^2-1)^2} du &= \int \left[\frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u-1} \right] du = \\ &= \int \left[(u+1)^{-2} - \frac{1}{u+1} + (u-1)^{-2} + \frac{1}{u-1} \right] du = \\ &= -\frac{1}{u+1} - \ln|u+1| - \frac{1}{u-1} + \ln|u-1| + C = \\ &= -\frac{u-1+u+1}{u^2-1} + \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \frac{-2u}{u^2-1} + \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C. \end{aligned}$$

Az eredményt az x változó függvényként is megadjuk:

$$\int \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} dx = \frac{-2\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}}{\frac{x-3}{x-1}-1} + \ln \frac{\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}-1}{\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}+1} + C.$$

További átalakítást nem végzünk.

$$2. \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = ?$$

$$\text{Legyen } u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \text{ ebből } u^2 = \frac{x-1}{x+1}.$$

Fejezzük ki x -et mint u függvényét.

$$u^2 x + u^2 = x - 1; \quad x(u^2 - 1) = -u^2 - 1;$$

$$x = -\frac{u^2+1}{u^2-1}.$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= -\frac{3u^2(u^2-1) - (u^2+1) \cdot 2u}{(u^2-1)^2} = -\frac{3u^6 - 3u^4 - 2u^3 - 2u}{(u^2-1)^2} = \\ &= \frac{6u^2}{(u^2-1)^2}, \end{aligned}$$

ebből

$$dx = \frac{6u^2}{(u^2-1)^2} du.$$

Behelyettesítve x -et és dx -et:

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx = \int \frac{(u^2-1)^2}{(u^2+1)^2} u \frac{6u^2}{(u^2-1)^2} du = \int \frac{6u^3}{(u^2+1)^2} du.$$

Az integrandust parciális törtök összegére bontjuk:

$$\begin{aligned} \frac{6u^3}{(u^2+1)^2} &= \frac{6u^3}{(u+1)^2(u^2-u+1)^2} = \\ &= \frac{A}{(u+1)^2} + \frac{B}{u+1} + \frac{Cu+D}{(u^2-u+1)^2} + \frac{Eu+F}{u^2-u+1}, \end{aligned}$$

ugyanis a nevezőben levő második tényező nem bontható valós gyök-tényezők szorzatára.

Közös nevezőre hozunk a jobb oldalon, majd felírjuk az egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlőségéből következő egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} \frac{6u^3}{(u^2+1)^2} &= \frac{A(u^2-u+1)^2 + B(u+1)(u^2-u+1)^2 + \\ &+ \frac{(Cu+D)(u+1)^2 + (Eu+F)(u+1)^2(u^2-u+1)}{(u+1)^2(u^2-u+1)^2}. \end{aligned}$$

A továbbiakban már csak a számlálók azonosságát írjuk fel:

$$\begin{aligned} 6u^3 &\equiv (u^4-u+1)^2(A+Bu+B) + \\ &+ (u+1)^2[Cu+D+(Eu+F)(u^2-u+1)] = \\ &= (u^4-2u^3+u^2+2u^2-2u+1)(A+Bu+B) + \\ &+ (u^3+2u+1)(Cu+D+Eu^2+Fu^3-Eu^2-Fu+Eu+F) = \\ &= (u^4-2u^3+3u^2-2u+1)[(A+B)+Bu] + \\ &+ (u^3+2u+1)[Eu^2+(F-E)u^2+(C+E-F)u+(D+F)] = \\ &= (A+B)u^4-2(A+B)u^3+3(A+B)u^2-2(A+B)u+(A+B)+ \\ &+ Bu^5-2Bu^4+3Bu^3-2Bu^2+Bu+Eu^5+2Eu^4+Eu^3+ \\ &+ (F-E)u^4+2(F-E)u^3+(F-E)u^2+(C+E-F)u^3+2(C+E-F)u^2+ \\ &+ (C+E-F)u+(D+F)u^3+2(D+F)u+(D+F) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (B+E)u^6 + (A+B-2B+2E+F-E)u^4 + \\
&+ (-2A-2B+3B+E+2F-2E+C+E-F)u^3 + \\
&+ (3A+3B-2B+F-E+2C+2E-2F+D+F)u^2 + \\
&+ (-2A-2B+B+C+E-F+2D+2F)u + (A+B+D+F) = \\
&= (B+E)u^6 + (A-B+E+F)u^4 + (-2A+B+C+F)u^3 + \\
&+ (3A+B+2C+D+E)u^2 + (-2A-B+C+2D+E+F)u + \\
&+ (A+B+D+F).
\end{aligned}$$

A bal és jobb oldal egyenlő fokszámú tagjainak együtthatói egyenlők, tehát

$$\begin{array}{ll}
B+E=0 & \text{I.} \\
A-B+E+F=0 & \text{II.} \\
-2A+B+C+F=6 & \text{III.} \\
3A+B+2C+D+E=0 & \text{IV.} \\
-2A-B+C+2D+E+F=0 & \text{V.} \\
A+B+D+F=0 & \text{VI.}
\end{array}$$

Az egyenletrendszert úgy oldjuk meg, hogy minden ismeretlent A -val és B -vel fejezzük ki, majd megoldjuk az így kapható kétismeretlenes egyenletrendszert.

$$E = -B.$$

A II. egyenletbe helyettesítve:

$$A - B - B + F = 0, \text{ ebből } F = 2B - A.$$

A III.-ba helyettesítve:

$$-2A + B + C + 2B - A = 6, \text{ ebből } C = 3A - 3B + 6.$$

A IV.-be helyettesítve:

$$3A + B + 6A - 6B + 12 + D - B = 0, \text{ ebből } D = 6B - 9A - 12.$$

Az eddig kapott értékeket az V. és VI. egyenletbe helyettesítjük:

$$-2A - B + 3A - 3B + 6 + 12B - 18A - 24 - B + 2B - A = 0$$

$$A + B + 6B - 9A - 12 + 2B - A = 0$$

$$-18A + 9B = 18 \quad \text{V.}$$

$$-9A + 9B = 12 \quad \text{VI.}$$

VI. - V.

$$9A = -6; \quad A = -\frac{2}{3}.$$

Visszahelyettesítve a VI. egyenletbe:

$$6 + 9B = 12; \quad B = \frac{2}{3}.$$

$$C = -2 - 2 + 6 = 2;$$

$$D = 4 + 6 - 12 = -2;$$

$$E = -\frac{2}{3}; \quad F = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2.$$

Az integrál:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \int \frac{6u^2}{(u^2+1)^2} du = \\
&= \int \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{u+1} + \frac{2u-2}{(u^2-u+1)^2} + \frac{-\frac{2}{3}u+2}{u^2-u+1} \right] du = \\
&= -\frac{2}{3} \int (u+1)^{-2} du + \frac{2}{3} \int \frac{1}{u+1} du + \int \frac{2u-2}{(u^2-u+1)^2} du + \\
&+ \frac{1}{3} \int \frac{-2u+6}{u^2-u+1} du.
\end{aligned}$$

A következő részfeladat az egyes integrálok meghatározása:

$$a) \quad -\frac{2}{3} \int (u+1)^{-2} du = + \frac{2}{3(u+1)} + C_1.$$

$$b) \quad \frac{2}{3} \int \frac{1}{u+1} du = \frac{2}{3} \ln |u+1| + C_2.$$

$$\begin{aligned}
c) \quad \int \frac{2u-2}{(u^2-u+1)^2} du &= \int \frac{2u-1-1}{(u^2-u+1)^2} du = \\
&= \int \frac{2u-1}{(u^2-u+1)^2} du - \int \frac{1}{(u^2-u+1)^2} du = \\
&= \int (2u-1)(u^2-u+1)^{-2} du - \int \frac{1}{(u^2-u+1)^2} du = \\
&= -\frac{1}{u^2-u+1} - \int \frac{1}{(u^2-u+1)^2} du.
\end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2a^3} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctg \frac{x}{a} + C,$$

tehát az integrált helyettesítéssel ilyen típusra kell visszavezetni.

$$\int \frac{1}{(u^2 - u + 1)^2} du = \int \frac{1}{\left[\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2} du.$$

Legyen $v = u - \frac{1}{2}$, és $dv = du$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(u^2 - u + 1)^2} du &= \int \frac{dv}{\left(v^2 + \frac{3}{4}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{4} v^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2 \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^3} \arctg \frac{2v}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{2}{3} \frac{v}{v^2 + \frac{3}{4}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} v + C, \end{aligned}$$

mivel $v = u - \frac{1}{2}$, ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u^2 - u + 1)^2} &= \frac{2}{3} \frac{u - \frac{1}{2}}{u^2 - u + 1} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} \left(u - \frac{1}{2}\right) + C. \\ \int \frac{2u - 2}{(u^2 - u + 1)^2} du &= \\ &= -\frac{1}{(u^2 - u + 1)} - \frac{1}{3} \frac{2u - 1}{u^2 - u + 1} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} (2u - 1) + C_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad \frac{1}{3} \int \frac{-2u + 6}{u^2 - u + 1} du &= -\frac{1}{3} \int \frac{2u - 1 - 5}{u^2 - u + 1} du = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{2u - 1}{u^2 - u + 1} du + \frac{5}{3} \int \frac{du}{u^2 - u + 1} = \\ &= -\frac{1}{3} \ln |u^2 - u + 1| + \frac{5}{3} \int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Az integrált helyettesítéssel számítjuk ki.

Legyen $v = u - \frac{1}{2}$, és $dv = du$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \int \frac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} &= \frac{5}{3} \int \frac{dv}{v^2 + \frac{3}{4}} = \frac{5}{3} \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctg \frac{v}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \\ &= \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2v}{\sqrt{3}} + C = \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Vagyis

$$\frac{1}{3} \int \frac{-2u + 6}{u^2 - u + 1} du = -\frac{1}{3} \ln |u^2 - u + 1| + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} + C_4.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \frac{2}{3(u+1)} + \frac{2}{3} \ln |u+1| - \\ &- \frac{1}{u^2 - u + 1} - \frac{1}{3} \frac{2u - 1}{u^2 - u + 1} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} - \\ &- \frac{1}{3} \ln |u^2 - u + 1| + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2u - 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Az integrált x függvényeként kell megkapnunk, ezért u helyébe $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ -et kell helyettesítenünk, vagyis:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} dx &= \frac{2}{3 \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right)} + \frac{2}{3} \ln \left| \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + 1 \right| - \\ &- \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + 1} - \frac{1}{3} \frac{2 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - 1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + 1} - \end{aligned}$$

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\sqrt{3}} -$$

$$-\frac{1}{3} \ln \left| \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1 \right| + \frac{10}{3\sqrt{3}} \arctg \frac{2\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

3. $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x -nek), valamint $\sqrt{a^2 - x^2}$ -nek racionális függvénye, akkor $\sqrt{a^2 - x^2} = a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ átalakítás után az $\frac{x}{a} = \sin t$, ill. $\frac{x}{a} = \cos t$ helyettesítéssel a t trigonometrikus függvényévé alakítható az integrandus.

Helyettesítés:

$$\frac{x}{a} = \sin t, \quad x = a \sin t, \quad dx = a \cos t \, dt, \quad \text{ill.}$$

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad x = a \cos t, \quad dx = -a \sin t \, dt.$$

Gyakorló feladatok

1. $\int x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = ?$

$$x = \sin t; \quad dx = \cos t \, dt;$$

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \sin^2 t \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int \sin^2 t \cos^3 t \, dt = ?$$

Most a linearizáló formulákat alkalmazzuk: mivel $\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

és $\cos^3 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, így

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \frac{1-\cos 2t}{2} \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1-\cos^2 2t) \, dt = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1+\cos 4t}{2}\right) \, dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1-\cos 4t}{2} \, dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right) + C.$$

A visszahelyettesítéshez $\sin 4t$ értékét x -szel — vagy $\sin t$ -vel — kell kifejeznünk:

$$\sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = 2 \cdot 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) =$$

$$= 4 \sin t \sqrt{1-\sin^2 t} (1-2\sin^2 t) = 4x \sqrt{1-x^2} (1-2x^2).$$

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{8} [\arcsin x - (x-2x^3) \sqrt{1-x^2}] + C.$$

2. $\int (2x+4) \sqrt{(1-x^2)^3} \, dx = ?$

A helyettesítés:

$$x = \sin t; \quad dx = \cos t \, dt. \quad \text{Így}$$

$$\int (2x+4) \sqrt{(1-x^2)^3} \, dx = \int (2 \sin t + 4) \sqrt{(1-\sin^2 t)^3} \cos t \, dt =$$

$$= \int (2 \sin t + 4) \cos^4 t \, dt = \int (2 \sin t \cos^4 t + 4 \cos^4 t) \, dt =$$

$$= \int 2 \sin t \cos^4 t \, dt + \int 4 \cos^4 t \, dt.$$

Legyen $I_1 = \int 2 \sin t \cos^4 t \, dt$ és $I_2 = \int 4 \cos^4 t \, dt$.

Az I_1 integrál az $\int f^n(x) f'(x) \, dx$ típusú, ezért

$$I_1 = - \int 2(-\sin t) \cos^4 t \, dt = -2 \frac{\cos^5 t}{5} + C_1.$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int 4 \cos^4 t \, dt = \int 4 \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt = \\
 &= \int (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \int \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = \\
 &= \int \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2t + \frac{\cos 4t}{2} \right) dt = \frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t + C_2. \\
 \int (2x+4) \sqrt{(1-x^2)^3} \, dx &= -\frac{2}{5} \cos^5 t + \frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t + C.
 \end{aligned}$$

Ezt az eredményt $\sin t$ -ben kell kifejeznünk, hogy visszahelyettesíthessük az x változót.

Mivel $x = \sin t$, tehát $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$, ezért

$$\cos^5 t = (1 - x^2)^{\frac{5}{2}};$$

$$\begin{aligned}
 \sin 2t &= 2 \sin t \cos t = 2x \sqrt{1 - x^2}; \quad \sin 4t = 2 \sin 2t \cos 2t = \\
 &= 2 \cdot 2 \sin t \cos t (\cos^2 t - \sin^2 t) = 4x \sqrt{1 - x^2} (1 - 2x^2).
 \end{aligned}$$

A feladat megoldása tehát

$$\begin{aligned}
 \int (2x+4) \sqrt{(1-x^2)^3} \, dx &= \\
 &= -\frac{2}{5} \sqrt{(1-x^2)^5} + \frac{3}{2} \arcsin x + 2x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} (1-2x^2).
 \end{aligned}$$

3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = ?$ Az $x = \sin t$; $dx = \cos t \, dt$ helyettesítéssel:

$$\int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t \, dt = \int \sin^3 t \, dt.$$

Az integrandusban csak a $\sin t$ páratlan kitevőjű hatványa van.

$$\begin{aligned}
 \int \sin^3 t \, dt &= \int \sin t \sin^2 t \, dt = \int \sin t (1 - \cos^2 t) \, dt = \\
 &= \int (\sin t - \sin t \cos^2 t) \, dt = -\cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t + C.
 \end{aligned}$$

Mivel $x = \sin t$ és így $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$, ezért

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \sqrt{1-x^2} + C.$$

4. $\int \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx = ?$

I. Megoldás:

Az $x = \sin t$; $dx = \cos t \, dt$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx &= \int \frac{2 \sin t \cos t \, dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} = \int \frac{2 \sin t \cos t \, dt}{\cos^3 t} = \\
 &= \int 2 \sin t \cos^{-2} t \, dt = -2 \frac{\cos^{-1} t}{-1} + C = \\
 &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} + C = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + C.
 \end{aligned}$$

II. Megoldás:

Most közvetlenül x -ben tudjuk $f^{(n)}(x) f'(x)$ alakba átvinni az integrandust:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \, dx &= \int 2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \, dx = -\int -2x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \, dx = \\
 &= -\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + C.
 \end{aligned}$$

4. $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x -nek), valamint $\sqrt{a^2 + x^2}$ -nek racionális kifejezése, akkor

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

és az

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sh} t, \quad x = a \operatorname{sh} t, \quad \text{valamint} \quad dx = a \operatorname{ch} t \, dt$$

helyettesítéssel a gyökkifejezés kiküszöbölhető.

Először olyan feladatokat oldunk meg, amelyekben $a=1$, majd az általános esettel foglalkozunk.

Gyakorló feladatok

1. $\int x \sqrt{1+x^2} \, dx = ?$ A feladatot kétféle módon oldjuk meg: egyrészt $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel, másrészt $f^{(n)}(x)f'(x)$ alak ismeretében.

I. Megoldás:

$\int x \sqrt{1+x^2} \, dx = ?$ Az $x = \operatorname{sh} t$, $dx = \operatorname{ch} t \, dt$ helyettesítéssel:

$$\int x \sqrt{1+x^2} \, dx = \int \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t \, dt = \int \operatorname{sh} t \operatorname{ch}^2 t \, dt.$$

Vegyük észre, hogy az integrandus most $f^{(n)}(t)f'(t)$ alakú, ezért

$$\int x \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{\operatorname{ch}^3 t}{3} + C = \frac{(\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t})^3}{3} + C = \frac{(\sqrt{1+x^2})^3}{3} + C.$$

II. Megoldás:

Az $u = 1+x^2$; $du = 2x \, dx$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}^3}{3} + C. \end{aligned}$$

Vigyázat! A második módszert most azért alkalmazhattuk, mert a gyökös kifejezés a belső függvény, az $(1+x^2)$ deriváltjával volt szorozva. Ilyen esetben viszont ez az eljárás gyorsabban vezet célhoz.

2. $\int x^3 \sqrt{1+x^2} \, dx = ?$ Az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítést alkalmazzuk, amely-lal $dx = \operatorname{ch} t \, dt$; $t = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x$.

$$\int \operatorname{sh}^3 t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t \, dt = \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^3 t \, dt = ?$$

Mivel $\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$ és $\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$, ezért

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1+x^2} \, dx &= \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} \operatorname{ch} t \, dt = \frac{1}{4} \int (\operatorname{ch}^2 2t - 1) \operatorname{ch} t \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\operatorname{ch} 4t + 1}{2} - 1 \right) \operatorname{ch} t \, dt = \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4t - 1) \operatorname{ch} t \, dt = \frac{1}{8} \left[\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t \right] + C. \end{aligned}$$

Most vissza kell alakítanunk az eredményt úgy, hogy abban az x változó szerepeljen.

Mivel $x = \operatorname{sh} t$, és $\operatorname{sh} 4t = 2 \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = 2 \cdot 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t (\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t) = 4 \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} (\operatorname{sh}^2 t + 1 + \operatorname{sh}^2 t) = 4x \sqrt{1+x^2} (2x^2 + 1)$,

$$\int x^2 \sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{8} [x \sqrt{1+x^2} (2x^2 + 1) - \operatorname{ar} \operatorname{sh} x] + C.$$

3. $\int 2x^2 \sqrt{1+x^2}^3 \, dx = ?$ Az $x = \operatorname{sh} t$; $dx = \operatorname{ch} t \, dt$; $t = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x$ helyettesítéssel adódik:

$$\int 2 \operatorname{sh}^2 t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}^3 \operatorname{ch} t \, dt = \int 2 \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^4 t \, dt = ?$$

Mindkét hiperbolikus függvény páros kitevőjű.

$$\operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}; \quad \operatorname{ch}^4 t = \left(\frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} \right)^2.$$

A felírt azonosságokat behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int 2x^2 \sqrt{1+x^2}^3 \, dx &= \int 2 \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} \right)^2 \operatorname{ch} t \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \int (\operatorname{ch}^2 2t - 1) (\operatorname{ch} 2t + 1) \operatorname{ch} t \, dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{\operatorname{ch} 4t + 1}{2} - 1 \right) (\operatorname{ch} 2t + 1) \operatorname{ch} t \, dt = \\ &= \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4t - 1) (\operatorname{ch} 2t + 1) \operatorname{ch} t \, dt = \\ &= \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4t \operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2t + \operatorname{ch} 4t - 1) \operatorname{ch} t \, dt. \end{aligned}$$

Az integrandusban levő szorzatfüggvényt a megfelelő azonosság felhasználásával összeggé alakítjuk.

Mivel

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch} (x+y) + \operatorname{ch} (x-y)],$$

ezért

$$\operatorname{ch} 4t \operatorname{ch} 2t = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} 6t + \operatorname{ch} 2t),$$

tehát az integrál:

$$\begin{aligned} \int 2x^2 \sqrt{1+x^2}^3 dx &= \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{ch} 6t + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} 2t + \operatorname{ch} 4t - 1 \right) dt = \\ &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{ch} 6t - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2t + \operatorname{ch} 4t - 1 \right) dt = \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\operatorname{sh} 6t}{12} - \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} + \frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t \right) + C = \\ &= \frac{1}{96} (\operatorname{sh} 6t - 3 \operatorname{sh} 2t + 3 \operatorname{sh} 4t - 12t) + C. \end{aligned}$$

A kapott eredményt x függvényévé kell alakítanunk: ehhez felhasználhatjuk a $\operatorname{sh}(x_1+x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2$ összefüggést. $\operatorname{sh} 6t = \operatorname{sh}(4t+2t) = \operatorname{sh} 4t \operatorname{ch} 2t + \operatorname{ch} 4t \operatorname{sh} 2t$.

$$\begin{aligned} \int 2x^2 \sqrt{1+x^2}^3 dx &= \\ &= \frac{1}{96} (\operatorname{sh} 4t \operatorname{ch} 2t + \operatorname{ch} 4t \operatorname{sh} 2t - 3 \operatorname{sh} 2t + 3 \operatorname{sh} 4t - 12t) + C = \\ &= \frac{1}{96} [\operatorname{sh} 4t (\operatorname{ch} 2t + 3) + \operatorname{sh} 2t (\operatorname{ch} 4t - 3) - 12t] + C. \end{aligned}$$

További alakítások:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 4t &= 2 \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = 4 \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} (2 \operatorname{sh}^2 t + 1) = \\ &= 4x(2x^2+1) \sqrt{1+x^2}, \\ \operatorname{ch} 2t &= 2x^2+1; \quad \operatorname{sh} 2t = 4x \sqrt{1+x^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 4t &= \operatorname{ch}^2 2t + \operatorname{sh}^2 2t = (2 \operatorname{sh}^2 t + 1)^2 + 4 \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \\ &= (2x^2+1)^2 + 4x \sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int 2x^2 \sqrt{1+x^2}^3 dx &= \frac{1}{96} \{ (8x^2+4x) \sqrt{1+x^2} (2x^2+4) + \\ &+ 4x \sqrt{1+x^2} [(2x^2+1)^2 + 4x \sqrt{1+x^2} - 3] - 12 \operatorname{ar} \operatorname{sh} x \} + C. \end{aligned}$$

$$4. \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = ?$$

I. Megoldás:

Az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel $dx = \operatorname{ch} t dt$, és így

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} \operatorname{ch} t dt = \int \operatorname{sh} t dt = \\ &= \operatorname{ch} t + C = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} + C = \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

Az integrandus könnyen átalakítható $f^{(n)}(x)f'(x)$ alakúvá:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

A két megoldás valóban megegyezik.

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = ?$ Ezt a feladatot az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel oldjuk meg:

$$x = \operatorname{sh} t; \quad t = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x; \quad dx = \operatorname{ch} t dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t dt}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}^3} &= \int \frac{\operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch} t dt}{\operatorname{ch}^3 t} = \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^{-2} t dt = \\ &= \int (\operatorname{ch}^2 t - 1) \operatorname{ch}^{-2} t dt = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \right) dt = t - \operatorname{th} t + C = \\ &= t - \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} + C = t - \frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} + C = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \end{aligned}$$

6. $\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}} dx = ?$ Az integrandust úgy alakítjuk át, hogy a nevezőből 4-et kiemelünk:

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}} dx.$$

A gyökjel alatti kifejezés $1+\operatorname{sh}^2 t$ -vel egyenlő, ha $\frac{3x}{2} = \operatorname{sh} t$ új függvényt vezetünk be; ekkor

$$x = \frac{2}{3} \operatorname{sh} t \quad \text{és} \quad dx = \frac{2}{3} \operatorname{ch} t dt.$$

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{\frac{8}{27} \operatorname{sh}^3 t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} \cdot \frac{2}{3} \operatorname{ch} t dt = \frac{40}{81} \int \operatorname{sh}^3 t dt.$$

Az integrandust szorzattá alakítjuk, majd felhasználjuk a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ azonosságot.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}} dx &= \frac{40}{81} \int \operatorname{sh}^3 t \operatorname{ch} t dt = \frac{40}{81} \int (\operatorname{ch}^2 t - 1) \operatorname{sh} t dt = \\ &= \frac{40}{81} \int (\operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh} t - \operatorname{sh} t) dt = \frac{40}{81} \left(\frac{\operatorname{ch}^3 t}{3} - \operatorname{ch} t \right) + C. \end{aligned}$$

Mivel $\operatorname{ch} t = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}$, ezért az integrál mint az x függvénye:

$$\int \frac{5x^3}{\sqrt{4+9x^2}} dx = \frac{40}{81} \left[\frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} \right)^3}{3} - \sqrt{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} \right] + C.$$

A további átalakításokat az Olvasóra bízunk.

5. $R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ alakú integrandus

Ha az integrandus a független változónak (x -nek), valamint $\sqrt{x^2-a^2}$ -nek racionális függvénye, akkor a gyökös kifejezést először a^2 kiemelésével átalakítjuk $a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}$ alakúra, majd

$\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t$ új változót bevezetve, a gyökkifejezést kiküszöböljük, és így $R(\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$ alakú integrandust kapunk, amelyet már tárgyaltunk.

Gyakorló feladatok

1. $\int 3x \sqrt{x^2-1} dx = ?$

I. Megoldás:

Az integrandus az előbbieken említett típushoz tartozik, tehát az előbb említett helyettesítés célhoz vezet. Legyen

$$x = \operatorname{ch} t; \quad \text{ekkor} \quad t = \operatorname{ar} \operatorname{ch} x; \quad dx = \operatorname{sh} t dt.$$

$$\int 3x \sqrt{x^2-1} dx = \int 3 \operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \operatorname{sh} t dt = \int 3 \operatorname{ch} t \operatorname{sh}^3 t dt.$$

Az integrandusban $\operatorname{ch} t$ első hatványa (páratlan kitevőjű hatvány) és a $\operatorname{sh} t$ második hatványa van. Ilyenkor $\operatorname{sh} t = u$ helyettesítést alkalmazunk, ekkor $du = \operatorname{ch} t dt$, vagyis

$$dt = \frac{du}{\operatorname{ch} t}.$$

$$\begin{aligned} \int 3x \sqrt{x^2-1} dx &= \int 3u^3 du = 3 \frac{u^4}{4} + C = u^4 + C = \\ &= \operatorname{sh}^4 t + C = \sqrt{(\operatorname{ch}^2 t - 1)^2} + C = \sqrt{(x^2-1)^2} + C. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

A feladatot egyszerűbben megoldhatjuk, ha a gyökjel alatti kifejezést helyettesítjük.

$$u = x^2 - 1; \quad du = 2x dx,$$

$$\begin{aligned} \int 3x \sqrt{x^2-1} dx &= \frac{3}{2} \int 2x \sqrt{x^2-1} dx = \frac{3}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{3}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{u^3} + C = \sqrt{(x^2-1)^3} + C. \end{aligned}$$

III. Megoldás:

A legegyszerűbb az integrálás, ha az integrandust $f^n(x)f'(x)$ alakba írjuk:

$$\frac{3}{2} \int 2x(x^3-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3}{2} \frac{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \sqrt{(x^3-1)^3} + C.$$

A megoldások valóban megegyeznek.

2. $\int x^3 \sqrt{x^3-1} dx = ?$ Az $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítést alkalmazzuk, mellyel:

$$t = \operatorname{ar} \operatorname{ch} x \quad \text{és} \quad dx = \operatorname{sh} t dt;$$

$$\int x^3 \sqrt{x^3-1} dx = \int \operatorname{ch}^3 t \sqrt{\operatorname{ch}^3 t - 1} \operatorname{sh} t dt = \int \operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh}^3 t dt.$$

Az integrandus $\operatorname{ch} t$ -ben páratlan, $\operatorname{sh} t$ -ben páros. Legyen ezért

$$u = \operatorname{sh} t; \quad du = \operatorname{ch} t dt.$$

$$\int x^3 \sqrt{x^3-1} dx = \int \operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh}^3 t \operatorname{ch} t dt = \int (1 + \operatorname{sh}^2 t) \operatorname{sh}^3 t \operatorname{ch} t dt =$$

$$= \int (1 + u^2) u^3 du = \int (u^3 + u^5) du = \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 t + \frac{1}{5} \operatorname{sh}^5 t + C.$$

Mivel $x = \operatorname{ch} t$, ezért $\operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$, és így

$$\int x^3 \sqrt{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2-1)^3} + \frac{1}{5} \sqrt{(x^2-1)^5} + C.$$

3. $\int \frac{5x}{\sqrt{x^3-1}} dx = ?$ A feladatot kétféle módon oldjuk meg:

1. $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel. 2. $x^3 - 1 = u$ helyettesítéssel.

I. Megoldás:

Legyen $x = \operatorname{ch} t$; és $dx = \operatorname{sh} t dt$.

$$\int \frac{5x}{\sqrt{x^3-1}} dx = \int \frac{5 \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 t - 1}} = \int 5 \operatorname{ch} t dt =$$

$$= 5 \operatorname{sh} t + C = 5 \sqrt{x^2-1} + C.$$

II. Megoldás:

$$u = x^3 - 1; \quad du = 3x^2 dx.$$

$$\int \frac{5x}{\sqrt{x^3-1}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{5}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$= \frac{5}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{5}{2} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 5\sqrt{u} + C = 5\sqrt{x^3-1} + C.$$

A két megoldás valóban megegyezik. Megoldhattuk volna az integrandus $f'(x)f^n(x)$ alakra hozásával is.

4. $\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^3-1)^3}} dx = ?$ Az $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítéssel $dx = \operatorname{sh} t dt$, és

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(x^3-1)^3}} dx = \int \frac{\operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{(\operatorname{ch}^3 t - 1)^3}} = \int \frac{\operatorname{ch}^3 t \operatorname{sh} t dt}{\operatorname{sh}^3 t} = \int \frac{\operatorname{ch}^3 t}{\operatorname{sh}^3 t} dt.$$

Az integrandusban most $\operatorname{ch} t$ páratlan kitevőjű hatványa és $\operatorname{sh} t$ páros kitevőjű hatványa van. Ekkor $u = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel megoldhatjuk a feladatot:

$$u = \operatorname{sh} t; \quad du = \operatorname{ch} t dt.$$

Ennek megfelelően alakítjuk át az integrandust:

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{ch}^3 t}{\operatorname{sh}^3 t} dt &= \int \frac{\operatorname{ch}^3 t \operatorname{ch} t dt}{\operatorname{sh}^3 t} = \int \frac{(1 + \operatorname{sh}^2 t) \operatorname{ch} t dt}{\operatorname{sh}^3 t} = \\ &= \int \frac{(1 + u^2) du}{u^3} = \int \left(\frac{1}{u^3} + 1 \right) du = \int (u^{-3} + 1) du = \frac{u^{-2}}{-2} + u + C = \\ &= -\frac{1}{2u} + u + C = -\frac{1}{2 \operatorname{sh} t} + \operatorname{sh} t + C = -\frac{1}{2 \sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} + C. \end{aligned}$$

5. $\int \frac{x^3-3x}{\sqrt{16x^3-25}} dx = ?$ A nevezőből kiemelünk 25-öt, így

$$\sqrt{16x^3-25} = 5 \sqrt{\left(\frac{4x}{5}\right)^3 - 1}; \text{ amennyiben ez után a } \frac{4x}{5} = \operatorname{ch} t \text{ helyettesíté-$$

$$\begin{aligned}\int_{0,2}^{0,6} 1 \arcsin x \, dx &= [x \arcsin x]_{0,2}^{0,6} - \int_{0,2}^{0,6} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \\ &= [x \arcsin x]_{0,2}^{0,6} - [-\sqrt{1-x^2}]_{0,2}^{0,6} = \\ &= 0,6 \arcsin 0,6 - 0,2 \arcsin 0,2 + \sqrt{1-0,6^2} - \sqrt{1-0,2^2}.\end{aligned}$$

Először visszakeressük 0,6, ill. 0,2 arkusz szinuszt; a táblázatban fok-ban kapjuk meg a szöveget, ezt át kell számítanunk radiánba:

$$\arcsin 0,6 \approx 37^\circ \approx 37 \cdot 0,0174 \approx 0,644 \text{ (rad)};$$

$$\arcsin 0,2 \approx 11,5^\circ \approx 11,5 \cdot 0,0174 \approx 0,2 \text{ (rad)}.$$

$$\begin{aligned}\int_{0,2}^{0,6} \arcsin x \, dx &\approx 0,6 \cdot 0,644 - 0,2 \cdot 0,2 + \sqrt{1-0,36} - \sqrt{1-0,04} \approx \\ &\approx 0,3864 - 0,04 + 0,8 - 0,98 = 1,1864 - 1,02 = 0,1664 \approx 0,17.\end{aligned}$$

$$11. \int_{0,3}^4 \arctg x \, dx = \int_{0,3}^4 1 \arctg x \, dx = ?$$

$$\text{Legyen } u = \arctg x; u' = \frac{1}{1+x^2}; v' = 1; v = x.$$

$$\begin{aligned}\int_{0,3}^4 \arctg x \, dx &= [x \arctg x]_{0,3}^4 - \int_{0,3}^4 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= [x \arctg x]_{0,3}^4 - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{0,3}^4 = \\ &= 4 \arctg 4 - 0,3 \arctg 0,3 - \frac{1}{2} \ln 17 + \frac{1}{2} \ln 1,09. \\ 4 \arctg 4 &\approx 4 \cdot 76 \cdot 0,0174 \approx 5,3; \\ 0,3 \arctg 0,3 &\approx 0,3 \cdot 16,7 \cdot 0,0174 \approx 0,087; \\ -\frac{1}{2} \ln 17 + \frac{1}{2} \ln 1,09 &\approx -\frac{1}{2} \cdot 2,833 + \frac{1}{2} \cdot 0,086 \approx -1,373.\end{aligned}$$

És így a végeredmény $5,213 - 1,373 = 3,84$.

$$12. \int_2^3 \operatorname{arsh} x \, dx = \int_2^3 1 \operatorname{arsh} x \, dx = ?$$

$$\text{Legyen } u = \operatorname{arsh} x; u' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; v' = 1; v = x.$$

$$\begin{aligned}\int_2^3 \operatorname{arsh} x \, dx &= [x \operatorname{arsh} x]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \\ &= [x \operatorname{arsh} x]_2^3 - [\sqrt{1+x^2}]_2^3 = [x \ln(x + \sqrt{1+x^2})]_2^3 - [\sqrt{1+x^2}]_2^3 = \\ &= 3 \ln(3 + \sqrt{10}) - 2 \ln(2 + \sqrt{5}) - \sqrt{10} + \sqrt{5} \approx \\ &\approx 3 \ln(3 + 3,16) - 2 \ln(2 + 2,24) - 3,16 + 2,24 = \\ &= 3 \ln 6,16 - 2 \ln 4,24 - 0,92 \approx 3 \cdot 1,82 - 2 \cdot 1,44 - 0,92 = 1,66.\end{aligned}$$

$$13. \int_2^4 \operatorname{arch} x \, dx = \int_2^4 1 \operatorname{arch} x \, dx = ?$$

$$\text{Legyen } u = \operatorname{arch} x; u' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; v' = 1; v = x.$$

$$\begin{aligned}\int_2^4 \operatorname{arch} x \, dx &= [x \operatorname{arch} x]_2^4 - \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \\ &= [x \operatorname{arch} x]_2^4 - [\sqrt{x^2-1}]_2^4 = [x \ln(x + \sqrt{x^2-1})]_2^4 - [\sqrt{x^2-1}]_2^4 = \\ &= 4 \ln(4 + \sqrt{15}) - 2 \ln(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{15} + \sqrt{3} \approx \\ &\approx 4 \ln(4 + 3,87) - 2 \ln(2 + 1,73) - 3,87 + 1,73 = \\ &= 4 \ln 7,87 - 2 \ln 3,73 - 2,14 \approx 4 \cdot 2,06 - 2 \cdot 1,32 - 2,14 = 3,46.\end{aligned}$$

$$14. \int_{0,2}^{0,4} \operatorname{arth} x \, dx = \int_{0,2}^{0,4} 1 \operatorname{arth} x \, dx = ?$$

$$\text{Legyen } u = \operatorname{arth} x; u' = \frac{1}{1-x^2}; v' = 1; v = x.$$

$$\begin{aligned}
\int_{0,2}^{0,4} \operatorname{ar} \operatorname{th} x \, dx &= [x \operatorname{ar} \operatorname{th} x]_{0,2}^{0,4} - \int_{0,2}^{0,4} \frac{x}{1-x^2} \, dx = \\
&= [x \operatorname{ar} \operatorname{th} x]_{0,2}^{0,4} + \frac{1}{2} \int_{0,2}^{0,4} \frac{-2x}{1-x^2} \, dx = \\
&= [x \operatorname{ar} \operatorname{th} x]_{0,2}^{0,4} + \frac{1}{2} [\ln(1-x^2)]_{0,2}^{0,4} = \\
&= \left[x \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]_{0,2}^{0,4} + \frac{1}{2} [\ln(1-x^2)]_{0,2}^{0,4} = \\
&= \frac{1}{2} [x \ln(1+x) - x \ln(1-x) + \ln(1+x) + \ln(1-x)]_{0,2}^{0,4} = \\
&= \frac{1}{2} [(1,4) \ln(1,4) + (1-x) \ln(1-x)]_{0,2}^{0,4} = \\
&= \frac{1}{2} (1,4 \ln 1,4 + 0,6 \ln 0,6 - 1,2 \ln 1,2 - 0,8 \ln 0,8) = \\
&= \frac{1}{2} (1,4 \ln 1,4 + 0,6 \ln 6 - 0,6 \ln 10 - 1,2 \ln 1,2 - 0,8 \ln 8 + 0,8 \ln 10) \approx \\
&\approx \frac{1}{2} (1,4 \cdot 0,34 + 0,6 \cdot 1,80 - 0,6 \cdot 2,30 - 1,2 \cdot 0,18 - 0,8 \cdot 2,08 + 0,8 \cdot 2,30) \approx \\
&\approx \frac{1}{2} (0,475 + 1,08 - 1,38 - 0,216 - 1,664 + 1,84) = \\
&= \frac{1}{2} (3,395 - 3,260) = \frac{1}{2} \cdot 0,135 = 0,0675.
\end{aligned}$$

2. Integrálás helyettesítéssel

Ha

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

kiszámítása során egy $x = \varphi(t)$ helyettesítést végzünk, akkor — φ inverz függvényét φ^{-1} -gyel jelölve — $t = \varphi^{-1}(x)$;

$dx = \varphi'(t) dt$; az új határok pedig az alábbi módon adódnak:
 az $x = a$ alsó határnak megfelelő t érték $t = \varphi^{-1}(a)$;
 az $x = b$ felső határnak megfelelő t érték $t = \varphi^{-1}(b)$.

Megjegyzés: Megtehetjük természetesen azt is, hogy először a határok figyelembevétele nélkül a helyettesítési eljárással kiszámítjuk az integrandus határozatlan integrálját, majd az eredményt visszaalakítva az eredeti változó függvényévé, az eredeti határokat helyettesítjük be.

Gyakorló feladatok

1. $\int_1^2 (3x+4)^3 \, dx = ?$ Az integrandus egy elsőfokú függvény hatvány-függvénye; ilyenkor az $u = 3x+4$ helyettesítést alkalmazhatjuk, ekkor $dx = \frac{1}{3} du$.

A megfelelő határok kiszámítása:

Ha $x=1$, akkor $u=7$; ha $x=2$, akkor $u=10$, tehát

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (3x+4)^3 \, dx &= \int_7^{10} u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_7^{10} u^3 \, du = \frac{1}{3} \left[\frac{u^4}{4} \right]_7^{10} = \\
&= \frac{1}{12} (10^4 - 7^4) \approx \frac{1}{12} (10000 - 2400) = \frac{7600}{12} \approx 633.
\end{aligned}$$

$$2. \int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4} \, dx = ?$$

Legyen $u = 2x+1$; vagyis $dx = \frac{1}{2} du$.

Ha $x=2$, akkor $u=5$; ha $x=3$, akkor $u=7$.

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{1}{(2x+1)^4} \, dx &= \int_5^7 \frac{du}{2u^4} = \frac{1}{2} \int_5^7 u^{-4} \, du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-3}}{-3} \right]_5^7 = \\
&= -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{u^3} \right]_5^7 = -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{7^3} - \frac{1}{5^3} \right] = -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{343} - \frac{1}{125} \right] = \\
&= \frac{343 - 125}{6 \cdot 343 \cdot 125} \approx 8,5 \cdot 10^{-4}.
\end{aligned}$$

A feladat megoldható $f^{(n)}(x)f'(x)$ alak felhasználásával is.

3. $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}} dx = ?$ A feladat megoldható helyettesítéssel, valamint $f''(x)f'(x)$ alak felhasználásával.

I. Megoldás:

Legyen $u = \sqrt{x^3-2}$; tehát $u^2 = x^3-2$; $x^3 = u^2+2$, ebből

$$3x^2 dx = 2u du, \text{ vagyis } x^2 dx = \frac{2}{3} u du.$$

Az új határok:

Ha $x=2$, akkor $u = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$; ha $x=3$, akkor $u = \sqrt{27-2} = 5$.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}} dx &= \int_{\sqrt{6}}^5 \frac{\frac{2}{3} u du}{u} = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{6}}^5 du = \\ &= \frac{2}{3} [u]_{\sqrt{6}}^5 = \frac{2}{3} (5 - \sqrt{6}) \approx 0,67(5 - 2,45) = 0,67 \cdot 2,55 \approx 1,71. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

Az integrandus könnyen $f''(x)f'(x)$ alakra hozható:

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-2}} dx &= \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{3x^2}{\sqrt{x^3-2}} dx = \frac{1}{3} \int_2^3 3x^2(x^3-2)^{-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{(x^3-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_2^3 = \frac{2}{3} [\sqrt{x^3-2}]_2^3 = \\ &= \frac{2}{3} (5 - \sqrt{6}) \approx 0,67(5 - 2,45) = 0,67 \cdot 2,55 \approx 1,71. \end{aligned}$$

4. $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx = ?$

I. Megoldás:

Legyen $u = e^{3x}$; tehát $du = 3e^{3x} dx$, vagyis $e^{3x} dx = \frac{1}{3} du$.

Az új határok:

Ha $x=1$, akkor $u = e^3$, ha $x=2$, akkor $u = e^6$.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx &= \int_{e^3}^{e^6} \frac{\frac{1}{3} du}{u+1} = \frac{1}{3} \int_{e^3}^{e^6} \frac{du}{u+1} = \\ &= \frac{1}{3} [\ln(u+1)]_{e^3}^{e^6} \approx \frac{1}{3} [\ln u]_{e^3}^{e^6} = \frac{1}{3} (\ln e^6 - \ln e^3) = \frac{1}{3} (6-3) = 1. \end{aligned}$$

II. Megoldás:

A számlálót a nevező deriváltjává alakítjuk, majd integrálunk.

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{3x}+1} dx &= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1} dx = \left[\frac{1}{3} \ln |e^{3x}+1| \right]_1^2 = \\ &= \frac{1}{3} [\ln(e^6+1) - \ln(e^3+1)] \approx \frac{1}{3} (\ln e^6 - \ln e^3) = \frac{1}{3} (6-3) = 1. \end{aligned}$$

5. $\int_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1} dx = ?$

Legyen $u = e^x$, ekkor $du = e^x dx$ és így $dx = \frac{du}{u}$.

Az új határok: ha $x=-1$, akkor $u = \frac{1}{e}$; ha $x=0$, akkor $u=1$.

$$\int_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1} dx = \int_{1/e}^1 \frac{3}{u+1} \frac{du}{u} = \int_{1/e}^1 \frac{3}{u(u+1)} du = ?$$

A feladatot az integrandusnak parciális törtekre bontásával oldjuk meg.

$$\begin{aligned} \frac{3}{u(u+1)} &= \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}; \\ \frac{3}{u(u+1)} &= \frac{A(u+1) + Bu}{u(u+1)}; \\ 3 &= A(u+1) + Bu. \end{aligned}$$

Legyen $u=0$, ekkor látható, hogy $A=3$; és legyen $u=-1$, ebből adódik $B=-3$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1} dx &= \int_{1/e}^1 \left(\frac{3}{u} - \frac{3}{u+1} \right) du = 3 [\ln u - \ln(u+1)]_{1/e}^1 = \\ &= 3 \left[\ln 1 - \ln 2 - \ln \frac{1}{e} + \ln \left(\frac{1}{e} + 1 \right) \right] = 3 \left[-\ln 2 + \ln \frac{1+e}{1} \right] = \\ &= 3 \ln \frac{1+e}{2} \approx 3 \ln 1,86 \approx 3 \cdot 0,62 = 1,86.\end{aligned}$$

II. Megoldás:

A feladatot — ellenőrzésül — más helyettesítéssel is megoldjuk.

$$\int_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1} dx = ?$$

Legyen most $u = e^x + 1$, akkor $du = e^x dx$, és $dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u-1}$.

Megállapítjuk az új határokat: ha $x=-1$, akkor $u = \frac{1}{e} + 1$, és ha $x=0$, akkor $u=2$.

$$\int_{-1}^0 \frac{3}{e^x+1} dx = \int_{\frac{1}{e}+1}^2 \frac{3}{u} \cdot \frac{du}{u-1} = \int_{\frac{1}{e}+1}^2 \frac{3 du}{u(u-1)}.$$

Parciális törtekre bontjuk az integrandust:

$$\frac{3}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1}.$$

$$3 \equiv A(u-1) + Bu.$$

Legyen $u=0$, akkor $A=-3$, és $u=1$ esetén $B=3$.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}+1}^2 \left(-\frac{3}{u} + \frac{3}{u-1} \right) du &= 3 \int_{\frac{1}{e}+1}^2 \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du = \\ &= 3 [\ln(u-1) - \ln u]_{\frac{1}{e}+1}^2 = 3 \left[\ln 1 - \ln 2 - \ln \frac{1}{e} + \ln \left(\frac{1}{e} + 1 \right) \right].\end{aligned}$$

Eredményünk az előbbi módszerrel kapott eredménnyel megegyezik, ahol a számértéket is meghatároztuk.

$$6. \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}} dx = ?$$

Legyen $u = 5x-4$; vagyis $x = \frac{u+4}{5}$, és $dx = \frac{1}{5} du$.

Az új határok: ha $x=1$, akkor $u=1$; ha $x=4$, akkor $u=16$.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}} dx &= \int_1^{16} \frac{\frac{u+4}{5} \cdot \frac{1}{5} du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{25} \int_1^{16} \frac{u+4}{\sqrt{u}} du = \\ &= \frac{1}{25} \int_1^{16} \left(\sqrt{u} + \frac{4}{\sqrt{u}} \right) du = \frac{1}{25} \int_1^{16} \left(u^{\frac{1}{2}} + 4u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \\ &= \frac{1}{25} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^{16} = \frac{1}{25} \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} + 8\sqrt{u} \right]_1^{16} = \\ &= \frac{1}{25} \left[\frac{2}{3} u \sqrt{u} + 8\sqrt{u} \right]_1^{16} = \frac{1}{25} \left(\frac{2}{3} \cdot 16 \cdot 4 + 8 \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 1 - 8 \cdot 1 \right) = \\ &= \frac{1}{25} \left(\frac{128}{3} + 32 - \frac{2}{3} - 8 \right) = \frac{1}{25} \left(\frac{126}{3} + 24 \right) = \frac{66}{25}.\end{aligned}$$

7. $\int_{0,5}^2 \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = ?$ Az integrandusból az $x=\operatorname{sh} t$ helyettesítéssel a gyökkifejezést kiküszöbölhetjük. Legyen tehát $x=\operatorname{sh} t$, akkor $dx=\operatorname{ch} t dt$. Az új határokat csak jelöljük:

$$\int_{0,5}^2 \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2 \operatorname{sh}^3 t}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} \operatorname{ch} t dt = \int_{t_1}^{t_2} 2 \operatorname{sh}^3 t dt.$$

Az átalakítás során figyelembe vettük, hogy

$$\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t.$$

Mint tudjuk, $\operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$, ezért

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} 2 \operatorname{sh}^2 t \, dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch} 2t - 1) \, dt = \left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t \right]_{t_1}^{t_2} = \\&= [\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t]_{t_1}^{t_2} = [\operatorname{sh} t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} - t]_{t_1}^{t_2} = [x \sqrt{1 + x^2} - \operatorname{ar} \operatorname{sh} x]_{0,5}^{2,5} = \\&= 2\sqrt{5} - \ln(2 + \sqrt{5}) - 0,5\sqrt{1,25} + \ln(0,5 + \sqrt{1,25}) \approx \\&\approx 2 \cdot 2,24 - \ln 4,24 - 0,5 \cdot 1,12 + \ln 1,62 \approx \\&\approx 4,48 - 1,44 - 0,56 + 0,482 = 4,962 - 2,00 = 2,962.\end{aligned}$$

8. $\int_3^4 3x^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx = ?$ Most az $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítés célszerű, mert a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ azonosságot felhasználva, az integrandus $\operatorname{sh} t$ és $\operatorname{ch} t$ racionális kifejezése lesz.

$$x = \operatorname{ch} t; \quad dx = \operatorname{sh} t \, dt.$$

Mivel most adott x -hez tartozó t érték megállapítása elég nehézkes, ezért a határokat nem fejezzük ki az új változóban, inkább majd visszatérünk a régi változóra.

$$\int_3^4 3x^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \int_{t_1}^{t_2} 3 \operatorname{ch}^2 t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \operatorname{sh} t \, dt = \int_{t_1}^{t_2} 3 \operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh}^2 t \, dt.$$

Mivel $\operatorname{ch}^2 t = \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2}$, és $\operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2}$, ezért

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} 3 \operatorname{ch}^2 t \operatorname{sh}^2 t \, dt &= \frac{3}{4} \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch} 2t + 1)(\operatorname{ch} 2t - 1) \, dt = \\&= \frac{3}{4} \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch}^2 2t - 1) \, dt = \frac{3}{4} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1 + \operatorname{ch} 4t}{2} - 1 \right) \, dt = \\&= \frac{3}{4} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\operatorname{ch} 4t}{2} - \frac{1}{2} \right) \, dt = \frac{3}{8} \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch} 4t - 1) \, dt = \\&= \frac{3}{8} \left[\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{3}{8} \left[\frac{2 \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t}{4} - t \right]_{t_1}^{t_2}.\end{aligned}$$

$$2 \operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t = 4 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t (\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t) = 4 \operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} (2 \operatorname{ch}^2 t - 1).$$

Visszahelyettesítjük a régi változót és határokat:

$$\begin{aligned}\int_3^4 3x^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx &= \frac{3}{8} [\operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} (2 \operatorname{ch}^2 t - 1) - t]_{t_1}^{t_2} = \\&= \frac{3}{8} [x \sqrt{x^2 - 1} (2x^2 - 1) - \operatorname{ar} \operatorname{ch} x]_3^4 = \\&= \frac{3}{8} [x \sqrt{x^2 - 1} (2x^2 - 1) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]_3^4 = \\&= \frac{3}{8} [4\sqrt{15}(31) - \ln(4 + \sqrt{15}) - 3\sqrt{8}(17) + \ln(3 + \sqrt{8})] \approx \\&\approx \frac{3}{8} [124 \cdot 3,87 - \ln(4 + 3,87) - 51 \cdot 2,83 + \ln(3 + 2,83)] \approx \\&\approx \frac{3}{8} (480 - \ln 7,87 - 144 + \ln 5,83) \approx \frac{3}{8} (336 - 2,06 + 1,76) = \\&= \frac{3}{7} (336 - 0,30) = \frac{3 \cdot 335,7}{8} \approx 126.\end{aligned}$$

IX. IMPROPRIUS INTEGRÁL

1. Végtelen integrálási intervallum

Legyen az $f(x)$ függvény minden $B > a$ -ra az $[a, B]$ intervallumban integrálható. Ha a

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx$$

határérték létezik és véges, amit úgy is mondunk, hogy az integrál konvergens, akkor az $[a, \infty]$ intervallumbeli improprius integrál definíció szerint ezzel a határértékkel egyenlő:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx.$$

Hasonlóképpen

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx,$$

és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx,$$

ha a megfelelő integrálok és határértékek léteznek.

Gyakorló feladatok

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_2^B \frac{1}{x^2} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_2^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{B} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Az improprius integrál tehát konvergens, és értéke $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{1}{x} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} [\ln B - \ln 1] = +\infty. \end{aligned}$$

Az integrál tehát divergens.

$$\begin{aligned} 3. \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} [\arctg x]_0^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} (\arctg B - \arctg 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$4. \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{25+x^2} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{1}{25+x^2} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{25} \int_0^B \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} dx.$$

A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg: $u = \frac{x}{5}$; $dx = 5 du$; ha $x=0$, akkor $u=0$; ha $x=+\infty$, akkor $u=+\infty$; ha $x=B$, akkor $u = \frac{B}{5} = B'$;

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{25+x^2} dx &= \lim_{B' \rightarrow +\infty} \frac{1}{25} \int_0^{B'} \frac{5 du}{1+u^2} = \lim_{B' \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} \int_0^{B'} \frac{du}{1+u^2} = \\ &= \lim_{B' \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} [\arctg u]_0^{B'} = \lim_{B' \rightarrow +\infty} \frac{1}{5} (\arctg B' - \arctg 0) = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx &= \lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} \int_A^B \frac{2}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} [2 \arctg x]_A^B = \\ &= \lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} [2 \arctg B - 2 \arctg A] = 2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 2\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. \quad \int_6^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx &= \int_6^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_6^B x^{-\frac{4}{3}} dx = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} \right]_6^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{-3}{\sqrt[3]{x}} \right]_6^B = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{\sqrt[3]{B}} + \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \right) = \frac{3}{\sqrt[3]{5}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^3} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^B = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2B^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. \quad \int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^3} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_3^B \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_3^B (x-2)^{-3} dx = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-2)^{-2}}{-2} \right]_3^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{2(x-2)^2} \right]_3^B = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1}{2B-2} + \frac{1}{3-2} \right] = 1.
 \end{aligned}$$

9. $\int_5^{+\infty} \frac{2}{(x-3)(x+4)} dx = ?$ Az integrandusnak az $[5; +\infty)$ intervallumban nincs szakadása. Parciális törtre bontva integrálunk:

$$\frac{2}{(x-3)(x+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{C}{x+4};$$

$$2 \equiv A(x+4) + C(x-3).$$

Ha $x=3$, akkor $2=7A$, és így $A=\frac{2}{7}$; ha $x=-4$, akkor $2=-7C$, és így $C=-\frac{2}{7}$.

$$\begin{aligned}
 \int_5^{+\infty} \left(\frac{2}{7} \frac{1}{x-3} - \frac{2}{7} \frac{1}{x+4} \right) dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{2}{7} \int_5^B \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{2}{7} [\ln(x-3) - \ln(x+4)]_5^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{2}{7} \left[\ln \frac{x-3}{x+4} \right]_5^B = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{2}{7} \left[\ln \frac{B-3}{B+4} - \ln \frac{5-3}{5+4} \right] = \frac{2}{7} \left(0 - \ln \frac{2}{9} \right) = \\
 &= \frac{2}{7} \ln 4,5 \approx 0,285 \cdot 1,51 \approx 0,43.
 \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{B-3}{B+4} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{3}{B}}{1+\frac{4}{B}} = 1$, és $\ln 1 = 0$.

$$10. \quad \int_3^{+\infty} \frac{5}{(x-1)(x+5)} dx = ? \text{ A feladatot az előbbi módon oldjuk}$$

meg:

$$\frac{5}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5};$$

$$5 \equiv A(x+5) + B(x-1).$$

Legyen $x=1$, akkor $5=6A$, és így $A=\frac{5}{6}$; ha $x=-5$, akkor $5=-6B$, tehát $B=-\frac{5}{6}$.

Eredményeinket felhasználva:

$$\begin{aligned}
 \int_3^{+\infty} \frac{5}{(x-1)(x+5)} dx &= \int_3^{+\infty} \left(\frac{5}{6} \frac{1}{x-1} - \frac{5}{6} \frac{1}{x+5} \right) dx = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{5}{6} \int_3^B \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} \right) dx = \\
 &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{5}{6} [\ln(x-1) - \ln(x+5)]_3^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{5}{6} \left[\ln \frac{x-1}{x+5} \right]_3^B =
 \end{aligned}$$

$$= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{5}{6} \left(\ln \frac{B-1}{B+5} - \ln \frac{3-1}{3+5} \right) = \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{5}{6} \left(\ln \frac{1-\frac{1}{B}}{1+\frac{5}{B}} - \ln \frac{2}{8} \right) =$$

$$= \frac{5}{6} \left(0 - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{6} \ln 4 \approx 0,835 \cdot 1,4 \approx 1,17.$$

11. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx = ?$ A $(-\infty; -2]$ intervallumon belül az

integrandusnak nincs szakadása. Az integrandust parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3};$$

$$1 \equiv A(x-3) + B(x+1).$$

Legyen $x = -1$, akkor $1 = -4A$, és $A = -\frac{1}{4}$; legyen $x = 3$, akkor

$$1 = 4B, \text{ és } B = \frac{1}{4}.$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)(x-3)} dx = \int_{-\infty}^{-2} \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{x-3} \right) dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \int_A^{-2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} [\ln(x-3) - \ln(x+1)]_A^{-2} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left[\ln \frac{x-3}{x+1} \right]_A^{-2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\ln \frac{-2-3}{-2+1} - \ln \frac{A-3}{A+1} \right) =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \left(\ln 5 - \ln \frac{1-\frac{3}{A}}{1+\frac{1}{A}} \right) = \frac{1}{4} \ln 5 \approx 0,25 \cdot 1,62 = 0,405.$$

12. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{x^2-2x+2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{(x-1)^2+1} dx = ?$ Az integrandus min-

denütt folytonos. A feladatot helyettesítéssel oldjuk meg:

Legyen $u = x-1$, így $du = dx$; ha $x \rightarrow \pm \infty$; akkor $u \rightarrow \pm \infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{(x-1)^2+1} dx = \lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} \int_A^B \frac{5}{(x-1)^2+1} dx =$$

$$= \lim_{\substack{B' \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} \int_{A'}^{B'} \frac{5}{u^2+1} du = \lim_{\substack{B' \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} [5 \arctan u]_{A'}^{B'} =$$

$$= \lim_{\substack{B' \rightarrow +\infty \\ A' \rightarrow -\infty}} (5 \arctan B' - 5 \arctan A') = 5 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 5\pi.$$

13. $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B e^{-x} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_1^B =$

$$= \lim_{B \rightarrow +\infty} (-e^{-B} + e^{-1}) = \frac{1}{e} \approx 0,368.$$

14. $\int_2^{+\infty} 5e^{-2x} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_2^B 5e^{-2x} dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[-\frac{5}{2} e^{-2x} \right]_2^B =$

$$= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{5}{2} e^{-2B} + \frac{5}{2} e^{-4} \right) = \frac{5}{2e^4} \approx \frac{2,5}{54,6} \approx 0,0458.$$

15. $\int_{-\infty}^{-3} e^x dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^{-3} e^x dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} [e^x]_A^{-3} =$

$$= \lim_{A \rightarrow -\infty} (e^{-3} - e^A) = \frac{1}{e^3} \approx \frac{1}{20} = 0,05.$$

16. $\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx = ?$ Alkalmazzuk az $e^x = u$ helyettesítést. Ekkor

$$u = e^x; du = e^x dx.$$

A határok: ha $x=1$, akkor $u=e$; ha $x=+\infty$, akkor $u=+\infty$.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{3x}-1} dx &= \int_e^{+\infty} \frac{du}{u^3-1} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_e^B \frac{du}{u^3-1} = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} [-\operatorname{arctg} u]_e^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} \right]_e^B = \\ &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln \frac{B-1}{B+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{e-1}{e+1} \right) = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{e-1}{e+1} - 0 \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \ln \frac{1,72}{3,72} = \frac{1}{2} (\ln 1,72 - \ln 3,72) \approx \frac{1}{2} (0,542 - 1,33) \approx -0,4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \int_{-\infty}^0 3^x dx &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 3^x dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_A^0 = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln 3} [1 - 3^A] = \frac{1}{\ln 3} \approx \frac{1}{1,1} \approx 0,91. \end{aligned}$$

$$18. \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2} = ? \text{ Az integrandust parciális törtre bontjuk:}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}; \\ 1 &\equiv A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2. \end{aligned}$$

A kijelölt szorzásokat elvégezzük, majd felírjuk az egyenlő fokszerű tagok együtthatóinak egyenlőségét. Az így kapott egyenletrendszert megoldjuk.

$$\begin{aligned} 1 &\equiv A(x^3 - x^2 + x - 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 2x + 1); \\ 1 &\equiv (A + C)x^3 + (-A + B + D - 2C)x^2 + (A - 2D + C)x + \\ &\quad + (-A + B + D). \end{aligned}$$

$$A + C = 0 \quad \text{I.}$$

$$-A + B + D - 2C = 0 \quad \text{II.}$$

$$A - 2D + C = 0 \quad \text{III.}$$

$$-A + B + D = 1 \quad \text{IV.}$$

I. - III.:

$$2D = 0, \quad D = 0.$$

V. - II.:

$$2C = 0; \quad C = \frac{1}{2}.$$

I.-be behelyettesítve:

$$A + C = 0; \quad A = -\frac{1}{2}.$$

IV.-ből:

$$\frac{1}{2} + B = 1; \quad B = \frac{1}{2}.$$

Az integrál

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2} &= \\ &= \int_{-\infty}^{-1} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-1} \left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} \right] dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_A^{-1} = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{A-1} + \ln(1-A) - \frac{1}{2} \ln(A^2+1) \right] = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{A-1} + \ln \frac{1-A}{\sqrt{A^2+1}} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Mivel } \lim_{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{A-1} = 0 \text{ és } \lim_{A \rightarrow -\infty} \ln \frac{1-A}{\sqrt{A^2+1}} = \ln 1 = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln 2 \approx 0,25 - 0,17 = 0,08.$$

19. $\int_{10}^{+\infty} xe^{-x} dx = ?$ Az improprius integrált parciálisan integráljuk:

Legyen $u=x$; $u'=1$; $v=e^{-x}$; $v'=-e^{-x}$.

Most a „lim” jelölést csak a feladat megoldása végén vezetjük be, ami megengedett.

$$\begin{aligned}\int_{10}^{+\infty} xe^{-x} dx &= [-xe^{-x}]_{10}^{+\infty} - \int_{10}^{+\infty} -e^{-x} dx = \\&= [-xe^{-x}]_{10}^{+\infty} + \int_{10}^{+\infty} e^{-x} dx = [-xe^{-x}]_{10}^{+\infty} + [-e^{-x}]_{10}^{+\infty} = \\&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \{[-xe^{-x}]_{10}^B + [-e^{-x}]_{10}^B\} = \\&= \lim_{B \rightarrow +\infty} (-Be^{-B} + 10e^{-10} - e^{-B} + e^{-10}).\end{aligned}$$

A határérték kiszámításakor felhasználjuk, hogy

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} Be^{-B} = 0.$$

Ennek bizonyítását bármely — határérték számítással foglalkozó — könyvben megtalálhatja az olvasó.

$$\int_{10}^{+\infty} xe^{-x} dx = 11e^{-10}.$$

Az integrál tehát konvergens.

$$\begin{aligned}20. \int_4^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \int_4^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_4^A \frac{1}{x} \frac{1}{\ln x} dx = \\&= \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln \ln x]_4^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln \ln A - \ln \ln 4) = +\infty.\end{aligned}$$

Az integrál tehát divergens.

$$21. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = ? \text{ Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át.}$$

Legyen $u=\sqrt{1+x}$, ebből $x=u^2-1$ és $dx=2u du$.

Az új határok: ha $x=3$, akkor $u=2$, és ha $x \rightarrow +\infty$, akkor $u \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned}\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} &= \int_2^{+\infty} \frac{2u du}{(u^2-1)u} = \int_2^{+\infty} \frac{2 du}{u^2-1} = \\&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_2^B \frac{2 du}{u^2-1} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[-\ln \frac{u+1}{u-1} \right]_2^B = \\&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{u-1}{u+1} \right]_2^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{B-1}{B+1} - \ln \frac{2-1}{2+1} \right) = \\&= 0 - \ln \frac{1}{3} = \ln 3 \approx 1,1.\end{aligned}$$

22. $\int_8^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} = ?$ Helyettesítés $u=\sqrt{1+x}$; tehát ebből $x=u^2-1$ és $dx=2u du$.

Az új határok: ha $x=8$, akkor $u=3$, és ha $x \rightarrow +\infty$, akkor $u \rightarrow +\infty$.

$$\int_8^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} = \int_3^{+\infty} \frac{2u du}{(u^2-1)^2 u} = \int_3^{+\infty} \frac{2 du}{(u^2-1)^2} = ?$$

Az integrandust parciális törtre bontjuk:

$$\frac{2}{(u^2-1)^2} = \frac{2}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{(u-1)^2}.$$

A jobb oldalt közös nevezőre hozzuk, majd az egyenlő foksámú tagok együtthatóinak egyenlőségét felírjuk:

$$2 \equiv A(u+1)(u-1)^2 + B(u-1)^2 + C(u+1)^2(u-1) + D(u+1)^2;$$

$$2 \equiv A(u+1)(u^2-2u+1) + B(u^2-2u+1) +$$

$$+ C(u^2+2u+1)(u-1) + D(u^2+2u+1);$$

$$2 \equiv A(u^3+u^2-2u^2-2u+u+1) + B(u^2-2u+1) +$$

$$+ C(u^3+2u^2+u-u^2-2u-1) + D(u^2+2u+1);$$

$$2 \equiv A(u^3-u^2-u+1) + B(u^2-2u+1) + C(u^3+u^2-u-1) +$$

$$+ D(u^2+2u+1).$$

$$2 \equiv (A+C)u^3 + (-A+B+C+D)u^2 + (-A-2B-C+2D)u +$$

$$+(A+B-C+D).$$

$$A + C = 0 \quad \text{I.}$$

$$B - A + C + D = 0 \quad \text{II.}$$

$$2D - A - 2B - C = 0 \quad \text{III.}$$

$$A + B - C + D = 2. \quad \text{IV.}$$

IV. - II.:

$$2A - 2C = 2$$

$$A - C = 1$$

$$\underline{A + C = 0} \quad \text{(I.)}$$

$$2A = 1; \quad A = \frac{1}{2}; \quad C = -\frac{1}{2}.$$

IV.-ből:

$$B + D = 1.$$

III.-ből:

$$\underline{2D - \frac{1}{2} - 2B + \frac{1}{2} = 0; \quad D - B = 0}$$

$$2D = 1; \quad D = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{2}.$$

A kapott együtthatók:

$$A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = -\frac{1}{2}; \quad D = \frac{1}{2}.$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{2 du}{(u^2 - 1)^2} =$$

$$= \lim_{B' \rightarrow +\infty} \int_3^{B'} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{u+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(u-1)^2} \right] du =$$

$$= \lim_{B' \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\ln(u+1) - \ln(u-1) - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1} \right]_3^{B'} =$$

$$= \lim_{B' \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left[\ln \frac{u+1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1} \right]_3^{B'} =$$

$$= \lim_{B' \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\ln \frac{B'+1}{B'-1} - \frac{1}{B'+1} - \frac{1}{B'-1} - \ln \frac{4}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(0 - 0 - 0 - \ln 2 + \frac{3}{4} \right) =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0,375 - 0,5 \cdot 0,69 = 0,030.$$

2. Nem korlátos függvények improprius integrálja

Legyen az $f(x)$ függvény minden $[a, b - \varepsilon]$ intervallumban (ahol $\varepsilon > 0$ és $b - \varepsilon > a$) integrálható, és legyen $f(x)$ a b pontban nem korlátos (vagyis $f(b) = +\infty$ vagy $-\infty$).

Ha létezik és véges a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

határérték, akkor az $[a, b]$ intervallumbeli (improprius) integrál definíció szerint ezzel a határértékkel egyenlő:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Ha $f(x)$ az a pontban nem korlátos és minden $[a + \varepsilon, b]$ intervallumban integrálható, akkor hasonlóképpen

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx;$$

ha $f(x)$ sem a -ban, sem b -ben nem korlátos és minden $[a + \varepsilon_1, b - \varepsilon_2]$ intervallumban integrálható, akkor

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(x) dx;$$

ha pedig $f(x)$ egy belső c pontban ($a < c < b$) nem korlátos,

akkor az integrál két improprius integrál összegeként határozható meg:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Gyakorló feladatok

$$1. \int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{5-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = ? \text{ Tudjuk, hogy } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{x}{a}, \text{ ezért}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{5-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \frac{x}{5} \right]_0^{5-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\arcsin \frac{5-\varepsilon}{5} - \arcsin 0 \right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$2. \int_{-10}^{10} \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = ? \text{ Az integrandus egyik határon sem korlátos.}$$

$$\int_{-10}^{10} \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{-10+\varepsilon_1}^{10-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left[\arcsin \frac{x}{10} \right]_{-10+\varepsilon_1}^{10-\varepsilon_2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(\arcsin \frac{10-\varepsilon_2}{10} - \arcsin \frac{-10+\varepsilon_1}{10} \right) =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi.$$

$$3. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = ? \text{ Az integrandus az } x=0 \text{ helyen nem korlátos.}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

$$4. \int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = ? \text{ Az integrandus pozitív } x\text{-re } \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ negatív } x\text{-re } \frac{1}{\sqrt{-x}}, x=0\text{-ra pedig nem korlátos. Az integrált tehát két részre kell bontanunk.}$$

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} dx + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

A két improprius integrált külön-külön számítjuk ki.

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}} dx = \int_{-2}^0 (-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-2}^{-\varepsilon} (-x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-2\sqrt{-x}]_{-2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\sqrt{-\varepsilon} + 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^3 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{3}.$$

Tehát

$$\int_{-2}^3 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx$$

$$\approx 2(1,41 + 1,73) = 2 \cdot 3,14 = 6,28.$$

$$5. \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^8 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_{\varepsilon}^8 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{64} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\varepsilon^2} \right) = 6.$$

6. $\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = ?$ Az integrandus az $x=0$ helyen nem korlátos, ezért

az intervallumot két részre bontjuk fel:

$$\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = ?$$

A két improprius integrált külön számítjuk ki.

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-2}^{-\varepsilon} x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_{-2}^{-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{\varepsilon^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \right) = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{4}.$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^3 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \right]_{\varepsilon}^3 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{9} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\varepsilon^2} \right) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{9}.$$

A feladat megoldása tehát:

$$\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{9} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \approx 1,5(2,08 - 1,59) = 1,5 \cdot 0,49 = 0,735.$$

7. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = ?$ Az integrandus nem korlátos az 1 helyen.

$$\int_{-2}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-2}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-2}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-2\sqrt{1-x}]_{-2}^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-2\sqrt{1-1+\varepsilon} + 2\sqrt{1+2}) = 2\sqrt{3} \approx 3,46.$$

8. $\int_{\frac{4}{3}}^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = ?$ Az integrandus nem korlátos az $x = \frac{4}{3}$ helyen.

$$\int_{\frac{4}{3}}^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{4}{3}+\varepsilon}^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\frac{4}{3}+\varepsilon}^5 (3x-4)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{2}{3} \sqrt{3x-4} \right]_{\frac{4}{3}+\varepsilon}^5 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3} \sqrt{15-4} - \frac{2}{3} \sqrt{4+3\varepsilon-4} \right) =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{11} \approx 0,67 \cdot 3,32 \approx 2,22.$$

9. $\int_3^6 \frac{x}{\sqrt{(x+1)(x-3)}} dx = ?$ Az integrandus az $x=3$ helyen nem korlátos, másrészt $f'(x)f'(x) + \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ alakra hozható.

$$\int_3^6 \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} \int_{3+\varepsilon}^6 (2x-2)(x^2-2x-3)^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{3+\varepsilon}^6 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-4}} dx \right].$$

A két integrált külön határozzuk meg.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{3+\varepsilon}^6 (2x-2)(x^2-2x-3)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [2\sqrt{x^2-2x-3}]_{3+\varepsilon}^6 = \sqrt{36-12-3} - \sqrt{9-6-3} = \sqrt{21} \approx 4,583.$$

$$\int_{3+\varepsilon}^6 \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-4}} dx = \frac{1}{2} \int_{3+\varepsilon}^6 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-1}} dx.$$

A $t = \frac{x-1}{2}$ helyettesítéssel $x = 2t+1$ és $dx=2dt$; ha $x=3$, akkor

$t=1$ és ha $x=6$, akkor $t=\frac{5}{2}$.

A $t=1$ helyen az integrandus nem korlátos. Tehát a második integrál helyettesítés után

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{1+\varepsilon}^{\frac{5}{2}} \frac{2 dt}{\sqrt{t^2-1}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\operatorname{ar ch} t]_{1+\varepsilon}^{\frac{5}{2}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(t + \sqrt{t^2-1})]_{1+\varepsilon}^{\frac{5}{2}} = \ln\left(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4}-1}\right) - \ln 1 = \ln \frac{5+\sqrt{21}}{2}.\end{aligned}$$

A feladat megoldása:

$$\begin{aligned}\int_3^6 \frac{x}{\sqrt{(x+1)(x-3)}} dx &= \sqrt{21} + \ln \frac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4,6 + \ln \frac{9,6}{2} = \\ &= 4,6 + \ln 4,8 \approx 4,6 + 1,57 = 6,17.\end{aligned}$$

10. $\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$ Az integrandus egyik határon sem korlátos;

az előjeltől eltekintve $f''(x)f'(x)$ alakú:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-2\sqrt{1-x^2}]_{1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$

11. $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = ?$ Az integrál improprius, mert

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$. A feladatot parciális integrálással oldjuk meg.

$$\int_0^1 \ln x dx = \int_0^1 1 \ln x dx.$$

Legyen $u = \ln x$, és $v = x$, vagyis $u' = \frac{1}{x}$ és $v' = 1$.

$$\int_0^1 1 \ln x dx = [x \ln x]_0^1 - \int_0^1 1 dx = [x \ln x]_0^1 = -[x]_0^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{[x \ln x]_{\varepsilon}^1 - [x]_{\varepsilon}^1\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 \ln 1 - \varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon).$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = ?$$

A szorzat egyik tényezője (ε) nullához, a másik tényezője pedig ($\ln \varepsilon$) mínusz végtelenhez tart. A szorzat határértékét a L'Hospital-szabállyal állapítjuk meg, de ehhez előbb átalakítjuk kifejezésünket:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Így átalakítva a szorzatot olyan törtet kaptunk, amelynek számlálója és nevezője abszolút értékben egyaránt végtelenhez tart, ha $\varepsilon \rightarrow 0$. Most

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon) = 0.$$

A megoldás tehát:

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon) = -1.$$

12. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = ?$ Az integrál improprius, mert a nevező helyet-

tesítési értéke az $x=1$ helyen nulla. Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át.

Legyen $x = \operatorname{ch} t$; vagyis $dx = \operatorname{sh} t dt$. Kiszámítjuk az új határokat: Mivel $t = \operatorname{ar ch} x$, ezért

$$t_1 = \operatorname{ar ch} 1 = \ln(1 + \sqrt{1-1}) = 0, \text{ és}$$

$$t_2 = \operatorname{ar ch} 2 = \ln(2 + \sqrt{4-1}) = \ln(2 + \sqrt{3}).$$

Az új határokat — bár értéküket ismerjük — csak jelöljük.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{sh} t dt}{\operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^3 t - 1}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}.$$

Az átalakítás során felhasználtuk, hogy bármely t -re $\frac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 t - 1}} = 1$.

($t=0$ -ra a tört határértéke ennyi!) Az új változóra már nem improprius az integrál, mert a nevező bármely t értékre nagyobb vagy egyenlő egygyel.

Az integrandust exponenciális alakba írjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\operatorname{ch} t} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{e^t + e^{-t}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2 dt}{e^t + e^{-t}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} dt.$$

Az integrandust újabb helyettesítéssel alakítjuk át:
Legyen $u = e^t$; $du = e^t dt$. Az új határokat u_1 , ill. u_2 -vel jelöljük.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{2e^t}{e^{2t} + 1} dt = \int_{u_1}^{u_2} \frac{2 du}{u^2 + 1} = [2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} u]_{u_1}^{u_2} = [2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^t]_{t_1}^{t_2}.$$

Mivel $t_1 = 0$ és $t_2 = \ln(2 + \sqrt{3})$, ezért

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}} &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^{\ln(2+\sqrt{3})} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} e^0 = \\ &= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(2 + \sqrt{3}) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1. \end{aligned}$$

$\operatorname{arc} \operatorname{tg} 3,73 \approx 75^\circ \approx 75 \cdot 0,0174 \approx 1,3$, és $\operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$, ezért

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}} \approx 2 \cdot 1,3 - 2 \cdot 0,785 = 2,6 - 1,57 = 1,030.$$

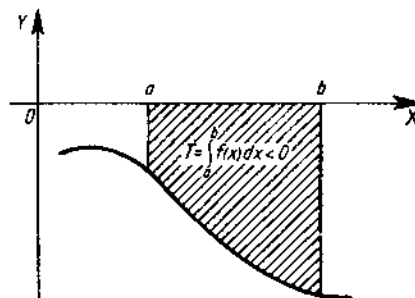
X. A HATÁROZOTT INTEGRÁL ALKALMAZÁSA

1. Területszámítás

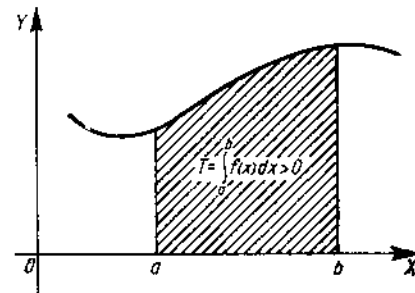
Ha egy $[a, b]$ intervallumban értelmezett folytonos $f(x)$ függvény görbéje, az a és b határpontokhoz tartozó ordinátaszakaszok, valamint az X -tengely által határolt (előjeles) területet akarjuk meghatározni, akkor a függvény a -tól b -ig vett határozott integrálját kell képeznünk:

$$T = \int_a^b f(x) dx.$$

Az előjeles terület azt jelenti, hogy ($a < b$ esetén) az X -tengely feletti terület pozitív, a tengely alatti pedig negatív előjelű (2., 3. ábra).



2. ábra

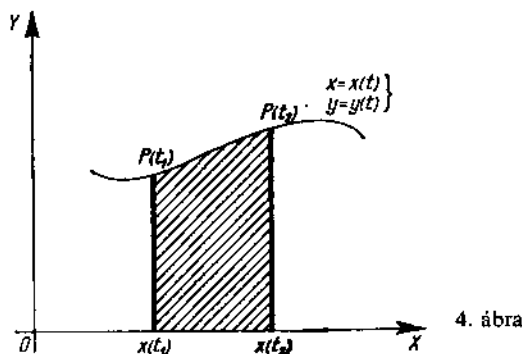


3. ábra

Ha a görbe paraméteres alakban adott, vagyis $x = x(t)$ és $y = y(t)$, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékekhez tartozó $P[x(t_1); y(t_1)] = P(t_1)$ és $P[x(t_2); y(t_2)] = P(t_2)$ pontok által határolt görbeszakasz, az $x(t_1)$ és $x(t_2)$ egyenesek és az X -tengely közötti terület (4. ábra)

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt,$$

ahol $\dot{x}(t)$ az $x(t)$ függvény t szerinti deriváltját jelenti: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$.



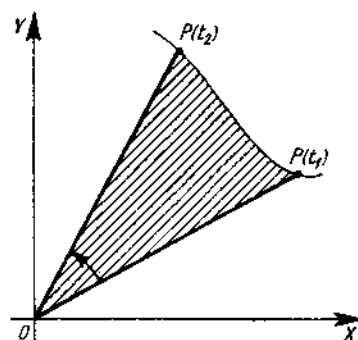
4. ábra

Ha ún. *szektorterületet* akarunk meghatározni (5. ábra), és ismert a síkgörbe paraméteres egyenletrendszere, akkor a következő módon járunk el.

Legyen $x = x(t)$ és $y = y(t)$, akkor a t_1 és t_2 paraméterekkel megadott $P[x(t_1); y(t_1)] = P(t_1)$ és $P[x(t_2); y(t_2)] = P(t_2)$ pontokhoz az origóból húzott egyenes szakaszok, valamint a síkgörbe által határolt terület a következő határozott integrál kiszámításával kapható meg:

$$T = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt.$$

(Az ábrán T a sátozott terület!)

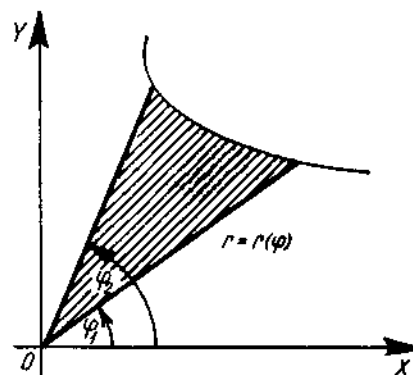


5. ábra

Ha a szektorterületet a síkgörbe polárkoordinátás alakja ismeretében akarjuk kiszámítani, akkor a következő formulát kell használnunk (6. ábra):

$$T = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi.$$

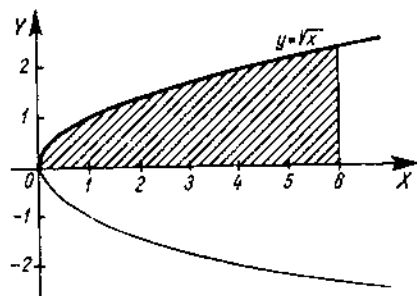
Itt $r = r(\varphi)$ a rádiuszvektor nagysága, mint a polárszög függvénye.



6. ábra

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=\sqrt{x}$ függvény és az X -tengely által határolt területet az $a=0$ -tól $b=6$ abszcisszájú pontig (7. ábra).

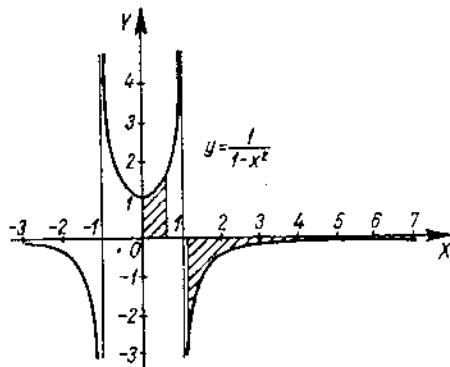


7. ábra

$$T = \int_0^6 \sqrt{x} dx = \int_0^6 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^6 = \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_0^6 = \frac{2}{3} 6 \sqrt{6} - 0 \approx 4 \cdot 2,45 = 9,8.$$

Az $x=6$ abszcisszához tartozó ordináta, az $y=\sqrt{x}$ függvény görbéje és az X -tengely által határolt terület tehát 9,8 területegység.

2. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{1-x^2}$ függvény görbéje, az X -tengely és az $a=0$; $b=0,6$ abszcisszájú pontokhoz tartozó ordináták által határolt síkrész területének mérőszámát (8. ábra).



8. ábra

$$T = \int_0^{0,6} \frac{1}{1-x^2} dx = [\operatorname{ar th} x]_0^{0,6} = \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \right]_0^{0,6} = \frac{1}{2} \ln \frac{1,6}{0,4} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{1} = \frac{1}{2} \ln 4 \approx \frac{1}{2} 1,39 = 0,695.$$

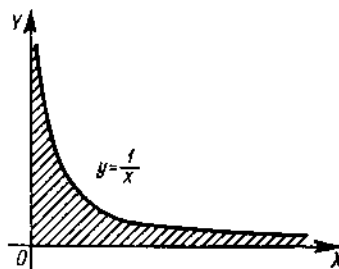
A keresett síkrész területe tehát 0,695 területegység.

3. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{1-x^2}$ függvény görbéje, az X -tengely és az $a=1,2$; $b=7$ abszcisszájú pontokhoz tartozó ordináták által határolt terület mérőszámát (8. ábra)! Vigyázat! A függvény az előbbi példa integrandusával megegyezik, a határozatlan integrálja azonban nem, mert most $|x| > 1$.

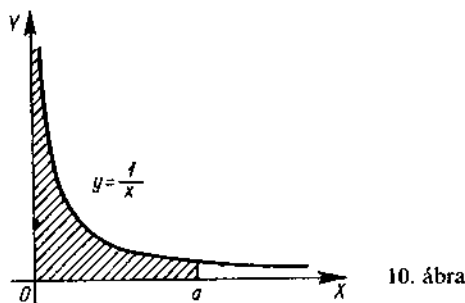
$$T = \int_{1,2}^7 \frac{1}{1-x^2} dx = [\operatorname{ar cth} x]_{1,2}^7 = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{x+1}{x-1} \right]_{1,2}^7 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{8}{6} - \ln \frac{2,2}{0,2} \right) = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 3 - \ln 11) \approx \frac{1}{2} (1,39 - 1,1 - 2,4) = 0,5 \cdot (-2,11) = -1,055.$$

4. Határozzuk meg az $y=\frac{1}{x}$ függvény görbéje és az X -tengely közé eső területet, a következő intervallumok felett: $[0; \infty]$, $[0; a]$, $[a; +\infty]$ (9., 10. és 11. ábra).

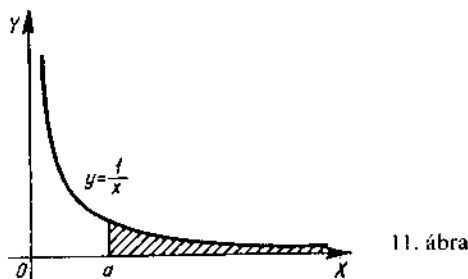
$$T_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} \int_{\varepsilon}^A \frac{1}{x} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} [\ln x]_{\varepsilon}^A = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ A \rightarrow \infty}} (\ln A - \ln \varepsilon) = \infty + \infty = \infty.$$



9. ábra



10. ábra



11. ábra

$$T_2 = \int_0^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln x]_{\varepsilon}^a =$$

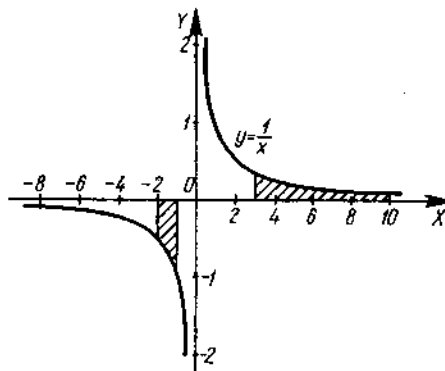
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln a - \ln \varepsilon] = \ln a + \infty = \infty.$$

$$T_3 = \int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [\ln x]_a^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} [\ln A - \ln a] = \infty - \ln a = \infty.$$

Ezek az improprius integrálok tehát divergenssek.

5. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbéje és az X -tengely közé eső területet a következő két intervallumban: $[3; 10]$, valamint $[-2; -1]$ (12. ábra).



12. ábra

$$T_1 = \int_3^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_3^{10} = \ln 10 - \ln 3 = \ln \frac{10}{3} \approx \ln 3,33 = 1,21.$$

$$T_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = ?$$

Az $\frac{1}{x}$ függvény primitív függvénye negatív x értékekre $\ln(-x)$, ezt felhasználva:

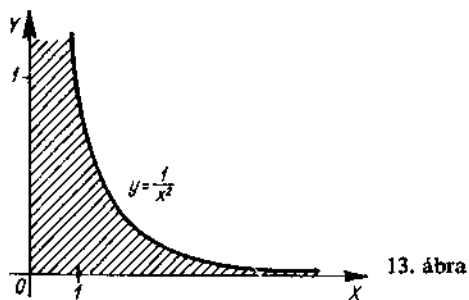
$$T_2 = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln(-x)]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 \approx -0,69.$$

A terület azért negatív, mert a függvény görbéje ebben az intervallumban az X -tengely alatt van.

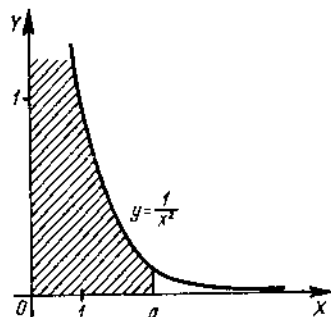
6. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x^2}$ függvény görbéje és az X -tengely közé eső területet, ha az intervallumok a következők: $[0; \infty)$, $[0; a]$, $[a; \infty)$. (13., 14., 15. ábra.)

$$T_1 = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^A =$$

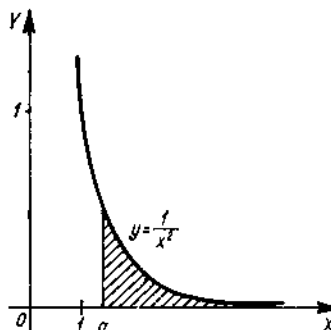
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{A} + \frac{1}{\varepsilon} \right] = \infty.$$



13. ábra



14. ábra



15. ábra

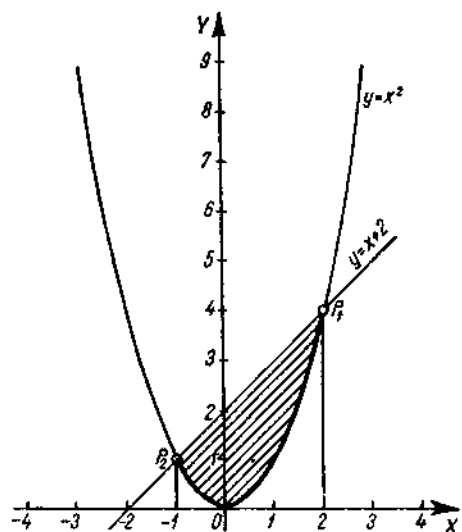
$$T_2 = \int_0^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^a \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^a =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{a} + \frac{1}{\varepsilon} \right] = -\frac{1}{a} + \infty = \infty.$$

$$T_3 = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{A} + \frac{1}{a} \right] = 0 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}.$$

7. Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény görbéje, és az $y = x + 2$ egyenes által határolt területrészt (16. ábra)! Az intervallum végpontjait a két görbe metszéspontjainak abszcisszái adják.



16. ábra

Az egyenes és a parabola metszéspontjai:

$$x^2 = x + 2;$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -1;$$

$$y_1 = 4; \quad y_2 = 1.$$

A metszéspontok: $P_1(2; 4)$, $P_2(-1; 1)$.

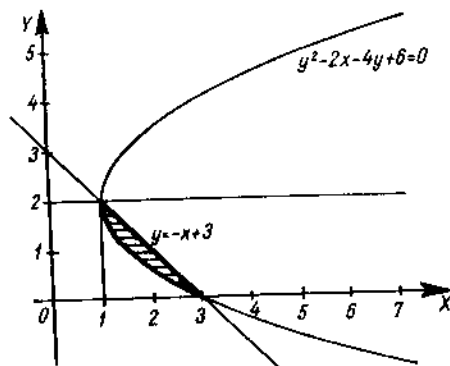
Az integrálás határai: $[-1; 2]$.

A két függvény grafikonja közötti terület egyenlő a vázlatos ábra szerint az $y = x + 2$ egyenes és az X -tengely közötti területnek, valamint az $y = x^2$ parabola és az X -tengely közötti területnek a különbségével.

$$\begin{aligned} T &= \int_{-1}^2 (x+2) dx - \int_{-1}^2 x^2 dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \\ &= 6 - \frac{8}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = 7 \frac{1}{2} - 3 = 4 \frac{1}{2} \text{ területegység.} \end{aligned}$$

Az integrálandó függvényt úgy határoztuk meg, hogy a különbség az adott intervallumban pozitív legyen.

8. Határozzuk meg az $y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ parabola és az $y = -x + 3$ egyenes által határolt síkrész területét (17. ábra).



17. ábra

Az ábrából látható, hogy a két metszéspont: $P_1(1; 2)$, $P_2(3; 0)$.

A parabola egyenletéből — teljes négyzetté kiegészítéssel — kifejezzük y -t:

$$y^2 - 4y = 2x - 6;$$

$$y^2 - 4y + 4 = 2x - 2;$$

$$(y-2)^2 = 2(x-1);$$

$$y-2 = \pm \sqrt{2(x-1)};$$

$$y = \pm \sqrt{2(x-1)} + 2.$$

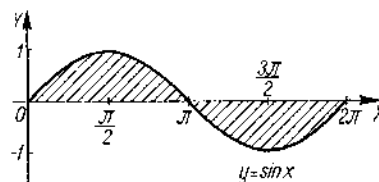
A függvény kétértékű és az alsó szár, valamint az egyenes közé eső síkrész területét keressük. Az integrálás határai: $[1; 3]$.

$$\begin{aligned} T &= \int_1^3 (-x+3) dx - \int_1^3 [-\sqrt{2(x-1)}+2] dx = \\ &= \int_1^3 [-x+1+\sqrt{2(x-1)}] dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{2\sqrt{2}}{2} (x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \\ &= -\frac{9}{2} + 3 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{2^3} + \frac{1}{2} - 1 - 0 = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \text{ területegység.} \end{aligned}$$

9. Határozzuk meg az $y = \sin x$ függvény görbéje és az X -tengely által határolt területet a $[0; \pi]$ és a $[0; 2\pi]$ intervallumok felett (18. ábra).

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = \\ &= -(-1) + 1 = 2 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

$$T_2 = \int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$



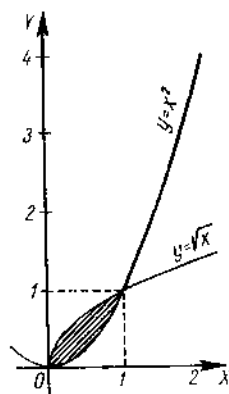
18. ábra

A T_0 terület nem azért nulla, mert a $\sin x$ függvény görbéje és az X -tengely közötti terület nulla, hanem azért, mert a pozitív és negatív terület (az X -tengely felett levő és az alatta levő) megegyezik, és így összege nulla.

A feladatot tehát úgy kell megoldanunk, hogy a $[0; \pi]$ és $[\pi; 2\pi]$ intervallumokra számított területek abszolút értékének összegét kell képeznünk. Ekkor — mivel $\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$ értéke szintén 2 — az eredmény

$T_2 = 4$ területegység.

10. Határozzuk meg az $y=x^2$ és az $y^2=x$ görbék által határolt területet (19. ábra)! Mindkét görbe parabola, csak az $y=x^2$ parabola ten-



19. ábra

gelye az Y -tengely, míg az $y^2=x$, vagyis $y=\pm\sqrt{x}$ parabola tengelye az X -tengely. Könnyen belátható, hogy a két parabola egymást a $P_1(0; 0)$ és $P_2(1; 1)$ pontban metszi, és az $y=\sqrt{x}$ parabola $[0; 1]$ intervallumhoz tartozó íve az $y=x^2$ parabola ugyanazon intervallumhoz tartozó íve felett van. Ezért

$$T = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - 0 + 0 = \frac{1}{3} \text{ területegység.}$$

$$11. T = \int_0^7 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^7 \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^7 =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 50 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 50 \approx \frac{1}{2} 3,91 = 1,955 \text{ területegység.}$$

$$12. T = \int_2^3 (e^x - 1)^2 dx = \int_2^3 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx =$$

$$= \left[\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x \right]_2^3 = \frac{e^6}{2} - 2e^3 + 3 - \frac{e^4}{2} + 2e^2 - 2 \approx$$

$$\approx \frac{410}{2} - 2 \cdot 20 + 3 - \frac{52}{2} + 2 \cdot 7,4 - 2 = 205 - 40 + 3 - 26 + 14,8 - 2 =$$

$$= 222,8 - 68 = 154,8 \text{ területegység.}$$

$$13. T = \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = 3 \int_{-3}^3 \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2} dx. \text{ A feladatot helyette-}$$

sítéssel oldjuk meg.

$$\frac{x}{3} = \sin t; \quad x = 3 \sin t; \quad dx = 3 \cos t dt.$$

A határokat t_1 , ill. t_2 -vel jelöljük.

$$T = 3 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot 3 \cos t dt = 9 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 t dt =$$

$$= 9 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \int_{t_1}^{t_2} (1+\cos 2t) dt = \frac{9}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_{t_1}^{t_2}.$$

Most a kapott kifejezést visszaalakítjuk úgy, hogy a független változó ismét x legyen.

$$t = \arcsin \frac{x}{3}; \quad \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{3} \sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

Ezeket behelyettesítve:

$$\begin{aligned} T &= \frac{9}{2} \left[\arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} \right]_{-3}^3 = \\ &= \frac{9}{2} [\arcsin 1 + \sqrt{0} - \arcsin(-1) + \sqrt{0}] = \\ &= \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{9}{2} \pi \approx 4,5 \cdot 3,14 \approx 14,1 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

14. $T = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} dx = ?$ A gyökjel alatti mennyiséget helyettesítéssel alakítjuk át:

$$u = 2-x; \quad x = 2-u; \quad dx = -du.$$

A határokat u_1 -gyel és u_2 -vel jelöljük:

$$\begin{aligned} T &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\sqrt[3]{u^2}} (-du) = - \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{2}{3}} du = - \left[\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_{u_1}^{u_2} = \\ &= - \left[3\sqrt[3]{u} \right]_{u_1}^{u_2} = - \left[3\sqrt[3]{2-x} \right]_2^5 = - \left(3\sqrt[3]{2-5} - 3\sqrt[3]{2-2} \right) = \\ &= 3\sqrt[3]{3} \approx 3 \cdot 1,44 = 4,32 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

15. $T = \int_1^5 \sqrt{x^2+8x+12} dx = \int_1^5 \sqrt{x^2+8x+16-4} dx =$
 $= \int_1^5 \sqrt{(x+4)^2-4} dx = 2 \int_1^5 \sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2-1} dx.$

Mivel $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, és ebből $\operatorname{ch}^2 x - 1 = \operatorname{sh}^2 x$, ezért a $\operatorname{ch} u = \frac{x+4}{2}$ helyettesítéssel új függvényt vezetünk be:
 $x = 2 \operatorname{ch} u - 4; \quad dx = 2 \operatorname{sh} u du.$

Az új határokat csak jelöljük:

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1} 2 \operatorname{sh} u du = 4 \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh}^2 u du = \\ &= 4 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch} 2u - 1}{2} du = 2 \left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} - u \right]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

A kapott kifejezést x függvényévé alakítjuk vissza:

$$\operatorname{sh} 2u = 2 \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = 2 \frac{x+4}{2} \sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 - 1}; \quad u = \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{x+4}{2}.$$

$$\begin{aligned} T &= 2 \left[\frac{x+4}{2} \sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 - 1} - \operatorname{ar} \operatorname{ch} \frac{x+4}{2} \right]_1^5 = \\ &= 2 \left[\frac{x+4}{2} \sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 - 1} - \ln \left(\frac{x+4}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+4}{2}\right)^2 - 1} \right) \right]_1^5 = \\ &= 2 \left[\frac{9}{2} \sqrt{\frac{81}{4} - 1} - \ln \left(\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{2} \sqrt{\frac{25}{4} - 1} + \ln \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} - 1} \right) \right] = \\ &= 2 \left[\frac{9}{2} \sqrt{\frac{77}{4}} - \ln \left(\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{77}{4}} \right) - \frac{5}{2} \sqrt{\frac{21}{4}} + \ln \left(\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{21}{4}} \right) \right] \approx \\ &\approx 2 \left[\frac{9 \cdot 8,8}{4} - \ln \left(\frac{9}{2} + 8,8 \right) - \frac{5 \cdot 4,6}{4} + \ln \left(\frac{5}{2} + 4,6 \right) \right] = \\ &= 2(19,8 - \ln 8,9 - 5,75 + \ln 4,8) = 2(14,05 - 2,18 + 1,57) = \\ &= 2(15,62 - 2,18) = 2 \cdot 13,44 = 26,88 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

16. $T = \int_3^5 \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int_3^5 \frac{dx}{x^2+6x+9+1} = \int_3^5 \frac{dx}{(x+3)^2+1}.$ Mivel

az integrandus $\frac{1}{u^2+1}$ alakú, ezért új változóként az $u = x+3$ -at vezetjük be, és a határokat csak jelöljük.

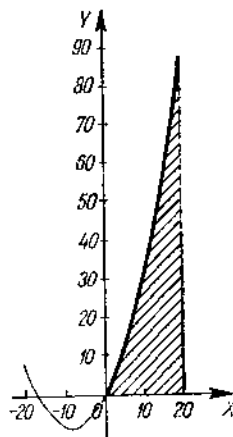
$$u = x+3; \quad du = dx.$$

$$T = \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u^2+1} = [\operatorname{arc} \operatorname{tg} u]_{u_1}^{u_2}.$$

A feladat megoldásához meg kell határoznunk u_1 és u_2 értékét.
Ha $x_1=3$, akkor $u_1=6$; ha $x_2=5$, akkor $u_2=8$.

$$T = [\arctg u]_6^8 = \arctg 8 - \arctg 6 \approx 82,9^\circ - 80,5^\circ = 2,4^\circ \approx 2,4 \cdot 0,01745 \approx 0,042.$$

17. Legyen egy görbe (parabola) paraméteres egyenletrendszere a következő: $x=5t$; $y=10t+3t^2$. Határozzuk meg a $t_1=0$ és $t_2=4$ paraméterértékekhez tartozó ordináták, a görbe íve és az X -tengely által határolt terület mérőszámát (20. ábra)!



20. ábra

$$t_1=0; x_1=0; t_2=4; x_2=20$$

I. Megoldás:

Mivel $\dot{x}=5$, ezért

$$T = \int_0^4 (10t + 3t^2) 5 dt = 5 \int_0^4 (10t + 3t^2) dt = 5 [5t^2 + t^3]_0^4 = 5(80 + 64) = 720 \text{ területegység.}$$

II. Megoldás:

Kiküszöböljük a t paramétert, vagyis meghatározzuk y -t mint x függvényét; ehhez kifejezzük t -t az egyik egyenletből és behelyettesítjük a másikba:

$$t = \frac{x}{5}; \quad y = \frac{10x}{5} + 3 \frac{x^2}{25} = \frac{3}{25} x^2 + 2x.$$

Ha $t_1=0$, akkor $x_1=0$; ha $t_2=4$, akkor $x_2=20$. Integráljuk tehát az $y = \frac{3}{25} x^2 + 2x$ függvényt a $[0; 20]$ intervallumban:

$$T = \int_0^{20} \left(\frac{3}{25} x^2 + 2x \right) dx = \left[\frac{x^3}{25} + x^2 \right]_0^{20} = \left[x^2 \left(\frac{x}{25} + 1 \right) \right]_0^{20} = 400 \left(\frac{4}{5} + 1 \right) = \frac{400 \cdot 9}{5} = 720 \text{ területegység.}$$

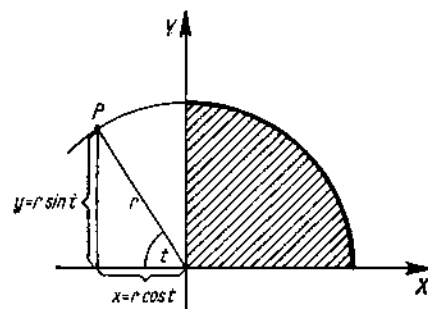
Valóban a kétféle képpen kapott eredmény megegyezik. Ez természetes, hiszen a görbék és a határok megegyeztek, csak a görbék megadási módja nem.

18. A kör paraméteres egyenletrendszere, ha a kör sugarát r -rel, és a sugár X -tengellyel bezárt szögét t -vel jelöljük:

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t.$$

Határozzuk meg a negyedkör területét (21. ábra)! A paraméterértékek:

$$t_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ és } t_2 = 0.$$



21. ábra

A határokat azért választottuk ilyen sorrendben, mert amíg t értéke $\frac{\pi}{2}$ -től 0-ig csökken, addig a t -nek megfelelő pont balról jobbra, vagyis az X -tengely pozitív irányításának megfelelően megy végig a görbén, tehát így lesz a számított terület előjele pozitív.

$$\dot{x} = -r \sin t.$$

$$T = \int_{\pi/2}^0 r \sin t (-r \sin t) dt = \int_{\pi/2}^0 -r^2 \sin^2 t dt = \int_0^{\pi/2} r^2 \sin^2 t dt.$$

Alkalmazzuk a $\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$ azonosságot.

$$T = \int_0^{\pi/2} r^2 \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{r^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{r^2}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0 \right] = \frac{r^2 \pi}{4} \text{ területegység.}$$

A negyedkör területe $\frac{r^2 \pi}{4}$, tehát a teljes kör területe — eddigi eredményeinkkel megegyezően — $r^2 \pi$.

19. Határozzuk meg adott ellipszisnegyed területét. A területet az ellipszis paraméteres egyenletrendszere alapján és a derékszögű koordinátákban adott egyenlet alapján is meghatározzuk.

I. Megoldás:

A $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű, origó középpontú ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Itt t a 22. ábrán látható szöget jelenti. Az integrálás határai: $\frac{\pi}{2}$ és 0 .
 $\dot{x} = -a \sin t$.

$$T = \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \int_{\pi/2}^0 (-ab \sin^2 t) dt =$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt =$$

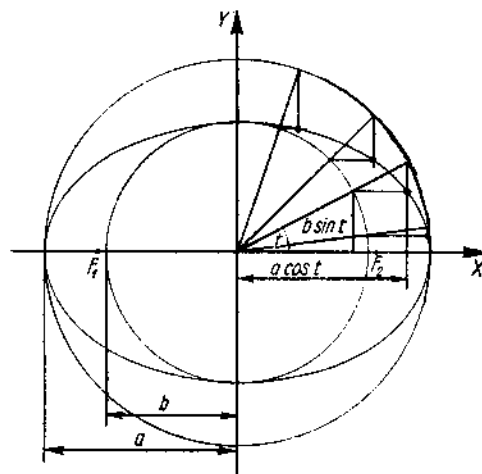
$$= \frac{ab}{2} \left[t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2} \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{ab\pi}{4}.$$

Eredményünknek megfelelően a teljes ellipszis területe: $ab\pi$.

II. Megoldás:

A $2a$ nagytengelyű és $2b$ kistengelyű ellipszis egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \text{ ebből } y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$



22. ábra

Az ellipszisnegyed területét megkapjuk, ha meghatározzuk az ellipszis X -tengely feletti, 0 -tól a -ig levő szakasza, valamint az X -tengely közötti területet.

$$T = \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx.$$

Az integrandusból helyettesítéssel a gyököt kiküszöböljük. Legyen $\frac{x}{a} = \sin t$, ebből $x = a \sin t$ és $dx = a \cos t dt$. Az új határok: ha $x = 0$, akkor $\sin t = 0$ és $t = 0$; ha $x = a$, akkor $\sin t = 1$, és $t = \frac{\pi}{2}$.

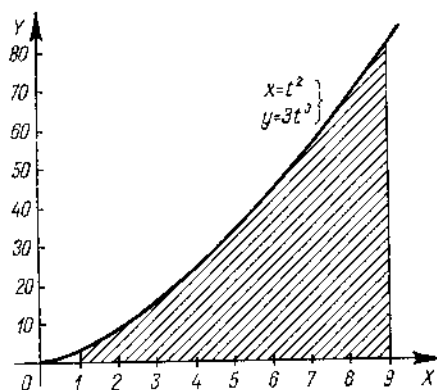
$$T = b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} a \cos t dt =$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= ab \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = ab \left[\frac{\pi}{4} + 0 - 0 \right] = \frac{ab\pi}{4},$$

ebből a teljes ellipszis területe: $ab\pi$.

20. Határozzuk meg a Neil-féle szemikubikus parabola, valamint az X-tengely által határolt területet, a $t_1=1$, $t_2=3$ paraméterértékek esetén (23. ábra).



23. ábra

A szemikubikus parabola egyenletrendszere $x=at^2$, $y=bt^3$; legyen most $a=1$ és $b=3$, ekkor

$$x=t^2; \quad y=3t^3.$$

I. Megoldás:

$$\dot{x}=2t.$$

$$\begin{aligned} T &= \int_1^3 3t^3 \cdot 2t \, dt = \int_1^3 6t^4 \, dt = \left[\frac{6}{5} t^5 \right]_1^3 = \\ &= \frac{6 \cdot 243}{5} - \frac{6}{5} = \frac{6}{5} \cdot 242 = \frac{1452}{5} = 290,4 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

II. Megoldás:

Most küszöböljük ki a t paramétert, és oldjuk meg így a feladatot!

$$x = t^2; \quad y = 3t^3, \quad t = \sqrt{x}, \quad \text{és így} \quad y = 3(\sqrt{x})^3 = 3x^{\frac{3}{2}}.$$

Az integrálás határait úgy számítjuk ki, hogy az $x=t^2$ összefüggésben t helyébe 1-et, ill. 3-at helyettesítünk. Ha $t_1=1$, akkor $x_1=1$, és ha $t_2=3$, akkor $x_2=9$.

A terület tehát:

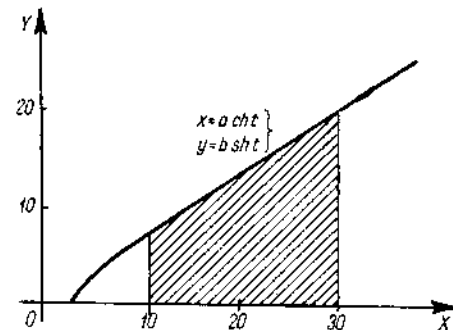
$$\begin{aligned} T &= \int_1^9 3x^{\frac{3}{2}} \, dx = 3 \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_1^9 = \\ &= 3 \cdot \frac{2}{5} [(9)^{\frac{5}{2}} - (1)^{\frac{5}{2}}] = \frac{6}{5} (243 - 1) = 290,4 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

A két — különböző módon kapott — eredmény tehát valóban megegyezik.

21. A hiperbola paraméteres egyenletrendszere: $x=a \operatorname{ch} t$; $y=b \operatorname{sh} t$ (24. ábra). Ugyanis az

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hiperbolaegyenletet a hiperbolikus függvényekre vonatkozó $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$ azonossággal egybevetve észrevehetjük, hogy az $\frac{x}{a} = \operatorname{ch} t$ és $\frac{y}{b} = \operatorname{sh} t$ paraméteres kapcsolat kielégíti a hiperbola paraméteres egyenletrendszerét.



24. ábra

Határozzuk meg $a=3$ és $b=2$ esetén a $t_1=2$ és $t_2=3$ paraméterértékek közé eső területet:

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} \, dt = \int_2^3 2 \operatorname{sh} t \cdot 3 \operatorname{ch} t \, dt = 6 \int_2^3 \operatorname{sh} t \, dt.$$

Mivel $\text{sh}^2 t = \frac{\text{ch } 2t - 1}{2}$, ezért

$$T = 6 \int_2^8 \frac{\text{ch } 2t - 1}{2} dt = 3 \int_2^8 (\text{ch } 2t - 1) dt =$$

$$= 3 \left[\frac{\text{sh } 2t}{2} - t \right]_2^8 = 3 \left(\frac{\text{sh } 6}{2} - 3 - \frac{\text{sh } 4}{2} + 2 \right) = 3 \left(\frac{\text{sh } 6 - \text{sh } 4}{2} - 1 \right).$$

$$\text{sh } 6 = \frac{e^6 - e^{-6}}{2} \approx \frac{400 - \frac{1}{400}}{2} \approx 200;$$

$$\text{sh } 4 = \frac{e^4 - e^{-4}}{2} \approx \frac{55 - \frac{1}{55}}{2} \approx 27,5.$$

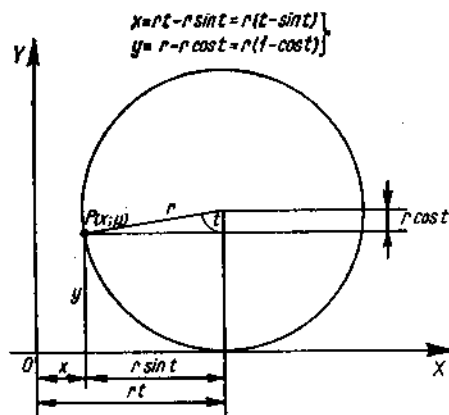
$$T \approx 3 \left(\frac{200 - 27,5}{2} - 1 \right) = 3 \left(\frac{172,5}{2} - 1 \right) \approx 3(86 - 1) =$$

$$= 3 \cdot 85 = 255 \text{ területegység.}$$

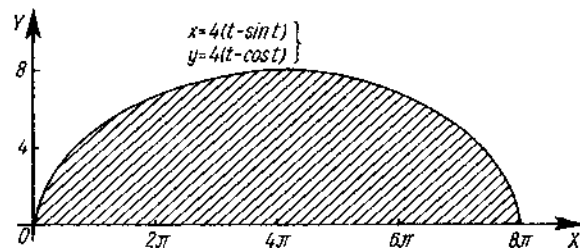
22. Az X -tengelyen csúszás nélkül gördülő kör kerületének bármely pontja cikloisívet ír le. A ciklois paraméteres egyenletrendszere a 25. ábrán látható módon kapható meg.

Legyen egy ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 4(t - \sin t); \quad y = 4(1 - \cos t). \quad (26. \text{ ábra.})$$



25. ábra



26. ábra

Határozzuk meg a cikloisív és az X -tengely közötti terület számértékét, ha $t_1 = 0$ és $t_2 = 2\pi$, vagyis a teljes ív alatti területet keressük.

$$T = \int_0^{2\pi} y \dot{x} dt = \int_0^{2\pi} 4(1 - \cos t) 4(1 - \cos t) dt =$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 16 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt =$$

$$= 16 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{\cos 2t + 1}{2} \right) dt =$$

$$= 16 \left[t - 2 \sin t + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= 16 \left[\frac{\sin 2t}{4} - 2 \sin t + \frac{3}{2} t \right]_0^{2\pi} = 16(0 - 0 + 3\pi - 0 + 0 - 0) =$$

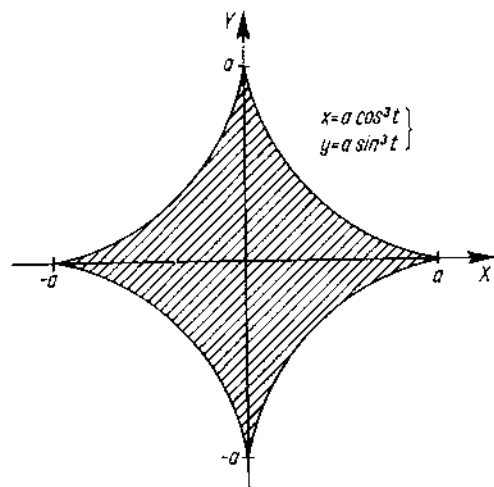
$$= 48\pi \approx 48 \cdot 3,14 \approx 151 \text{ területegység.}$$

23. A $2a$ tengelyhosszúságú asztrois paraméteres egyenletrendszere: $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$ (27. ábra). (Az asztrois szimmetrikus az origóra.) Határozzuk meg az asztrois területét!

A szimmetria miatt elegendő a negyed asztrois területét meghatározni, ennek négyszerese a teljes asztrois területe.

$$\text{Legyen } a = 5 \text{ és } t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = 0.$$

$$\dot{x} = 15 \cos^2 t (-\sin t) = -15 \sin t \cos^2 t.$$



27. ábra

$$T = \int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt = \int_{\pi/2}^0 5 \sin^3 t (-15 \sin t \cos^2 t) dt =$$

$$= -75 \int_{\pi/2}^0 \sin^4 t \cos^2 t dt.$$

Mindkét trigonometrikus tényező páros hatványa lépett fel, ezért a linearizáló formulákat alkalmazhatjuk.

$$\sin^4 t = \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2, \text{ ill. } \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}.$$

$$T = 75 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 75 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos^2 2t}{4} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{75}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2t)(1 + \cos 2t) dt.$$

Ismét alkalmazzuk a linearizáló formulát, ugyanis $\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$, tehát

$$T = \frac{75}{8} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{75}{8} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} \right) (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{75}{8} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 4t \cos 2t}{2} \right) dt.$$

Az integrandusban két szögfüggvény szorzata van, ezeket szögszettek szögfüggvényévé tudjuk alakítani az alábbi összefüggés felhasználásával:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)].$$

Alkalmazzuk az előbbi összefüggést az integrandus megfelelő tagjára, akkor

$$\cos 4t \cos 2t = \frac{1}{2} (\cos 2t + \cos 6t).$$

$$T = \frac{75}{8} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \frac{\cos 2t}{2} + \frac{\cos 2t + \cos 6t}{4} \right) dt =$$

$$= \frac{75}{8} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 4t}{2} - \frac{\cos 2t}{4} + \frac{\cos 6t}{4} \right) dt =$$

$$= \frac{75}{8} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8} - \frac{\sin 2t}{8} + \frac{\sin 6t}{24} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{75}{8} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2\pi}{8} - \frac{\sin \pi}{8} + \frac{\sin 3\pi}{24} - 0 \right) = \frac{75}{8} \left(\frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{75\pi}{32} \approx \frac{75 \cdot 3,14}{32} \approx 7,35 \text{ területegység.}$$

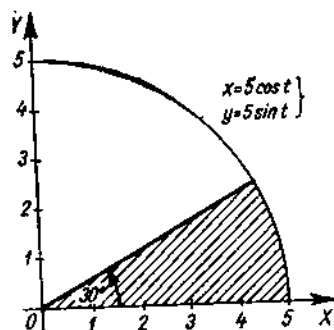
A teljes asztrois területe tehát: $4 \cdot 7,35 = 29,4$ területegység.

Most olyan feladatokat oldunk meg, amelyek eredményének helyességét eddigi ismereteink felhasználásával könnyen ellenőrizhetjük.

24. Az origó középpontú és r sugarú kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t.$$

Határozzuk meg az $r=5$ sugarú körbe rajzolt 30° -os nyílásszögű körívek területét (28. ábra)!



28. ábra

$$x = 5 \cos t; \quad y = 5 \sin t. \quad \text{A határok: } t_1=0; \quad t_2=\frac{\pi}{6}.$$

$$\dot{x} = -5 \sin t; \quad \dot{y} = 5 \cos t.$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (25 \cos^2 t + 25 \sin^2 t) dt = \frac{25}{2} \int_0^{\pi/6} 1 dt = \\ &= \frac{25}{2} [t]_0^{\pi/6} = \frac{25}{2} \cdot \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Ugyanezt kapjuk a körívek területképletével is, ugyanis:

$$T = \frac{r^2}{2} = \frac{r^2 \alpha}{2} = \frac{r^2 \alpha}{2},$$

ahol α a körívek radiánban mért középponti szöge, tehát

$$T = \frac{5^2 \cdot \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{25}{2} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

25. Határozzuk meg az ellipszis területét a szektorterület integrálképlete alapján!

Az ellipszis paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t.$$

A deriváltak:

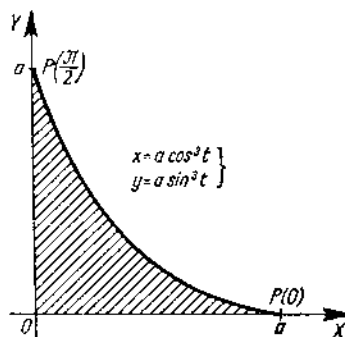
$$\dot{x} = -a \sin t; \quad \dot{y} = b \cos t.$$

A határok (ha a teljes ellipszis területét akarjuk meghatározni): 0 és 2π . Most is úgy választjuk meg a határokat, hogy a paraméter növekedésével a görbeponthoz húzott sugár pozitív (óramutató járásával ellentétes) elfordulást végezzen.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2} 2\pi = ab\pi.$$

26. Határozzuk meg a negyedasztrois területét mint szektorterületet, ha paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t \quad (29. \text{ ábra}).$$



29. ábra

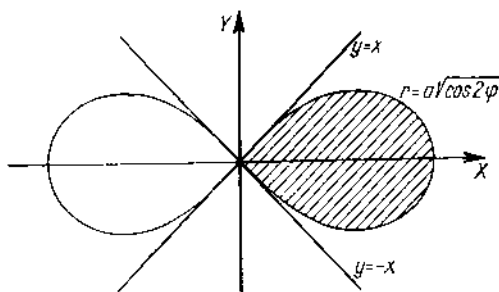
A deriváltak:

$$\dot{x} = 3a \cos^2 t (-\sin t) = -3a \sin t \cos^2 t;$$

$$\dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (3a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt = \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \\
&= \frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{3a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \\
&= \frac{3a^2}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2t) dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1 + \cos 4t}{2}\right) dt = \\
&= \frac{3a^2}{8} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4t}{2} dt = \frac{3a^2}{16} \left[t - \frac{\sin 4t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{3a^2}{16} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{3a^2}{32} \pi.
\end{aligned}$$

27. A lemniszkáta egyenlete: $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (30. ábra). Határozzuk meg a lemniszkáta $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$ és $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ polárszögek közé eső szektorterületét.



30. ábra

Azért választottuk ezt a két szöget, mert $\frac{\pi}{4}$ -nél nagyobb szögekre $\left(\frac{3}{4}\pi - \text{ig}\right)$, és $-\frac{\pi}{4}$ -nél kisebb szögekre $\left(-\frac{3}{4}\pi - \text{ig}\right)$ nincs értelmezve a függvény.

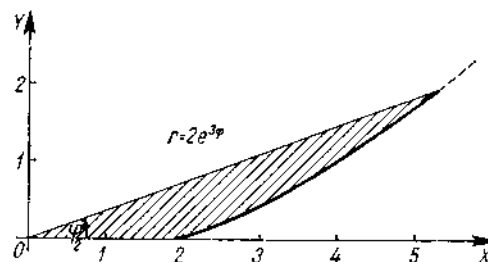
$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{4} \left[\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{a^2}{4} (1 + 1) = \frac{a^2}{2}.
\end{aligned}$$

28. Egy logaritmus spirális polárkoordinátás egyenlete:

$$r = 2e^{3\varphi}.$$

Határozzuk meg a $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \frac{\pi}{9}$ polárszögek által határolt szektorterületet (31. ábra)!

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} 4e^{6\varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/9} e^{6\varphi} d\varphi = \\
&= 2 \left[\frac{e^{6\varphi}}{6}\right]_0^{\pi/9} = \frac{1}{3} (e^{2\pi/3} - e^0) \approx \frac{1}{3} (2^{2,09} - 1) \approx \\
&\approx \frac{1}{3} (8,1 - 1) = \frac{7,1}{3} \approx 2,4 \text{ területegység.}
\end{aligned}$$

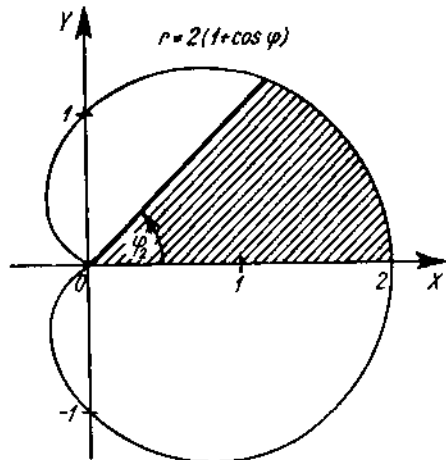


31. ábra

29. A kardioid polárkoordinátával megadott egyenlete:

$$r = 2(1 + \cos \varphi).$$

Határozzuk meg a $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ polárszögek által határolt szektorterületet (32. ábra)!



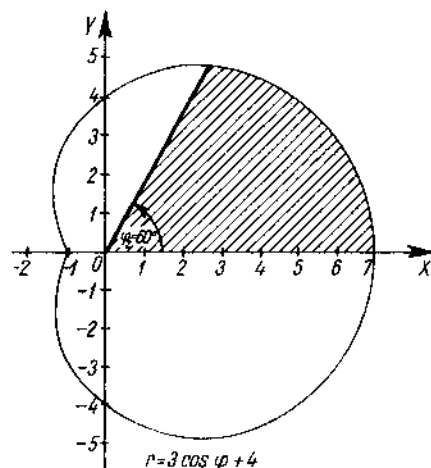
32. ábra

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} [2(1 + \cos \varphi)]^2 d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^{\pi/4} = \\ &= 2 \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{4} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{4} - 0 \right] = \\ &= \frac{3\pi}{4} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{4} \approx \frac{3}{4} \cdot 3,14 + 2 \cdot 1,41 + 0,5 \approx 5,68 \text{ területegység} \end{aligned}$$

30. Egy Pascal-féle csigavonal polárkoordinátás egyenlete:

$$r = 3 \cos \varphi + 4.$$

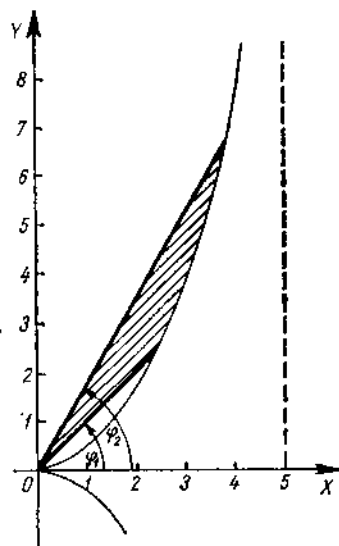
Határozzuk meg a $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ polárkoordináták által határolt szektorterületet (33. ábra)!



33. ábra

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (3 \cos \varphi + 4)^2 d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} (9 \cos^2 \varphi + 24 \cos \varphi + 16) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \left(9 \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + 24 \cos \varphi + 16 \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{41}{2} \varphi + \frac{9}{4} \sin 2\varphi + 24 \sin \varphi \right]_0^{\pi/3} \approx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{41}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{9}{4} \sin \frac{2\pi}{3} + 24 \sin \frac{\pi}{3} - 0 \right) \approx \\ &\approx 10,7 + 0,97 + 10,4 = 22,07 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

31. Határozzuk meg az $r = \frac{5 \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$ egyenletű ciszsois $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ és $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ polárszögek által határolt szektorterületét (34. ábra)!



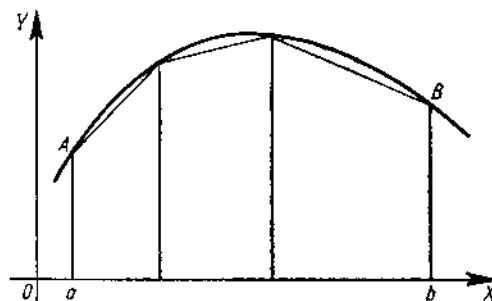
34. ábra

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{25 \sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 12,5 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = 12,5 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1 - \cos^2 \varphi)^2}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 12,5 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1 - 2 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 12,5 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 2 + \cos^2 \varphi \right) d\varphi = \\ &= 12,5 \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 2 + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= 12,5 \left[\operatorname{tg} \varphi - \frac{3}{2} \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \\ &= 12,5 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{4} \right) \approx \\ &\approx 12,5 \left(1,73 - 1,57 + \frac{0,866}{4} - 1 + 1,5 \cdot 0,785 - \frac{1}{4} \right) \approx \\ &\approx 3,85 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

2. Ívhossz-számítás

Ha az A és B pontokkal határolt AB vonaldarabba — például a 35. ábrán látható módon — beírt poligon hosszának van felső határa, akkor a vonaldarabot rektifikálhatónak mondjuk és a vonaldarab ívhossza ezen felső határral egyenlő.



35. ábra

Ha egy $y=f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumban folytonos és differenciálható, továbbá a differenciáhányadosa korlátos, akkor az a és b abszcisszáik által határolt vonalдарab ívhosszát az

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx$$

határozott integrál adja meg.

Ha a görbe paraméteres egyenletrendszerrel adott, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékeknek megfelelő pontok közé eső görbedarab ívhossza:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Ha a görbe egyenlete polárkoordinátákkal adott, akkor a $(\varphi_1; r_1)$ és $(\varphi_2; r_2)$ pontok közé eső görbedarab ívhossza:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi.$$

Gyakorló feladatok

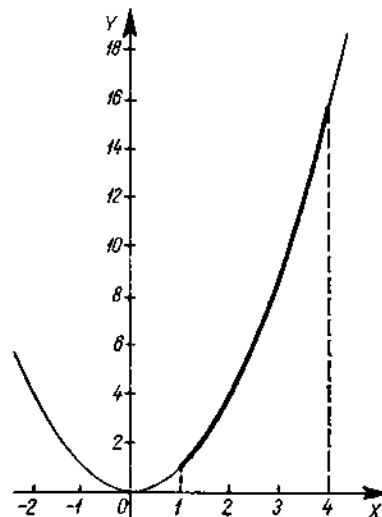
1. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény görbéjének az $x_1=1$ és $x_2=4$ abszcisszájú pontjai által határolt ívnek hosszúságát (36. ábra)!

$$y=x^2; \quad y'=2x.$$

$$s = \int_1^4 \sqrt{1+(2x)^2} dx = ? \text{ Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át:}$$

Legyen $2x = \operatorname{sh} u$, akkor $x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u$, és $dx = \frac{1}{2} \operatorname{ch} u du$. A határokat csak jelöljük, és a visszaalakítás után helyettesítünk.

$$\begin{aligned} s &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \frac{1}{2} \operatorname{ch} u du = \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{ch}^2 u du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2} du = \frac{1}{4} \int_{u_1}^{u_2} (\operatorname{ch} 2u + 1) du = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} + u \right]_{u_1}^{u_2} = \frac{1}{4} [\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u + u]_{u_1}^{u_2} = \\ &= \frac{1}{4} [2x \sqrt{1+(2x)^2} + \operatorname{ar} \operatorname{sh} 2x]_1^4. \end{aligned}$$



36. ábra

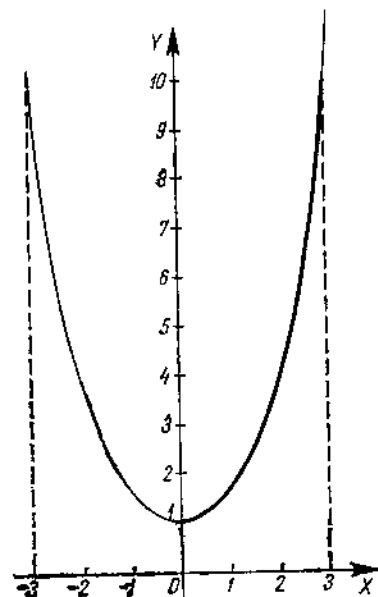
Tudjuk, hogy $\operatorname{ar} \operatorname{sh} 2x = \ln [2x + \sqrt{(2x)^2 + 1}]$, ezért

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{4} [2x \sqrt{1+(2x)^2} + \ln (2x + \sqrt{(2x)^2 + 1})]_1^4 = \\ &= \frac{1}{4} [2 \cdot 4 \sqrt{1+64} + \ln (8 + \sqrt{1+64}) - 2 \sqrt{1+4} - \ln (2 + \sqrt{1+4})] = \\ &= \frac{1}{4} [8 \sqrt{65} + \ln (8 + \sqrt{65}) - 2 \sqrt{5} - \ln (2 + \sqrt{5})] \approx \\ &\approx 0,25(8 \cdot 8,05 + \ln 16,05 - 2 \cdot 2,24 - \ln 4,24) \approx \\ &\approx 0,25(64,4 + 2,78 - 4,48 - 1,45) = 0,25(67,18 - 5,93) = \\ &= 0,25 \cdot 61,25 \approx 15,31 \text{ hosszúságegység.} \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az $y=\operatorname{ch} x$ függvény-görbe $x_1=0$ és $x_2=3$ abszcisszájú pontjai által határolt ívnek hosszát (37. ábra)!

$$y=\operatorname{ch} x; \quad y'=\operatorname{sh} x.$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^3 \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^3 \operatorname{ch} x dx = [\operatorname{sh} x]_0^3 = \\ &= \frac{e^3 - e^{-3}}{2} \approx \frac{20 - \frac{1}{20}}{2} \approx 10 \text{ hosszúságegység.} \end{aligned}$$

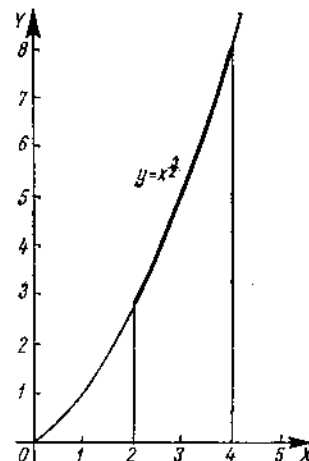


37. ábra

3. Határozzuk meg az $y = x^{\frac{5}{2}}$ függvény görbéjének az $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ abszcisszájú pontjai által határolt ívnek hosszúságát (38. ábra)!

$$y = x^{\frac{5}{2}}; \quad y' = \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}.$$

$$\begin{aligned} s &= \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \left[\frac{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}} \right]_2^4 = \\ &= \left[\frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_2^4 = \frac{8}{27} \left(\sqrt{10^3} - \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^3} \right) \approx \\ &\approx \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - \sqrt{166,4}) \approx \frac{8}{27} (31,7 - 12,9) = \frac{150,4}{27} \approx \\ &\approx 5,56 \text{ hosszúságegység.} \end{aligned}$$

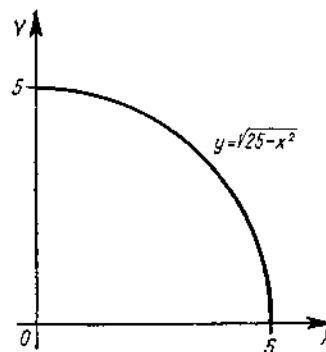


38. ábra

4. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 25$ kör ívének hosszát az $x_1 = 0$ és $x_2 = 5$ abszcisszájú pontok által határolt szakasz felett (tehát az 5 sugarú negyedkör kerületét) (39. ábra).

$$y^2 = 25 - x^2; \quad y = \sqrt{25 - x^2};$$

$$y' = \frac{1}{2} (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$



39. ábra

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{x^2}{25-x^2}} dx = \int_0^5 \sqrt{\frac{25-x^2+x^2}{25-x^2}} dx = \\
 &= \int_0^5 \frac{5}{\sqrt{25-x^2}} dx = \frac{1}{5} \int_0^5 \frac{5}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{5}\right)^2}} dx = \\
 &= \left[5 \arcsin \frac{x}{5} \right]_0^5 = 5(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \\
 &= 5 \left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \frac{5\pi}{2} \text{ hosszúságegység.}
 \end{aligned}$$

Ez valóban az 5 egység sugarú negyedkör íve.

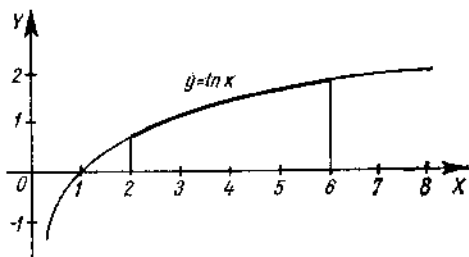
5. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény ívének hosszát az $x_1=2$ és $x_2=6$ abszcisszájú pontok által határolt szakaszon (40. ábra)!

$$y = \ln x; \quad y' = \frac{1}{x}.$$

$$s = \int_2^6 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_2^6 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} dx = \int_2^6 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx.$$

Helyettesítést alkalmazunk: $x^2+1 = t^2$; így

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{t^2-1} = (t^2-1)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ebből} \quad dx = \frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2t dt = \\
 &= \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}}.
 \end{aligned}$$



40. ábra

Az új határok $x_1=2$, ezért $t_1=\sqrt{5}$; és $x_2=6$, ezért $t_2=\sqrt{37}$.

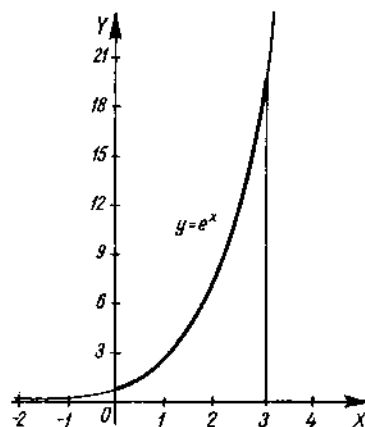
$$\begin{aligned}
 s &= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}} \frac{t \cdot t dt}{\sqrt{t^2-1} \sqrt{t^2-1}} = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}} \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}} \frac{t^2-1+1}{t^2-1} dt = \\
 &= \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}} \left(1 + \frac{1}{t^2-1} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Mivel $|t| > 1$, ezért

$$\begin{aligned}
 s &= \left[t - \ln \frac{t-1}{t+1} \right]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{37}} = \sqrt{37} - \ln \frac{\sqrt{37}-1}{\sqrt{37}+1} - \sqrt{5} + \ln \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx \\
 &\approx 6,1 - \ln \frac{5,1}{7,1} - 2,24 + \ln \frac{1,24}{3,24} \approx \\
 &\approx 3,86 - \ln 5,1 + \ln 7,1 + \ln 1,24 - \ln 3,24 \approx \\
 &\approx 3,86 - 1,63 + 1,96 + 0,215 - 1,17 = 3,23 \text{ hosszúságegység.}
 \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg az $y = e^x$ függvény görbéje $x_1=0$ és $x_2=3$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének hosszát (41. ábra)!

$$y = e^x; \quad y' = e^x; \quad s = \int_0^3 \sqrt{1+e^{2x}} dx.$$



41. ábra

Ilyen alakú integrandusra általános eljárást nem ismerünk; mivel azonban tudjuk, hogy $\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} = \operatorname{ch} u$, a következő helyettesítéssel próbálkozunk: legyen $e^x = \operatorname{sh} u$, vagyis $x = \ln \operatorname{sh} u$ és $\frac{dx}{du} = \frac{1}{\operatorname{sh} u} \operatorname{ch} u$, amiből $dx = \frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} du$.

Az új határokat egyelőre csak jelöljük. Így

$$\begin{aligned} s &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh} u} du = \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{sh}^2 u + 1}{\operatorname{sh} u} du = \int_{u_1}^{u_2} \left(\operatorname{sh} u + \frac{1}{\operatorname{sh} u} \right) du = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh} u du + \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\operatorname{sh} u} du. \end{aligned}$$

A második tag integrálja:

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\operatorname{sh} u} du &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{u}{2} \operatorname{ch} \frac{u}{2}} du = \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2} \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \frac{u}{2}} du = \left[\ln \left| \operatorname{th} \frac{u}{2} \right| \right]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

Így az eredeti integrál:

$$\begin{aligned} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch}^2 u}{\operatorname{sh} u} du &= \left[\operatorname{ch} u + \ln \left| \operatorname{th} \frac{u}{2} \right| \right]_{u_1}^{u_2} = \\ &= \left[\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} - 1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1} + 1} \right]_{u_1}^{u_2} = \\ &= \left[\sqrt{e^{2x} + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^{2x} + 1} - 1}{\sqrt{e^{2x} + 1} + 1} \right]_0^3 = \\ &= \sqrt{e^0 + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^0 + 1} - 1}{\sqrt{e^0 + 1} + 1} - \sqrt{e^0 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^0 + 1} - 1}{\sqrt{e^0 + 1} + 1} \approx \end{aligned}$$

$$\approx 20 + \frac{1}{2} \ln \frac{20-1}{20+1} - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx$$

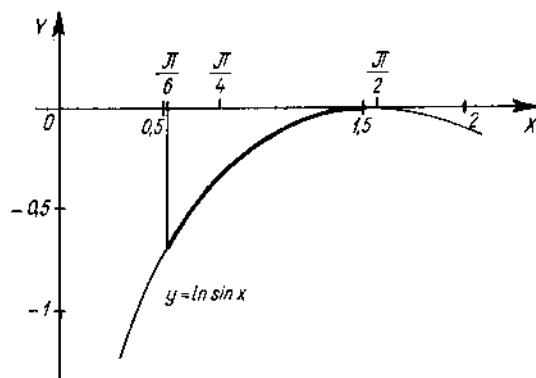
$$\approx 20 + \frac{1}{2} \ln \frac{19}{21} - 1,41 - \frac{1}{2} \ln \frac{0,41}{2,41} = 18,59 + \frac{1}{2} \ln \frac{19 \cdot 2,41}{21 \cdot 0,41} \approx$$

$$\approx 18,59 + \frac{1}{2} \ln 5,3 \approx 18,59 + \frac{1,68}{2} = 18,59 + 0,84 =$$

$$= 19,43 \text{ hosszúságegység.}$$

7. Határozzuk meg az $y = \ln \sin x$ függvény görbéje $x_1 = \frac{\pi}{6}$ és $x_2 = \frac{\pi}{2}$ abszcisszákat által határolt ívének hosszúságát (42. ábra).

$$\begin{aligned} s &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2} dx = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}} dx = \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx. \end{aligned}$$



42. ábra

Most az $R(\sin x)$ alakú integrandusra szokásos helyettesítést végezzük:

Legyen $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ekkor

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} + 1} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad x = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t;$$

tehát $\frac{dx}{dt} = 2 \frac{1}{1+t^2}$ és $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$;

ha $x = \frac{\pi}{6}$, akkor $t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \operatorname{tg} 15^\circ \approx 0,268$,

ha $x = \frac{\pi}{2}$, akkor $t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Igy

$$s = \int_{\operatorname{tg} 15^\circ}^{\operatorname{tg} 45^\circ} \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int_{\operatorname{tg} 15^\circ}^{\operatorname{tg} 45^\circ} \frac{dt}{t} = [\ln |t|]_{\operatorname{tg} 15^\circ}^{\operatorname{tg} 45^\circ} \approx [\ln t]_{0,268}^1 =$$

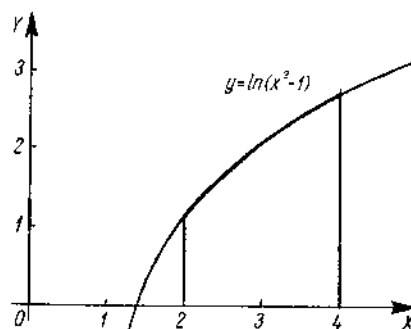
$$= \ln 1 - \ln 0,268 = -\ln 0,268 = -\ln \frac{2,68}{10} =$$

$$= \ln 10 - \ln 2,68 \approx 2,3 - 0,986 = 1,314 \text{ hosszúságegység.}$$

8. Határozzuk meg az $y = \ln(x^2 - 1)$ függvény $x_1 = 2$ és $x_2 = 4$ abszcisz-szájú pontjai által határolt ívének hosszúságát (43. ábra). (Az integrandus értelmezési tartománya $|x| > 1$, tehát értelmezve van az egész integrálási intervallumban.)

$$s = \int_2^4 \sqrt{1+y'^2} dx.$$

$$y = \ln(x^2 - 1); \quad y' = \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x.$$



43. ábra

$$s = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(x^2-1)^2}} dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2}{(x^2-1)^2}} dx =$$

$$= \int_2^4 \frac{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}}{x^2 - 1} dx = \int_2^4 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx = \int_2^4 \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} dx =$$

$$= \int_2^4 \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) dx = \int_2^4 dx + 2 \int_2^4 \frac{1}{x^2 - 1} dx =$$

$$= [x]_2^4 + 2 \left[-\ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right]_2^4 =$$

$$= 4 - 2 - 2 \ln \sqrt{\frac{3}{5}} + 2 \ln \sqrt{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2 + \ln \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} = 2 + \ln \frac{5}{9} =$$

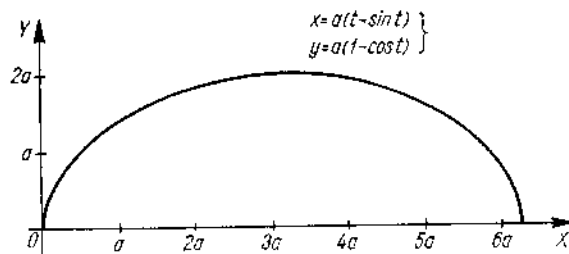
$$= 2 + \ln 5 - \ln 9 \approx 2 + 1,61 - 2,2 =$$

$$= 1,41 \text{ hosszúságegység.}$$

Most paraméteres alakban adott függvények ívhosszának kiszámításával foglalkozunk.

9. Határozzuk meg a ciklois ívhosszát (44. ábra)! A ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t).$$



44. ábra

A deriváltak és négyzetösszegek:

$$\dot{x} = a(1 - \cos t); \quad \dot{y} = a \sin t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t =$$

$$= a^2 - 2a^2 \cos t + a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t).$$

A határok: 0 és 2π (ugyanis t a körnek radiánban mért elfordulási szöge).

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt.$$

Az integrandust átalakítjuk, ugyanis

$$\frac{1 - \cos t}{2} = \sin^2 \frac{t}{2}, \text{ vagyis } 1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$s = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt =$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-\frac{\cos \frac{t}{2}}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} =$$

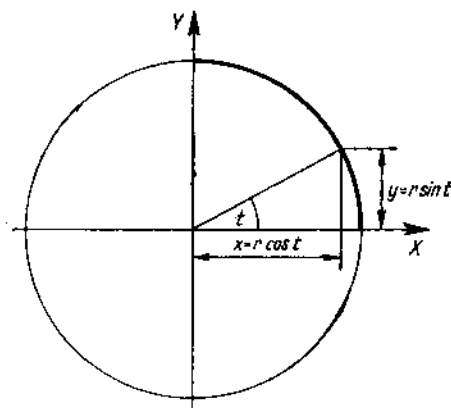
$$= -4a(\cos \pi - \cos 0) = -4a(-1 - 1) = 8a.$$

10. Határozzuk meg a negyedkör ívének hosszát (45. ábra). A kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x = r \cos t; \quad y = r \sin t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = [r(-\sin t)]^2 + (r \cos t)^2 = r^2.$$

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2} dt = \int_0^{\pi/2} r dt = [rt]_0^{\pi/2} = r \frac{\pi}{2}.$$



45. ábra

Valóban! A körön ívhosszat úgy számítottuk ki, hogy a középponti szöget [esetünkben $(\pi/2)$] szorozzuk a kör sugarával.

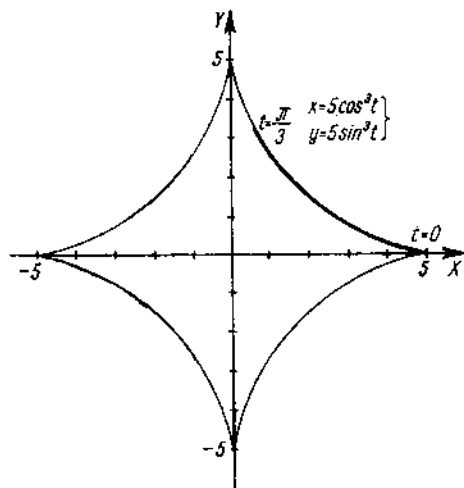
11. Határozzuk meg a következő egyenletrendszerrel adott asztrois $t_1=0$ és $t_2=\frac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívének hosszát (46. ábra).

$$x = 5 \cos^3 t; \quad y = 5 \sin^3 t.$$

A deriváltak négyzetösszege:

$$\dot{x} = 15 \cos^2 t (-\sin t) = -15 \cos^2 t \sin t;$$

$$\dot{y} = 15 \sin^2 t \cos t.$$



46. ábra

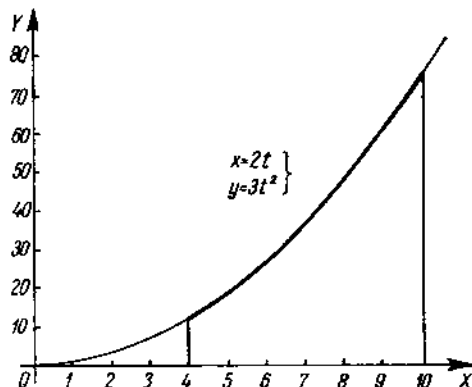
$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= 225 (\sin^2 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t) = \\ &= 225 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = 225 \sin^2 t \cos^2 t. \\ s &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{225 \sin^2 t \cos^2 t} dt = 15 \int_0^{\pi/3} \sin t \cos t dt = \\ &= 15 \left[\frac{\sin^2 t}{2} \right]_0^{\pi/3} = \frac{15}{2} (\sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 0) = 7,5 \cdot \frac{3}{4} = \\ &= 7,5 \cdot 0,75 = 5,625.\end{aligned}$$

12. Határozzuk meg az $x=2t$; $y=3t^2$ paraméteres egyenletrendszerrel adott parabola $t_1=2$ és $t_2=5$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívnek hosszát (47. ábra).

$$s = \int_2^5 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_2^5 \sqrt{4 + 36t^2} dt = 2 \int_2^5 \sqrt{1 + 9t^2} dt.$$

Az integrált helyettesítéssel alakítjuk át.

Legyen $3t = \text{sh } u$; vagyis $t = \frac{1}{3} \text{sh } u$; ekkor $dt = \frac{1}{3} \text{ch } u du$.



47. ábra

Az új integrálási határokat csak jelezzük:

$$s = 2 \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + \text{sh}^2 u} \frac{1}{3} \text{ch } u du = \frac{2}{3} \int_{u_1}^{u_2} \text{ch}^2 u du.$$

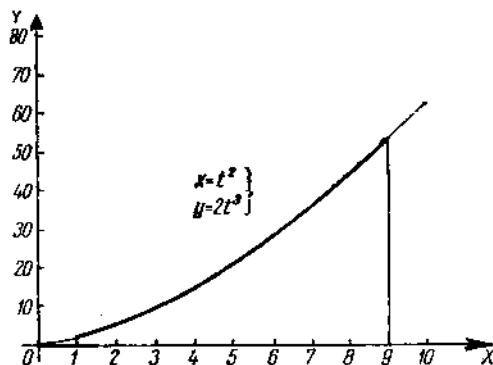
Mivel $\text{ch}^2 u = \frac{1 + \text{ch } 2u}{2}$, ezért

$$s = \frac{2}{3} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \text{ch } 2u}{2} du = \frac{1}{3} \int_{u_1}^{u_2} (1 + \text{ch } 2u) du = \frac{1}{3} \left[u + \frac{\text{sh } 2u}{2} \right]_{u_1}^{u_2}.$$

Visszahelyettesítjük a t változót:

$$\begin{aligned}u &= \text{ar sh } 3t = \ln(3t + \sqrt{9t^2 + 1}); \\ \frac{\text{sh } 2u}{2} &= \frac{2 \text{sh } u \text{ch } u}{2} = \text{sh } u \text{ch } u = \text{sh } u \sqrt{1 + \text{sh}^2 u} = 3t \sqrt{1 + 9t^2}. \\ s &= \frac{1}{3} [\ln(3t + \sqrt{9t^2 + 1}) + 3t \sqrt{1 + 9t^2}]_2^5 = \\ &= \frac{1}{3} [\ln(15 + \sqrt{226}) + 15 \sqrt{226} - \ln(6 + \sqrt{37}) - 6 \sqrt{37}] \approx \\ &\approx \frac{1}{3} (\ln 30 + 225 - \ln 12 - 36) = \frac{1}{3} \left(\ln \frac{30}{12} + 189 \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{3} (0,92 + 189) = \frac{189,92}{3} \approx 63,31 \text{ hosszúságegység}.\end{aligned}$$

13. Határozzuk meg az $x=t^2$; $y=2t^3$ paraméteres egyenletű Neil-féle szemikubikus parabola $t_1=1$ és $t_2=3$ paraméterértékekkel adott pontjai között eső ívének hosszát (48. ábra)!



48. ábra

$$\dot{x}=2t; \quad \dot{y}=6t^2.$$

$$\begin{aligned} s &= \int_1^3 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_1^3 \sqrt{4t^2 + 36t^4} dt = \int_1^3 2t\sqrt{1+9t^2} dt = \\ &= \frac{1}{9} \int_1^3 18t\sqrt{1+9t^2} dt = \frac{1}{9} \left[(1+9t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \right]_1^3 = \\ &= \frac{2}{27} [\sqrt{(1+9t^2)^3}]_1^3 = \frac{2}{27} (82\sqrt{82} - 10\sqrt{10}) \approx \\ &\approx \frac{2}{27} (742,6 - 31,7) \approx 52,6 \text{ hosszúságegység.} \end{aligned}$$

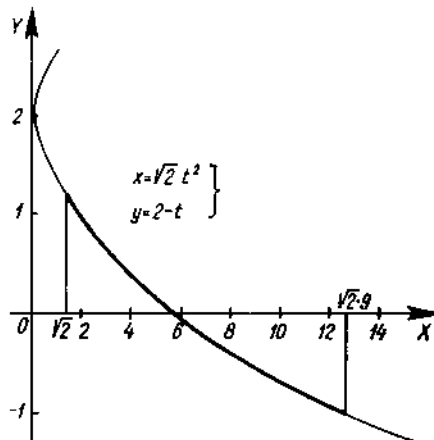
14. Egy parabola paraméteres egyenletrendszere:

$$x = \sqrt{2}t^2; \quad y = 2-t.$$

Határozzuk meg a $t_1=1$ és $t_2=3$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ív hosszát (49. ábra)!

$$\dot{x} = 2\sqrt{2}t; \quad \dot{y} = -1.$$

$$s = \int_1^3 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_1^3 \sqrt{8t^2 + 1} dt.$$



49. ábra

Alkalmazzuk a $\text{sh } u = \sqrt{8}t$ helyettesítést, ekkor

$$t = \frac{1}{\sqrt{8}} \text{sh } u \text{ és } dt = \frac{\text{ch } u}{\sqrt{8}} du.$$

Az ívhossz:

$$\begin{aligned} s &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\text{sh}^2 u + 1} \frac{\text{ch } u}{\sqrt{8}} du = \frac{1}{\sqrt{8}} \int_{u_1}^{u_2} \text{ch}^2 u du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\text{ch } 2u + 1}{2} du = \frac{1}{2\sqrt{8}} \left[\frac{\text{sh } 2u}{2} + u \right]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

Az eredeti t változót visszahelyettesítve:

$$\frac{\text{sh } 2u}{2} = \text{sh } u \text{ ch } u = \sqrt{8}t \sqrt{8t^2 + 1};$$

$$u = \text{arsh } \sqrt{8}t = \ln(\sqrt{8}t + \sqrt{8t^2 + 1}).$$

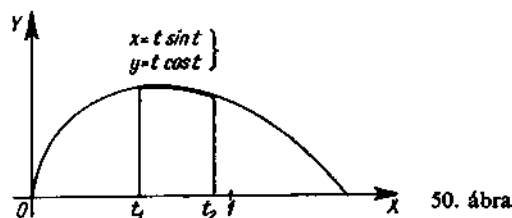
$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2\sqrt{8}} [\sqrt{8}t \sqrt{8t^2 + 1} + \ln(\sqrt{8}t + \sqrt{8t^2 + 1})]_1^3 = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{8}} [3\sqrt{8} \sqrt{73} + \ln(3\sqrt{8} + \sqrt{73}) - \sqrt{8} \sqrt{9} - \ln(\sqrt{8} + \sqrt{9})] \approx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\approx \frac{1}{2\sqrt[3]{8}} [3 \cdot 2,83 \cdot 8,55 + \ln(3 \cdot 2,83 + 8,55) - 8,5 - \ln(2,83 + 3)] \approx \\
 &\approx \frac{1}{2\sqrt[3]{8}} [72,6 + \ln(8,5 + 8,55) - 8,5 - \ln 5,83] \approx \\
 &\approx \frac{1}{2\sqrt[3]{8}} \left(64,1 + \ln \frac{17,05}{5,83} \right) \approx \frac{1}{2\sqrt[3]{8}} (64,1 + \ln 2,92) \approx \\
 &\approx \frac{1}{2\sqrt[3]{8}} (64,1 + 1,07) \approx \frac{65,17}{5,65} \approx 11,5 \text{ hosszúságegység.}
 \end{aligned}$$

15. Határozzuk meg az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott függvény görbéjének a $t_1 = \frac{\pi}{4}$ és $t_2 = \frac{\pi}{3}$ paraméterértékekhez tartozó pontok közé eső ívének hosszúságát (50. ábra)!

$$x = t \sin t; \quad y = t \cos t.$$

$$\dot{x} = \sin t + t \cos t; \quad \dot{y} = \cos t - t \sin t.$$



50. ábra

A két derivált négyzetösszege

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= (\sin t + t \cos t)^2 + (\cos t - t \sin t)^2 = \\
 &= \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + \cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t = \\
 &= 1 + t^2.
 \end{aligned}$$

$$s = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sqrt{1+t^2} dt.$$

A $t = \operatorname{sh} u$ helyettesítéssel, figyelembe véve, hogy ekkor $dt = \operatorname{ch} u du$,

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \operatorname{ch} u du = \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{ch}^2 u du = \\
 &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2} du = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} + u \right]_{u_1}^{u_2}.
 \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u = t \sqrt{t^2 + 1}, \text{ és } u = \operatorname{arsh} t = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}),$$

ezért

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{1}{2} [t \sqrt{t^2 + 1} + \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})]_{\pi/4}^{\pi/3} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\pi^2}{9} + 1} + \ln \left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{\frac{\pi^2}{9} + 1} \right) - \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + 1} - \ln \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + 1} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Behelyettesítve a $\frac{\pi}{3} \approx 1,05$ és $\frac{\pi}{4} \approx 0,785$ közelítő értékeket, a keresett ívhossz:

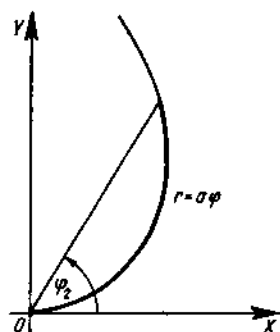
$$\begin{aligned}
 s &\approx \frac{1}{2} [1,05 \sqrt{1,05^2 + 1} + \ln(1,05 + \sqrt{1,05^2 + 1}) - \\
 &- 0,785 \sqrt{0,785^2 + 1} - \ln(0,785 + \sqrt{0,785^2 + 1})] \approx \\
 &\approx 0,5 [1,05 \sqrt{1,1 + 1} + \ln(1,05 + \sqrt{1,1 + 1}) - \\
 &- 0,785 \sqrt{0,62 + 1} - \ln(0,785 + \sqrt{0,62 + 1})] = \\
 &= 0,5 [1,05 \sqrt{2,1} + \ln(1,05 + \sqrt{2,1}) - 0,785 \sqrt{1,62} - \\
 &- \ln(0,785 + \sqrt{1,62})] \approx 0,5 (1,52 + \ln 2,5 - 0,996 - \ln 2,055) = \\
 &= 0,5 \left(0,524 + \ln \frac{2,5}{2,055} \right) \approx 0,5 (0,524 + \ln 1,22) \approx 0,5 (0,524 + 0,2) \approx \\
 &= 0,362 \text{ hosszúságegység.}
 \end{aligned}$$

16. Határozzuk meg az archimedesi spirális ívhosszát a $\varphi_1=0$, $\varphi_2=1$ határok között (51. ábra)!

$$r=a\varphi; \quad \dot{r}=a.$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = \int_0^1 \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^1 \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi.$$

A gyökjel alatti mennyiséget helyettesítéssel alakítjuk át.



51. ábra

Legyen $\varphi = \text{sh } t$; ekkor $\varphi^2 + 1 = \text{sh}^2 t + 1 = \text{ch}^2 t$, és $d\varphi = \text{ch } t dt$.

A határok kiszámítása: ha $\varphi_1=0$, akkor $t_1=0$; ha $\varphi_2=1$, akkor

$$1 = \text{sh } t_2 = \frac{e^{t_2} - e^{-t_2}}{2} \quad | \cdot 2e^{t_2}; \quad 2e^{t_2} = e^{2t_2} - 1; \quad e^{2t_2} - 2e^{t_2} - 1 = 0;$$

$$e^{t_2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}; \quad t_2 = 0,88.$$

$e^{t_2} = 1 + \sqrt{2}$ a valós számok körében nem oldható meg. Tehát

$$s = a \int_0^{0,88} \text{ch}^2 t dt = a \int_0^{0,88} \frac{\text{ch } 2t + 1}{2} dt = a \left[\frac{\text{sh } 2t}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{0,88} =$$

$$= a \left(\frac{\text{sh } 1,76}{4} + 0,44 - 0 \right) = a \left(\frac{e^{1,76} - e^{-1,76}}{8} + 0,44 \right) \approx$$

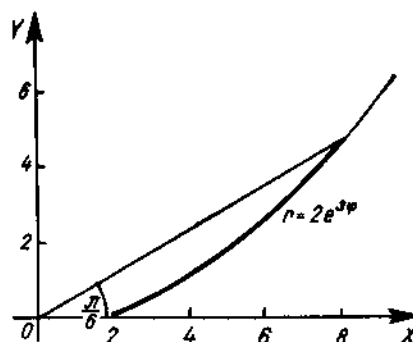
$$\approx a \left(\frac{5,8 - \frac{1}{5,8}}{8} + 0,44 \right) \approx a \left(\frac{5,8 - 0,172}{8} + 0,44 \right) =$$

$$= a \left(\frac{5,628}{8} + 0,44 \right) = a(0,7035 + 0,44) = 1,1435a \approx 1,14a.$$

Legyen $a=10$, vagyis $r=10\varphi$; akkor

$$s = \int_0^1 \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = 1,14 \cdot 10 = 11,4 \text{ hosszúságegység.}$$

17. Határozzuk meg az $r=2e^{\varphi}$ egyenletű logaritmikus spirális ívhosszát, ha $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ (52. ábra).



52. ábra

$$r=2e^{\varphi}; \quad \dot{r}=2e^{\varphi}.$$

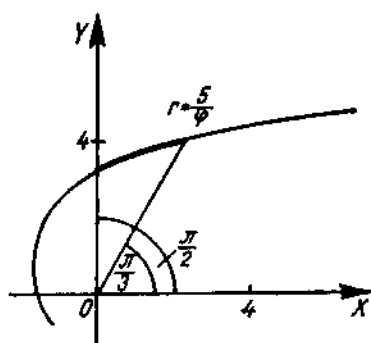
$$s = \int_0^{\pi/6} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = \int_0^{\pi/6} \sqrt{4e^{2\varphi} + 36e^{2\varphi}} d\varphi = \int_0^{\pi/6} \sqrt{40e^{2\varphi}} d\varphi =$$

$$= \sqrt{40} \int_0^{\pi/6} e^{\varphi} d\varphi = \sqrt{40} \left[\frac{e^{\varphi}}{1} \right]_0^{\pi/6} = \frac{\sqrt{40}}{3} (e^{\pi/6} - e^0) \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{40}}{3} (e^{1,57} - 1) \approx \frac{6,32}{3} (4,8 - 1) \approx 8.$$

18. Határozzuk meg adott hiperbolikus spirális $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ és $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ polárszögek által határolt ívének hosszúságát (53. ábra)! A hiperbolikus spirális polárkoordinátás egyenlete:

$$r = \frac{5}{\varphi}; \quad \dot{r} = -\frac{5}{\varphi^2};$$



53. ábra

$$s = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = 5 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi^4}} d\varphi =$$

$$= 5 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\varphi^2} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi.$$

Legyen $\varphi = \operatorname{sh} u$; tekintetbe véve, hogy $d\varphi = \operatorname{ch} u du$ (arról, hogy a határokat is átszámítjuk-e u -ra, vagy pedig visszahelyettesítjük a φ változót, később döntünk), az ívhossz:

$$s = 5 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u + 1}}{\operatorname{sh}^2 u} \operatorname{ch} u du = 5 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{sh}^2 u + 1}{\operatorname{sh}^2 u} du =$$

$$= 5 \int_{u_1}^{u_2} \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \right) du = 5[u - \operatorname{cth} u]_{u_1}^{u_2}.$$

Behelyettesítjük a határokat: ha $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$, akkor

$$u_1 = \operatorname{arsh} \varphi = \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) =$$

$$= \ln\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + 1}\right) \approx \ln(1,05 + \sqrt{1,05^2 + 1}) \approx$$

$$\approx \ln(1,05 + \sqrt{1,1 + 1}) = \ln(1,05 + \sqrt{2,1}) \approx$$

$$\approx \ln(1,05 + 1,45) = \ln 2,5 \approx 0,91,$$

ha $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, akkor

$$u_2 \operatorname{arsh} \frac{\pi}{2} = \ln\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1}\right) \approx$$

$$\approx \ln(1,57 + \sqrt{1,57^2 + 1}) \approx \ln(1,57 + \sqrt{3,46}) \approx$$

$$\approx \ln(1,57 + 1,86) = \ln 3,43 \approx 1,23.$$

Az u -ra kapott értékeket behelyettesítjük:

$$s = 5[u - \operatorname{cth} u]_{0,91}^{1,23} = 5(1,23 - \operatorname{cth} 1,23 - 0,91 + \operatorname{cth} 0,91).$$

További részletszámítások:

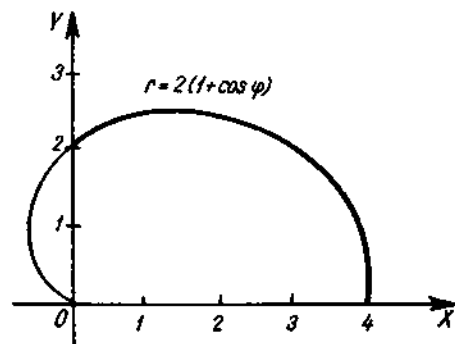
$$\operatorname{cth} 1,23 = \frac{e^{1,23} + e^{-1,23}}{e^{1,23} - e^{-1,23}} \approx \frac{3,42 + 0,292}{3,42 - 0,292} = \frac{3,712}{3,128} \approx 1,19;$$

$$\operatorname{cth} 0,91 = \frac{e^{0,91} + e^{-0,91}}{e^{0,91} - e^{-0,91}} \approx \frac{2,48 + 0,404}{2,48 - 0,404} = \frac{2,884}{2,076} \approx 1,38.$$

$$s = 5(0,32 - 1,19 + 1,38) = 5(1,70 - 1,19) = 2,55 \text{ hosszúságegység.}$$

19. Határozzuk meg az $r = 2(1 + \cos \varphi)$ egyenletű kardioid $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ polárszögekhez tartozó pontok által határolt ívének hosszát (54. ábra)!

$$r = 2(1 + \cos \varphi); \quad \dot{r} = -2 \sin \varphi.$$



54. ábra

Először az integrandus gyökjel alatti részét határozzuk meg:

$$\begin{aligned}r^2 + \dot{r}^2 &= [2(1 + \cos \varphi)]^2 + (-2 \sin \varphi)^2 = \\&= 4(1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) + 4 \sin^2 \varphi = \\&= 4 + 8 \cos \varphi + 4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi = 8(1 + \cos \varphi). \\s &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{8(1 + \cos \varphi)} d\varphi = \\&= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos \varphi} d\varphi.\end{aligned}$$

Mivel $2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} = 1 + \cos \varphi$, ezért

$$\begin{aligned}s &= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 4 \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\&= 8 \left[\operatorname{sh} \frac{\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} = 8 \operatorname{sh} \frac{\pi}{4} = 8 \frac{e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}}{2} = 4(e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}) \approx \\&\approx 4(e^{0,785} - e^{-0,785}) \approx 4 \left(2,19 - \frac{1}{2,19} \right) \approx 6,936 \text{ hosszúságegység}.\end{aligned}$$

3. Forgástestek felszíne

Csak olyan felületek felszínének meghatározásával foglalkozunk, amelyek valamilyen folytonos $y=f(x)$ görbe X -tengely körüli forgatásával vagy $x=g(y)$ görbe Y -tengely körüli forgatásával keletkeznek.

Ha egy folytonos függvény görbéje valamely $[a, b]$ szakaszon rektifikálható, akkor az X -, ill. Y -tengely körüli forgatásával kapható forgásfelületnek (vagyis a forgástest palástjának) a felszíne is meghatározható.

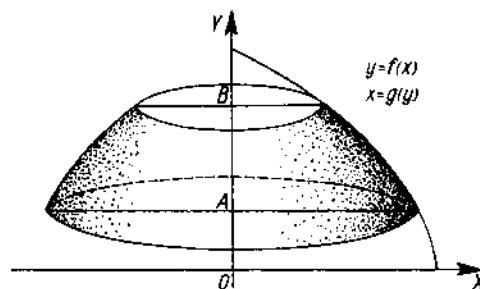
Ha az $y=f(x)$ függvény görbéjének X -tengely körüli forgatásával keletkező forgástest palástjának felszínét akarjuk kiszámítani az a, b határok között, akkor az alábbi határozott integrál értékeként kapjuk meg:

$$F_x(a, b) = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ha a forgástengely az Y -tengely és a szakasz végpontja $y=A$ és $y=B$, akkor a palást felszíne

$$F_y(A, B) = 2\pi \int_A^B x \sqrt{1 + x'^2} dy,$$

ahol x az $y=f(x)$ függvény inverze, vagyis $x=f^{-1}(y)=g(y)$, valamint $x'=\frac{dx}{dy}$ (55. ábra).



55. ábra

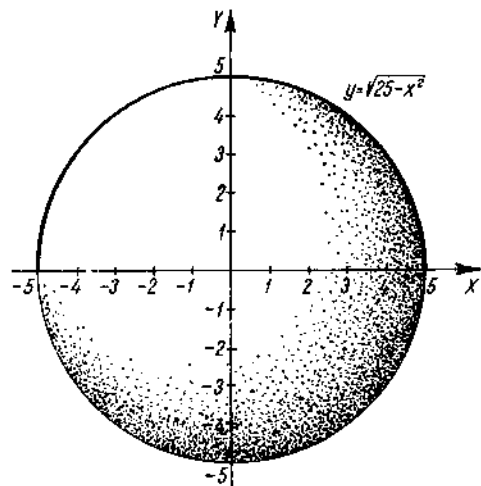
Ha a függvény paraméteres alakban adott, akkor a t_1 és t_2 paramétereknek megfelelő pontok által határolt görbe X -tengely körüli forgatásából adódó forgástest palástjának felszíne

$$F_x(t_1, t_2) = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=\sqrt{25-x^2}$ félkör forgatásával keletkező gömb felszínét (56. ábra)! Az integrálás határai -5 és 5 .

$$y' = \frac{1}{2} (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}.$$



56. ábra

$$F = 2\pi \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2+x^2} dx = 10\pi[x]_{-5}^5 = 100\pi \text{ területegység.}$$

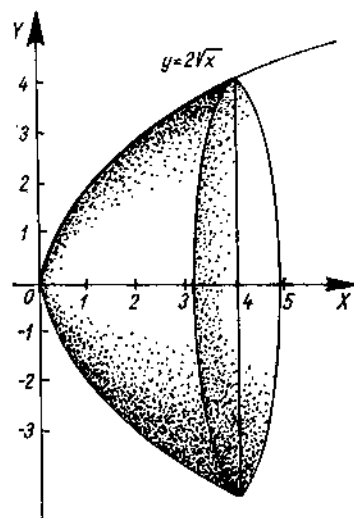
Az $r=5$ egység sugarú gömb felszíne valóban $F=4r^2\pi=100\pi$.

2. Határozzuk meg az $y=2\sqrt{x}$ parabola X -tengely körüli forgatásakor keletkező forgási paraboloid felszínét, ha az ív két végpontjának abszcisszája 0 és 4 (57. ábra)!

$$y' = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}};$$

az integrandus

$$y\sqrt{1+y'^2} = 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = 2\sqrt{x+1}.$$



57. ábra

A forgásfelület felszíne:

$$F = 2\pi \int_0^4 2\sqrt{x+1} dx = 4\pi \int_0^4 (x+1)^{\frac{1}{2}} dx = 4\pi \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{8\pi}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8\pi}{3} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$= \frac{8\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1) \approx \frac{8 \cdot 3,14}{3} (5 \cdot 2,24 - 1) \approx 85,5 \text{ területegység.}$$

3. Határozzuk meg az $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ellipszis $x_1=0$; $x_2=3$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének X -tengely körüli forgatásakor keletkező forgásfelület felszínét!

Először az implicit alakban adott függvényt explicit alakra hozzuk:

$$y^2 = 4 \left(1 - \frac{x^2}{9} \right) = \frac{4}{9} (9 - x^2);$$

$$y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}.$$

Az X -tengely feletti ellipszis egyenlete:

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2}.$$

A derivált:

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (9-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{-2x}{3\sqrt{9-x^2}}.$$

A felszín:

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^3 \frac{2}{3} \sqrt{9-x^2} \sqrt{1+\frac{4x^2}{9(9-x^2)}} dx = \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^3 \sqrt{9-x^2+\frac{4}{9}x^2} dx = \frac{4\pi}{3} \int_0^3 \sqrt{9-\frac{5}{9}x^2} dx = \\ &= 4\pi \int_0^3 \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}x}{9}\right)^2} dx. \end{aligned}$$

Legyen $\frac{\sqrt{5}x}{9} = \sin u$, vagyis $x = \frac{9}{\sqrt{5}} \sin u$; $dx = \frac{9}{\sqrt{5}} \cos u du$.

Az új határokat u_1 -gyel, ill. u_2 -vel jelöljük.

$$\begin{aligned} F &= 4\pi \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1-\sin^2 u} \frac{9}{\sqrt{5}} \cos u du = \frac{36\pi}{\sqrt{5}} \int_{u_1}^{u_2} \cos^2 u du = \\ &= \frac{36\pi}{\sqrt{5}} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1+\cos 2u}{2} du = \frac{18\pi}{\sqrt{5}} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

Kiszámítjuk u_1 és u_2 értékét, majd behelyettesítünk:

ha $x_1 = 0$, akkor $u_1 = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{9} x_1 = 0$;

ha $x_2 = 3$, akkor $u_2 = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} \approx \arcsin \frac{2,24}{3} \approx$

$\approx \arcsin 0,75 \approx 48,5 \cdot 0,0174 \approx 0,844$ (radián).

$\sin 2u_1 = \sin 0 = 0$;

$\sin 2u_2 = \sin 2 \cdot 48,5^\circ = \sin 97^\circ = \sin 83^\circ = 0,99$.

$$\begin{aligned} F &= \frac{18\pi}{\sqrt{5}} \left(0,844 + \frac{0,99}{2} - 0 \right) \approx 25,2(0,844+0,495) = \\ &= 25,2 \cdot 1,339 \approx 33,8 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

A felületdarab felszíne tehát 33,8 területegység.

4. Határozzuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ függvény $0 \leq x \leq 3$ abszcisszákkal meghatározott ívének X -tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest palástjának felszínét!

$y = \operatorname{ch} x$; $y' = \operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^3 \operatorname{ch} x \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x} dx = 2\pi \int_0^3 \operatorname{ch}^2 x dx = \\ &= 2\pi \int_0^3 \frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2} dx = \pi \left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{2} + x \right]_0^3 = \\ &= \pi \left(\frac{\operatorname{sh} 6}{2} + 3 \right) = \pi \left(\frac{e^6 - e^{-6}}{4} + 3 \right) \approx 3,14 \left[\frac{400 - \frac{1}{400}}{4} + 3 \right] \approx \\ &\approx 3,14 \cdot 103 \approx 324. \end{aligned}$$

A felszín tehát 324 területegység.

5. Határozzuk meg az $y = 3x^3$ parabola $x_1 = 0$ és $x_2 = 5$ abszcisszájú pontjai által határolt ívének az X -tengely körüli forgatásakor keletkező felület felszínét!

$y = 3x^3$; $y' = 9x^2$.

$$F = 2\pi \int_0^5 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^5 3x^3 \sqrt{1+81x^4} dx.$$

Az integrandus átalakítható úgy, hogy a gyökös tényező szorzója éppen a gyökjel alatti kifejezés deriváltja legyen, tehát $f'(x)f'(x)$ alakúvá:

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_0^5 \frac{3 \cdot 324 x^3}{324} \sqrt{1+81x^4} dx = \\ &= \frac{2\pi}{108} \int_0^5 324 x^3 (1+81x^4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{54} \left[(1+81x^4)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \right]_0^5 \approx \\ &\approx \frac{\pi}{81} [(9x^4)^{\frac{3}{2}}]_0^5 = \frac{\pi}{81} (225^{\frac{3}{2}} - 0) \approx \frac{3,14 \cdot 11,4 \cdot 10^6}{81} \approx \\ &\approx 4,42 \cdot 10^6 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg az $y=x^2$ parabola $y_1=0$ és $y_2=4$ ordinátájú pontjai által határolt ívnek az Y -tengely körüli forgatásával keletkező forgásfelszínt!

Ha a görbét az Y -tengely körül forgatjuk, akkor ismernünk kell x -et mint az y függvényét, ugyanis

$$F_y = 2\pi \int_0^4 x(y) \sqrt{1+x'^2(y)} dy.$$

$$\text{Mivel } y = x^2, \text{ ezért } x = \sqrt{y}; x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Megjegyzés: Az $y=x^2$ függvény inverz kapcsolatban $x = \pm \sqrt{y}$. A függvény kétértékű és szimmetrikus az Y -tengelyre. Mi most a pozitív X -tengely feletti ívet forgatjuk az Y -tengely körül, ennek egyenlete $x = \sqrt{y}$. Ha a negatív X -tengely feletti ívet forgatnánk az Y -tengely körül, akkor $x = -\sqrt{y}$ lenne, és a felszín számértékének mínusz egyszeresét kapnánk, ennek abszolút értéke lenne a keresett felszín.

$$F_y = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y} \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy = 2\pi \int_0^4 \sqrt{y + \frac{1}{4}} dy =$$

$$= 2\pi \int_0^4 \left(y + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} dy = 2\pi \left[\frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left[\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^3} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^3} \right].$$

A második tag értéke az elsőhöz képest kicsi, valamint figyelembe véve, hogy $\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^3} \approx \sqrt{76} \approx 8,7$ a keresett felszín:

$$F_y \approx \frac{4\pi \cdot 8,7}{3} \approx 36,5 \text{ területegység.}$$

7. Határozzuk meg az $y=x^2$ parabola $x_1=0$ és $x_2=4$ abszcisszájú pontjai által határolt ívnek az X -tengely körüli forgatásával keletkező forgásfelületét!

$$y=x^2; y'=2x.$$

$$F_x = 2\pi \int_0^4 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^4 x^2 \sqrt{1+4x^2} dx.$$

A gyökös tényezőt racionálissá alakíthatjuk, ha a $2x = \text{sh } u$ helyettesítést használjuk: legyen $x = \frac{\text{sh } u}{2}$; ekkor $dx = \frac{1}{2} \text{ch } u du$ és

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{\text{sh}^2 u}{4} \sqrt{1 + \text{sh}^2 u} \frac{1}{2} \text{ch } u du = \\ &= \frac{2\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} \text{sh}^3 u \text{ch } u du = \frac{\pi}{16} \int_{u_1}^{u_2} 4 \text{sh}^2 u \text{ch } u du = \\ &= \frac{\pi}{16} \int_{u_1}^{u_2} \text{sh}^2 2u du = \frac{\pi}{16} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\text{ch } 4u - 1}{2} du = \frac{\pi}{32} \left[\frac{\text{sh } 4u}{4} - u \right]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

Most kiszámíthatjuk az u_1 és u_2 határok értékét: $\text{sh } u = 2x$, tehát $u = \text{arsh } 2x = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$; ha $x=0$, akkor $u = \ln 1 = 0$, ha $x=4$, akkor $u = \ln(8 + \sqrt{65})$.

Tehát

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\pi}{32} \left[\frac{e^{4u} - e^{-4u}}{8} - u \right]_{u_1}^{u_2} = \frac{\pi}{32} \left[\frac{e^{4u} - e^{-4u}}{8} - u \right]_0^{\ln(8 + \sqrt{65})} \approx \\ &\approx \frac{\pi}{32} \left[\frac{e^{4u} - e^{-4u}}{8} - u \right]_0^{\ln 16} = \frac{\pi}{32} \left(\frac{16^4 - 1}{16^4} - \ln 16 - \frac{1-1}{8} + 0 \right) \approx \\ &\approx \frac{\pi}{32} \left(\frac{16^4}{8} - \ln 16 \right) = \pi \left(\frac{16^4}{16^4} - \frac{\ln 16}{32} \right) \approx \\ &\approx \pi 16^3 = 256\pi \approx 805 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

8. Határozzuk meg az $y=\ln x$ függvény $y_1=1$ és $y_2=2$ ordinátájú pontjai által határolt ívnek az Y -tengely körüli forgatásával keletkező forgásfelületét!

$$y=\ln x; \quad x=e^y.$$

$$F_y = 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1+x'^2} dy, \text{ ahol } x=e^y \text{ és } x' = \frac{dx}{dy} = e^y.$$

$$F_y = 2\pi \int_1^2 e^y \sqrt{1+e^{2y}} dy.$$

Legyen $e^y = \operatorname{sh} u$, akkor $e^y dy = \operatorname{ch} u du$.

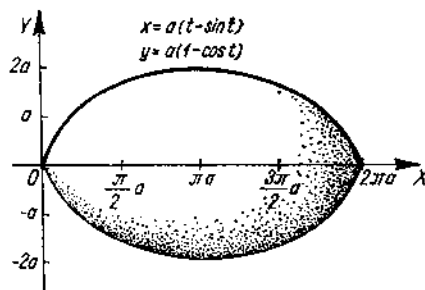
$$\begin{aligned} F_y &= 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u} \operatorname{ch} u du = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{ch}^2 u du = \\ &= 2\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{\operatorname{ch} 2u + 1}{2} du = \pi \int_{u_1}^{u_2} (\operatorname{ch} 2u + 1) du = \pi \left[\frac{\operatorname{sh} 2u}{2} + u \right]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

A határokat fejezzük ki u -ban! Mivel $e^y = \operatorname{sh} u$, ezért $u = \operatorname{arsh} e^y = \ln(e^y + \sqrt{e^{2y} + 1})$; $y_1=1$, tehát $u_1 = \ln(e + \sqrt{e^2 + 1}) \approx \ln(2,72 + 2,9) = \ln 5,62 \approx 1,73$ és $y_2=2$, vagyis

$$u_2 = \ln(e^2 + \sqrt{e^4 + 1}) \approx \ln(7,4 + \sqrt{52 + 1}) \approx \ln(7,4 + 7,3) \approx 2,69.$$

$$\begin{aligned} F_y &= \pi \left[\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{4} + u \right]_{1,73}^{2,69} = \\ &= \pi \left(\frac{e^{5,38} - e^{-5,38}}{4} + 2,69 - \frac{e^{3,46} - e^{-3,46}}{4} - 1,73 \right) \approx \\ &\approx \pi \left(\frac{218 - 0,0046}{4} + 2,69 - \frac{32 - 0,0313}{4} - 1,73 \right) \approx \\ &\approx \pi(54,5 + 2,69 - 8 - 1,73) = 47,46\pi \approx 148 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

9. Határozzuk meg a ciklois X -tengely körüli forgatásakor keletkező forgásfelület felszínét. Mint tudjuk, az ív két végpontjához tartozó paraméterértékek: $t_1=0$ és $t_2=2\pi$ (58. ábra).



58. ábra

A ciklois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t);$$

$$\dot{x} = a(1 - \cos t); \quad \dot{y} = a \sin t;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t) + a^2 \sin^2 t = \\ &= a^2 - 2a^2 \cos t + a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2a^2 - 2a^2 \cos t = \\ &= 2a^2(1 - \cos t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} dt = \\ &= 2\sqrt{2} \pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} dt. \end{aligned}$$

Mivel

$$1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2},$$

ezért

$$F_x = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2} \right)^{\frac{3}{2}} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt.$$

Az integrandust átalakítjuk:

$$\begin{aligned} \sin^3 \frac{t}{2} &= \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} = \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} \right) \sin \frac{t}{2} = \\ &= \sin \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} dt = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\sin \frac{t}{2} - \cos^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \right) dt = \\
 &= 8\pi a^3 \left[-2 \cos \frac{t}{2} + \frac{2}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\
 &= 8\pi a^3 \left(-2 \cos \pi + \frac{2}{3} \cos^3 \pi + 2 \cos 0 - \frac{2}{3} \cos^3 0 \right) = \\
 &= 8\pi a^3 \left(2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} \right) = 8\pi a^3 \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{3} a^3.
 \end{aligned}$$

10. Legyen egy kör paraméteres egyenletrendszere:

$$x = 6 \cos t; \quad y = 6 \sin t.$$

Határozzuk meg az X -tengely feletti félkörív X -tengely körüli forgatásakor keletkező gömb felszínét!

A félkörív határpontjaihoz tartozó paraméterértékek:

$$t_1 = 0; \quad t_2 = \pi.$$

$$F_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

$$\dot{x} = -6 \sin t; \quad y = 6 \cos t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 36 \sin^2 t + 36 \cos^2 t = 36.$$

$$F = 2\pi \int_0^\pi 6 \sin t \cdot 6 dt = 72\pi \int_0^\pi \sin t dt = 72\pi [-\cos t]_0^\pi =$$

$$= 72\pi(1+1) = 144\pi.$$

Valóban a 6 egység sugarú gömb felszíne $F = 4\pi \cdot 36 = 144\pi$ terület-egység.

11. Határozzuk meg a $t_1=0$ és $t_2=\frac{\pi}{2}$ paraméterértékekkel határolt asztroisív X -tengely körüli forgatásával kapott forgásfelület felszínét! Az asztrois paraméteres egyenletrendszere:

$$x = a \cos^3 t; \quad y = a \sin^3 t.$$

A deriváltak:

$$\dot{x} = 3a \cos^2 t (-\sin t) = -3a \cos^2 t \sin t;$$

$$\dot{y} = 3a \sin^2 t \cos t.$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) =$$

$$= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t.$$

$$F_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t} dt = 2\pi 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt.$$

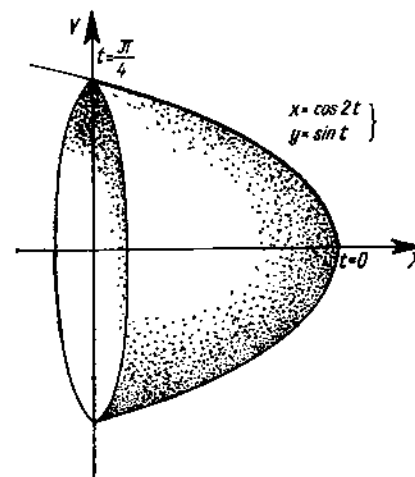
$$F_x = 6a^2 \pi \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = \frac{6a^2 \pi}{5} \left(\sin^5 \frac{\pi}{2} - \sin^5 0 \right) =$$

$$= \frac{6a^2 \pi}{5} (1-0) = \frac{6a^2 \pi}{5} \text{ területegység.}$$

12. Határozzuk meg az $x = \cos 2t$, $y = \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe $t_1=0$ és $t_2=\frac{\pi}{4}$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívnek az X -tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest palástjának felszínét (59. ábra)!

$$x = \cos 2t; \quad y = \sin t.$$

$$\dot{x} = -2 \sin 2t; \quad \dot{y} = \cos t.$$



59. ábra

$$F_x = 2\pi \int_0^{\pi/4} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin t \sqrt{4 \sin^2 2t + \cos^2 t} dt.$$

A gyökjel alatti kifejezést átalakítjuk:

$$4 \sin^2 2t + \cos^2 t = 4 \cdot 4 \sin^2 t \cos^2 t + \cos^2 t = \cos^2 t (16 \sin^2 t + 1).$$

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin t \cos t \sqrt{16 \sin^2 t + 1} dt = \\ &= \frac{\pi}{16} \int_0^{\pi/4} 32 \sin t \cos t (16 \sin^2 t + 1)^{\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Az integrandus $f^n(t)f'(t)$ alakú, ezért

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\pi}{16} \left[\frac{(16 \sin^2 t + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{24} \left[\left(16 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - (0 + 1)^{\frac{3}{2}} \right] = \\ &= \frac{\pi}{24} (27 - 1) = \frac{26\pi}{24} \approx 3,4 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

13. Tekintsük az $x=5 \cos t$, $y=4 \sin t$ egyenletrendszerrel megadott ellipszisnek a $t_1=0$ és $t_2=\frac{\pi}{2}$ paraméterértékekhez tartozó két pontját.

Forgassuk meg a két pont közötti ívét az X -tengely körül és számítsuk ki az így keletkezett forgásfelület területét!

$$x=5 \cos t; \quad y=4 \sin t.$$

$$\dot{x} = -5 \sin t; \quad \dot{y} = 4 \cos t.$$

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_0^{\pi/2} y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} 4 \sin t \sqrt{25 \sin^2 t + 16 \cos^2 t} dt = \\ &= 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{25(1 - \cos^2 t) + 16 \cos^2 t} dt = \\ &= 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{25 - 9 \cos^2 t} dt = 8\pi \int_0^{\pi/2} 5 \sin t \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cos t}{5} \right)^2} dt. \end{aligned}$$

Most legyen $u = \frac{3 \cos t}{5}$; ekkor $du = -\frac{3}{5} \sin t dt$. Ennek megfelelően alakítjuk át az integrandust.

$$\begin{aligned} F_x &= 40\pi \left(-\frac{5}{3} \right) \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{3}{5} \sin t \right) \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cos t}{5} \right)^2} dt = \\ &= -\frac{200\pi}{3} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 - u^2} du. \end{aligned}$$

Ismét helyettesítünk. Legyen $u = \sin z$, ekkor $du = \cos z dz$.

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{200\pi}{3} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 - \sin^2 z} \cos z dz = \\ &= -\frac{200\pi}{3} \int_{z_1}^{z_2} \cos^2 z dz = -\frac{200\pi}{3} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos 2z + 1}{2} dz = \\ &= -\frac{100\pi}{3} \int_{z_1}^{z_2} (\cos 2z + 1) dz = -\frac{100\pi}{3} \left[\frac{\sin 2z}{2} + z \right]_{z_1}^{z_2} = \\ &= -\frac{100\pi}{3} [\sin z \cos z + z]_{z_1}^{z_2}. \end{aligned}$$

$$z = \arcsin u = \arcsin \frac{3}{5} \cos t,$$

$$\text{ha } t=0, \text{ akkor } \cos t=1 \text{ és } z_1 = \arcsin \frac{3}{5} = \arcsin 0,6 \approx 0,645 \text{ (radián);}$$

$$\sin z_1 = \frac{3}{5} \text{ és } \cos z_1 = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5},$$

$$\text{ha } t=\frac{\pi}{2}, \text{ akkor } \cos t=0, z_2 = \arcsin 0=0; \sin z_2=0, \cos z_2=1.$$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{100\pi}{3} \left[\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 0,645 \right] = \frac{100\pi}{3} \left(\frac{12}{25} + 0,645 \right) = \\ &= \frac{100\pi}{3} (0,48 + 0,645) = \frac{100\pi \cdot 1,125}{3} \approx 118 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

14. Határozzuk meg az $x=2t^2$, $y=3t+1$ paraméteres egyenletrendszerrel adott parabola $t_1=1$ és $t_2=3$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívnek X -tengely körüli forgatásakor keletkező felület felszínét!

$$x=2t^2; \quad y=3t+1.$$

$$\dot{x}=4t; \quad \dot{y}=3.$$

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_1^3 y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2\pi \int_1^3 (3t+1) \sqrt{16t^2+9} dt = \\ &= 2\pi \int_1^3 3t \sqrt{16t^2+9} dt + 2\pi \int_1^3 \sqrt{16t^2+9} dt = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

A két integrált külön-külön számítjuk ki.

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi \int_1^3 3t \sqrt{16t^2+9} dt = \frac{6\pi}{32} \int_1^3 32t (16t^2+9)^{\frac{1}{2}} dt = \\ &= \frac{3\pi}{16} \left[\frac{2}{3} (16t^2+9)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{\pi}{8} (\sqrt{153} - \sqrt{25}) = \\ &= \frac{\pi}{8} (153\sqrt{153} - 125) \approx \frac{\pi}{8} (153 \cdot 12,4 - 125) \approx \frac{\pi \cdot 1775}{8} \approx 695. \end{aligned}$$

$$I_2 = 2\pi \int_1^3 \sqrt{16t^2+9} dt = 2\pi \int_1^3 3 \sqrt{\frac{16t^2}{9} + 1} dt.$$

A $\frac{4t}{3} = \text{sh } u$ függvényt helyettesítjük.

$$t = \frac{3}{4} \text{sh } u; \quad dt = \frac{3}{4} \text{ch } u du.$$

Az új határokat csak jelöljük:

$$\begin{aligned} I_2 &= 6\pi \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\text{sh}^2 u + 1} \frac{3}{4} \text{ch } u du = \frac{9\pi}{2} \int_{u_1}^{u_2} \text{ch}^2 u du = \\ &= \frac{9\pi}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\text{ch } 2u + 1}{2} du = \frac{9\pi}{4} \int_{u_1}^{u_2} (\text{ch } 2u + 1) du = \\ &= \frac{9\pi}{4} \left[\frac{\text{sh } 2u}{2} + u \right]_{u_1}^{u_2} = \frac{9\pi}{4} [\text{sh } u \text{ch } u + u]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

Mivel $u = \text{arsh } \frac{4}{3}t = \ln \left| \frac{4}{3}t + \sqrt{\frac{16}{9}t^2 + 1} \right|$, tehát $t_1 = 1$ -re

$$\begin{aligned} u_1 &= \ln \left(\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{16}{9} + 1} \right) = \ln \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{3} \right) = \ln 3 \approx 1,1; \quad \text{sh } u_1 = \frac{4}{3}; \quad \text{ch } u_1 = \frac{5}{3}. \\ t_2 = 3\text{-ra pedig } u_2 &= \ln (4 + \sqrt{16+1}) \approx \ln 8,12 \approx 2,1; \quad \text{sh } u_2 = 4; \quad \text{ch } u_2 = \\ &= \sqrt{17} \approx 4,12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{9\pi}{4} [\text{sh } u \text{ch } u + u]_{u_1}^{u_2} = \frac{9\pi}{4} \left(4 \cdot \sqrt{17} + 2,1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{3} - 1,1 \right) \approx \\ &\approx 7,06(16,5 + 2,1 - 2,22 - 1,1) = 7,06(18,6 - 3,32) = \\ &= 7,06 \cdot 15,28 \approx 108. \end{aligned}$$

Így a keresett felszín

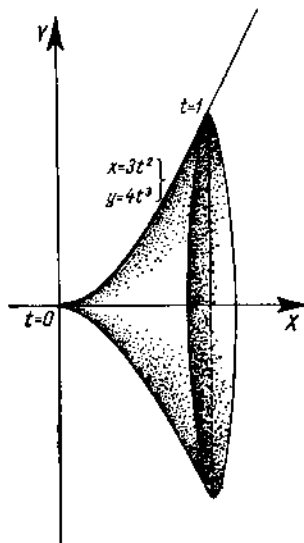
$$F_x = I_1 + I_2 = 695 + 108 = 803 \text{ területegység.}$$

15. Határozzuk meg az $x=3t^2$, $y=4t^2$ egyenletrendszerrel adott görbe $t_1=0$ és $t_2=1$ paraméterértékekkel meghatározott ívnek X -tengely körüli forgatásakor keletkező forgásfelület felszínét (60. ábra)!

$$x=3t^2; \quad y=4t^2.$$

$$\dot{x}=6t; \quad \dot{y}=8t.$$

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_0^1 y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2\pi \int_0^1 4t^2 \sqrt{36t^2 + 64t^2} dt = \\ &= 48\pi \int_0^1 t^2 \sqrt{1+4t^2} dt. \end{aligned}$$



60. ábra

Legyen $2t = \operatorname{sh} u$; $t = \frac{1}{2} \operatorname{sh} u$; $dt = \frac{1}{2} \operatorname{ch} u du$. Ekkor

$$\begin{aligned} F_x &= 48\pi \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{16} \operatorname{sh}^4 u \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ch} u du = \\ &= \frac{3\pi}{2} \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh}^4 u \operatorname{ch}^3 u du = \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} 4 \operatorname{sh}^3 u \operatorname{ch}^3 u \operatorname{sh} u du = \\ &= \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} \operatorname{sh}^3 u \operatorname{sh} u du. \end{aligned}$$

Átírjuk az exponenciális alakra, elvégezzük a kijelölt műveleteket és integrálunk!

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{e^{3u} - e^{-3u}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)^3 du = \\ &= \frac{3\pi}{8} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{4u} - 2 + e^{-4u}}{4} \cdot \frac{e^{3u} - 2 + e^{-3u}}{4} du = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3\pi}{128} \int_{u_1}^{u_2} (e^{6u} - 2e^{3u} + e^{-3u} - 2e^{4u} + 4 - 2e^{-4u} + e^{3u} - 2e^{-3u} + e^{-6u}) du = \\ &= \frac{3\pi}{128} \int_{u_1}^{u_2} (e^{6u} - 2e^{4u} - e^{3u} + 4 - e^{-3u} - 2e^{-4u} + e^{-6u}) du = \\ &= \frac{3\pi}{128} \left[\frac{e^{6u}}{6} - \frac{2e^{4u}}{4} - \frac{e^{3u}}{3} + 4u + \frac{e^{-3u}}{3} + \frac{2e^{-4u}}{4} - \frac{e^{-6u}}{6} \right]_{u_1}^{u_2} = \\ &= \frac{3\pi}{128 \cdot 12} [2e^{6u} - 6e^{4u} - 6e^{3u} + 48u + 6e^{-3u} + 6e^{-4u} - 2e^{-6u}]_{u_1}^{u_2}. \end{aligned}$$

Mivel $2t = \operatorname{sh} u$, ezért $u = \operatorname{arsh} 2t = \ln(2t + \sqrt{4t^2 + 1})$;

ha $t_1 = 0$, akkor $u_1 = \ln 1 = 0$;

ha $t_2 = 1$, akkor $u_2 = \ln(2 + \sqrt{5}) \approx \ln(2 + 2,24) = \ln 4,24 \approx 1,44$.

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\pi}{512} \left[2(2 + \sqrt{5})^6 - 6(2 + \sqrt{5})^4 - 6(2 + \sqrt{5})^3 + 48 \cdot 1,44 + \right. \\ &\quad \left. + 6 \frac{6}{(2 + \sqrt{5})^3} + \frac{6}{(2 + \sqrt{5})^4} - \frac{2}{(2 + \sqrt{5})^6} - \right. \\ &\quad \left. - 2 + 6 + 6 - 0 - 6 - 6 + 2 \right]. \end{aligned}$$

Részletszámítások: $(2 + \sqrt{5})^6 \approx 4,24^6 \approx 5800$; $(2 + \sqrt{5})^4 \approx 4,24^4 \approx 325$;

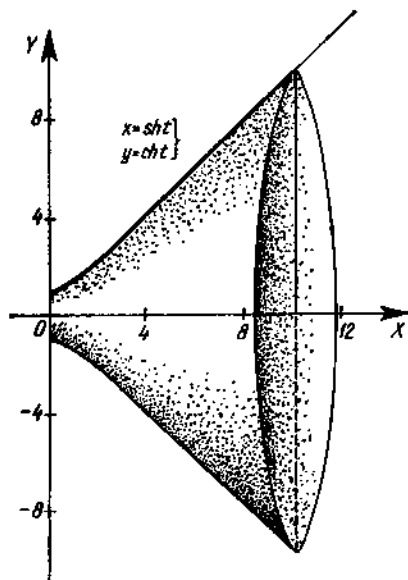
$(2 + \sqrt{5})^2 \approx 4,24^2 \approx 18$; $\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^3} \approx 0$; $\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^4} \approx 0$; $\frac{1}{(2 + \sqrt{5})^6} \approx 0$.

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\pi}{512} (2 \cdot 5800 - 6 \cdot 325 - 6 \cdot 18 + 48 \cdot 1,44) \approx \\ &\approx 0,0061 (11600 - 1950 - 108 + 69,2) = \\ &= 0,0061 (11669,2 - 2058) \approx 0,0061 (11670 - 2058) = \\ &= 0,0061 \cdot 9612 \approx 58,5 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

16. Legyen adott az $x=\text{sh } t$, $y=\text{ch } t$ függvény. Forgassuk a $t_1=0$ és $t_2=3$ paraméterértékekhez tartozó pontjai által határolt ívét az X -tengely körül! Határozzuk meg az így keletkező forgásfelület felszínét (61. ábra)!

$$x=\text{sh } t; \quad y=\text{ch } t.$$

$$\dot{x}=\text{ch } t; \quad \dot{y}=\text{sh } t.$$



61. ábra

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_0^3 y \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2\pi \int_0^3 \text{ch } t \sqrt{\text{ch}^2 t + \text{sh}^2 t} dt = \\ &= 2\pi \int_0^3 \text{ch } t \sqrt{1 + 2 \text{sh}^2 t} dt. \end{aligned}$$

Legyen $u = \sqrt{2} \text{sh } t$, $du = \sqrt{2} \text{ch } t dt$. Így

$$F_x = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^3 \sqrt{2} \text{ch } t \sqrt{1 + 2 \text{sh}^2 t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1 + u^2} du.$$

Újabb helyettesítéssel az irracionális integrandust átalakítjuk $\text{sh } z$ és $\text{ch } z$ racionális kifejezéssé,

$$u = \text{sh } z; \quad du = \text{ch } z dz.$$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + \text{sh}^2 z} \text{ch } z dz = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_{z_1}^{z_2} \text{ch}^2 z dz = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\text{ch } 2z + 1}{2} dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_{z_1}^{z_2} (\text{ch } 2z + 1) dz = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{sh } 2z}{2} + z \right]_{z_1}^{z_2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} [\text{sh } z \text{ch } z + z]_{z_1}^{z_2}. \end{aligned}$$

Most meghatározzuk z_1 és z_2 értékét. Az eredeti határok: $t_1=0$ és $t_2=3$.

Mivel $u = \sqrt{2} \text{sh } t$, ezért $u_1 = \sqrt{2} \text{sh } 0 = 0$ és $u_2 = \sqrt{2} \text{sh } 3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (e^3 - e^{-3}) \approx \frac{\sqrt{2}}{2} \left(20 - \frac{1}{20} \right) \approx 10\sqrt{2} \approx 14,1$.

$$u = \text{sh } z; \quad \text{ebből } z = \text{ar sh } u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}),$$

ezért $z_1 = \ln 1 = 0$ és $z_2 = \ln(10\sqrt{2} + \sqrt{201}) \approx \ln 20\sqrt{2} \approx \ln 28,2 \approx 3,34$.

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} [\text{sh } z \text{ch } z + z]_0^{3,34} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{\text{sh } 2z}{2} + z \right]_0^{3,34} = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{\text{sh } 6,68}{2} + 3,34 - \text{sh } 0 - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{e^{6,68} - e^{-6,68}}{4} + 3,34 \right) \approx \\ &\approx \frac{\pi}{2} \left(\frac{750 - \frac{1}{750}}{4} + 3,34 \right) = \frac{3,14 \cdot 1,41}{2} \cdot 190,84 \approx 422 \text{ területegység.} \end{aligned}$$

4. Súlypontszámítás

Az $y=f(x)$ egyenlettel megadható görbe a és b abszcisszájú pontok által határolt ívének súlypontját $S(x_s, y_s)$ -sel jelölve,

$$x_s = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}; \quad y_s = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}.$$

Ha egy sík lemezt határoló vonalak: az $y=f(x)$ függvény görbéje, az a és b abszcisszájú pontokhoz tartozó ordináták, valamint az X -tengely, akkor a lemez P_s súlypontjának koordinátái:

$$x_s = \frac{\int_a^b xy \, dx}{\int_a^b y \, dx}, \quad \text{és} \quad y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 \, dx}{\int_a^b y \, dx}.$$

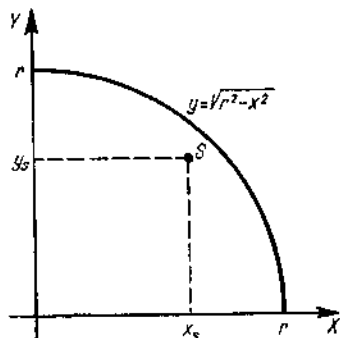
Ha az $y=f(x)$ függvény görbét az X -tengely körül forgatjuk, akkor egy olyan forgásfelületet kapunk, amely által határolt forgástest súlypontja a szimmetria miatt az X -tengelyre esik, tehát $y_s=0$. A súlypont abszcisszája:

$$x_s = \frac{\int_a^b xy^2 \, dx}{\int_a^b y^2 \, dx}.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg a negyedkörív súlypontját (62. ábra)!

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}; \quad y' = \frac{1}{2} (r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$



62. ábra

Az integrálás határai: 0 és r . Az egyes integrálokat külön-külön számítjuk ki.

$$\begin{aligned} \int_0^r x \sqrt{1+y'^2} \, dx &= \int_0^r x \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \\ &= \int_0^r x \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \, dx = \int_0^r \frac{rx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = \\ &= [-r \sqrt{r^2 - x^2}]_0^r = 0 + r^2 = r^2. \\ \int_0^r \sqrt{1+y'^2} \, dx &= \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} \, dx = \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \, dx = \\ &= \left[r \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = r(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{r\pi}{2}. \end{aligned}$$

A súlypont abszcisszája tehát:

$$x_s = \frac{\int_0^r x \sqrt{1+y'^2} \, dx}{\int_0^r \sqrt{1+y'^2} \, dx} = \frac{r^2}{\frac{r\pi}{2}} = \frac{2r}{\pi}.$$

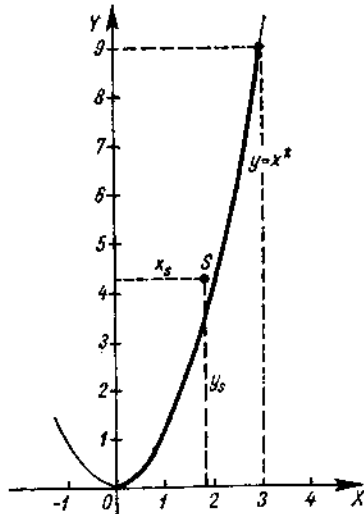
A szimmetria miatt a súlypont ordinátája is ennyi, vagyis $y_s = \frac{2r}{\pi}$.

2. Határozzuk meg az $y=x^2$ függvény $0 \leq x \leq 3$ szakasz felett levő ívének súlypontját (63. ábra)! Először most a nevező értékét határozzuk meg:

$$\int_0^3 \sqrt{1+y'^2} \, dx = \int_0^3 \sqrt{1+4x^2} \, dx.$$

Az integrandust helyettesítéssel alakítjuk át.

$$2x = \operatorname{sh} t; \quad 2dx = \operatorname{ch} t \, dt; \quad dx = \frac{\operatorname{ch} t}{2} \, dt.$$



63. ábra

Az új határokat csak jelöljük.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{1+4x^2} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \cdot \frac{\operatorname{ch} t}{2} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{ch}^2 t}{2} dt = \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{ch} 2t + 1) dt = \frac{1}{4} \left[\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} + t \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Most visszatérünk az x változóra.

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \operatorname{sh} t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = 2 \cdot 2x \sqrt{1+4x^2};$$

$$t = \operatorname{ar} \operatorname{sh} 2x = \ln(2x + \sqrt{1+4x^2}).$$

Ezen átalakításokat figyelembe véve a keresett integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{1+4x^2} dx &= \frac{1}{4} [2x \sqrt{1+4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})]_0^3 = \\ &= \frac{1}{4} [6\sqrt{37} + \ln(6 + \sqrt{37}) - 0 - 0] \approx \frac{1}{4} [6 \cdot 6,1 + \ln(6 + 6,1)] = \\ &= \frac{1}{4} (36,6 + \ln 12,1) \approx \frac{1}{4} (36,6 + 2,5) \approx 9,8. \end{aligned}$$

A súlypont koordinátáinak kiszámításához még két integrál értékét kell kiszámítanunk. Az egyik

$$\int_0^3 x \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^3 x \sqrt{1+4x^2} dx = \int_0^3 x(1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Az integrandus könnyen $f''(x)f'(x)$ alakúvá alakítható:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_0^3 8x(1+4x^2)^{\frac{1}{2}} dx &= \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} [(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = \\ &= \frac{1}{12} (\sqrt{37^3} - 1) \approx \frac{224}{12} \approx 18,65. \end{aligned}$$

A másik szükséges integrál:

$$\int_0^3 y \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^3 x^2 \sqrt{1+4x^2} dx.$$

Az integrált helyettesítéssel számíthatjuk ki:

Legyen $2x = \operatorname{sh} t$; ekkor $dx = \frac{\operatorname{ch} t}{2} dt$. Az új határokat egyelőre csak jelöljük.

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2 \sqrt{1+4x^2} dx &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{sh}^2 t}{4} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \cdot \frac{\operatorname{ch} t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{8} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^3 t dt = \frac{1}{8} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{sh}^2 2t}{4} dt = \\ &= \frac{1}{32} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\operatorname{ch} 4t - 1}{2} dt = \frac{1}{64} \left[\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

Most meghatározzuk t_1 és t_2 értékét, majd behelyettesítünk.

Mivel $2x = \operatorname{sh} t$, ezért $t = \operatorname{ar} \operatorname{sh} 2x = \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$. Ha $x_1 = 0$, akkor $t_1 = \ln 1 = 0$, ha $x_2 = 3$, akkor $t_2 = \ln(6 + \sqrt{37}) \approx \ln 12,08 \approx 2,48$. Így

$$\begin{aligned} \frac{1}{64} \left[\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t \right]_{t_1}^{t_2} &= \frac{1}{64} \left[\frac{e^{4t} - e^{-4t}}{8} - t \right]_0^{\ln(6 + \sqrt{37})} = \\ &= \frac{1}{64} \left[\frac{(6 + \sqrt{37})^4 - 1}{(6 + \sqrt{37})^4} - \ln(6 + \sqrt{37}) - 0 + 0 \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{64} \left[\frac{12^4 - 1}{8} - 2,48 \right] \approx \frac{12^4}{64 \cdot 8} = \frac{3^4 \cdot 4^4}{4^4 \cdot 2} = \frac{81}{2} = 40,5. \end{aligned}$$

A vonaldarab súlypontjának abszcisszája tehát

$$x_s = \frac{\int_0^3 x \sqrt{1+4x^2} dx}{\int_0^3 \sqrt{1+4x^2} dx} = \frac{18,65}{9,8} = 1,91.$$

A súlypont y ordinátája:

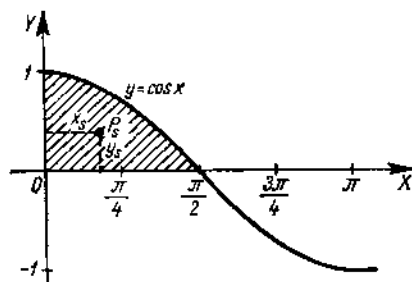
$$y_s = \frac{\int_0^3 y \sqrt{1+y^2} dy}{\int_0^3 \sqrt{1+4x^2} dx} = \frac{40,5}{9,8} \approx 4,13.$$

Tehát a súlypont: $S(1,91; 4,13)$.

3. Határozzuk meg az $y = \cos x$ függvény $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumbeli görbeszakasza, valamint az O abszcisszájú ponthoz tartozó ordinátát és az X -tengely által határolt lemez súlypontját (64. ábra):

$$x_s = \frac{\int_0^{\pi/2} x \cos x dx}{\int_0^{\pi/2} \cos x dx} = ?$$

A számláló értékét parciális integrálással határozzuk meg.



64. ábra

Legyen $u = x$, és $v' = \cos x$; így $u' = 1$, és $v = \sin x$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos x dx &= [x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \\ &= [x \sin x]_0^{\pi/2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 0 + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

A nevező értéke:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Tehát a súlypont abszcisszája:

$$x_s = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{1} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 1,57 - 1 = 0,57.$$

A súlypont ordinátája:

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^3 x dx}{\int_0^{\pi/2} \cos x dx} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} =$$

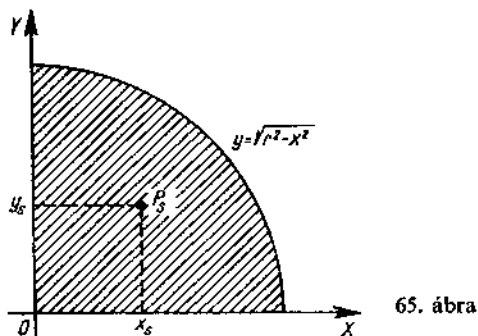
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{8} \approx 0,393.$$

Vagyis a súlypont $P_s(0,57; 0,393)$.

4. Határozzuk meg a negyedkörlemez súlypontjának koordinátáit (65. ábra)!

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

A szimmetria miatt a súlypont az $y=x$ (45° -os) egyenesen van, ezért koordinátái megegyeznek. Elegendő tehát csak az egyiket meghatározni, mégpedig az egyszerűbb módon számíthatót.



65. ábra

A súlypont ordinátája:

$$y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx}{\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx} = ?$$

$$\frac{1}{2} \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{2} \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{r^3}{3}.$$

Mivel $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ éppen a körnegyed területe, vagyis $\frac{r^2 \pi}{4}$, ezért

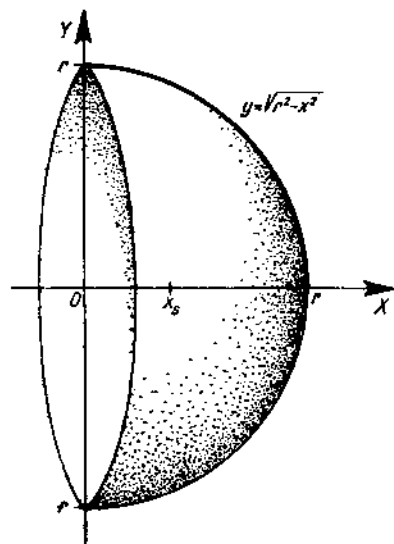
$$y_s = \frac{\frac{r^3}{3}}{\frac{r^2 \pi}{4}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Tehát a súlypont $P_s \left(\frac{4r}{3\pi}; \frac{4r}{3\pi} \right)$.

5. Határozzuk meg a félgömb súlypontját (66. ábra)! Az origó közép-pontú félkör egyenlete: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

$$x_s = \frac{\int_0^r x(r^2 - x^2) dx}{\int_0^r (r^2 - x^2) dx};$$

$$\int_0^r x(r^2 - x^2) dx = \int_0^r (r^2 x - x^3) dx = \left[r^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^r = \frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} = \frac{r^4}{4};$$

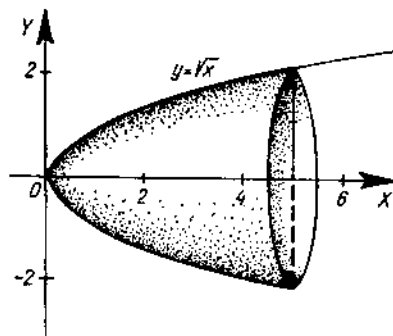


66. ábra

$$\int_0^r (r^3 - x^3) dx = \left[r^3 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = r^3 - \frac{r^3}{3} = \frac{2r^3}{3}.$$

$$x_s = \frac{\frac{r^4}{4}}{\frac{2r^3}{3}} = \frac{3r}{8}.$$

6. Határozzuk meg az $y = \sqrt{x}$ függvény $0 \leq x \leq 5$ szakaszának X -tengely körüli forgatásakor keletkező test súlypontját (67. ábra)!



67. ábra

A súlypont abszcisszája:

$$x_s = \frac{\int_0^5 x x dx}{\int_0^5 x dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^5}{\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5} = \frac{\frac{125}{3}}{\frac{25}{2}} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}.$$

7. Határozzuk meg az $y = \sin x$ függvény $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ szakaszának X -tengely körüli forgatásával kapható test súlypontját!

$$x_s = \frac{\int_0^{\pi/2} x \sin^3 x dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx}.$$

A számláló értékének kiszámítása:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin^3 x dx &= \int_0^{\pi/2} x \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x}{2} - \frac{x \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx. \end{aligned}$$

A második integrál értékét parciális integrálással számítjuk ki.

Legyen $u = x$, és $v' = \cos 2x$, vagyis $u' = 1$, és $v = \frac{1}{2} \sin 2x$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx &= \left[\frac{x}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2x dx = \\ &= (0 - 0) - \left[-\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\cos \pi}{4} - \frac{\cos 0}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A számláló tehát

$$\int_0^{\pi/2} x \sin^3 x dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4},$$

a nevező pedig

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A súlypont abszcisszája

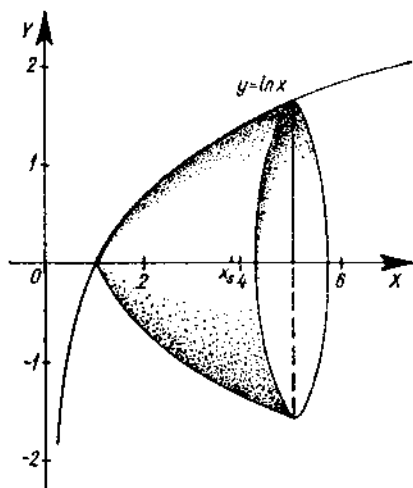
$$x_s = \frac{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 4}{4\pi} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \approx 0,785 + 0,318 = 1,103.$$

8. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény $1 \leq x \leq 5$ ívének X -tengely körüli forgatásával keletkező forgástest súlypontját (68. ábra)!

$$x_s = \frac{\int_1^5 x \ln^2 x \, dx}{\int_1^5 \ln^2 x \, dx}.$$

$$\int_1^5 x \ln^2 x \, dx = ? \text{ Az integrált a parciális integrálás módszerével}$$

határozzuk meg.



68. ábra

$$\text{Legyen } u = \ln^2 x \text{ és } v' = x, \text{ vagyis } u' = \frac{2 \ln x}{x} \text{ és } v = \frac{x^2}{2}.$$

$$\int_1^5 x \ln^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x \right]_1^5 - \int_1^5 x \ln x \, dx.$$

$$\text{Ismét parciálisan integrálunk, legyen most } u_1 = \ln x \text{ és } v_1' = x, \text{ vagyis } u_1' = \frac{1}{x} \text{ és } v_1 = \frac{x^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int_1^5 x \ln^2 x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x \right]_1^5 - \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^5 + \int_1^5 \frac{x}{2} \, dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x \right]_1^5 - \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^5 + \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^5 = \\ &= 12,5 \ln^2 5 - 0 - 12,5 \ln 5 + 0 + 6,25 - 0,25 = \\ &= 12,5 (\ln^2 5 - \ln 5) + 6 \approx 12,5 (1,61^2 - 1,61) + 6 \approx \\ &\approx 12,5 (2,6 - 1,6) + 6 = 18,5. \end{aligned}$$

A nevező kiszámítása:

$$\int_1^5 \ln^2 x \, dx = \int_1^5 1 \ln^2 x \, dx.$$

$$\text{Legyen } u' = 1; \text{ és } v = \ln^2 x; \text{ tehát } u = x \text{ és } v' = \frac{2 \ln x}{x}.$$

$$\int_1^5 1 \ln^2 x \, dx = [x \ln^2 x]_1^5 - \int_1^5 2 \ln x \, dx.$$

$$\text{Ismét parciálisan integrálunk: } u_1' = 2; u_1 = 2x; v_1 = \ln x; v_1' = \frac{1}{x}.$$

$$\int_1^5 2 \ln x \, dx = [2x \ln x]_1^5 - \int_1^5 2 \, dx = [2x \ln x]_1^5 - [2x]_1^5.$$

Így

$$\begin{aligned} \int_1^5 \ln^2 x \, dx &= [x \ln^2 x]_1^5 - [2x \ln x]_1^5 + [2x]_1^5 = \\ &= (5 \ln^2 5 - 0) - (10 \ln 5 - 0) + (10 - 2) \approx \\ &\approx 5 \cdot 1,61^2 - 10 \cdot 1,61 + 8 \approx 5 \cdot 2,6 - 16,1 + 8 = 21 - 16,1 = 4,9. \end{aligned}$$

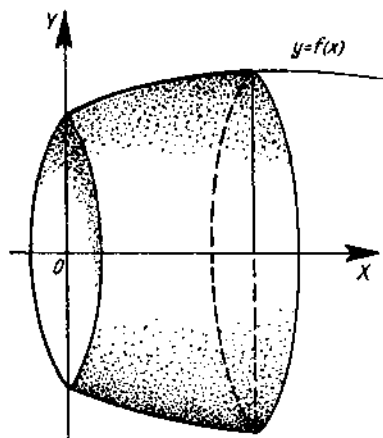
A keletkező forgástest súlypontjának x koordinátája tehát

$$x_s \approx \frac{18,5}{4,9} \approx 3,78.$$

5. Térfogatszámítás

Ha egy test X -tengelyre merőleges metszetének területe mint az x abszcissza függvénye $T(x)$, akkor a test $[a, b]$ szakaszba eső darabjának térfogata

$$V(a, b) = \int_a^b T(x) dx.$$



69. ábra

Ha a test valamely $y=f(x)$ görbe x_1 és x_2 abszcisszáik által határolt ívének X -tengely körüli forgatása révén keletkezik (69. ábra), vagyis forgástest, akkor — tekintve, hogy keresztmetszete minden x -re $f(x)$ sugarú kör —

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} f^2(x) dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx.$$

Ha az $y=f(x)$ függvény görbét az Y -tengely körül forgatjuk, akkor az így keletkező forgástest y_1 és y_2 ordinátájú pontok által határolt részének térfogata:

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y) dy,$$

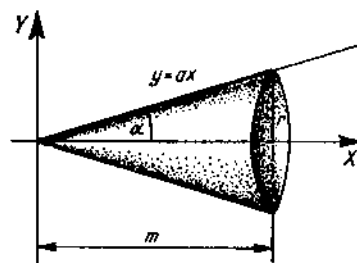
ahol $x=x(y)$ az $y=f(x)$ függvény inverze.

Ha a függvény $x=x(t)$, $y=y(t)$ paraméteres alakban adott, akkor a t_1 és t_2 paraméterértékek által határolt görbeszakasz X -tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát az alábbi integrál adja:

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t) \dot{x}(t) dt.$$

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az $y=ax$ egyenes X -tengely körüli forgatásával nyert m magasságú kúp térfogatát (70. ábra)!



70. ábra

Mivel $a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{m}$, tehát

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^m \frac{r^2}{m^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{m^2} \int_0^m x^2 dx = \frac{r^2 \pi}{m^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^m = \\ &= \frac{r^2 \pi}{m^2} \left(\frac{m^3}{3} - 0 \right) = \frac{r^2 \pi m}{3}. \end{aligned}$$

Valóban a kúp térfogatképletét kaptuk!

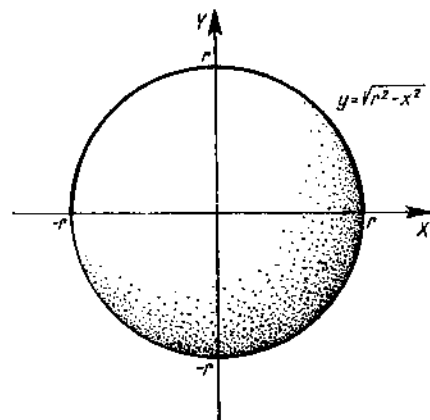
2. Határozzuk meg az $y=\sin x$ függvény görbéjének X -tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha a határok 0 és π .

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ egyenletű félkör X -tengely körüli forgatása révén keletkező gömb térfogatát (71. ábra)!

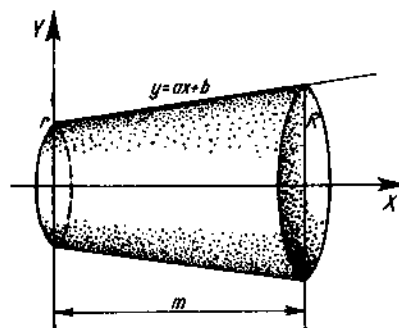
$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^r = \\ &= \pi \left(r^2 - \frac{r^3}{3} + r^2 - \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4r^3 \pi}{3}. \end{aligned}$$

Mint látjuk, valóban a gömb térfogatképlete adódott.



71. ábra

4. Határozzuk meg az $y = ax + b$ egyenes X -tengely körüli forgatásakor a $[0, m]$ szakaszon keletkező csanakúp térfogatát (72. ábra)!



72. ábra

A csanakúp R sugarú alapkörére $x = m$, tehát $R = am + b$; r sugarú fedőkörére $x = 0$, tehát $r = b$; ezért $a = \frac{R-r}{m}$ és így

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^m y^2 dx = \pi \int_0^m \left(\frac{R-r}{m} x + r \right)^2 dx = \\ &= \pi \left[\frac{m}{R-r} \frac{\left(\frac{R-r}{m} x + r \right)^3}{3} \right]_0^m = \frac{m\pi}{3(R-r)} \left[\left(\frac{R-r}{m} m + r \right)^3 - r^3 \right] = \\ &= \frac{m\pi}{3(R-r)} (R^3 - r^3) = \frac{m\pi}{3(R-r)} (R-r)(R^2 + Rr + r^2) = \\ &= \frac{m\pi}{3} (R^2 + Rr + r^2). \end{aligned}$$

5. Határozzuk meg az $y = \operatorname{sh} x$ függvény X -tengely körüli forgatásakor a $0 \leq x \leq 4$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát!

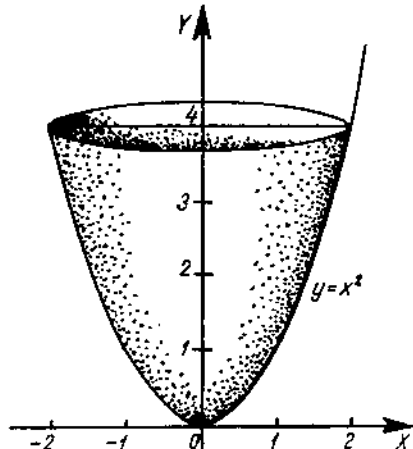
$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^4 \operatorname{sh}^2 x dx = \pi \int_0^4 \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{2} - x \right]_0^4 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} 8}{2} - 4 - 0 \right) \approx \\ &\approx 1,57 \left(\frac{e^8 - e^{-8}}{4} - 4 \right) \approx 1,57 \left(\frac{3000 - \frac{1}{3000}}{4} - 4 \right) \approx \\ &\approx \frac{1,57 \cdot 3000}{4} \approx 1180. \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény X -tengely körüli forgatása révén a $0 \leq x \leq 5$ szakaszon keletkező test térfogatát!

$$V_x = \pi \int_0^5 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^5 = \pi(5^5 - 0) = 625\pi \approx 1960.$$

7. Határozzuk meg az $y = x^2$ függvény görbéjének Y -tengely körüli forgatása révén a $0 \leq y \leq 4$ szakaszon keletkező test térfogatát (73. ábra)!

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2(y) dy.$$



73. ábra

Az $x(y)$ jelölés szerint az x -et kell megadnunk mint az y függvényét. Példánkban $x = \sqrt{y}$ (ha az első negyedbe eső ágat választjuk).

$$V_y = \pi \int_0^4 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi(8 - 0) = 8\pi \approx 25,12 \text{ térfogategység.}$$

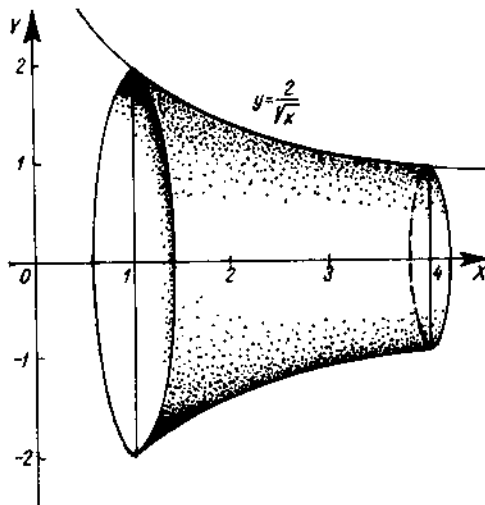
8. Határozzuk meg az $y = \operatorname{ch} x$ függvény görbéjének X -tengely körüli forgatásakor a $0 \leq x \leq 3$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát!

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 \operatorname{ch}^2 x dx = \pi \int_0^3 \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} dx = \\ &= \pi \left[\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2} \right]_0^3 = \pi \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 6 + \frac{3}{2} - 0 \right). \end{aligned}$$

$$\operatorname{sh} 6 = \frac{e^6 - e^{-6}}{2} \approx \frac{e^6}{2} = \frac{400}{2} = 200.$$

$$V_x = \pi \left(\frac{200}{4} + 1,5 \right) \approx 50\pi \approx 157 \text{ térfogategység.}$$

9. Határozzuk meg az $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ függvény görbéjének X -tengely körüli forgatásakor az $1 \leq x \leq 4$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát (74. ábra)!



74. ábra

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^4 y^2 dx = \pi \int_1^4 \frac{4}{x} dx = \pi [4 \ln x]_1^4 = \\ &= 4\pi(\ln 4 - \ln 1) \approx 4\pi \cdot 1,39 \approx 17,5 \text{ térfogategység.} \end{aligned}$$

10. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény X -tengely körüli forgatásakor keletkező forgástest $2 \leq x \leq 6$ abszcisszájú pontok által határolt részének térfogatát (75. ábra).

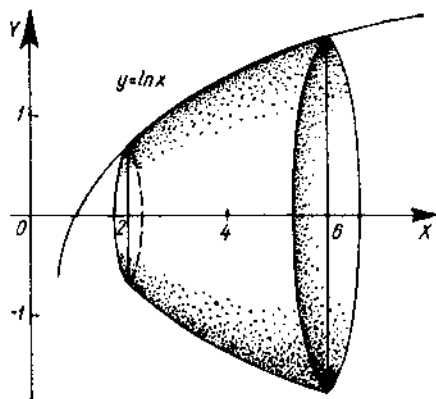
$$V_x = \pi \int_2^6 y^2 dx = \pi \int_2^6 \ln^2 x dx.$$

A feladatot a parciális integrálás módszerével oldjuk meg.

Legyen $u' = 1$ és $v = \ln^2 x$; ekkor $u = x$ és $v' = \frac{2 \ln x}{x}$.

$$V_x = \pi \int_2^6 1 \ln^2 x dx = \pi [x \ln^2 x]_2^6 - 2\pi \int_2^6 \ln x dx.$$

Az új integrált szintén parciális integrálással alakítjuk át.



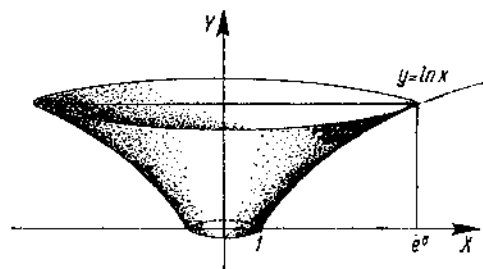
75. ábra

Legyen $u'_1 = 1$, $v_1 = \ln x$, ekkor $u_1 = x$ és $v'_1 = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi [x \ln^2 x]_2^6 - 2\pi \left\{ [x \ln x]_2^6 - 2 \int_2^6 dx \right\} = \\
 &= \pi [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_2^6 = \\
 &= \pi (6 \ln^2 6 - 12 \ln 6 + 12 - 2 \ln^2 2 + 4 \ln 2 - 4) \approx \\
 &\approx \pi (6 \cdot 1,79^2 - 2 \cdot 0,693^2 - 12 \cdot 1,79 + 4 \cdot 0,693 + 8) \approx \\
 &\approx \pi (6 \cdot 3,2 - 2 \cdot 0,48 - 21,5 + 2,77 + 8) = \\
 &= \pi (19,2 - 0,96 - 21,5 + 2,77 + 8) = \pi (29,97 - 22,46) \approx \\
 &\approx 7,51 \cdot 3,14 \approx 23,6 \text{ térfogategység.}
 \end{aligned}$$

11. Határozzuk meg az $y = \ln x$ függvény görbéjének Y -tengely körüli forgatásakor a 0 és 6 ordináták között keletkező test térfogatát (76. ábra)!

$$V_y = \pi \int_0^6 x^2 dy.$$



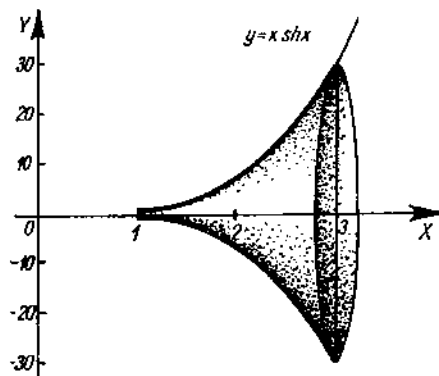
76. ábra

Az $y = \ln x$ függvényből $x = e^y$.

$$\begin{aligned}
 V_y &= \pi \int_0^6 e^{2y} dy = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} \right]_0^6 = \frac{\pi}{2} (e^{12} - e^0) \approx \\
 &\approx \frac{e^{12} \pi}{2} \approx \frac{22 \cdot 7,4 \cdot 10^4 \pi}{2} \approx 8,14 \cdot 3,14 \cdot 10^4 \approx \\
 &\approx 25,6 \cdot 10^4 = 2,56 \cdot 10^5 \text{ térfogategység.}
 \end{aligned}$$

12. Határozzuk meg az $y = x \operatorname{sh} x$ függvény görbéjének X -tengely körüli forgatásakor az $1 \leq x \leq 3$ szakaszon keletkező forgástest térfogatát (77. ábra)!

$$V_x = \pi \int_1^3 y^2 dx = \pi \int_1^3 x^2 \operatorname{sh}^2 x dx.$$



77. ábra

A hiperbolikus tényezőt linearizáljuk:

$$V_x = \pi \int_1^3 x^3 \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^3 (x^3 \operatorname{ch} 2x - x^3) dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^3 x^3 \operatorname{ch} 2x dx - \frac{\pi}{2} \int_1^3 x^3 dx.$$

A szorzatfüggvény integrálját határozzuk meg parciális integrálással:

$$\int_1^3 x^3 \operatorname{ch} 2x dx.$$

Legyen $u = x^3$ és $v' = \operatorname{ch} 2x$, ekkor $u' = 3x^2$ és $v = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}$.

$$\int_1^3 x^3 \operatorname{ch} 2x dx = \left[\frac{x^3}{2} \operatorname{sh} 2x \right]_1^3 - \int_1^3 x^2 \operatorname{sh} 2x dx.$$

Legyen most $u_1 = x$ és $v_1' = \operatorname{sh} 2x$, ekkor $u_1' = 1$ és $v_1 = \frac{\operatorname{ch} 2x}{2}$.

$$\int_1^3 x^2 \operatorname{sh} 2x dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{ch} 2x \right]_1^3 - \left\{ \left[\frac{x}{2} \operatorname{ch} 2x \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{\operatorname{ch} 2x}{2} dx \right\} =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{sh} 2x \right]_1^3 - \left[\frac{x}{2} \operatorname{ch} 2x \right]_1^3 + \left[\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x \right]_1^3 =$$

$$= \frac{9}{2} \operatorname{sh} 6 - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 - \frac{3}{2} \operatorname{ch} 6 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2 + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 6 - \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2 =$$

$$= \frac{19}{4} \operatorname{sh} 6 - \frac{3}{4} \operatorname{sh} 2 - \frac{3}{2} \operatorname{ch} 6 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2.$$

$$\operatorname{sh} 6 = \frac{e^6 - e^{-6}}{2} \approx \frac{400 - \frac{1}{400}}{2} \approx 200;$$

$$\operatorname{ch} 6 = \frac{e^6 + e^{-6}}{2} \approx \frac{400 + \frac{1}{400}}{2} \approx 200;$$

$$\operatorname{sh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx \frac{7,4 - \frac{1}{7,4}}{2} \approx \frac{7,4 - 0,135}{2} = 3,7 - 0,0675 \approx 3,633;$$

$$\operatorname{ch} 2 = \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \approx 3,7 + 0,0675 \approx 3,768.$$

$$\int_1^3 x^3 \operatorname{ch} 2x dx \approx \frac{19}{4} \cdot 200 - \frac{3}{4} \cdot 3,633 - \frac{3}{2} \cdot 200 + \frac{1}{2} \cdot 3,768 \approx$$

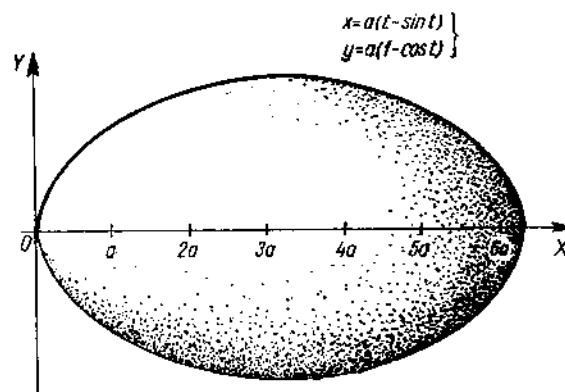
$$\approx 950 - 2,72 - 300 + 1,884 \approx 651,9 - 2,7 = 649,2.$$

A feladat megoldása:

$$V_x = \frac{\pi}{2} \cdot 649,2 - \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 \approx 1020 - 1,57 \left(9 - \frac{1}{3} \right) =$$

$$= 1020 - \frac{1,57 \cdot 28}{3} \approx 1020 - 14,7 = 1005,3 \text{ térfogategység.}$$

13. Forgassuk meg a cikloisvet az X -tengely körül, majd határozzuk meg az így keletkező forgástest térfogatát! A cikloisvet határoló pontok paraméterértékei: $t_1 = 0$ és $t_2 = 2\pi$ (78. ábra).



78. ábra

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t);$$

$$\dot{x} = a(1 - \cos t).$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t) dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= a^3 \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = ? \end{aligned}$$

Részletszámítások:

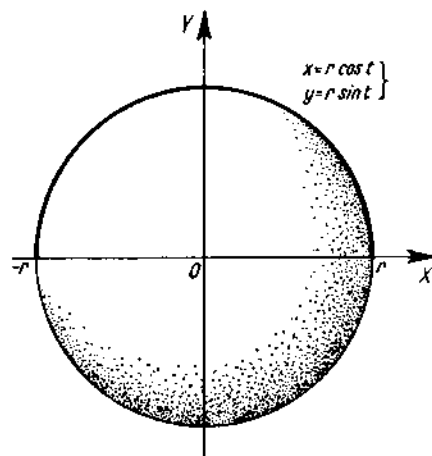
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} (2\pi + \frac{\sin 4\pi}{2} - 0) = \pi. \\ \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cos t dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) \cos t dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin^2 t \cos t) dt = \left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = \\ &= \sin 2\pi - \frac{\sin^3 2\pi}{3} - 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= a^3 \pi \{ [t - 3 \sin t]_0^{2\pi} + 3\pi \} = a^3 \pi (2\pi - 3 \sin 2\pi - 0 + 3\pi) = \\ &= 5a^3 \pi^2 \text{ térfogategység.} \end{aligned}$$

14. Határozzuk meg az $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ paraméteres alakban adott körív forgatásával keletkező gömb térfogatát (79. ábra)!

A határok π és 0 , mert így a görbén a pozitív X -tengely irányában megyünk végig.

$$\dot{x} = -r \sin t.$$



79. ábra

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\pi}^0 y^2 \dot{x} dt = \pi \int_{\pi}^0 r^2 \sin^2 t (-r \sin t) dt = \\ &= -\pi r^3 \int_{\pi}^0 \sin^3 t dt = \pi r^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt. \end{aligned}$$

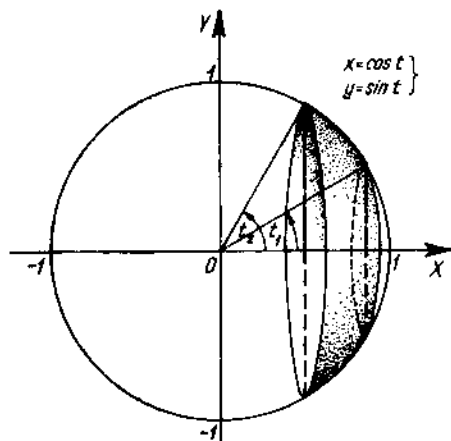
Felhasználjuk a következő linearizáló formulát:

$$\sin^3 t = \frac{1}{4} (3 \sin t - \sin 3t).$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi r^3}{4} \int_0^{\pi} (3 \sin t - \sin 3t) dt = \\ &= \frac{r^3 \pi}{4} \left[-3 \cos t + \frac{\cos 3t}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{r^3 \pi}{4} \left(3 - \frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{r^3 \pi}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{4r^3 \pi}{3}. \end{aligned}$$

Valóban a gömb térfogatképletét kaptuk.

15. Forgassuk meg az $x = \cos t$, $y = \sin t$, paraméteres alakban adott egységsugarú körív $t_1 = \frac{\pi}{6}$ és $t_2 = \frac{\pi}{3}$ paraméterű pontjai által határolt darabját az X -tengely körül! Számítsuk ki az így kapott gömbréteg térfogatát (80. ábra)!



80. ábra

$$x = \cos t; \quad y = \sin t; \quad \dot{x} = -\sin t.$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \dot{x} dt = \pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} (\sin^2 t) (-\sin t) dt = \\ &= -\pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^3 t dt. \end{aligned}$$

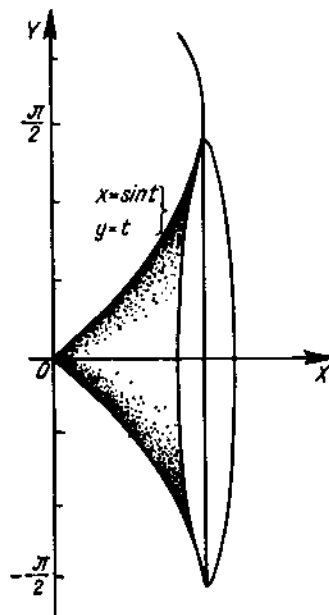
Az integrandus $\sin^3 t$. Most az előző példában alkalmazott linearizáló formula helyett (gyakorlásképpen) szorzattá alakítjuk az integrandust. Ekkor $\sin^3 t = \sin^2 t \sin t = (1 - \cos^2 t) \sin t$, így

$$\begin{aligned} V_x &= -\pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - \cos^2 t) \sin t dt = \\ &= \pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} (-\sin t) dt - \pi \int_{\pi/6}^{\pi/3} (-\cos^2 t) \sin t dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pi \left[\cos t \right]_{\pi/6}^{\pi/3} - \pi \left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \\ &= \pi \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{3} \left(\cos^3 \frac{\pi}{3} - \cos^3 \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= \pi (\cos 60^\circ - \cos 30^\circ) - \frac{\pi}{3} (\cos^3 60^\circ - \cos^3 30^\circ) \approx \\ &\approx \pi (0,5 - 0,866) - \frac{\pi}{3} (0,5^3 - 0,866^3) \approx \\ &\approx 3,14 (-0,366) - 1,05 (0,125 - 0,65) \approx -0,598 \text{ térfogategység.} \end{aligned}$$

Eredményül azért kaptunk negatív számot, mert t növekedésével az x csökken, és így integrálásirány nem az X -tengely pozitív irányával egyezett meg, hanem azzal ellentétes volt.

16. Mekkora az $x = \sin t$, $y = t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe X -tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogata, ha $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (81. ábra)?



81. ábra

(A görbe explicit egyenlete $y = \arcsin x$.)

$$V_x = \int_0^{\pi/2} y^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt.$$

Az integrált a parciális integrálás módszerével határozzuk meg. Legyen $u = t^2$ és $v' = \cos t$; vagyis $u' = 2t$; $v = \sin t$.

$$V_x = \pi \int_0^{\pi/2} t^2 \cos t dt = \pi [t^2 \sin t]_0^{\pi/2} - \pi \int_0^{\pi/2} 2t \sin t dt.$$

Ismét parciálisan integrálunk:

$$u_1 = 2t; \quad v'_1 = \sin t; \quad u'_1 = 2; \quad v_1 = -\cos t.$$

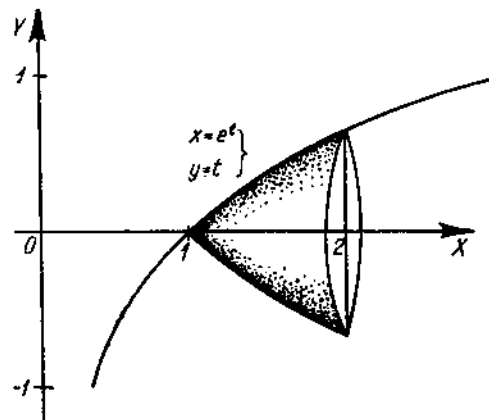
$$\begin{aligned} V_x &= \pi [t^2 \sin t]_0^{\pi/2} - \pi \left\{ [-2t \cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2(-\cos t) dt \right\} = \\ &= \pi [t^2 \sin t]_0^{\pi/2} + \pi [2t \cos t]_0^{\pi/2} - \pi [2 \sin t]_0^{\pi/2} = \\ &= \pi \left(\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) + \pi \left(\pi \cos \frac{\pi}{2} - 0 \right) - \pi \left(2 \sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{\pi^3}{4} - 2\pi \approx 1,47 \text{ térfogat egység.} \end{aligned}$$

17. Határozzuk meg az $x = e^t$, $y = t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott görbe X -tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, ha $1 \leq t \leq 2$ (82. ábra). (A t paramétert kiküszöbölve $y = \ln x$.)

$$V_x = \pi \int_1^2 y^2 \dot{x} dt = \pi \int_1^2 t^2 e^t dt.$$

Legyen $u = t^2$, $v' = e^t$, ekkor $u' = 2t$ és $v = e^t$.

$$V_x = \pi \int_1^2 t^2 e^t dt = \pi [t^2 e^t]_1^2 - \pi \int_1^2 2te^t dt.$$



82. ábra

Ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét:

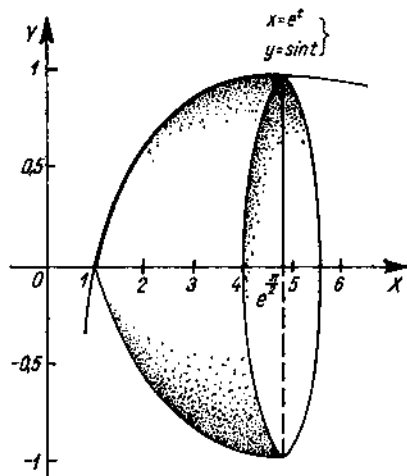
$$u_1 = 2t; \quad v'_1 = e^t; \quad u'_1 = 2; \quad v_1 = e^t.$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi [t^2 e^t]_1^2 - \pi \left\{ [2te^t]_1^2 - \int_1^2 2e^t dt \right\} = \\ &= \pi [t^2 e^t]_1^2 - \pi [2te^t]_1^2 + \pi [2e^t]_1^2 = \\ &= \pi (4e^2 - e - 4e^2 + 2e + 2e^2 - 2e) = \pi (2e^2 - e) \approx \\ &\approx 3,14(2 \cdot 7,4 - 2,72) = 3,14(14,8 - 2,72) = \\ &= 3,14 \cdot 12,08 \approx 37,8 \text{ térfogat egység.} \end{aligned}$$

18. Határozzuk meg az $x = e^t$, $y = \sin t$ paraméteres egyenletrendszerrel adott függvény görbéje X -tengely körüli forgatásával keletkező test térfogatát, a $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ tartományban (83. ábra)!

$$V_x = \pi \int_0^{\pi/2} y^2 \dot{x} dt = \pi \int_0^{\pi/2} (\sin^2 t) e^t dt = \pi \int_0^{\pi/2} e^t \frac{1 - \cos 2t}{2} dt.$$

$$V_x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} e^t dt - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t dt.$$



83. ábra

Az első integrál közvetlenül megkapható. A másodikat parciálisan integráljuk. Legyen $u = e^t$ és $v' = \cos 2t$; vagyis $u' = e^t$ és $v = \frac{1}{2} \sin 2t$.

$$\int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t \, dt = \left[\frac{e^t}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{e^t}{2} \sin 2t \, dt.$$

Legyen $u_1 = \frac{e^t}{2}$ és $v_1' = \sin 2t$, vagyis $u_1' = \frac{e^t}{2}$ és $v_1 = \frac{-\cos 2t}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t \, dt &= \left[\frac{e^t}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} - \left\{ \left[-\frac{e^t \cos 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{-e^t \cos 2t}{4} \, dt \right\} = \\ &= \left[\frac{e^t}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{e^t \cos 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t \, dt. \end{aligned}$$

Rendezve az azonosságot:

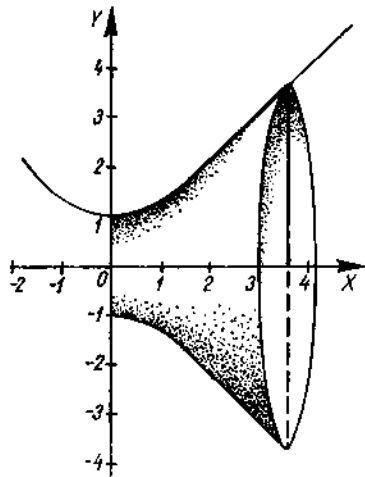
$$\begin{aligned} \frac{5}{4} \int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t \, dt &= \left[\frac{e^t \sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{e^t \cos 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{1}{2} e^{\pi/2} \sin \pi - 0 + \frac{1}{4} e^{\pi/2} \cos \pi - \frac{1}{4} e^0 \cos 0 \approx \\ &\approx \frac{1}{4} e^{1,57} (-1) - \frac{1}{4} \cdot 1 \approx -\frac{4,8}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{5,8}{4}. \\ \int_0^{\pi/2} e^t \cos 2t \, dt &= -\frac{5,8}{5} = -1,16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} e^t \, dt - \frac{\pi}{2} (-1,16) = \\ &= \frac{\pi}{2} [e^t]_0^{\pi/2} + \frac{1,16\pi}{2} = \frac{\pi}{2} (e^{1,57} - 1 + 1,16) \approx \\ &\approx 1,57(4,8 + 0,16) \approx 7,8 \text{ térfogategység.} \end{aligned}$$

19. Határozzuk meg az $x = \text{sh } t$ és $y = \text{ch } t$ egyenletrendszerrel adott hiperbola X -tengely körüli forgatásakor keletkező test térfogatát, ha $0 \leq t \leq 2$ (84. ábra)!

$$x = \text{sh } t; \quad y = \text{ch } t; \quad \dot{x} = \text{ch } t.$$

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^2 y^2 \dot{x} \, dt = \pi \int_0^2 \text{ch}^2 t \, \text{ch } t \, dt = \\ &= \pi \int_0^2 (1 + \text{sh}^2 t) \text{ch } t \, dt = \pi \int_0^2 \text{ch } t \, dt + \pi \int_0^2 \text{sh}^3 t \, \text{ch } t \, dt = \\ &= \pi [\text{sh } t]_0^2 + \pi \left[\frac{\text{sh}^3 t}{3} \right]_0^2 = \pi \left(\text{sh } 2 - \text{sh } 0 + \frac{\text{sh}^3 2}{3} - \frac{\text{sh}^3 0}{3} \right) = \\ &= \pi \left(\text{sh } 2 + \frac{\text{sh}^3 2}{3} \right). \end{aligned}$$



84. ábra

$$\text{sh } 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx \frac{7,4 - \frac{1}{7,4}}{2} \approx \frac{7,4 - 0,14}{2} = \frac{7,26}{2} = 3,63.$$

$$V_x = \pi \left(3,63 + \frac{3,63^3}{3} \right) = \pi \left(3,63 + \frac{48}{3} \right) = \pi(3,63 + 16) = 19,63\pi \approx 61,6 \text{ térfogategység.}$$

6. Numerikus integrálás

Numerikus integrálással határozott integrálok értékét (közelítő pontossággal) tudjuk meghatározni. Numerikus integrálási módszert többnyire a következő esetekben alkalmazunk:

1. Az integrandus grafikusán adott.
2. Az integrandus analitikus alakban adott, de a primitív függvényt nem tudjuk analitikus alakban meghatározni, ill. igen bonyolult a meghatározása.
3. Az integrandus függvény táblázattal adott.

Mindhárom esetben az integrandus bizonyos számú ismert pontja segítségével kapjuk meg az integrál közelítő értékét.

A numerikus integrálás esetenkénti alkalmazhatóságát az eredmény várható pontossága dönti el. A hiba nagyságának

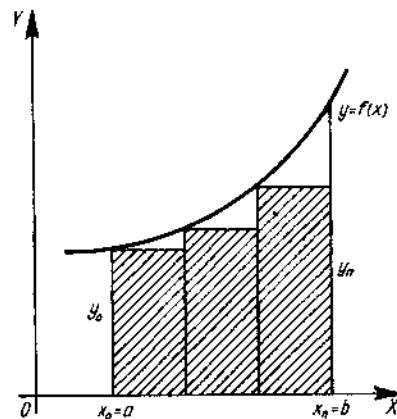
elméleti meghatározásával nem foglalkozunk; csak azt mutatjuk meg, milyen módon kell alkalmazni az egyes közelítő módszereket.

1. **Téglány-szabály.** Az $\int_a^b f(x) dx$ határozott integrált, vagyis az $f(x)$ görbe $[a, b]$ szakasza alatti területet téglalapok területösszegével közelítjük. Az eredmény általában annál pontosabb, minél sűrűbb felosztást alkalmazunk.

Tekintsünk egyenlőközű felosztást, vagyis osszuk az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő hosszú részre. Jelölje egy ilyen rész-intervallum hosszát h , vagyis legyen $h = \frac{b-a}{n}$; jelölje továbbá az egyes osztópontokat $x_0 = a$; $x_1 = a + h$; $x_2 = a + 2h$; ...; $x_{n-1} = a + (n-1)h$; $x_n = a + nh = b$, továbbá az osztópontok ordinátáit $y_0 = y(x_0)$; $y_1 = y(x_1)$; ...; $y_{n-1} = y(x_{n-1})$; $y_n = y(x_n)$. Ekkor — a szakaszok kezdőpontjaihoz tartozó ordináta-értékekkel képezve a téglalapokat — az

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

integrál közelítő értéke (85. ábra)

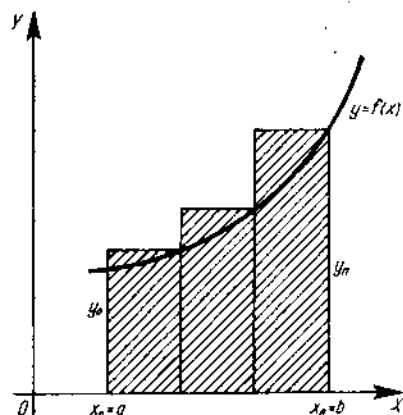


85. ábra

$$I \approx I_k = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1});$$

a szakaszok végpontjaihoz tartozó ordinátaértékeket választva viszont (86. ábra)

$$I \approx I_v = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$



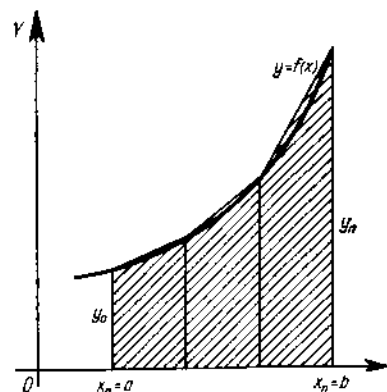
86. ábra

Ha a függvény az $[a, b]$ integrálási intervallumban monoton növekedő (csökkenő), akkor I_k az integrál alsó (felső) korlátja, I_v pedig az integrál felső (alsó) korlátja.

2. *Trapéz-szabály.* A határozott integrált, vagyis a függvény görbéje alatti területet trapézokkal közelítjük meg. Az $[a, b]$ intervallumot osztópontokkal egyenlő hosszú részintervallumokra osztjuk, majd a 87. ábrán látható módon közelítjük meg a görbe alatti területet. Ha egy részintervallum hossza h , akkor az I határozott integrál közelítő értéke

$$\begin{aligned} I &\approx h \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) = \\ &= h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right). \end{aligned}$$

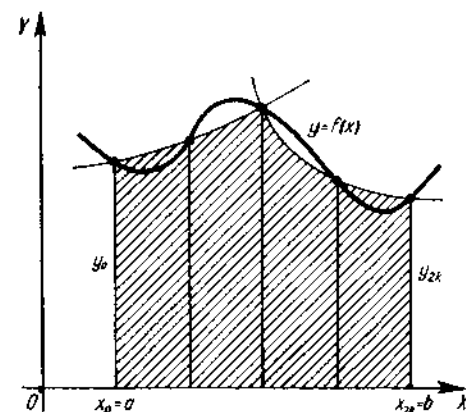
3. *Simpson-szabály.* A szabály alap gondolata az, hogy három (nem egy egyenesbe eső) ponton át mindig húzható egy és csak



87. ábra

egy másodfokú parabola, így a görbe ilyen parabolaívvel közelíthető meg. A parabolaívek általában jobban közelítik meg a görbét, mint az egyenes szakaszok. Az $[a, b]$ intervallumot $n = 2k + 1$ páratlan számú osztóponttal $n = 2k$ páros, h szélességű részintervallumra osztva és két-két szomszédos részintervallumban a 88. ábrán látható módon helyettesítve a függvény görbéjét egy-egy ilyen parabolaívvel, az integrál így adódó közelítő értéke:

$$I \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$



88. ábra

Az első és az utolsó ordinátától eltekintve a páratlan indexű ordináták együtthatója 4, a páros indexűké 2.

Gyakorló feladatok

1. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = ?$ A feladatot megoldjuk közvetlenül és a téglány-

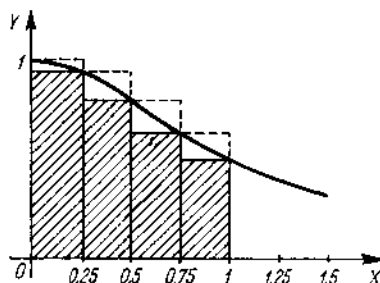
szabállyal is, hogy a pontos értéket ismerve, a közelítő eredmény hibáját kiszámíthassuk.

I. Megoldás:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctg x]_0^1 = \\ = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

II. Megoldás:

Az integrálandó függvény görbéje a 89. ábrán látható. A $[0; 1]$ intervallumot négy (egyenlő szélességű) részintervallumra osztjuk, és erre alkalmazzuk a téglány-szabályt.



89. ábra

Az összetartozó koordináták meghatározása:

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 1.$$

$$x_1 = 0,25 = \frac{1}{4}; \quad y_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{16}{17} \approx 0,94.$$

$$x_2 = 0,5 = \frac{1}{2}; \quad y_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$x_3 = 0,75 = \frac{3}{4}; \quad y_3 = \frac{1}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{16}{25} = 0,64.$$

$$x_4 = 1; \quad y_4 = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ha mindegyik részintervallum szélességét szorozzuk a bal oldali végpontban felvett függvényértékkel (amely ez esetben az intervallumhoz tartozó legnagyobb függvényérték), akkor

$$I < I_1 = 0,25(1 + 0,94 + 0,8 + 0,64) = 0,25 \cdot 3,38 = 0,845.$$

Ha mindegyik intervallum szélességét a jobb oldali végponthoz tartozó függvényértékkel szorozzuk (mely esetünkben az intervallumhoz tartozó legkisebb függvényérték), akkor

$$I > I_2 = 0,25(0,94 + 0,8 + 0,64 + 0,5) = 0,25 \cdot 2,88 = 0,72.$$

A százalékban kifejezett hibát p -vel jelölve:

$$p_1 = \frac{0,845 - 0,785}{0,785} \cdot 100\% = \frac{0,060}{0,785} \cdot 100\% = \frac{6}{0,785}\% \approx 7,6\%.$$

$$p_2 = \frac{0,785 - 0,72}{0,785} \cdot 100\% = \frac{0,065}{0,785} \cdot 100\% = \frac{6,5}{0,785} \approx 8,3\%.$$

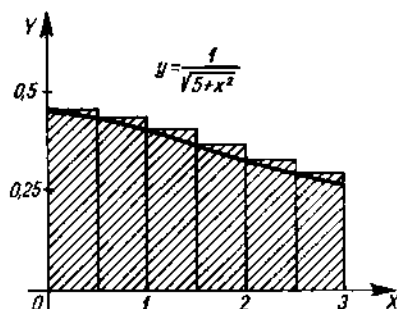
A hibaszázalék nyilván azért nagy viszonylag, mert az intervallum felosztása durva volt.

2. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét téglány-szabállyal, trapez-szabállyal és Simpson-szabállyal!

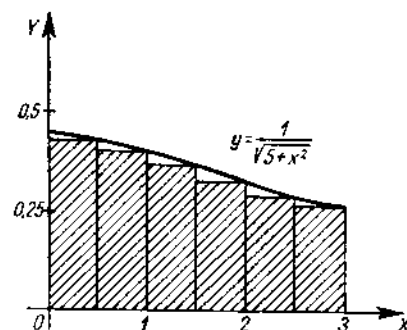
$$I = \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} = ?$$

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A $[0; 3]$ intervallumot hat részintervallumra osztjuk. a) Minden részintervallum hosszát a bal oldali végponthoz tartozó ordinátával szorozzuk (90. ábra). b) Minden részintervallum hosszát a jobb oldali végponthoz tartozó ordinátával szorozzuk (91. ábra).



90. ábra



91. ábra

Megjegyzés: Az X - és Y -tengelyen felvett hosszegységek a következő ábrákon célszerűségi szempontból általában nem egyenlők; ez a görbe alatti területet ugyan torzítja, de a határozott integrál értékét és számítását nem befolyásolja.

A számításhoz szükséges függvényértékek:

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45; \quad y(0,5) = \frac{1}{\sqrt{5+0,5^2}} = \frac{1}{\sqrt{5,25}} \approx 0,436;$$

$$y(1) = \frac{1}{\sqrt{5+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408;$$

$$y(1,5) = \frac{1}{\sqrt{5+1,5^2}} = \frac{1}{\sqrt{7,25}} \approx 0,371;$$

$$y(2) = \frac{1}{\sqrt{5+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} \approx 0,333;$$

$$y(2,5) = \frac{1}{\sqrt{5+2,5^2}} = \frac{1}{\sqrt{11,25}} \approx 0,299;$$

$$y(3) = \frac{1}{\sqrt{5+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \approx 0,267.$$

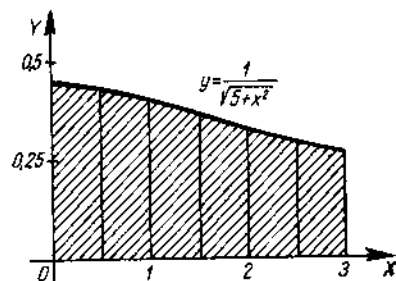
$$a) \quad I \approx I_1 = 0,5(0,45 + 0,436 + 0,408 + 0,371 + 0,333 + 0,299) = \\ = 0,5 \cdot 2,297 = 1,1485 \approx 1,15.$$

$$b) \quad I \approx I_2 = 0,5(0,436 + 0,408 + 0,371 + 0,333 + 0,299 + 0,267) = \\ = 0,5 \cdot 2,124 = 1,062 \approx 1,06.$$

Mivel a függvény a $[0, 3]$ intervallumban monoton, az integrál számértéke 1,06 és 1,15 közé esik.

II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A 92. ábrán látható trapézok területének összegét határozzuk meg.



92. ábra

Az intervallumok szélessége most is 0,5.

$$I \approx I_3 = 0,5 \left[\frac{y(0)}{2} + y(0,5) + y(1) + y(1,5) + y(2) + y(2,5) + \frac{y(3)}{2} \right] = \\ = 0,5 \left(\frac{0,45}{2} + 0,436 + 0,408 + 0,371 + 0,333 + 0,299 + \frac{0,267}{2} \right) = \\ = 0,5(0,225 + 1,847 + 0,1335) = 0,5 \cdot 2,2055 = 1,10275 \approx 1,1028.$$

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

Az intervallumot most is 6 részintervallumra osztjuk, vagyis $h=0,5$.

$$\begin{aligned} I &\approx I_4 = \frac{h}{3} [y(0) + 4y(0,5) + 2y(1) + 4y(1,5) + 2y(2) + 4y(2,5) + y(3)] \approx \\ &\approx \frac{0,5}{3} (0,45 + 4 \cdot 0,436 + 2 \cdot 0,408 + 4 \cdot 0,371 + 2 \cdot 0,333 + 4 \cdot 0,299 + 0,267) = \\ &= \frac{0,5}{3} [0,717 + 4(0,436 + 0,371 + 0,299) + 2(0,408 + 0,333)] = \\ &= \frac{0,5}{3} (0,717 + 4 \cdot 1,106 + 2 \cdot 0,741) = \\ &= \frac{0,5}{3} (0,717 + 4,424 + 1,482) = \\ &= \frac{0,5}{3} \cdot 6,623 \approx \frac{3,311}{3} \approx 1,104. \end{aligned}$$

A három különböző módszerrel kapott közelítő értékeket egybevéve, az integrál értéke feltehetően 3 jegy pontossággal 1,10.

3. Határozzuk meg az alábbi integrál közelítő és pontos értékét:

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x^3} dx.$$

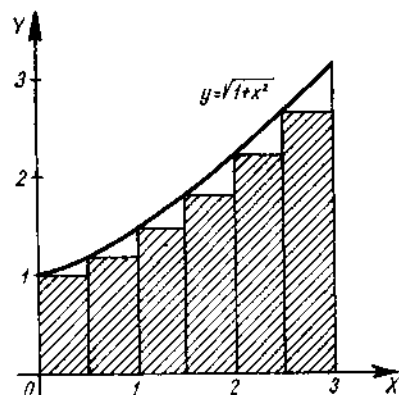
A közelítő értéket a téglány-szabállyal, a trapéz-szabállyal és a Simpson-szabállyal határozzuk meg.

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

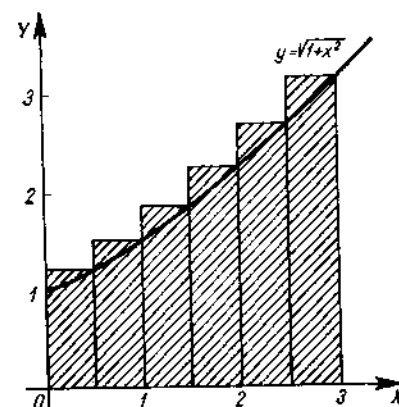
Az adott intervallumot hat részintervallumra osztjuk. a) A részintervallumok hosszát a bal oldali végpontokhoz tartozó függvényértékkel szorozzuk (93. ábra). b) A részintervallumok hosszát a jobb oldali végpontokhoz tartozó függvényértékekkel szorozzuk (94. ábra).

Az integrál meghatározásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1; & y(0,5) &= \sqrt{1+0,25} = \sqrt{1,25} \approx 1,12; \\ y(1) &= \sqrt{2} \approx 1,41; & y(1,5) &= \sqrt{1+2,25} = \sqrt{3,25} \approx 1,80; \\ y(2) &= \sqrt{5} \approx 2,24; & y(2,5) &= \sqrt{1+6,25} = \sqrt{7,25} \approx 2,70; \\ y(3) &= \sqrt{10} \approx 3,16. \end{aligned}$$



93. ábra



94. ábra

$$\begin{aligned} a) \quad I &\approx I_1 = 0,5(1 + 1,12 + 1,41 + 1,80 + 2,24 + 2,70) = 0,5 \cdot 10,27 = \\ &= 5,135 \approx 5,14. \end{aligned}$$

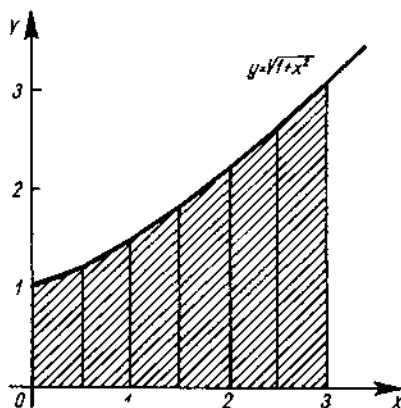
$$\begin{aligned} I &\approx I_2 = 0,5(1,12 + 1,41 + 1,80 + 2,24 + 2,70 + 3,16) = 0,5 \cdot 12,43 = \\ &= 6,215 \approx 6,22. \end{aligned}$$

A függvény a $[0; 3]$ intervallumban monoton növekedő, ezért az integrál alsó korlátja 5,14 és felső korlátja 6,22.

II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti területet — a 95. ábrán látható módon — trapézokkal közelítjük meg.

$$\begin{aligned} I &\approx I_3 = h \left[\frac{y(0)}{2} + y(0,5) + y(1) + y(1,5) + y(2) + y(2,5) + \frac{y(3)}{2} \right] = \\ &= 0,5(0,5 + 1,12 + 1,41 + 1,80 + 2,24 + 2,70 + 1,58) = \\ &= 0,5 \cdot 11,35 = 5,675. \end{aligned}$$



95. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

Most is 6 részintervallummal számolunk

$$\begin{aligned} I &\approx I_4 = \\ &= \frac{h}{3} [y(0) + 4y(0,5) + 2y(1) + 4y(1,5) + 2y(2) + 4y(2,5) + y(3)] = \\ &= \frac{0,5}{3} (1 + 4 \cdot 1,12 + 2 \cdot 1,41 + 4 \cdot 1,80 + 2 \cdot 2,24 + 4 \cdot 2,70 + 3,16) = \\ &= \frac{0,5}{3} [4,16 + 4(1,12 + 1,80 + 2,70) + 2(1,41 + 2,24)] = \\ &= \frac{1}{6} (4,16 + 4 \cdot 5,62 + 2 \cdot 3,65) = \\ &= \frac{1}{6} (4,16 + 22,48 + 7,30) = \frac{33,94}{6} \approx 5,66. \end{aligned}$$

IV. Megoldás:

A függvény primitív függvénye könnyen meghatározható, ezért a határozott integrált így is kiszámíthatjuk!

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx = ?$$

$x = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel átalakítjuk az integrandust.

$$dx = \operatorname{ch} t dt; \quad t = \operatorname{ar} \operatorname{sh} x.$$

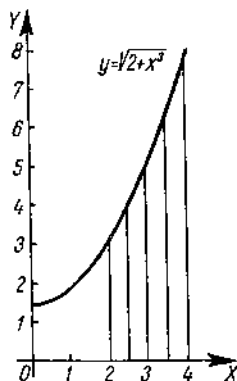
Az új határokat egyelőre csak jelöljük.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt = \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{ch}^2 t dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1 + \operatorname{ch} 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} \right]_{t_1}^{t_2} = \\ &= \frac{1}{2} [t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{2} [\operatorname{ar} \operatorname{sh} x + x \sqrt{x^2+1}]_0^3 = \\ &= \frac{1}{2} [\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + x \sqrt{x^2+1}]_0^3 = \\ &= \frac{1}{2} [\ln(3 + \sqrt{10}) + 3\sqrt{10} - 0] \approx \frac{1}{2} [\ln(3 + 3,16) + 3 \cdot 3,16] = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 6,16 + 9,48) \approx \frac{1,82 + 9,48}{2} = \frac{11,30}{2} = 5,65. \end{aligned}$$

4. Határozzuk meg az alábbi integrál közelítő értékét:

$$I = \int_1^4 \sqrt{2+x^2} dx.$$

Az integrandus görbéje a 96. ábrán látható. Az intervallumot négy egyenlő részre osztjuk.



96. ábra

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

Az integrál közelítő meghatározásához szükséges függvényértékek:

$$y(2) = \sqrt{2+8} = \sqrt{10} \approx 3,16;$$

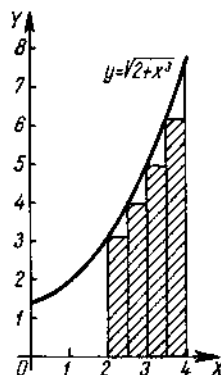
$$y(2,5) = \sqrt{2+2,5^3} \approx \sqrt{17,63} \approx 4,20;$$

$$y(3) = \sqrt{2+3^3} = \sqrt{29} \approx 5,40;$$

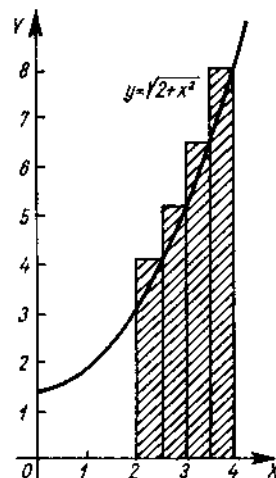
$$y(3,5) = \sqrt{2+3,5^3} \approx \sqrt{44,88} \approx 6,70;$$

$$y(4) = \sqrt{2+4^3} = \sqrt{66} \approx 8,13.$$

$$a) \quad (97. \text{ ábra}) \quad I \approx I_1 = 0,5(3,16 + 4,20 + 5,40 + 6,70) = 0,5 \cdot 19,46 = 9,73.$$



97. ábra



98. ábra

$$b) \quad (98. \text{ ábra}) \quad I \approx I_2 = 0,5(4,20 + 5,40 + 6,70 + 8,13) = 0,5 \cdot 24,43 = 12,215 \approx 12,22.$$

A függvény az integrálási intervallumban monoton növekedő, ezért I_1 az integrál egyik alsó korlátja, míg I_2 egy felső korlát.

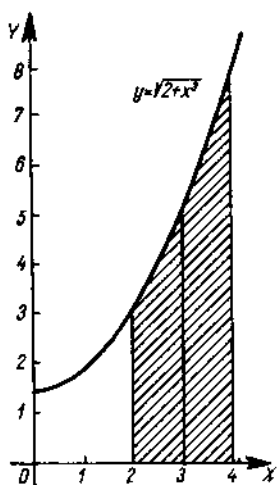
II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti területet a 99. ábrán látható módon trapézokkal közelítjük meg.

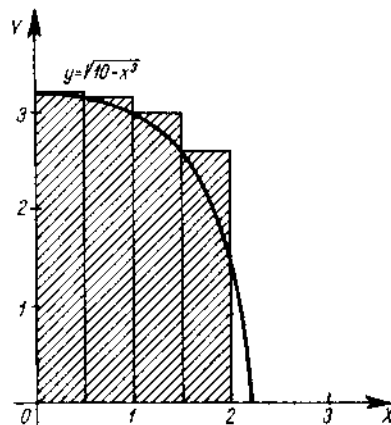
$$\begin{aligned} I \approx I_3 &= 0,5 \left[\frac{y(2)}{2} + y(2,5) + y(3) + y(3,5) + \frac{y(4)}{2} \right] = \\ &= 0,5(1,58 + 4,20 + 5,40 + 6,70 + 4,065) = \\ &= 0,5 \cdot 21,945 = 10,9725 \approx 10,97. \end{aligned}$$

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

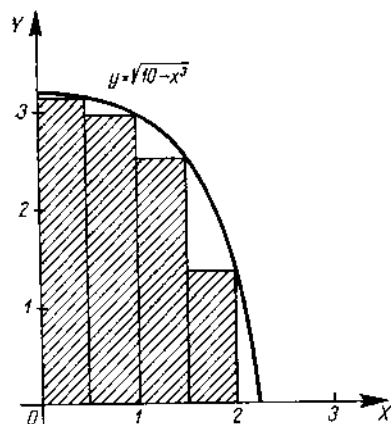
$$\begin{aligned} I \approx I_4 &= \frac{h}{3} [y(2) + 4y(2,5) + 2y(3) + 4y(3,5) + y(4)] \approx \\ &\approx \frac{0,5}{3} (3,16 + 4 \cdot 4,2 + 2 \cdot 5,4 + 4 \cdot 6,7 + 8,13) = \\ &= \frac{0,5}{3} (3,16 + 16,8 + 10,8 + 26,8 + 8,13) = \\ &= \frac{0,5 \cdot 65,69}{3} = 0,5 \cdot 21,89 = 10,945. \end{aligned}$$



99. ábra



100. ábra



101. ábra

5. Határozzuk meg az $I = \int_0^2 \sqrt{10-x^3} dx$ határozott integrál közelítő értékét a téglány-szabállyal, a trapéz-szabállyal, és a Simpson-szabállyal. Az intervallumot négy részintervallumra osztjuk ($h=0,5$).

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

$$y(0) = \sqrt{10} \approx 3,16;$$

$$y(0,5) = \sqrt{10-0,5^3} = \sqrt{10-0,125} = \sqrt{9,875} \approx 3,14;$$

$$y(1) = \sqrt{10-1} = 3; \quad y(1,5) = \sqrt{10-1,5^3} \approx \sqrt{6,64} \approx 2,58;$$

$$y(2) = \sqrt{10-2^3} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

a) (100. ábra) $I \approx I_1 = 0,5(3,16 + 3,14 + 3 + 2,58) = 0,5 \cdot 11,88 = 5,94.$

b) (101. ábra) $I \approx I_2 = 0,5(3,14 + 3 + 2,58 + 1,41) = 0,5 \cdot 10,13 \approx 5,06.$

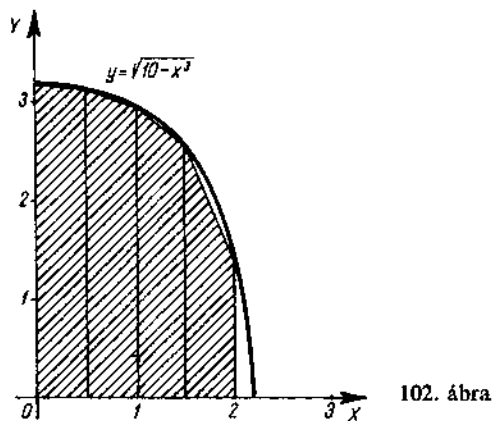
Megjegyzés: A függvény monoton csökkenő, ezért I_1 a határozott integrál felső korlátját, I_2 pedig alsó korlátját adja.

II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti területet megközelítő trapézok a 102. ábrán láthatók.

$$I \approx I_3 = h \left[\frac{y(0)}{2} + y(0,5) + y(1) + y(1,5) + \frac{y(2)}{2} \right].$$

$$\begin{aligned} I_3 &= 0,5 \left(\frac{3,16}{2} + 3,14 + 3 + 2,58 + \frac{1,41}{2} \right) = \\ &= 0,5(1,58 + 3,14 + 3 + 2,58 + 0,705) = 0,5 \cdot 11,005 \approx 5,5. \end{aligned}$$



102. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$\begin{aligned}
 I &\approx I_4 = \frac{h}{3} [y(0) + 4y(0,5) + 2y(1) + 4y(1,5) + y(2)] \approx \\
 &\approx \frac{0,5}{3} (3,16 + 4 \cdot 3,14 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2,58 + 1,41) = \\
 &= \frac{0,5}{3} (3,16 + 12,56 + 6 + 10,32 + 1,41) = \\
 &= \frac{0,5}{3} 33,45 \approx 5,58.
 \end{aligned}$$

6. Határozzuk meg $\ln 5$ közelítő értékét az alábbi integrál kiszámításával:

$$I = \int_1^5 \frac{1}{x} dx.$$

Legyen $h=1$, tehát a részintervallum hossza 1 egység.

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A részintervallumok határpontjaihoz tartozó függvényértékek:

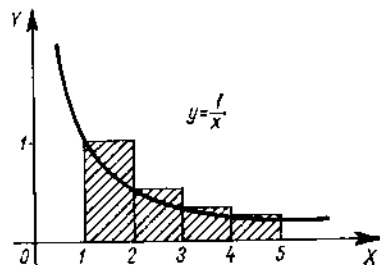
$$y(1) = 1; \quad y(2) = \frac{1}{2} = 0,5; \quad y(3) = \frac{1}{3} \approx 0,33;$$

$$y(4) = \frac{1}{4} = 0,25; \quad y(5) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

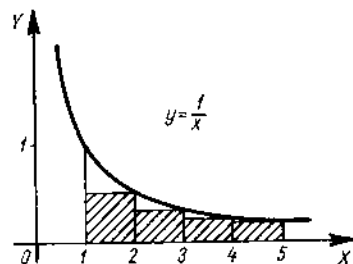
$$a) \quad (103. \text{ ábra}) \quad I \approx I_1 = 1(1 + 0,5 + 0,33 + 0,25) = 1 \cdot 2,08 = 2,08.$$

$$b) \quad (104. \text{ ábra}) \quad I \approx I_2 = 1(0,5 + 0,33 + 0,25 + 0,2) = 1 \cdot 1,28 = 1,28.$$

Megjegyzés: A függvény monoton csökkenő, ezért I_1 a határ ozott integrál egy felső korlátja, I_2 pedig egy alsó korlát.



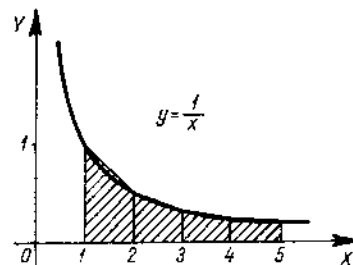
103. ábra



104. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal):

A függvény görbéje alatti terület megközelíthető a 105. ábrán látható trapézokkal is.



105. ábra

$$I \approx h \left[\frac{y(1)}{2} + y(2) + y(3) + y(4) + \frac{y(5)}{2} \right].$$

$$y(1) = 1; \quad y(2) = \frac{1}{2} = 0,5; \quad y(3) = \frac{1}{3} \approx 0,333;$$

$$y(4) = \frac{1}{4} = 0,25; \quad y(5) = \frac{1}{5} = 0,2.$$

$$I \approx 1 \left(\frac{1}{2} + 0,5 + 0,333 + 0,25 + \frac{0,2}{2} \right) =$$

$$= 0,5 + 0,5 + 0,333 + 0,25 + 0,1 = 1,683.$$

III. Megoldás (Simpson-szabály):

A részintervallumok száma páros, ezért

$$I \approx \frac{h}{3} [y(1) + 4y(2) + 2y(3) + 4y(4) + y(5)] \approx$$

$$\approx \frac{1}{3} (1 + 4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,333 + 4 \cdot 0,25 + 0,2) =$$

$$= \frac{1}{3} (1 + 2 + 0,666 + 1 + 0,2) = \frac{4,866}{3} = 1,622.$$

Megjegyzés: $\ln 5 \approx 1,609$ (más módon számolva) és így a Simpson-szabállyal kapott érték a legjobb közelítés.

$$7. I = \int_3^7 \frac{dx}{\ln x} = ? \text{ Az intervallumot 4 részintervallumra osztjuk.}$$

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek:

$$y(3) = \frac{1}{\ln 3} \approx \frac{1}{1,1} \approx 0,91; \quad y(4) = \frac{1}{\ln 4} \approx \frac{1}{1,385} \approx 0,723;$$

$$y(5) = \frac{1}{\ln 5} \approx \frac{1}{1,61} = 0,622; \quad y(6) = \frac{1}{\ln 6} \approx \frac{1}{1,79} \approx 0,558;$$

$$y(7) = \frac{1}{\ln 7} \approx \frac{1}{1,945} \approx 0,514.$$

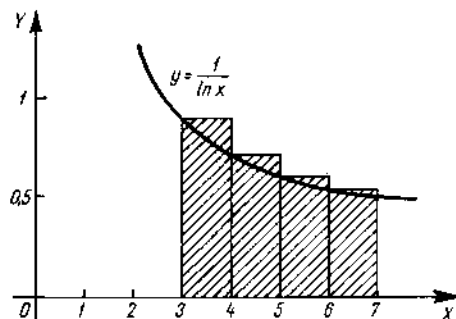
$$a) \quad (106. \text{ ábra}) \quad I \approx I_1 = 1[y(3) + y(4) + y(5) + y(6)] =$$

$$= 1(0,91 + 0,723 + 0,622 + 0,558) = 2,813.$$

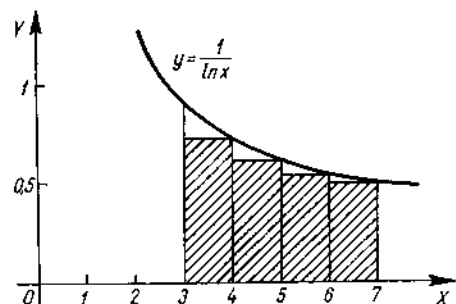
$$b) \quad (107. \text{ ábra}) \quad I \approx I_2 = 1[y(4) + y(5) + y(6) + y(7)] =$$

$$= 1(0,723 + 0,622 + 0,558 + 0,514) = 2,417 \text{ területegység.}$$

A határozott integrál alsó korlátja 2,417, felső korlátja pedig 2,813.



106. ábra



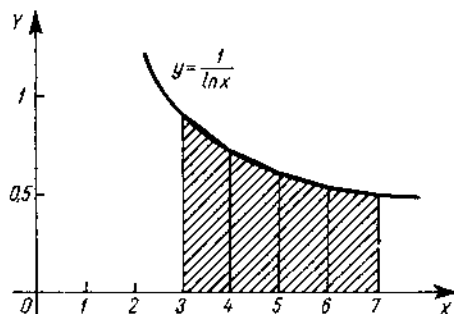
107. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (108. ábra):

$$I \approx I_3 = h \left[\frac{y(3)}{2} + y(4) + y(5) + y(6) + \frac{y(7)}{2} \right].$$

$$I \approx 1 \left(\frac{0,91}{2} + 0,723 + 0,622 + 0,558 + \frac{0,514}{2} \right) =$$

$$= 0,455 + 0,723 + 0,622 + 0,558 + 0,257 = 2,615.$$



108. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$\begin{aligned}
 I &\approx \frac{h}{3} [y(3) + 4y(4) + 2y(5) + 4y(6) + y(7)] \approx \\
 &\approx \frac{1}{3} (0,91 + 4 \cdot 0,723 + 2 \cdot 0,622 + 4 \cdot 0,558 + 0,514) = \\
 &= \frac{1}{3} (0,91 + 2,892 + 1,244 + 2,232 + 0,514) = \frac{7,792}{3} = 2,597.
 \end{aligned}$$

8. Határozzuk meg az $I = \int_3^9 \sqrt[3]{1+x^2} dx$ integrál közelítő értékét.

Az intervallumot 6 részintervallumra osztjuk.

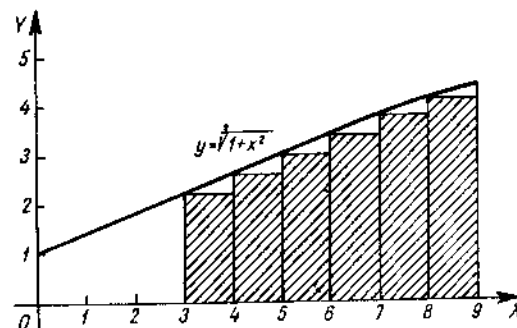
I. Megoldás (téglány-szabállyal).

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek:

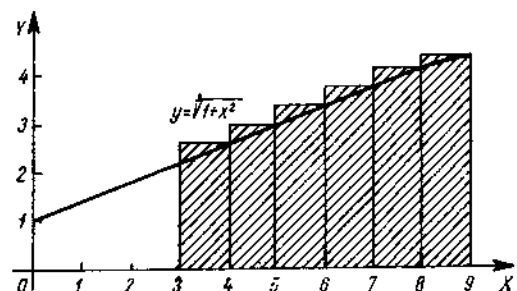
$$\begin{aligned}
 y(3) &= \sqrt[3]{1+3^2} = \sqrt[3]{1+9} = \sqrt[3]{10} \approx 2,16; \\
 y(4) &= \sqrt[3]{1+4^2} = \sqrt[3]{1+16} = \sqrt[3]{17} \approx 2,57; \\
 y(5) &= \sqrt[3]{1+5^2} = \sqrt[3]{1+25} = \sqrt[3]{26} \approx 2,96; \\
 y(6) &= \sqrt[3]{1+6^2} = \sqrt[3]{1+36} = \sqrt[3]{37} \approx 3,33; \\
 y(7) &= \sqrt[3]{1+7^2} = \sqrt[3]{1+49} = \sqrt[3]{50} \approx 3,68; \\
 y(8) &= \sqrt[3]{1+8^2} = \sqrt[3]{1+64} = \sqrt[3]{65} \approx 4,02; \\
 y(9) &= \sqrt[3]{1+9^2} = \sqrt[3]{1+81} = \sqrt[3]{82} \approx 4,35.
 \end{aligned}$$

a) (109. ábra) $I \approx I_1 = h[y(3) + y(4) + y(5) + y(6) + y(7) + y(8)] =$
 $= 1(2,16 + 2,57 + 2,96 + 3,33 + 3,68 + 4,02) = 18,72.$

b) (110. ábra) $I \approx I_2 = h[y(4) + y(5) + y(6) + y(7) + y(8) + y(9)] =$
 $= 1(2,57 + 2,96 + 3,33 + 3,68 + 4,02 + 4,35) = 20,91.$



109. ábra

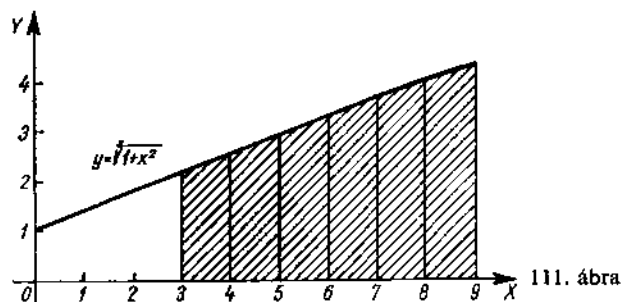


110. ábra

Megjegyzés: A határozott integrál alsó korlátja 18,72, felső korlátja 20,91.

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (111. ábra):

$$\begin{aligned}
 I &\approx I_3 = h \left[\frac{y(3)}{2} + y(4) + y(5) + y(6) + y(7) + y(8) + \frac{y(9)}{2} \right]. \\
 I &\approx 1 \left(\frac{2,16}{2} + 2,57 + 2,96 + 3,33 + 3,68 + 4,02 + \frac{4,35}{2} \right) = \\
 &= 1,08 + 2,57 + 2,96 + 3,33 + 3,68 + 4,02 + 2,175 = 19,815.
 \end{aligned}$$



III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$\begin{aligned}
 I &\approx \frac{h}{3} [y(3) + 4y(4) + 2y(5) + 4y(6) + 2y(7) + 4y(8) + y(9)] \approx \\
 &\approx \frac{1}{3} (2,16 + 4 \cdot 2,57 + 2 \cdot 2,96 + 4 \cdot 3,33 + 2 \cdot 3,68 + 4 \cdot 4,02 + 4,35) = \\
 &= \frac{1}{3} (2,16 + 10,28 + 5,92 + 13,32 + 7,36 + 16,08 + 4,35) = \\
 &= \frac{59,47}{3} \approx 19,89.
 \end{aligned}$$

9. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét numerikus integrálási eljárásokkal:

$$I = \int_5^9 \frac{1}{\sqrt[4]{100+x^2}} dx.$$

Az intervallumot négy részintervallumra osztjuk, vagyis $h=1$.

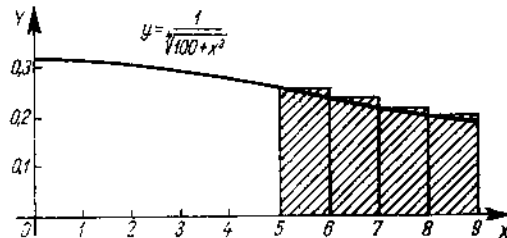
I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A szükséges függvényértékek:

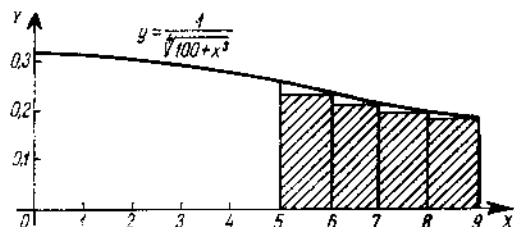
$$\begin{aligned}
 y(5) &= \frac{1}{\sqrt[4]{100+5^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+25}} = \frac{1}{\sqrt[4]{125}} \approx \frac{1}{3,87} \approx 0,258; \\
 y(6) &= \frac{1}{\sqrt[4]{100+6^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+36}} = \frac{1}{\sqrt[4]{136}} \approx \frac{1}{4,22} \approx 0,237;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y(7) &= \frac{1}{\sqrt[4]{100+7^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+49}} = \frac{1}{\sqrt[4]{149}} \approx \frac{1}{4,58} \approx 0,218; \\
 y(8) &= \frac{1}{\sqrt[4]{100+8^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+64}} = \frac{1}{\sqrt[4]{164}} \approx \frac{1}{4,98} \approx 0,201; \\
 y(9) &= \frac{1}{\sqrt[4]{100+9^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100+81}} = \frac{1}{\sqrt[4]{181}} \approx \frac{1}{5,36} \approx 0,186.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad (112. \text{ ábra}) \quad I &\approx I_1 = h[y(5) + y(6) + y(7) + y(8)] = \\
 &= 1(0,258 + 0,237 + 0,218 + 0,201) = 0,914. \\
 b) \quad (113. \text{ ábra}) \quad I &\approx I_2 = h[y(6) + y(7) + y(8) + y(9)] = \\
 &= 1(0,237 + 0,218 + 0,201 + 0,186) = 0,842.
 \end{aligned}$$



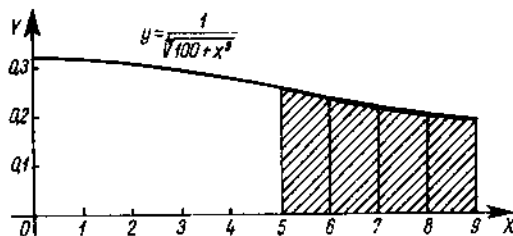
112. ábra



113. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (114. ábra):

$$\begin{aligned}
 I &\approx I_3 = h \left[\frac{y(5)}{2} + y(6) + y(7) + y(8) + \frac{y(9)}{2} \right]. \\
 I &\approx 1 \left(\frac{0,258}{2} + 0,237 + 0,218 + 0,201 + \frac{0,186}{2} \right) = \\
 &= 0,129 + 0,237 + 0,218 + 0,201 + 0,093 = 0,878.
 \end{aligned}$$



114. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$\begin{aligned}
 I &\approx \frac{h}{3} [y(5) + 4y(6) + 2y(7) + 4y(8) + y(9)] \approx \\
 &\approx \frac{1}{3} (0,258 + 4 \cdot 0,237 + 2 \cdot 0,218 + 4 \cdot 0,201 + 0,186) = \\
 &= \frac{1}{3} (0,258 + 0,948 + 0,436 + 0,804 + 0,186) = \frac{2,632}{3} = 0,877.
 \end{aligned}$$

10. Határozzuk meg az alábbi trigonometrikus függvény integrálját:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = ? \text{ Az intervallumot 4 részintervallumra osztjuk, ezért}$$

egy részintervallum hossza $\frac{\pi}{6} \approx 0,524$ radián $= 30^\circ$. A függvényértékek kiszámításakor a független változó értékét fokban helyettesítjük be.

A függvény ($\sin x$) a $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumban nem monoton, és így a téglány-szabályt alkalmazva nem kapunk alsó és felső korlátot, ezért az integrál közelítő értékét csak a trapéz-szabállyal, valamint a Simpson-szabállyal határozzuk meg.

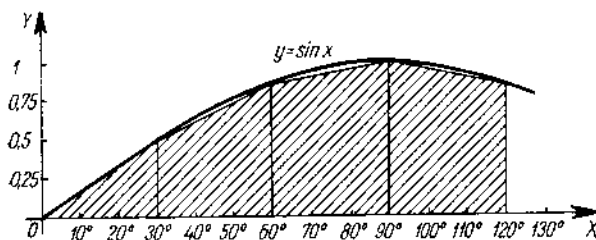
A feladat megoldásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

$$y(0) = \sin 0^\circ = 0; \quad y(30^\circ) = \sin 30^\circ = 0,5; \quad y(60^\circ) = \sin 60^\circ \approx 0,866;$$

$$y(90^\circ) = \sin 90^\circ = 1; \quad y(120^\circ) = \sin 120^\circ \approx 0,866.$$

I. Megoldás (trapéz-szabállyal) (115. ábra):

$$\begin{aligned}
 I &\approx I_1 = h \left[\frac{y(0)}{2} + y(30^\circ) + y(60^\circ) + y(90^\circ) + \frac{y(120^\circ)}{2} \right] = \\
 &= 0,524 \left(0 + 0,5 + 0,866 + 1 + \frac{0,866}{2} \right) = 0,524 \cdot 2,799 \approx 1,465.
 \end{aligned}$$



115. ábra

II. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$\begin{aligned}
 I &\approx \frac{h}{3} [y(0) + 4y(30^\circ) + 2y(60^\circ) + 4y(90^\circ) + y(120^\circ)] = \\
 &= \frac{0,524}{3} (0 + 4 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,866 + 4 \cdot 1 + 0,866) \approx \\
 &\approx 0,175 (2 + 1,732 + 4 + 0,866) = 0,175 \cdot 8,598 \approx 1,5.
 \end{aligned}$$

II. Megoldás (integrálással):

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx &= [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos 120^\circ + \cos 0^\circ = \\
 &= \cos 60^\circ + \cos 0^\circ = 0,5 + 1 = 1,5.
 \end{aligned}$$

Megjegyzés: A Simpson-szabállyal — kerekítések után — kapott érték megegyezik a most kapott pontos értékkel.

11. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin^2 x} \, dx$.

Igazolni lehet, hogy az integrandus primitív függvénye zárt alakban nem határozható meg. Ezért az integrál értékét csak közelítő módszerrel tudjuk meghatározni.

A $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumot négy részintervallumra osztjuk, vagyis $h = \frac{\pi}{8} \approx 0,393$.

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

Az integrandus $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ -ben monoton, így alsó és felső korlátot kapunk.

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek:

$$y(0) = \sqrt{1+0} = 1;$$

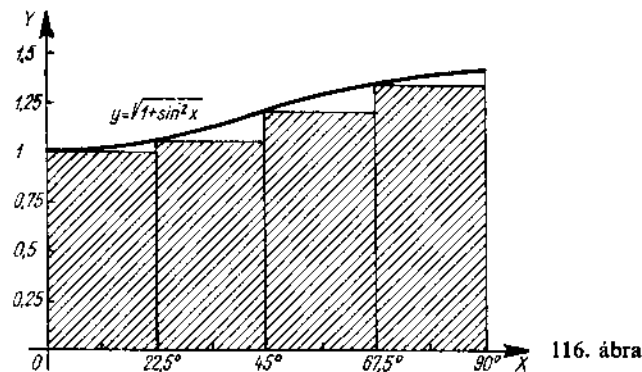
$$y(22,5^\circ) = \sqrt{1+\sin^2 22,5^\circ} \approx \sqrt{1+0,388^2} \approx \sqrt{1+0,147} \approx 1,07;$$

$$y(45^\circ) = \sqrt{1+\sin^2 45^\circ} = \sqrt{1+\frac{1}{2}} = \sqrt{1,5} \approx 1,225;$$

$$y(67,5^\circ) = \sqrt{1+\sin^2 67,5^\circ} \approx \sqrt{1+0,922^2} \approx \sqrt{1+0,85} = \sqrt{1,85} \approx 1,36;$$

$$y(90^\circ) = \sqrt{1+\sin^2 90^\circ} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

a) (116. ábra) $I > I_2 = h[y(0) + y(22,5^\circ) + y(45^\circ) + y(67,5^\circ)] =$
 $= 0,393(1 + 1,07 + 1,225 + 1,36) = 0,393 \cdot 4,655 \approx 1,86.$



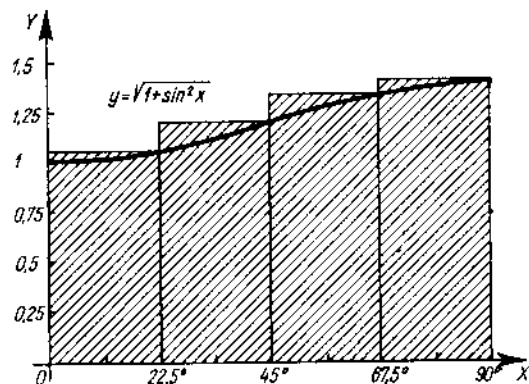
116. ábra

b) (117. ábra) $I < I_3 = h[y(22,5^\circ) + y(45^\circ) + y(67,5^\circ) + y(90^\circ)] =$
 $= 0,393(1,07 + 1,225 + 1,36 + 1,41) = 0,393 \cdot 5,065 \approx 1,99.$

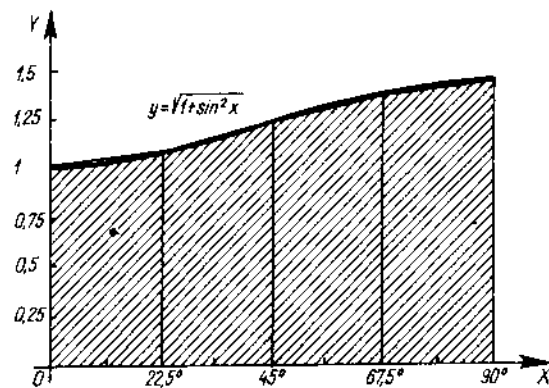
II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (118. ábra):

$$I \approx I_3 = h \left[\frac{y(0)}{2} + y(22,5^\circ) + y(45^\circ) + y(67,5^\circ) + \frac{y(90^\circ)}{2} \right].$$

$$I \approx 0,393(0,5 + 1,07 + 1,225 + 1,36 + 0,705) = 0,393 \cdot 4,86 \approx 1,91.$$



117. ábra



118. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$I \approx \frac{h}{3} [y(0) + 4y(22,5^\circ) + 2y(45^\circ) + 4y(67,5^\circ) + y(90^\circ)] \approx$$

$$\approx \frac{0,393}{3} (1 + 4 \cdot 1,07 + 2 \cdot 1,225 + 4 \cdot 1,36 + 1,41) =$$

$$= 0,131 (1 + 4,28 + 2,45 + 5,44 + 1,41) = 0,131 \cdot 14,58 \approx 1,91.$$

Mivel a trapéz-szabállyal és a Simpson-szabállyal ugyanazt az eredményt kaptuk, mely a téglány-szabályból adódó korlátok között van, feltehető, hogy 1,91 három értékes jegyre pontos.

12. Határozzuk meg az alábbi integrál értékét:

$$I = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dx. \text{ A } \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \text{ intervallumot 6 részintervallumra}$$

osztjuk, vagyis $h = \frac{\pi}{18} \approx 0,1745$.

I. Megoldás (téglány-szabállyal):

A feladat megoldásához szükséges függvényértékek kiszámítása:

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 0^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707;$$

$$y(10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 10^\circ}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0,985^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1,97}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1,97}} \approx \frac{1}{1,4} \approx 0,712;$$

$$y(20^\circ) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 20^\circ}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0,94^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1,88}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1,88}} \approx \frac{1}{1,37} \approx 0,73;$$

$$y(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 30^\circ}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0,865^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1,75}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1,75}} \approx \frac{1}{1,32} \approx 0,755;$$

$$y(40^\circ) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 40^\circ}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0,766^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1,59}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1,59}} \approx \frac{1}{1,26} \approx 0,794;$$

$$y(50^\circ) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 50^\circ}} \approx \frac{1}{\sqrt{1+0,644^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{1,414}} =$$

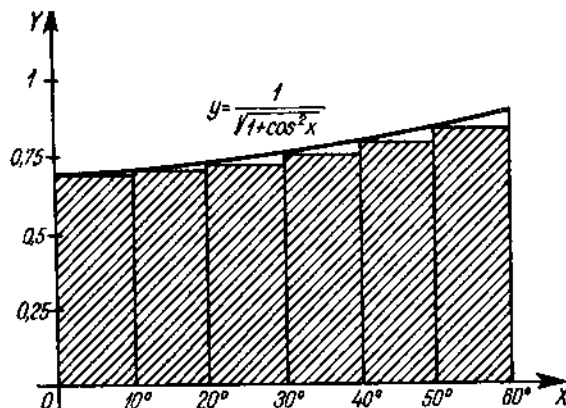
$$= \frac{1}{\sqrt{1,414}} \approx \frac{1}{1,19} \approx 0,842;$$

$$y(60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 60^\circ}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \sqrt{0,8} \approx 0,894.$$

$$a) I \approx I_1 = h[y(0) + y(10^\circ) + y(20^\circ) + y(30^\circ) + y(40^\circ) + y(50^\circ)] =$$

$$= 0,1745 (0,707 + 0,712 + 0,73 + 0,755 + 0,794 + 0,842) =$$

$$= 0,1745 \cdot 4,540 \approx 0,966. \text{ (119. ábra)}$$

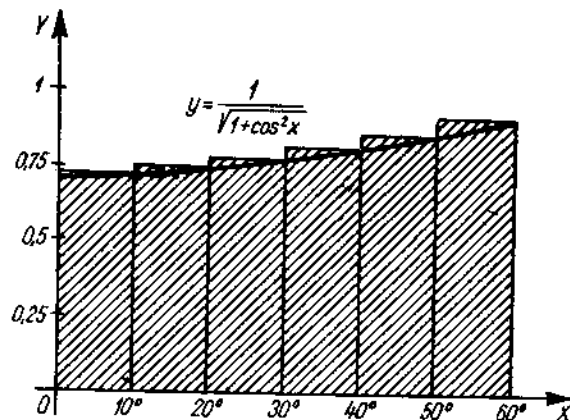


119. ábra

$$b) I \approx I_2 = h[y(10^\circ) + y(20^\circ) + y(30^\circ) + y(40^\circ) + y(50^\circ) + y(60^\circ)] =$$

$$= 0,1745 (0,712 + 0,73 + 0,755 + 0,794 + 0,842 + 0,894) =$$

$$= 0,1745 \cdot 4,727 \approx 0,826. \text{ (120. ábra)}$$

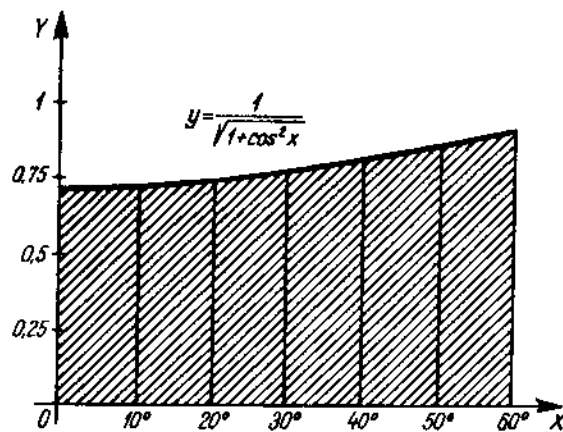


120. ábra

II. Megoldás (trapéz-szabállyal) (121. ábra):

$$I \approx I_3 = h \left[\frac{y(0)}{2} + y(10^\circ) + y(20^\circ) + y(30^\circ) + y(40^\circ) + y(50^\circ) + \frac{y(60^\circ)}{2} \right].$$

$$I \approx 0,1745(0,3535 + 0,712 + 0,73 + 0,735 + 0,749 + 0,842 + 0,447) = 0,1745 \cdot 4,6135 \approx 0,808.$$



121. ábra

III. Megoldás (Simpson-szabállyal):

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{h}{3} [y(0) + 4y(10^\circ) + 2y(20^\circ) + 4y(30^\circ) + 2y(40^\circ) + 4y(50^\circ) + y(60^\circ)] \approx \\ &\approx \frac{0,1745}{3} (0,707 + 4 \cdot 0,712 + 2 \cdot 0,73 + \\ &+ 4 \cdot 0,755 + 2 \cdot 0,794 + 4 \cdot 0,842 + 0,894) = \\ &= \frac{0,1745}{3} (0,707 + 2,848 + 1,46 + 3,02 + 1,588 + 3,368 + 0,894) = \\ &= \frac{0,1745 \cdot 13,885}{3} \approx 0,808. \end{aligned}$$

7. Fizikai feladatok

A fizikában sok alkalmazási területe van a határozott integrálnak. Ezekre mutatunk most néhány feladatot.

Gyakorló feladatok

1. Valamely test $a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ állandó gyorsulással mozog. Határozzuk meg a test által megtett utat és a test pillanatnyi sebességét mint az idő függvényét, ha x_0 a test helyét és v_0 a kezdősebességét jelentik a $t_0 = 0$ időpillanatban. Legyen $x_0 = 3$ m, és $v_0 = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ha egy test X -tengely irányú sebessége a $t = t_0$ időpontban v_0 , és gyorsulása mint az idő függvénye $a = a(t)$, akkor sebessége tetszőleges $t > t_0$ időpontban

$$v = v(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau + v_0;$$

ha a test a t_0 időpontig x_0 utat (elmozdulást) tett meg és sebessége $v = v(t)$, akkor a megtett út (elmozdulás) tetszőleges $t > t_0$ időpontig

$$x = \int_{t_0}^t v(t) d\tau + x_0.$$

Amennyiben a gyorsulás állandó, akkor

$$v = \int_{t_0}^t a d\tau + v_0 = [a\tau]_{t_0}^t + v_0 = a(t - t_0) + v_0;$$

$$x = \int_{t_0}^t v d\tau + x_0 = \int_{t_0}^t [a(\tau - t_0) + v_0] d\tau + x_0 =$$

$$= \left[a \frac{(\tau - t_0)^2}{2} + v_0 \tau \right]_{t_0}^t + x_0 = a \frac{(t - t_0)^2}{2} + v_0(t - t_0) + x_0.$$

A feladat megoldása tehát:

$$v = 10t + 12, \text{ és } x = 5t^2 + 12t + 3.$$

2. Valamely testet a nehézségi erőterben $v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kezdősebességgel, a vízszintessel 30° -os szöget bezáró irányban elhajítunk. (Az ilyen típusú mozgást nevezzük ferde hajításnak.) Határozzuk meg a test helyzetét az elhajítás időpontjától számított 3 s múlva!

A test kezdősebességének X - és Y -tengely irányú összetevői meghatározhatók, ezekből az X - és Y -tengely irányú elmozdulásuk is kiszámítható.

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha = 50 \cos 30^\circ \approx 50 \cdot 0,866 = 43,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha = 50 \sin 30^\circ = 50 \cdot 0,5 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

A test által az X -tengely irányában megtett út az

$$s_x = \int_0^t v_x d\tau = \int_0^t v_0 \cos \alpha d\tau = [v_0 \tau \cos \alpha]_0^t = v_0 t \cos \alpha$$

képlettel határozható meg.

Az Y -tengely irányú sebesség pillanatnyi értéke:

$$v_y = v_{y0} - gt = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Ha v_y -t t szerint integráljuk, akkor megkapjuk az Y -tengely irányában megtett utat mint az idő függvényét.

$$s_y = \int_0^t v_y d\tau = \int_0^t (v_0 \sin \alpha - g\tau) d\tau =$$

$$= \left[v_0 \tau \sin \alpha - g \frac{\tau^2}{2} \right]_{t_0}^t = v_0 t \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2.$$

Behelyettesítjük az állandók értékét:

$$s_x = 43,3t; \quad s_y = 25t - 5t^2.$$

Felírtuk a mozgásegyenletet. Ha most t helyébe hármat írunk, megkapjuk a test helyzetét jellemző koordinátákat, ezek: $s_x(3) = 43,3 \cdot 3 = 129,9 \text{ m}$; $s_y(3) = 25 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = 75 - 45 = 30 \text{ m}$.

3. Legyen valamely tömegpont gyorsulása az időnek szinuszfüggvénye, például

$$a = -12 \sin 4t.$$

Ha az időt másodpercben mérjük, akkor a gyorsulást $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ -ben kapjuk.

Megjegyezzük, hogy a 4-nek mértékegysége van $\left(\frac{1}{\text{s}}\right)$, ugyanis csak mértékegység nélküli viszonyzámnak határozhatjuk meg a szinuszt.

Határozzuk meg a mozgó pont pillanatnyi sebességét és elmozdulását mint az idő függvényét, ha a $t_0 = 0$, időpillanatban $v_0 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ és $x_0 = 0$, továbbá a mozgó pont helyzetét a $t = 0,6 \text{ s}$ időpillanatban!

A t időpontbeli sebesség:

$$v = \int_0^t (-12 \sin 4\tau) d\tau + v_0 = \left[-\frac{12 \cos 4\tau}{4} \right]_0^t + v_0 =$$

$$= [3 \cos 4\tau]_0^t + v_0 = 3 \cos 4t - 3 + 3 = 3 \cos 4t.$$

A test pillanatnyi elmozdulását x -szel jelölve

$$x = \int_0^t v d\tau + x_0.$$

v helyébe a pillanatnyi sebességet írva és figyelembe véve, hogy $x_0=0$, az elmozdulás mint az idő függvénye, az alábbi:

$$x = \int_0^t 3 \cos 4\tau \, d\tau = \left[\frac{3}{4} \sin 4\tau \right]_0^t = \frac{3}{4} \sin 4t.$$

A $t=0,6$ s időpillanatban az elmozdulás:

$$x(0,6) = \frac{3}{4} \sin(4 \cdot 0,6) = \frac{3}{4} \sin 2,4.$$

A radiánban adott szöget átszámítjuk fokba, majd leolvassuk logarlécen a szög szinuszt:

$$2,4 \approx 2,4 \cdot 57,3^\circ \approx 137,5^\circ.$$

$$x(0,6) = \frac{3}{4} \sin 137,5^\circ = \frac{3}{4} \sin 42,5^\circ \approx 0,75 \cdot 0,676 \approx 0,507 \text{ m}.$$

4. Bármely rugó rugalmas megnyúlása egyenesen arányos a rugóra ható erővel: $F=Dx$, ahol D a rugóállandó (x a megnyúlást, F az erőt jelöli). Mivel a munka az erő út szerinti integrálja, ezért ahhoz, hogy a rugó eredeti hosszát x_{\max} -szal megnyújtsuk, a következő munkát kell végeznünk:

$$W = \int_0^{x_{\max}} F dx = \int_0^{x_{\max}} Dx dx = \left[D \frac{x^2}{2} \right]_0^{x_{\max}} = \frac{D}{2} x_{\max}^2.$$

Tehát a végzett munka arányos a rugó hosszúságváltozásának négyzetével.

Mekkora a $D=6 \frac{\text{kp}}{\text{cm}}$ rugóállandójú rugó 4 cm-es megnyújtásához szükséges munka?

$$W = \frac{6}{2} \cdot 16 = 48 \text{ kp cm} = 0,48 \text{ mkp}.$$

5. Mennyi munkát kell végeznünk ahhoz, hogy négyszeres Földszugár távolságra vigyünk egy 2 t tömegű űrhajót? A Földszugár $R=6370$ km; a gravitáció állandó értéke:

$$k = 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{gs}^2} = 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{10^{-6} \text{ m}^3}{10^{-3} \text{ kg s}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}.$$

A test és a Föld között ható erő a tömegvonzás törvénye értelmében arányos a két test tömegével, és fordítva arányos tömegközponcjaik távolságának négyzetével:

$$F = k \frac{Mm}{r^2}.$$

A munka — mely az erő út szerinti integrálja — kiszámítható, ha a Föld tömegét is ismerjük, ami $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg.

$$\begin{aligned} W &= \int_R^{4R} k \frac{mM}{r^2} dr = kmM \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{4R} = \\ &= kmM \left(-\frac{1}{4R} + \frac{1}{R} \right) = kmM \frac{3}{4R}. \end{aligned}$$

Az adatokat behelyettesítjük, és a végzett munkát kiszámítjuk.

$$\begin{aligned} W &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \frac{3}{4 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = \\ &= \frac{6,67 \cdot 9}{3,37} \cdot 10^{10} \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \approx 9,42 \cdot 10^{10} \text{ joule} \approx 9,42 \cdot 10^8 \text{ mkp}. \end{aligned}$$

6. A testen végzett elemi munka a következő módon is megadható:

$$dW = F ds = m \frac{dv}{dt} ds = mv dv.$$

A végzett munka, miközben az m tömegű test sebessége v_1 -ről v_2 -re változik:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} mv dv = \left[\frac{mv^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

A test mozgásmennyiségének a sebesség szerinti határozott integrálja a test mozgási energiájának megváltozását adja meg.

Legyen a test tömege 5 kg, kezdősebessége $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, végsebessége $16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

A végzett munka ekkor

$$W = \frac{5 \cdot 16^2}{2} - \frac{5 \cdot 10^2}{2} = 2,5(256 - 100) = 2,5 \cdot 156 =$$

$$= 390 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 390 \text{ joule.}$$

7. Egy m tömegű testre az időben szinuszosan változó F erő hat. Számítsuk ki a test mozgásmennyiségének megváltozását, ha

$$F = 2 \sin 3t [\text{N}]; \quad t_1 = 0,1 \text{ s}; \quad t_2 = 0,2 \text{ s}; \quad m = 3 \text{ kg.}$$

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F d\tau = \int_{t_1}^{t_2} 2 \sin 3\tau d\tau = \left[-\frac{2}{3} \cos 3\tau \right]_{t_1}^{t_2} =$$

$$= -\frac{2}{3} \cos 3t_2 + \frac{2}{3} \cos 3t_1 = -\frac{2}{3} \cos 0,6 + \frac{2}{3} \cos 0,3.$$

A radiánban kapott szögeket fokba átszámítjuk:

$$0,6 \approx 57,3^\circ \cdot 0,6 = 34,38^\circ; \quad 0,3 \approx 17,19^\circ.$$

Igy

$$I = \frac{2}{3} (\cos 17,19^\circ - \cos 34,38^\circ) \approx \frac{2}{3} (0,955 - 0,825) =$$

$$= \frac{2 \cdot 0,13}{3} \approx 0,0866 \text{ Ns} = 8,66 \cdot 10^{-2} \text{ Ns.}$$

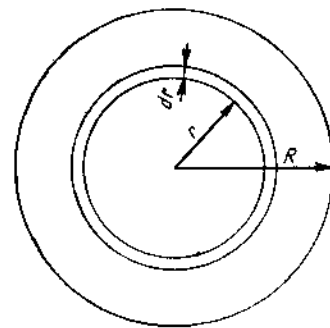
8. Határozzuk meg a körlemez szimmetriatengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát!

Ha a lemez sugara R , vastagsága v , a lemez anyagának sűrűsége ρ és a lemez tehetetlenségi nyomatéka Θ (122. ábra), akkor egy dr szélességű csíkjának tömege:

$$dm = 2\pi r v \rho dr;$$

ezen csík tehetetlenségi nyomatéka:

$$d\Theta = r^2 dm = 2r^3 \pi v \rho dr;$$



122. ábra

tehát a teljes lemez tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \int_0^R 2r^3 \pi v \rho dr = 2\pi v \rho \int_0^R r^3 dr =$$

$$= 2\pi v \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{2\pi v \rho R^4}{4} = R^2 \pi v \rho \frac{R^2}{2} = \frac{m R^2}{2}.$$

$$\text{Legyen } R = 20 \text{ cm}; \quad \rho = 7,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}; \quad v = 2 \text{ cm}; \quad \Theta = ?$$

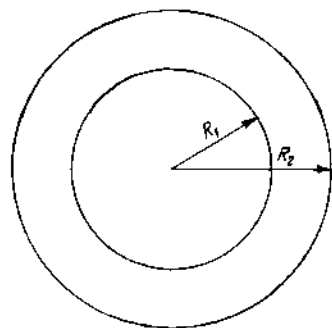
$$\Theta = \frac{R^4 \pi v \rho}{2} = \frac{2^4 \pi \cdot 0,2 \cdot 7,9}{2} \text{ kg dm}^2 \approx$$

$$\approx 16 \cdot \pi \cdot 0,79 \approx 39,7 \text{ kg dm}^2 = 0,397 \text{ kg dm}^2.$$

9. Határozzuk meg egy körgyűrű alakú lendítőkerék tengelyére vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. A belső kör sugara R_1 , a külső köré R_2 , a lendítőkerék vastagsága v , az anyag sűrűsége ρ (123. ábra)!

Az elemi tehetetlenségi nyomaték az előbbi példával megegyezik, de az integrálás határai nem.

$$d\Theta = 2r^3 \pi v \rho dr;$$



123. ábra

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_{R_1}^{R_2} 2r^3 \pi v \varrho \, dr = 2\pi v \varrho \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{2\pi v \varrho}{4} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{\pi v \varrho}{2} (R_2^2 + R_1^2) (R_2^2 - R_1^2) = \\ &= \frac{\pi (R_2^2 - R_1^2) v \varrho}{2} (R_2^2 + R_1^2).\end{aligned}$$

A szorzat első tényezője a test tömegének a fele, így

$$\Theta = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2).$$

Legyen $R_1 = 1 \text{ m}$; $R_2 = 1,2 \text{ m}$; $v = 1,5 \text{ dm}$; $\varrho = 7,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; $\Theta = ?$

$$\Theta = \frac{(R_2^2 - R_1^2) \pi v \varrho}{2} (R_2^2 + R_1^2) = \frac{(1,2^2 - 1^2) \pi \cdot 1,5 \cdot 7,9}{2} (1,2^2 + 1^2).$$

A test tömegét kg-ban, a tömeg szorzótényezőjét pedig m-ben helyettesítettük azért, hogy a tehetetlenségi nyomatékot kg m^2 -ben kapjuk.

$$\Theta = \frac{44 \cdot \pi \cdot 1,5 \cdot 7,9 \cdot 2,44}{2} \approx 2000 \text{ kg m}^2.$$

10. Valamely tengely mentén rögzített testre állandó forgatónyomaték hat. A test tehetetlenségi nyomatéka Θ , a forgatónyomaték M , a test kezdeti szögsebessége ω_0 , szöge pedig α_0 . Határozzuk meg szögsebességét és elfordulási szögét mint az idő függvényét!

A forgatónyomaték állandó, ezért

$$\omega = \int_0^t \beta \, d\tau + \omega_0,$$

ahol β a test szöggyorsulása, amely a testre ható forgatónyomatékkal és a test tehetetlenségi nyomatékával a következő kapcsolatban van:

$$\beta = \frac{M}{\Theta}.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\omega = \int_0^t \frac{M}{\Theta} \, d\tau + \omega_0 = \left[\frac{M\tau}{\Theta} \right]_0^t + \omega_0 = \frac{Mt}{\Theta} + \omega_0.$$

A test szögelfordulását mint az idő függvényét, ω idő szerinti integrálja adja:

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_0^t \omega \, d\tau + \alpha_0 = \int_0^t \left(\frac{M\tau}{\Theta} + \omega_0 \right) d\tau + \alpha_0 = \\ &= \left[\frac{M\tau^2}{2\Theta} + \omega_0 \tau \right]_0^t + \alpha_0 = \frac{Mt^2}{2\Theta} + \omega_0 t + \alpha_0.\end{aligned}$$

Legyen $M = 5 \text{ Nm}$; $\Theta = 2 \text{ kg m}^2$; $\omega_0 = 2 \frac{1}{s}$; $\alpha_0 = 0,5$.

Ekkor

$$\omega = \frac{5t}{2} + 2 = 2,5t + 2,$$

és

$$\alpha = \frac{5}{4} t^2 + 2t + 0,5.$$

11. Ha egy gáz állandó hőmérsékleten tágul, akkor tágulási munkát végez. Az elemi tágulási munka:

$$dW = p dV.$$

A V_1 -ről V_2 -re való tágulás közben végzett munka:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV.$$

A gáz nyomása és térfogata közötti kapcsolatot (állandó hőmérsékleten) a Boyle–Mariotte-törvény adja meg:

$$pV = k, \text{ ebből } p = \frac{k}{V}.$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{k}{V} dV = k [\ln V]_{V_1}^{V_2} = k (\ln V_2 - \ln V_1) = k \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Legyen $V_1 = 5 \text{ m}^3$; $p_1 = 2 \text{ atm}$; $V_2 = 20 \text{ m}^3$; $W = ?$

A Boyle–Mariotte-törvény arányossági tényezője: $p_1 V_1 = 10 \text{ m}^3 \text{ atm}$.

$$W = 10 \ln \frac{20}{5} = 10 \ln 4 \approx 10 \cdot 1,39 = 13,9 \text{ m}^3 \text{ atm}.$$

A végzett munkát mkp-ba számítjuk át:

$$W = 13,9 \text{ m}^3 \cdot 1,033 \cdot 10^4 \frac{\text{kp}}{\text{m}^2} \approx 14,4 \cdot 10^4 \text{ mkp}.$$

12. Határozzuk meg a pontszerű Q töltéstől r távolságban a potenciál értékét. A potenciál a télerősség r -től ∞ -ig vett improprius integrálja. A pontszerű töltéstől x távolságban a télerősség: $E = k \frac{Q}{x^2}$, ahol $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Cm}^2}{\text{C}^2}$ az MKSA-rendszerben.

$$U = \int_r^{\infty} k \frac{Q}{x^2} dx = \left[-k \frac{Q}{x} \right]_r^{\infty} = k \frac{Q}{r}.$$

Legyen $Q = 10^{-4} \text{ C}$ (coulomb); $r = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$; $U = ?$

$$U = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{10^{-4} \text{ C}}{0,3 \text{ m}} = 30 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

13. Határozzuk meg a C kapacitású és Q töltésű kondenzátor elektromos energiáját!

A kondenzátor energiáját úgy növeljük, hogy az egyik fegyverzetről dq töltést viszünk a másik lemezre. A töltés átvitele közben végzett elemi munka $dW = U dq$, ahol U a kondenzátor lemezei közötti potenciálkülönbség, amely a lemezeken levő töltéstől függ:

$$U = \frac{q}{C}.$$

$$W = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C} \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^Q = \frac{Q^2}{2C}.$$

Legyen $Q = 10^{-4} \text{ C}$ és $C = 3 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, ekkor $W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{10^{-8} \cdot \text{C}}{6 \cdot 10^{-8} \text{ F}} = \frac{1}{6} \text{ joule}.$

14. Határozzuk meg a szinuszosan váltakozó áram effektív értékét! Valamely váltakozó áram effektív értékén annak az egyenáramnak értékét értjük, amely ugyanabban a vezetőben ugyanannyi idő alatt ugyanannyi hőt fejleszt, mint a váltakozó áram. Kiszámítását úgy végezzük, hogy négyzetének teljes periódusra számított átlagértékéből négyzetgyököt vonunk.

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \sin^2 \omega t dt} = \\ &= \sqrt{\frac{I_0^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{I_0^2}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \\ &= \sqrt{\frac{I_0^2}{T} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right]_0^T} = \sqrt{\frac{I_0^2}{T} \left(\frac{T}{2} - \frac{[\sin 2\omega T] - 0}{4\omega} \right)} = \\ &= \sqrt{\frac{I_0^2}{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Vagyis a szinuszosan váltakozó áram effektív értékét megkapjuk, ha a maximális értéket (az amplitúdót) osztjuk $\sqrt{2}$ -vel.

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Szűcs Péter igazgató



Athenaeum Nyomda, 92.0845
Felelős vezető: Vida József igazgató

Felelős szerkesztő: Votisky Zsuzsa matematika–fizika tanár
A 6. kiadást gondozta: Dr. Ráczné Nagy Borbála okl. villamosmérnök
Műszaki vezető: Dormizs László
Műszaki szerkesztő: Ráczné Marosi Katalin
A kötetet tervezte: Kovács Tibor
A könyv formátuma: Fr5
Ívterjedelme: 17,6 (A5) ív
Ábrák száma: 123
Papír minősége: 70 g fm. ofset
Betűcsalád és méret: New Times 10/10
Azonosítási szám: 10136
MŰ: 4537-I-9295
Készült az MSZ 5601-1983 és 5602-1983 szerint
Az 5. kiadás változatlan utánnnyomása