BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Vetier András

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Műegyetemi Kiadó, 2008

A jegyzet szerzőjét a BME rektora 1985. évben - a jegyzet írásáért - nívódíjban részesítette:

Szerző:
Vetier András

(Kilencedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **051360**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 20,7 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 6810/08

TARTALOM

ELŐSZÓ

Ennek a jegyzetnek az a célja, hogy a matematika nehezebb fejezeteiben, technikai trükkjeiben kevésbé járatos olvasó is megismerkedhessen a valószinüségszámitás legfontosabb fogalmaival, tételeivel; láthassa az elmélet felépitését és alkalmazási lehetőségeit. Ezért tárgyalásunkban egyes helyeken átugorjuk a szigoru matematikai módszereket. Támaszkodunk a szemléletre, és egy-egy nehezebb bizonyitást heurisztikus magyarázattal helyettesitünk. Ilyenkor a bizonyitást vázlatos bizonyitásnak nevezzük. Ha pedig egy bizonyitásnak csak valamelyik lépését nem indokoljuk egzakt matematikai eszközökkel, akkor erre ott utalunk. Amikor egy közelitő egyenlőséget anélkül alkalmazunk, hogy a közelités pontosságát megvizsgálnánk, a $\approx$ jelet használjuk.

A B.M.E. Villamosmérnöki Karán a nappali és a levelező tagozaton is tanulnak valószinüségszámitást. Általában egy félév jut a valószinüségszámitásra, de a B oktatási formában ezt még követi matematikai statisztika vagy/és sztochasztikus folyamatok elmélete. Van olyan szak, ahol az első évben, más szakon csak a negyedik évben szerepel a valószinüségszámitás. Ezért nem volt könnyü egységes kari jegyzetet késziteni, amiből mindenki "megkapja a magáét". Néhány részre a későbbi fejezetek lényegében nem támaszkodnak, és igy szükség esetén ezek a részek kihagyhatók. Ilyenek: I/11; II/3,4,5; IV/6; VI/6; VII/1,2,3; X/6; XII; XIII/1,3,4; XIV. Ezeken kivül néhány nehezebb részt ugy szerkesztettem, hogy a kevésbé érdeklődő olvasó ezeket átugorhassa. Ezeket a lap szélén huzott szaggatott vonallal jelöltem meg. Néhány fontos gondolatot a lap szélén huzott kettős vonallal emeltem ki, nehogy elkerülje az Olvasó figyelmét. A definiált fogalmakat mindig aláhuztam. A "Definició" kulcsszót sehova sem irtam ki, hogy a szöveg folyamatosságát ne kelljen ezzel megtörni.

A jegyzet terminológiáját és jelölésrendszerét igyekeztem összhangban tartani Prékopa András Valószinüségelmélet c. könyvével (Müszaki Könyvkiadó, 1972). Ezt a könyvet ajánlom azoknak, akik további ismeretekre szeretnének szert tenni.

A jegyzetben bizonyitás nélkül vagy csak vázlatos bizonyitással tárgyalt, mélyebb eredmények egzakt bizonyitása megtalálható J. Neveu Bases mathématiques du calcul des probabilités (Masson et Cie, Paris, 1964) és V.V. Petrov Szummü nyezaviszimüh szlucsajnüh velicsin (Nauka, Moszkva, 1972) c. könyveiben.

I. VALÓSZÍNŰSÉG

1. „Rend a rendetlenségben"

Ha feldobunk egy dobókockát, biztosak lehetünk benne, hogy nem kerül Föld körüli pályára, hanem valahova leesik. Ha sík terepre esik, akkor az is biztos, hogy valamelyik lapja lesz felül, hiszen nem tud sem a sarkán, sem az élén megállni. Azt viszont nem lehet előre megmondani, hogy melyik lapja lesz felül. Ez véletlentől függ.

Ha egy jó műszaki állapotban lévő Mercedes kellő mennyiségű üzemanyaggal az M7-es autópályán Budapestről Székesfehérvárra igyekszik, akkor (feltéve, hogy semmiféle forgalmi dugó sem akadályozza abban, hogy a megengedett maximális sebességgel menjen) 0,66 óra = = 39,6 perc alatt Székesfehérvárra ér. Ugyanis a két város közti távolság 66 km, az autópályán a megengedett maximális sebesség 100 km/ó és tudjuk, hogy egyenletes sebesség esetén idő = ut/sebesség. Viszont akármennyire is szabad az ut a Mercedes előtt, nyilvánvaló, hogy sebessége nem egyenletes. Kis emelkedők, lejtők, szembeszél, hátszél, kanyarok, zavaró látási viszonyok stb. miatt hol lassabban, hol gyorsabban megy mint 100 km/ó. A sofőr nem képes ugy nyomni a gázpedált, hogy a kocsi pontosan 100 km/ó sebességgel menjen. Ezért a kocsi menetideje sem pontosan 39,6 perc. Ennél picivel több vagy kevesebb. Ha (lenne Mercedesem, és) többször leutaznék Budapestről Székesfehérvárra a mondott körülmények között, mindig más lenne a menetidő. Körülbelül 39,6 perc, de nem pontosan ennyi. A menetidőt nem lehet előre pontosan megmondani. Ezt is véletlen tényezők befolyásolják.

A való világ jelenségei (pl. kockadobás; közlekedés) olyanok, hogy bizonyos feltételek mellett (a kocka sík terepre esik; autónkat semmi sem akadályozza abban, hogy maximális sebességgel menjen) egyes események (a kocka valahova leesik; autónk odaér Székesfehérvárra) biztos bekövetkeznek, más események (pl. a kocka ugy esik le, hogy a 6-os szám lesz felül; autónk menetiedje nem több 39,6 perc-nél) véletlentől függően vagy bekövetkeznek vagy nem.

A véletlenszerüség bizonyosfajta rendetlenséget jelent: nem lehet előre tudni, hogy a kocka melyik oldala lesz felül. De nyilván mindenki tapasztalta már, hogy szabályos dobókocka esetén ritkábban lesz a dobás eredménye 6-os, mint nem 6-os. Sőt, ennél többet is állithatunk: ha sokszor dobjuk fel a kockát, akkor a dobás eredménye az esetekmek körülbelül $\frac{1}{6}$ részében lesz 6-os, és $\frac{5}{6}$ részében nem 6-os. Ez bizonyosfajta rendet, törvényszerüséget jelent a rendetlenségben. Ha az ehhez hasonló törvényszerüségeket felismerjük, hasznunk származhat belőle. Egyrészt alaposabban megismerjük a jelenségeket (a "véletlentől függően bekövetkezik vagy nem következik be" megállapitásnál sokkal alaposabb ismerettel rendelkezünk, ha tudjuk, hogy "az eseteknek körülbelül $\frac{1}{6}$ részében bekövetkezik, és $\frac{5}{6}$ részében nem következik be"), másrészt a törvényszerüségek ésszerü kihasználásával "anyagi" hasznunk is keletkezhet. Például jó üzlet lenne számomra az alábbi hazárd játék: feldobunk egy szabályos dobókockát, ha 6-osra esik, akkor nyerek 6 Ft-ot, ha nem 6-osra esik, akkor vesztek 1 Ft-ot. Ugyanis például 120 fogadás után nyereményem körülbelül

$$\frac{1}{6} \cdot 120 \cdot 6 - \frac{5}{6} \cdot 120 \cdot 1 = 20 \text{ Ft}$$

lenne.

Ha egy jelenségről céljainknak megfelelő modellt lehet késziteni a jelenségben felbukkanó véletlen tényezők figyelembevétele nélkül, akkor számunkra ez is megfelelő. Például a vonatok - különösen télen - eléggé véletlenszerüen közlekednek, a vasuti menetrendeket mégis ennek figyelembevétele nélkül készitik. Más esetekben (pl. időjárás előrejelzésekben) nagyon is figyelembe kell venni a véletlen tényezőket. A valószinüségszámitás elmélete - felhasználva a véletlenszerüségben rejlő törvényszerüségeket - éppen arra ad utmutatást, hogy mit kell tennünk, ha egy jelenségről a véletlen tényezők figyelembevételével akarunk modellt késziteni.

A való világban nehéz olyan jelenséget találni, melybe a véletlen ne szólna bele. Ezért a valószinüségszámitás alkalmazási területe szinte "nem ismer határokat". A valószinüségszámitás szemléletmódja, fogalmai manapság olyannyira fontosak, hogy az általános iskola alsó tagozatában is tanitják. Kezdjünk hozzá gyorsan mi is!

2. Véletlen jelenség

Egy olyan jelenséget, melynek kimenetelét nem lehet pontosan tudni a jelenség lezajlása előtt, véletlen jelenségnek fogunk nevezni. Például:

1. A kockadobásnál nem tudjuk, hogy hol és melyik oldalára fog leesni a kocka.

2. Délelőtt nem lehet megmondani, hogy az M7-es autópálya forgalma pontosan hogyan fog alakulni az esti órákban.

3. Az időjárás is véletlen jelenség.

Véletlen jelenségeket azáltal adhatunk meg, hogy leirjuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a jelenség lezajlik. Például:

1. Megmondjuk, hogy szabályos kockát dobunk fel. Előirjuk, hogy jó magasra kell a kockát feldobni. Garantáljuk, hogy a kocka sik terepre essen.

2. Megszabjuk, hogy mikor (munkanapon vagy hétvégén, télen vagy nyáron, milyen napszakban stb.) vizsgáljuk az autópálya forgalmát.

3. Megmondjuk, hogy hol (Budapesten, a Hawaii-szigeteken), mikor (tavasszal, ősszel) stb. vizsgáljuk az időjárást.

Egy véletlen jelenség megadásánál az összes szóbajöhető feltétel részletes leirása gyakorlati és elvi akadályokba ütközik. A részletes leirás több oldalt tenne ki, illetve akárhány feltétel megadása után fel lehet tenni olyan kérdést, melyet a megadott feltételekből nem lehet megválaszolni. Ezt a nehézséget azzal próbáljuk áthidalni, hogy csak a felvetett probléma szempontjából lényeges feltételeket irjuk le, továbbá a feladatok szövegét ugy fogalmazzuk meg, hogy az Olvasó remélhetőleg magától kitalálja a nem részletezett feltételeket is. Ennek eredményeképpen a valószinüségszámitás feladatok szövege általában csak közepesen hosszu. Helyes megértésük viszont az Olvasó aktiv fantáziáját igényli.

3. Esemény

Véletlen jelenségekkel kapcsolatban megfogalmazhatunk olyan állitásokat, melyek vagy bekövetkeznek a jelenség lezajlása során, vagy nem. Például:

1. A kockadobásnál a kocka vagy ugy esik le, hogy a 6-os lesz felül, vagy nem.

2. Az M7-es autópályán télen, egy kiszemelt munkanapon, este 18 és 20 óra között vagy lesz karambol, vagy nem.

Minden olyan kijelentést, állitást, ami a vizsgált véletlen jelenség lezajlása során vagy bekövetkezik, vagy nem következik be, eseménynek nevezünk. Az eseményeket azáltal adjuk meg, hogy megmondjuk, mikor következik be az esemény. Események jelölésére legtöbbnyire nagy betüket használunk. Például események:

1. A = a kockadobás eredménye 6-os. (olvasd: "A legyen az az esemény, hogy a kockadobás eredménye 6-os")

2. B = az M7-es autópályán télen, munkanapon, este 18 és 20 óra között karambol történik.

3. C = holnap Budapesten esni fog az eső.

Nem szabad elfelejteni, hogy az eseményeket mindig valamilyen korábban elmagyarázott vagy nyilvánvalósága miatt el sem magyarázott véletlen jelenséggel kapcsolatban kell értelmeznünk.

Két eseményt akkor tekintünk egyenlőnek, ha pontosan egyszerre következnek be. Ha egy dobókockával dobunk, akkor a "6-tal osztható számot dobunk" esemény ugyanaz, mint az "5-nél nagyobb számot dobunk" esemény, hiszen ezek pontosan egyszerre következnek be: a kockán az egyetlen 6-tal osztható szám és az egyetlen 5-nél nagyobb szám a 6-os.

Az események közé soroljuk és biztos eseménynek nevezzük azt, ami biztosan bekövetkezik, és lehetetlen eseménynek azt, ami semmiképpen sem következhet be. Például a kockadobással kapcsolatban biztos esemény: "a kocka valahova leesik", lehetetlen esemény: "10-est dobunk". A biztos esemény jele legyen Ω , a lehetetlen eseményé $\emptyset$.

4. Relatív gyakoriság, valószínűség

Ha egy véletlen jelenség lezajlik (pl. feldobjuk a kockát, és az leesik; az M7-es autópálya forgalmát a bennünket érdeklő szempontok alapján egyik este megfigyeljük), akkor azt mondjuk, hogy egy kisérletet hajtottunk végre. Ha a kisérletet többször végezzük el, mondjuk n-szer (pl. a kockát n-szer feldobjuk, vagy n darab kockát dobunk fel egyszerre, n napon át vizsgáljuk az autópálya forgalmát), akkor azt mondjuk, hogy n hosszuságu kisérletsorozatot hajtottunk végre. Vigyázat, nehogy félreértés essék! Ha a véletlen jelenség 10 darab kocka feldobásából áll, akkor egy 45 hosszuságu kisérletsorozat egy 10 kockából álló kockakészlet 45-szöri vagy 450 darab 10-es csoportokba osztott kocka egyszeri feldobását jelenti.

Tekintsünk most egy véletlen jelenséget és vele kapcsolatban egy A eseményt. Végezzünk a véletlen jelenséggel kapcsolatban n darab kisérletet. Ezen kisérletsorozat során az A esemény valahányszor bekövetkezik. Ezt a számot jelöljük n_A-val. Az $\frac{n_A}{n}$ hányadost - mely azt mutatja, hogy a kisérletek hányad részében következett be az A esemény - az esemény relativ gyakoriságának nevezzük. n_A véletlentől függ, így a relativ gyakoriság is véletlentől függ.

A való világ véletlen jelenségei olyanok, hogy a legtöbb A eseményhez hozzá lehet rendelni egy véletlentől nem függő, csupán az A eseménytől függő $P(A)$-val jelölt számértéket, melyre igazak a következők:

1. Ha a szóban forgó véletlen jelenségre "nagyon hosszu" kisérletsorozatot végzünk, akkor az eseteknek körülbelül $P(A)$-nyi részében következik be az A esemény. Tehát hosszu kisérletsorozat esetén az $\frac{n_A}{n}$ relativ gyakoriság "közel lesz" $P(A)$-hoz.

2. Ha valamilyen célból el akarunk érni egy bizonyos pontosságot, akkor "sok" "elég hosszu" kisérletsorozat elvégzése esetén csak "viszonylag kevés" kisérletsorozatban fog a relativ gyakoriság ettől a $P(A)$ számtól a megadott pontosságnál jobban eltérni. Ha például A a 6-os dobásának eseménye, és a kocka teljesen szimmetrikus, és sok ember mindegyike elég sokszor feldobja a kockát, akkor az emberek számához viszonyitva csak kevés embernél lesz a relativ gyakoriság $(\frac{1}{6} - 0,01)$-nál kisebb vagy $(\frac{1}{6} + 0,01)$-nál nagyobb.

Ezt a $P(A)$ számot az A esemény valószinüségének nevezzük. (Valószinüség latinul: probabilitas. Innen jön a P betü.) A P betü mögé a zárójelbe magát az eseményt definiáló mondatot is irhatjuk, például $P(\text{hatost dobunk}) = \frac{1}{6}$.

A fentiekben használt "nagyon hosszu", "közel lesz", "sok", "elég hosszu", "viszonylag kevés" szavak nem preciz matematikai kifejezések. Felépitendő matematikai modellünktől elvárjuk, hogy a relativ gyakoriság fentebb elmondott "stabilitási tulajdonságát" pontos matematikai formába öntse. Mint a XIV. fejezet 2. pontjában látni fogjuk, eme kivánalmunknak modellünk eleget fog tenni.

Felmerül a kérdés, hogy egy eseményhez igy hozzárendelt valószinüség mennyire meghatározott, mennyire objektiv, milyen értelemben létező érték. Ezt a következő analógiával világitjuk meg. Ha például dobókockánk tömegét szeretnénk megállapitani, akkor ezt megtehetjük grammnyi, tizedgrammnyi vagy akár milligrammnyi pontossággal. De ha 25 tizedesjegy pontossággal szeretnénk megadni a tömeget grammokban, akkor egy atomtömegnél is pontosabban kellene mérnünk. Ez pedig lehetetlenség. A matematikai modellben a dobókocka dekagramokban kifejezett tömegét persze jellemezhetjük egy valós számmal, és ez a szám lehet - mondjuk - éppen $\frac{1}{6}$. Az eredeti, valós kockára vonatkozóan ez azt az információt nyujtja nekünk, hogy a dobókocka tömege például 0,166 és 0,167 dekagramm között van. Most nézzük, mi a helyzet a 6-os dobásának valószinüségével. Ha a dobókockát egy tökéletes mértani idommal modellezzük, akkor szimmetria okok miatt azt mondjuk, hogy a 6-os dobásának valószinüsége $\frac{1}{6}$. Egy elegendően szabályos dobókocka esetén ez a valószinüség tényleg 0,166 és 0,167 közé esik. De ennek a valószinüségnek a meghatározása 25 tizedesjegy pontossággal értelmetlen, mert ha csak egy porszem tapad a kocka egyik oldalára, már attól is módosul a 6-os lapra esés valószinüsége. Valódi kocka esetén az egyes valószinüségeket kisérletileg - azaz méréssel - határozhatjuk meg. Érdekes kérdés, hogy vajon hány kisérletet kell végeznünk, hogy a relativ gyakoriság a valószinüséget előre adott pontossággal megközelitse. Ezekkel az izgalmas dolgokkal majd a XIV. fejezet 3. pontjában foglalkozunk.

Az események valószinüségének meghatározása a matematikai modellben logikai okoskodásokkal (pl. a kocka szimmetriája alapján a 6-os dobásának valószinüsége $\frac{1}{6}$), könnyebb-nehezebb matematikai módszerekkel (lásd a jegyzet hátralévő részét) lehetséges. A logikai okoskodásokkal nyert eredmények is - ne feledjük! - végsősoron a tapasztalatra épülnek, mert például egy valóságos kocka szimmetrikus mivoltát nem lehet elméleti uton bebizonyitani csak (többé-kevésbé) tapasztalni.

Természetesen egy esemény valószinüségéről csak meghatározott feltételek teljesülése esetén lehet beszélni. Ha a feltételek megváltoznak, az esemény valószinüsége is megváltozhat. Ha például a kockát nem dobjuk fel elég magasra, hanem óvatosan kigörditjük kezünkből (kisgyerekek próbálnak igy 6-ost dobni, amikor nagyon szeretnének győzni a "Ki nevet a végén" játékban), akkor jelentősen növelhetjük a 6-os dobásának esélyét. A mi terminológiánkkal élve ezt azzal a fordulattal fejezhetjük ki, hogy csak adott körülményekkel rendelkező véletlen jelenségre vonatkoztatva beszélhetünk egy esemény valószinüségéről. Ha a véletlen jelenség feltételei megváltoznak, akkor az események valószinüsége megváltozhat.

Ha a véletlen jelenség körülményeit nem ismerjük, semmi tapasztalatunk nincs, akkor a jelenséggel kapcsolatos események valószinüségéről nem beszélhetünk. Aki soha nem foglalkozott focival, semmit nem érez a hétvégi totó-meccsek esélyeiről, mig a foci berkeiben járatosabb egyének esetleg joggal érezhetik, hogy melyik csapat győzelme a valószinübb, sőt esetleg számszerü valószinüség-értéket is tulajdonithatnak kedvenc csapatuk győzelmének: "Ilyen formaidőzités, csapatösszeállitás, időjárási viszonyok stb. mellett az eseteknek körülbelül 70%-ában szokta megverni az én csapatom a tiédet, tehát holnapi győzelmünk valószinüsége 0,7".

Matematikai modellünk felépitését mindenekelőtt a valószinüség alapvető tulajdonságainak felkutatásával, a valószinüség axiómáinak kimondásával kell kezdenünk. Ehhez először az események közötti müveletekkel és relációkkal kell megismerkednünk.

5. Műveletek és relációk események között

Ugyanazzal a véletlen jelenséggel kapcsolatban értelmezett események között összefüggéseket fedezhetünk fel. Például a kockadobással kapcsolatban értelmezzük a következő eseményeket:

A = páros számot dobunk, (2, 4, 6),
B = páratlan számot dobunk (1, 3, 5),
C = 3-nál nagyobb számot dobunk, (4, 5, 6),
D = 3-mal osztható számot dobunk, (3, 6),
E = 2-nél nagyobb számot dobunk, (3, 4, 5, 6),
F = 4-et vagy 6-ot dobunk, (4, 6),
G = 2-t dobunk, (2).

Vegyük észre, hogy

1. A pontosan akkor következik be, amikor B nem következik be. Ezt azzal a szóhasználattal fejezzük ki, hogy az A és B események egymás komplementumai. Jelölésben: $\bar{A} = B$, $\bar{B} = A$.

2. E pontosan akkor következik be, amikor C és D közül legalább az egyik bekövetkezik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy E a C és D események összege. Jelölésben: $E = C + D$.

3. F pontosan akkor következik be, amikor A is és C is bekövetkezik. Ennek a ténynek a kifejezésére azt mondjuk, hogy F az A és C események szorzata. Jelölésben: $F = A \cdot C$.

4. G pontosan akkor következik be, amikor A bekövetkezik, de C nem következik be. Ilyenkor G-t az A és C események különbségének nevezzük. Jelölésben: $G = A - C$. Vegyük észre, hogy $A - C = A \cdot \bar{C}$.

5. B és F egyidejűleg nem következhet be, az ő szorzatuk a lehetetlen esemény. Ilyenkor a B és F eseményeket egymást kizáró eseményeknek mondjuk. Erre külön jelölést nem vezettünk be. Ha kell, ennyit írunk: $B \cdot F = \phi$.

6. Ha F bekövetkezik, akkor A is bekövetkezik. Ennek kifejezésére szolgál: F maga után vonja A-t. Jelölésben $F \subset A$. Vegyük észre, hogy F akkor és csak akkor vonja maga után A-t, ha $F \cdot A = F$.

A fentiekben négy műveletet (komplementum-képzés, összeadás, szorzás, kivonás) és két relációt ("egymást kizárják", "maga után vonja") értelmeztünk egy konkrét példán keresztül.

Nem okoz problémát az összeg és a szorzat értelmezése kettőnél több eseményre sem. $A = A_1 + A_2 + \ldots$ vagy $A = \sum_i A_i$ (olvasd:

szumma A_i), illetve $B = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots$ vagy $B = \prod_i B_i$ (olvad: produktum B_i) azt jelenti, hogy A pontosan akkor következik be, ha az $A_1, A_2, \ldots$ események közül legalább az egyik bekövetkezik, illetve, hogy B pontosan akkor következik be, mikor a $B_1, B_2, \ldots$ események mindegyike bekövetkezik.

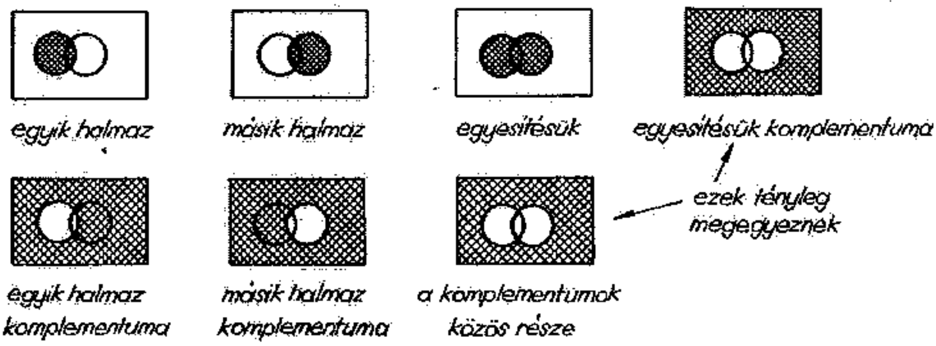
A $C_1, C_2, \ldots$ eseményeket pedig akkor nevezzük <u>egymást kizáróaknak</u>, ha közülük legfeljebb egy következhet be. Tehát akárhogy is veszünk közülük kettőt, ezek együttes bekövetkezése lehetetlen: $i \neq j$ esetén $C_i \cdot C_j = \phi$

6. Események szemléltetése

Könnyü meggyőződni róla, hogy az események rendszere a fenti müveletekkel és relációkkal felruházva ugyanolyan azonosságoknak tesz eleget, mint egy alapul választott halmaz részhalmazainak rendszere a szokásos halmazmüveletekkel és relációkkal felruházva. Ehhez az eseményekkel kapcsolatos fogalmakat a következő szótár segitségével kell megfeleltetni a halmazokkal kapcsolatos fogalmaknak:

biztos esemény	alaphalmaz
lehetetlen esemény	üres halmaz
valamilyen esemény	az alaphalmaz részhalmaza
esemény komplementuma	kiegészitő (komplementer) halmaz
események összege	halmazok egyesitése (uniója)
események szorzata	halmazok közös része (metszete)
események különbsége	halmazok különbsége
egymást kizáró események	közös elem nélküli (diszjunkt) halmazok
A maga után vonja B-t	A részhalmaza B-nek

Például halmazokra igaz, hogy két halmaz egyesitésének komplementuma megegyezik a halmazok komplementumainak közös részével:



1. ábra

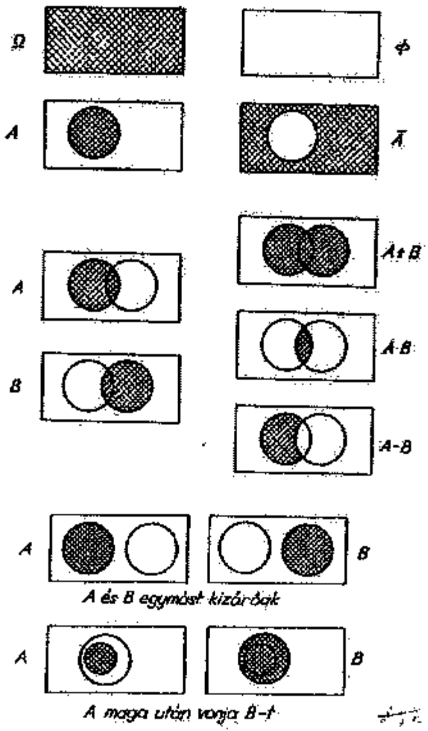
Példaként ennek az azonosságnak a megfelelőjét levezetjük eseményekre:

De Morgan-azonosság: Tetszőleges A és B eseményekre $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$.

Levezetés: $A + B$ akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. Ezért $\overline{A+B}$ akkor következik be, ha sem A, sem B nem következik be. Ez pedig annyit jelent, hogy $\overline{A}$ is és $\overline{B}$ is bekövetkezik, vagyis $\overline{A} \cdot \overline{B}$ bekövetkezik. Ezzel beláttuk, hogy $\overline{A+B}$ és $\overline{A} \cdot \overline{B}$ pontosan egyszerre következnek be. Az események egyenlőségére mondott definiciónk szerint ez azt jelenti, hogy $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$. ■

A többi azonosságot ki sem mondjuk, mert a Kedves Olvasó bizonyára találkozott már velük a halmazelméletben vagy a Boole-algebrák (ejtsd: bul) elméletében, és a fentiekhez hasonló gondolatmenetekkel egyszerűen kiadódnak eseményekre is.

Mindezek alapján az eseményeket szemléltethetjük ugyanugy, ahogy halmazokat szoktunk szemléltetni. Az alábbi ábrák remélhetőleg magyarázat nélkül is érhetőek:



2. ábra

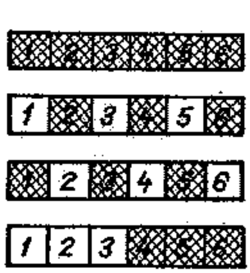
Ha például a kockadobás véletlen jelenségét vizsgáljuk, és csak olyan események érdekelnek bennünket, melyek azzal kapcsolatosak, hogy hányast dobunk (olyan események, melyek például azzal kapcsolatosak, hogy a kocka hová esik, nem érdekelnek minket), akkor az események halmazokkal való szemléltetésének céljára alaphalmazként választhatjuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 elemekből álló halmazt. Az előző pontban értelmezett A, B, C.... eseményeknek megfelelő halmazok pedig éppen azokból a számokból állhatnak, melyeket ezen események értelmezésénél zárójelben megadtunk:

Ω = biztos esemény

A = páros számot dobunk

B = páratlan számot dobunk

C = 3-nál nagyobb számot dobunk



3. ábra

Hasznos a Kedves Olvasó számára, ha az eseményeket - ahol csak lehet - halmazoknak felelteti meg. Ugyanis az eseményeket sokszor csak hosszasan megfogalmazott mondatokkal írhatjuk le, míg a halmazokat rajzzal szemléltethetjük. Az események közötti müveletek azonosságait is gyorsabban lehet felidézni rajz segítségével.

Megjegyzés: Mindez azt az ötletet adja, hogy az események közötti müveleteknek ne az aritmetikából vegyünk nevet, hanem a halmazelméletből: összeg helyett unióról, szorzat helyett metszetről stb. beszéljünk, s jelölésünkben is a halmazelméleti jelölésekhez igazodjunk: $A + B$ helyett $A \cup B$-t, $A \cdot B$ helyett $A \cap B$-t stb. írjunk. Így ugyanis az események közötti müveletek tulajdonságai könnyebben megjegyezhetőbbé válnának. Nem állna fenn annak a veszélye, hogy valaki $A + A$ láttán $2A$-ra asszociálna, holott $A + A = A$. (Halmazoknál is $A \cup A = A$.) Mindennek semmi akadálya nem lenne, de mi inkább igazodunk Prékopa András Valószinüségelmélet c. könyvének terminológiájához és jelöléseihez.

7. A valószínűség axiómái

Mint korábban leszögeztük, egy A esemény $P(A)$ valószinüsége azt fejezi ki, hogy hosszu kisérletsorozat esetén az eseteknek körülbelül $P(A)$-nyi részében következik be az A esemény. Tehát ha n nagy, akkor az $\frac{n_A}{n}$ relativ gyakoriság közel van a $P(A)$ valószinüséghez.

Mivel bármely esemény relativ gyakorisága nagyobb vagy egyenlő mint 0, és kisebb vagy egyenlő mint 1, nem kell különösebben érvelni amellett, hogy elfogadjuk:

1. axióma: Bármely A esemény valószinüsége nagyobb vagy egyenlő mint 0, és kisebb vagy egyenlő mint 1:

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

A biztos esemény n kisérlet során n-szer következik be, a lehetetlen esemény pedig egyszer se. Tehát a biztos esemény relativ gyakorisága mindig 1, a lehetetlen eseményé pedig 0. Ezért a következő axiómánk is kézenfekvő.

2. axióma: A biztos esemény valószinüsége 1, a lehetetlen esemény valószinüsége 0:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\phi) = 0.$$

3. axiómánk megvilágitása céljából tekintsük a következő véletlen jelenséget: kitöltünk egy lottószelvényt, és pénteken délelőtt izgalommal figyeljük a rádiót, hogy mik a nyerő számok. Értelmezzük az alábbi eseményeket:

A = szelvényünkkel a pénteki huzáson nyerünk (legalább két találatunk van),

A_5 = szelvényünk 5 találatos,

A_4 = " 4 " ,

A_3 = " 3 " ,

A_2 = " 2 " .

Az A_2, A_3, A_4, A_5 események egymást kizáróak: $A_iA_j = \phi$, ha $i \neq j$. Az A esemény pontosan akkor következik be, ha az A_2, A_3, A_4, A_5 események közül valamelyik bekövetkezik. Ezért az A esemény az A_2, A_3, A_4, A_5 események összege: $A = \sum_{i=2}^{5} A_i$. Végezzünk n kisérletet, azaz n héten át egy-egy szelvénnyel játsszunk a lottón. Az n hét eltelte után számoljuk meg hányszor volt 5-ösünk, 4-esünk, 3-asunk, illetve 2-esünk. Ezen négy darab szám összege megadja, hogy összesen hányszor nyertünk. Korábbi jelöléseinket értelemszerűen használva ezt így irhatjuk fel: $n_A = \sum_{i=2}^{5} n_{A_i}$. Általánosságban is igaz, hogy ha egy A esemény véges vagy végtelen sok egymást kizáró A_i esemény összege, azaz $A = \sum_i A_i$, és $i \neq j$ esetén $A_i \cdot A_j = \phi$, akkor n kisérletet végezve az A esemény bekövetkezéseinek számát megkapjuk, ha az A_i események bekövetkezéseinek számát összeadjuk: $n_A = \sum_i n_{A_i}$.

Ebből a relativ gyakoriságokra is hasonló összefüggés adódik:

$\frac{n_A}{n} = \sum_i \frac{n_{A_i}}{n}$. Ezért axiómaként elfogadjuk:

3. axióma: (a valószinüség összegzési tulajdonsága). Ha az A esemény véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok egymást kizáró A_i esemény összege, akkor az A esemény valószinüsége az A_i események valószinüségeinek összegével egyenlő. Képletekkel megfogalmazva:

$$\text{Ha} \quad A = \sum_{i=1}^{k} A_i, \quad \text{és} \quad i \neq j \quad \text{esetén} \quad A_i \cdot A_j = \phi, \text{akkor}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \qquad (k \leq \infty).$$

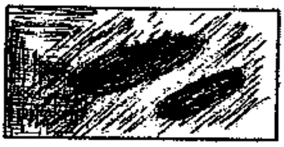
Látni fogjuk, hogy ezekből az axiómákból kiindulva olyan elméletet lehet felépíteni, ami igen sok gyakorlati probléma megoldására alkalmas. Végülis ez igazolja, hogy axiómáinkat helyesen vettük fel.

3. axiómánkkal kapcsolatban megjegyeztük, hogy ha csak véges sok tagra vagy pedig megszámlálhatóan végtelennél több tagra is megkövetelnénk az összegzési tulajdonság teljesülését, akkor csak sokkal szegényebb elméletet tudnánk felépíteni. A figyelmes Olvasó bizonyára észre fogja venni a későbbiekben, hogy az elmélet felépítésénél hol nem lenne elegendő a véges sok tagra kimondott összegzési tulajdonság, illetve hol vezetne ellentmondásra a megszámlálhatóan végtelennél több tagra kimondott összegzési tulajdonság.

8. A valószínűség szemléltetése

Ha az eseményeket valamilyen alaphalmaz részhalmazaival szemléltetjük, akkor a valószínűséget is szemléltethetjük a következőképpen: az alaphalmazt festékkel kenjük be oly módon, hogy minden részhalmazra annyi festék (mondjuk annyi gramm) jusson, amennyi a részhalmaznak megfelelő esemény valószínűsége.

Ω



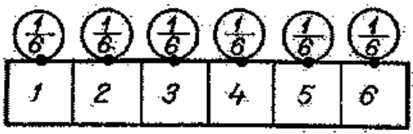
4. ábra

Ezt a szemléltetést az teszi lehetővé, hogy az alaphalmaz festékkel való bekenése rendelkezik a következő tulajdonsággal: ha az alaphalmaz valamelyik részhalmazát véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok közös elem nélküli halmaz egyesítéseként állítjuk elő, akkor a tekintett részhalmazon levő festékmennyiség az egyesítésben szereplő halmazokon lévő festékmennyiségek összegével egyenlő. Ez a tulajdonság a valószínűség összegzési tulajdonságának felel meg.

5. ábra
A kis téglalapon annyi gramm festék van, mint a háromszögeken együttvéve

Mivel a biztos esemény valószínűsége 1, a biztos eseménynek megfelelő alaphalmazon egységnyi festékmennyiségnek kell lenni. Tehát mindig egységnyi festékmennyiséget kell szétkenni az alaphalmazon.

Ha például a kockadobás véletlen jelensége esetén az 1, 2, 3, 4, 5, 6, elemekből álló halmazt választjuk alaphalmaznak, és a kocka szimmetriája alapján feltételezzük, hogy a kocka minden oldala $\frac{1}{6}$ valószinüséggel kerülhet felülre, akkor a festéket ugy kell elosztani ezen hat elem között, hogy mindegyikre $\frac{1}{6}$ -nyi festékmennyiségből egy "festékcsomót" helyezünk:



6. ábra

Annak ellenére, hogy ilyesmit ténylegesen lerajzolni nem mindig lehet, képzeletben meg lehet csinálni, és már ez is sokszor segit a valószinüség tulajdonságainak vizsgálatakor. (Lásd A valószinüség további tulajdonságai c. pontban.)

9. Klasszikus problémák

"Klasszikus" jelzővel azért illetjük a most következő problématipust, mert a XVII. században a valószinüségszámitás ilyen jellegü feladatok kapcsán indult fejlődésnek Fermat (1601-1665), Pascal (1623-1662), Huygens (1629-1695) és James Bernoulli (1654-1705) munkássága során.

Gyakran találkozunk - különösen szerencsejátékokkal kapcsolatos feladatoknál - olyan véletlen jelenségekkel, melyeknél a biztos eseményt véges sok egyforma valószinüségü, egymást kizáró esemény összegére lehet bontani. Ilyenkor ezeket az eseményeket egyszerü eseményeknek nevezzük, és azt mondjuk, hogy klasszikus problémával állunk szemben. Például:

1. Ha egy jól összekevert magyarkártya-csomagból huzunk egy lapot, akkor reális abból kiindulni, hogy mind a 32 lap egyformán valószinü. Ezért egyszerü eseményeknek vehetjük a következő eseményeket:

A_1 = a piros 7-est huzzuk,

A_2 = a piros 8-ast huzzuk,

$\vdots$

A_{32} = a zöld ászt huzzuk.

2. Ha egy szabályos dobókockával dobunk, akkor mind a 6 oldala $\frac{1}{6}$ valószinüséggel kerülhet felülre. Itt 6 darab egyszerü eseményt értelmezhetünk.

3. Ha két kockával (egy pirossal és egy fehérrel) dobunk, akkor az alábbi 36 lehetőség egyformán valószinü:

pf	pf	pf	pf	pf	pf
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

p = piros kockán
f = fehér kockán

7. ábra

Itt 36 darab egyszerü eseményt értelmezhetünk.

Ha az egyszerü események száma n, akkor minden egyszerü esemény $\frac{1}{n}$ valószinüségü. Ugyanis jelöljük az egyszerü eseményeket $A_1, A_2, \ldots, A_n$-nel. $\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i$ és $A_i \cdot A_j = \phi$ $(i \neq j)$ miatt a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján $P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. Ha az A_i események közös valószinüségét p-vel jelöljük, akkor $1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} p = n \cdot p$, ahonnan

$$P(A_i) = p = \frac{1}{n}.$$

Például:

1. P (a tök ászt huzom) $= \frac{1}{32}$.
2. Egy kockával dobva, P (6-ost dobunk) $= \frac{1}{6}$.
3. Két kockával dobva,

P (a piros kockán 4-est, a fehér kockán 6-ost kapunk) $= \frac{1}{36}$,
P (mindkét kockán 1-est kapunk) $= \frac{1}{36}$.

Ha egy B esemény bizonyos egyszerü események összegeként állitható elő, akkor B-t a szóban forgó egyszerü eseményekből összetevődő összetett eseménynek nevezzük. Ha a B esemény k darab egyszerü eseményből tevődik össze, akkor a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján nyilván $P(B) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$. Tehát egy összetett esemény valószinüsége olyan tört, melynek számlálója azt mutatja, hogy hány egyszerü eseményből tevődik össze az esemény, a nevezője pedig az összes egyszerü események száma. Például:

1. P (makkot huzok, de nem az ászt) $= \frac{7}{32}$.
2. Egy kockával dobva P (páros számot dobok) $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
3. Két kockával dobva P (a dobott számok összege 10) $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Ugyanis az az esemény, hogy a dobott számok összege 10, három egyszerü eseményből tevődik össze: $10 = 4 + 6 = 5 + 5 = 6 + 4$.

Megjegyzések:

1. Sokszor előfordul, hogy egy összetett eseményről csak némi leleményességet igénylő trükökkel lehet megállapitani, hogy hány egyszerü eseményből tevődik össze. Ezt a leleményességet sok feladat önálló megoldásával lehet megszerezni. A kombinatorika ismertebb képleteink (permutációk, kombinációk, variációk) tudása hasznos, de nem pótolja az önálló feladatmegoldást.

2. Hangsulyozzuk, hogy a fent említett $P(B) = \frac{k}{n}$ (ahol $k = \ldots$, $n = \ldots$) képlet csak akkor alkalmazható, ha az egyszerü eseményeknek választott események tényleg egyformán valószinüek. Például hibás az alábbi gondolatmenet.

Két kockával dobva a dobott számok összege 11 féle lehet: $2, 3, 4, \ldots, 12$. A 11 lehetőség közül 1 jelenti azt, hogy az összeg 10-zel egyenlő, ezért (?!?) P (a dobott számok összege 10) $= \frac{1}{11}$.

Az okoskodásban az a hiba, hogy az említett 11 lehetőség nem egyformán valószinü: például P (a dobott számok összege 2) $= \frac{1}{36}$, P (a dobott számok összege 3) $= \frac{2}{36}$.

3. Nézzük az alábbi feladatot.

Feladat: Feldobunk két kockát (egy pirosat és egy fehéret). Mi a valószinüsége, hogy a piros kockán 6-ost kapunk?

1. megoldás: Az ábrán szemléltetett 36 egyszerű esemény közül a bevonalkázott 6 darab jelenti azt, hogy a piros kockán 6-ost kapunk:

pf	pf	pf	pf	pf	pf
11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	[illegible]
13	23	33	43	53	[illegible]
14	24	34	44	54	[illegible]
15	25	35	45	55	[illegible]
16	26	36	46	56	[illegible]

8. ábra

Igy $\quad P(\text{a piros kockán 6-ost kapunk}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. ■

2. megoldás: Nem törődünk azzal, hogy a fehér kockával mi történik. Egyszerű eseményeknek vehetjük az alábbi 6 darab egyformán valószínű eseményt:

A'_1 = a piros kockán 1-est kapunk,

.
.
.

A'_6 = - " - 6-ost kapunk.

Ezen 6 darab egyszerű esemény közül az utolsónak a valószínűségét kérdezi a feladat, ami $P(A'_6) = \frac{1}{6}$. ■

A két megoldás mindegyike jó. Tanulságul azt szűrjük le, hogy mitőlünk, a feladat megoldóitól függ, hogy milyen eseményeket vesszük egyszerű eseményeknek. A lényeg csak az, hogy a felvett események egyformán valószínűek és egymást kizáróak legyenek, továbbá összegük a biztos esemény legyen, és a feladatban vizsgálandó esemény az általunk felvett események közül valahányból összetevődő legyen. A 2. megoldásban használt egyszerű események is tekinthetők egyszerű eseményeknek, de nem lennének alkalmasak arra, hogy a "dobott számok összege 10" esemény valószínűségét meghatározzuk.

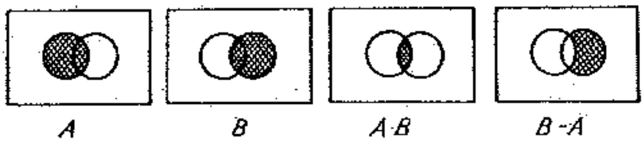
10. A valószínűség további tulajdonságai

A valószínűség axiómaként felvett tulajdonságaiból néhány ujabb tulajdonságot fogunk levezetni. Ezek igazságán persze senki sem fog meglepődni, hiszen ezek a tulajdonságok relativ gyakoriságokra átfogalmazva nyilvánvaló tényeket jelentenek, s a valószinüség fogalmát a relativ gyakoriságból vonatkoztattuk el. Valószinüségszámitási feladatok megoldása során ezeket a tulajdonságokat lépten-nyomon (nyilvánvalóságuk miatt sokszor észrevétlenül) felhasználjuk. Nem árt, ha "csokorba gyüjtjük őket".

Az egyes tételek állitását a tétel kimondása után rajz segitségével "láthatóvá" is próbáljuk tenni. (Emlékeztetőül: az alaphalmazt ugy kenjük be festékkel, hogy bármely esemény valószinüsége az eseménynek megfelelő halmazon lévő festék - mondjuk grammokkal kifejezett - mennyiségével egyenlő.) A rajzokon itt csak a halmazokat tüntetjük fel. A festéket csak képzeletben kenjük szét az alaphalmazon. Ha a Kedves Olvasó kivánja, ténylegesen fesse be vagy szines ceruzával satirozza be az ábrákat!

<u>1. tétel: Tetszőleges</u> A <u>és</u> B <u>eseményekre</u> $P(B) = P(A \cdot B) + P(B-A)$, <u>azaz</u> $P(B-A) = P(B) - P(A \cdot B)$.

Rajzban szemléltetve:



9. ábra

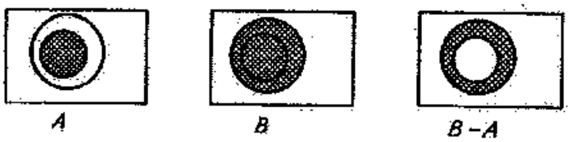
A B eseménynek megfelelő halmazon annyi festék van, amennyi az $A \cdot B$ illetve a $B-A$ eseményeknek megfelelő halmazokon együttesen.

Példaként az 1. tételt átfogalmazzuk relativ gyakoriságokra: egy kisérletsorozatban B pontosan annyiad részben következik be, ahányad részben "A is és B is bekövetkezik", plusz ahányad részben "B bekövetkezik, de A nem következik be".

<u>Bizonyitás.</u> $A \cdot B$ és $B-A$ egymást kizárják és összegük B-vel egyenlő: $(A \cdot B) \cdot (B-A) = \emptyset$, $(A \cdot B) + (B-A) = B$. Ezért a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján $P(B) = P(A \cdot B) + P(B-A)$. ■

A következő három tétel az 1. tétel következménye.

2. tétel: Ha A maga után vonja B-t, akkor $P(B-A) = P(B)-P(A)$
Rajzban szemléltetve:

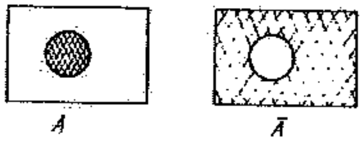


10. ábra

Ha egy halmaz részhalmaza egy másiknak, akkor a különbségükön annyi festék van, amennyivel több festék van a bővebb halmazon mint a szűkebb halmazon.

Bizonyítás: Ha A maga után vonja B-t, akkor $A \cdot B = A$, s így $P(A \cdot B)$ helyett $P(A)$-t írhatunk az 1. tételben. ■

3. tétel: Tetszőleges A eseményre $P(\bar{A}) = 1-P(A)$.
Rajzban szemléltetve:

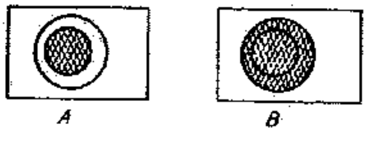


11. ábra

Mivel az alaphalmazon lévő festékmennyiség 1, az alaphalmaz tetszőleges részhalmazán és annak komplementumán együttesen egységnyi festékmennyiség található.

Bizonyítás: A maga után vonja Ω-t. Ezért az előző tételt alkalmazhatjuk $B = \Omega$ szereposztással. Azt kapjuk, hogy
$P(\bar{A}) = P(\Omega-A) = P(\Omega)-P(A) = 1-P(A)$. ■

4. tétel: Ha A maga után vonja B-t, akkor $P(A) \leq P(B)$.
Rajzban szemléltetve:



12. ábra

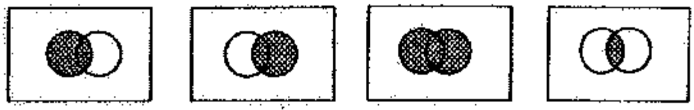
Ha egy halmaz részhalmaza egy másiknak, akkor ezen a halmazon legfeljebb annyi festék van, mint a másikon.

Bizonyitás: A 2. tétel szerint $P(B)-P(A) = P(B-A)$. Viszont $P(B-A) \geqslant 0$, s igy $P(B)-P(A) \geqslant 0$.

5. tétel: Ha A és B tetszőleges események, akkor

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B) .$$

Rajzban szemléltetve:



13. ábra

Két halmaz egyesitésén lévő festékmennyiséget ugy kaphatjuk meg, hogy a halmazokon lévő festékmennyiségeket összeadjuk, és ebből az összegből kivonjuk a két halmaz közös részén lévő festékmennyiséget.

Bizonyitás: Az $A\cdot\overline{B}$, $A\cdot B$ és $\overline{A}\cdot B$ események egymást kizárják, és

$$(A\cdot\overline{B}) + (A\cdot B) = A,$$

$$(A\cdot B) + (\overline{A}\cdot B) = B,$$

$$(A\cdot\overline{B}) + (A\cdot B) + (\overline{A}\cdot B) = A + B .$$

(Aki nem hiszi, járjon utána! Aki nem látja, rajzolja le!) Ezért a valószinüség összegzési tulajdonsága alapján

$$P(A\cdot\overline{B}) + P(A\cdot B) = P(A),$$

$$P(A\cdot B) + P(\overline{A}\cdot B) = P(B),$$

$$P(A\cdot\overline{B}) + P(A\cdot B) + P(\overline{A}\cdot B) = P(A + B).$$

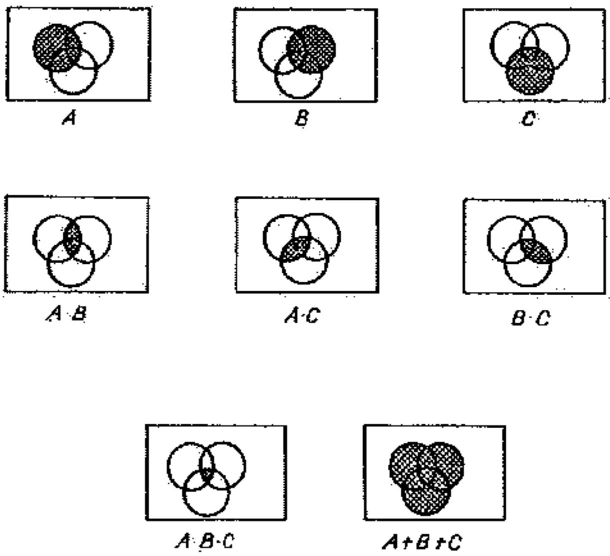
Az első két egyenlőség összegéből a harmadikat levonva kiadódik az állitás. ∎

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha A és B egymást kizáróak, akkor $P(A \cdot B) = P(\phi) = 0$, s így az 5. tétel állítása a valószinüség összegzési tulajdonságát adja vissza.

6. tétel: Ha A, B, C tetszőleges események, akkor

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cdot B)-P(A \cdot C)-P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$

Remélhetőleg az alábbi ábrák magyarázat nélkül is elegendőek a tétel állításának és bizonyításának megértéséhez:



14. ábra

Háromnál több eseményre is általánosítható a tétel. Ezt az általánosítást egy érdekes feladat megoldásánál fogjuk felhasználni. Aki elriad a bonyolult szummajelektől, és nem kiváncsi arra, hogy egy egyszerűen megfogalmazható (de megoldani korántsem egyszerű!) problémával kapcsolatban hogyan bukkan fel a természetes logaritmus alapszáma, kihagyhatja a 7. tételt és a feladat megoldását. A megoldás utáni megjegyzést mindenképpen érdemes elolvasni.

7. tétel: Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cdot A_j) +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r}) .$$

Bizonyítás: Az egyszerűség kedvéért csak azt mutatjuk meg, hogy $n=3$-ra hogyan jön ki a képlet az $n=2$-re érvényes képlet felhasználásával. Az, aki járatos a teljes indukciós bizonyítások technikájában, ennek alapján tetszőleges n-re le tudja vezetni a képletet.

Először az $(A_1 + A_2) + A_3$ zárójelezésnek megfelelően $n=2$-re alkalmazzuk a képletet:

$$P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1+A_2) + P(A_3) - P\,(A_1+A_2) \cdot A_3\,) .$$

A jobb oldalon, az első tagban az A_1 és az A_2 események összegére alkalmazhatjuk az $n=2$-re érvényes képletet:

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

A harmadik tagban az $(A_1+A_2) \cdot A_3 = A_1A_3+A_2A_3$ azonosság alapján a $B_1 = A_1A_3$ és a $B_2 = A_2A_3$ események összegét kapjuk. Most is alkalmazhatjuk az $n=2$-re érvényes képletet:

$$P\big((A_1+A_2) \cdot A_3\big) = P(B_1+B_2) = P(B_1)+P(B_2) - P(B_1 \cdot B_2) =$$
$$= P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3).$$

Ezek felhasználásával - tessék ellenőrizni! - $n=3$-ra is kiadódik az állított

$$P(A_1+A_2+A_3) = P(A_1)+(P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3) + $$
$$+ P(A_1A_2A_3)$$

képlet. ■

Feladat: Egy mulatságon, melyen 10 házaspár Beatles számokra táncol, azt eszelik ki, hogy a változatosság kedvéért minden szám előtt kisorsolják, hogy ki kivel táncoljon. Minden férj nevét cédulára írják. Minden szám előtt a cédulákat kalapba teszik, minden feleség kihuz egy cédulát, és a soron következő számot azzal táncolja, akinek a nevét kihuzta. Vajon mi a valószinüsége annak, hogy minden feleség "hütlenkedik", azaz egyik sem a saját férjével táncol?

Megoldás: Aki elsőnek huz, az 10 cédula közül választ, aki másodiknak huz, az 9 cédula közül választ, és így tovább, aki utolsónak huz, az csak 1 cédula közül választ. Ezért a 10 hölgy és a 10 férfi $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 = 10!$ darab - nyilván egyformán valószinü - felállításban táncolhat. Tehát klasszikus problémával van dolgunk, ahol egyszerü eseményeknek a lehetséges felállításokat vesszük.

Jelöljük A_1-gyel azt az eseményt, hogy a legidősebb feleség a férjével táncol, A_2-vel azt az eseményt, hogy a második legidősebb feleség a férjével táncol, és így tovább. A feladat az $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{10}$ esemény valószinüségét kérdezi. A De Morgan-azonosság felhasználásával

$$P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{10}) = P(\overline{A_1+A_2+\ldots+A_{10}}) = 1-P(A_1+A_2+\ldots+A_{10})$$

adódik. A $P(A_1+A_2+\ldots+A_{10})$ valószinüséget a 7. tétel alapján fogjuk meghatározni. A tétel képletének jobb oldalán szereplő $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r})$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leq n)$ valószinüség könnyen kiszámolható. Ha például $r = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 4$, $i_3 = 5$, akkor $A_1 \cdot A_4 \cdot A_5$ azt jelenti, hogy a kor szerint első, negyedik és ötödik feleség a férjével táncol. Ha csak ezektől a feleségektől kivánjuk meg, hogy férjükkel táncoljanak, akkor ez egy olyan összetett eseményt jelent, mely 7! darab egyszerü eseményből tevődik össze, hiszen a többi 7 hölgy és 7 férfi ennyiféle felállításban táncolhat. Ezért $P(A_1 \cdot A_4 \cdot A_5) = \frac{7!}{10!} = \frac{(10-3)!}{10!}$. Ugyanezzel a gondolatmenettel az is kiadódik, hogy $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r}) = \frac{(10-r)!}{10!}$.

Látjuk, hogy a tételben szereplő $\sum\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r})$

összeg minden tagja $\frac{(10-r)!}{10!}$-sal egyenlő. Ezért ez az összeg egyenlő a tagok száma szorozva $\frac{(10-r)!}{10!}$-sal. A tagok száma pedig annyi, ahányféleképpen az r darab $i_1, i_2, \ldots, i_r$ index az $1, 2, \ldots, 10$ szám közül kiválasztható, vagyis $\binom{10}{r}$. Ezért

$$\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_r}) = \binom{10}{r} \cdot \frac{(10-r)!}{r!} =$$

$$= \frac{10!}{r!(10-r)!} \cdot \frac{(10-r)!}{10!} = \frac{1}{r!} .$$

A tétel szerint

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{10}) = \sum_{r=1}^{10} (-1)^{r-1} \frac{1}{r!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + - \ldots - \frac{1}{10!} .$$

Ezért a kérdezett valószínűség

$$P(\text{minden feleség hűtlenkedik}) = 1 - P(A_1 + A_2 + \ldots + A_{10}) =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - \ldots + \frac{1}{10!} . \blacksquare$$

Megjegyzés: A megoldás gondolatmenetéből kiolvasható, hogy n házaspár esetén

$$P(\text{minden feleség hűtlenkedik}) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} .$$

A feladat érdekessége, hogy $n \longrightarrow \infty$ esetén $\sum\limits_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!} \to \sum\limits_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} = e^{-1}$, ahol e a természetes logaritmus alapszáma, $e = 2,71\ldots$.

Ezért azt mondhatjuk, hogy ha nagyon sok házaspár sorsolással dönti el, hogy ki kivel táncoljon, akkor körülbelül $\frac{1}{e}$ a valószinüsége annak, hogy minden feleség hütlenkedik.

11. Majdnem biztos és majdnem lehetetlen események

A "Klasszikus problémák" c. pontban láttuk, hogy ha két kockát egyszerre feldobunk, akkor

$$P\,(\text{mindkét kockán 1-est kapunk}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6^2}\,.$$

Kézenfekvő, hogy ha egy kockát dobunk fel kétszer, akkor az "1. és 2. dobás eredménye 1-es" esemény valószinüsége ugyanennyi:

$$P\,(\text{az 1. és a 2. dobás eredménye 1-es}) = \frac{1}{6^2}\,.$$

Az is világos, hogy ha nem csak kétszer, hanem többször dobjuk fel a kockát, akkor az A_k = "az első k dobás eredménye mind 1-es" esemény valószinüsége $P(A_k) = \frac{1}{6^k}$. (Legalábbis elvileg) megtehetjük, hogy végtelen sokszor dobjuk fel a kockát. Legyen A = "a végtelen sok dobás mindegyike 1-es". Az A esemény nem lehetetlen, mert elképzelhető, hogy minden dobás eredménye 1-es legyen. Nyilván az A esemény maga után vonja az A_k eseményt akármilyen k-ra. Ezért $0 \leq P(A) \leq P(A_k) = \frac{1}{6^k}$. Az egyenlőtlenségek minden k-ra fennállnak, és $\frac{1}{6^k} \to 0$, ha $k \to \infty$, ezért az egyenlőtlenségekből következik, hogy $P(A) = 0$.

Tehát láthatjuk, hogy nemcsak a lehetetlen esemény valószinüsége 0. Léteznek a lehetetlen eseménytől különböző, 0 valószinüségü események, mint például a fenti A esemény. Természetesen egy 0 valószinüségü esemény sok kisérlet esetén elenyészően kis részben következik be. (Ha sok ember mindegyike végtelen sokszor feldobná a kockát, a kisérletet végrehajtó emberek számához viszonyitva csak nagyon-nagyon kevés embernél lenne - szinte senkinél sem lenne - minden dobás eredménye 1-es.) Ha a kisérletek (az emberek) számát n-nel jelöljük, akkor az A esemény $\frac{n_A}{n}$ relativ gyakorisága n növekedétvel tetszőlegesen kicsivé válna. Ezért a 0 valószínűségű eseményeket majdnem lehetetlen eseményeknek hívjuk.

Ha pedig egy esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő, tehát komplementuma 0 valószínűségű, akkor az eseményt majdnem biztosnak nevezzük.

Megjegyzések:

1. A Kedves Olvasó nyilván észreveszi, hogy nemcsak annak a végtelen dobássorozatnak 0 a valószínűsége, melynél minden dobásra 1-est várunk. Akármilyen végtelen sorozatot is adunk meg az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból, 0 a valószínűsége annak, hogy a kockát végtelen sokszor feldobva a megadott számok a megadott sorrendben jöjjenek ki. Viszont a biztos esemény, vagyis, hogy Ω = "valamilyen sorozat kijön", ezeknek a 0 valószínűségű és egymást kizáró eseményeknek az összege. Ez látszólag ellentmond a valószínűség összegzési tulajdonságának, hiszen ha egy összegben minden összeadandó 0, akkor az összeg nem lehet 1-gyel egyenlő. A látszólagos ellentmondás magyarázata a következő: a valószínűség összegzési tulajdonságát csak véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok tagra mondtuk ki; az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból alkotható végtelen sorozatok száma pedig több mint megszámlálhatóan végtelen.

2. Tekintsünk egy A eseményt, és képzeljük el a következő játékot: Egymás után végrehajtunk több kísérletet. Ha egy kísérletnél bekövetkezik az A esemény, akkor nyerek a Ft-ot, ha nem következik be, akkor vesztek b Ft-ot. Kérdés: mikor igazságos ez a játék?

A következőképpen okoskodhatunk. Ha az A esemény valószínűségét p-vel, a végrehajtott kísérletek számát pedig n-nel jelöljük, akkor körülbelül a kísérletek p-nyi részében, tehát $n\cdot p$ játszma során a Ft-ot nyerek, a kísérletek $(1-p)$-nyi részében, tehát $n\cdot(1-p)$ játszma során b Ft-ot vesztek. Ezért a játék akkor igazságos, ha $n\cdot p\cdot a = n\cdot(1-p)\cdot b$, azaz $p\cdot a = (1-p)\cdot b$. A játék pedig veszteséges, illetve nyereséges számomra attól függően, hogy $p\cdot a < (1-p)\cdot b$ vagy $p\cdot a > (1-p)\cdot b$.

Vegyük észre, hogy ha $0 < p < 1$, akkor alkalmasan választott a és b értékekkel a játék lehet igazságos is, és számomra veszteséges vagy nyereséges is.

Viszont ha $P(A) = p = 0$, akkor $p\cdot a = 0 < b = (1-p)\cdot b$, tehát a játék mindenképpen veszteséges számomra. Vagyis annak ellenére, hogy 0 valószínűségű esemény bekövetkezhet, semmilyen tét esetén sem érdemes az esemény bekövetkezésére tippelni. Ez is alátámasztja azt a szóhasználatot és hozzáállást, hogy a 0 valószínűségű eseményeket majdnem lehetetlen eseményeknek hívjuk, és hogy az ilyen események bekövetkezésében nem bízunk.

Az elmondottak 1 valószinüségü eseményekre értelemszerüen átfogalmazva azt fejezik ki, hogy a majdnem biztos események bekövetkezésében nagyon is érdemes bizni (annak ellenére, hogy bekövetkezésük nem biztos).

II. FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG

1. Feltételes valószínűség

A feltételes valószínűség fogalmával az alábbi két példán keresztül fogunk megismerkedni.

1. példa: Azt a véletlen jelenséget vizsgáljuk, amikor két kockát feldobunk a következő feltételek mellett: a kockák szimmetrikusak, magasra dobjuk őket, és sík terepre esnek. Ekkor az

A = valamelyik kockán 6-ost kapunk

esemény az ábrázolt 36 egyszerű esemény közül a bejelölt 11-ből tevődik össze:

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

15. ábra

Ezért az A esemény valószínűsége: $P(A) = \frac{11}{36}$. ■

2. példa: Ha egy tombolán 6 ember között 2 jutalmat sorsolnak ki, akkor $\frac{1}{3}$ a valószínűsége annak, hogy én, aki a 6 ember egyike vagyok, nyerek valamilyen jutalmat. (Ugyanis a 6 ember közül $\binom{6}{2} = 15$ féleképpen kerülhet ki a 2 nyertes. Ezen 15 db egyformán valószínű esemény közül 5-ből tevődik össze az az esemény, hogy az egyik nyertes én vagyok; $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.) Ugyanezt így is megfogalmazhatjuk; ha egy

urnában 6 darab cédula van, melyekre az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat irtuk fel, és közülük kihuzunk kettőt, akkor $\frac{1}{3}$ a valószinüsége annak, hogy pl. a 6-os feliratu cédula a kihuzott két cédula között van. Mindezt harmadikféleképpen is elmondhatjuk: ha két kockát feldobunk, és kiderül, hogy különböző számokat kaptunk rajtuk, akkor ilyen feltételek mellett $\frac{1}{3}$ a valószinüsége annak, hogy valamelyik kockán 6-ost kaptunk. ■

Amikor a valószinüség fogalmát bevezettük, hangsulyoztuk, hogy az események valószinüségéről csak meghatározott feltételekkel kapcsolatban, azaz meghatározott véletlen jelenségre vonatkoztatva beszélhetünk. Ha a véletlen jelenség módosul például azáltal, hogy további feltételeket veszünk, akkor az események valószinüsége megváltozhat. Ha az 1. példában leirt véletlen jelenséget azáltal módositjuk, hogy a feltételek közé vesszük a

$$B = \text{a két kockán különböző számokat kapunk}$$

esemény bekövetkezését, akkor az A esemény valószinüsége a 2. példában leirtak alapján $\frac{11}{36}$ -ről $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ -ra változik.

Más esetekben is előfordul, hogy egy B esemény bekövetkezését bevesszük a véletlen jelenséget körülhatároló feltételek közé. Egy A eseménynek eme módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüségét $P(A|B)$-vel jelöljük, és az eredeti véletlen jelenségben A-nak B-re vonatkozó <u>feltételes valószinüségének</u> nevezzük. A $P(A|B)$ képletet igy szokás olvasni: "pé A feltéve B". A fenti A és B eseményekre tehát $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

Általános esetben a valószinüség fogalmát a relativ gyakoriságokból vonatkoztattuk el. A feltételes valószinüség pedig egy speciálisan módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüség. Ezért a feltételes valószinüség matematikai definicióját is a relativ gyakoriságok "utmutatója" alapján adjuk meg.

Tekintsünk a vizsgált véletlen jelenséggel kapcsolatban két eseményt, A-t és B-t. Gondolatban végezzünk n darab kisérletet. Jelöljük n_A-val, n_B-vel illetve $n_{A \cdot B}$ -vel azon kisérletek számát, melyeknél A, B illetve A is B is bekövetkezik. Az $\frac{n_{A \cdot B}}{n_B}$ hányados mutatja, hogy azon kisérletek során, amikor B bekövetkezik, hányadrészben következik be B-vel együtt még az A is. Tehát ezt a hányadost tekinthetjük az A eseménynek a B bekövetkezésével módositott véletlen jelenségre vonatkozó relativ gyakoriságának. Ezért a $P(A|B)$ feltételes valószinüséget ebből a hányadosból vonatkoztatjuk el. Az

$$\frac{n_{A\cdot B}}{n_B} = \frac{\frac{n_{A\cdot B}}{n}}{\frac{n_B}{n}}$$

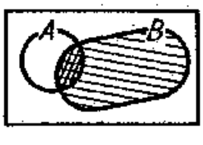
azonosság jobb oldalán az $A\cdot B$ esemény és a B esemény relativ gyakoriságának hányadosa áll.

Ezért kézenfekvő, hogy az A eseménynek a B eseményre vonatkozó feltételes valószinüségét matematikai modellünkben igy értelmezzük:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)}.$$

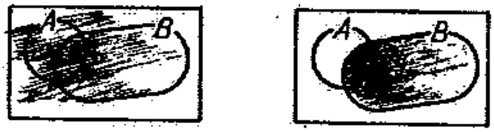
Ez a definició csak akkor értelmes, ha $P(B) \neq 0$. Ha $P(B) = 0$, akkor a $P(A|B)$ feltételes valószinüséget nem értelmezzük. Később (lásd a Feltételes eloszlások c. fejezetben) fogunk feltételes valószinüséget értelmezni bizonyos nulla valószinüségü eseményekre vonatkozólag is.

Ha a valószinüséget festékkel szemléltetjük, akkor a $P(A|B)$ feltételes valószinüség jelentése: az A és B eseményeknek megfelelő halmazok közös részén lévő festék mennyisége a B eseménynek megfelelő halmazon lévő festék mennyiségéhez viszonyitva:



16. ábra

Ezért a B esemény bekövetkezésével módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüséget, azaz a B-re vonatkozó feltételes valószinüséget a következőképpen szemléltethetjük: a B eseménynek megfelelő halmazon kivül letöröljük a festéket, a halmazon belül pedig arányosan növeljük a megmaradó festéket ugy, hogy az összfestékmennyiség egységnyivé váljon:

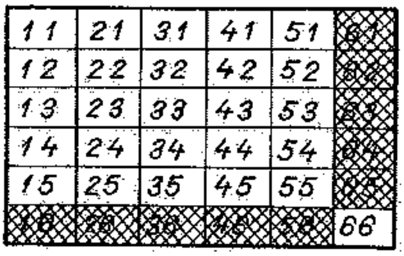


A valószinüség szemléltetése festékkel

A B-re vonatkozó feltételes valószinüség szemléltetése festékkel

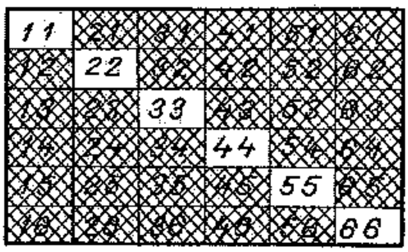
17. ábra

A $P(A\cdot B)$ és $P(B)$ valószinüségek ismeretében a $P(A|B)$ feltételes valószinüséget a definiciós képlet alapján számolhatjuk ki: Az 1. példa véletlen jelenségére vonatkozólag $P(A\cdot B) = P$ (a dobott számok különbözőek és van köztük 6-os) $= \frac{10}{36}$, hiszen a 36 egyszerü esemény közül 10 jelenti az $A\cdot B$ esemény bekövetkezését:



18. ábra

$P(B) = \frac{30}{36}$, hiszen a B esemény a 36 elemi esemény közül 30-ból tevődik össze:



19. ábra

Igy a 2. példában mondottakkal összhangban: $P(A|B) = \frac{P(A\cdot B)}{P(B)} = \frac{\frac{10}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{3}$.

Más esetekben viszont a $P(A|B)$ feltételes valószinüséget - mint az A-nak a B bekövetkezésével módositott véletlen jelenségre vonatkozó valószinüségét - logikai uton is kieszelhetjük. (A 2. példában ezt tettük.) Ilyen esetekben a definiciós képletet

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

alakban irva a $P(A \cdot B)$ valószinüség kiszámitására nyilik lehetőség. Ennek alkalmazására a következő pontban látunk példát.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy ha A maga után vonja B-t, akkor $A \cdot B = A$, s igy $P(A|B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

2. A feltételes valószínűség szorzástétele

1. feladat: Egy 32 lapos magyarkártya-csomagot jól összekeverünk, és utána mindketten huzunk egy-egy lapot. Először én, utána te. Mi a valószinüsége annak az eseménynek, hogy én a tök ászt huzom, te pedig zöldet huzol?

Megoldás: Értelmezzük az alábbi eseményeket:

A_1 = én a tök ászt huzom,

A_2 = te zöldet huzol.

"Klasszikus" megfontolások alapján: $P(A_1) = \frac{1}{32}$, $P(A_2|A_1) = \frac{8}{31}$, s igy $P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{1}{32} \cdot \frac{8}{31} = \frac{1}{124}$. ■

2. feladat: Ha utánunk még ő is huz, akkor megkérdezhetjük, hogy mi a valószinüsége, hogy én a tök ászt huzom, te zöldet huzol, ő pedig a makk alsót, felsőt vagy királyt huzza?

Megoldás: Legyen

A_3 = ő a makk alsót, felsőt vagy királyt huzza.

Ha a $P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B)$ összefüggést $B = A_1 \cdot A_2$, $A = A_3$ szereposztásban alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2).$$

$P(A_1 \cdot A_2)$-t továbbfejtve

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2)$$

adódik. Feladatunkban $P(A_3 | A_1 \cdot A_2) = \frac{3}{30}$, így $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$
$= \frac{1}{32} \cdot \frac{8}{31} \cdot \frac{3}{30} = \frac{1}{1240}$. ■

Kézenfekvő, hogy amit 3 eseménnyel kapcsolatban kaptunk, azt akárhány eseményre is általánosíthatjuk. Ezt hívják a feltételes valószínűségek szorzástételének. Például 5 eseményre így fest:

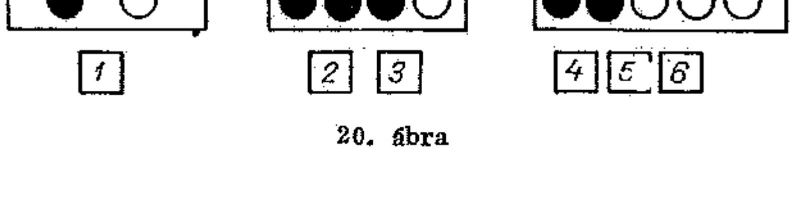
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cdot A_2) \cdot P(A_4 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) \cdot P(A_5 | A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4).$$

A képlet azt mutatja, hogy több esemény együttes bekövetkezésének valószínűségét hogyan lehet kiszámolni feltételes valószínűségek szorzataként.

3. A teljes valószínűség tétele

Feladat: Van három doboz. Az elsőben 1 piros és 1 fehér, a másodikban 3 piros és 1 fehér, a harmadikban 2 piros és 3 fehér golyó van. Feldobunk egy dobókockát. Ha 1-est dobunk, akkor az első, ha 2-est vagy 3-ast, akkor a második, ha 4-est vagy 5-öst vagy 6-ost dobunk, akkor a harmadik dobozból "csukott szemmel" huzunk egy golyót.



20. ábra

Mi annak az A eseménynek a valószinűsége, hogy a kihuzott golyó piros?

Megoldás: Jelölje B_i azt az eseményt, hogy az i-dik dobozból huzunk, $(i = 1,2,3)$. Az alábbi valószinűségek és feltételes valószinűségek "klasszikus" megfontolásokkal egyszerűen adódnak:

$$P(B_1) = \frac{1}{6}, \qquad P(B_2) = \frac{2}{6}, \qquad P(B_3) = \frac{3}{6},$$

$$P(A|B_1) = \frac{1}{2}, \qquad P(A|B_2) = \frac{3}{4}, \qquad P(A|B_3) = \frac{2}{5}.$$

Az AB_1, AB_2, AB_3 események egymást kizárják, és összegük A-t adja. Ezért a valószinűség összegzési tulajdonsága alapján

$$P(A) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + P(A \cdot B_3) =$$

$$= P(B_1) \cdot P(A|B_1) + P(B_2) \cdot P(A|B_2) + P(B_3) \cdot P(A|B_3) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15}. \blacksquare$$

E példa lényegét próbáljuk most megragadni. Ehhez bevezetünk egy uj fogalmat, a teljes eseményrendszer fogalmát.

Azt mondjuk, hogy a (véges és végtelen sok) $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, ha egymást kizáróak, és együttesen a biztos eseményt adják, azaz $B_i \cdot B_j = \phi$, ha $i \neq j$, és $B_1 + B_2 + \ldots = \Omega$.

Ezzel az elmondott példa lényegét igy foglalhatjuk össze.

A teljes valószinűség tétele: Ha a $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges A eseményre

$$P(A) = \sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i).$$

Ez a képlet lehetőséget ad arra, hogy egy esemény valószinűségét kiszámitsuk egy teljes eseményrendszer tagjaira vonatkozó feltételes valószinűségeiből.

4. Bayes-tétel
(ejtsd: béjsz)

Feladat: Barátomnak elmondom, hogy: "Van három doboz, az elsőben 1 piros és 1 fehér, a másodikban 3 piros és 1 fehér, a harmadikban 2 piros és 3 fehér golyó van. Feldobok egy dobókockát. Ha 1-est dobok, akkor az első, ha 2-est vagy 3-ast, akkor a második, ha 4-est vagy 5-öst vagy 6-ost, akkor a harmadik dobozból csukott szemmel huzok egy golyót." Ezek után elvégzem a kisérletet ugy, hogy ő nem lát semmit, csak a végén közlöm vele, hogy "piros golyót huztam". Megkérdezem tőle: "Mit gondolsz, melyik dobozból huztam?" Hogyan fog barátom gondolkodni?

Megoldás: Barátom okos, ezért igy gondolkodik. Az A esemény bekövetkezése még nem dönti el, hogy a B_1, B_2, B_3 események közül melyik következik be. (A, B_1, B_2, B_3 ugyanazt jelöli, mint a teljes valószinüség tételét illusztráló példában.) Tehát a kérdésre valószinüségekkel kell felelni, méghozzá a $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$, $P(B_3|A)$ feltételes valószinüségekkel. Ezeket igy számolhatjuk ki:

$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A|B_i)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{32},$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(B_2A)}{P(A)} = \frac{P(B_2)\cdot P(A|B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A|B_i)} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{8}{15}} = \frac{15}{32},$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(B_3A)}{P(A)} = \frac{P(B_3)\cdot P(A|B_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A|B_i)} = \frac{\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{12}{32}.$$

A kapott feltételes valószinüségek elemzésével láthatjuk, hogy a legvalószinübb az, hogy a piros golyót a 2. dobozból huztuk. A legvalószinütlenebb pedig az, hogy a piros golyót az 1. dobozból huztuk. ∎

Más feladatoknál is gyakran van szükség a fentiekhez hasonló feltételes valószinüségek kiszámitására. Ezért érdemes általánosan is megfogalmazni ezeket a formulákat.

Bayes tétel: Ha a $B_1, B_2, \ldots$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor

$$P(B_k | A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{\sum_i P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

Ez a képlet lehetőséget ad arra, hogy egy teljes eseményrendszer tagjainak valamilyen A eseményre vonatkozó feltételes valószinüségeit az A eseménynek a teljes eseményrendszer tagjaira vonatkozó feltételes valószinüségeiből kiszámitsuk.

5. Feltételes valószínűségekkel kapcsolatos feladatokról

Nem szabad azt hinni, hogy a tanult formulákkal minden feltételes valószinüségekkel kapcsolatos feladat közvetlenül megoldható. Egy összetettebb problémánál a feladat megoldójának kell lebontani a problémát olyan részekre, melyekre már közvetlenül tudja alkalmazni az általa ismert formulákat. Erre példa a következő feladat.

Feladat: Az előző két pontban emlitett három doboz valamelyikéből a kockadobás eredményétől függően most nem egy, hanem két golyót huzunk. Feltéve, hogy az egyik golyó piros, mi a valószinüsége annak, hogy a másik fehér?

Megoldás: Mivel az "egyik piros, a másik fehér" esemény maga után vonja az "egyik piros" eseményt,

$$P(\text{egyik piros, a másik fehér} | \text{egyik piros}) = \frac{P(\text{egyik piros, a másik fehér})}{P(\text{egyik piros})}.$$

A törtben szereplő két valószinüséget a teljes valószinüség tétele segitségével számolhatjuk ki:

$$P(\text{egyik piros, a másik fehér}) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{3 \cdot 1}{\binom{4}{2}} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2 \cdot 3}{\binom{5}{2}} = \frac{19}{30},$$

$$P\,(\text{egyik piros}) = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{2}{6}\cdot 1 + \frac{3}{6}\cdot \frac{2\cdot 3+1}{\binom{5}{2}} = \frac{17}{20}.$$

Tehát a kérdezett feltételes valószínűség $\dfrac{\frac{19}{30}}{\frac{17}{20}} = \dfrac{38}{51}$. ■

Megjegyzések:

1. Vigyázni kell, hogy a formulák alkalmazásánál a valószínűség jelölésére használt P betű mindig ugyanarra a véletlen jelenségre vonatkozzon. Ha erre nem vigyázunk, akkor ebből hibás eredmények származhatnak. Ezt mutatjuk most be a feltételes valószínűség definícióját megelőző két példa kapcsán (lásd: 36–37. oldal). Ugyanis a 2. példa megoldásában azért nem írtunk képleteket, mert ott – mint a 2. példa harmadikféle megfogalmazásából kitűnt – az 1. példa véletlen jelenségéhez képest módosított véletlen jelenségről volt szó. Ottani céljaink miatt az 1. és a 2. példa jelölésrendszerét összhangban akartuk tartani. Ezt az összhangot megsértettük volna, ha a 2. példa megoldásában ilyesmit írtunk volna: P(jutalmat nyerek) $= \frac{1}{3}$, hiszen ennek alapján automatikusan leírtuk volna azt is, hogy $P(A) = \frac{1}{3}$. Ez pedig helytelen lett volna, hiszen az 1. példa eredménye szerint $P(A) = \frac{11}{36}$. Természetesen, ha valaki csak a 2. példával foglalkozik, akkor joga van az ottani véletlen jelenségekre vonatkozó valószínűségeket P-vel jelölni, és akkor írhatja, hogy $P(A) =$ P(jutalmat nyerek) $= \frac{1}{3}$. De ha az 1. és 2. példa jelöléseit összhangban akarjuk tartani, akkor $P(A|B) = \frac{1}{3}$ alakban kell kifejeznünk a 2. példa eredményét.

2. A "kezdőnek" nehézséget okoz, hogy egyes feladatoknál nem triviális, hogy a véletlen jelenséget hogyan célszerű megválasztani és rögzíteni, hogy utána a kérdezett feltételes vagy feltétel nélküli valószínűséget kiszámíthassa az általa ismert formulákkal. Az ügyes választás képességét sok feladat megoldásával lehet elsajátítani.

3. Mivel a véletlen jelenség megválasztásában a feladat megoldója dönt, a feladat megoldójától is függ, hogy egy – a feladattal kapcsolatos – valószínűség feltételes-e vagy feltétel nélküli.

III. FÜGGETLENSÉG

1. Két esemény függetlensége

Egyszerre feldobunk egy pénzérmét és egy dobókockát. Ha a pénzt és a kockát jó magasra dobjuk, akkor annak ellenére, hogy egyszerre dobjuk fel őket, semmi köze sincs a pénz dobás eredményének a kockadobás eredményéhez. Az a tény, hogy az érmén a "fej" van felül, nem nyujt semmi információt arra vonatkozólag, hogy a kockadobásnak mi lett az eredménye. Ha én a kockán például 6-ost szeretnék, sem boldogabb sem szomorubb nem leszek, ha az érme egy kicsit előbb nyugszik meg az asztalon, és az érmén a "fej" van felül. Mindezt azzal a szóhasználattal fejezzük ki, hogy a kockadobás eredménye független a pénzdobás eredményétől.

Most egy példa kapcsán megvizsgáljuk, hogy hogyan nyujthat információt egy esemény bekövetkezése vagy be nem következése egy másik eseményre vonatkozólag. Az események függetlenségének matematikai definicióját ennek megfelelően fogjuk értelmezni.

Ugy tapasztaltam, hogy a nyári napok $\frac{6}{12}$ -edrészében esik eső Budapesten, $\frac{5}{12}$ -ed részében esik eső a Balatonon, és $\frac{4}{12}$ -ed részében esik eső itt is, ott is.

Ha A-val jelöljük azt az eseményt, hogy egy kiszemelt napon a Balatonon esik az eső, B-vel pedig azt, hogy ugyanazon a napon esik az eső Budapesten, akkor tehát $P(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{6}{12}$, $P(A \cdot B) = \frac{4}{12}$.

Vizsgáljuk az alábbi szituációt: én Budapesten vagyok, kedves ismerősöm a Balatonon nyaral, és Budapesten éppen esős nap van. Vajon én - tudván, hogy Budapesten esős nap van - mit tudok mondani arról, hogy a Balatonon esik-e az eső? Nyilván eshet is, meg nem is. Vagyis a kérdésre csak az A esemény valószinüségének, méghozzá a B eseményre vonatkozó feltételes valószinüségének megadásával felelhetek.

Esetünkben $P(A|B) = \dfrac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{4}{12}}{\frac{6}{12}} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{12}$. Vagyis annak tudatában, hogy a B esemény bekövetkezett, módosul az A eseményre vonatkozó ismeretem: $P(A) = \frac{5}{12}$ helyett $P(A|B) = \frac{8}{12}$ "erősséggel fogok kedves ismerősömért aggódni".

És mi van akkor, ha tudom, hogy Budapesten nem esik az eső? Ilyen ismeret birtokában "mennyire kell aggódnom kedves ismerősömért?"

Felelet: $P(A|\overline{B}) = \frac{P(A\cdot\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)-P(A\cdot B)}{1-P(B)} = \frac{\frac{5}{12}-\frac{4}{12}}{1-\frac{6}{12}} = \frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Láthatjuk, hogy ha a vizsgált napon Budapesten nem esik az eső, akkor a Balatonon is kevésbé valószínű az eső. Ez pedig hasznos információ!

Vegyük észre, hogy a budapesti esőzés bekövetkezése vagy be nem következése azért nyujt információt a balatoni esőzésre vonatkozólag, mert $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|\overline{B})$ nem egyenlőek. Ha egyenlőek volnának, akkor mindenképpen "ugyanolyan erősséggel kellene kedves ismerősömért aggódnom", az A eseményre vonatkozólag nem válnék okosabbá a B esemény bekövetkezésének, illetve be nem következésének ismeretében.

Ezért azt mondjuk, hogy *az A esemény független a B eseménytől*, ha $P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

$P(B) = 0$ esetén a $P(A|B)$, $P(B) = 1$ esetén a $P(A|\overline{B})$ feltételes valószínűségnek nincs értelme. Ezért $P(B) = 0$ vagy 1 esetén a függetlenség definícióját külön kell megadni: $P(B) = 0$ vagy 1 esetén mindig *függetlennek mondjuk* A-t B-től. (Ezt a következőkkel motiválhatjuk: $P(B) = 0$ vagy 1 esetén a B bekövetkezésétől nem nagyon válhatunk okosabbá A-ra vonatkozólag. Ugyanis $P(B) = 1$ esetén B majdnem biztos, tehát bekövetkezése nem lep meg minket, bekövetkezéséből nem vonunk le különösebb következtetéseket, $P(B) = 0$ esetén pedig B majdnem lehetetlen, tehát nem nagyon következik be.)

A következő tételben A-nak B-től való függetlenségét olyan összefüggéssel jellemezzük, melyben A és B szerepe szimmetrikus. Ezért igaz, hogy ha A független B-től, akkor B is független A-tól. Ez teszi jogossá azt a szóhasználatot, hogy "A *és* B *függetlenek egymástól*".

1. tétel: (szorzási szabály két független eseményre). Az A esemény akkor és csak akkor független a B eseménytől, ha $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$.

Bizonyitás:

a) Tegyük fel, hogy A független B-től. Ekkor

1. $P(B) = 1$ esetén $P(A\cdot B) = P(A) = P(A)\cdot P(B)$.
2. $P(B) = 0$ esetén $P(A\cdot B) = 0 = P(A)\cdot P(B)$.

3. $0 < P(B) < 1$ esetén a feltételes valószínűség és a függetlenség definíciója szerint $\frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = P(A|B) = P(A)$, ahonnan $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Tehát teljesül a szorzási szabály.

b) Tegyük fel, hogy $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

1. $P(B) = 1$ vagy 0 esetén definíció szerint A független B-től.
2. $0 < P(B) < 1$ esetén így okoskodhatunk:

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A \cdot B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}),$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

$$P(A|\overline{B}) = \frac{P(A \cdot \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B})}{P(\overline{B})} = P(A).$$

Tehát teljesül a függetlenséget jelentő $P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B})$ egyenlőség. ■

Megjegyzések:

1. Bizonyára feltűnt, és a bizonyításból is látható, hogy a definícióban $P(A) = P(A|B) = P(A|\overline{B})$ helyett elég lett volna $P(A) = P(A|B)$-t feltenni, mert ennek már következménye $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ (lásd a bizonyítás a/3 részét), amiből viszont következik $P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ (lásd a bizonyítás b/2. részét) és $P(A) = P(A|\overline{B})$. Mégis így mondtuk ki a definíciót, mert kettőnél több esemény függetlenségének definíciójában már nem hagyhatók el az itt fölöslegesnek bizonyuló egyenlőségekkel analóg egyenlőségek.

2. Két esemény függetlensége egyes esetekben a véletlen jelenség és az események értelmezéséből adódik. Például az a két esemény, hogy a magasra feldobott pénzérmén "fej", a dobókockán pedig 6-os adódik, független egymástól. Ezért ha az érme és a kocka szimmetrikus, akkor a P(az érmén "fej", a kockán 6-os adódik) valószínűséget a szorzási szabály alapján $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$-nek kell vennünk. Ha pedig ismerjük a $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cdot B)$ valószínűségeket, akkor a definíció vagy a $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$ kritérium alapján dönthetünk az A és B események függetlensége felől. Például szimmetrikus dobókocka esetén az A = "3-nál nagyobb számot dobunk", B = "3-mal osztható számot dobunk" események függetlenek: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ (két db hárommal

osztható szám van a dobókockán a 3-as és a 6-os), $P(A\cdot B)=\frac{1}{6}$ (3-nál nagyobb 3-mal osztható szám a dobókockán csak egyetlen van: a 6-os) miatt $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B)$ teljesül.

Gyakori hiba szokott lenni, hogy a független események fogalmát összetévesztik az egymást kizáró események fogalmával. Pedig - éppen ellenkezőleg - a következő igaz:

2. tétel: Ha az A és B események kizárják egymást, és nem nulla a valószínűségük, akkor nem lehetnek egymástól függetlenek.

Bizonyítás: Mivel A és B egymást kizárják, $A\cdot B=\phi$, s így $P(A\cdot B) = 0$. $P(A)$-ról és $P(B)$-ről feltételeztük, hogy nem egyenlők nullával, így szorzatuk sem nulla. Tehát nem teljesül a függetlenséget jelentő szorzási szabály. ■

2. Több esemény függetlensége

Dobjunk fel egy 1 és egy 2 forintos érmét, és legyen

A_1 = az 1 forintos érme fejre esik,

A_2 = a 2 forintos érme fejre esik,

A_3 = vagy mindkettő fejre, vagy mindkettő írásra esik.

Nyilvánvaló, hogy $P(A_3) = P(A_3 | A_1) = P(A_3 | \overline{A}_1) = \frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy A_3 független A_1-től. Hasonlóan látható, hogy A_3 független A_2-től is. Valóban: ha csak az A_1 vagy az A_2 bekövetkezését vagy be nem következését tudjuk meg, akkor A_3-ra nézve nem válunk okosabbá. Ha viszont mindkét eseményt, azaz az A_1, A_2 eseménypárt meg tudjuk figyelni, akkor ez már olyannyira hasznos információt nyujt A_3-ra nézve, hogy A_3 bekövetkezését vagy be nem következését ez alapján el is tudjuk dönteni. Tehát A_3 nem független az A_1, A_2 eseménypártól. A_3 pontosan akkor következik be, ha $A_1\cdot A_2$ vagy $\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2$ bekövetkezik.

Az A_3 esemény akkor lenne független az A_1, A_2 eseménypártól, ha A_1 és A_2 bekövetkezésének illetve be nem következésének semmilyen kombinációjától sem válnánk okosabbá A_3-ra vonatkozólag, azaz A_3 független lenne az alábbi események mindegyikétől:

$$A_1 \cdot A_2, \quad A_1 \cdot \overline{A}_2, \quad \overline{A}_1 \cdot A_2, \quad \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2.$$

Azt mondjuk, hogy <u>az A_3 esemény független az A_1, A_2 eseménypártól</u>, ha A_3 független minden olyan eseménytől, mely az A_1, A_2 események és komplementumaik segítségével szorzatként állítható elő.

Ezek után nem szorul magyarázatra a következő két definíció.

Azt mondjuk, hogy <u>az A_{k+1} esemény független az $A_1, \dots, A_k$ események rendszerétől</u>, ha A_{k+1} független minden olyan eseménytől, mely az $A_1, \dots, A_k$ események és komplementumaik segítségével szorzatként állítható elő.

Azt mondjuk, hogy <u>az $A_1, A_2, \dots$ események</u> (véges vagy végtelen) <u>sorozata független</u>, ha az első valahány esemény bekövetkezésének illetve be nem következésének semmilyen kombinációja sem nyújt információt a soron következő eseményre vonatkozólag, azaz ha minden k-ra az A_{k+1} esemény független az $A_1, \dots, A_k$ események rendszerétől.

Az alábbi tételben olyan összefüggéssel jellemezzük az események sorozatának függetlenségét, melyben nem jut szerephez az események sorrendje. Ezért több eseménnyel kapcsolatban sem kell az események sorrendjére tekintettel lenni. A sorrendre utaló "sorozat" szó elhagyható, és mondhatjuk, hogy "<u>az $A_1, A_2, \dots$ események függetlenek egymástól</u>".

<u>Tétel: (szorzási szabály több független eseményre). Az</u> $A_1, A_2, \dots$ <u>események sorozata akkor és csak akkor független, ha akárhogy is veszünk ki közülük néhányat, ezek együttes bekövetkezésének valószínűsége a külön-külön vett valószínűségek szorzatával egyenlő, azaz</u> $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ <u>esetén</u> $P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) =$

$$= P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}).$$

A tétel bizonyítását nem részletezzük. Hasznos, ha a Kedves Olvasó három vagy négy eseményből álló sorozatra végiggondolja a bizonyítást.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fentebb pénzdobálással kapcsolatban definiált A_1, A_2, A_3 eseményekre igaz, hogy

A_1 és A_2 függetlenek egymástól,

A_1 és A_3 függetlenek egymástól,

A_2 és A_3 függetlenek egymástól,

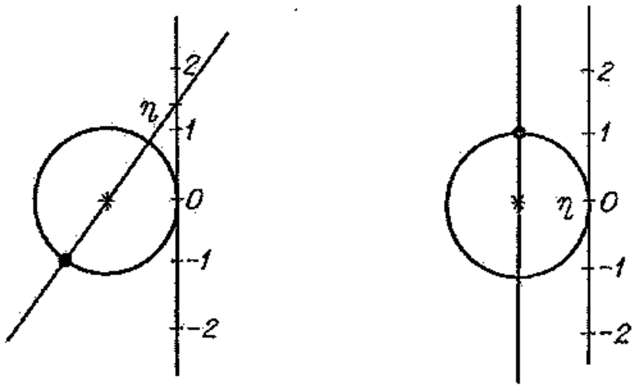
de a három esemény együtt már nem független egymástól. Jegyezzük meg tanulságul, hogy több esemény páronkénti függetlenségéből nem következik, hogy ezek az események együttesen is függetlenek lennének.

IV. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ

1. Valószínűségi változó

1. Budapest délutáni csucsforgalmában - sajnos - történnek balesetek. Egyik nap több, másik nap kevesebb. Sohasem lehet pontosan tudni, hogy hány baleset lesz. Csak annyit tudhatunk előre, hogy a balesetek száma nem negativ egész szám, és hogy ez a szám véletlentől függ.

2. Képzeljünk el egy kör alaku pályát. A kör egyik érintőjére számegyenest veszünk fel. A pályán elinditunk egy golyót. A golyó gurul körbe-körbe, s ki tudja hol, megáll. A golyót és a kör középpontját összekötő egyenes a számegyenest egy pontban metszi. Jelöljük a metszéspontot η-val. Ha az egyenesek párhuzamosak, és ezért nem metszik egymást, akkor η-t vegyük 0-nak.



21. ábra

Látjuk, hogy η tetszőleges valós értéket felvehet és értéke véletlentől függ.

Az ilyen "véletlentől függő számértéket" <u>valószinüségi változó</u>nak nevezzük. Valószinüségi változókat ugy definiálhatunk, hogy egy véletlen jelenséggel kapcsolatban értelmezünk egy számmal mérhető mennyiséget. Jelölésükre általában görög kisbetük használatosak, leggyakrabban ξ (kszi), η (eta), ζ (dzeta). Például:

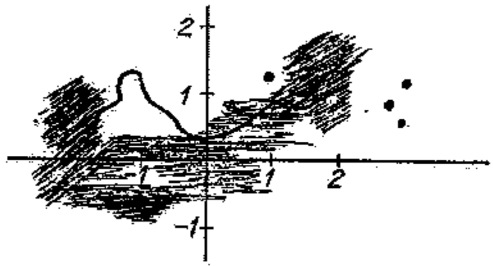
1. ξ = ahány baleset történik Budapesten a délutáni csucsforgalomban.

2. ξ = amennyit reggelente a megállóban várnom kell a villamosra.

A valószinüségi változók matematikai leirásához szükségünk van az eloszlás fogalmára. Ezzel ismerkedünk meg a következő pontban.

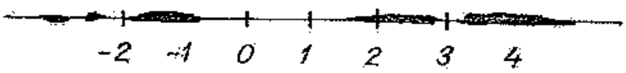
2. Eloszlás

Vegyünk valahonnan festéket, és kenjük szét a sikon. Pacákat is ejthetünk, vonalakat is huzhatunk, pöttyöket, sőt kis festékcsomókat is rakhatunk. Ugy, ahogy nekünk tetszik. Ha ezt megtettük, akkor megadtunk a sikon egy <u>eloszlást</u>.



22. ábra

Ha nem a sikot, hanem az egyenest kenjük be festékkel, akkor az egyenesen adunk meg egy eloszlást.



23. ábra

Matematikailag az ilyen eloszlásokat ugy lehet leirni, hogy a sik illetve az egyenes részhalmazaira megmondjuk, hogy mennyi festék (például hány gramm) került az illető részhalmazra. Ennek a problémakörnek az egzakt tárgyalása a mértékelmélet témakörébe tartozik. Mértékelmélettel nem áll szándékunkban foglalkozni, de az eloszlás szemléletes fogalmára - mint a valószinüségszámitás technikai segédeszközére - támaszkodni fogunk.

Most egy olyan fogalomról lesz szó, amit a későbbiekben nem fogunk használni. Éppen azt fogjuk elmagyarázni, hogy miért kellene használnunk, és mégis miért nem fogjuk használni. Mint a mértékelméletben kiderül - nem mindig lehet ellentmondásmentesen hozzárendelni a sík illetve az egyenes összes részhalmazához egy-egy számértéket, mely mutatná, hogy az illető részhalmazon mennyi festék van. (Vannak nagyon "csunya", képzeletünket messze felülmuló részhalmazok a síkon és a számegyenesen!) A sík illetve az egyenes részhalmazainak egy igen tág osztályára az un. Borel-halmazok osztályára ez mindig megtehető, de a Borel-halmazok osztályába nem tartozó halmazokra nem. Itt mi most nem fogjuk definiálni a Borel-halmaz fogalmát, csak az alábbi észrevételeket tesszük:

1. Az intervallumok a számegyenesen, a geometriában megismert alakzatok (körlap, sokszögekkel határolt síkidomok stb.) a síkon, és általában a nyilt vagy zárt halmazok mind Borel-halmazok.

2. Borel-halmazok komplementuma, különbsége, (véges vagy megszámlálhatóan végtelen) uniója, metszete ugyancsak Borel-halmaz.

Tehát nem kell elkeserednünk, hogy vannak "kellemetlenkedő", nem Borel-halmazok, hiszen

1. Az elmélet kifejtéséhez és a gyakorlati alkalmazásokhoz szükséges halmazok Borel-halmazok.

2. A Borel-halmazok osztályából nem vezetnek ki azok a halmazelméleti müveletek, melyeket okoskodásaink, számításaink során használni fogunk.

Nem is akarjuk zavarni az Olvasót a nem definiált Borel-halmaz fogalmának minduntalan emlegetésével. Ha a későbbiekben a sík vagy az egyenes valamilyen részhalmazát említjük, akkor mindig Borel-halmazra gondolunk. Igy például, ha a sík vagy az egyenes összes részhalmazáról beszélünk, akkor is csak az összes Borel-halmazra gondolunk. Jobb, ha az Olvasó a valószinüségszámitással való első találkozásakor nem fordít figyelmet a mértékelméletnek erre a technikai jellegü fogalmára.

A valószinüségszámításban az olyan eloszlások fontosak, melyeknél a szétkent festék összmennyisége egységnyi. Ezért az ilyen eloszlásokat valószinüségeloszlásoknak nevezzük. A valószinüségeloszlás szemléletes jelentése tehát: egységnyi festékmennyiség szét van kenve valahogyan.

valószínűségeloszlás

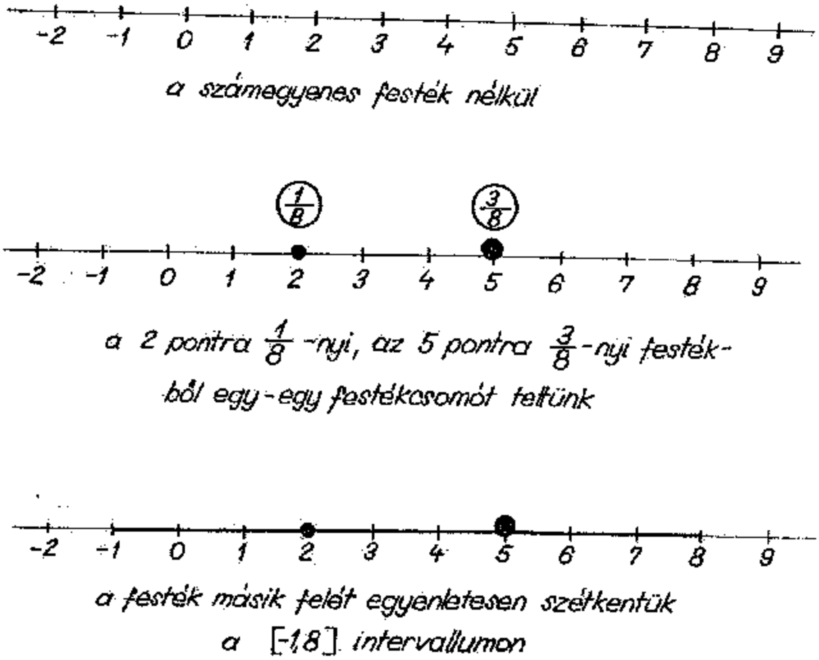
a számegyenesen

a síkon

24. ábra

3. Eloszlások típusai

Vegyünk egy vödör, azaz egységnyi festéket. A 2 pontra tegyük a festék $\frac{1}{8}$-át, a festék $\frac{3}{8}$-át pedig tegyük az 5 pontra. Így két festékcsomót kapunk. A festék másik felét kenjük szét a $[-1, 8]$ intervallumon egyenletesen:



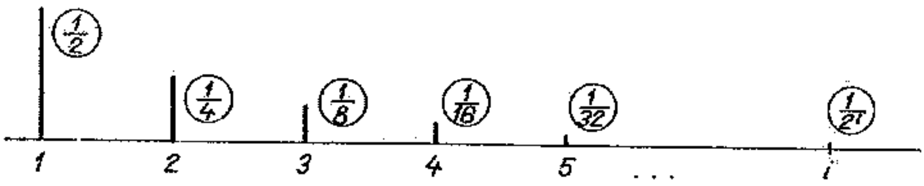
25. ábra

Ezáltal megadtunk egy valószínűségeloszlást a számegyenesen.

A megadott eloszlás "két szélsőséges részből tevődik össze". Az egyik rész "csupa csomóból áll", a másik rész "csomómentes". A gyakorlatban előforduló eloszlások leggyakrabban nem ilyenek. Többnyire vagy "csak csomóból állnak", vagy "csomómentesek". Az előbbieket diszkrét eloszlásoknak, az utóbbiakat folytonos eloszlásoknak nevezzük. Az olyan eloszlásokat, melyek diszkrét és folytonos részből tevődnek össze - mint a fenti példában -, kevert eloszlásoknak nevezzük. A következő három pontban e három típust vesszük sorra.

4. Diszkrét eloszlás

Diszkrét eloszlásokat ugy adhatunk meg, hogy megadjuk a festékcsomók helyét és nagyságát. Ábráinkon a festékcsomók helyét számokkal vagy betükkel kiirjuk, a festékcsomó nagyságát pedig bekarikázott számokkal jelöljük. Diszkrét eloszlásokat célszerü ugy is szemléltetni, hogy a festékcsomó helyére olyan magas "pálcikát" rajzolunk, amennyi festék a pontra kerül. Például, ha az i-ik pozitív egész számra $\frac{1}{2^i}$ nagyságu festékcsomó kerül, akkor egy olyan eloszlást kapunk, ahol az első festékcsomó $\frac{1}{2}$ nagyságu, a többi pedig fele akkora mint az őt megelőző. Az eloszlást pálcikákkal szemléltetve:



26. ábra

Ha az eloszlást nem akarjuk szemléltetni, csak az adatait akarjuk rögzíteni, akkor ezeket célszerü táblázatba foglalni. Például:

1	2	3	4	5	...	i	...
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...	$\frac{1}{2^i}$	...

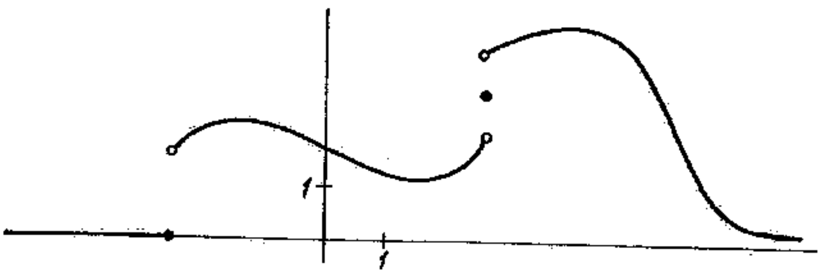
27. ábra

Egy diszkrét eloszlás nyilván akkor valószínűségeloszlás, ha a pálcikák hosszának összege 1.

5. Folytonos eloszlás

Az alábbi konstrukcióval eljuthatunk a gyakorlatban fontos folytonos eloszlásokhoz.

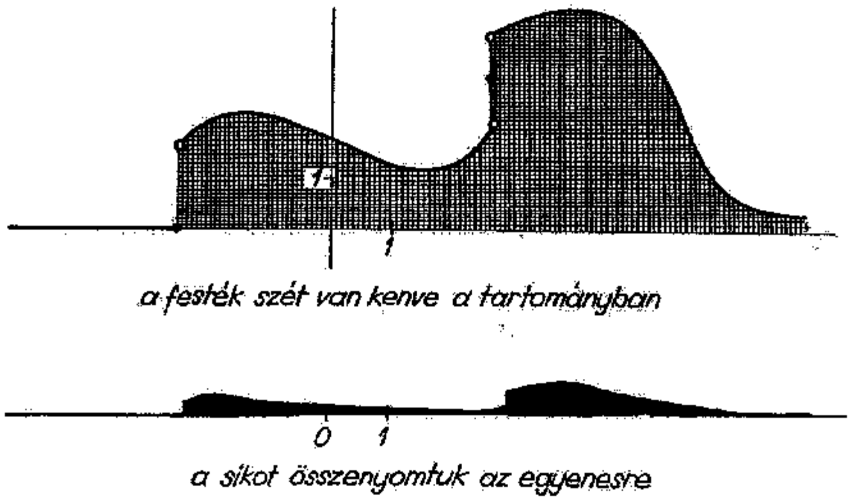
Tekintsünk egy nem negativ értékeket felvevő, integrálható függvényt a számegyenesen. (Például ha egy nem negativ értékeket felvevő függvény véges sok hely kivételével folytonos, akkor integrálható a számegyenesen. A számegyenesen vett integráljának értéke véges vagy végtelen.) Ábrázoljuk a függvény grafikonját:



28. ábra

Lakásfestéskor egy jó festő egyenletesen keni be a falat festékkel. Ez annyit jelent, hogy egyforma területű felületdarabokra ugyanannyi (pl. ugyanannyi gramm) festék kerül. Másképpen kifejezve: valamely falrészre kerülő festék mennyisége arányos a falrész területével. A mértékegységek alkalmas módosításával elérhetjük, hogy minden falrészen az uj mértékegységekkel kifejezve annyi festék legyen, mint amennyi a falrész területe.

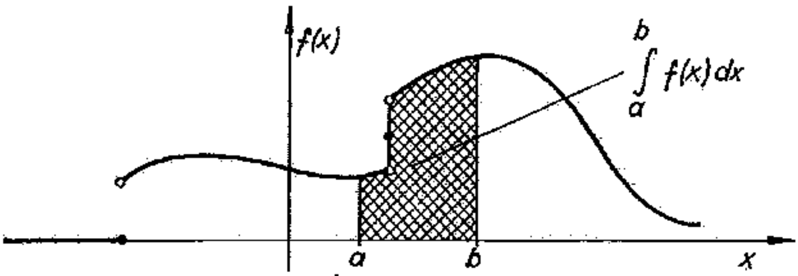
Képzeletben mi is igy kenjünk szét festéket a tekintett függvény grafikonja és az abszcissza tengely közötti tartományban. Tehát a tartomány minden részhalmazára annyi festék kerül, amennyi a részhalmaz területe. Ezután "jön az uthenger", és függőleges irányból összenyomja a sikot ugy, hogy a festék az abszcissza tengelyen felvett számegyenesre préselődjön. Ily módon egy eloszlást kaptunk a számegyenesen. Fantáziánk megengedi, hogy az egyenesre összenyomott festéket ugy képzeljük el, mintha az teljesen bele lenne préselve a számegyenesbe. Tehát a festék nem ad "vastagságot" a számegyenesnek, csupán "beszi-



29. ábra

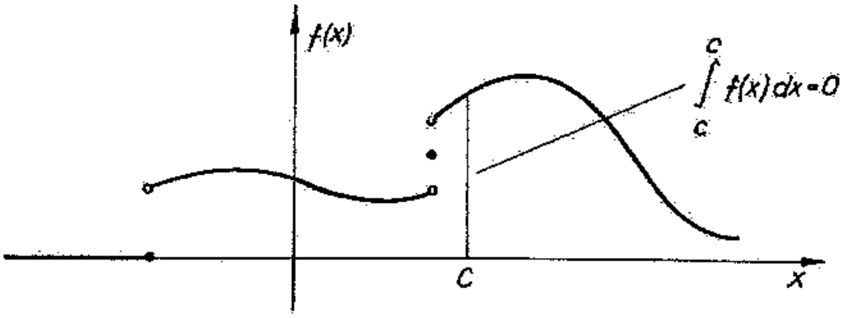
nezi". Ahova több festék jut, ott "feketébb", ahova kevesebb, ott csak "szürkébb, ahova semmi festék nem jut, ott "teljesen fehér" a számegyenes.

Ha a függvényt f-fel jelöljük, akkor a számegyenes valamely $[a,b]$ intervallumára préselődő festékmennyiség (megegyezvén az intervallum feletti és az f grafikonja alatti rész területével) $\int_a^b f(x)dx$-szel egyenlő:



30. ábra

Ha az intervallum egyetlen pontból áll (az intervallum kezdő és végpontja egybe esik), akkor ez a síkrész szakasszá degenerálódik, aminek területe 0-val egyenlő:



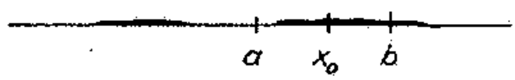
31. ábra

Tehát minden c pontra teljesül, hogy a c ponton lévő festékmennyiség 0-val egyenlő. Ez pedig azt jelenti, hogy az eloszlás "csomómentes", azaz folytonos tipusu.

Most kis kitérőt teszünk, hogy megmagyarázhassuk, miért hivják az f függvényt az egyenesen létrejött eloszlás sürüségfüggvényének.

Térbeli inhomogén tömegeloszlás leirása céljából a következőt szokták tenni. Kiszemelnek egy pontot a térben. A pont körül egy kis térrészt tekintenek. A térrészben lévő tömegmennyiséget elosztják a térrész térfogatával. A kapott hányados a térrészbeli átlagsürüséget adja meg. Ezek után a térrészt "rázsugoritják" a kiszemelt pontra. Ha a zsugoritás közben az átlagsürüségnek van határértéke, akkor e határértéket a kiszemelt pontbeli sürüségnek nevezik. Inhomogén tömegeloszlás esetén a sürüség a tér különböző pontjaiban különböző. A sürüségnek a tér pontjaitól való függése értelmezi a tömegeloszlás sürüségfüggvényét. Ha nem a térben, hanem a sikon vagy az egyenesen tekintünk egy tömegeloszlást, akkor a sürüségfüggvény teljesen hasonló módon definiálható, csak az átlagsürüség értelmezésekor térrész helyett sikrész, illetve intervallum tekintendő, és térfogat helyett területtel illetve hosszusággal kell osztani.

Ezen előkészités után tekintsünk a számegyenesen egy x_0 pontot és körülötte egy $[a,b]$ intervallumot:



32/a ábra

Az intervallumon lévő festékmennyiség $\int_a^b f(x)\,dx$ -szel egyenlő, igy az $[a,b]$ intervallumban az átlagsürüség $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ vagyis az f függvénynek az $[a,b]$ intervallumon vett integrálközepe. Ismeretes, hogy ha f folytonos az x_0 pontban, és az $[a,b]$ intervallum ráhuzódik x_0-ra, akkor az $[a,b]$ intervallumon vett integrálközép az integrandus x_0 helyen vett helyettesitési értékéhez, $f(x_0)$-hoz tart:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow f(x_0), \quad \text{ha} \quad a < x_0 < b \quad \text{és} \quad a,b \to x_0 .$$

Tehát a festékeloszlás x_0-beli sürüsége $f(x_0)$. Ezért jogos, hogy f-t az eloszlás sürüségfüggvényének nevezzük.

Vegyük észre, hogy ha az x_0 pont körüli $[a,b]$ intervallum picike, akkor az $[a,b]$ intervallumon lévő $\int_a^b f(x)\,dx$ festékmennyiség közelitőleg $f(x_0)\cdot(b-a)$-val egyenlő. Tehát egy picike intervallumon közelitőleg annyi festék van, amennyi az intervallum hossza szorozva a sürüségfüggvénynek az intervallumban vett értékével.

Az eloszlást legjobb a sürüségfüggvény grafikonjával szemléltetni. A grafikon a festék összenyomás előtti alakját mutatja.

Egy ilyen eloszlás nyilván akkor valószinüségeloszlás, ha a sürüségfüggvény grafikonja alatti terület, tehát a sürüségfüggvény integrálja $(-\infty)$-től $(+\infty)$-ig 1-gyel egyenlő:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 .$$

A leirt konstrukcióval megadható eloszlásokat sürüségfüggvénnyel rendelkező folytonos eloszlásoknak nevezzük.

Nem minden folytonos eloszlás rendelkezik sürüségfüggvénnyel. Ilyen eloszlásra a VII. fejezet 1. pontjának végén mutatunk majd példát. Mivel az ilyen eloszlások gyakorlati szempontból nem fontosak, nem foglalkozunk velük.

A későbbiekben – hacsak ellenkezőjét nem hangsulyozzuk – sürüségfüggvénnyel rendelkező folytonos eloszlásra gondolunk, amikor – röviden – folytonos eloszlásról beszélünk.

6. Kevert eloszlások

A kevert eloszlásokat ugy adjuk meg, hogy külön-külön megadjuk diszkrét és folytonos részüket.

Egy kevert eloszlás nyilván akkor valószinüségeloszlás, ha diszkrét része összpálcikahosszának és folytonos része sürüségfüggvénye alatti területének összege 1-gyel egyenlő.

7. Valószínűségi változó eloszlása

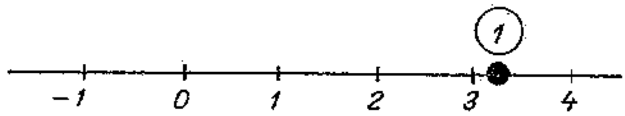
Ha ξ valószinüségi változó, akkor értéke valamilyen véletlen jelenségtől függő szám. Ezért ha B részhalmaza a számegyenesnek (például valamilyen intervallum, vagy akár egyetlen pontból álló halmaz), akkor ξ értéke a véletlen jelenség lezajlása során vagy eleme B-nek: $\xi \in B$ (olvasd: kszi eleme B-nek), vagy nem: $\xi \notin B$ (olvasd: kszi nem eleme B-nek). A $\xi \in B$ kijelentés tehát egy esemény, aminek valószinüségéről van értelme beszélni.

Korábbi jelöléseinknek megfelelően a $\xi \in B$ esemény valószinüségét igy jelöljük: $P(\xi \in B)$. Ha a B halmaz intervallum: $B = [a,b]$, akkor igy is jelölhetjük: $P(a \leqslant \xi \leqslant b)$. Ha B egyetlen pontból áll: $B = \{x\}$, akkor $P(\xi = x)$ -t is irhatunk, stb.

Kenjük be a számegyenest festékkel ugy, hogy a számegyenes minden B részhalmazára annyi festék jusson, amennyi a $\xi \in B$ esemény valószinüsége. Ezt az eloszlást <u>a valószinüségi változó eloszlásá</u>nak nevezzük. Ha az eloszlás folytonos, akkor az eloszlás sürüségfüggvényét <u>a valószinüségi változó sürüségfüggvényé</u>nek is nevezzük.

A valószinüségi változókat eloszlásuk segitségével épitjük be matematikai modellünkbe. Az eloszlás kieszelése logikai, matematikai eszközökkel lehetséges (lásd például a következő fejezetet). A XIV. fejezet 4. pontjában pedig azt fogjuk vizsgálni, hogy egy valószinüségi változó eloszlása hogyan közelithető a valószinüségi változóra végzett kisérleti eredményekből.

Megjegyezzük, hogy a valószinüségi változók közé sorolhatjuk a véletlentől nem függő konstansokat is. Ha például ξ értéke mindig 3,2, akkor ξ eloszlása az az eloszlás, melynél - egyetlen festékcsomó formájában - a 3,2 pontra van kenve az egységnyi festékmennyiség:

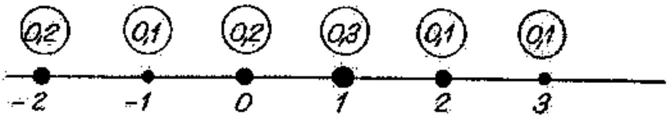


32/b ábra

Az ilyen eloszlásokat a szóban forgó pontra koncentrált __elfajult eloszlásoknak__ nevezzük.

Az alábbi 3 példán keresztül összefoglaljuk a valószínűségi változó eloszlásával kapcsolatban elmondottakat:

__1. példa:__ Ha ξ eloszlása az alábbi diszkrét eloszlás



33. ábra

akkor

$$P(\xi \in [0{,}4;\ 2{,}5]) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4\ ,$$

$$P(\xi \in [1\ ;\ 2]) = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4\ ,$$

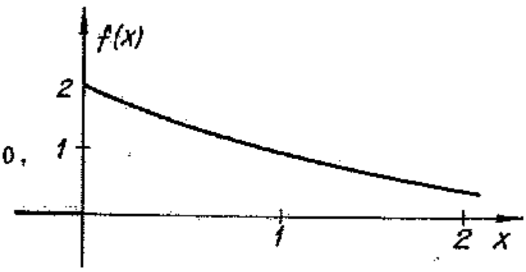
$$P(\xi \geqslant 0) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}7\ ,$$

$$P(\xi \in [-1{,}5;\ 2] \,|\, \xi \geqslant 0) = \frac{P(0 \leqslant \xi \leqslant 2)}{P(\xi \geqslant 0)} = \frac{0{,}2+0{,}3+0{,}1}{0{,}7} = \frac{6}{7}\ ,$$

$$P(\xi = -1) = 0{,}1. \blacksquare$$

__2. példa:__ Ha ξ sűrűségfüggvénye az alábbi függvény

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ha } x < 0\ , \\ 2e^{-2x}\ , & \text{ha } x > 0\ , \end{cases}$$



34. ábra

akkor

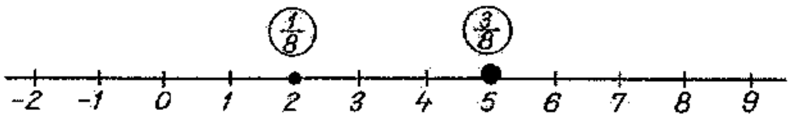
$$P(-1 \leqslant \xi \leqslant 10) = \int_{-1}^{10} f(x)\,dx = \int_{0}^{10} 2e^{-2x}\,dx = 1-e^{-20}\ ,$$

$$P(\xi \leqslant 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} 2e^{-2x}\,dx = 1-e^{-4},$$

$$P(\xi \leqslant 2 \mid -1 \leqslant \xi \leqslant 10) = \frac{P(-1 \leqslant \xi \leqslant 2)}{P(-1 \leqslant \xi \leqslant 10)} = \frac{1-e^{-4}}{1-e^{-20}},$$

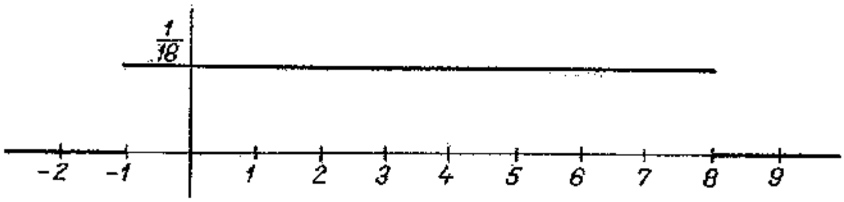
$$P(\xi = 3) = \int_{3}^{3} f(x)\,dx = 0. \blacksquare$$

3. példa: Legyen ξ eloszlása az Eloszlások tipusai c. pontban szereplő kevert eloszlás. Ennek diszkrét része:



35. ábra

Folytonos részének sürüségfüggvénye pedig



36. ábra

Ekkor

$$P(\xi \leqslant 3{,}5) = \frac{1}{8} + \int_{-1}^{3,5} \frac{1}{18}\,dx = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$P(\xi = 5) = \frac{3}{8},$$

$$P(\xi = 6) = 0. \blacksquare$$

Vegyük észre a következőket.

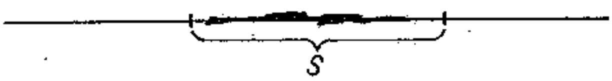
Ha egy valószinüségi változó diszkrét vagy kevert eloszlásu, akkor van olyan c szám, amelyre annak az eseménynak a valószinüsége, hogy a valószínűségi változó ezt a kiszemelt c értéket veszi fel, pozitív.

Ha pedig egy valószínűségi változó folytonos eloszlású, akkor akármilyen c szám esetén annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó ezt a kiszemelt c értéket veszi fel 0-val egyenlő.

Megjegyzés: Ha a számegyenesen felvett B halmaz nem Borel-halmaz, akkor - mint már korábban említettük - matematikai modellünk nem képes minden eloszlásra megmondani, hogy az eloszlás szerint mennyi festék van a B-n. Ezért ilyenkor a modellben a $\xi \in B$ esemény valószínűségéről nem beszélhetünk. Mivel nekünk csak Borel-halmazokkal lesz dolgunk, ilyen kellemetlenséggel nem fogunk találkozni.

8. Valószínűségi változó lehetséges értékei

Ha S részhalmaza a számegyenesnek, akkor előfordulhat, hogy a vizsgált eloszlás az egész festékmennyiséget S-re keni, a számegyenes S-en kívüli részére nem kerül festék:



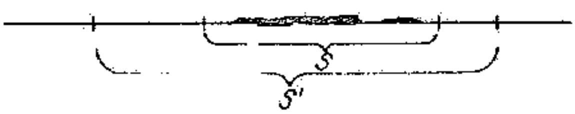
37. ábra

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az eloszlás S-re koncentrálódik. Például:

1. Az előző pont 1. példájában szereplő eloszlás, a $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ számokból álló 6 elemű halmazra koncentrálódik.

2. Az előző pont 2. példájában szereplő eloszlás a $[0, \infty)$ intervallumra koncentrálódik.

Világos, hogy ha egy eloszlás S-re koncentrálódik, és S részhalmaza S'-nek, akkor az eloszlás egyben S'-re koncentráltnak is mondható:



38. ábra

Ha egy ξ valószinüségi változó eloszlása S-re koncentrálódik, akkor ez annyit jelent, hogy a $\xi \in S$ esemény valószinüsége 1, tehát majdnem biztos, hogy a ξ csak S-beli értékeket vesz fel. Ezt fejezzük ki azzal a szóhasználattal, hogy <u>a ξ lehetséges értékei S-be esnek.</u>

Sok esetben a bennünket érdeklő valószinüségi változóhoz könnyü találni egy olyan - lehetőleg minél szükebb - halmazt, amibe a valószinüségi változó lehetséges értékei beleesnek. Ilyenkor a vizsgált valószinüségi változó eloszlásáról állithatjuk, hogy a talált halmazra koncentrálódik. Ezért nem kell a fejünket törni, hogy a számegyenesnek a talált halmazon kivül eső részét hogyan kenjük be festékkel. Például:

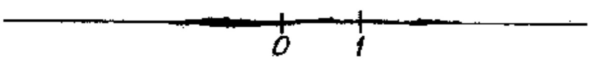
1. A ξ = "ahányadik dobásra végre 6-ost kapunk a dobókockán" valószinüségi változó értéke csak pozitiv egész szám lehet, vagyis ξ eloszlása a természetes számok halmazára koncentrálódik.

2. Az η = "ahány percet várni kell a villamosra" valószinüségi változó értéke pedig nem lehet negativ, igy η eloszlása a $[0,\infty)$ intervallumra koncentrálódik.

Vegyük észre, hogy egy eloszlás akkor és csak akkor diszkrét, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazra koncentrálódik. Tehát egy valószinüségi változó akkor és csak akkor diszkrét eloszlásu, ha lehetséges értékei véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmazba foglalhatók.

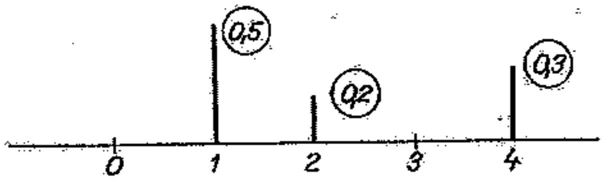
9. Eloszlásfüggvény

Vegyünk egy valószinüségeloszlást, azaz kenjünk szét egységnyi festékmennyiséget a számegyenesen:



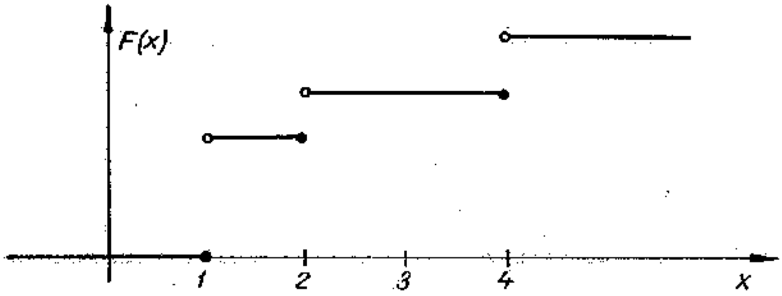
39. ábra

Az eloszláshoz egy függvényt rendelhetünk a következő utasitással: Az F függvény értéke az x helyen, amit F(x)-szel jelölünk, legyen annyi, amennyi festék a $(-\infty, x)$ intervallumon van. Ezt a függvényt <u>a valószinüségeloszlás eloszlásfüggvényének</u> nevezzük. Például: az itt látható



40. ábra

diszkrét eloszlás eloszlásfüggvényének értéke néhány konkrét helyen: $F(-0,4) = 0$, $F(1,5) = 0,5$, $F(2) = 0,5$, $F(2,1) = 0,7$, $F(7) = 1$.
Az eloszlásfüggvény grafikonja pedig így néz ki:



41. ábra

Vegyük észre, hogy tetszőleges diszkrét eloszlás eloszlásfüggvénye olyan "lépcsős" függvény, melynek ugrásai az eloszlás pálcikáinak helyén vannak, az ugrások pedig akkorák, amilyen magasak a pálcikák.

Az f sürüségfüggvényü folytonos eloszlás szerint a $(-\infty, x)$ intervallumon lévő festék mennyisége $\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$. Ezért egy folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye így fejezhető ki a sürüségfüggvénnyel:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \,.$$

Tehát az eloszlásfüggvény a sürüségfüggvény integrálfüggvénye. Ismert, hogy az $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$ összefüggésből következik, hogy F folytonos, és ahol f is folytonos, ott F differenciálható és

$$F'(x) = f(x) .$$

Tehát a sűrűségfüggvény folytonossági pontjaiban az eloszlásfüggvény deriváltjaként a sűrűségfüggvényt kapjuk vissza.

Minden eloszlásfüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

1. monoton növekedő,
2. balról folytonos,
3. $(-\infty)$-ben a határértéke 0,
4. $(+\infty)$-ben a határértéke 1.

Ezeknek a tulajdonságoknak a bizonyítására nem térünk ki. Hasznos, ha a Kedves Olvasó néhány konkrét példán ellenőrzi a fenti négy tulajdonság teljesülését. Az is igaz, hogy ha egy függvény rendelkezik ezzel a négy tulajdonsággal, akkor ez a függvény egy alkalmasan választott valószínűségeloszlás eloszlásfüggvénye. Tehát a valószínűségeloszlások kölcsönös és egyértelmű kapcsolatban állnak a fenti négy tulajdonsággal bíró függvényekkel. Ezért egy valószínűségi változót nemcsak eloszlásával, hanem annak eloszlásfüggvényével is jellemezhetjük. Ezzel a lehetőséggel szoktak élni azok a valószínűségszámítás könyvek, melyek nem használnak mértékelméleti segédeszközöket, és nem építenek az eloszlás (szemléletes vagy egzakt) fogalmára.

Egy valószínűségi változó eloszlásának eloszlásfüggvényét a valószínűségi változó eloszlásfüggvényének is nevezzük. A ξ valószínűségi változó eloszlása annyi festéket ken a $(-\infty, x)$ intervallumra, amennyi a $\xi \in (-\infty, x)$ esemény valószínűsége. $\xi \in (-\infty, x)$ annyit jelent, hogy $\xi < x$. Így a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az a F függvény, melyet a $F(x) = P(\xi < x)$ összefüggéssel értelmezhetünk.

Az eloszlásfüggvények a folytonos eloszlásokkal kapcsolatos számításoknál játszanak fontosabb szerepet. A nevezetesebb eloszlásfüggvények táblázatokba vannak foglalva. A táblázat segítségével tetszőleges $a < b$ számokra kiszámolható az $a \leqslant \xi < b$ esemény valószínűsége. Ugyanis ez a valószínűség annyi, amennyi festék a ξ eloszlása szerint az $[a, b)$ intervallumon van. Ez a festékmennyiség pedig a $(-\infty, b)$ intervallumon lévő festékmennyiségnek (azaz $F(b)$-nek) és a $(-\infty, a)$ intervallumon lévő festékmennyiségnek (azaz $F(a)$-nak) a különbsége. Tehát

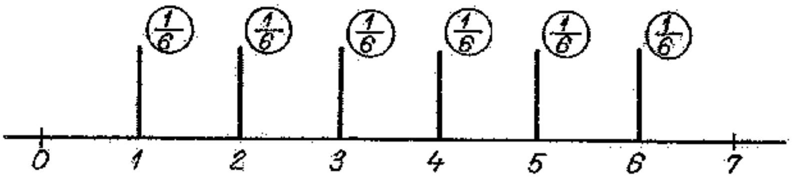
$$P(a \leqslant \xi < b) = F(b) - F(a) .$$

Folytonos eloszlás esetén mindegy, hogy itt $<$ vagy $\leqslant$ jeleket írunk, hiszen $P(\xi = a) = P(\xi = b) = 0$.

V. NEVEZETES ELOSZLÁSOK

1. Diszkrét egyenletes eloszlás

Vegyünk egy szabályos dobókockát, és dobjuk fel. Legyen ξ = a dobott szám értéke. A kocka szimmetriája miatt minden oldal egyforma valószinüséggel kerülhet felülre, így ξ eloszlása:



42. ábra

Általánosabban, ha egy valószinüségi változó véges sok - mondjuk n - értéket vehet fel, és ezeket egyforma valószinüséggel veszi fel, akkor eloszlása mindegyik lehetséges értékhez $\frac{1}{n}$ nagyságu pálcikát rendel. Az ilyen eloszlásokat diszkrét egyenletes eloszlásoknak nevezzük.

2. Binomális eloszlás

Vegyünk 5 darab olyan pénzérmét, ami hamis. Hamis olyan értelemben, hogy ha feldobjuk, akkor $\frac{4}{7}$ valószinüséggel esik "fej"-re és csak $\frac{3}{7}$ valószinüséggel "irás"-ra. Ha feldobjuk mind az 5 értmét, akkor véletlentől függ, hogy közülük hány esik fejre. A ξ valószinüségi változó értéke legyen annyi, ahány érme "fejre" esik. Ki fogjuk eszelni a ξ eloszlását.

ξ a 0,1,2,3,4,5 értékeket veheti fel. Tehát ξ eloszlása diszkrét. A pálcikák helye a 0-tól 5-ig terjedő egész számok. Mekkora pálcika kerül például a 2 pontra? Vagyis mi annak a valószinüsége, hogy az 5 érem között 2 fej és 3 irás lesz? Ezt most ki fogjuk számolni.

Képzeljük el, hogy az érméket megszámozzuk az "írás" oldalukon így:

$$\textcircled{1},\quad \textcircled{2},\quad \textcircled{3},\quad \textcircled{4},\quad \textcircled{5}.$$

A "fej" oldalukon is megszámozzuk őket ugyanúgy, de még egy keresztet is teszünk:

$$\cancel{\textcircled{1}},\quad \cancel{\textcircled{2}},\quad \cancel{\textcircled{3}},\quad \cancel{\textcircled{4}},\quad \cancel{\textcircled{5}}.$$

Most pedig felsoroljuk az összes olyan dobás kombinációt, melyben 2 fej és 3 írás van:

$$
\begin{array}{ccccc c ccccc}
\cancel{\textcircled{1}} & \cancel{\textcircled{2}} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \qquad & \textcircled{1} & \cancel{\textcircled{2}} & \textcircled{3} & \cancel{\textcircled{4}} & \textcircled{5} \\
\cancel{\textcircled{1}} & \textcircled{2} & \cancel{\textcircled{3}} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & & \textcircled{1} & \cancel{\textcircled{2}} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \cancel{\textcircled{5}} \\
\cancel{\textcircled{1}} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \cancel{\textcircled{4}} & \textcircled{5} & & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \cancel{\textcircled{3}} & \cancel{\textcircled{4}} & \textcircled{5} \\
\cancel{\textcircled{1}} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \cancel{\textcircled{5}} & & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \cancel{\textcircled{3}} & \textcircled{4} & \cancel{\textcircled{5}} \\
\textcircled{1} & \cancel{\textcircled{2}} & \cancel{\textcircled{3}} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \cancel{\textcircled{4}} & \cancel{\textcircled{5}}
\end{array}
$$

A felsorolt dobás kombinációk száma annyi, ahányféleképpen a 2 keresztet el lehet helyezni az 5 lehetséges helyre, azaz $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10$.

Annak a valószínűsége, hogy az első érme fejre esik, $\frac{4}{7}$.

Ezt a tényt így juttatjuk kifejezésre: $P(\cancel{\textcircled{1}}) = \frac{4}{7}$.

Érthető, hogy mit akarunk kifejezni az alábbiakkal:

$$P(\cancel{\textcircled{1}}) = \frac{4}{7},\quad P(\cancel{\textcircled{2}}) = \frac{4}{7},\quad P(\textcircled{3}) = \frac{3}{7},\quad P(\textcircled{4}) = \frac{3}{7},\quad P(\textcircled{5}) = \frac{3}{7}.$$

Az érmék egymástól függetlenül esnek le, ezért

$$P(\cancel{\textcircled{1}}\ \cancel{\textcircled{2}}\ \textcircled{3}\ \textcircled{4}\ \textcircled{5}) = \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3.$$

Teljesen hasonló gondolatmenettel adódik, hogy

$$P(\cancel{\textcircled{1}}\ \textcircled{2}\ \cancel{\textcircled{3}}\ \textcircled{4}\ \textcircled{5}) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

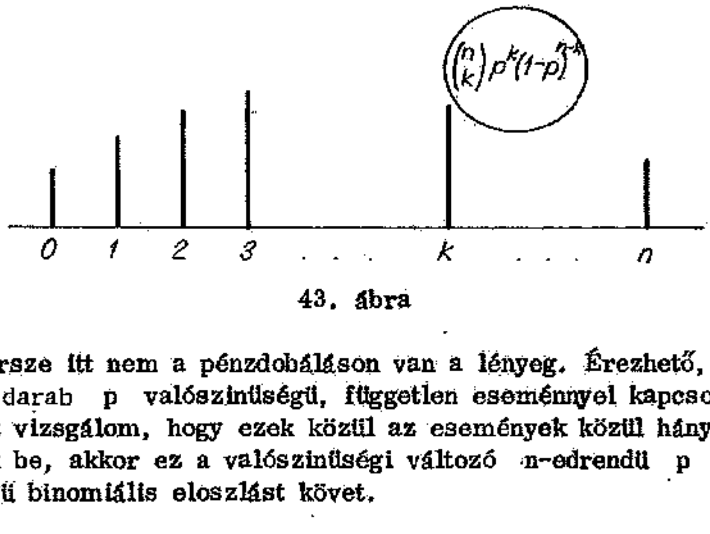
$$P(\textcircled{1}\ \textcircled{2}\ \textcircled{3}\ \cancel{\textcircled{4}}\ \cancel{\textcircled{5}}) = \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7} = \left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3.$$

Az ⊗⊗③④⑤, ⊗②⊗④⑤,..., ①②③⊗⊗ események egymást kizáró események, számuk pedig annyi, ahányféleképpen az 5 érme közül kettőt kiválaszthatunk, azaz $\binom{5}{2}$, és nyilván egyesitésük jelenti azt az eseményt, hogy az 5 érme között 2 fej és 3 irás van. Ezért P(az 5 érme között 2 fej és 3 irás van) = P(⊗⊗③④⑤)+ + P (⊗②⊗④⑤) +...+ P(①②③⊗⊗) = $\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^3$.
Tehát kiszámoltuk a célul kitüzött pálcika nagyságát.

A gondolatmenetből kiolvasható, hogy ha n darab érme van, egy érmén a fej valószinüsége p, és feldobjuk az érméket, melyek egymástól függetlenül esnek "fej"-re vagy "irás"-ra, akkor annak a valószinüségi változónak az eloszlása, mely azt mutatja, hogy hány érme esik "fejre", olyan diszkrét eloszlás, melynél a pálcikák helye a 0-tól n-ig terjedő egész számok, a k számhoz pedig

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

nagyságu pálcika tartozik, $(k = 0,1,\ldots,n)$. Ennek az eloszlásnak a neve: <u>n-ed rendü p paraméterü binomiális eloszlás.</u>



43. ábra

Persze itt nem a pénzdobáláson van a lényeg. Érezhető, hogy ha n darab p valószinüségü, független eseménnyel kapcsolatban azt vizsgálom, hogy ezek közül az események közül hány következik be, akkor ez a valószinüségi változó n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlást követ.

Például ha n ember egymástól függetlenül céltáblára lő, és egyforma képességüek, vagyis mindegyik - mondjuk - p valószinüséggel talál, akkor a találatok száma, mint valószinüségi változó, n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlásu.

Az eloszlás onnan kapta a nevét, hogy tagjait megkaphatjuk, ha a $p+(1-p)$ kéttagu kifejezés (latinul: binom) n-ik hatványát összeg alakjában kifejtjük:

$$\left(p+(1-p)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Ebből az azonosságból látszik az is, hogy a binomiális eloszlás valószínűségeloszlás, hiszen $\left(p+(1-p)\right)^n = 1^n = 1$.

3. Poisson-eloszlás

(ejtsd: poászon)

Az alábbi határértéktétel nagyon fontos következményekkel bir.

<u>Tétel: Tetszőleges pozitiv</u> λ <u>-ra és nem negativ, egész</u> k<u>-ra</u>

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np\to\lambda}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

<u>Bizonyitás:</u> Ismert, hogy $\lim\limits_{m\to\infty} \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = e^x$. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{p\to 0} (1-p)^{\frac{1}{p}} = e^{-1}$.

Ennek felhasználásával:

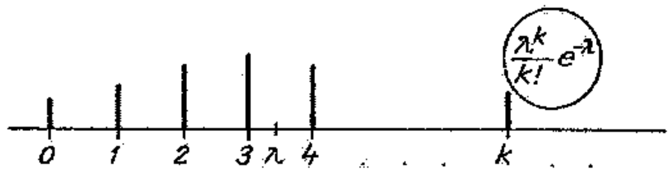
$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!} p^k (1-p)^n \frac{1}{(1-p)^k} =$$

$$= \frac{1}{k!} \overbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}^{\to 1} \overbrace{\left(1-\frac{2}{n}\right)}^{\to 1} \ldots \overbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}^{\to 1} \cdot \overbrace{(np)^k}^{\to \lambda^k} \overbrace{\left((1-p)^{\frac{1}{p}}\right)^{np}}^{\to e^{-\lambda}} \cdot \overbrace{\frac{1}{(1-p)^k}}^{\to 1} \to \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k e^{-\lambda} . \blacksquare$$

A tétel azt fejezi ki, hogy nagy n és kis p esetén az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás k-ik tagja, $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ jól közelíthető $\frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$ -vel, ahol $k = 0, 1, \dots, n$. Ennek kapcsán vezetjük be a Poisson-eloszlást.

<u>λ paraméterű Poisson-eloszlásnak</u> nevezzük azt a diszkrét eloszlást, melynél a pálcikák helye a nem negatív egész számok, a k-hoz tartozó pálcika nagysága pedig

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, \dots).$$



44. ábra

A Poisson-eloszlás is valószínűségeloszlás, ugyanis $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} \cdot e^{-\lambda} = 1$. A Poisson-eloszlás tagjait néhány λ-ra táblázatra foglaltuk. A táblázat a jegyzet végén található.

Tehát nagy n és pici p esetén az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás a $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlással helyettesíthető. Ez pedig örvendetes dolog, mert a Poisson-eloszlás tagjait megadó képlet sokkal egyszerűbb, mint a binomiális eloszlás tagjait megadó képlet. Lássuk ezt egy feladatban!

<u>1. feladat:</u> Egy hivatalban 600 telefonkészülék van, melyekről tegyük fel, hogy egymástól függetlenül $\frac{1}{200}$ valószínűséggel romlanak el egy nap alatt. Mi a valószínűsége, hogy egy nap alatt pontosan 5 készülék romlik el?

<u>Megoldás:</u> Az egy nap alatt elromló készülékek száma 600-ad rendű $\frac{1}{200}$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Tekintve, hogy a 600 már "nagy", az $\frac{1}{200}$ pedig "pici", a binomiális eloszlás helyett Poisson-eloszlást veszünk $\lambda = 600 \cdot \frac{1}{200} = 3$ paraméterrel.

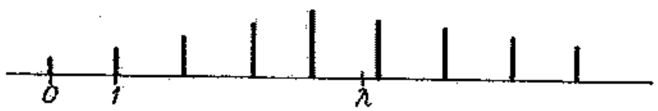
Így a keresett valószínűség a 3 paraméterű Poisson-eloszlásból olvasható ki: P (pontosan öt készülék romlik el) $= \frac{3^5}{5!} e^{-3} = 0{,}1008 \approx 0{,}1.$ ■

<u>Megjegyzés:</u> Ha binomiális eloszlással számoltunk volna, akkor a kérdezett valószínűségre a $\binom{600}{5}\left(\frac{1}{200}\right)^5 \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{595} = 0{,}1009$ értéket kaptuk volna.

Most megvizsgáljuk, hogy a λ paraméterű Poisson-eloszlás pálcikái közül melyik a legnagyobb. Legyen $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k=0,1,\ldots)$. Annak eldöntése céljából, hogy p_i nagyobb-e mint p_{i-1}, megvizsgáljuk a hányadosukat.

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{i},$$

hiszen $e^{-\lambda}$ -val és $(i-1)!$-sal egyszerűsíteni lehetett. Így láthatjuk, hogy ha i kisebb mint λ, akkor p_i nagyobb p_{i-1}-nél. Ha pedig i nagyobb mint λ, akkor p_i kisebb p_{i-1}-nél. Ha pedig λ egész szám, és így i egyenlő is tud lenni λ-val, akkor $p_{\lambda-1} = p_{\lambda}$. Tehát ha λ nem egész szám, akkor a λ előtt nőnek a pálcikák, a λ után pedig egyre kisebbek lesznek:



45. ábra

A legmagasabb pálcika a λ-t közvetlenül megelőző egész számhoz tartozik. Ha pedig λ egész szám, akkor a helyzet csak annyiban változik, hogy a λ-hoz és a λ-1-hez tartozó pálcikák egyforma magasak.

Az alábbi feladatból kitűnik, hogy a Poisson-eloszlással való közelítés olyankor is célra vezet, ha a binomiális eloszlás rendjét és paraméterét nem ismerjük, csak azt tudjuk valahonnan, hogy a rend nagy, a paraméter pedig pici.

2. feladat: A tó partján álltam, és néztem, ahogy a tóban a sok apró halacska egymással mit se törődve össze-vissza uszkált. Egy halász éppen hálóját készült kiemelni, amikor nagyképüen igy szólt hozzám: "Ha eltalálod, hány hal lesz a hálóban, kapsz egy ötszázast." Én csak annyit kérdeztem a halásztól, hogy úgy általában száz eset közül hányszor szokott üres lenni a hálója. Ő azt felelte, hogy körülbelül hatszor. Erre én egy kicsit gondolkodtam, és két halra tippeltem. Miért?

Megoldás: Mivel meg akartam nyerni az ötszáz forintot, így gondolkodtam: Nyilván annyi halra tippel az ember, ahány hal kifogása a legvalószinübb. Ehhez azt kellene tudni, hogy a hálóban lévő halak száma milyen eloszlású valószinüségi változó, és hogy ennek az eloszlásnak melyik tagja a legnagyobb. A halak egymástól függetlenül kerülnek vagy nem kerülnek a hálóba, hiszen egymással mit se törődve uszkálnak. Ezért a hálóban lévő halak száma olyan binomiális eloszlású valószinüségi változó, melynek sem rendjét sem paraméterét nem ismerem. (A rend a tóban lévő halak száma, a paraméter pedig - legalábbis nagyságrendileg - a háló karimája területének és a tó területének hányadosa.) Viszont a binomiális eloszlást közelithetem Poisson-eloszlással, hiszen a rend nagy (sok hal van), a paraméter pedig pici (a háló karimája által meghatározott terület nagyon pici a tó területéhez képest). Milyen λ-t vegyek a Poisson-eloszlásban? Száz esetből hatszor üres a háló. Ezért 0,06-nak veszem a 0 darab hal valószinüségét, vagyis

$$0,06 = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}.$$

Innen pedig λ már meghatározható: $\lambda = \ln \frac{100}{6} = 2,8$.

A Poisson-eloszlás maximális tagja, mint azt meghatároztuk, a paramétert megelőző tag. Ezért a 2 hal a legvalószinübb. ■

Később látni fogjuk, hogy a λ paraméterü Poisson-eloszlás várható értéke λ. Mivel a várható érték a gyakorlatban jól kezelhető mennyiség, sok feladatnál ez lehetőséget ad a Poisson-eloszlás paraméterének kieszelésére. (Lásd a X. fejezet 4. és 5. pontját.)

Összefoglalva az eddigieket: ha sok, pici valószinüségü, független esemény esetén azt vizsgálom, hogy közülük hány következik be, akkor ez a valószinüségi változó Poisson-eloszlásunak tekinthető.

Ilyen valószinüségi változók például:

1. Ahány autó áthalad az Erzsébet-hidon délelőtt 10 és 11 óra között. (Annak a valószinüsége, hogy egy kiszemelt autó - pl. a sógorom Zsigulija - a vizsgált idő alatt átmenjen, kicsi. Sok autó cikázik a városban egymástól többé-kevésbé függetlenül.)

2. Ahány telefonhívás érkezik egy hivatalba 10 perc alatt. (Sokan hívhatnak, egymástól függetlenül hívnak, kicsi a valószínűsége, hogy X.Y. éppen a vizsgált 10 perces időintervallumban telefonáljon.)

3. Ahány meteor becsapódik Magyarországra egy évben. (Sok meteor kóvályog az űrben, kicsi a valószínűsége, hogy egy konkrét meteor a vizsgált évben Magyarországra pottyanjon, és a "meteorok sem beszélnek össze".)

4. Geometriai eloszlás

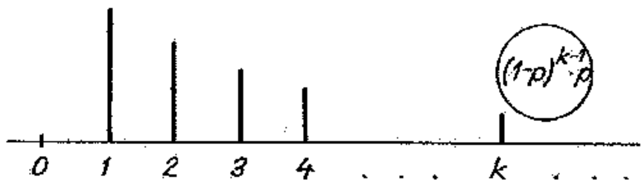
Ha egy p valószínűségű eseményre független kísérletsorozatot végzünk (például egymás után feldobjuk a dobókockát, és nézzük, hogy hatost dobunk-e vagy nem), és vizsgáljuk, hogy az esemény hányadik kísérletnél következik be először (hányadik dobásra dobunk először 6-ost), akkor erre a ξ valószínűségi változóra nyilván fennáll, hogy

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad (k=1,2,\dots).$$

Ugyanis ahhoz, hogy a k-ik kísérletre következzen be elsőzörre az esemény, az kell, hogy az első $k-1$ kísérletnél ne következzen be, a k-ikra pedig bekövetkezzen. Ennek valószínűsége pedig a függetlenség miatt a megfelelő valószínűségek szorzata: $(1-p)(1-p)\dots(1-p)\cdot p =$ $= (1-p)^{k-1} \cdot p$.

Ennek a problémának kapcsán jutunk a geometriai eloszláshoz: p paraméterű geometriai eloszlásnak nevezzük azt a diszkrét eloszlást, melynél a pálcikák helye a pozitív egész számok, a k-hoz tartozó pálcika nagysága pedig

$$(1-p)^{k-1} \cdot p \qquad (k=1,2,\dots).$$



46. ábra

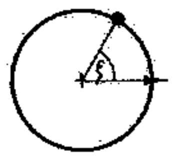
Az eloszlást azért hívják geometriai eloszlásnak, mert a pálcikák nagysága mértani sorozatot alkot, és a mértani sorozatokat geometriai sorozatoknak is szokták nevezni.

A $\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$ összefüggés mutatja, hogy a geometriai eloszlás valószinüségeloszlás.

Összefoglalva a mondottakat: ha egy p valószinüségü eseményre független kisérletsorozatot végzünk, és azt vizsgáljuk, hogy hányadik kisérletnél következik be először az esemény, akkor ez a valószinüségi változó p paraméterü geometriai eloszlást követ.

5. Egyenletes eloszlás

Képzeljünk el egy vizszintes helyzetü, kör alaku pályát. Jelöljünk ki rajta egy pontot, és inditsunk el a pályán egy golyót. A golyó valahol megáll. Véletlentől függ, hogy hol. Jelölje ξ annak a szögnek a radiánban vett értékét, amit a kijelölt pont, a kör középpontja és a golyó megállási helyzete kijelöl:

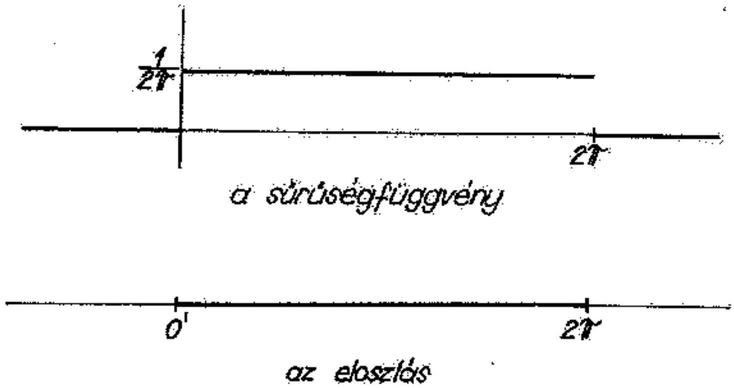


47. ábra

A golyó nyilván akárhol megállhat, igy ξ értékére teljesül, hogy $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$.

A golyó "egyformán szereti" a kör minden részét, ezért ξ eloszlása egyenletes, a festék egyenletesen van szétkenve a $[0, 2\pi]$ intervallumon.

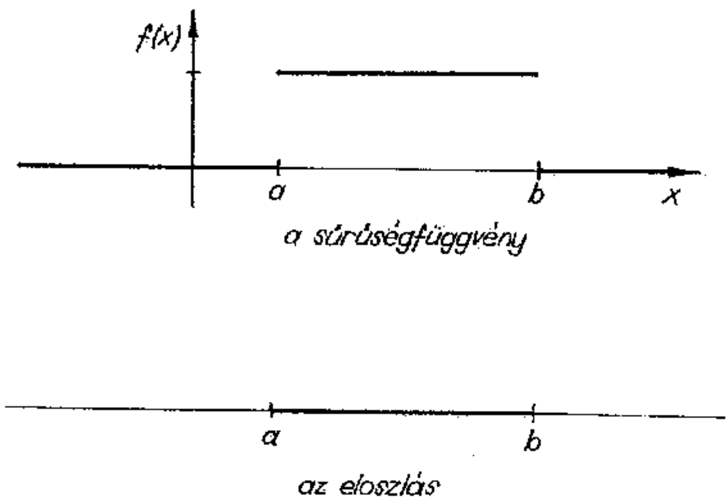
Ez azt jelenti, hogy az eloszlás folytonos, a sürüségfüggvény 0-val egyenlő a $[0, 2\pi]$ intervallumon kivül, és értéke állandó a $[0, 2\pi]$ intervallumon. Ez az érték pedig csakis $\frac{1}{2\pi}$ lehet, hiszen a sürüségfüggvény grafikonja alatti összterületnek 1-nek kell lenni:



48. ábra

Általánosabban: az $[a,b]$ intervallumon vett egyenletes eloszlásnak nevezzük azt a folytonos eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye 0-val egyenlő az $[a,b]$ intervallumon kívül, és $\frac{1}{b-a}$-val egyenlő az $[a,b]$-ben:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } x \in [a,b], \\ 0, & \text{ha } x \notin [a,b]. \end{cases}$$



49. ábra

6. Exponenciális eloszlás

A radioaktiv részecskék előbb-utóbb elbomlanak. Hogy mikor, az véletlentől függ: egy radioaktiv részecske élettartama valószinüségi változó. Ki fogjuk most eszelni, hogy milyen eloszlásu.

Gondolatban végezzük el a következő kisérletet: Vegyünk n darab radioaktiv részecskét. n_x-szel, n_y-nal illetve n_{x+y} -nal jelöljük azon részecskék számát, melyek tulélik, az x, y illetve $x+y$ időtartamot. A tapasztalat szerint általában teljesül, hogy

$$\frac{n_{x+y}}{n_x} \approx \frac{n_y}{n} .$$

Tehát ha van n db részecském, és azt nézem, hogy ezek hányad része fog legalább y időt élni, akkor ez az arányszám nem függ attól, hogy " friss " vagy már x időt leélt részecskéket vettem-e. Vagyis a részecskék összességükben, "nem érzik meg az x idő elteltét". A radioaktiv részecskék ilyen értelemben "örökifju" tulajdonságuak. Az "örökifju" jelzőt nem szabad összetéveszteni az "örökéletü" jelzővel! Szó sincs olyasmiről, hogy a radioaktiv részecskék a végtelenségig élnének. Az örökifju tulajdonság csupán csak annyit akar jelenteni, hogy a részecskék multja nem szól bele a jövőjükbe. Amig élnek, mindig olyanok, mintha éppen akkor születtek volna.

A matematika nyelvére leforditjuk az $\frac{n_{x+y}}{n_x} \approx \frac{n_y}{n}$ törvényszerüséget. Ha a ξ valószinüségi változó egy radioaktiv részecske élettartamát jelöli, akkor az $\frac{n_y}{n}$ relativ gyakoriság a $\xi \geqslant y$ esemény valószinüségének felel meg:

$$\frac{n_y}{n} \approx P(\xi \geqslant y) .$$

Az $\frac{n_{x+y}}{n_x}$ hányados pedig a $\xi \geqslant x + y$ eseménynek a $\xi \geqslant x$ eseményre vonatkozó feltételes valószinüségének felel meg:

$$\frac{n_{x+y}}{n_x} \approx P(\xi \geqslant x + y \mid \xi \geqslant x).$$

Vagyis matematikai modellünkben a ξ valószínűségi változó eloszlását olyannak kell tekinteni, melyre fennáll, hogy

$$P(\xi \geqslant x+y \mid \xi \geqslant x) = P(\xi \geqslant y) \qquad (x,y > 0).$$

Világos, hogy a $\xi \geqslant x+y$ esemény maga után vonja a $\xi \geqslant x$ eseményt, így $P(\xi \geqslant x+y \mid \xi \geqslant x) = \frac{P(\xi \geqslant x+y)}{P(\xi \geqslant x)}$. Ennek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\frac{P(\xi \geqslant x+y)}{P(\xi \geqslant x)} = P(\xi \geqslant y).$$

Ha $G(x)$-szel jelöljük a $\xi \geqslant x$ esemény valószínűségét:

$$G(x) = P(\xi \geqslant x) \qquad (x > 0),$$

akkor a fentieket így írhatjuk:

$$\frac{G(x+y)}{G(x)} = G(y),$$

vagyis

$$G(x+y) = G(x) \cdot G(y) .$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $G(x) = e^{c \cdot x}$ (c konstans) alaku függvények eleget tesznek ezen függvényegyenletnek:

$$e^{c \cdot (x+y)} = e^{c \cdot x} \cdot e^{c \cdot y} .$$

Bebizonyitható, hogy ha egy függvény eleget tesz a fenti függvényegyenletnek és monoton, akkor csak $e^{c \cdot x}$ alaku lehet. Márpedig a G függvény monoton csökkenő, hiszen $x_1 < x_2$ esetén a $\xi \geqslant x_2$ esemény maga után vonja a $\xi \geqslant x_1$ eseményt, és így $G(x_2) = P(\xi \geqslant x_2) \leqslant P(\xi \geqslant x_1) = G(x_1)$. Ezért $G(x) = e^{c \cdot x}$. Itt a c konstans csak negativ lehet, mert G monoton csökkenő: $c = -\lambda$, ahol λ pozitiv (és így c negativ). Adódik, hogy

$$G(x) = e^{-\lambda \cdot x} \qquad (x > 0).$$

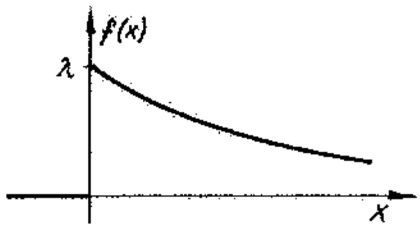
Innen pedig ξ eloszlásfüggvényére a következőt kapjuk:

$$F(x) = P(\xi < x) = 1-P(\xi \geq x) = 1-G(x) = 1-e^{-\lambda \cdot x} \qquad (x > 0).$$

Mivel ξ nem vehet fel negatív értékeket $F(x) = 0$, ha $x \leq 0$.
A F függvény deriváltja a

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda \cdot x}, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

függvény, ami integrálható függvény lévén a keresett eloszlás sűrűségfüggvénye. A sűrűségfüggvény grafikonja:



50. ábra

Ezt az eloszlást <u>λ paraméterű exponenciális eloszlás</u>nak nevezzük. A λ paraméter valószínűségszámítási jelentését később fogjuk tárgyalni: λ a várható érték reciproka (lásd a X. fejezet 4. pontját). Az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{0}^{\infty} = 1$$ összefüggés mutatja,

hogy az exponenciális eloszlás valószínűségeloszlás.

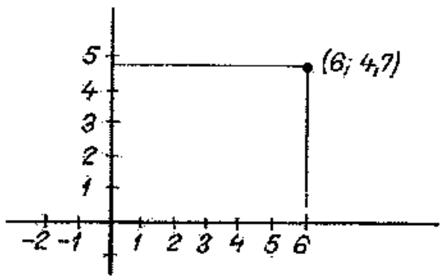
Összefoglalva: ha egy nem negatív értékeket felvevő valószínűségi változó rendelkezik az "örökifjú" tulajdonsággal, akkor exponenciális eloszlásúnak tekinthető.

VI. TÖBBDIMENZIÓS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

1. Kétdimenziós valószínűségi változó

1. Célbalövésnél minden versenyző a céltábla közepébe szeretne találni. Ez azonban a nagy igyekezet ellenére sem mindig sikerül. A kéz remegése, légáramlatok stb. miatt a találat helye véletlentől függ. Feltételezve, hogy a versenyzők annyira azért tudnak célozni, hogy legalább a céltáblát eltalálják, egy lövés helye a céltábla síkján egy véletlenszerű pontot jelöl ki.

2. Véletlentől függ, hogy egy nap alatt mennyi csapadék esik Budapesten. A lehulló csapadékmennyiség valószínűségi változó, jelöljük ξ -vel. A Debrecenben lehulló napi csapadékmennyiség is valószínűségi változó, jelöljük η -val. Egy konkrét megfigyelés esetén ξ és η értéke egy-egy valós szám, amiből egy számpár, azaz a sík egy pontja áll össze. Ha például Budapesten 6 mm, Debrecenben 4,7 mm eső esett, akkor a sík (6; 4,7) pontját kapjuk:



51. ábra

Mivel ξ és η értéke véletlentől függ, a síkbeli (ξ, η) pont is véletlentől függ.

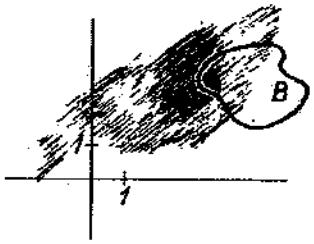
Ha valamilyen véletlen jelenséggel kapcsolatban a sík egy-egy pontja bukkan fel véletlenszerűen, akkor síkbeli vagy kétdimenziós valószínűségi változóról beszélünk. A két- vagy többdimenziós valószínűségi változókat vektor valószínűségi változóknak is szokás nevezni.

Kétdimenziós valószínűségi változót úgy értelmezhetünk, hogy egy véletlen jelenséggel kapcsolatban közvetlenül (mint a fenti 1. példában) vagy közvetve (mint a fenti 2. példában) a sík egy pontját jelöljük ki.

Ez utóbbi esetben koordináta valószinüségi változókról, a rövidség kedvéért inkább komponensekről (komponens magyarul: összetevő) és ezekből összetevődő kétdimenziós valószinüségi változóról beszélünk. Kétdimenziós valószinüségi változókat görög kisbetükkel vagy pedig komponensei segitségével jelölünk. Például:

1. ζ = a találat helye a céltábla sikján,
2. (ξ, η), ahol ξ = a napi csapadékmennyiség Budapesten,
η = " Debrecenben.

Egy kétdimenziós valószinüségi változót ugy épitünk be matematikai modellünkbe, hogy megadjuk az eloszlását, azaz szétkentünk egységnyi festékmennyiséget a sikon ugy, hogy a sik tetszőleges B részhalmaza esetén a véletlenszerü sikbeli pont B-be esésének valószinüsége annyi legyen, amennyi festék az eloszlás szerint a B-re van kenve.



52. ábra

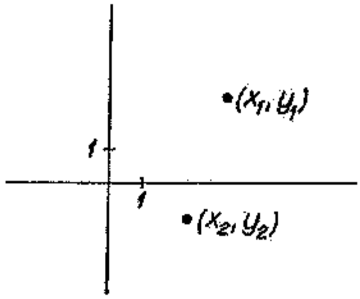
Ezt az eloszlást kétdimenziós valószinüségi változó eloszlásának nevezzük. Ha hangsulyozni akarjuk, hogy a kétdimenziós valószinüségi változó komponensei ξ és η, akkor az eloszlást ξ és η együttes eloszlásának is nevezzük.

Megjegyzés: Jelöléseinkben ξ mindig az első, η pedig a második komponenst jelöli. Amikor pedig a sik pontjait jelöljük betüpárokkal, akkor az első koordinátát x, a másodikat pedig y jelöli. Ábráinkon a vizszintes koordinátatengely felel meg ξ-nek, illetve x-nek, a függőleges tengely pedig η-nak illetve y-nak.

Most ismerkedjünk meg a sikbeli eloszlások különböző tipusaival.

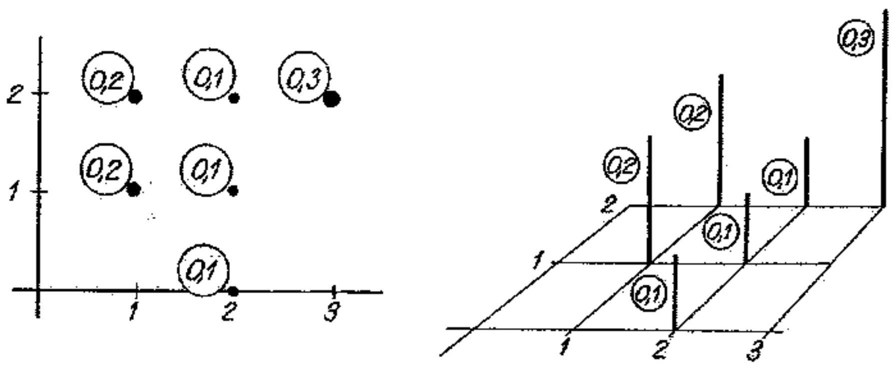
2. Diszkrét eloszlás

Egy sikbeli eloszlást diszkrétnek nevezünk, ha "csak csomókból áll a festék", azaz megadhatók olyan (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... pontok a sikban, hogy csak ezeken a pontokon van festék:



53. ábra

Korábbi jelöléseinknek megfelelően a festékcsomók helyét a sikban kijelöljük, a festékcsomók nagyságát pedig bekarikázott számokkal a kijelölt pontok mellé irjuk. A pálcikás szemléltetés most is alkalmazható, de inkább csak képzeletben, mert rajzban már kevésbé áttekinthető. Az alábbi két ábrán ugyanazt a diszkrét eloszlást adjuk meg:



54. ábra

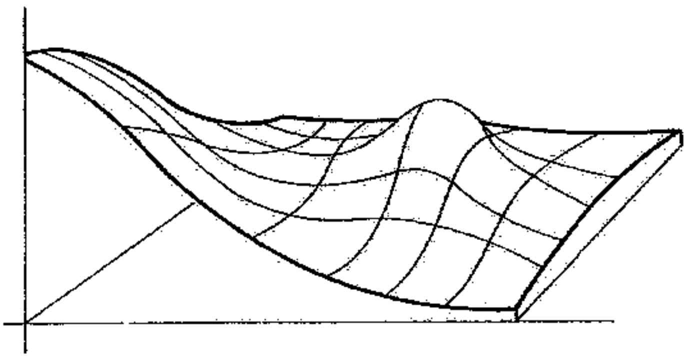
Ha egy sikbeli diszkrét eloszlást nem akarunk szemléltetni, csak adatait akarjuk rögziteni, akkor ezeket célszerű táblázatba foglalni. Például a most szemléltetett eloszlás táblázatba foglalva igy fest:

2	0,2	0,1	0,3
1	0,2	0,1	0
0	0	0,1	0
η \ ξ	1	2	3

55. ábra

3. Folytonos eloszlás

Tekintsünk egy nem negatív értékeket felvevő, kétváltozós integrálható függvényt, és ábrázoljuk grafikonját. Egy felületet kapunk a sík felett:

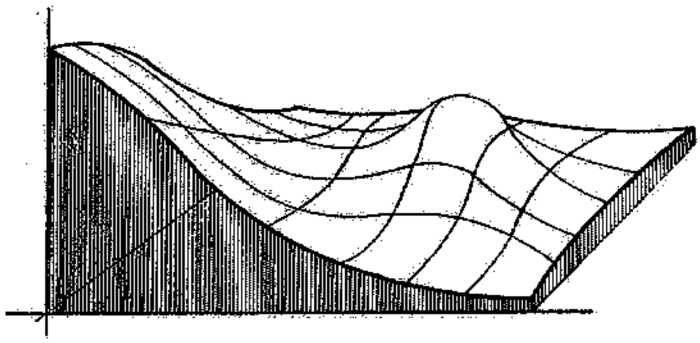


56. ábra

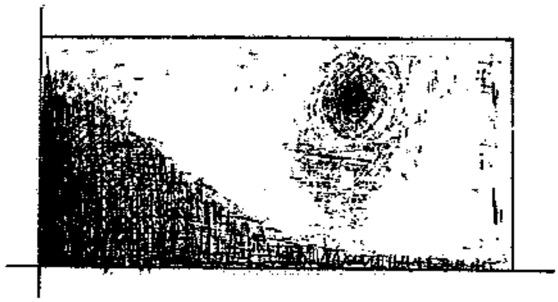
Kenjünk szét festéket a függvény és a sík közötti tartományban egyenletesen, pontosabban mondva ugy, hogy a tartomány minden részhalmazára annyi festék jusson, amennyi a részhalmaz térfogata. Ezután "jön az úthenger", és felülről összenyomja a teret ugy, hogy a festék a síkra préselődjön (l. 57. ábra, köv. old.).

Ily módon egy eloszlást kapunk a síkon. A síkra préselt festéket ugy képzeljük el, mintha teljesen bele lenne préselve a síkba. Tehát a festék nem ad vastagságot a síknak, csupán beszinezi.

Ha a függvényt h-val jelöljük, akkor a sík valamely B részhalmazára préselődő festékmennyiség $\iint\limits_B h(x,y)\,dx\,dy$-nal egyenlő.



a festék szét van kenve a tartományban



a festéket rányomtuk a síkra

57. ábra

Ugyanis ez az integrál adja meg a B halmaz feletti és a h grafikonja alatti térrész térfogatát.

Tekintsük a sík tetszőleges (x_0, y_0) pontját. Ha a t(B) területű B halmaz " rázsugorodik " az (x_0, y_0) pontra, és h folytonos az (x_0, y_0) pontban, akkor az egydimenziós esethez hasonlóan

$$\frac{1}{t(B)} \iint_B h(x,y)\,dx\,dy \longrightarrow h(x_0,y_0).$$

Tehát ha a B halmaz picike halmaz az (x_0,y_0) pont körül, akkor a festékeloszlás B-beli átlagsűrűsége közelítőleg $h(x_0,y_0)$-lal egyenlő. Ezért a h függvényt az eloszlás <u>sűrűségfüggvényének</u> nevezzük.

Az eloszlást a sűrűségfüggvény grafikonjával jól szemléltethetjük. A sűrűségfüggvény a "festékréteg préselés előtti vastagságát" írja le.

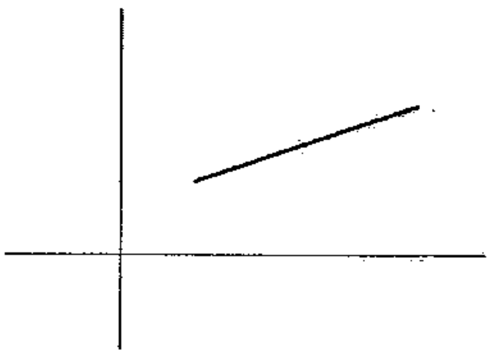
Az ily módon megadható eloszlásokat <u>kétdimenziós vagy síkbeli folytonos eloszlás</u>oknak nevezzük.

Egy folytonos eloszlás nyilván akkor valószinüségeloszlás, ha a sürüségfüggvény alatti tartomány térfogata, tehát a sürüségfüggvénynek az egész sikon vett integrálja 1-gyel egyenlő.

Ha valamilyen kétdimenziós valószinüségi változó eloszlása folytonos, akkor az eloszlás sürüségfüggvényét a kétdimenziós valószinüségi változó sürüségfüggvényének, avagy a komponensek együttes sürüségfüggvényének nevezzük.

Megjegyzések:

1. A sikon nagyon könnyü olyan csomómentes eloszlást mutatni, amit nem lehet valamilyen kétváltozós függvényből – mint sürüségfüggvényből – a most leirt módon előállitani. Ha a sikon egy egyenesdarabot egyenletesen kenünk be festékkel, akkor ez az eloszlás csomómentes, de nyilvánvalóan nem olyan, amilyen eloszlásokat ebben a pontban konstruáltunk:

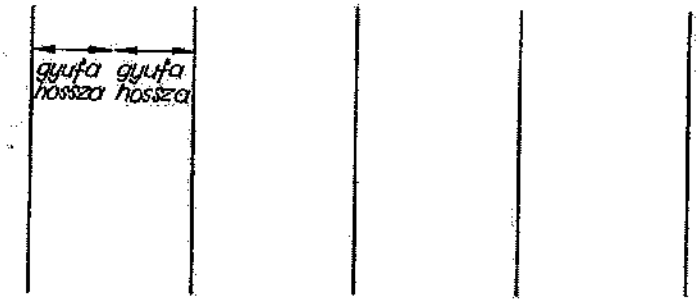


58. ábra

2. Természetesen a különböző eloszlástipusok még keveredhetnek is. Mivel a gyakorlatban a diszkrét és a sürüségfüggvénnyel rendelkező folytonos (röviden: folytonos) eloszlások a legfontosabbak, csak ezeket fogjuk részletesebben tárgyalni.

4. Egyenletes eloszlás

Feladat: Vegyünk egy gyufaszálat és egy nagy iv papirt. A papirra huzzunk párhuzamos egyeneseket ugy, hogy az egyenesek egymástól való távolsága két gyufaszálnyi legyen:



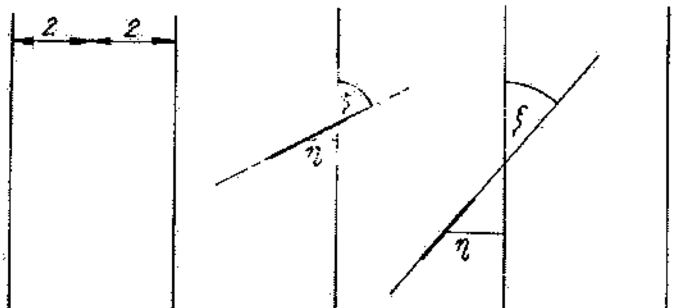
59. ábra

Fogjuk meg a gyufaszálat az egyik végén. A függőlegesen lógó gyufaszállal a kezünkben mozgassuk kezünket a papir fölött elég magasan a párhuzamos egyenesek irányára merőlegesen. Egy véletlen pillanatban állitsuk meg kezünket, és ejtsük le a gyufát. A gyufa ráesik a papirra. (Ha leugrana a papirról, akkor ismételjük meg a kisérletet addig, amig a gyufa a papiron marad.) Két lehetőség van. A gyufa vagy metszi valamelyik egyenest, vagy egyiket sem metszi. (Ha netán nem tudnánk dönteni e fölött, akkor végezzünk ujabb dobást!) Ki fogjuk számitani annak az eseménynek a valószinüségét, hogy a gyufa metszi valamelyik egyenest. A számitás gondolatának megértése több szempontból is hasznos lesz.

<u>Megoldás:</u> Mint látni fogjuk, a megoldás során a gyufa hosszának felével kell majd számolnunk. Ezért vegyük a gyufa hosszát 2 egységnek. Legyen

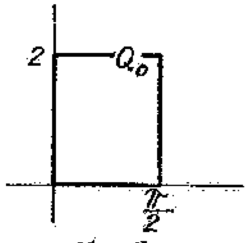
ξ = a gyufa által meghatározott egyenesnek a párhuzamos egyenesekkel bezárt (kisebb) szöge radiánban mérve,

η = a gyufa középpontjának a hozzá legközelebb eső egyenestől való távolsága.



60. ábra

ξ és η értékeire nyilván fennáll, hogy $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \eta \leqslant 2$. Kézenfekvő, hogy ξ is és η is egyenletes eloszlásunak vehető a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ illetve a $[0, 2]$ intervallumon. A (ξ, η) pont az ábrán Q_0-lal jelölt téglalapba esik:

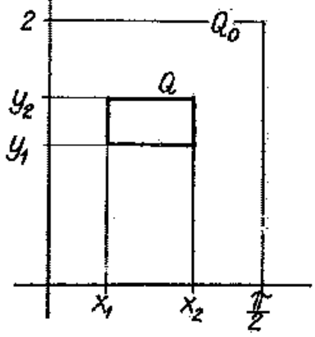


61. ábra

Ezért a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása erre a $\frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$ területű téglalapra koncentrálódik. Az eloszlás kieszelése céljából tekintsük az $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$, $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$ eseményeket, ahol $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant 2$. Ezek az események függetleneknek tekinthetők, hiszen akárhol is esik le a gyufa, a függőleges ejtés miatt akármerre dőlhet: az $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$ esemény bekövetkezéséből semmivel se válunk okosabbá az $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$ eseménnyel kapcsolatban. A függetlenség miatt $P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2) = P(x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2) \cdot$

$$\cdot P(y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2) = \frac{x_2 - x_1}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{(x_2 - x_1) \cdot (y_2 - y_1)}{\pi} .$$

Az $x_1 \leqslant \xi \leqslant x_2$ és az $y_1 \leqslant \eta \leqslant y_2$ események együttes bekövetkezése éppen azt jelenti, hogy a (ξ, η) pont az ábrán Q-val jelölt téglalapba esik:

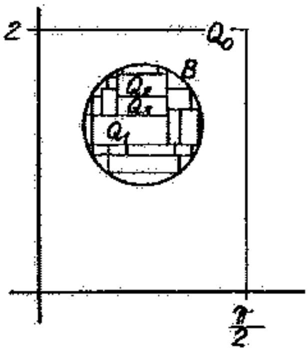


62. ábra

Tehát minden Q_o-beli Q téglalapra, melynek oldalai a koordinátatengelyekkel párhuzamosak,

$$P\left((\xi,\eta)\in Q\right)=\frac{t(Q)}{t(Q_o)},$$

ahol t-vel a halmazok területét jelöltük. A $P((\xi,\eta)\in Q)=\frac{t(Q)}{t(Q_o)}$ tulajdonság a téglalapokról átöröklődik tetszőleges Q_o-beli B halmazra. Ezt a tényt csak olyan B halmazokra igazoljuk, melyeket "mozaikszerűen ki lehet rakni" koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalu Q_i téglalapokból:



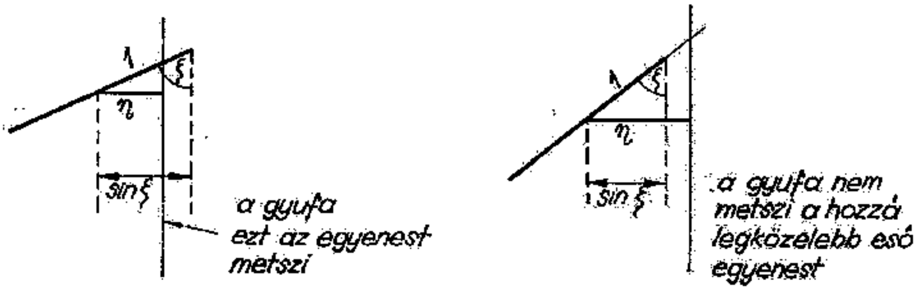
63. ábra

Mivel a B halmaz "mozaikszerűen áll elő" a Q_i tégalapokból, a valószínűség és a terület összegzési tulajdonságából adódik, hogy

$$P\left((\xi,\eta)\in B\right)=\sum_i P\left((\xi,\eta)\in Q_i\right)=\sum_i\frac{t(Q_i)}{t(Q_o)}=\frac{t(B)}{t(Q_o)}.$$

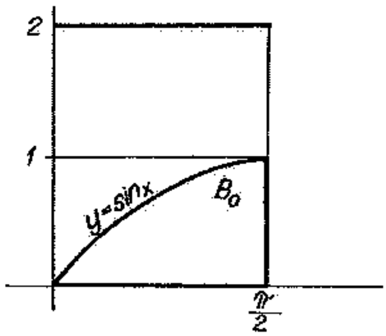
Tehát tetszőleges Q_o-beli B halmaz esetén a (ξ,η) pont B-be esésének valószínűsége arányos a halmaz területével, vagyis a Q_o halmazon a területtel arányosan kell szétkenni a festéket.

Most vizsgáljuk meg, mi annak a feltétele, hogy a gyufa valamelyik párhuzamos egyenest messe. Az alábbi ábrákból kiolvasható, hogy a gyufa pontosan akkor metszi valamelyik egyenest, ha $\eta<\sin\xi$:



64. ábra

Az $\eta < \sin \xi$ egyenlőtlenség a Q_0 téglalapnak egy B_0 részhalmazát jelöli ki, melynek területe $t(B_0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1.$



65. ábra

Tehát a gyufa pontosan akkor metszi valamelyik egyenest, ha a (ξ, η) pont B_0-ba esik. Ennek valószinüsége pedig területek hányadosaként írható fel:

$$P\big((\xi, \eta) \in B_0\big) = \frac{t(B_0)}{t(Q_0)} = \frac{1}{\pi} .$$

Azt kaptuk, hogy

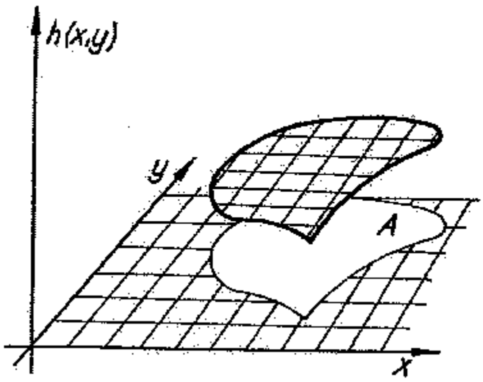
$$P(\text{a gyufa metszi valamelyik egyenest}) = \frac{1}{\pi} . \blacksquare$$

E feladat kapcsán vezetjük be a síkbeli egyenletes eloszlás fogalmát.

Ha egy A halmaz a síknak véges területű részhalmaza, akkor az A halmazon vett egyenletes eloszlásnak nevezzük azt a valószínűségeloszlást, mely az A halmazon a területtel arányosan keni szét az egységnyi festékmennyiséget. (Az arányossági tényező nyilván $\frac{1}{t(A)}$.)

Az egyenletes eloszlás nyilván folytonos eloszlás, melynek sűrűségfüggvénye

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{t(A)}, & \text{ha } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



66. ábra

Megjegyzések:

1. Gyakran előfordul, hogy valamilyen esemény valószínűségének meghatározása – gyufadobálós problémánkhoz hasonlóan – alkalmasan választott valószínűségi változók bevezetésével, azok együttes eloszlásának kieszelésével, majd az eseménynek megfelelő halmazra kent festékmennyiség meghatározásával lehetséges.

2. A π szám reciprokát tetszőleges pontossággal meg lehet határozni. Gyufadobálós feladatunk alapján ugy is közelíthetjük az $\frac{1}{\pi}$ értéket, hogy feldobunk sok (mondjuk 1000 darab) gyufát, és megszámoljuk, hogy a gyufák hányad része metsz valamilyen egyenest. Ezzel a relatív gyakorisággal közelíthetjük az $\frac{1}{\pi}$ valószínűséget. Annak eldöntésével, hogy adott pontosságu közelítés eléréséhez hány gyufát kell feldobni, később, a nagy számok gyenge törvényeinél még foglalkozunk. Előfordul, hogy valamilyen bonyolult kifejezés értékét a következőképpen határozzák meg. A "számítógépben generált" valószínűségi változókkal kapcsolatban kieszelnek egy olyan eseményt, melynek valószínűsége a megadott kifejezés értéke, és utána a számítógéppel végeztetik el a sok kísérletet (mintha a számítógép "1000-szer feldobná a gyufát") és a relatív gyakoriság kiszámolását.

3. Vegyük észre, hogy ξ és η együttes eloszlása azért egyenletes eloszlás a Q_0 téglalapon, mert

a) ξ egyenletes eloszlásu a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon,

b) η egyenletes eloszlásu a $[0, 2]$ intervallumon,

c) ξ -nek és η -nak "egymáshoz nincsen semmi köze sem", ξ és η függetlenek egymástól. (A valószinüségi változók függetlenségének definicióját később pontosabban és általánosabban meg fogjuk adni.)

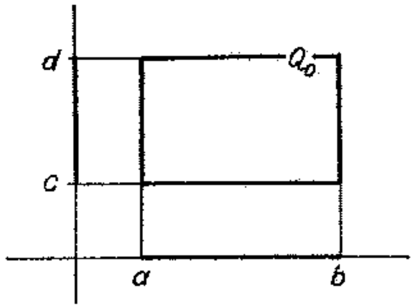
Ezért világos, hogy ha

a) ξ egyenletes eloszlásu az $[a, b]$ intervallumon,

b) η egyenletes eloszlásu a $[c, d]$ intervallumon,

c) ξ és η függetlenek,

akkor (ξ, η) egyenletes eloszlásu az intervallumoknak megfelelő Q_0 téglalapon:



67. ábra

4. Ha egy véletlen jelenséggel kapcsolatos probléma megoldható (egy- vagy kétdimenziós) egyenletes eloszlásu valószinüségi változók bevezetésével, akkor geometriai problémáról szokás beszélni. A szóhasználatot azzal magyarázhatjuk, hogy egyenletes eloszlás esetén a valószinüséget (egydimenziós esetben) hosszuságok, (kétdimenziós esetben) területek hányadosaként kapjuk meg. A hosszuság- és területszámitást pedig a geometria keretein belül szokták tanitani. A fenti példában megmutattuk, hogy miért vehetjük ξ és η együttes eloszlását egyenletesnek a téglalapon. Gyakori hiba szokott lenni, hogy hosszuságok vagy területek hányadosaként számolnak valószinüségeket olyankor is, amikor semmi sem indokolja az egyenletes eloszlás használatát. (Az itt használt "geometriai probléma" kifejezés nem tévesztendő össze a "geometriai eloszlás" fogalmával!)

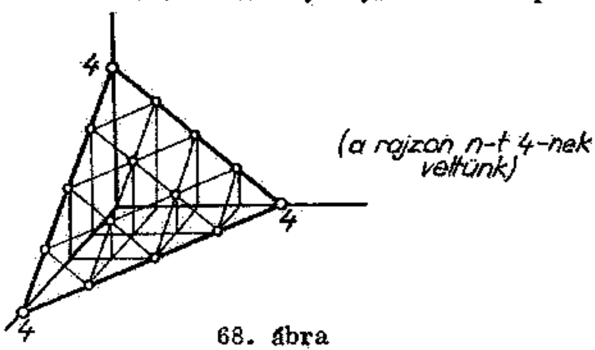
5. Többdimenziós valószínűségi változó

Ha egy véletlen jelenséggel kapcsolatban r darab valószínűségi változót tekintünk, akkor ezek együttesen az r-dimenziós tér valamely véletlenszerű pontját, azaz egy r-dimenziós valószínűségi változót határoznak meg. Például, ha a napi csapadékmennyiséget 19 városban mérjük meg, akkor egy 19 dimenziós valószínűségi változót kapunk.

Mindaz amit korábban és később az $r = 2$ esetre elmondunk, értelemszerűen $r > 2$-re is átfogalmazható. Mivel a valószínűségszámítás legfontosabb fogalmai, tételei már az $r = 2$ esetben előbukkannak, a könnyebb érthetőség és szemléltethetőség kedvéért ezzel az esettel foglalkoztunk részletesebben. A magasabb dimenziós eloszlások illusztrálására a következő pontban bemutatjuk a polinimiális eloszlást.

6. Polinomiális eloszlás

Célbalövünk olyan közelről, hogy a céltáblát biztosan eltaláljuk. A céltáblát előzőleg három részre osztjuk ugy, hogy p_i legyen a valószínűsége annak, hogy az i-ik részbe esik a találat $(i = 1,2,3)$. n darab lövést adunk le. Feltételezzük, hogy az egyes lövések egymástól függetlennek tekinthetők. Az, hogy hányszor találunk az i-ik részbe, véletlentől függ, vagyis valószínűségi változó, amelyet ξ_i-vel jelölünk $(i = 1,2,3)$. Kézenfekvő, hogy ξ_i (egydimenziós) eloszlása n-edrendű p_i paraméterű binomiális eloszlás. Tekintsük a ξ_1, ξ_2, ξ_3 valószínűségi változókból összetevődő ξ valószínűségi változót. ξ eloszlása nyilván diszkrét, hiszen ξ értékeként csak olyan (k_1, k_2, k_3) számhármas adódhat, melyre teljesül, hogy k_1, k_2, k_3 nem negatív egész és $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Az alábbi ábrán bejelöljük ezeket a pontokat:



68. ábra

Kiszeljük, hogy mi a valószinüsége annak, hogy ξ értékeként egy ilyen (k_1, k_2, k_3) számhármas adódik. Vagyis mi annak a valószinüsége, hogy k_1-szer találunk az első, k_2-ször találunk a második, k_3-szor a harmadik részbe. Nyilvánvaló, hogy ha előirjuk, hogy melyik k_1 darab lövésnél találjunk az első, melyik k_2 darab lövésnél a második és melyik k_3 darab lövésnél a harmadik részbe, akkor ennek a valószinüsége $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$ -mal egyenlő. Kombinatorikai ismereteinkből (ismétléses permutációk) nyilvánvaló, hogy $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3!}$ -féleképpen irhatjuk ezt elő, s igy annak a valószinüsége, hogy az n darab lövés során pontosan k_1-szer találunk az első, k_2-ször találunk a második és k_3-szor a harmadik részbe, egyenlő a következővel:

$$P(\xi_1 = k_1, \quad \xi_2 = k_2, \quad \xi_3 = k_3) = \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} .$$

Vagyis ξ eloszlása olyan, hogy a (k_1, k_2, k_3) pontra kerülő festékcsomó nagysága $\frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3}$.

Ha nem három, hanem r részre osztjuk a céltáblát, és az i-ik rész találatának valószinüsége p_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, akkor egy r-dimenziós ξ valószinüségi változót kapunk. Ennek i-ik komponense az a ξ_i valószinüségi változó, mely azt mutatja, hogy hányszor találtunk az i-ik részbe. A fentiekhez hasonló gondolatmenettel kiadódik, hogy ξ eloszlása az r-dimenziós téren olyan, hogy egy $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ szám r-esre kerülő festékcsomó nagysága

$$\frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \ldots \cdot p_r^{k_r} ,$$

ha $k_1, k_2, \ldots, k_r$ nem-negativ egész, és $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$. Ennek a valószinüségeloszlásnak a neve: <u>n-edrendü, r-dimenziós $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ paraméterü polinomiális eloszlás.</u>

Érezhető az általánositás: ha egy véletlen jelenséggel kapcsolatban az $A_1, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak,

$p_i = P(A_i)$ $(i = 1,\dots,n)$, és a véletlen jelenségre n darab független kisérletet végzünk, akkor a

ξ_i = ahányszor az A_i esemény bekövetkezik $(i=1,\dots,r)$

valószinüségi változók együttes eloszlása n-edrendü r-dimenziós $(p_1,\dots,p_r)$ paraméterü polinomiális eloszlás.

Például 25-ödrendü, 6-dimenziós $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ paraméterü polinimiális eloszlású valószinüségi változót kapunk, ha a dobókockát 25-ször feldobjuk, és

ξ_1 = ahányszor 1-es a dobás eredménye,

ξ_2 = " 2-es " ,

$\vdots$

ξ_6 = " 6-os " ,

és tekintjük a $\xi_1, \xi_2,\dots, \xi_6$ komponensekből összetevődő 6-dimenziós valószinüségi változót.

A polinomiális eloszlás onnan kapta a nevét, hogy tagjait megkaphatjuk, ha a $p_1 + p_2 + \dots + p_r$ több-tagu kifejezés (latinul: polinom) n-ik hatványát tagokra bontjuk:

$$(p_1+p_2+\dots+p_r)^n = \sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_r \\ \text{nem negativ egész}, \\ k_1+k_2+\dots+k_r=n.}} \frac{n!}{k_1!\,k_2!\dots k_r!}\, p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}.$$

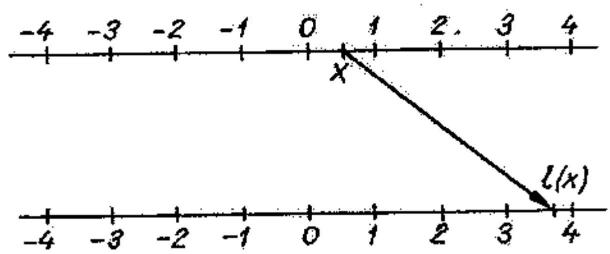
Ebből az azonosságból az is látszik, hogy a polinomiális eloszlás valószinüségeloszlás, ugyanis $(p_1 + p_2 + \dots + p_r)^n = 1^n = 1$.

VII. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK FÜGGVÉNYE

1. Eloszlástranszformáció egydimenzióban

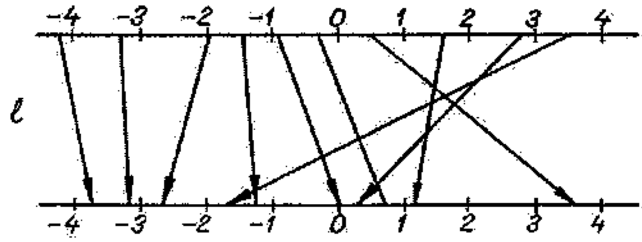
Legyen ξ valószínűségi változó, ℓ pedig legyen valamilyen adott függvény. Ha ξ megfigyelt értékét ℓ-be helyettesítjük, tehát az $\ell(\xi)$ számot vesszük, akkor ujabb, ugyancsak véletlentől függő számot kapunk. (Például 1. vehetjük ξ négyzetét, 2. ξ értékét a tangens függvénybe helyettesíthetjük.) Jelöljük ezt a valószínűségi változót η-val: $\eta =$ $= \ell(\xi)$. (Példáinkban 1. $\eta = \xi^2$, 2. $\eta = \text{tg}\ \xi$.) Ilyenkor az η valószínűségi változót ξ függvényének nevezzük. Kérdés, hogyan lehet ξ eloszlásából és az ℓ függvényből η eloszlását meghatározni. A kérdésre egyszerűen és szemléletesen felelhetünk, ha megismerkedtünk az eloszlástranszformáció fogalmával.

Ha ℓ a valós számok halmazán értelmezett valós értékeket felvevő függvény, akkor ℓ minden valós számhoz hozzárendel egy másik valós számot. (Az x-hez rendelt számot jelöljük $\ell(x)$-szel.) Ezt többek között így szemléltethetjük: vesszük a számegyenes két példányát, és x-ből $\ell(x)$-be huzunk egy nyilat:



69. ábra

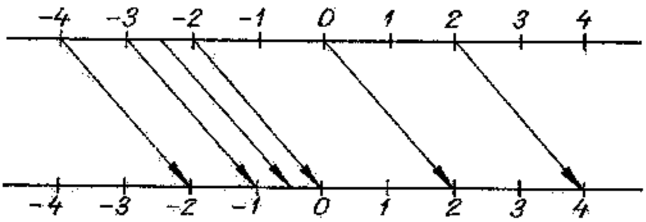
Gondolatban ezt minden olyan x valós számra megcsináljuk, melyre az ℓ függvény értelmezett, s megkapjuk az ℓ függvényt szemléltető "nyilerdőt":



70. ábra

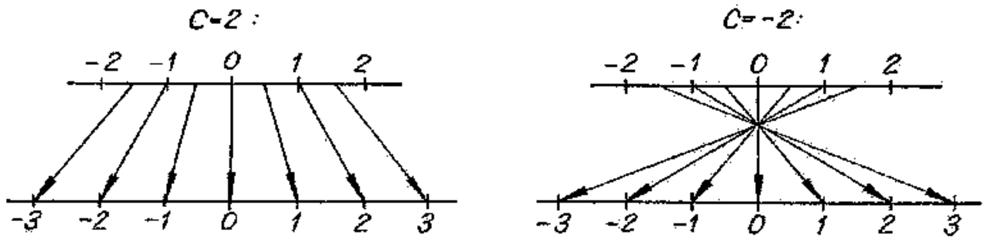
Érdemes alaposabban megismerkedni a függvények nyilerdős szemléltetésével. Ezért vesszük a következőket.

1. Az $\ell(x) = x+2$ függvény minden pontot 2-vel jobbra tol:



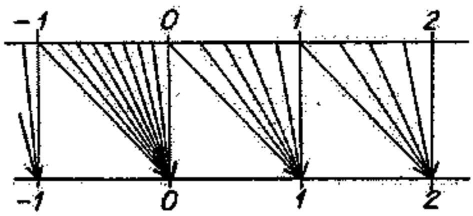
71. ábra

2. Az $\ell(x) = c\cdot x$ függvény (c konstans) minden pontnak az origótól való távolságát $|c|$-szeresére növeli. Ha c negatív, akkor emellett még át is tükrözi a pontokat az origón:



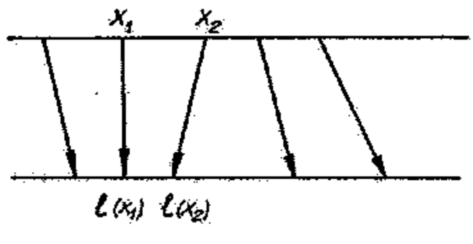
72. ábra

3. Az $\ell(x) = [x] + 1$ függvény a balról zárt jobbról nyilt $[k-1,\ k)$ intervallumot a k pontba képzi:



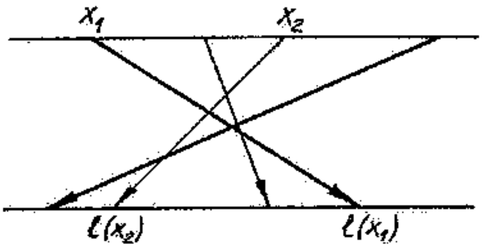
73. ábra

4. Ha az ℓ függvény szigoruan monoton növekedő, akkor "nyilai" nem keresztezik egymást: $x_1 < x_2$ esetén $\ell(x_1) < \ell(x_2)$:



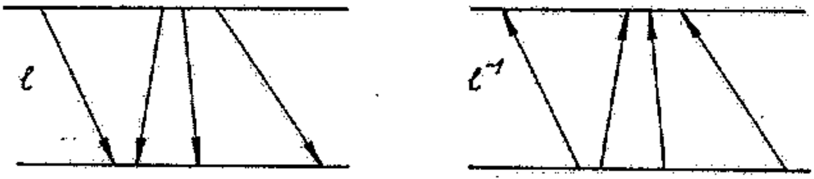
74. ábra

5. Ha az ℓ függvény szigoruan monoton csökken, akkor bármely két "nyila" keresztezi egymást: $x_1 < x_2$ esetén $\ell(x_2) < \ell(x_1)$:



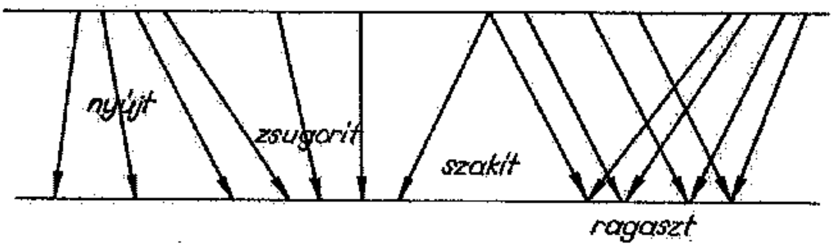
75. ábra

6. Ha az ℓ függvény folytonos, akkor Bolzano tétele szerint tetszőleges $\ell(a)$ és $\ell(b)$ közé eső y értékhez van olyan x pont a és b között, hogy $\ell(x) = y$. Ha ℓ szigoruan monoton, akkor csak egyetlen ilyen pont lehet. Ezt az y-tól függő pontot $\ell^{-1}(y)$-nal jelöljük. Az ℓ^{-1} függvényt nevezzük az ℓ függvény <u>inverzének</u>. Az inverzfüggvény nyilerdejét megkapjuk, ha az eredeti függvény nyilait megforditjuk:



76. ábra

Az ℓ függvény hatását ugy is elképzelhetjük, hogy a függvény a nyilak mentén a felső számegyenest áttranszformálja – magyarul: átviszi, átgyurja – az alsóba. Ha a számegyenest valami könnyen deformálható anyagból képzeljük el, akkor ezen transzformáció közben egyes helyeken nyulik, máshol zsugorodik, sőt el is szakadhat és össze is tapadhat a számegyenes:

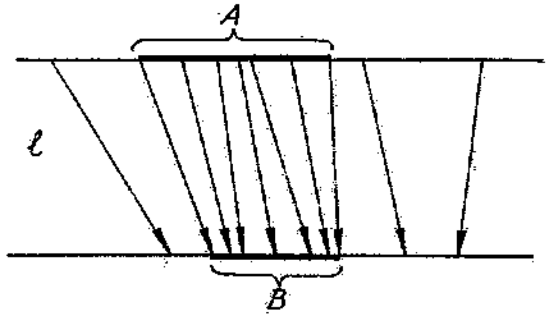


77. ábra

Most képzeljük el, hogy a felső számegyenes festékkel van bekenve. A "gyömöszölés", azaz a függvény a számegyenessel együtt a festéket is magával viszi, aminek eredményeként az alsó számegyenes is festékkel kenődik be. Mindezt azzal a szóhasználattal fejezzük ki, hogy az ℓ függvény a felső számegyenesen vett eloszlást <u>áttranszformálja</u> az alsó számegyenesre.

Mindennek valószinüségszámitási jelentése a következő: ha $\eta = \ell(\xi)$, akkor ξ eloszlásából ugy kapjuk meg η eloszlását, hogy a ξ eloszlását az ℓ függvénnyel áttranszformáljuk.

Ugyanis vegyük a számegyenesnek tetszőleges B részhalmazát. Jelöljük A-val azon x pontok halmazát, melyekre $\ell(x) \in B$;

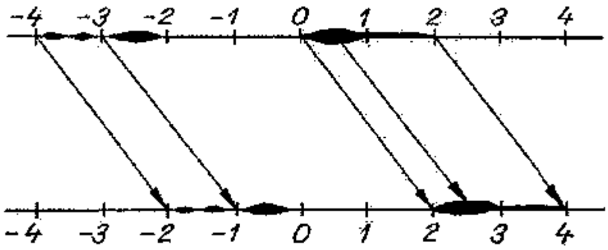


78. ábra

Az A halmazon ξ eloszlása szerint annyi festék van, amennyi a $\xi \in A$ esemény valószínűsége. Másrészt A definiciója miatt $\xi \in A$ akkor és csak akkor, ha $\eta \in B$. Tehát azt is mondhatjuk, hogy az A halmazon annyi festék van, amennyi az $\eta \in B$ esemény valószinüsége. Az eloszlástranszformáció értelmezése miatt a B halmazon annyi festék van, amennyi az A halmazon volt. Tehát a B halmazon lévő festékmennyiség megegyezik az $\eta \in B$ esemény valószinüségével. Mivel ez akármilyen halmazra igy van, a transzformált eloszlás tényleg az η eloszlása.

Nézzünk néhány példát eloszlástranszformációra:

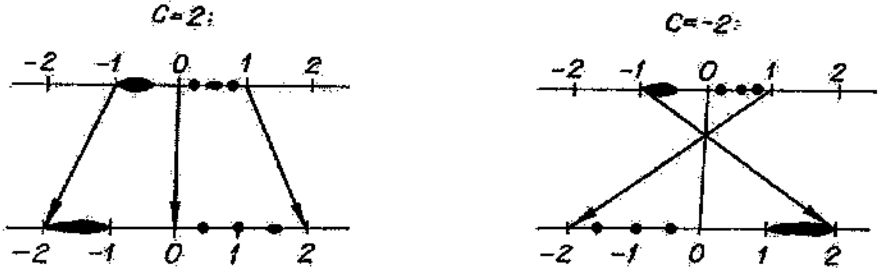
1. Az $\ell(x) = x+2$ függvény az eloszlást 2-vel jobbra tolja:



79. ábra

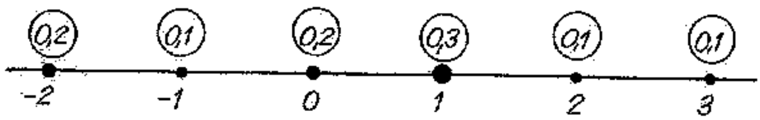
Ennek valószinüségszámitási jelentése: ξ eloszlásából ugy kapjuk meg $\xi+2$ eloszlását, hogy az eloszlást 2-vel jobbra toljuk.

2. Az $\ell(x) = c \cdot x$ függvény (c konstans) az eloszlást az origóból nézve $|c|$-szeresére nyujtja, $c < 0$ esetén a nyujtással egyidőben egy tükrözés is történik az origóra:



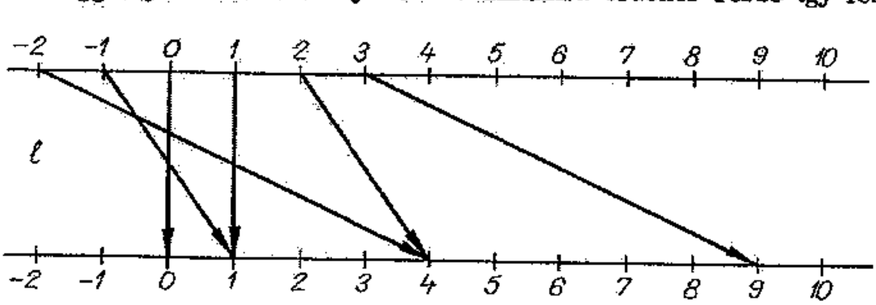
80. ábra

3. Nézzük, mibe transzformálja az $\ell(x) = x^2$ függvény az alábbi diszkrét eloszlást:



81. ábra

Az ℓ függvényt szemléltető nyilerdő számunkra érdekes része így fest:



82. ábra

Ebből a transzformált eloszlást úgy kapjuk meg, hogy a festékcsomókat a nyilak mentén az alsó számegyenesre visszük. (Például az alsó számegyenes 1 pontjára két helyről jön a festék: a -1 pontból 0,1 az 1 pontból pedig 0,3 egységnyi. Ezért az alsó számegyenes 1 pontján a transzformált eloszlás szerint 0,4 egységnyi festék lesz):

83. ábra

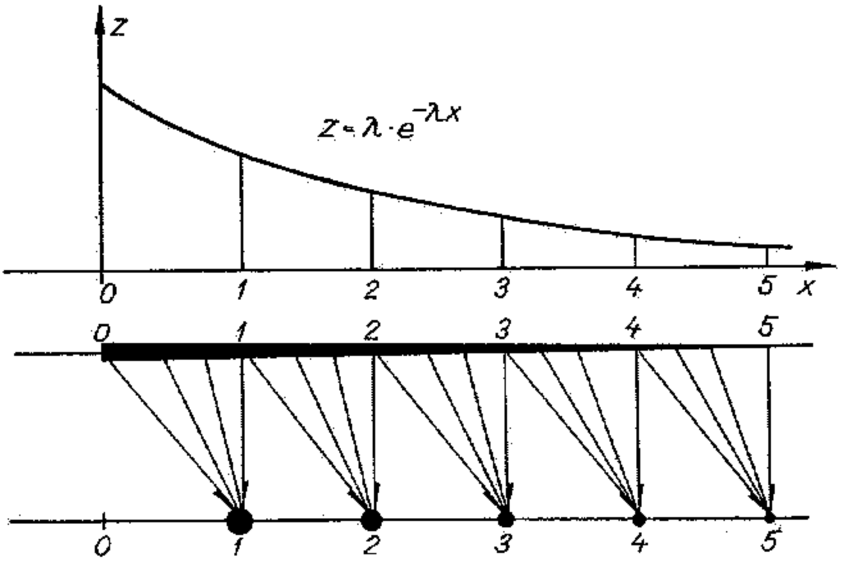
Ennek valószínűségszámítási jelentése: ha ξ eloszlása a megadott eloszlás, akkor ξ^2 eloszlása a kiszámított transzformált eloszlás.

4. Az $f(x) = [x] + 1$ függvény folytonos eloszlásból diszkrét eloszlást csinál. Például a λ paraméterű exponenciális eloszlást $p = 1-e^{-\lambda}$ paraméterű geometriai eloszlásba viszi. Ugyanis az alsó számegyenes k pontjára annyi festék kerül, amennyi festék a felső számegyenes $[k-1, k]$ intervallumán volt. Ezen pedig

$$\int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[- e^{-\lambda x}\right]_{k-1}^{k} = -e^{-\lambda k} + e^{-\lambda(k-1)} =$$

$$= (e^{-\lambda})^{k-1} \cdot (1-e^{-\lambda}) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

festék volt:



84. ábra

Mindennek valószínűségszámítási jelentése: Ha ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású, és $k-1 \leq \xi < k$ esetén $\eta = k$, akkor η $1-e^{-\lambda}$ paraméterű geometriai eloszlású. Tehát ha azt vizsgáljuk, hogy egy örökifjú tulajdonságú radioaktív atom hányadik évben bomlik el, akkor ez a valószínűségi változó geometriai eloszlású.

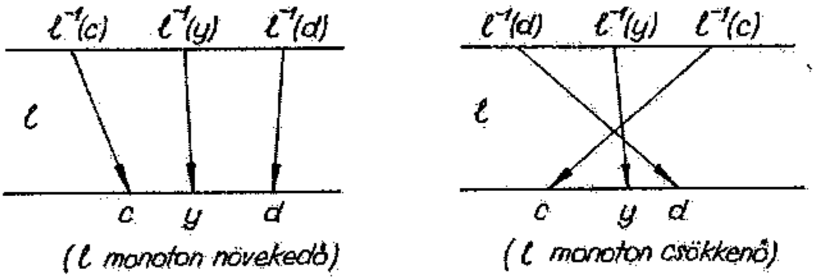
Ha folytonos eloszlás folytonos eloszlásba transzformálódik, akkor érdekelhet bennünket a sűrűségfüggvények közti kapcsolat.

Tétel: Ha az ℓ függvény és inverze, amit ℓ^{-1}-gyel jelölünk, szigoruan monoton és differenciálható, akkor az f sürüségfüggvényü folytonos eloszlás olyan eloszlásba megy át, melynek g sürüségfüggvénye az alábbi kapcsolatban áll f-fel és ℓ-lel:

$$g(y) = f\left(\ell^{-1}(y)\right)\cdot\left|\left(\ell^{-1}(y)\right)'\right| .$$

Vázlatos bizonyitás: Két levezetést is mutatunk.

1. Az eloszlástranszformáció értelmezése alapján az y pont körüli $[c,d]$ intervallumon annyi festék van, mint amennyi az $\ell^{-1}(c)$, $\ell^{-1}(d)$ pontok által meghatározott intervallumon van:



85. ábra

Tegyük fel, hogy a $[c,d]$ intervallum nagyon kicsi. Az $\ell^{-1}(y)$ pont körüli $\left[\ell^{-1}(c), \ell^{-1}(d)\right]$ intervallum is picike, ha az $[c,d]$ intervallum picike, ezért a sürüségfüggvény jelentése alapján ezen az intervallumon annyi festék van, amennyi az intervallum hosszának és az f sürüségfüggvénynek az $\ell^{-1}(y)$ helyen vett értékének szorzata:

$$f\left(\ell^{-1}(y)\right)\cdot\left|\ell^{-1}(d) - \ell^{-1}(c)\right| .$$

(Itt azért van szükség az abszolutérték jelre, mert ha az ℓ függvény csökkenő, akkor $\ell^{-1}(d) < \ell^{-1}(c)$). A transzformált eloszlás g sürüségfüggvénye az y pontban körülbelül annyi, amennyi a $[c,d]$ intervallumon lévő festékmennyiség osztva $(d-c)$-vel. Tehát

$$g(y) \approx f\left(\ell^{-1}(y)\right)\cdot\frac{\left|\ell^{-1}(d) - \ell^{-1}(c)\right|}{d - c} \approx f\left(\ell^{-1}(y)\right)\cdot\left|\left(\ell^{-1}(y)\right)'\right| .$$

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy az $\left|\left(\ell^{-1}(y)\right)'\right|$ tényező onnan született, hogy az egymásnak megfelelő picike intervallumok hosszának hányadosa körülbelül ennyi.

2. Meghatározzuk először η eloszlásfüggvényét, amit G-vel jelöltünk. Adott y esetén G értéke az y helyen annyi, amennyi az $\eta < y$ esemény valószinüsége. Szigoruan monoton növekedő ℓ függvény esetén az $\ell(\xi) = \eta < y$ esemény ugyanaz, mint a $\xi = \ell^{-1}(\eta) < \ell^{-1}(y)$ esemény, szigoruan monoton csökkenő ℓ esetén pedig ugyanaz, mint a $\xi = \ell^{-1}(\eta) > \ell^{-1}(y)$ esemény. Ezért G igy fejezhető ki a ξ eloszlásfüggvényével, amit F-fel jelöltünk:

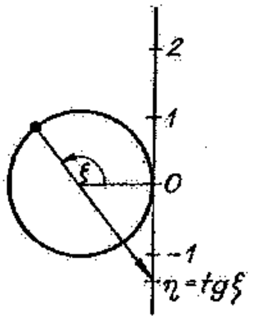
$$G(y) = P(\eta < y) = \begin{cases} P(\xi < \ell^{-1}(y)) = F\left(\ell^{-1}(y)\right), & \text{ha } \ell \text{ szig. mon. növ.,} \\ P(\xi > \ell^{-1}(y)) = 1 - F\left(\ell^{-1}(y)\right), & \text{ha } \ell \text{ szig. mon. csökk.} \end{cases}$$

Innen deriválással kiadódik az állitott összefüggés:

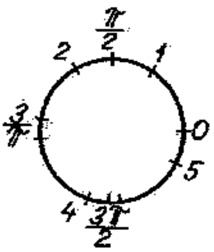
$$g(y) = G'(y) = \begin{cases} F'\left(\ell^{-1}(y)\right) \cdot \left(\ell^{-1}(y)\right)' = f\left(\ell^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(\ell^{-1}(y)\right)'\right|, \\ \qquad \text{ha } \ell \text{ szig. mon. növ.,} \\ -F'\left(\ell^{-1}(y)\right) \cdot \left(\ell^{-1}(y)\right)' = f\left(\ell^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(\ell^{-1}(y)\right)'\right|, \\ \qquad \text{ha } \ell \text{ szig. mon. csökk.} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Megjegyzés: A 2. bizonyitásban rejlő gondolatot fogjuk alkalmazni a következő pontban (Eloszlástranszformáció sikról egyenesre), az 1. bizonyitás gondolatát pedig az ezt követő pontban (Eloszlástranszformáció sikról sikra).

Egy példát mutatunk a képlet alkalmazására. A valószinüségi változó fogalmának bekövetésekor szerepelt az a valószinüségi változó, hogy egy körpályán elinditunk egy golyót, és amikor megáll, összekötjük a kör középpontjával, majd ennek az összekötő egyenesnek egy előre kiszemelt érintővel való metszéspontját tekintjük. Ezt a metszéspontot most is η-val jelöljük. Ha az érintési pont, a kör középpontja és a golyó megállási pontja által meghatározott szög radiánban vett értékét ξ-vel jelöljük, és a kör sugarát választjuk egységnek, akkor ξ és η között a következő kapcsolatot találjuk: $\eta = \operatorname{tg} \xi$. (86. ábra) Feltételezhetjük, hogy a golyó "egyformán szereti a körpálya minden pontját", azaz ξ egyenletes eloszlásu a $[0, 2\pi]$ intervallumon. Ha a $[0, 2\pi)$ intervallumot a kör kerületére tekerve képzeljük el, akkor azt mondhatjuk, hogy az egységnyi festékmennyiség egyenletesen van elkenve a kör kerületén. (87. ábra)

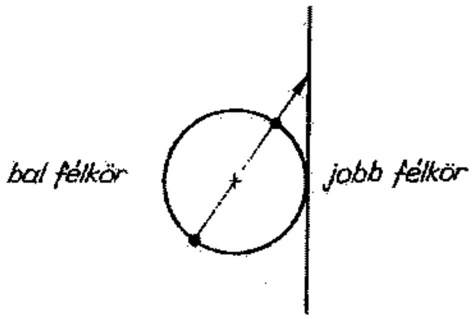


86. ábra



87. ábra

Az érintőegyenes minden pontjára két helyről jön a festék: a bal és a jobb félkörről:



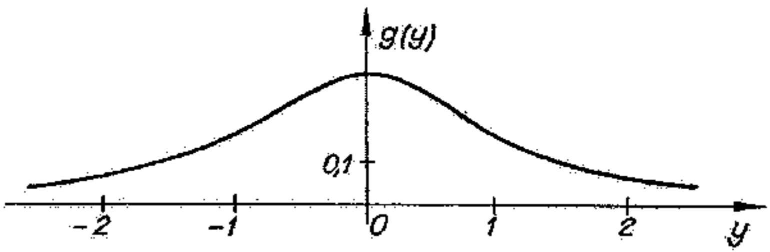
88. ábra

Méghozzá ugyanannyi jön a jobb félkörről, mint a bal félkörről. Így nem kell egyebet tenni, mint megnézni, hogy mennyi jön a bal félkörről, s utána a kapott sűrűségfüggvényt 2-vel beszorozni. A bal félkör a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ intervallumnak felel meg. Ebben az intervallumban a tangens monoton nő. Így a tanult képlet alkalmazható $f(x) = \frac{1}{2\pi}$, $\ell(x) = \mathrm{tg}\, x$, $\ell^{-1}(y) = \mathrm{arctg}\, y$ szereposztással. Tehát a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ intervallumról transzformált eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(\mathrm{arctg}\, y) \cdot \left| (\mathrm{arctg}\, y)' \right| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,.$$

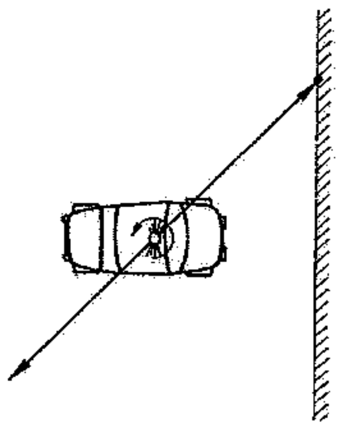
Ezt 2-vel szorozva η sűrűségfüggvényére az alábbi g függvény adódik:

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}\,.$$



. 89. ábra

Ennek az eloszlásnak a neve: Cauchy-eloszlás (ejtsd: kósi). Cauchy-eloszlású valószinüségi változót kapunk, ha egy hosszu, egyenes fal előtt álló rendőrautó egyenletes szögsebességgel forgó, két ellentétes irányban egyszerre világitó "kék fény"-ének a falra vetett vetületét a forgástól független időpontban tekintjük:



90. ábra

6. Bizonyitás nélkül mutatunk példát a számegyenesen olyan folytonos eloszlásra, mely nem rendelkezik sürüségfüggvénnyel. (Akit az ilyesmi nem érdekel, el se olvassa!) Értelmezzük az ℓ függvényt a következőképpen:

Tekintsünk egy tetszőleges x számot 0 és 1 között, és vegyük végtelen kettedestört alakját. Igy nullákból és egyesekből álló végtelen sorozatot kapunk. Ha ugyanezt a sorozatot végtelen harmadostörtnek fogjuk fel, akkor ismét 0 és 1 közé eső számot kapunk. $\ell(x)$ legyen ez a szám. Tehát az ℓ függvény értelmezési tartománya a (0,1) intervallum, értékkészlete pedig az a $H_{0,1}$ halmaz, melynek elemei azok a 0 és 1 közé eső valós számok, melynek végtelen harmadostörtje csak nullákból és egyesekből áll (azaz nem tartalmaz ketteseket).

A (0,1) intervallumon vett egyenletes eloszlást ez az ℓ függvény egy olyan eloszlásba viszi, mely a $H_{0,1}$ halmazra koncentrálódik. Ezt az eloszlást joggal nevezhetjük a $H_{0,1}$ halmazon vett egyenletes eloszlásnak. Kézenfekvő, hogy ez az eloszlás csomómentes. Ha ugyanis csomós lenne, akkor az ℓ függvény inverze ezeket a csomókat vissza tudná vinni a (0,1) intervallumra, ami lehetetlenség, mert a (0,1) intervallumon vett egyenletes eloszlás csomómentes. Másrészt belátható, hogy a $H_{0,1}$ halmaz összhosszusága nullával egyenlő, és igazolható, hogy nulla összhosszuságu halmazra koncentrált eloszlás nem rendelkezhet sürüségfüggvénnyel.

2. Eloszlástranszformáció síkról egyenesre

Legyen most ℓ kétváltozós függvény. ℓ tehát számpárokhoz rendel számokat. Például

$$1.\quad \ell(x,y) = x + y,$$

$$2.\quad \ell(x,y) = x \cdot y,$$

$$3.\quad \ell(x,y) = \frac{y}{x}.$$

Ha ξ és η valószinüségi változók, akkor megtehetjük, hogy a véletlentől függő (ξ, η) számpárt ℓ-be helyettesitjük, és ezzel egy uj valószinüségi változót értelmezünk: $\zeta = \ell(\xi, \eta)$. Ilyenkor ζ-t a ξ és η valószinüségi változók függvényének nevezzük. Példáinkban

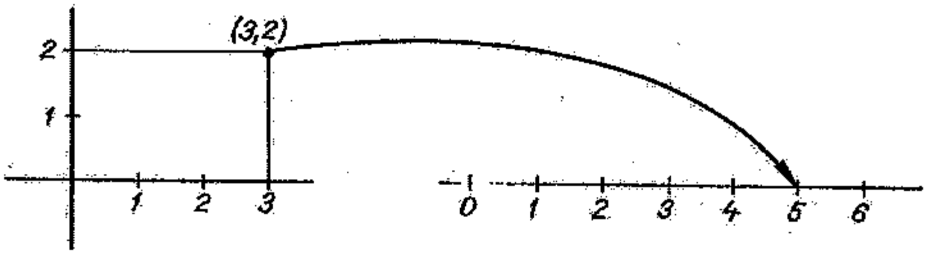
$$1.\quad \zeta = \xi + \eta,$$

$$2.\quad \zeta = \xi \cdot \eta,$$

$$3.\quad \zeta = \frac{\eta}{\xi}.$$

Jó lenne meghatározni ζ eloszlását ξ és η együttes eloszlásából. Ennek érdekében tesszük a következőket.

Az ℓ függvényt most is szemléltethetjük nyilakkal. A sik (x,y) pontjából a számegyenes $\ell(x,y)$ pontjába huzunk egy nyilat. Ha például $\ell(x,y) = x+y$, akkor a sik $(3,2)$ pontját a számegyenes 5 pontjával köti össze egy nyil:



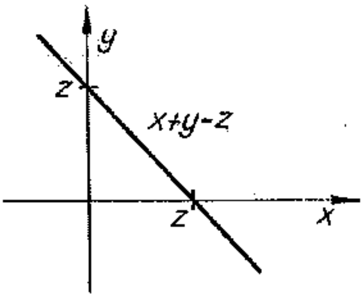
91. ábra

Ezt elvileg minden (x,y) pontra megtehetjük. A rajzon azonban eléggé nagy "dzsungel" keletkezhet, mert a sok fától (nyíltól) nem lehet jól látni az erdőt (a függvény hatását). A dzsungelben rendet teremthetünk az alábbi módon.

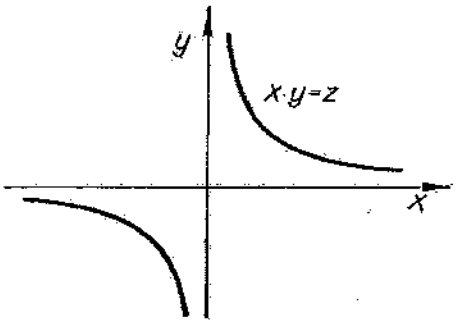
A számegyenesen kiszemelünk egy z pontot. Utána az $\ell(x,y)=z$ egyenlet elemzésével megkeressük a sík azon (x,y) pontjait, melyek az ℓ függvénynél a kiszemelt z pontba képződnek. Ezek a pontok általában a sík egy vagy több részből összetevődő görbéjét alkotják. Példáinkban adott z esetén

1. az $x+y = z$ egyenlet a $(z;o)$, $(o;z)$ tengelymetszetű egyenest adja:

2. az $x \cdot y = z$ egyenlet egy hiperbola két ágát adja:

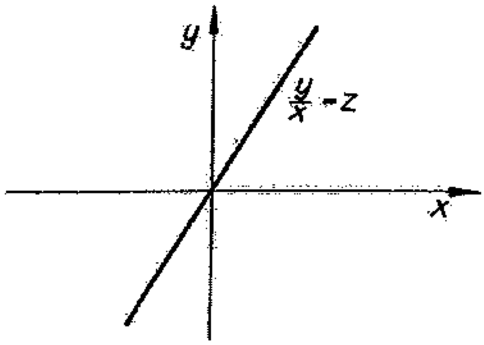


92. ábra



93. ábra

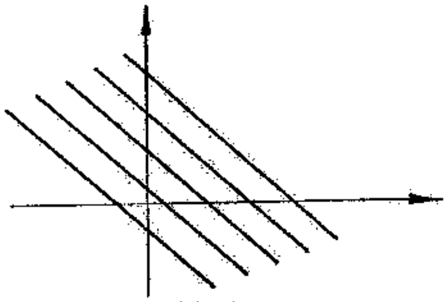
3. az $\frac{y}{x} = z$ egyenlet pedig az origón átmenő z meredekségű egyenes egyenlete:



94. ábra

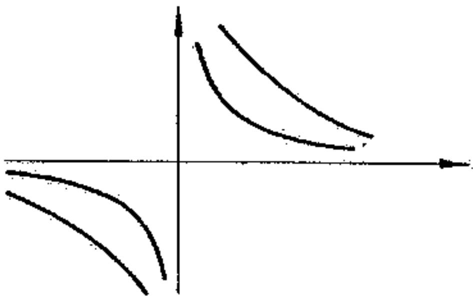
Képzeletben minden z-hez megkeressük a neki megfelelő görbét vagy görbéket, és megkapjuk a kétváltozós függvényt szemléltető görbe-sereget. Példáinkban:

1. párhuzamos egyenes-sereget kapunk:



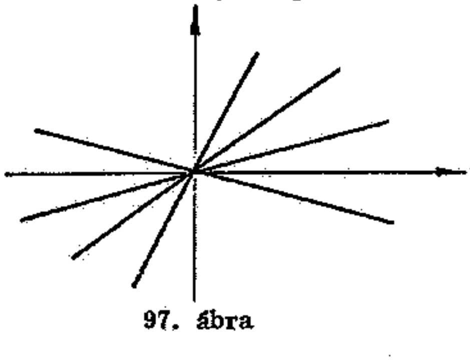
95. ábra

2. hiperbola-sereget kapunk:



96. ábra

3. origón átmenő egyenes-sereget kapunk:



97. ábra

Megjegyezzük, hogy a kétváltozós függvények eme szemléltetését szintvonalakkal való szemléltetésnek is szokták nevezni, mert a domborzati térképeken a tengerszint feletti magasságot – mint a földrajzi szélesség és hosszuság függvényét, tehát kétváltozós függvényt - szintvonalakkal ábrázolják. Ha a szemléltetendő kétváltozós függvényünk grafikonját a szokásos módon elkészitenénk, és a kapott felületről szintvonalas térképet készitenénk, akkor éppen a fentiekben bevezetett görbesereghez jutnánk.

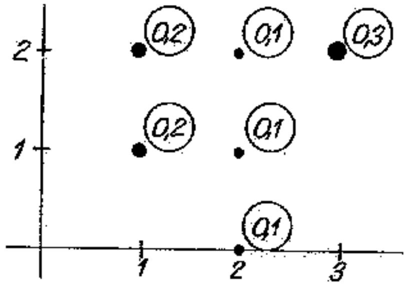
Az ℓ függvény hatását ugy képzelhetjük el, hogy a sikot az egyenesbe transzformálja oly módon, hogy a $z = \ell(x,y)$ egyenletü görbe pontjai mind a számegyenes z pontjába képződnek.

Ha a sikon eloszlás volt megadva, akkor ennél a transzformációnál a sikon szétkent festék az egyenesre transzformálódik.

Az egydimenziós eset mintájára könnyü meggyőződni róla, hogy a $\zeta = \ell(\xi, \eta)$ valószinüségi változó eloszlását ugy kapjuk meg ξ és η együttes eloszlásából, hogy az együttes eloszlást az ℓ függvénnyel a számegyenesre transzformáljuk.

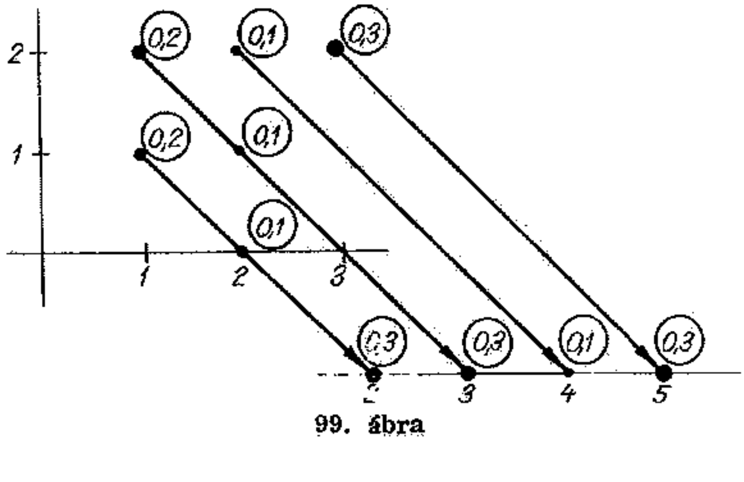
Például

I. Legyen ξ és η együttes eloszlása az alábbi diszkrét eloszlás:



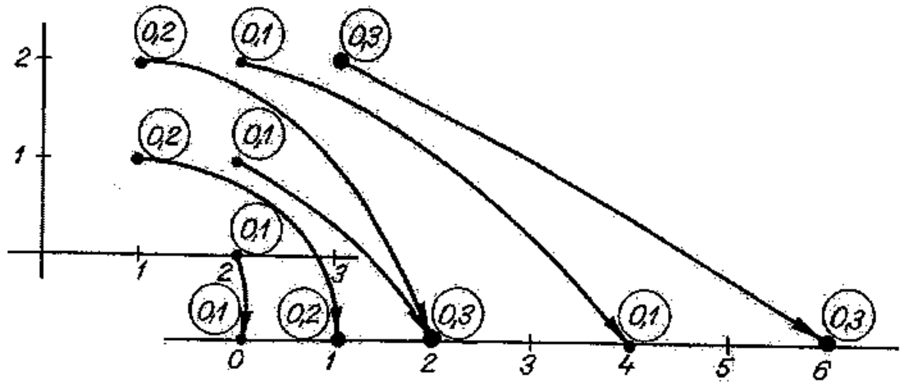
98. ábra

1. A $\zeta = \xi + \eta$ valószinüségi változó eloszlását a megadott sikbeli eloszlásból az $\ell(x,y) = x+y$ függvénnyel való transzformációval kapjuk:



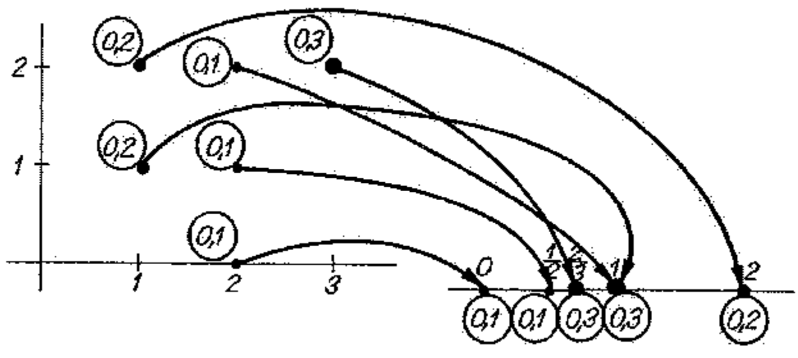
99. ábra

2. A $\zeta = \xi \cdot \eta$ valószínűségi változó eloszlását az $\ell(x,y) = x \cdot y$ függvénnyel való transzformáció adja:



100. ábra

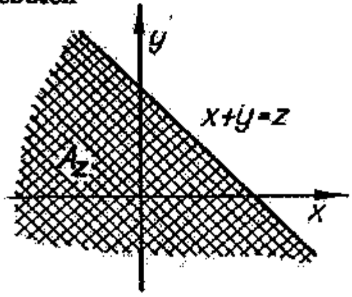
3. A $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$ valószínűségi változó eloszlását az $\ell(x,y) = \frac{y}{x}$ függvény által létesített transzformáció adja:



101. ábra

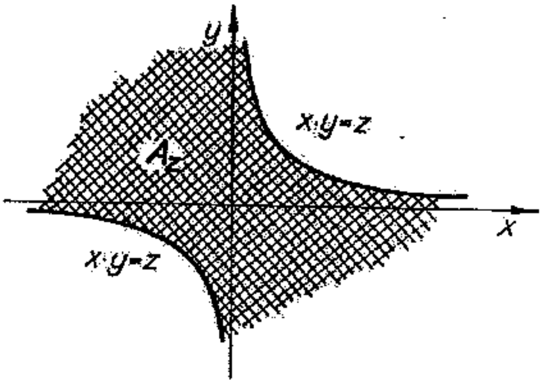
II. Ha ξ és η együttes sűrűségfüggvénye h, akkor a $\zeta = \ell(\xi, \eta)$ valószínűségi változó R eloszlásfüggvényét a h függvényből, mint mindjárt látni fogjuk, integrálással határozhatjuk meg. Ha pedig megvan a R eloszlásfüggvény, akkor ebből deriválással a r sűrűségfüggvény is kiszámolható. Mindezek kivitelezése céljából jelöljük A_z-vel azon (x, y) pontok halmazát, melyekre $\ell(x,y) < z$. Példáinkban az A_z halmazokat könnyen szemléltethetjük:

1. $\ell(x,y) = x + y$ esetén



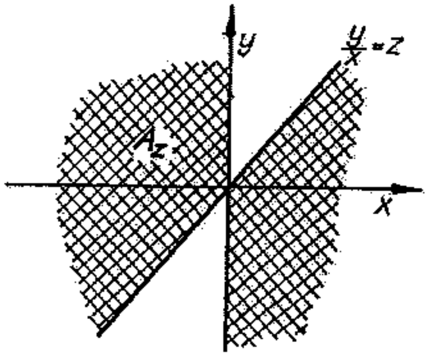
102. ábra

2. $\ell(x,y) = x \cdot y$ esetén



103. ábra

3. $\ell(x,y) = \frac{y}{x}$ esetén

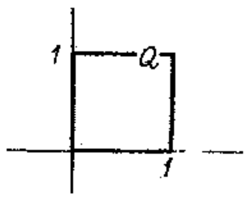


104. ábra

A $\zeta = \ell(\xi,\eta) < z$ esemény ugyanazt jelenti, mint a $(\xi,\eta) \in A_z$. Tehát ζ eloszlásfüggvénye a z helyen:

$$R(z) = P(\zeta < z) = P\big((\xi,\eta) \in A_z\big) = \iint\limits_{A_z} h(x,y)\,dx\,dy\ .$$

Példáinkban vegyük ξ és η együttes eloszlását egyenletes eloszlásnak az alábbi Q négyzeten:



105. ábra

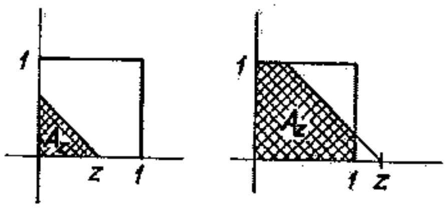
Tehát

$$h(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad (x,y) \in Q, \\ 0, & \text{ha} \quad (x,y) \notin Q. \end{cases}$$

Ekkor $\iint\limits_{A_z} h(x,y)\,dx\,dy$ egyenlő az A_z halmaz és a Q négyzet közös részének a területével. Ezért

1. $\zeta = \xi + \eta$ eloszlásfüggvénye

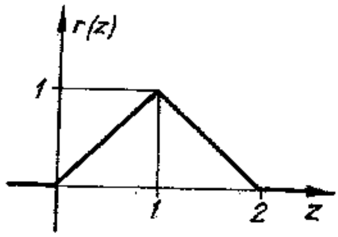
$$R(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z \leqslant 0, \\ \frac{1}{2} z^2, & \text{ha} \quad 0 < z < 1, \\ 1 - \frac{1}{2}(2-z)^2, & \text{ha} \quad 1 < z < 2, \\ 1, & \text{ha} \quad 2 \leqslant z. \end{cases}$$



106. ábra

Ebből a sűrűségfüggvény

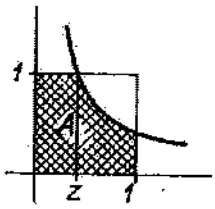
$$r(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z \leqslant 0 \quad \text{vagy} \quad 2 \leqslant z, \\ z, & \text{ha} \quad 0 < z < 1, \\ 2-z, & \text{ha} \quad 1 < z < 2. \end{cases}$$



107. ábra

2. $\zeta = \xi \cdot \eta$ eloszlásfüggvénye

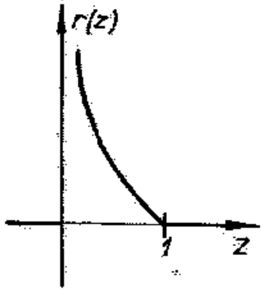
$$R(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad z \leqslant 0, \\ z + \int\limits_z^1 \frac{z}{x}\,dx = z - z \cdot \ln z, & \text{ha} \quad 0 < z < 1, \\ 1, & \text{ha} \quad 1 \leqslant z. \end{cases}$$



108. ábra

Ebből a sűrűségfüggvény

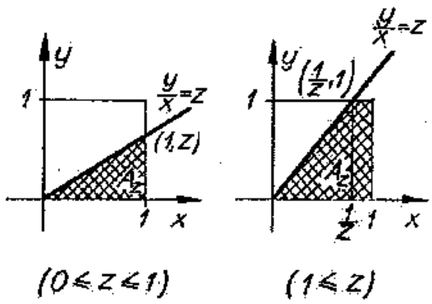
$$r(z)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad z \leqslant 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \leqslant z,\\ -\ln z, & \text{ha} \quad 0 < z < 1.\end{cases}$$



109. ábra

3. $\zeta = \dfrac{\eta}{\xi}$ eloszlásfüggvénye

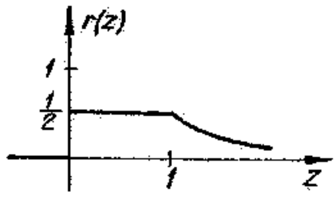
$$R(z)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad z \leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}z, & \text{ha} \quad 0 < z < 1,\\ 1-\dfrac{1}{2z}, & \text{ha} \quad 1 < z.\end{cases}$$



110. ábra

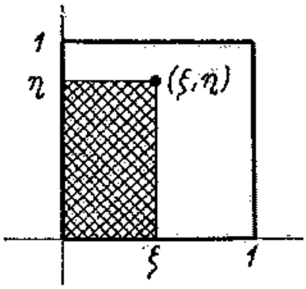
Ebből a sűrűségfüggvény

$$r(z)=\begin{cases}0, & \text{ha} \quad z \leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha} \quad 0 < z < 1,\\ \dfrac{1}{2z^2}, & \text{ha} \quad 1 < z.\end{cases}$$



111. ábra

A kapott eredmények tartalmát a következő konkrét példa kapcsán érzékeltethetjük. Én is, te is egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint választunk egy-egy valós számot 0 és 1 között. Legyen az én számom ξ, a tiéd η. Tekintsük azt a véletlentől függő téglalapot, melynek egyik csucsa az origó, átellenes csucsa pedig a (ξ, η) pont, oldalai tehát ξ illetve η hosszúságuak:



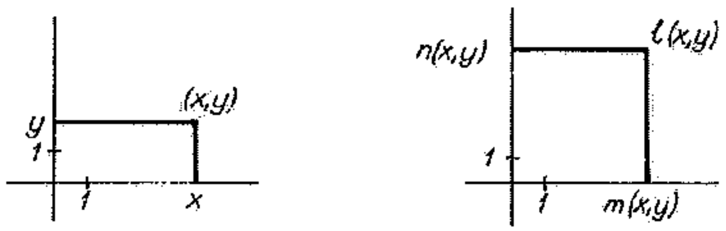
112. ábra

A téglalap félkerülete $\xi + \eta$, területe $\xi \cdot \eta$. Az $\frac{\eta}{\xi}$ tört pedig a téglalap "karcsuságát" jellemzi. (Ha a tört értéke kicsi, akkor a téglalap széles és lapos, ha a tört értéke nagy, akkor keskeny és magas.) A fentiekben ennek a három valószínűségi változónak a sűrűségfüggvényét határoztuk meg.

3. Eloszlástranszformáció síkról síkra

Tegyük fel, hogy a ξ és η valószínűségi változók függvényeként két valószínűségi változót képzünk. Tehát legyenek m és n kétváltozós függvények, és $\alpha = m(\xi, \eta)$, $\beta = n(\xi, \eta)$. E pont fő célja, hogy α és β együttes eloszlását meghatározzuk ξ és η együttes eloszlásából.

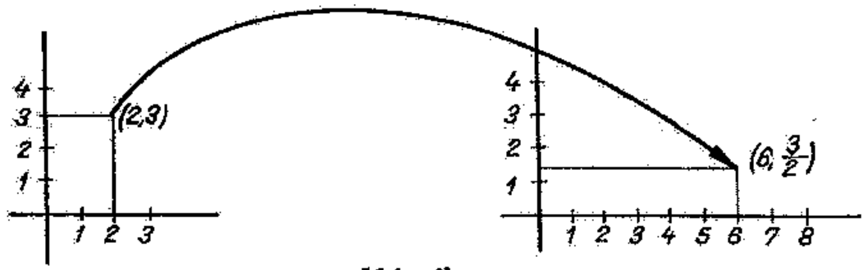
Ha (x,y) a sík valamely pontja, akkor az m(x,y) és n(x,y) is egy-egy szám, tehát (m(x,y), n(x,y)) egy számpár. Ezt a számpárt jelöljük most $\ell(x,y)$-nal a sík egy másik példányán:



113. ábra

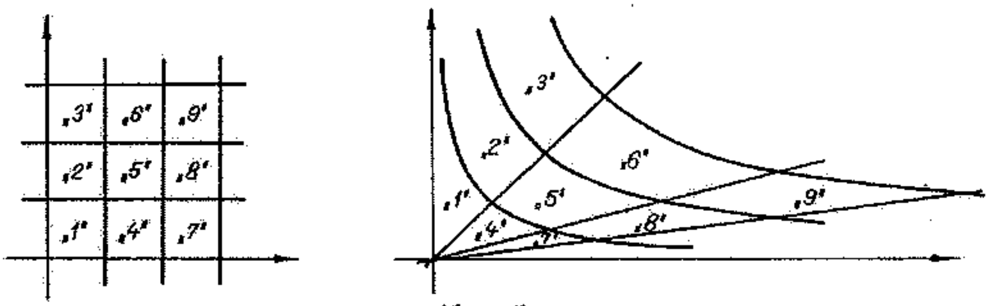
Ezáltal egy olyan függvényt értelmeztünk, ami az első sík pontjaihoz a második sík pontjait rendeli. m-t és n-t az ℓ függvény komponenseinek nevezzük.

A hozzárendelési szabályt most is szemléltethetjük nyilakkal. Ha például $m(x,y) = x \cdot y$, $n(x,y) = \frac{y}{x}$, és így $\ell(x,y) = (x \cdot y, \frac{y}{x})$, akkor $\ell(2,3) = (6, \frac{3}{2})$. Az ennek megfelelő nyilat láthatjuk az alábbi ábrán:



114. ábra

Ha az első síkon egy görbét veszünk fel, akkor a görbéből kiinduló nyilak végpontjai a második síkon is görbét alkotnak. Ezt a görbét az eredeti görbe képének nevezzük. Ha több görbét veszünk fel, akkor a görbék és képeik jól szemléltetik az ℓ függvény hatását. Például ha $\ell(x,y) = (x\cdot y, \frac{y}{x})$, akkor a vízszintes koordinátatengellyel párhuzamos egyenesek képei hiperbolák (ha y rögzített és x változik, akkor az $(x\cdot y, \frac{y}{x})$ pontok hiperbolát futnak be), a függőleges tengellyel párhuzamos egyenesek képei origón átmenő egyenesek (ha x rögzített és y változik, akkor az $(x\cdot y, \frac{y}{x})$ pontok origón átmenő egyenest alkotnak). Tehát az $\ell(x,y) = (x\cdot y, \frac{y}{x})$ függvény ugy transzformálja az első síkot a második síkra, hogy a berajzolt "egyszerü börtön rács"-ból a második síkon látható "díszes rács" lesz:



115. ábra

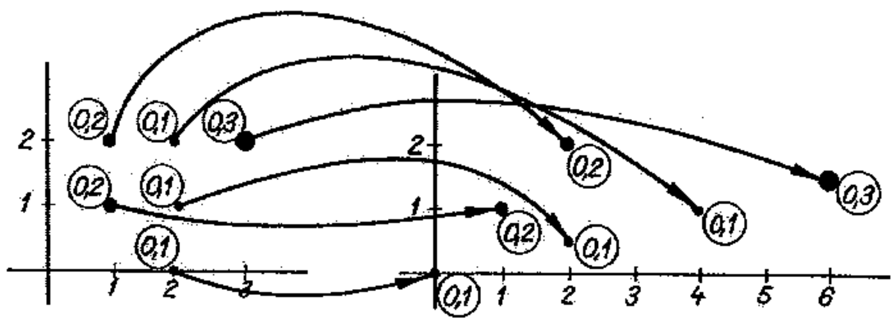
Szükségünk lesz az ℓ függvény inverzére, amit ℓ^{-1}-gyel jelölünk. Például az $\ell(x,y) = (x\cdot y, \frac{y}{x})$ függvény inverzét ugy kapjuk meg, hogy a második síkon adott (u,v) ponthoz megkeressük az első síkon azt az (x,y) pontot, amit ℓ (u,v)-be visz. Ha több ilyen (x,y) pont is van, akkor inverzről beszélni csak bizonyos megszorítások mellett lehet. Az

$x \cdot y = u$, $\frac{y}{x} = v$ egyenletrendszerből $x = \pm \sqrt{\frac{u}{v}}$, $y = \pm \sqrt{u \cdot v}$. Ha az ℓ függvényt csak az első síknegyedben vizsgáljuk, akkor ezekben a képletekben csak a + előjelek jöhetnek szóba. Ilyen megszorítás mellett az inverz: $\ell^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}},\ \sqrt{u \cdot v}\right)$. Az inverz függvény értelmezéséből következik, hogy a második síkon kapott "díszes rácsot" ℓ^{-1} visszaviszi az első síknegyed "egyszerű börtön rács"-ába.

Természetesen semmi sem kötelez minket arra, hogy az ℓ függvényt és inverzét az első síkon felvett "egyszerű börtön rács"-csal és az ő képével, "a díszes ráccsal" szemléltessük. Az első síkon felvehettünk más rácsot is, vagy akár a második síkon is tekinthetünk akármilyen rácsot, és megkereshetjük az ennek megfelelő rácsot az első síkon.

Kézenfekvő, hogy ha az első síkon felvesszük a ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlását, akkor az $\alpha = m(\xi, \eta)$, $\beta = n(\xi, \eta)$ valószínűségi változók együttes eloszlását úgy kapjuk meg, hogy ξ és η együttes eloszlását az $\ell(x,y) = (m(x,y),\ n(x,y))$ függvénnyel a második síkra transzformáljuk.

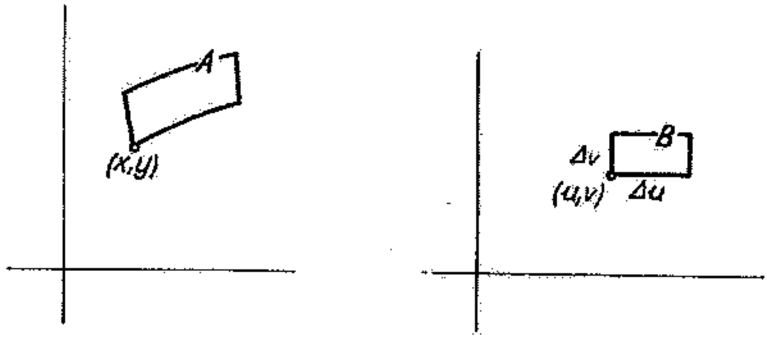
I. A diszkrét eset illusztrálására elég egy konkrét példa. Ha ξ és η együttes eloszlása az előző pontbeli diszkrét eloszlás, akkor $\alpha = \xi \cdot \eta$ és $\beta = \frac{\eta}{\xi}$ együttes eloszlását így kaphatjuk meg:



116. ábra

II. Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor az $\alpha = m(\xi, \eta)$, $\beta = n(\xi, \eta)$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét nem ilyen egyszerű meghatározni. Jelöljük ξ és η együttes sűrűségfüggvényét h-val, α és β együttes sűrűségfüggvényét s-sel. Vegyünk fel a második síkban egy (u,v) pontot és körülötte egy Δu, Δv oldalhosszuságu B téglalapot. Feltesszük, hogy ℓ-nek van inverze.

Keressük meg az első síkon az (u,v) pontnak megfelelő $(x,y) =$ $= \ell^{-1}(u,v)$ pontot és a B téglalapnak megfelelő A halmazt:



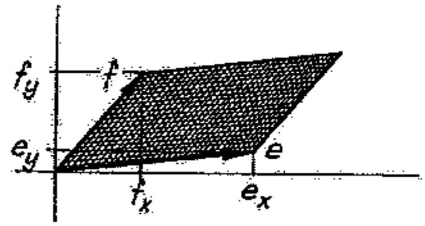
117. ábra

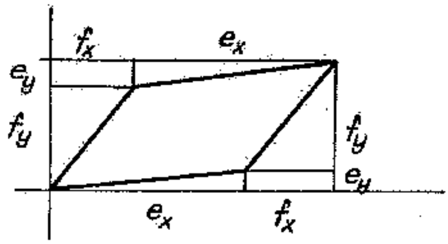
Az s sűrűségfüggvény értéke az (u,v) pontban körülbelül annyi, amennyi festék az α és β együttes eloszlása szerint a B téglalapon van, osztva a téglalap területével. Viszont az α és β együttes eloszlása annyi festéket ken a B téglalapra, amennyit a ξ és η együttes eloszlása az A halmazra. Ezért

$$s(u,v) \approx \frac{\iint\limits_A h(x,y)\,dx\,dy}{t(B)} \approx \frac{h(x,y)\ t(A)}{t(B)} = h\left(\ell^{-1}(u,v)\right) \cdot \frac{t(A)}{t(B)} .$$

A területek $\frac{t(A)}{t(B)}$ hányadosát kellene meghatározni. Jelölje az ℓ^{-1} függvény komponenseit a és b. Tehát $\ell^{-1}(u,v) = \left(a(u,v), b(u,v)\right)$. Ha az a és b függvények differenciálhatók, akkor az A halmaz közelítőleg paralelogramma. Ezért először a paralelogrammák területére vezetünk le egy egyszerű képletet.

Ha a paralelogrammát az origóból induló $e = (e_x, e_y)$ és $f = (f_x, f_y)$ vektorok feszítik ki





118. ábra

akkor területét megkapjuk, ha a második ábrán berajzolt nagy téglalap területéből kivonjuk a berajzolt négy háromszög és két téglalap területét. Eredményül a következőt kapjuk:

$$(e_x + f_x)\cdot(e_y + f_y) - 2\cdot\left(\frac{e_x\cdot e_y}{2} + \frac{f_x\cdot f_y}{2} + f_x\cdot e_y\right) =$$

$$= e_x\cdot f_y - f_x\cdot e_y = \det\begin{pmatrix} e_x & e_y \\ f_x & f_y \end{pmatrix}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy ha az e és f fekvotorok balsodrású rendszert alkotnak, tehát e-t negatív irányú forgatás viszi f irányába, akkor a kifeszített paralelogramma területét ugyanennek a determinánsnak az ellentettje adja. Tehát a determináns előjele arra utal, hogy az e és f vektorok jobb vagy bal sodrású rendszert alkotnak, a determináns abszolut értéke pedig az e és f által kifeszített paralelogramma területét jelenti:

$$t(\text{paralelogramma}) = \left|\det\begin{pmatrix} e_x & e_y \\ f_x & f_y \end{pmatrix}\right|.$$

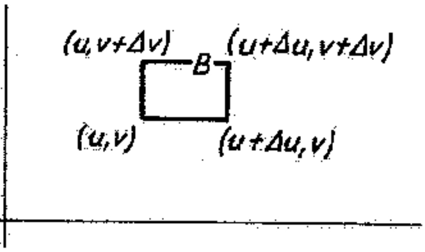
Térjünk vissza a $\frac{t(A)}{t(B)}$ hányados meghatározásának problémájához. A B téglalap csucsai az

(u,v)

$(u+\Delta u, v)$

$(u, v+\Delta v)$

$(u+\Delta u,\ v+\Delta v)$



119. ábra

pontok. Ezért a paralelogramma-szerű A halmaz csucsai:

$$\ell^{-1}(u,v) = \big(a(u,v),\ b(u,v)\big)\ ,$$

$$\ell^{-1}(u+\Delta u, v) = \big(a(u+\Delta u, v),\ b(u+\Delta u, v)\big)\ ,$$

$$\ell^{-1}(u, v+\Delta v) = \big(a(u, v+\Delta v),\ b(u, v+\Delta v)\big)\ ,$$

$$\ell^{-1}(u+\Delta u,\ v+\Delta v) = \big(a(u+\Delta u,\ v+\Delta v),\ b(u+\Delta u,\ v+\Delta v)\big).$$

A parciális deriváltak jelentése alapján:

$$\big(a(u+\Delta u, v),\ b(u+\Delta u, v)\big) =$$

$$= \left(a(u,v) + \frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u,\ b(u,v) + \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u\right)\ ,$$

$$\big(a(u, v+\Delta v),\ b(u, v+\Delta v)\big) =$$

$$= \left(a(u,v) + \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v,\ b(u,v) + \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v\right)\ ,$$

$$\big(a(u+\Delta u,\ v+\Delta v),\ b(u+\Delta u,\ v+\Delta v)\big) =$$

$$= \left(a(u,v) + \frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u + \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v,\right.$$

$$\left. b(u,v) + \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u + \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v\right).$$

Tehát az A halmazt közelíthetjük azzal a paralelogrammával, melyet az $\ell^{-1}(u,v) = \big(a(u,v),\ b(u,v)\big)$ pontból indított

$$e = \left(\frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u\,,\quad \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u\right),$$

$$f = \left(\frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v\,,\quad \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v\right)$$

vektorok feszitenek ki. Ezért

$$\frac{t(A)}{t(B)} = \frac{\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u & \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\cdot\Delta u\\ \frac{\partial a}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v & \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\cdot\Delta v\end{pmatrix}\right|}{\Delta u\cdot\Delta v}.$$

Tehát

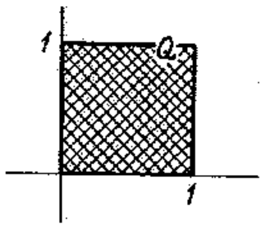
$$\frac{t(A)}{t(B)} = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\right|.$$

A képletben szereplő determinánst az ℓ^{-1} függvény Jacobi-determinánsának nevezzük.

Mindezek alapján az α és β valószinüségi változók együttes sürüségfüggvénye:

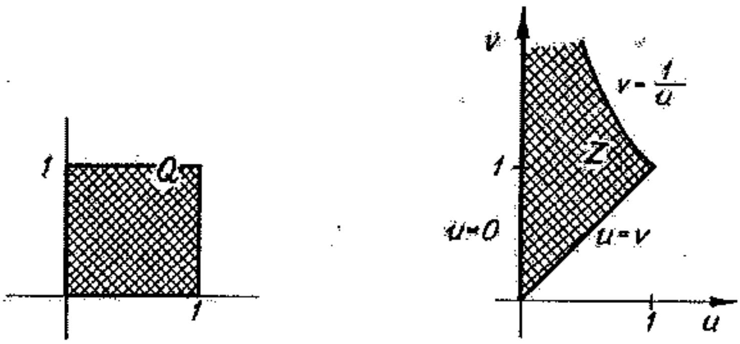
$$s(u,v) = h\left(\ell^{-1}(u,v)\right)\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}\right|.$$

Alkalmazásként az előző pont végén említett konkrét példával kapcsolatban az $\alpha = \xi\cdot\eta$ terület és a $\beta = \frac{\eta}{\xi}$ "karcsuság" együttes sürüségfüggvényét határozzuk meg, ha ξ és η együttes eloszlása az alábbi Q négyzeten egyenletes:



120. ábra

A négyzet belsejét az $\ell(x,y) = \left(x\cdot y,\ \frac{y}{x}\right)$ függvény annak a Z halmaznak a belsejébe képzi, melynek határát az $u = v$ egyenes, a $v = \frac{1}{u}$ hiperbola és az $u = o$ egyenes alkotják:



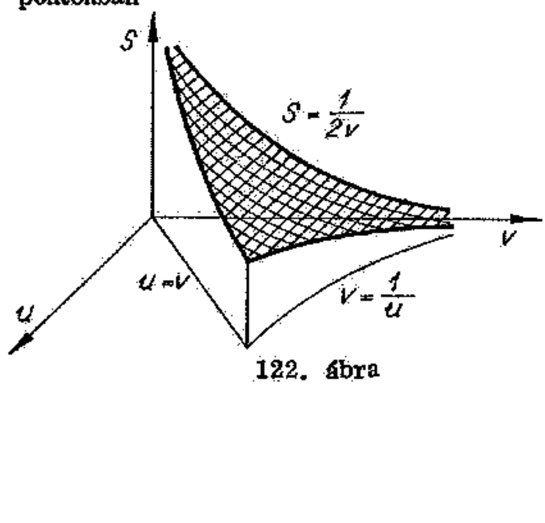
121. ábra

Ezért α és β együttes eloszlása a Z halmazra koncentrálódik. Az előző pontban már meghatároztuk ℓ^{-1} komponenseit, aminek felhasználásával $\ell^{-1}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}},\ \sqrt{u\cdot v}\right)$. Innen a Jacobi-determinánshoz szükséges parciális deriváltakat kiszámolhatjuk. A Jacobi-determináns értékére $\frac{1}{2v}$ adódik. Ha az (u,v) pont a Z belsejében van, akkor az $\ell^{-1}(u,v)$ pont a Q négyzet belsejébe esik. A Q négyzet belsejében a h sűrűségfüggvény értéke mindenhol 1, így $h\left(\ell^{-1}(u,v)\right) = 1$, ha (u,v) Z belsejében van.

Ezért az α és β valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye a Z belsejébe eső (u,v) pontokban

$$s(u,v) = 1\cdot\frac{1}{2v} = \frac{1}{2v}\ .$$

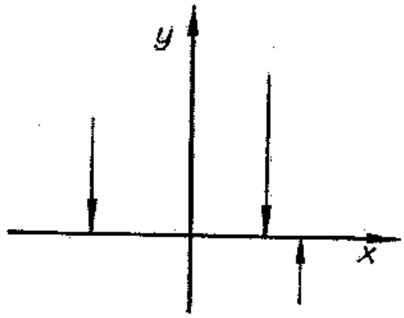
Az s sűrűségfüggvény grafikonja így néz ki:



122. ábra

4. Peremeloszlások

Ha a kétváltozós ℓ függvényt speciálisan az $\ell(x,y) = x$ képlet szerint értelmezzük, akkor $\ell(\xi, \eta) = \xi$. Tehát ξ és η függvényeként megkaphatjuk magát ξ-t is. Nézzük meg, hogyan egyszerűsödnek a korábbi eredményeink! (Lásd ennek a fejezetnek a 2. pontját.) Ha az $\ell(x,y) = x$ függvény nyilerdejének ábrázolásához szükséges számegyenest a sík vizszintes koordinátatengelyén vesszük fel, akkor a nyilerdő egyáltalán nem dzsungel! Egy pár nyil is jól érzékelteti már a nyilerdő szerkezetét: (123. ábra). Ezt az ℓ függvényt joggal nevezhetjük a vizszintes koordinátatengelyre való vetítésnek.

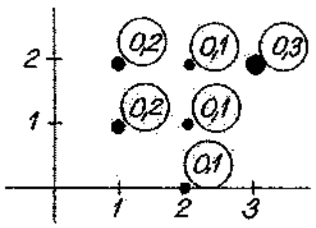


123. ábra

ξ és η együttes eloszlását egy tetszőleges kétváltozós ℓ függvény az $\ell(\xi, \eta)$ valószinüségi változó eloszlásába transzformálja. Ha ℓ a vizszintes koordinátatengelyre való vetités, akkor $\ell(\xi, \eta) = \xi$. Tehát a vizszintes koordinátatengelyre való vetités ξ és η együttes eloszlását ξ eloszlásába viszi.

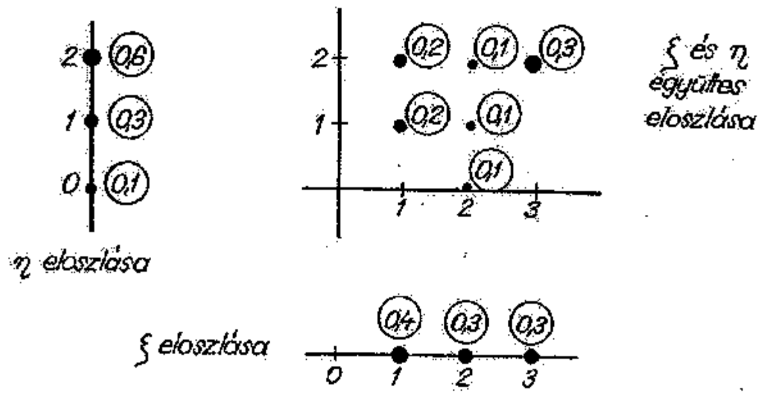
Természetesen η-ra is értelemszerűen átfogalmazható mindaz, amit ξ-re mondtunk: a függőleges koordinátatengelyre való vetités ξ és η együttes eloszlását η eloszlásába viszi. Ezért ξ és η külön-külön vett eloszlásait vetületeloszlásoknak is szokás hivni.

Legyen például ξ és η együttes eloszlása az alábbi diszkrét eloszlás: (124. ábra).



124. ábra

A vizszintes koordinátatengelyre való vetítéskor azok a festékcsomók, melyek egy bizonyos függőleges egyenesen vannak, a függőleges egyenesnek a vizszintes koordinátatengellyel való metszéspontjába képződnek. Ezért ξ eloszlását ugy kapjuk meg, hogy az együttes eloszlás tagjait a függőleges egyenesek mentén összegezzük, és az összeget a függőleges egyenesnek a vizszintes koordinátatengellyel való metszéspontjához irjuk. Persze a jobb áttekinthetőség kedvéért célszerűbb mégis külön fölvenni a számegyenest a vizszintes koordinátatengellyel párhuzamosan, a sikbeli eloszlástól elkülönítve. A vízszintes egyenesek mentén képzett összegzéssel hasonlóképpen kapjuk meg η eloszlását:



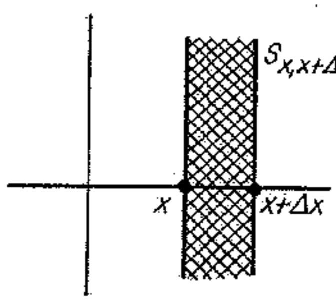
125. ábra

	0,4	0,3	0,3	
2	0,2	0,1	0,3	0,6
1	0,2	0,1	0	0,3
0	0	0,1	0	0,1
η \ ξ	1	2	3	

126. ábra

Ha ξ és η együttes eloszlását táblázatba foglaljuk, akkor a táblázat szélére szokás a sor- és oszlopösszegeket írni: (126. ábra).
Ilyen elrendezésben ξ és η külön-külön vett eloszlása a táblázat szélén helyezkedik el. Ezért a vetület eloszlásokat <u>peremeloszlásoknak</u> is szokás hívni.

Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor ξ sűrűségfüggvényét nagyon egyszerűen megkaphatjuk az együttes sűrűségfüggvényből. Korábbi jelöléseinket értelemszerűen használva, és $S_{x,x+\Delta x}$-szel jelölve a sík alábbi végtelen sávját: (127. ábra) magyarázat nélkül is világos a következő képletsor:



127. ábra

$$f(x) \approx \frac{1}{\Delta x} \cdot P(x \leqslant \xi < x + \Delta x) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot P\left((\xi, \eta) \in S_{x,x+\Delta x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \iint\limits_{S_{x,x+\Delta x}} h(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy \right) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy\,.$$

Tehát

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy\,.$$

Hasonló okoskodással η sűrűségfüggvényére is kiadódik:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx\,.$$

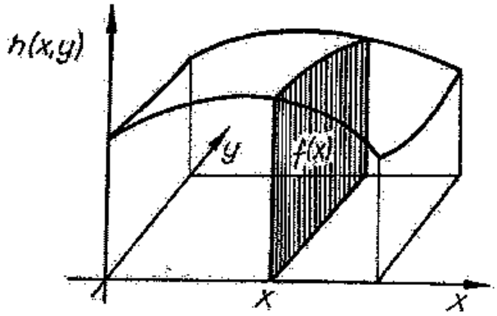
ξ és η külön-külön vett eloszlásait folytonos esetben is szokás peremeloszlásoknak hívni. f-t és g-t pedig vetület- vagy peremsűrűségfüggvényeknek nevezzük.

Például az előző pont végén szereplő α és β valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényéből integrálással megkapjuk α-nak illetve β-nak a sűrűségfüggvényét. Természetesen ugyanaz lesz az eredmény, mint a kettővel ezelőtti pontban:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(u,v)\,dv = \int_u^{\frac{1}{u}} \frac{1}{2v}\,dv = \left[\frac{1}{2} \ln v\right]_{v=u}^{v=\frac{1}{u}} = -\ln u \qquad (o < u < 1)\,,$$

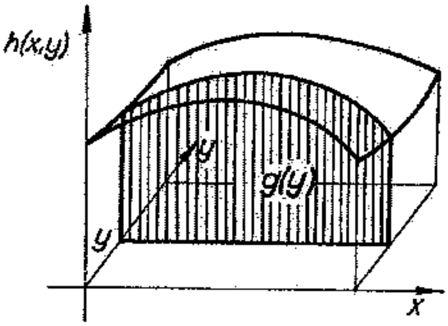
$$\int_{-\infty}^{\infty} s(u,v)\,du = \begin{cases} \displaystyle\int_o^{v} \frac{1}{2v}\,du = \frac{1}{2} & (o < v < 1), \\ \displaystyle\int_o^{\frac{1}{v}} \frac{1}{2v}\,du = \frac{1}{2v^2} & (1 < v). \end{cases}$$

Ha h-t felülettel ábrázoljuk, akkor a peremsűrűségfüggvények a következő szemléletes jelentést kapják. Adott x esetén állítsunk a vízszintes koordinátatengely x pontjában a tengelyre merőleges síkot. A sík egy görbét metsz ki a felületből. Ezen görbe alatti terület $\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy$-nal, tehát $f(x)$-szel egyenlő:



128. ábra

g szemléletes jelentése hasonló:



129. ábra

<u>Megjegyzések:</u>

1. A peremeloszlások nem határozzák meg az együttes eloszlást. Például az alábbi két diszkrét eloszlás különbözik, de a peremeloszlásaik megegyeznek:

	0,5	0,5	
2	0	0,5	0,5
1	0,5	0	0,5
η / ξ	1	2	

	0,5	0,5	
2	0,25	0,25	0,5
1	0,25	0,25	0,5
η / ξ	1	2	

130. ábra

2. Az Eloszlástranszformáció síkról egyenesre c) pontban általános módszert tanultunk arra, hogy ξ és η együttes sűrűségfüggvényének ismeretében hogyan lehet meghatározni a $\zeta = \ell(\xi, \eta)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ezt a sűrűségfüggvényt másképpen is megkaphatjuk. Kieszelünk egy alkalmas γ valószínűségi változót ξ és η függvényeként. Az előző pontban tanultak alapján meghatározzuk ζ és γ együttes sűrűségfüggvényét, amiből integrálással megkapjuk ζ sűrűségfüggvényét.

Ha például $\zeta = \xi + \eta$, akkor γ-t vehetjük η-nak, azaz ℓ lehet az a függvény, melynek komponensei: $m(x,y) = x+y$, $n(x,y) = y$. ℓ inverzének komponenseit megkapjuk, ha az

$$x + y = u$$

$$y = v$$

egyenletrendszerből x-t és y-t kifejezzük:

$$x = u - v = a(u,v) \ ,$$

$$y = v = b(u,v) \ .$$

Ebből a Jacobi-determináns:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \ .$$

ζ és γ együttes sűrűségfüggvénye h-val kifejezve:

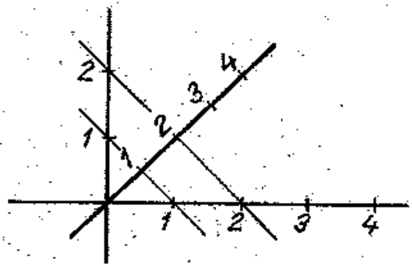
$$s(u,v) = 1 \cdot h\left(\ell^{-1}(u,v)\right) = h(u-v,\ v) \ .$$

v szerinti integrálással ζ sűrűségfüggvényére

$$r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-v,\ v)\, dv$$

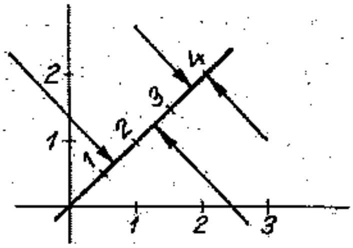
adódik.

3. Az $\ell(x,y) = x+y$ függvény nyilerdejének ábrázolásához szükséges számegyenest a sík "45^0-os egyenesén" az alábbi skálázás szerint vegyük fel:



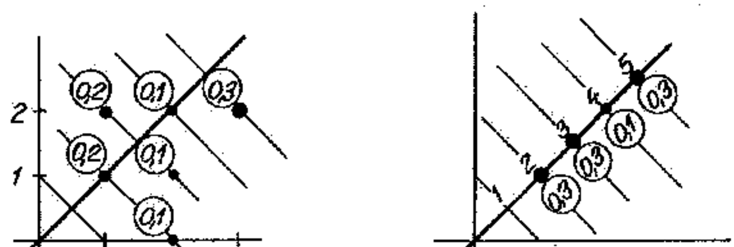
131. ábra

Ilyen skálázás esetén a sík tetszőleges (x,y) pontjából a számegyenes $z = x + y$ pontjába mutató nyil merőleges a 45^o-os egyenesre, ezért az ℓ függvény nyilerdeje szépen áttekinthető:



132. ábra

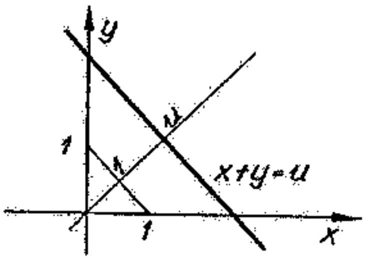
Tehát az ℓ függvény a 45^o-os egyenesre vetíti a síkot. Mindebből leszürhetjük, a következőket: a $\zeta = \xi + \eta$ valószinüségi változó eloszlását ugy kapjuk meg a ξ és η együttes eloszlásából, hogy az együttes eloszlást a 45^o-os egyenesre vetitjük. Ez a vetités diszkrét eloszlás esetén a 45^o-os egyenesre merőleges egyenesek mentén való összegzést jelent:



133. ábra

Folytonos esetben pedig a 45^o-os egyenesre merőleges egyenesek mentén képzett integrálással kapjuk meg az összeg sürüségfüggvényét. Ugyanis az előző megjegyzésben levezetett $r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-v, v)dv$ integrál-

ban fix u mellett az $(u-v, v)$ pont az $x + y = u$ egyenletű egyenest futja be:



134. ábra

VIII. FELTÉTELES ELOSZLÁS

1. Csonkítással nyert feltételes eloszlások

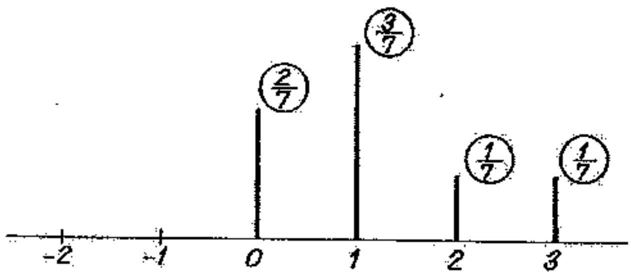
Ha ξ valószinüségi változó és B részhalmaza a számegyenesnek, akkor a $\xi \in B$ esemény bekövetkezésének ismeretében ξ-t továbbra is valószinüségi változónak kell tekintenünk. Ugyanis ha egyéb információ nem áll birtokunkban, akkor nem tudhatjuk, hogy melyik B-beli szám adódott ξ értékének. Kérdés, hogy ilyenkor milyen eloszlásunak tekintsük ξ-t, azaz mi lesz ξ feltételes eloszlása a $\xi \in B$ eseményre vonatkozólag.

Igy okoskodhatunk. Mivel a $\xi \in B$ esemény bekövetkezését tudjuk, kézenfekvő, hogy ξ feltételes eloszlása B-re koncentrálódik. A feltételes eloszlás kieszelése céljából vegyük B-nek egy tetszőleges A részhalmazát. Józan gondolat, hogy a feltételes eloszlás szerint annyi festék legyen A-n, amennyi a $\xi \in A$ eseménynek a $\xi \in B$ eseményre vonatkozó feltételes valószinüsége. Mivel A részhalmaza B-nek, a $\xi \in A$ esemény maga után vonja a $\xi \in B$ eseményt. Ezért a feltételes valószinüség $P(\xi \in A \mid \xi \in B) = \dfrac{P(\xi \in A)}{P(\xi \in B)}$. Ez B-nek minden részhalmazára igy van.

Mindebből a következőket állapithatjuk meg ξ-nek a $\xi \in B$ eseményre vonatkozó feltételes eloszlása B-re koncentrálódik. Ha A részhalmaza B-nek, akkor a feltételes eloszlás szerint A-ra kent festékmennyiség arányos a feltétel nélküli eloszlás szerint A-ra kent festékmennyiséggel. Az arányossági tényező a B-re kent festékmennyiség reciproka. Ez megfelel annak, mintha a ξ eloszlása szerint szétkent egységnyi festékmennyiségnek a B halmazon kivüli részét letörölnénk, a B-n pedig arányosan növelnénk a megmaradó festéket éppen ugy, hogy a B-n lévő festékmennyiség váljon egységnyivé. Például ha ξ eloszlása

135. ábra

akkor a $\xi \geq 0$ eseményre vonatkozó feltételes eloszlás



136. ábra

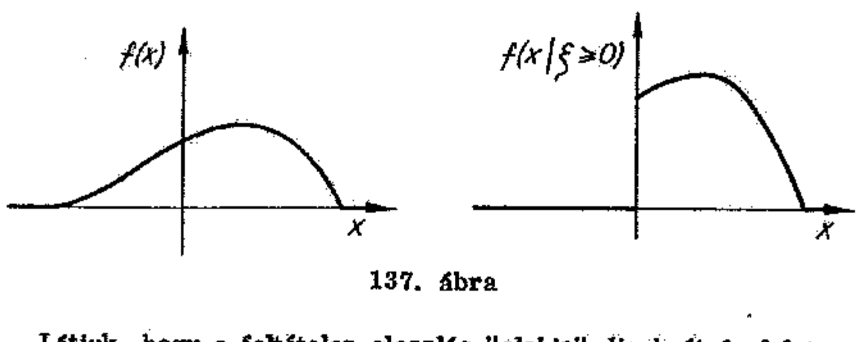
Tehát a feltételbe nem tartozó halmazon eltűntek a pálcikák, a feltételnek megfelelő halmazon pedig arányosan megnyultak úgy, hogy a pálcikák hosszának összege 1 legyen.

Ha ξ eloszlása folytonos, akkor a feltételes eloszlás is folytonos, a sűrűségfüggvények között kapcsolat pedig

$$f(x \mid \xi \in B) = \begin{cases} \dfrac{1}{\int\limits_B f(x)\,dx} \cdot f(x), & \text{ha } x \in B, \\ 0, & \text{ha } x \notin B. \end{cases}$$

Tehát a feltételes sűrűségfüggvényt úgy kapjuk, hogy az eredeti sűrűségfüggvényt 0-val tesszük egyenlővé a B-n kívül, a B-n pedig az

$\dfrac{1}{\int\limits_B f(x)\,dx}$ konstanssal szorozzuk:

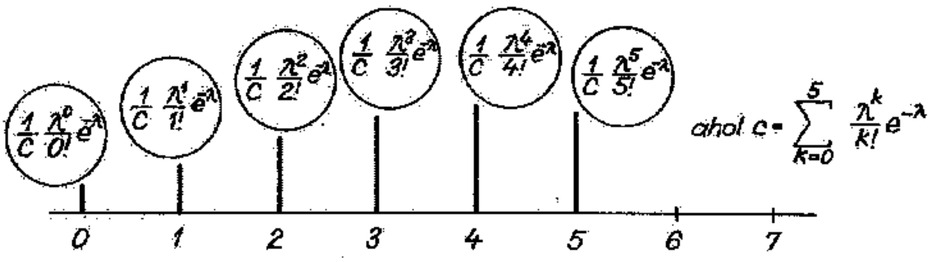


137. ábra

Látjuk, hogy a feltételes eloszlás "alakja" diszkrét és folytonos esetben is a feltételnek megfelelő halmazon "lényegében változatlan", csak éppen a feltételbe nem tartozó halmazon az eloszlás "megcsonkult".

Ezért az ebben a pontban definiált feltételes eloszlásokat az eredeti eloszlásból nyert csonkitott eloszlásnak is szokták nevezni.

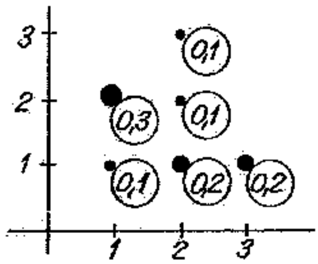
Például az alábbi eloszlás csonkitott Poisson-eloszlás:



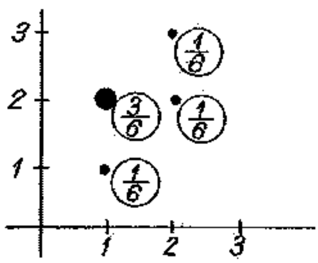
138. ábra

Ezzel az eloszlással kell dolgoznunk, ha egy valószinüségi változóról tudjuk, hogy Poisson-eloszlásu, és valahonnan azt is tudjuk, hogy értéke 6-nál kisebbnek adódott.

A csonkitott eloszlásokról mondottak teljesen kézenfekvő módon többdimenziós eloszlásokra is átültethetők. Például ha ξ és η együttes eloszlása a 139. ábrán látható eloszlás, akkor a $\xi \leq \eta$ feltétel melletti csonkitott eloszlás ugy fest, ahogy a 140. ábrán látható.

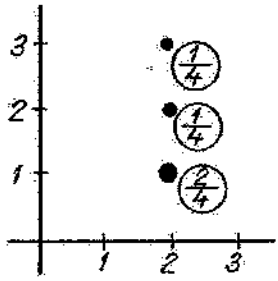


139. ábra



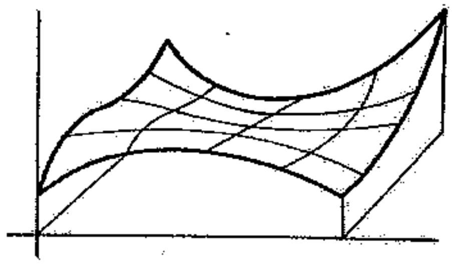
140. ábra

A $\xi = 2$ feltétel melletti csonkított eloszlása pedig így:



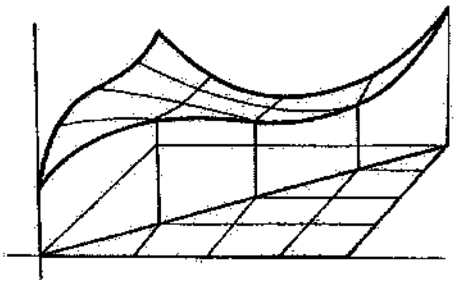
141. ábra

Ha ξ és η együttes sűrűségfüggvényének grafikonja:



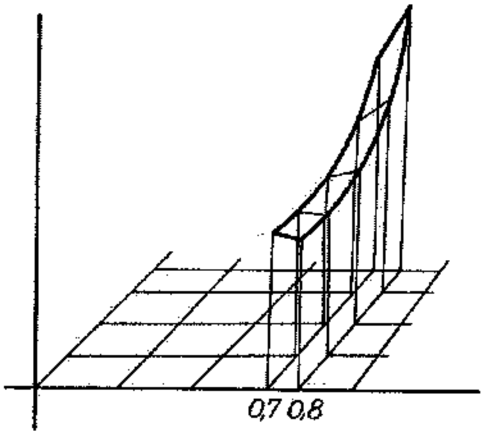
142. ábra

akkor a $\xi \leqslant \eta$ feltételhez tartozó csonkított eloszlás sűrűségfüggvénye:



143. ábra

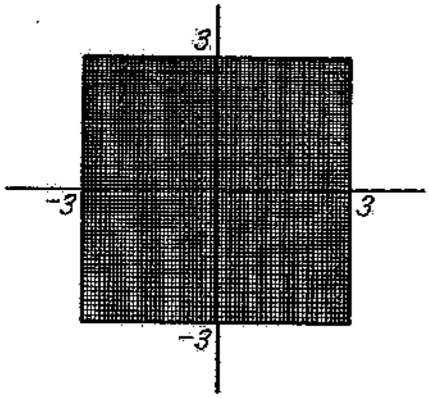
A $0{,}7 \leqslant \xi \leqslant 0{,}8$ feltételhez tartozó csonkított eloszlás sűrűségfüggvénye pedig:



144. ábra

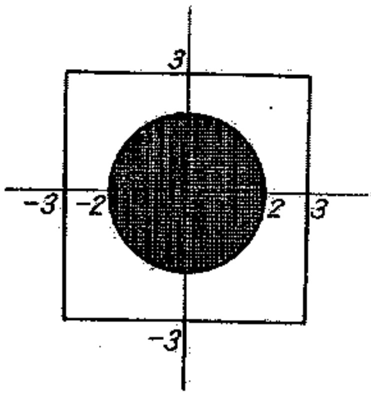
Nyilvánvaló, hogy egyenletes eloszlásból nyert csonkított eloszlás ugyancsak egyenletes eloszlás.

Például én is, te is egymástól függetlenül válasszunk egy-egy valós számot −3 és 3 között egyenletes eloszlás szerint! Ha az én számom ξ, a tiéd pedig η, akkor – mint a síkbeli egyenletes eloszlásokkal kapcsolatban megbeszéltük – a (ξ, η) pont egyenletes eloszlású az alábbi négyzeten:



145. ábra

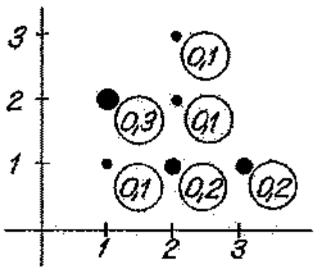
Ezért a $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq 2$ feltétel mellett a (ξ, η) pont egyenletes eloszlású a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$ egyenlőtlenség által meghatározott körlapon:



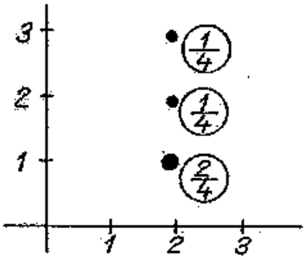
146. ábra

2. Feltételes eloszlás diszkrét esetben

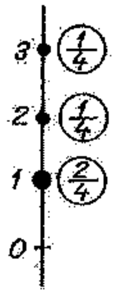
Láttuk, hogy ha ξ és η eloszlása a 147. ábrán látható eloszlás akkor a $\xi = 2$ feltétel melletti csonkított eloszlás ugy néz ki, ahogyan a 148. ábra mutatja. Ennek az eloszlásnak a második koordinátatengelyre vetett vetületét, tehát a 149. ábrán látható



147. ábra



148. ábra

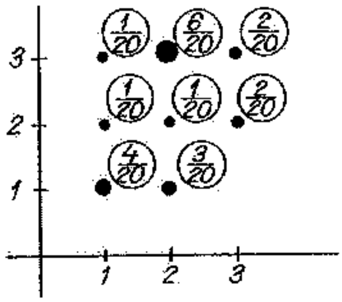


149. ábra

eloszlást, η -nak a $\xi = 2$ feltétel melletti feltételes eloszlásának nevezzük. Jelentése: ha a $\xi = 2$ esemény bekövetkezését már tudjuk, akkor ennek az ismeretnek a birtokában az η feltétel nélküli eloszlása helyett ezt a feltételes eloszlást tekintjük η eloszlásának.

Most nézzünk egy feladatot:

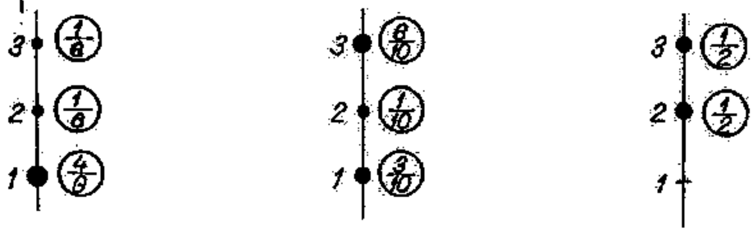
Feladat: Tegyük fel, hogy ξ és η együttes eloszlása az alábbi diszkrét eloszlás



150. ábra

Képzeljük el, hogy ξ értékét előbb tudjuk, meg mint η értékét, és ξ értéke alapján kell η -re tippelnünk. Tippelésünk után η értékét is megtudjuk. Ha tippünk helyes volt, akkor nyerünk 1 forintot, ha nem volt helyes, akkor vesztünk 1 forintot. Hogyan tippeljünk ?

Megoldás: Meghatározzuk η feltételes eloszlásait a $\xi = 1$, $\xi = 2$, $\xi = 3$ feltételekhez:



η feltételes eloszlása a

$\xi=1$ $\xi=2$ $\xi=3$

feltétel mellett

151. ábra

Ebből látszik, hogy

$\xi = 1$ esetén η-ra az 1 a legvalószínűbb,

$\xi = 2$ esetén η-ra a 3 a legvalószínűbb,

$\xi = 3$ esetén pedig η-ra 2-vel vagy 3-mal tippelhetünk, hiszen ezek egyformán a legvalószínűbbek. A nyerés valószínűsége pedig

$P(\xi = 1, \eta = 1) + P(\xi = 2, \eta = 3) + P(\xi = 3, \eta = 2) = \frac{4}{20} + \frac{6}{20} + \frac{2}{20} = 0,6.$ ■

3. Feltételes eloszlás folytonos esetben

Most vizsgáljuk meg, hogy ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor a ξ megfigyelt értéke alapján hogyan módosul η-ra vonatkozó ismeretünk. Tehát a $\xi = x_0$ feltétel mellett η-t milyen eloszlásúnak kell tekintenünk?

Folytonos esetben a $\xi = x_0$ esemény valószínűsége 0-val egyenlő, mert $\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$. Mivel a $P(E \mid F) = \frac{P(E \cdot F)}{P(F)}$ feltételes valószínűség értelmetlen, ha $P(F) = 0$, a $\xi = x_0$ feltételhez tartozó feltételes eloszlást nem lehet feltételes valószínűségek segítségével közvetlenül értelmezni.

Viszont így okoskodhatunk. A $\xi = x_0$ feltétel helyett az $x_0 \leq \xi \leq x_0 + \Delta x_0$ feltételt vesszük. Az ehhez a feltételhez tartozó feltételes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y \mid x_0 \leqslant \xi \leqslant x_0 + \Delta x_0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin [x_0, x_0 + \Delta x_0], \\ \frac{1}{c} h(x,y), & \text{ha } x \in [x_0, x_0 + \Delta x_0], \end{cases}$$

ahol

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} h(x,y)\, dx\, dy = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\, dy \right) dx = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x)\, dx.$$

Ennek a csonkított eloszlásnak a második koordinátatengelyre vetett vetülete olyan folytonos eloszlás, melynek sürüségfüggvénye:

$$g(y \mid x_0 \leqslant \xi \leqslant x_0 + \Delta x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y \mid x_0 \leqslant \xi \leqslant x_0 + \Delta x_0) dx = \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} h(x,y)\, dx =$$

$$= \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} h(x,y)\, dx}{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x)\, dx}.$$

Ha a h és f sürüségfüggvények folytonosak, akkor ennek a törtnek $\Delta x_0 \to 0$ esetén van határértéke:

$$g(y \mid x_0 \leqslant \xi \leqslant x_0 + \Delta x_0) = \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} h(x,y)\, dx}{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x)\, dx} = \frac{\frac{1}{\Delta x_0} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} h(x,y)\, dx}{\frac{1}{\Delta x_0} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} f(x)\, dx} \longrightarrow \frac{h(x_0,y)}{f(x_0)}.$$

Ezért η -nak a $\xi = x_0$ feltétel melletti feltételes sürüségfüggvényének definiciója:

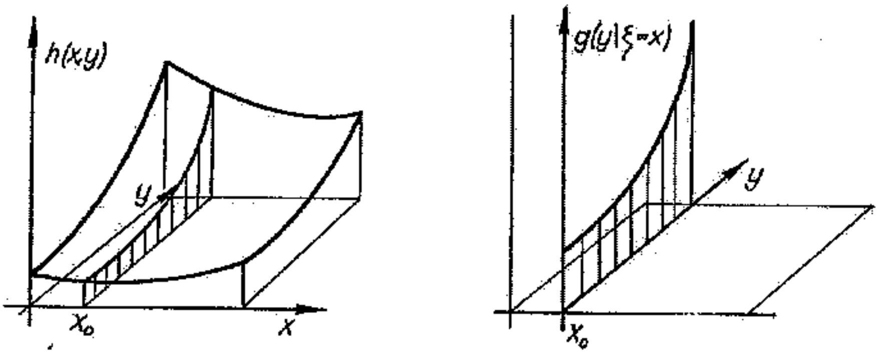
$$g(y \mid \xi = x_0) = \frac{h(x_0,y)}{f(x_0)}.$$

A feltételes sűrűségfüggvény által meghatározott folytonos eloszlást η -nak a $\xi = x_0$ feltétel melletti feltételes eloszlásának nevezzük.

Ez a feltételes eloszlás valószínűségeloszlás, ugyanis

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y \mid \xi = x_0)\, dy = \frac{1}{f(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} h(x_0, y)\, dy = \frac{1}{f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1.$$

Az η -nak a $\xi = x_0$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényének grafikonját megkapjuk, ha az együttes sűrűségfüggvénynek megfelelő felületet az első koordinátatengely x_0 pontján átfektetett, a második koordinátatengellyel párhuzamos helyzetű, függőleges síkkal elmetsszük, és a felületből kimetszett görbét úgy nagyítjuk vagy kicsinyítjük, hogy az alatta lévő terület 1 legyen:



152. ábra

Most két feladatot veszünk.

1. feladat: A Duna budapesti vízállását alacsonynak nevezzük, ha a vízszint a maximális és minimális vízszint középértéke alatt van. Bár a Duna mai bécsi és holnaputáni budapesti vízállása között szoros kapcsolat van, a Bécsben mért adat ismeretében nem lehet pontosan megmondani, hogy a holnaputáni budapesti vízállás milyen lesz. A mért bécsi vízállás ismeretében adjuk meg annak a valószínűségét, hogy holnapután Budapesten alacsony vízállás lesz! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a

ξ = a mai bécsi vízállás

és az

η = a holnaputáni budapesti vízállás valószínűségi változókat olyan mértékegységekben és skálázásban mérjük, hogy a minimális vízszint 0, a maximális vízszint 1. Feladatunkban feltételezzük, hogy ξ és η együttes sűrűségfüggvénye az alábbi mesterkélt sűrűségfüggvény (aminek a valósághoz semmi köze, de számolgatni egyszerűen lehet vele):

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5} \cdot (x + (y-1)^2), & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

<u>Megoldás:</u> ξ sűrűségfüggvényét integrálással kapjuk az együttes sűrűségfüggvényből, a feltételes sűrűségfüggvényt pedig hányadosként:

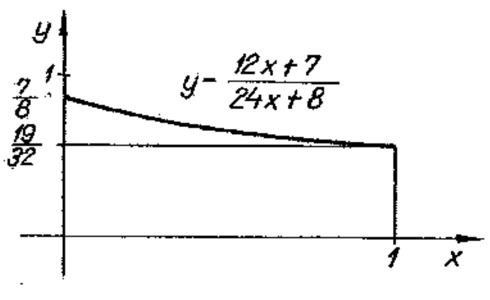
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{6}{5} \cdot (x+(y-1)^2)\,dy = \frac{6}{5} \cdot (x+\frac{1}{3}) \qquad (0 < x < 1),$$

$$g(y \mid \xi = x) = \frac{h(x,y)}{f(x)} = \frac{x + (y-1)^2}{x + \frac{1}{3}} \qquad (0 < x < 1,\; 0 < y < 1).$$

Annak a valószínűsége, hogy η értéke 0 és $\frac{1}{2}$ közé esik, feltéve, hogy ξ értéke x-nek adódott:

$$P(0 < \eta < \frac{1}{2} \mid \xi = x) = \int_0^{\frac{1}{2}} g(y \mid \xi = x)\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+(y-1)^2}{x + \frac{1}{3}}\,dy = \frac{12x+7}{24x+8}.$$

Ennek a feltételes valószínűségnek x-től való függését mutatja az alábbi ábra:



153. ábra

Tehát ha ξ értéke kisebbnek adódik, akkor valószínűbb, hogy budapesti vízállás alacsony lesz, mintha ξ értéke nagyobbnak adódik. ■

Előfordulhat, hogy a feltételes sűrűségfüggvényt ismerjük valahonnan, és éppen ez ad lehetőséget a feladat megoldására. Erre példa a következő feladat:

2. feladat: Egyenletes eloszlás szerint véletlenszerűen választunk egy ξ pontot 0 és 1 között. Ha ξ -t már megválasztottuk, akkor 0 és ξ között választunk egyenletes eloszlás szerint egy η pontot. (ξ "átlagértéke" az $\frac{1}{2}$ pont, η pedig 0 és ξ között egyenletes eloszlású. Ezért meggondolatlanul azt hinné az ember, hogy az $\eta < \frac{1}{4}$ esemény valószínűségét kiszámíthatjuk a $(0, \frac{1}{2})$ intervallumon vett egyenletes eloszlásból, vagyis $P(\eta < \frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 0{,}5$.) Határozzuk meg az $\eta < \frac{1}{4}$ esemény valószínűségét!

Megoldás: ξ egyenletes eloszlású a (0,1) intervallumon, ezért

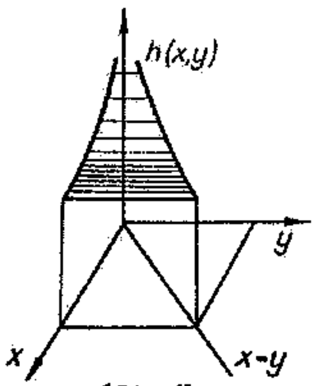
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A $\xi = x$ feltétel mellett η egyenletes eloszlású a $(0, x)$ intervallumon, ezért

$$g(y \mid \xi = x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 < y < x, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így a $h(x,y) = f(x) \cdot g(y \mid \xi = x)$ összefüggés alapján

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$



154. ábra

Ebből integrálással

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx = \int_{y}^{1} \frac{1}{x}\,dx = -\ln y \qquad (0 < y < 1).$$

A kérdezett valószínűség:

$$P\left(\eta < \frac{1}{4}\right) = \int_{0}^{\frac{1}{4}} (-\ln y)\,dy = \Big[y - y\ln y\Big]_{0}^{\frac{1}{4}} = \frac{1 + \ln 4}{4} \approx 0,6 \;.$$

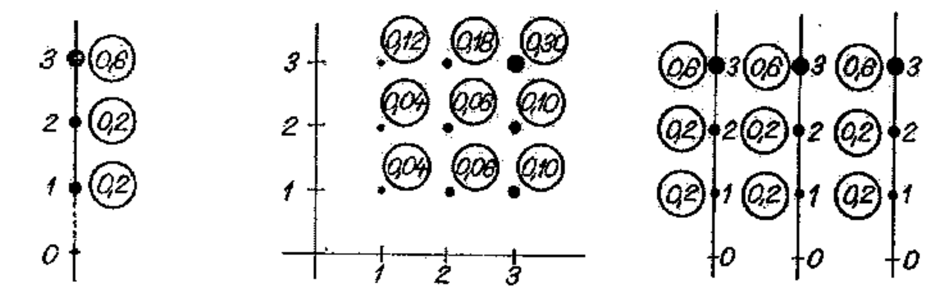
Láthatjuk, hogy a meggondolatlan okoskodás helytelen eredményre vezetett. ■

IX. VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK FÜGGETLENSÉGE

Valószínűségi változók függetlensége

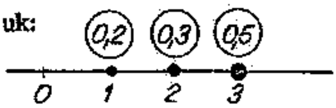
Az előző fejezetben láttuk, hogy kell a feltételes eloszlásokkal dolgozni. Ha ξ megfigyelt értékére valamilyen konkrét x érték adódik, akkor η (feltétel nélküli) eloszlása helyett a $\xi = x$ feltételhez tartozó feltételes eloszlása írja le az η valószínűségi változót.

Viszont ha η feltételes eloszlása minden x-re megegyezik η eloszlásával, akkor a $\xi = x$ információ semmi érdemlegeset nem mond η-ra vonatkozólag. Ilyenkor azt mondjuk, hogy η <u>független ξ-től.</u> Például ha ξ és η együttes eloszlása az alábbi diszkrét eloszlás, akkor η független ξ-től, ugyanis a feltételes eloszlások megegyeznek η eloszlásával:



155. ábra

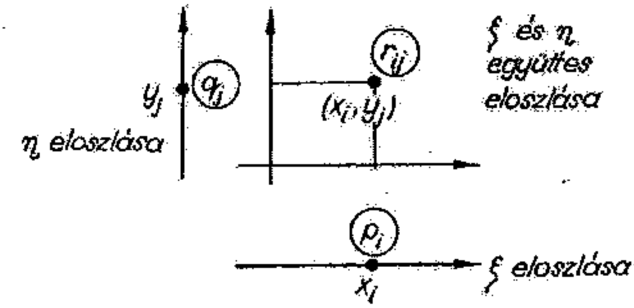
ξ eloszlását is kiszámoljuk:



156. ábra

Vegyük észre, hogy az együttes eloszlás elemei a külön-külön vett eloszlások megfelelő elemeinek szorzata. Ez a tulajdonság diszkrét esetben jellemzi is a függetlenséget, ugyanis igaz a következő:

Tétel: Ha a külön-külön vett eloszlásokat és az együttes eloszlást az alábbi ábrának megfelelően jelöljük:



157. ábra

akkor η ξ-től való függetlenségének szükséges és elégséges feltétele, hogy minden i-re és j-re $r_{ij} = p_i \cdot q_j$.

Bizonyítás: Az x_i-hez tartozó feltételes eloszlásban az y_j értékhez a feltételes eloszlás $\frac{r_{ij}}{p_i}$ nagyságú festékcsomót rendel. Ez akkor és csak akkor egyenlő q_j-val minden i-re és j-re, ha $r_{ij} = p_i \cdot q_j$ minden i-re és j-re. ■

Folytonos esetben a feltételes sűrűségfüggvényt a $g(y \mid \xi = x) = \frac{h(x,y)}{f(x)}$ képlet adja. Így η-nak ξ-től való függetlensége, azt jelenti, hogy $\frac{h(x,y)}{f(x)} = g(y)$, azaz $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$.

Mivel az $r_{ij} = p_i \cdot q_j$ és $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ összefüggésekben ξ és η szerepe szimmetrikus, η-nak ξ-től való függetlensége egyenértékű ξ-nek η-tól való függetlenségével. Ezért jogos az a szóhasználat, hogy ξ és η függetlenek egymástól.

Ha ξ és η együttes eloszlását ismerjük, akkor ξ és η függetlensége a definíció vagy a kimondott tétel alapján dönthető el. Más esetekben viszont a véletlen jelenség és a valószínűségi változók értelmezéséből eleve jogosnak érezzük a függetlenséget, és éppen ennek alapján vesszük fel az együttes eloszlást. Például a következő feladatban is ezt tesszük.

Feladat: A 60 W-os Tungsram villanykörték élettartama a tapasztalat szerint teljesíti az örökifjú tulajdonságot. Ezért az élettartam exponenciális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető valamilyen λ paraméterrel. Tegyük fel, hogy két ilyen körténk van. Először az egyiket használjuk. Amikor ez kiég, akkor a másikat tesszük a helyére, és addig használjuk, amíg ez is ki nem ég. Véletlentől függ, hogy ily módon "mennyi ideig tudunk világosságot csinálni". Határozzuk meg ennek a valószínűségi változónak a sűrűségfüggvényét!

<u>Megoldás:</u> Jelölje ξ az első, η a második körte élettartamát. Mivel ugyanolyan típusú körtékről van szó, és ugyanolyan körülmények között (ugyanabban az áramkörben) használjuk őket, ξ és η eloszlásának paramétere megegyezik:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & \text{ha } y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

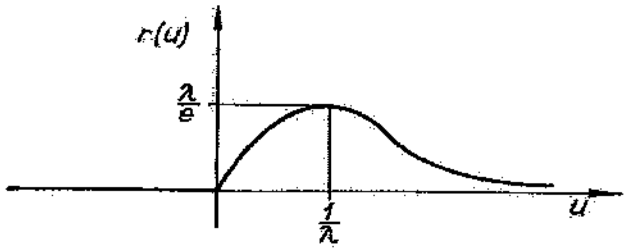
Feltételezzük, hogy ξ és η függetlenek. Erre az ad alapot, hogy nem egyidőben használjuk a körtéket, és ezért a második körtét tönkretevő áramköri hatásoknak semmi közük sincs az első körtét tönkretevő áramköri hatásokhoz. A függetlenség miatt

$$h(x,y) = f(x)\cdot g(y) = \begin{cases} \lambda^2 \cdot e^{-\lambda\cdot(x+y)}, & \text{ha } x,y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A VII. fejezetben tanultak alapján a bennünket érdeklő $\zeta = \xi + \eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét így számolhatjuk ki:

$$r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-v, v)\, dv = \begin{cases} \displaystyle\int_0^u \lambda^2 e^{-\lambda\cdot(u-v+v)}\, dv = u\cdot\lambda^2\cdot e^{-\lambda u} & (u>0), \\ 0 \quad \text{egyébként.} \end{cases}$$ ■

A kapott sűrűségfüggvény a <u>2-odrendű λ-paraméterű gamma-eloszlás</u> sűrűségfüggvénye. Grafikonja így fest:



158. ábra

A feladatból kitűnik, hogy 2-odrendű λ paraméterű gamma-eloszlásu valószinüségi változóhoz jutunk, ha két független, λ paraméterű exponenciális eloszlásu valószinüségi változó összegét tekintjük.

Független valószinüségi változókkal kapcsolatban egy fontos tételt mondunk ki.

Tétel: Legyenek ξ és η független valószinüségi változók. Tegyük fel, hogy ξ függvényeként értelmezzük az α, η függvényeként pedig a β valószinüségi változókat: $\alpha = m(\xi)$, $\beta = n(\eta)$, ahol m és n valamilyen adott függvények. Ekkor α és β is függetlenek egymástól.

A tétel azt mondja ki, hogy ha független valószinüségi változókat "külön-külön feldolgozunk", akkor a kapott uj valószinüségi változók is függetlenek egymástól.

Bizonyitás:

I. Ha ξ és η együttes eloszlása diszkrét, akkor ξ és η együttes eloszlását az Eloszlástranszformáció sikról sikra c. pontban tanultak alapján meg lehet határozni. Könnyü meggyőződni róla, hogy a függetlenséget jellemző $r_{ij} = p_i \cdot q_j$ tulajdonság ξ és η együttes eloszlásáról átöröklődik α és β együttes eloszlására.

II. Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor a függetlenség azt jelenti, hogy $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Az Eloszlástranszformáció sikról sikra c. pontban ξ és η együttes sürüségfüggvényével kifejeztük α és β együttes sürüségfüggvényét. Az ottani képlet ez volt:

$$s(u,v) = h\left(\ell^{-1}(u,v)\right) \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial a}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial b}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \right| .$$

Mivel most $\ell(x,y) = \left(m(x),\ n(y)\right)$ (m nem függ y-tól, n nem függ x-től!), $\ell^{-1}(u,v) = \left(m^{-1}(u), n^{-1}(v)\right)$, azaz $a(u,v) = m^{-1}(u)$, $b(u,v) = n^{-1}(v)$. Tehát a nem függ v-től, b nem függ u-tól. Ezért

$$\frac{\partial a}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial b}{\partial u}(u,v) = 0, \qquad \frac{\partial a}{\partial u}(u,v) = \left(m^{-1}(u)\right)',$$

$$\frac{\partial b}{\partial v}(u,v) = \left(n^{-1}(v)\right)'.$$

Mindezek alapján α és β együttes sürüségfüggvényére ez adódik:

$$s(u,v) = h\left(m^{-1}(u),\ n^{-1}(v)\right) \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \left(m^{-1}(u)\right)' & 0 \\ 0 & \left(n^{-1}(v)\right)' \end{pmatrix} \right| =$$

$$= f\left(m^{-1}(u)\right) \cdot g\left(n^{-1}(v)\right) \cdot \left| \left(m^{-1}(u)\right)' \cdot \left(n^{-1}(v)\right)' \right| =$$

$$= \left[f\left(m^{-1}(u)\right) \cdot \left| \left(m^{-1}(u)\right)' \right| \right] \cdot \left[g\left(n^{-1}(v)\right) \cdot \left| \left(n^{-1}(v)\right)' \right| \right].$$

A kapott szorzat első tényezője az α sürüségfüggvénye, a második tényező pedig a β sürüségfüggvénye, vagyis teljesül a függetlenség kritériuma: az együttes sürüségfüggvény a külön-külön vett sürüségfüggvények szorzata.

A bizonyításban kihasználtuk, hogy m és n invertálhatók, az inverzek pedig deriválhatók. A tétel állítása enélkül is igaz, de ezt nem bizonyítjuk. ■

X. VÁRHATÓ ÉRTÉK

1. Várható érték

Egy valószínűségi változót eloszlása segítségével építünk be matematikai modellünkbe. Mint látni fogjuk, az eloszlás mechanikai értelemben vett súlypontja fontos valószínűségszámítási jelentéssel bír: a valószínűségi változó várható értékét definiálhatjuk vele. Ahhoz, hogy mindezt világosan láthassuk, némi előkészítésre és a nagy számok erős törvényének megértésére van szükség. Ezért a nagy számok erős törvényének megértéséig egy valószínűségi változó várható értékét mindenféle valószínűségszámítási jelentés nélkül tekintsük egy számértéknek, ami a valószínűségi változó eloszlásából a későbbiekben megadott módon meghatározható.

2. Eloszlás súlypontja

Tekintsünk egy diszkrét eloszlást a számegyenesen. Vegyünk fel egy m pontot, és képzeljük el, hogy a számegyenes az m pontban alá van támasztva mint egy kétkaru mérleg. A festékcsomók helyét jelöljük x_i-vel az x_i pontra kerülő festékmennyiséget p_i-vel ($i=1,2,\ldots$).

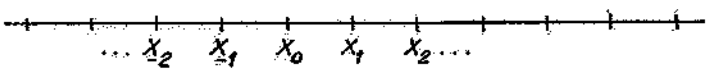
Mikor lesz egyensúlyban ez a mérleg? Akkor, ha a forgatónyomatékok összege 0-val egyenlő. Kiszámítjuk a forgatónyomatékokat. A jobbra húzó nyomatékot tekintjük pozitívnak. Az x_i pontban elhelyezett festékmennyiség által kifejtett előjeles forgatónyomaték $(x_i - m) \cdot p_i$. Itt az előjel is rendben van, hiszen ha x_i m-től jobbra van, akkor $x_i - m$ is és a nyomaték is pozitív, ha pedig x_i m-től balra van, akkor $x_i - m$ is és a nyomaték is negatív. A forgatónyomatékok összege $\sum_i (x_i - m) \cdot p_i$ nyilván akkor egyenlő 0-val, ha

$$m = \frac{\sum_i x_i \cdot p_i}{\sum_i p_i}.$$

Ezt a pontot az eloszlás sulypontjának nevezzük. Ha az eloszlás valószinüségeloszlás, tehát $\sum_i p_i = 1$, akkor a sulypont:

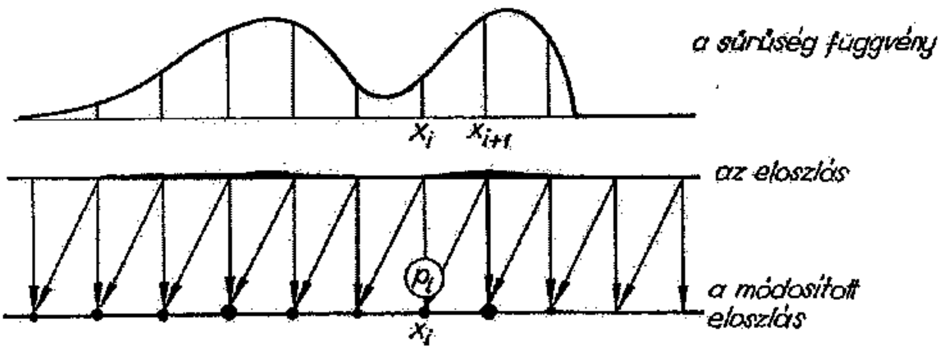
$$m = \sum_i x_i \cdot p_i .$$

Most tekintsünk egy folytonos eloszlást. Sürüségfüggvényét jelöljük f-fel. Megkeressük az eloszlás sulypontját. Osszuk fel a számegyenest x_i osztópontokkal ($i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$) piciке intervallumokra:



159. ábra

Egy kicsit változtatunk az eloszláson. Az $[x_i, x_{i+1})$ intervallumon lévő festékmennyiséget az x_i pontra gyüjtjük:



160. ábra

Ezáltal egy diszkrét eloszlást kapunk, melynél az x_i ponton

$$p_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$ nagyságu festékcsomó van ($i = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$).

Ennek a diszkrét eloszlásnak a sulypontja:

$$\frac{\sum\limits_i x_i \cdot p_i}{\sum\limits_i p_i} = \frac{\sum\limits_i x_i \cdot \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx}{\sum\limits_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx} .$$

A kifejezés nevezője $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ -szel egyenlő, a számlálójáról pedig a következőket mondhatjuk: mivel az $[x_i, x_{i+1})$ intervallum pici, $\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$. Ennek felhasználásával

$$\sum_i x_i \cdot \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_i x_i \cdot f(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx .$$

A közelités annál jobb, minél finomabb a felosztás, azaz a diszkrét eloszlás minél jobban közeliti a folytonos eloszlást. Ezért kézenfekvő, hogy a <u>folytonos eloszlás sulypontja:</u>

$$m = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} .$$

Ha az eloszlás valószinüségeloszlás, tehát $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, akkor a sulypont:

$$m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx .$$

Megjegyezzük, hogy ha egy valószinüségeloszlás sürüségfüggvénye csak az $[a,b]$ intervallumon különbözik 0-tól, tehát az eloszlás az $[a,b]$ intervallumra koncentrálódik, akkor a sulypont képlete így módositható:

$$m = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx .$$

A kevert eloszlás esetét nem részletezzük. A Kedves Olvasó gondoljon utána, hogy a sulypontra

$$m = \frac{\sum_i x_i \cdot p_i + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx}{\sum_i p_i + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx}$$

adódik. Ha a kevert eloszlás valószinüségeloszlás, akkor a sulypont

$$m = \sum_i x_i \cdot p_i + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx .$$

Megjegyzés: Mint ismeretes, egy konvergens $\sum_i x_i \cdot p_i$ sor összege akkor és csak akkor nem függ a tagok sorrendjétől, ha $\sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty$. Egy konvergens $\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_A^B x\, f(x)\, dx$ integrál értéke pedig akkor és csak akkor nem függ A-nak és B-nek a $(-\infty)$-hez illetve $(+\infty)$-hez való konvergenciájának egymáshoz viszonyitott gyorsaságától, ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$. Mivel egy diszkrét eloszlás sulypontja nem függhet attól, hogy tagjait milyen sorrendben látjuk el indexekkel, és egy folytonos eloszlás sulypontja sem függhet attól, hogy a sulypontot definiáló impróprius integrál határai hogyan tartanak $(-\infty)$-hez, illetve $(+\infty)$-hez, a sulypontot csak akkor értelmezzük, ha

$\sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty$ illetve $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az eloszlásnak nincs sulypontja.

Egy ξ valószinüségi változó eloszlásának sulypontja, feltéve, hogy létezik, egy számot jelöl ki a számegyenesen. Ezt a számot $M(\xi)$-vel jelöljük, és a ξ valószinüségi változó várható értékének nevezzük:

$$M(\xi) = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot p_i, & \text{ha } \sum_i |x_i| \cdot p_i < \infty, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx, & \text{ha } \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty, \\ \sum_i x_i \cdot p_i + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx, & \text{ha } \sum_i |x_i| \cdot p_i \text{ és } \\ & \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty. \end{cases}$$

Ha pedig ξ eloszlásának nincsen sulypontja, tehát $\sum_i |x_i| \cdot p_i = \infty$ vagy $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy ξ-nek nincs várható értéke. Szokásos még az a terminológia is, hogy egy eloszlás sulypontját az eloszlás várható értékének nevezik.

Megjegyzések:

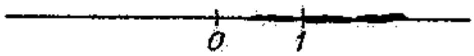
1. Azok számára, akik korábbi tanulmányaik során találkoztak már a Stieltjes-integrál fogalmával, megemlitjük, hogy a várható érték képlete egységesen is megadható. Ha egy valószinüségeloszlás eloszlásfüggvényét F-fel jelöljük, akkor az eloszlás sulypontja, azaz várható értéke: $m = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x)$ feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF(x) < \infty$. A várható értékkel kapcsolatos és a diszkrét, folytonos illetve kevert esetre külön-külön érvényes későbbi formuláinkat is egységessé tehetnénk Stieltjes-integrálokkal. Mivel Stieltjes-integrálokról nem minden szakon tanulnak, és a Stieltjes-integrálok tényleges kiszámitása éppen az általunk meg-

adott formulák segítségével történik, jegyzetünkben nem fogjuk használni ezt az integrál-fogalmat.

2. Részletekbe nem bocsátkozunk, de megjegyezzük, hogy egy síkbeli eloszlás sulypontját sem nehéz értelmezni. Az is nyilvánvaló, hogy egy síkbeli eloszlás tetszőleges egyenesre való vetületének sulypontja megegyezik a síkbeli eloszlás sulypontjának vetületével. Ezért ha ξ és η együttes eloszlásának sulypontja érdekel bennünket, akkor a sulypont koordinátáit megkapjuk, ha az eloszlásnak a koordinátatengelyekre vetett vetületének, tehát ξ illetve η eloszlásának sulypontját, azaz ξ-nek illetve η-nak a várható értékét kiszámítjuk: az együttes eloszlás sulypontja az $(M(\xi), M(\eta))$ pont. Ezt a pontot a kétdimenziós (ξ, η) valószinüségi változó várható értékének nevezhetjük.

3. A várható érték tulajdonságai

Vegyük észre, hogy ha egy ξ valószinüségi változó nem vehet fel negativ értékeket, akkor ξ eloszlása szerint a 0-tól balra nincs festék:



161. ábra

Egy ilyen eloszlás sulypontja nem eshet a 0-tól balra, tehát $M(\xi) \geqslant 0$. A 0-ba is csak akkor eshet a sulypont, ha az egész festékmennyiség a 0-ban van, azaz ξ eloszlása a 0 pontra koncentrált elfajult eloszlás, vagyis a $\xi = 0$ esemény majdnem biztos.

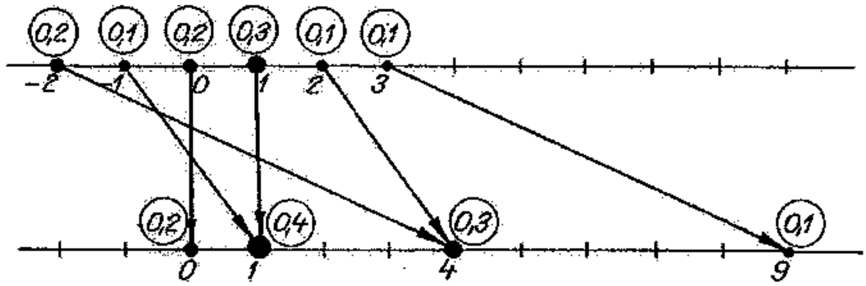
Ha a ξ valószinüségi változó eloszlása adott, akkor tetszőleges ℓ függvény esetén az $\eta = \ell(\xi)$ valószinüségi változó eloszlását meg tudjuk határozni ξ eloszlásából az ℓ függvény segítségével a Valószinüségi változó függvényének eloszlása c. fejezetben tanultak alapján. η eloszlásából pedig összeg vagy integrál segítségével kiszámíthatjuk η várható értékét. A következő eredményhez jutunk:

1. tétel: Ha ξ diszkrét eloszlású x_i lehetséges értékekkel és p_i valószinüségekkel, akkor az $\eta = \ell(\xi)$ valószinüségi változó várható értéke $M(\eta) = \sum_i \ell(x_i) \cdot p_i$ (feltéve, hogy $\sum_i |\ell(x_i)| \cdot p_i < \infty$.)

Vázlatos bizonyítás: A bizonyítás gondolatmenetét egy konkrét példán mutatjuk be. Ebből ugyanis az általános esetben követendő eljárás is kiolvasható. Legyen $\ell(x) = x^2$, ξ eloszlása pedig legyen

162. ábra

Ebből η eloszlását az $\ell(x) = x^2$ függvénnyel való transzformációval kapjuk:



163. ábra

Ebből a várható érték

$$M(\eta) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,1 =$$

$$= 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot (0,1 + 0,3) + 4 \cdot (0,2 + 0,1) + 9 \cdot 0,1 =$$

$$= 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,1 =$$

$$= 0^2 \cdot 0,2 + (-1)^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + (-2)^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,1 +$$

$$+ 3^2 \cdot 0,1. \blacksquare$$

A folytonos eset visszavezethető a diszkrét esetre ugyanazzal a trükkel, amit a sulypont képleténél alkalmaztunk: a folytonos eloszlást diszkrét eloszlással közelítjük, és a szummáról integrálra térünk át. A következőket kapjuk:

2. tétel: Ha ξ folytonos eloszlású f sűrűségfüggvénnyel, és $\eta = \ell(\xi)$, akkor $M(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \cdot f(x)\, dx$ (feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |\ell(x)| \cdot f(x)\, dx < \infty$.)

E két tételből pedig kevert esetre a következő tétel "keveredik ki":

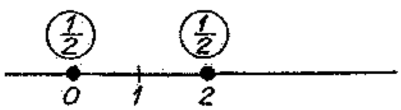
3. tétel: Ha ξ kevert eloszlású, és $\eta = \ell(\xi)$ akkor $M(\eta) = \sum_i \ell(x_i) \cdot p_i + \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \cdot f(x)\, dx$ (feltéve, hogy $\sum_i |\ell(x_i)| \cdot p_i < \infty$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |\ell(x)| \cdot f(x) dx < \infty$.)

Ha az $\ell(x) = c \cdot x$ függvényre alkalmazzuk a fenti formulákat, akkor a következő szabály adódik:

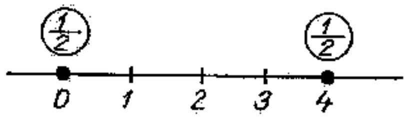
4. tétel: Ha c konstans és $\eta = c \cdot \xi$, akkor $M(\eta) = c \cdot M(\xi)$.

A tétel szerint egy valószínűségi változó konstansszorosának várható értéke a várható érték konstansszorosával egyenlő. Ez a szemlélet alapján is látszik, mert ha egy eloszlást az origóból nézve nyujtunk vagy zsugorítunk (és $c < 0$ esetén még az origóra tükrözünk is), akkor az eloszlás súlypontja is arányosan nyulik vagy zsugorodik (és tükröződik).

Gyakori hiba szokott lenni, hogy $\ell(\xi)$ várható értékét $\ell(M(\xi))$-nek veszik. Pedig általában $M(\ell(\xi)) \neq \ell(M(\xi))$. Ha például $\ell(x) = x^2$ és ξ eloszlása a 164. ábrán látható eloszlás, akkor ξ^2 eloszlása a 165. ábrán megadott eloszlás.



164. ábra



165. ábra

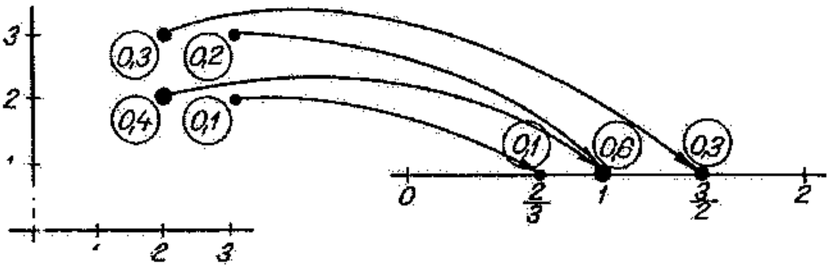
Látszik, hogy $M(\xi) = 1$, $M(\xi^2) = 2$. Ebben a példában $M(\xi^2) \neq (M(\xi))^2$.

Ha ξ és η valószínűségi változók, ℓ pedig kétváltozós függvény, akkor a $\zeta = \ell(\xi, \eta)$ képlettel értelmezett valószínűségi változó várható értékét kiszámolhatjuk ξ és η együttes eloszlásából.

5. tétel: Ha ξ és η együttes eloszlása diszkrét eloszlás (x_i, y_j) lehetséges értékekkel és r_{ij} valószínűségekkel, akkor a $\zeta = \ell(\xi, \eta)$

képlettel értelmezett valószínűségi változó várható értéke: $M(\zeta) =$
$= \sum_{i,j} \ell(x_i,y_j) \cdot r_{ij}$ (feltéve, hogy $\sum_{i,j} |\ell(x_i,y_j)| r_{ij} < \infty$.)

Vázlatos bizonyítás: A bizonyítás gondolatmenete ugyanaz, mint az egydimenziós esetben. Most is csak egy konkrét példán követjük végig a gondolatmenetet. Legyen $\ell(x,y) = \frac{y}{x}$. ξ és η együttes eloszlása legyen az alábbi síkbeli eloszlás, és rögtön számoljuk ki a $\zeta = \ell(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\xi}$ valószínűségi változó eloszlását:



166. ábra

ζ eloszlásából a várható értékét kiszámítjuk, s utána figyelembe veszszük, hogy ζ eloszlása a ξ és η együttes eloszlásából az ℓ függvénynyel való transzformációval keletkezett:

$$M(\zeta) = \frac{2}{3} \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + \frac{3}{2} \cdot 0,3 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,1 + \frac{2}{2} \cdot 0,4 + \frac{3}{3} \cdot 0,2 + \frac{3}{2} \cdot 0,3. \blacksquare$$

6. tétel: Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos eloszlás h sűrűségfüggvénnyel, akkor a $\zeta = \ell(\xi, \eta)$ képlettel értelmezett valószínűségi változó várható értéke: $M(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x,y) \cdot h(x,y)\,dx\,dy$ (feltéve, hogy $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\ell(x,y)| \cdot h(x,y)\,dx\,dy < \infty$.)

A bizonyítás alapgondolata: Diszkrét eloszlással közelítünk a szokásos módon, majd a szummák helyett integrálokat írunk. $\blacksquare$

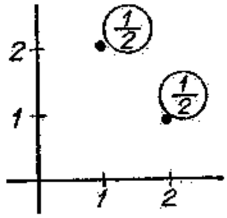
Gyakran van szükség két valószinüségi változó szorzatának várható értékére. Ha a fenti képleteket az $f(x,y) = x \cdot y$ függvényre alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$M(\xi \cdot \eta) = \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot r_{ij}$$

illetve

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot h(x,y)\, dx\, dy.$$

Például ha ξ és η együttes eloszlása



167. ábra

akkor $M(\xi \cdot \eta) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$. A vetületeloszlásokból kiszámithatjuk $M(\xi)$-t és $M(\eta)$-t. Azt kapjuk, hogy $M(\xi) = \frac{3}{2}$, $M(\eta) = \frac{3}{2}$. Láthatjuk, hogy ebben a példában $M(\xi \cdot \eta) \neq M(\xi) \cdot M(\eta)$. Ezt a példát azért mutattuk, hogy felhivjuk a figyelmet arra, hogy általában nem szabad két valószinüségi változó szorzatának várható értékét ugy kiszámolni, hogy a külön-külön vett várható értékeket összeszorozzuk!

Viszont abban az esetben, ha ξ és η független valószinüségi változók, akkor szorzatuk várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával:

<u>7. tétel: Ha ξ és η függetlenek, akkor</u> $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$.

<u>Bizonyitás:</u> Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor a szokásos jelölésekkel élve:

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot h(x,y)\, dx\, dy .$$

A függetlenség miatt $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Ezért

$$M(\xi \cdot \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot h(x,y) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot y \cdot f(x) \cdot g(y) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) \, dy \; .$$

A diszkrét eset bizonyítása ugyanezzel a gondolatmenettel végezhető el, csak integrálok helyett szummákkal kell dolgozni. ■

A kapott formulák segítségével könnyen kiadódik a következő tétel.

8. tétel: Ha $\zeta = \xi + \eta$, akkor $M(\zeta) = M(\xi) + M(\eta)$.

A tétel azt mondja, hogy két valószínüségi változó összegének várható értéke a várható értékek összegével egyenlő.

Bizonyítás: Ha ξ és η együttes eloszlása folytonos, akkor

$$M(\xi + \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) \cdot h(x,y) \, dx \, dy =$$

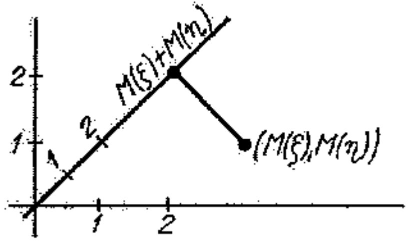
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot h(x,y) \, dx \, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(x,y) \, dx \, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \, dy \right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \, dx \right) dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y) \, dy = M(\xi) + M(\eta).$$

A diszkrét eset levezetése ugyanígy történhet, csak integrálok helyett szummákkal kell dolgozni.■

Az $M(\xi+\eta) = M(\xi) + M(\eta)$ formula szemlélet alapján is ellenőrizhető: A $\xi + \eta$ valószínűségi változó eloszlását ugy kapjuk meg, hogy ξ és η együttes eloszlását a megfelelő módon skálázott 45°-os egyenesre vetitjük. Ezért $\xi + \eta$ eloszlásának sulypontját, azaz a $\xi + \eta$ valószinüségi változó várható értékét ugy kapjuk meg, hogy az együttes eloszlás sulypontját, azaz az $(M(\xi), M(\eta))$ pontot a 45°-os egyenesre vetitjük. A skálázás választása miatt ennél a vetitésnél az $(M(\xi), M(\eta))$ pont az $M(\xi) + M(\eta)$ pontba vetitődik. Ezért $\xi + \eta$ várható értéke valóban $M(\xi) + M(\eta)$-val egyenlő.



168. ábra

4. Nagy számok erős törvénye

A nagy számok erős törvényének kimondása előtt egy példával illusztráljuk, hogyan juthatunk független, azonos eloszlásu valószinüségi változók végtelen sorozatához. Képzeljük el, hogy végtelen sok egyforma tipusu villanykörténk van, és ezeket egymástól függetlenül használjuk addig, amig ki nem égnek. Világos, hogy a körték élettartama valószinüségi változó. Jelöljük ξ_i-vel az i-ik körte élettartamát ($i = 1, 2, \ldots$). Mivel egymástól függetlenül használjuk a körtéket, a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószinüségi változókat függetleneknek kell tekintenünk. Viszont a körték ugyanolyan tipusuak, s igy élettartamukat ugyanazzal az eloszlással kell leirnunk. Ezért $\xi_1, \xi_2, \ldots$ egyforma eloszlásunak tekintendő.

Vegyük független, azonos eloszlásu valószinüségi változók egy végtelen sorozatát: $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Két eset lehet:

1. eset: a közös eloszlásnak nincs várható értéke,

2. eset: a közös eloszlásnak van várható értéke, amit m-mel jelölünk.

Egy valószinüségi változó véletlentől függő számot jelent. Ezért a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ sorozat véletlentől függő számsorozatot jelent.

A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószinüségi változók számtani közepeiből képzett

$$\xi_1, \quad \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{3}, \quad \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4}{4}, \ldots$$

sorozat is véletlentől függő számsorozatot jelent. Ez a véletlentől függő sorozat vagy korlátos, vagy nem. Tehát

$$\text{"a } \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots) \text{ sorozat korlátos"}$$

kijelentés egy esemény. Ha valaki megad egy konkrét számot, akkor a

$$\text{" } \lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \text{ létezik és egyenlő a megadott számmal"}$$

kijelentés is véletlentől függően vagy bekövetkezik, vagy nem. Tehát ez is esemény.

<u>Tétel:</u>

<u>Az 1. esetben, tehát ha a közös eloszlásnak nincs várható értéke, akkor</u>

$$P\left(\text{a } \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \; (n=1,2,\ldots) \text{ sorozat korlátos} \right) = 0,$$

<u>vagyis majdnem biztos, hogy a számtani közepek sorozata nem korlátos.</u>

<u>A 2. esetben, amikor a közös eloszlás várható értéke</u> m,

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = m \right) = 1 ,$$

<u>vagyis majdnem biztos, hogy a számtani közepek sorozata a közös eloszlás várható értékéhez konvergál.</u>

Ezt a tételt a nagy számok erős törvényének nevezik. Jelentőségét a bizonyítás után fogjuk megbeszélni. Akit a bizonyítás nem érdekel, a bizonyítást kihagyhatja, de a tétel jelentőségét feltétlenül értse meg! Később gyenge törvényről is lesz szó, majd akkor érthetjük meg az erős és gyenge szavak használatának jogosságát.

Bizonyítás:

1. A bizonyításban szó lesz olyan valószínűségi változóról, mely a $+\infty$ értéket is felveheti. Ez annyi változtatást jelent az eddig tanultakhoz képest, hogy az ilyen valószínűségi változó eloszlását a $(+\infty)$-nel bővített számegyenesre kell kenni, és a $(+\infty)$-nel ugy kell számolni, ahogy azt a józan eszünk is diktálja.

2. Csak a 2. állítás bizonyításával foglalkozunk. A bizonyítás egyszerüsítése céljából feltesszük, hogy a fent említett közös eloszlásnak nemcsak várható értéke létezik, hanem a várható értéktől vett eltérés második, harmadik illetve negyedik hatványának várható értéke is véges:

$$c_2 = M\left(\left|\xi_i - m\right|^2\right) < \infty, \quad M\left(\left|\xi_i - m\right|^3\right) < \infty,$$

$$c_4 = M\left(\left|\xi_i - m\right|^4\right) < \infty.$$

Ha például a ξ_i-k közös eloszlása véges intervallumra koncentrálódik, akkor ez a pótlólagos feltevésünk teljesül.

3. Láttuk, hogy két valószínűségi változó összegének várható értéke egyenlő a tagok várható értékének összegével. Ebből persze következik, hogy véges sok valószínűségi változó összegének várható értéke is egyenlő a tagok várható értékének összegével. Viszont végtelen sok tagra már nem mondhatjuk el ugyanezt. Általában $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$ -ből nem következik, hogy $M(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\eta_i)$. Viszont be lehet bizonyítani, hogy ha az η_i valószínűségi változók nem negativak, akkor $\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$-ből következik, hogy $M(\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} M(\eta_i)$. Ezt nem bizonyítjuk, de fel fogjuk használni.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = m$ igazolásához elég azt belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\xi_1 - m) + \ldots + (\xi_n - m)}{n} = 0.$$ $\xi_1 - m, \ \xi_2 - m, \ldots$ függ-

getlen, azonos eloszlású valószinüségi változók, melyek várható értéke 0. Ezért az állítást elegendő csak az $m = 0$ speciális esetre bizonyitani.

5. Feltételezzük, hogy $m = 0$. Ekkor azt kell bebizonyitani, hogy

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Ennek belátásához elegendő azt megmutatni, hogy alkalmasan választott pozitiv k kitevőnél

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)^k < \infty\right) = 1,$$

hiszen ha egy sor konvergens, akkor a sor n-ik tagja 0-hoz tart ($n\to\infty$), és $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)^k = 0$-ból $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} = 0$ már következik, ha k pozitiv.

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)^k < \infty\right) = 1$$

egyenértékü azzal, hogy

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)^k = \infty\right) = 0.$$

Ennek belátásához pedig elég azt megmutatni, hogy az

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)^k$$

képlettel értelmezett valószinüségi változó várható értéke létezik. Ugyanis ha $P(\eta = \infty) \neq 0$ lenne, akkor η eloszlásának sulypontja, azaz várható értéke sem lehetne véges.

6. A bizonyitás 6. része annak belátásával foglalkozik, hogy $M(\eta) < \infty$ teljesül, ha például $k = 4$. η egy nem negativ tagokból álló végtelen sorral van értelmezve. A bizonyitás 3. pontjában

mondottak szerint az $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \right)^4$ valószinüségi változó várható értékét a tagok várható értékének összegeként számolhatjuk ki:

$$M(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} M \left(\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \right)^4 \right).$$

$\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \right)^4$ várható értékének meghatározása céljából végezzük el a 4-ik hatványra való emelést. $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ 4-ik hatványra való emelésnél a következő tipusu tagok lépnek fel:

1. ξ_i^4 ,
2. $\xi_i^3 \cdot \xi_j$ $(i \neq j)$,
3. $\xi_i^2 \cdot \xi_j^2$ $(i \neq j)$,
4. $\xi_i^2 \cdot \xi_j \cdot \xi_k$ $(i \neq j,\ j \neq k,\ i \neq k)$,
5. $\xi_i \cdot \xi_j \cdot \xi_k \cdot \xi_\ell$ $(i, j, k, \ell$ mind különböző).

A 2., 4. és 5. tipusu tagok várható értékét a valószinüségi változók függetlensége miatt szorzatként számolhatjuk, és $m = 0$ miatt ezen szorzatok mindegyikében fellép tényezőként a 0. Igy a 2. 4. és 5. tipusu tagok várható értéke 0-val egyenlő:

$$M(\xi_i^3 \cdot \xi_j) = M(\xi_i^3) \cdot \underbrace{M(\xi_j)}_{=0} = 0,$$

$$M(\xi_i^2 \cdot \xi_j \cdot \xi_k) = M(\xi_i^2) \cdot \underbrace{M(\xi_j)}_{=0} \cdot \underbrace{M(\xi_k)}_{=0} = 0,$$

$$M(\xi_i \cdot \xi_j \cdot \xi_k \cdot \xi_\ell) = \underbrace{M(\xi_i)}_{=0} \cdot \underbrace{M(\xi_j)}_{=0} \cdot \underbrace{M(\xi_k)}_{=0} \cdot \underbrace{M(\xi_\ell)}_{=0} = 0.$$

Egy 1. tipusu tag várható értéke c_4-gyel egyenlő:

$$M(\xi_i^4) = c_4 .$$

Egy 3. tipusu tag várható értékét a függetlenség miatt szorzatként számolhatjuk:

$$M(\xi_i^2 \cdot \xi_j^2) = M(\xi_i^2) \cdot M(\xi_j^2) = c_2 \cdot c_2 = c_2^2 .$$

1. tipusu tagból n darab van, hiszen az i index 1-től n-ig futhat. 3. tipusu tagból $3 \cdot n \cdot (n-1)$ darab van, ugyanis a 4-ik hatványra való emelés egy 4 tényezős szorzatot jelent:

$$(\xi_1 + \ldots + \xi_n)^4 =$$

$$= (\xi_1 + \ldots + \xi_n)(\xi_1 + \ldots + \xi_n)(\xi_1 + \ldots + \xi_n)(\xi_1 + \ldots + \xi_n).$$

Amikor a zárójelek felbontásával ezt a szorzatot összeggé alakitjuk át, akkor ugy kaphatunk 3. tipusu tagot, hogy két-két zárójelben ugyanolyan indexü tagot választunk. Ha i-vel azt az indexet jelöljük, amilyen indexü tagot az első zárójelből választunk, akkor i 1-től n-ig futhat. Ez n lehetőséget ad. 3-szorozza a lehetőségek számát, hogy a másik három zárójel közül melyikből választunk még i indexü tagot. Ha az i indexet már kiválasztottuk, akkor a j számára $n-1$ lehetőség marad, hiszen j is 1-től n-ig futhat, de i-vel nem lehet egyenlő. Mindezek alapján

$$M\left(\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}\right)^4\right) = \frac{1}{n^4} \cdot \left(n \cdot c_4 + 3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot c_2^2\right) =$$

$$= \frac{c_4}{n^3} + \frac{3 \cdot c_2^2}{n^2} \cdot \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{c_4}{n^2} + \frac{3 \cdot c_2^2}{n^2} = \frac{c}{n^2}, \quad \text{ahol } c = c_4 + 3 \cdot c_2^2 .$$

Ezért

$$M(\eta) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} .$$

Közismert, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, így sikerült bebizonyítanunk, hogy $M(\eta) < \infty$. ■

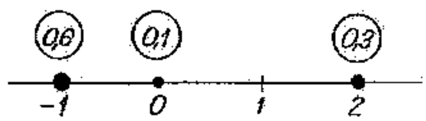
A nagy számok erős törvénye alapján azt mondhatjuk, hogy ha egy valószínűségi változónak van várható értéke, akkor a valószínűségi változóra sok független kísérletet végezve a megfigyelt értékek átlaga körülbelül a várható értékkel egyenlő. Ha pedig nincs várható értéke a valószínűségi változónak, akkor a megfigyelt értékek átlaga nem mutat ilyen stabilitást, hiszen a kísérletszám növekedtével az átlag előbb-utóbb minden korlátos intervallumban kibujik.

Tehát ha egy valószínűségi változó eloszlását sikerült kieszelnünk, akkor a várható értéket definiáló szumma vagy integrál kiszámolása után meg tudjuk jósolni, hogy sok kísérletet végezve a megfigyelt értékek átlaga hogyan fog viselkedni.

A következő pontban ki fogjuk számolni a tanult nevezetes eloszlások várható értékét, utána pedig néhány feladatban próbáljuk érzékeltetni, hogyan lehet a várható érték fogalmát alkalmazni a modellalkotáskor.

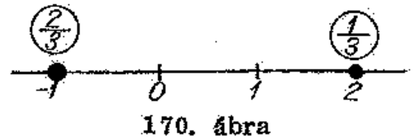
Megjegyzések:

1. A várható értéket jobb lenne átlagértéknek nevezni. Ugyanis a várható érték elnevezés félrevezető: sokszor a legvalószínűbb értékre asszociálnak belőle, ami általában különbözik a várható értéktől. Például a



169. ábra

eloszlás legvalószínűbb értéke -1, a várható értéke pedig 0. Sőt, ha ξ eloszlása



170. ábra

akkor várható értéke 0, holott ξ fel sem veszi a 0 értéket.

2. Az átlagot számtani középnek is hívják. Latinul a "közép" medians, innen származik a várható érték jelölésére az M betü.

3. Heurisztikusan eléggé hihető, és be is lehet bizonyítani, a következőket: ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlásu valószinüségi változók, és a közös eloszlásnak nincs várható értéke, de az eloszlás valamely ponttól balra eső részének van sulypontja (mindegy, hogy melyik ponttól balra eső részt vesszük), akkor

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = \infty\right) = 1,$$

tehát majdnem biztos, hogy az átlagok sorozata minden határon tul nő a kisérletszám növekedtével, azaz $+\infty$-hez tart. Ha például $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlásu, nem negativ valószinüségi változók, és a közös eloszlásnak nincs várható értéke, akkor nagy n esetén a $\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ átlag is nagy lesz.

5. Nevezetes eloszlások várható értéke

A most következő állitások levezetésénél az egyes lépések magyarázata a képletsor után áll.

1. __Állitás: Az__ n__-edrendü__ p __paraméterü binomiális eloszlás várható értéke__ $n \cdot p$.

__Bizonyitás:__

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!(n-1-\ell)!} p^{\ell} \cdot (1-p)^{n-1-\ell} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} = n \cdot p \cdot (p+(1-p))^{n-1} = n \cdot p.$$

Az első lépésnél kihasználtuk, hogy $k = 0$ -ra a szummázandó tag 0-val egyenlő és ezért elhagyható, továbbá a binomiális együtthatót írtuk fel faktoriálisokkal. A második lépésnél kiemeltük $n \cdot p$-t és egyszerűsítettünk k-val. A harmadik lépésnél $k-1$ helyett ℓ-t írtunk. A negyedik lépésnél a faktoriálisokat binomiális együtthatókra váltottuk fel, az ötödik lépésnél pedig a binomiális tételt használtuk fel. ■

2. <u>Állítás: A λ paraméterű Poisson-eloszlás várható értéke</u> λ.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$$

Az első lépésnél kihasználtuk, hogy $k = 0$ -ra a szummázandó tag 0-val egyenlő és ezért elhagyható. A második lépésnél kiemeltünk $\lambda \cdot e^{-\lambda}$ -t, és egyszerűsítettünk k-val. A harmadik lépésnél $k-1$ helyett ℓ-t írtunk. A negyedik lépésnél felhasználtuk, hogy $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = e^{\lambda}$. ■

3. <u>Állítás: A p paraméterű geometriai eloszlás várható értéke</u> $\frac{1}{p}$.
Tehát ha egy p valószínűségű eseményre független kísérletsorozatot végzünk, akkor átlagosan minden $\frac{1}{p}$ - ik kísérletre következik be az esemény.

<u>Bizonyítás:</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dq} (q^k) =$$

$$= p \cdot \frac{d}{dq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = p \cdot \frac{d}{dq} \left(\frac{q}{1-q} \right) = p \cdot \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Az első lépésnél $1-p$ helyébe q-t írtunk, és kiemeltünk p-t. A második lépésnél észrevettük, hogy $k \cdot q^{k-1}$ nem egyéb mint q^k-nak q szerinti deriváltja. A harmadik lépésnél felhasználtuk, hogy ezen hatványsor esetén $|q| < 1$-re az összegzés és a deriválás sorrendje felcserélhető. A negyedik lépésnél a végtelen mértani sor összegképletét írtuk be. Az ötödik lépésnél elvégeztük a deriválást. A hatodik lépésnél egyszerűsítettünk p-vel. ■

4. Állítás: A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$.

Bizonyítás: Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye a $(-\infty, 0]$ intervallumon 0-val egyenlő, ezért a várható érték kiszámításánál csak 0-tól $(+\infty)$-ig kell integrálni:

$$\int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \lambda \cdot \left(\left[x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\,dx \right) =$$

$$= 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

Az első lépésnél kiemeltük λ-t, utána pedig parciálisan integráltunk. ■

5. Állítás: A Cauchy-eloszlásnak a várható értéke nem létezik.

Bizonyítás: A várható érték nem létezik, mert $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\,dx = \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi \cdot (1+x^2)}\,dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^\infty = \infty. \ ■$$

6. A várható érték alkalmazása a modellalkotásban

Néhány példán keresztül bemutatjuk, hogyan lehet a várható érték fogalmát alkalmazni feladatokban.

1. feladat: (Hogyan potyázzunk?) A budapesti villamosjegy ára 1 forint. Aki jegy nélkül utazik, és ellenőrrel találkozik, köteles jegyet váltani és 50 forint büntetést fizetni.

Annak, akinek nincs bérlete, rövidebb uton érdemes potyázni, mert kicsi a valószinüsége, hogy ellenőrrel találkozik. Hosszabb ut esetén ez a valószinüség nagyobb, ezért hosszu uton nem tanácsos jegy nélkül utazni.

Nap mint nap villamoson utazunk. Jó lenne tudni, hogy hol van a kritikus határ, amelynél rövidebb utazás esetén gazdaságos, de amelynél hosszabb ut esetén veszteséges dolog jegy nélkül utazni.

A feladat a következő: alkossunk egyszerü, de a problémát minél jobban leiró modellt a jelenségről! Adjuk meg a kritikus értéket olyan mennyiségek függvényében, melyeket – ha nem volnánk becsületesek és potyázni akarnánk – ténylegesen meg tudnánk határozni. Utaljunk rá, hogy ezeket a mennyiségeket hogyan határoznánk meg.

Egy lehetséges megoldás: Legyen

$$P\text{ (két megálló között találkozom ellenőrrel)} = p,$$

ekkor

$$P\text{ (két megálló között nem találkozom ellenőrrel)} = 1-p.$$

Függetlenséget feltételezve

$$P\text{ (}n\text{ megállót utazva nem találkozom ellenőrrel)} = (1-p)^n\ ,$$

$$P\text{ (}n\text{ megállót utazva találkozom ellenőrrel)} = 1-(1-p)^n.$$

Ha az n megállót mindig becsületesen utazom, akkor a költségem minden utazásnál 1 forint. Ha potyázva utazom, akkor $(1-p)^n$ valószinüséggel 0 forintért utazok, $1-(1-p)^n$ valószinüséggel pedig 51 forintért. Ezért ebben az esetben utazási költségem várható értéke $0\cdot(1-p)^n +$ $+ 51\cdot(1-(1-p)^n) = 51 - 51\cdot(1-p)^n$.

Összevetve a "becsületes taktikát" a "potyázós taktikával" az $1 = 51 - 51\cdot(1-p)^n$ egyenletből látjuk, hogy a keresett kritikus érték:

$$n = \frac{\log \frac{50}{51}}{\log\,(1-p)}.$$

p	0,002	0,004	0,006	0,008	0,010
$\frac{\log \frac{50}{51}}{\log (1-p)}$	9,89	4,94	3,29	2,47	1,97

171. ábra

p meghatározása céljából tegyük fel, hogy egyidőben E ellenőr dolgozik a villamosokon, és V darab villamoskocsi van forgalomban. Ha feltételezzük, hogy egy kocsira egyszerre több ellenőr nem száll fel, akkor $\binom{V}{E}$ féleképpen választható ki a V darab kocsi közül az az E darab, melyen ellenőr van. Ha ezek a kombinációk egyformán valószínűek, és feltételezzük, hogy egy ellenőr két megálló közt végig tud vizsgálni egy egész villamoskocsit, akkor annak a valószínűsége, hogy két megálló között találkozom ellenőrrel:

$$p = \frac{\binom{V-1}{E-1}}{\binom{V}{E}} = \frac{\frac{(V-1)!}{(E-1)!\,(V-E)!}}{\frac{V!}{E!\,(V-E)!}} = \frac{E}{V}.$$

Ezért p meghatározásához az ellenőrök és a villamoskocsik számát kellene kinyomoznunk. ■

Megjegyzés: A feladat megoldására természetesen más modelleket is lehet készíteni, melyek más eredményekhez vezethetnek. Érdemes meggondolni, hogy a különböző megoldások eredményei mennyire térnek el egymástól: két jó megoldásnak legalább nagyságrendileg megegyező eredményt illik adni.

Gyakorlati fontossága miatt többet foglalkozunk a Poisson-eloszlás alkalmazásaival. Emlékeztetünk, hogy ha sok, pici valószinűségű, független esemény esetén azt vizsgáljuk, hogy közülük hány következik be, akkor ez a valószinűségi változó Poisson-eloszlásúnak tekinthető valamilyen paraméterrel. Később az is kiderült, hogy a paraméter egyenlő a várható értékkel.

2. feladat: Engem egy nap átlagosan négyen szoktak telefonon felhívni. Mi a valószinűsége, hogy holnap

a) hárman hívnak fel,

b) legalább hárman hívnak fel?

c) becsüljük meg, hogy egy évben hány olyan nap van, amikor senki sem hív fel!

Megoldás: A telefonhívások száma valószínűségi változó, melyet Poisson-eloszlásunak vehetünk – a feladat szövege alapján – 4 paraméterrel. Ezért a keresett valószínűségek:

a) $\frac{4^3}{3!} e^{-4} = 0,2$,

b) $1 - \left(\frac{4^0}{0!} e^{-4} + \frac{4^1}{1!} e^{-4} + \frac{4^2}{2!} e^{-4}\right) = 0,76$,

c) Annak a valószínűsége, hogy az év egy kiszemelt napján senki sem hív fel, $\frac{4^0}{0!} e^{-4} = 0,02$. Egy évben 365 nap van, így körülbelül $365 \cdot 0,02 = 7,3$ olyan nap lesz, amikor senki sem hív fel. ■

3. feladat: Tapasztalati tény, hogy augusztus közepén az éjféli órákban tíz percenként átlagosan egy csillaghullást lehet látni Galyatetőről. Mi a valószínűsége, hogy tizenöt perc alatt két csillahullást látunk?

Megoldás: A tizenöt perc alatt lehulló csillagok száma valószínűségi változó, melyet Poisson-eloszlásunak vehetünk. (Sok hulló csillag, kicsi valószínűség, függetlenség). Ha tíz perc alatt kb. 1, akkor tizenöt perc alatt átlagosan 1,5 csillaghullás várható. Ezért az eloszlás paraméterét 1,5-nek vesszük. Így a keresett valószínűség: $\frac{(1,5)^2}{2!} e^{-1,5} =$ $= 0,25$. ■

Hasznos, ha a Kedves Olvasó kitalál egy pár rossz megoldást, és meggyőződik róla, hogy azok hibásak. Például könnyen rájön az ember azokra a gondolatmenetekre, melyek eredményeképpen $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{4}$ adódik a keresett valószínűségre.

A következő feladat példa arra, hogy a "mindennapi életben" hogyan gondolkodik az, aki jól megértette a Poisson-eloszlás jelentését.

4. feladat: Augusztus 12-én egy barátommal Indiában kirándultam. Mindketten kalapot viseltünk. Az enyém átmérője kétszer akkora volt, mint a barátomé. Gyalogutunk egy pimpóligeten vezetett keresztül. A ligetben vastagtörzsű fák tetején kb. 10 méter magasan piroslott az érett és bőséges mennyiségű pimpóbogyó. Az erdő szélén tábla állt: "Vigyázat, pimpóéréskor, azaz aug. 1. és 31. között a fákról lehulló pimpóbogyó kimoshatatlan foltot hagy a kalapokon". Mindketten elcsodálkoztunk, mert még egyikünk sem hallott pimpóerdőről és eme veszedelemről. Én ezt mondtam barátomnak: "A te kalapod négyszer akkora valószínűséggel fogja megúszni ezt a sétát, hiszen területe az enyémnek negyede". Ő ezt felelte: "Ugy tűnik, területet tudsz számolni, de a való-

szinüségszámításhoz nem sokat értesz. Lehet, hogy kijelentésed megfelel a valóságnak, de mostani ismereteid alapján megalapozatlan."

Mutassuk meg, hogyan gondolkodott a barátom! Indokoljuk meg válaszának jogosságát! Utaljunk rá, hogy a fenti mese egyes tényei hogyan jutnak szerephez a matematikai modellalkotásban!

Utmutatás: Vezessük be a következő valószinüségi változót: "ahány pimpó a kalapomra esik", és eszeljük ki az eloszlását! Gondolkodjunk el azon, hogy ezt mennyire tekinthetjük ismertnek! Végezzünk hasonló vizsgálódást a barátom kalapjával is!

Megoldás: Feladatunk szerint a pimpótermés viszonylag hosszu idő (1 hónap) alatt érik be, bizonyára többé-kevésbé egyenletesen. (Nekünk legalábbis az erdő szélén talált tábla ezt sugallta.) Igy annak a valószinüsége, hogy a mi pár órás sétánk alatt egy konkrét pimpó éppen az én kalapomra essen, nagyon pici. Viszont a leesésre érett pimpók száma a bőséges termés miatt igen nagy. A pimpók lepotyogásának függetlenségét többé-kevésbé alátámasztja az, hogy a fák magasak, törzsük vastag, és így a pimpók "önszántukból" esnek le vagy nem. Nem attól, hogy például én megbotlom és neki esem egy fának, mire a rázkódástól lezudul a fa pimpótermése. Igy elfogadható modellnek tünik azt feltételezi, hogy a kalapomra hulló pimpók száma, mint valószinüségi változó, Poisson-eloszlásu. De milyen paraméterrel? A paraméter, azaz a várható érték tapasztalatok birtokában ismertnek vehető, de kijelentésem idején én nem rendelkeztem semmi tapasztalattal a pimpóerdőkkel kapcsolatban (még sosem hallottunk pimpóerdőről). Viszont a józan ész számára világos, hogy négyszer akkora területre átlagosan négyszer annyi pimpó várható, tehát ha barátom paramétere λ, akkor az enyém 4λ.

A meguszás nyilván azt jelenti, hogy nem esik pimpó a kalapra. Vagyis én a szóban forgó két Poisson-eloszlásnak a 0-hoz tartozó valószinüségeiről állítottam, hogy arányuk 4-gyel egyenlő, azaz $\dfrac{e^{-\lambda}}{e^{-4\lambda}} = 4$. Ez $\lambda = \dfrac{\ln 4}{3} = 0{,}46$ esetén teljesül is. Tehát nekem is lehet igazam, de λ-ra vonatkozó ismereteim hiányában ezt akkor nem tudhattam. ■

5. feladat: Fogadjuk el, hogy

1970 óta Földünk légi forgalma az évszakoktól függetlenül "állandó szinten van",

és hogy azóta 4-szer kevesebbszer fordult elő, hogy

egy repülőszerencsétlenség után 4 héten át nem volt repülőszerencsétlenség, de az 5. héten volt,

mint ahányszor előfordult, hogy

egy repülőszerencsétlenség után 2 héten át nem volt repülőszerencsétlenség, de a 3. héten volt.

Átlagosan hány repülőszerencsétlenség történik 30 nap alatt?

Megoldás: Legyen

ξ = ahány repülőszerencsétlenség történik 1 nap alatt,
η = ahány repülőszerencsétlenség történik 30 nap alatt.

ξ és η nyilván Poisson eloszlásunak tekinthető (miért?), és η várható értéke ξ várható értékének 30-szorosa. Ezért ξ eloszlásának paraméterét λ-val jelölve $M(\eta) = 30 \cdot \lambda$. Legyen

$$P\text{ (egy kiszemelt napon nincs repülőszerencsétlenség)} = p.$$

λ és p között a következő kapcsolat áll fenn: $e^{-\lambda} = P(\xi = 0) = p$, azaz $\lambda = \ln \frac{1}{p}$. A feladat η várható értékét kérdezi, amihez elég lenne p-t meghatározni. Az egymásutáni napok repülőszerencsétlenségeinek folyamatát függetlennek tekintve:

$$P\begin{pmatrix}\text{egy repülőszerencsétlenség után 4 héten át nincs,}\\ \text{de az 5. héten van repülőszerencsétlenség}\end{pmatrix} = \\ = (p^7)^4\,(1-p^7),$$

$$P\begin{pmatrix}\text{egy repülőszerencsétlenség után 2 héten át nincs,}\\ \text{de a 3. héten van repülőrencsétlenség}\end{pmatrix} = \\ = \left(p^7\right)^2 \left(1-p^7\right).$$

A feladat szövete alapján $4 \cdot \left(p^7\right)^4 \cdot \left(1-p^7\right) = \left(p^7\right)^2 \cdot \left(1-p^7\right)$, innen $p = \sqrt[7]{\frac{1}{2}}$, és ebből $M(\eta) = 30 \cdot \lambda = 30 \cdot \ln \frac{1}{p} = 30 \cdot \ln \sqrt[7]{2} =$ $= 2,97$. ∎

6. feladat: A bergengóc villanykörték izzószálában szennyeződésként kén is van. Véletlentől függ, hogy mennyi. (Bergengóciában nagy a rumli.) Tapasztalatunk szerint az izzószálban lévő kén grammokban mért mennyisége 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. Az izzószálban lévő kén mennyisége hatással van a villanykörték élettartamára. A bergengóc villanykörték olyanok, hogy ha x gramm kén van az izzószálban, akkor az izzószál élettartama napokban kifejezve x paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Vizsgáljuk meg, hogy érdemes-e MADE IN BERGENGOCIA feliratu körtéket venni a boltokban!

Megoldás: Tekintsünk egy bergengóc villanykörtét és legyen

$\xi =$ ahány gramm kén van az izzószálban,

$\eta =$ a villanykörte élettartama.

Meg kellene határozni η eloszlását. Ehhez elég lenne meghatározni ξ és η együttes eloszlását. A feladat szövege szerint ξ sürüségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 2\, e^{-2x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

η-nak a $\xi = x$ feltétel melletti feltételes sürüségfüggvénye:

$$g(y \mid \xi = x) = \begin{cases} x\, e^{-xy}, & \text{ha } y > 0, \\ 0, & \text{ha } y < 0. \end{cases}$$

Igy az együttes sürüségfüggvény:

$$h(x,y) = f(x) \cdot g(y \mid \xi = x) = \begin{cases} 2\, e^{-2x}\, x e^{-xy} = 2x e^{-x(2+y)}, & \text{ha } x,y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ebből η sürüségfüggvénye:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\,dx = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} 2\,x\,e^{-x\,(2+y)}dx = \frac{2}{(2+y)^2}, & \text{ha } y > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

η-nak nincs várható értéke, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot g(y)\,dy = \int_0^{\infty} \frac{2y}{(2+y)^2}\,dy \geqslant \int_2^{\infty} \frac{2y}{(2+y)^2}\,dy \geqslant \int_2^{\infty} \frac{1}{2+y}\,dy =$$

$$= \Big[\ln\,(2+y)\Big]_2^{\infty} = \infty$$

A második egyenlőtlenségnél azt használtuk fel, hogy $y > 2$ esetén $\frac{2y}{(2+y)^2} > \frac{1}{2+y}$. η nem negativ, igy ha sok bergengóc villanykörtét vizsgálunk, akkor a Nagy számok erős törvénye c. pont végén tett 3. megjegyzésünk szerint az átlagos élettartamuk nagy lesz. Kár, hogy hiánycikk ez a villanykörte tipus. ■

XI. SZÓRÁS, MEDIÁN

1. Pontrendszer szórásnégyzete és szórása

n darab $z_1, \dots, z_n$ valós szám n darab (nem feltétlenül különböző) pontot jelöl ki a számegyenesen. A pontrendszer elhelyezkedéséről bizonyos értelemben képet ad a $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$ átlag. Az átlagérték megmutatja, hogy melyik az a szám, amely körül a pontrendszer elhelyezkedik.

Könnyű elképzelni olyan pontrendszert, mely az átlag köré tömörülő pontokból áll, és olyat is, melynek pontjai jobban szét vannak szórva az átlag két oldalán. A szóródás mérőszámául szolgálhat a pontoknak az átlagtól való távolságainak az átlaga: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |z_i - \bar{z}|$. Ugyanis ha a pontrendszer az átlag köré tömörül, akkor a $|z_i - \bar{z}|$ távolságok kicsik, ha pedig a pontok szétszórtan helyezkednek el, akkor a $|z_i - \bar{z}|$ távolságok nagyok.

Sok matematikai probléma esetén az abszolut érték kezelése nehézkes. Kényelmesebb, ha a $z_i - z$ különbségeknek nem az abszolut értékét, hanem a négyzetét vesszük, és ezek átlagát tekintjük a szóródás mérőszámául: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$. Ez persze a szóródás másik kiértékelése, hiszen általában $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |z_i - \bar{z}| \neq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$. Önkényes, hogy ki hogyan értékeli ki a szóródást. A fontos csak az, hogy ha a szóródás nagy, akkor a szóródást mutató számadat is nagy legyen, ha pedig kicsi a szóródás, akkor kicsi. Tekintve, hogy a négyzetre emelés monoton művelet (nagyobb távolság négyzete is nagyobb, kisebbé kisebb) eme kívánalomnak eleget tesz az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$ számérték.

A $z_1, \dots, z_n$ számok által kijelölt pontrendszer szórásnégyzetének nevezzük az $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2$ számértéket. Tekintve, hogy a gyökvonás is monoton művelet, a szóródás mérőszámául szolgálhat ennek négyzetgyöke is: $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2}$. Ezt szórásnak nevezzük.

Megjegyzések:

1. Általában $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2} \neq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(z_i - \bar{z})^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |z_i - \bar{z}|$,

hiszen a gyökvonás és az átlagolás sorrendje nem cserélhető fel.

2. A szórásnégyzet a szórás négyzete, ezért hívjuk így.

2. Valószínűségi változó szórásnégyzete és szórása

Tekintsünk egy eloszlást, azaz kenjünk szét festéket a számegyenesen. A szétkent festéknek mint tömeggel rendelkező anyagnak valamely c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka ismert, szemléletes fogalom. Értéke

$$\begin{cases} \sum_i (x_i - c)^2 \cdot p_i, & \text{ha az eloszlás diszkrét,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 \cdot f(x)\, dx, & \text{ha az eloszlás folytonos,} \\ \sum_i (x_i - c)^2 \cdot p_i + \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 \cdot f(x)\, dx, & \text{ha az eloszlás kevert.} \end{cases}$$

A tehetetlenségi nyomaték a felírt sorok és integrálok értékétől függően véges vagy végtelen. Mint tudjuk, kitüntetett szerepe van a sulypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéknak: ez kisebb, mint bármely más pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

Egy valószínűségeloszlásnak az eloszlás várható értékére (azaz sulypontjára) vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát - feltéve, hogy ez a nyomaték véges - az eloszlás szórásnégyzetének, ennek négyzetgyökét pedig szórásnak nevezzük. Ha a tehetetlenségi nyomaték végtelen, vagy pedig az eloszlásnak nincs sulypontja, akkor a szórásnégyzetet és a szórást nem értelmezzük. Egy ξ valószinüségi változó eloszlásának szórásnégyzetét illetve szórását a <u>valószinüségi változó szórásnégyzetének illetve szórásának</u> nevezzük, és $D^2(\xi)$-vel, illetve $D(\xi)$-vel jelöljük. (Szóródás lantinul: dispersio, innen a D betü.) Tehát

$$D^2(\xi) = \begin{cases} \sum_i (x_i-m)^2 \cdot p_i\,, \quad \text{ahol} \quad m = \sum_i x_i p_i, & \text{ha az eloszlás diszkrét,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot f(x)\,dx, \quad \text{ahol} \quad m = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx, & \text{ha az eloszlás folytonos,} \\ \sum_i (x_i-m)^2 \cdot p_i + \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 \cdot f(x)\,dx, \quad \text{ahol} \quad m = & \\ = \sum_i x_i p_i + \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx, & \text{ha az eloszlás kevert,} \end{cases}$$

feltéve, hogy az $m = M(\xi)$ várható érték létezik, és a $D^2(\xi)$-t definiáló sor illetve integrál értéke véges.

Vegyük észre, hogy egy m várható értékü ξ valószinüségi változó szórásnégyzete a $(\xi - m)^2$ valószinüségi változó várható értékével egyenlő: $D^2(\xi) = M((\xi - m)^2)$.

A következő tétel valószinüségszámitási jelentéssel ruházza fel a most definiált fogalmakat. Vegyük független, azonos eloszlásu valószinüségi változóknak egy végtelen $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozatát. Két eset lehetséges:

1. eset: a közös eloszlásnak nincs szórásnégyzete,
2. eset: a közös eloszlásnak van a szórásnégyzete, melyet σ^2-tel jelölünk.

Tekintsük az első n darab valószinüségi változó megfigyelt értékéből adódó pontokat a számegyenesen. Ennek a véletlentől függő pontrendszernek a szórásnégyzete $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi}_n)^2$.

(Az $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ átlag jelölésére $\overline{\xi}$ helyett $\overline{\xi}_n$-t irtunk annak kifejezésére, hogy $\overline{\xi}_n$ az első n darab megfigyelt érték átlaga.)

Tétel:

Az 1. esetben, tehát ha a közös eloszlásnak nincs szórásnégyzete, akkor $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi}_n)^2 = +\infty\right) = 1$, vagyis majdnem biztos, hogy a megfigyelt értékekből adódó pontrendszer szórásnégyzete a kisérletszám növekedtével $(+\infty)$-hez tart.

A 2. esetben, amikor a közös eloszlás szórásnégyzete σ^2,
$P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi}_n)^2 = \sigma^2\right) = 1$, tehát majdnem biztos, hogy a megfigyelt értékekből adódó pontrendszer szórásnégyzete a kisérletszám növekedtével a közös eloszlás szórásnégyzetéhez tart.

Mivel a határértékképzés és a gyökvonás sorrendje felcserélhető mindaz, amit a szórásnégyzetre elmondtunk, szórásokra is átfogalmazható.

Bizonyitás: Bár a tétel 1. állitása akkor is igaz, ha a közös eloszlásnak nincsen várható értéke, bizonyitásunkban feltételezzük a várható érték létezését. Legyen $m = M(\xi_i)$ $(i = 1,2,\ldots)$. Az alábbi azonosságról bárki meggyőződhet a négyzetreemelések elvégzésével:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi}_n)^2 = (\bar{\xi}_n - m)^2.$$

A nagy számok erős törvénye szerint majdnem biztos, hogy $\bar{\xi}_n \longrightarrow m$ $(n\to\infty)$, ezért az egyenlőség jobb oldala majdnem biztosan 0-hoz tart. Ez maga után vonja, hogy az egyenlőség bal oldalán álló két átlag egyformán viselkedik $n\to\infty$ esetén. Ezért elég, ha az $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2$ átlag viselkedését vizsgáljuk. Mint emlitettük, a $(\xi_i - m)^2$ $(i = 1,2,\ldots)$ valószinüségi változók várható értéke megegyezik a ξ_i $(i = 1,2,\ldots)$ valószinüségi változók szórásnégyzetével:

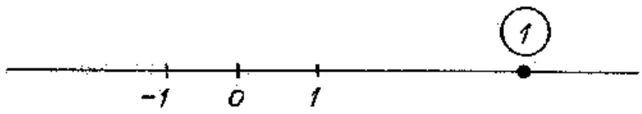
$$M\left((\xi_i - m)^2\right) = D^2(\xi_i) = \sigma^2.$$

Az 1. esetben, amikoris $(\xi_i - m)^2$-nek nem létezik várható értéke, a Nagy számok erős törvénye c. pont végén tett 3. megjegyzésünk értelmében $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2$ majdnem biztosan $(+\infty)$-hez tart $n\to\infty$ esetén. A 2. esetben, amikor $(\xi_i - m)^2$-nek a várható értéke σ^2-tel egyenlő, a nagy számok erős törvénye alapján $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - m)^2$ majdnem biztosan σ^2-hez tart $n \to \infty$ esetén. ■

A tétel alapján látjuk, hogy ha egy szórásnégyzettel rendelkező valószínűségi változóra sok független kísérletet végzünk, akkor a kísérleti eredményekből adódó pontrendszer szórásnégyzete körülbelül a valószínűségi változó szórásnégyzetével egyenlő. Ha pedig a valószínűségi változónak nincsen szórásnégyzete, akkor a kísérleti eredményekből adódó pontrendszer szórásnégyzete a kísérletszám növekedtével minden határon túl nő.

3. A szórásnégyzet és a szórás tulajdonságai

Jelöljük ξ várható értékét m-mel. Mivel $(\xi - m)^2 \geqslant 0$, $M\left((\xi-m)^2\right) = 0$ akkor és csak akkor, ha a $(\xi - m)^2 = 0$ esemény majdnem biztos. Ez pedig annyit jelent, hogy a $\xi = m$ esemény majdnem biztos, azaz a ξ valószínűségi változó eloszlása egyetlen pontra koncentrált elfajult eloszlás. Tehát egy valószínűségi változó szórásnégyzete (és szórása) akkor és csak akkor 0, ha valószínűségi változó csak egyetlen értéket vehet fel. Ez összhangban van azzal, hogy egy test tehetetlenségi nyomatéka akkor és csak akkor 0, ha a test pontszerű:



172. ábra

Első tételünk a mechanikában Steiner-tételnek nevezett formula megfelelője, ezért mi is így fogjuk hívni.

Steiner-tétel: Ha a ξ valószínűségi változó várható értéke m, c pedig valós szám, akkor $M\left((\xi - c)^2\right) = M\left((\xi - m)^2\right) + (m-c)^2$.

Bizonyítás:

$$(\xi - c)^2 = \left((\xi - m) + (m-c)\right)^2 = (\xi - m)^2 + 2\cdot(\xi - m)\cdot(m-c) + (m-c)^2.$$

A várható értéket tagonként képezhetjük:

$$M\left((\xi-c)^2\right) = M\left((\xi-m)^2\right) + 2\cdot M\left((\xi-m)\right)\cdot(m-c) + (m-c)^2.$$

Itt a jobb oldal második tagjánál azt használtuk fel, hogy az $(m-c)$ konstans a várható értékből kiemelhető, és hogy $M(\xi-m)=0$. A harmadik tagnál pedig azt használtuk fel, hogy $(m-c)^2$ konstans, s így várható értéke önmaga. ■

A Steiner-tételnek nyilvánvaló következménye:

Steiner-egyenlőtlenség: Ha a ξ valószínűségi változó várható értéke m, c pedig valós szám, akkor $M\left((\xi-c)^2\right) \geqslant D^2(\xi)$. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha $c = m$.

Ha ξ folytonos eloszlású, és sűrűségfüggvénye f, akkor a Steiner-egyenlőtlenséget így is megfogalmazhatjuk: Ha f egy nem negatív függvény, melyre $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\cdot f(x)\,dx < \infty$ és $m = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$, akkor $\int_{-\infty}^{\infty}(x-c)^2\cdot f(x)\,dx \geqslant \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\cdot f(x)\,dx$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor állhat, ha $c = m$.

A Steiner-egyenlőtlenség érdekes összefüggést fejez ki a várható érték és a szórásnégyzet között:

Egy valószínűségi változó konstanstól vett eltérése négyzetének várható értéke akkor minimális, ha ez a konstans a valószínűségi változó várható értéke. A minimális érték pedig a szórásnégyzet.

2. tétel: Ha ξ valószínűségi változó, a és b pedig konstansok, továbbá $\eta = a\cdot\xi + b$, akkor $D^2(\eta) = a^2\cdot D^2(\xi)$, $D(\eta) = |a|\cdot D(\xi)$.

Bizonyítás: ξ várható értékét jelöljük m_1-gyel, η várható értékét jelöljük m_2-vel.

$$\eta = a\cdot\xi + b\,,$$

$$m_2 = a\cdot m_1 + b\,,$$

$$\eta - m_2 = a\cdot(\xi - m_1)\,,$$

$$(\eta - m_2)^2 = a^2 \cdot (\xi - m_1)^2 ,$$

$$M\left((\eta - m_2)^2\right) = a^2 \cdot M\left((\xi - m_1)^2\right),$$

$$D^2(\eta) = a^2 \cdot D^2(\xi) ,$$

$$D(\eta) = |a| \cdot D(\xi) . \quad \blacksquare$$

A szórásnégyzetet az alábbi tétel szerint a legkényelmesebb kiszámolni:

<u>3. tétel:</u> $\quad D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 .$

Szavakban: egy valószínűségi változó szórásnégyzete egyenlő a valószínűségi változó négyzetének várható értéke mínusz a valószínűségi változó várható értékének a négyzete.

<u>Bizonyítás:</u> $M(\xi)$ -t jelöljük m-mel:

$$(\xi - m)^2 = \xi^2 - 2 \cdot \xi \cdot m + m^2 .$$

Így

$$D^2(\xi) = M\left((\xi - m)^2\right) = M(\xi^2) - 2 \cdot M(\xi) \cdot m + m^2 =$$
$$= M(\xi^2) - m^2 . \quad \blacksquare$$

A tétel által javasolt eljárás valóban könnyen járható, mert

$$M(\xi^2) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^2 \cdot p_i & \text{diszkrét} \quad \text{esetben,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx & \text{folytonos} \quad \text{esetben,} \\ \sum\limits_i x_i^2 \cdot p_i + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx & \text{kevert} \quad \text{esetben.} \end{cases}$$

Így

$$D^2(\xi) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^2 p_i - \left(\sum\limits_i x_i p_i\right)^2 & \text{diszkrét esetben,} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx\right)^2 & \text{folytonos esetben,} \\ \sum\limits_i x_i^2 p_i + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,dx - \left(\sum\limits_i x_i p_i + \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx\right)^2 & \text{kevert esetben.} \end{cases}$$

A szórást pedig úgy szokás kiszámolni, hogy meghatározzuk a szórásnégyzetet, majd ebből gyököt vonunk.

Példaként meghatározzuk a binomiális eloszlás szórásnégyzetét és szórását.

Állítás: Ha ξ n-edrendű p paraméterű, binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor szórásnégyzete $np(1-p)$, szórása $\sqrt{np(1-p)}$.

Bizonyítás:

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= n \cdot p \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \cdot \binom{n-1}{\ell} \cdot p^{\ell} \cdot (1-p)^{n-1-\ell} =$$

$$= n \cdot p \cdot \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \cdot \binom{n-1}{\ell} \cdot p^{\ell} \cdot (1-p)^{n-1-\ell} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \cdot p^{\ell} \cdot (1-p)^{n-1-\ell} \right) = n \cdot p \cdot \left((n-1) \cdot p + 1 \right) =$$

$$= n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + n \cdot p.$$

Az első lépésnél elhagytuk a $k = 0$ tagot és a binomiális együtthatókat faktoriálisokkal írtuk fel. A második lépésnél kiemeltük $n \cdot p$ -t, és egyszerüsítettünk k -val. A harmadik lépésnél k helyére $(\ell+1)$-et írtunk, és a faktoriálisokat binomiális együtthatókra váltottuk fel. A negyedik lépésnél két részre bontottuk az összeget. Az ötödik lépésnél felhasználtuk, hogy az $(n-1)$-edrendü, p paraméterü binomiális eloszlás várható értéke $(n-1) \cdot p$, és hogy az eloszlás tagjainak összege 1-gyel egyenlő. Ezek alapján:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M(\xi)^2 = n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + n \cdot p - (n \cdot p)^2 = n \cdot p \cdot (1-p),$$

$$D(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}. \blacksquare$$

<u>4. tétel: Ha ξ és η független valószínüségi változók, akkor összegük szórásnégyzete egyenlő a szórásnégyzetek összegével:</u>
$D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta)$.

<u>Bizonyítás:</u> Legyen $\overline{\xi} = \xi - M(\xi)$, $\overline{\eta} = \eta - M(\eta)$. Ekkor $M(\overline{\xi}) = M(\overline{\eta}) = 0$. Független valószínüségi változók szorzatának várható értéke a várható értékek szorzatával egyenlő. Ezért $M(\overline{\xi} \cdot \overline{\eta}) = M(\overline{\xi}) \cdot M(\overline{\eta}) = 0$. Ezt felhasználva

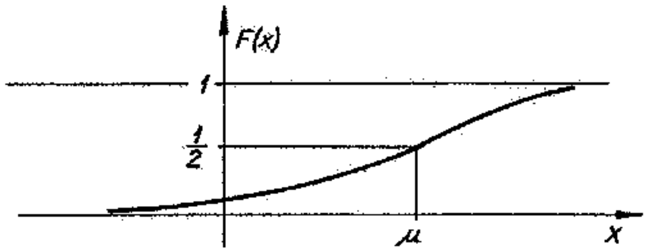
$$\begin{aligned} D^2(\xi+\eta) &= M\left((\overline{\xi}+\overline{\eta})^2\right) = M(\overline{\xi}^2 + 2 \cdot \overline{\xi} \cdot \overline{\eta} + \overline{\eta}^2) = \\ &= M(\overline{\xi}^2) + 2 \cdot M(\overline{\xi} \cdot \overline{\eta}) + M(\overline{\eta}^2) = \\ &= D^2(\xi) + 2 \cdot M(\overline{\xi}) \; M(\overline{\eta}) + D^2(\eta) = \\ &= D^2(\xi) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + D^2(\eta) = \\ &= D^2(\xi) + D^2(\eta). \; \blacksquare \end{aligned}$$

<u>Megjegyzés:</u> Szórásokra nem igaz ilyen összegzési tulajdonság. Ha például ξ és η független, azonos eloszlásu valószínüségi változók közös σ szórással, akkor $D^2(\xi + \eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) = 2\sigma^2$.
Tehát: $D(\xi + \eta) = \sqrt{2} \cdot \sigma \neq 2\sigma = D(\xi) + D(\eta)$.

4. Medián

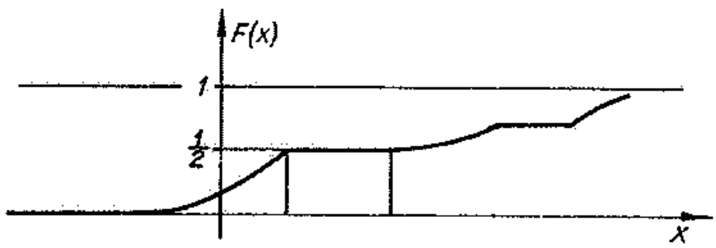
Tekintsünk egy valószínűségeloszlást. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az eloszlás folytonos. Sűrűségfüggvényét f-fel, eloszlásfüggvényét F-fel jelöljük.

Az F határértéke $(-\infty)$-ben 0, $(+\infty)$-ben 1, monoton növekedő és folytonos. Ezért található olyan μ szám, hogy $F(\mu) = \frac{1}{2}$.



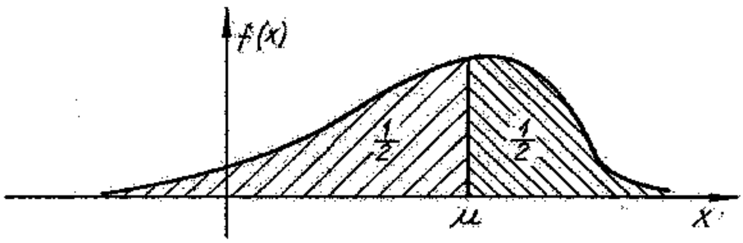
173. ábra

Ilyen μ szám több is lehet, ha F egy intervallumon $\frac{1}{2}$ -del egyenlő:



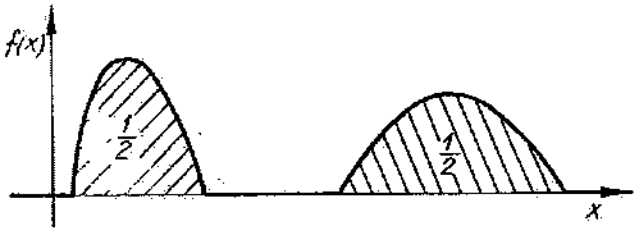
174. ábra

A μ számot a szóban forgó valószínűségeloszlás mediánjának nevezzük, ha $F(\mu) = \frac{1}{2}$. Ez annyit jelent, hogy a $(-\infty, \mu)$ intervallumra, és így persze a $(\mu, +\infty)$ intervallumra is, $\frac{1}{2}$ festékmennyiség van kenve. Tehát a medián megfelezi a festékmennyiséget: tőle balra is és jobbra is fél-fél festékmennyiség van:



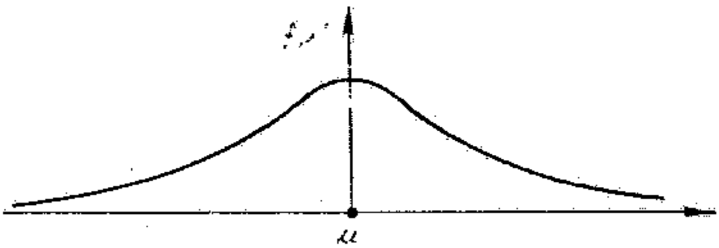
175. ábra

Nyilvánvaló, hogy a medián csak akkor nem egyértelmű, ha a sűrűségfüggvény olyan, amilyen sűrűségfüggvényt az alábbi ábra mutat:



176. ábra

Nyilvánvaló, hogy egy szimmetrikus eloszlás mediánja a szimmetriapont. Például a Cauchy-eloszlás mediánja a számegyenes 0 pontja:



177. ábra

A λ paraméterű exponenciális eloszlás mediánját az $F(\mu) = 1-e^{-\lambda\mu} = \frac{1}{2}$ egyenletből kapjuk: $\mu = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

A medián a várható értékhez hasonlóan az eloszlásnak bizonyos értelemben vett "közepe". Várható értéke nem minden folytonos eloszlásnak van. (Például Cauchy-eloszlás.) Mediánja azonban minden folytonos eloszlásnak van. Ha pedig van várható érték is, akkor a medián különbözhet a várható értéktől. Például a λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, mediánja pedig $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

Egy valószinüségi változó eloszlásának mediánját a szóban forgó valószinüségi változó mediánjának is nevezzük. A ξ valószinüségi változó mediánja tehát az a μ szám, melyre teljesül, hogy $P(\xi < \mu) = P(\xi \geqslant \mu) = \frac{1}{2}$.

Egyetlen tételt mondunk ki a mediánnal kapcsolatban:

Tétel: Ha a folytonos eloszlásu ξ valószinüségi változónak van várható értéke, c pedig valós szám, akkor a $|\xi - c|$ valószinüségi változó várható értéke akkor minimális, ha $c = \mu$, ahol μ a ξ mediánja: $M(|\xi - c|) \geqslant M(|\xi - \mu|)$.

A tételt a következőképpen is megfogalmazhatjuk. Ha f egy valószinüségeloszlás sürüségfüggvénye és $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f(x)\, dx < \infty$, továbbá μ az a szám, melyre

$$\int_{-\infty}^{\mu} f(x)\, dx = \int_{\mu}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2},$$

akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x - c| \cdot f(x)\, dx \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| \cdot f(x)\, dx .$$

Szavakban kifejezve pedig így szól a tétel: egy várható értékkel rendelkező, folytonos eloszlásu valószinüségi változó konstanstól vett eltérése abszolut értékének várható értéke akkor minimális, ha ez a konstans a valószinüségi változó mediánja.

Bizonyitás:

$$h(x, c) = |x - c|,$$

$$g(c) = \int_{-\infty}^{\infty} |x-c| \cdot f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x, c) \cdot f(x)\, dx ,$$

$$g'(c) = \frac{d}{dc}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,c)\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial c} h(x,c)\cdot f(x)\, dx,$$

$$\frac{\partial}{\partial c} h(x,c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x < c, \\ -1, & \text{ha } x > c, \end{cases}$$

$$g'(c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx - \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx \begin{cases} \leqslant 0, & \text{ha } c < \mu, \\ = 0, & \text{ha } c = \mu, \\ \geqslant 0, & \text{ha } c > \mu. \end{cases}$$

A derivált előjeléből kiolvasható, hogy a g függvény minimumhelye a $c = \mu$ pont. (A fentiek során felhasználtuk, hogy az integrálás és a deriválás sorrendje felcserélhető. Ezt ott az tette lehetővé, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\cdot f(x)\, dx < \infty$. Ennek a kérdésnek a részleteibe nem bocsátkozunk.) ■

XII. REGRESSZIÓ

1. Regressziós görbék

Legyenek ξ és η valószinüségi változók. Felmerülhet annak szükségessége, hogy megadjunk egy $y = k(x)$ függvényt, aminek segitségével ξ megfigyelt értéke alapján tippelünk η-ra: ξ megfigyelt értékét behelyettesitjük k-ba, és η-t $k(\xi)$-vel közelitjük. Például hasznos lehet, ha a Duna bécsi vizállásából konkrét számértékkel lehet tippelni a két nappal későbbi budapesti vizállásra. Az ilyen jellegü problémákat - amikor egyik valószinüségi változóból a másikra valamilyen függvény segitségével kell tippelni - regressziónak nevezzük.

Regressziós problémával már volt dolgunk. (Lásd: Feltételes eloszlás diszkrét esetben c. pont feladatát.) Most azonban folytonos eloszlást tételezünk fel, és kicsit más lesz a problémához való "hozzáállásunk".

A bécsi vizállás ismeretében nem lehet pontosan megmondani a két nappal későbbi budapesti vizállást. Ezért tippelési eljárásunktól sem lehet elvárni, hogy pontos legyen, azaz, hogy $k(\xi)$ egyenlő legyen η-val. Sőt, ha az együttes eloszlás folytonos, akkor akármilyen k függvény esetén az $\eta = k(\xi)$ esemény valószinüsége 0. (Az $\eta = k(\xi)$ eseménynek megfelelő sikbeli halmaz az $y = k(x)$ görbe. Az $\eta = k(\xi)$ esemény valószinüségét megkapjuk, ha a sürüségfüggvényt ezen a görbén mint sikbeli halmazon integráljuk. Viszont a görbe területe 0, ezért az integrál értéke is 0.) Tehát akármilyen tippelési eljárást is alkalmazunk, majdnem biztos, hogy a tippelésünk hibás lesz. Azt azonban szeretnénk elérni, hogy a tippelési eljárásunk a lehető legjobb legyen, azaz valamilyen értelemben a hiba a lehető legkisebb legyen. Attól függően, hogy a tippelés hibáját milyen értelemben minimalizáljuk, más-más tippelési eljárást kapunk.

Tegyük fel, hogy valamilyen adott k függvényt használunk a tippelésre.

1. A tippelés hibájának abszolut értéke véletlentől függ, jelöljük ezt ζ-val: $\zeta = |\eta - k(\xi)|$.

Kérdés: milyen k függvény esetén lesz a hiba abszolut értékének várható értéke minimális? Azaz milyen tippelési eljárásnál lesz – sok tippelés esetén – a hiba abszolut értékének átlaga a lehető legkisebb?

A következőképpen oldhatjuk meg a problémát. Szemlátomást $\zeta = \ell(\xi, \eta)$, ahol az ℓ kétváltozós függvényt így értelmezzük: $\ell(x,y) = |y - k(x)|$. Ezért

$$M(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x,y) \cdot h(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x,y) \cdot g(y \mid \xi = x) \cdot f(x)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |y-k(x)| \cdot g(y \mid \xi = x) dy\right) \cdot f(x)\, dx.$$

Itt az y szerinti integrálásnál x rögzített érték, így $k(x)$ is konstansnak tekintendő. Ezért a mediánról mondott tétel szerint

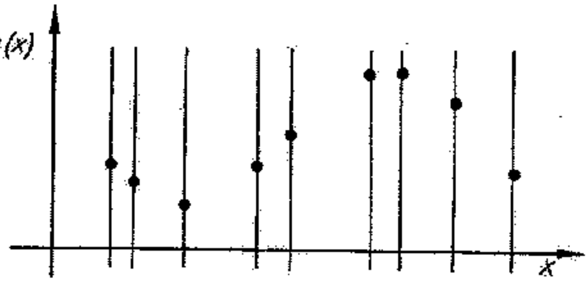
$$\int_{-\infty}^{\infty} |y-k(x)| \cdot g(y \mid \xi = x)\, dy \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} |y-\mu(x)| \cdot g(y \mid \xi = x)\, dy ,$$

ahol $\mu(x)$-szel az x helyhez tartozó feltételes eloszlás mediánját jelöltük, tehát $\mu(x)$ az az x-től függő szám, melyre

$$\int_{-\infty}^{\mu(x)} g(y \mid \xi = x)\, dy = \int_{\mu(x)}^{\infty} g(y \mid \xi = x)\, dy = \frac{1}{2} .$$

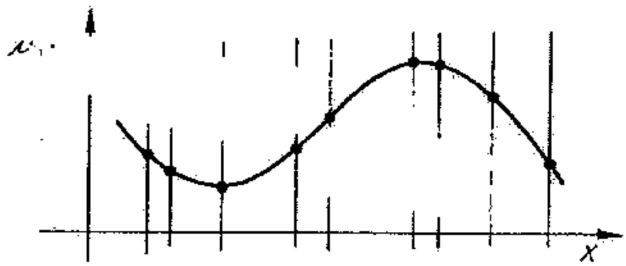
Ebből láthatjuk, hogy a hiba abszolut értékének várható értéke minimális, hogy ha $k(x) = \mu(x)$. Vagyis a feltételes eloszlások mediánjából kiadódó függvény esetén lesz a hiba abszolut értékének várható értéke minimális.

Rajzban: ha minden feltételes eloszlásnak bejelöljük a mediánját,



178. ábra

akkor kirajzolódik előttünk a hiba abszolut értékének várható értékét minimalizáló függvény grafikonja:



179. ábra

2. A tippelés hibájának négyzete is valószinüségi változó. Most ezt jelöljük ζ -val: $\zeta = (\eta - k(\xi))^2$.

Kérdés: Milyen k függvény esetén lesz a hiba négyzetének várható értéke minimális? Azaz milyen tippelési eljárásnál lesz – sok tippelés esetén – a tippelések hibája négyzetének átlaga a lehető legkisebb?

Világos, hogy most is $\zeta = \ell(\xi, \eta)$, ahol most az ℓ függvény a következő: $\ell(x,y) = (y - k(x))^2$.
Ezért:

$$M(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x,y)\cdot h(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ell(x,y)\cdot g(y \mid \xi = x)\cdot f(x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(y-k(x)\right)^2\cdot g(y \mid \xi = x)\,dy\right)\cdot f(x)\,dx\ .$$

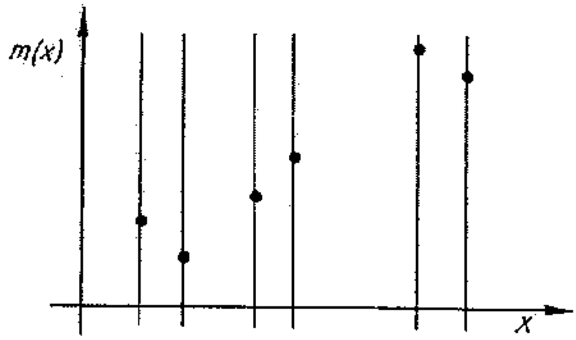
A feltételes eloszlások szerinti integrálásnál x rögzített érték, ezért $k(x)$ konstansnak tekintendő. Ezért a Steiner-egyenlőtlenség szerint

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(y-k(x)\right)^2 \cdot g(y \mid \xi = x)\, dy \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(y-m(x)\right)^2 \cdot g(y \mid \xi = x)\, dy,$$

ahol most $m(x)$-szel az x helyhez tartozó feltételes eloszlás várható értékét jelöltük, tehát $m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot g(y \mid \xi = x)\, dy$.

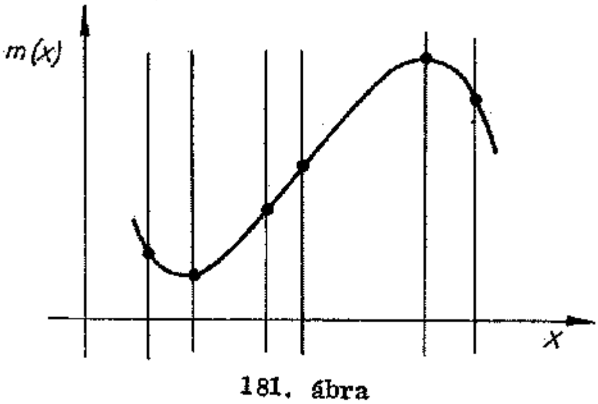
Az x helyhez tartozó feltételes eloszlás várható értékét η-nak a $\xi = x$ feltételre vonatkozó feltételes várható értékének nevezzük, és $M(\eta \mid \xi = x)$-szel jelöljük. A feltételes eloszlások várható értékéből kiadódó m függvényt pedig η-nak ξ-re vonatkozó regressziós görbéjének szokás nevezni.

Rajzban így kaphatjuk meg a regressziós görbét. Minden feltételes eloszlásnak bejelöljük a várható értékét:



180. ábra

A bejelölt pontokból kirajzolódik a regressziós görbe grafikonja:

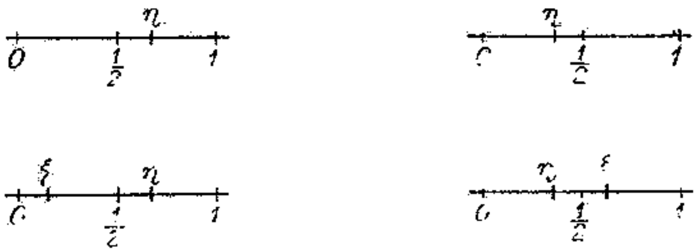


181. ábra

Az elmondottakból következik, hogy a tippelés hibája négyzetének várható értéke akkor minimális, ha a regressziós görbét használjuk a tippeléshez.

Nézzük az alábbi feladatot:

Feladat: Válasszunk a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlás szerint egy pontot, és jelöljük η -val. Az η pont két részre osztja a $[0,1]$ intervallumot. E két rész közül a nagyobbikban ugyancsak egyenletes eloszlás szerint válasszunk egy másik pontot is, ez legyen a ξ pont.



182. ábra

Tippeljünk ξ -ből η -ra a most tanultak szerint! Tehát a második pont helyzetének ismeretében tippeljünk arra, hogy hol volt az első!

Megoldás: A feladat szövege alapján az eddigi jelöléseinknek megfelelően:

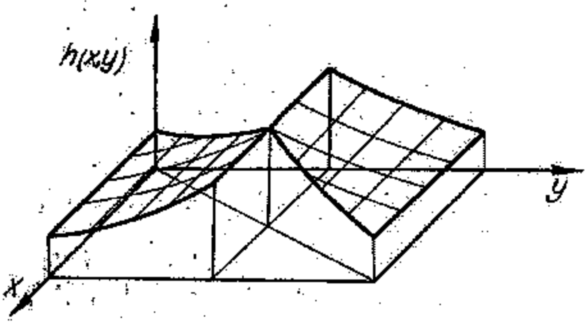
$$g(y)=\begin{cases}1, & \text{ha } 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{egyébként},\end{cases} \qquad f(x\mid \eta=y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-y}, & \text{ha } 0\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2} \text{ és } y\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{y}, & \text{ha } \dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1 \text{ és } 0\leqslant x\leqslant y,\\ 0 & \text{egyébként}.\end{cases}$$

Az együttes sűrűségfüggvény is ugyanez a függvény, mert

$$h(x,y) = g(y)\cdot f(x\mid \eta = y) = f(x\mid\eta = y),$$

és most $g(y) = 1$.

A h függvény grafikonja így néz ki:

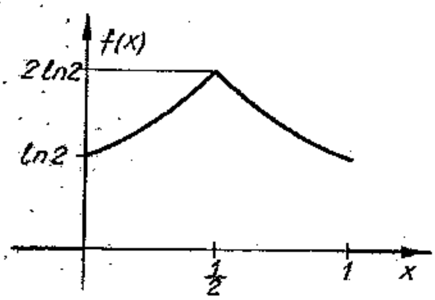


183. ábra

Ebből ξ sűrűségfüggvényére ezt kapjuk:

$$f(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x \frac{dy}{1-y} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dy}{y} = -\ln(1-x) - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2}{1-x}, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{1-y} + \int\limits_x^1 \frac{dy}{y} = -\ln\frac{1}{2} - \ln x = \ln\frac{2}{x}, & \text{ha } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Tehát a másodiknak választott pont sűrűségfüggvénye így néz ki:



184. ábra

η feltételes sűrűségfüggvényét a $g(y \mid \xi = x) = \frac{h(x,y)}{f(x)}$ képletből számoljuk ki. Ezt kapjuk:

$$g(y \mid \xi = x) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\ln \frac{2}{1-x}} \cdot \dfrac{1}{1-y}, & \text{ha } 0 < y < x, \\ \dfrac{1}{\ln \frac{2}{1-x}} \cdot \dfrac{1}{y}, & \text{ha } \frac{1}{2} < y < 1, \\ 0 & \text{egyéb } y \text{ értékekre} \end{array}\right\} & 0 < x < \frac{1}{2} \text{ esetén}, \\ \left.\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\ln \frac{2}{x}} \cdot \dfrac{1}{1-y}, & \text{ha } 0 < y < \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{\ln \frac{2}{x}} \cdot \dfrac{1}{y}, & \text{ha } x < y < 1, \\ 0 & \text{egyéb } y \text{ értékekre} \end{array}\right\} & \frac{1}{2} < x < 1 \text{ esetén}. \end{cases}$$

1. Először a feltételes eloszlások mediánját határozzuk meg az

$$\int_{-\infty}^{\mu(x)} g(y \mid \xi = x)\, dy = \int_{\mu(x)}^{\infty} g(y \mid \xi = x)\, dy = \frac{1}{2}$$

egyenletből. $0 < x < \frac{1}{2}$ esetén ebből az

$$\frac{1}{\ln \frac{2}{1-x}} \cdot \int_{\mu(x)}^{1} \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{2}$$

egyenlet adódik, ahonnan

$$\mu(x) = e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{2}{1-x}} = \sqrt{\frac{1-x}{2}}.$$

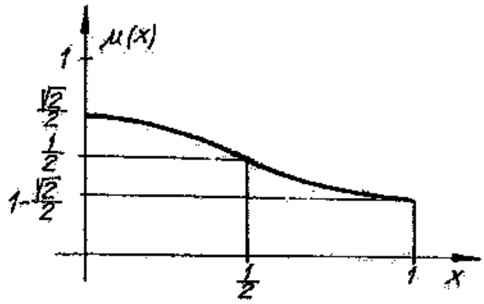
$\frac{1}{2} < x < 1$ esetén az

$$\frac{1}{\ln\frac{2}{x}}\cdot\int_0^{\mu(x)}\frac{1}{1-y}\,dy=\frac{1}{2}$$

egyenlet adódik, ahonnan

$$1-\mu(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln\frac{2}{x}}=\sqrt{\frac{x}{2}},\quad \text{azaz}\quad \mu(x)=1-\sqrt{\frac{x}{2}}\,.$$

Ennek a függvénynek a grafikonja:



185. ábra

Ezzel a függvénnyel kell ξ-ből η-ra tippelni, ha a tippelést sokszor kell elvégezni, és minden tippelésnél a hiba abszolút értékével arányos a bennünket érő veszteség.

2. A feltételes várható érték az $M(\eta\mid\xi=x)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot g(y\mid\xi=x)\,dy$ képletből:

$0<x<\frac{1}{2}$ esetén:

$$M(\eta\mid\xi=x)=\frac{1}{\ln\frac{2}{1-x}}\cdot\left(\int_0^x y\cdot\frac{1}{1-y}\,dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}y\cdot\frac{1}{y}\,dy\right)=$$

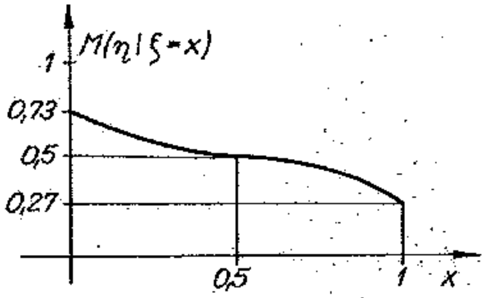
$$=\frac{-x-\ln(1-x)+\frac{1}{2}}{\ln\frac{2}{1-x}}\,.$$

$\frac{1}{2} < x < 1$ esetén:

$$M(\eta | \xi = x) = \frac{1}{\ln \frac{2}{x}} \cdot \left(\int_0^{\frac{1}{2}} y \cdot \frac{1}{1-y} \, dy + \int_x^1 y \cdot \frac{1}{y} \, dy \right) =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \ln 2 - x}{\ln \frac{2}{x}} .$$

Tehát a regressziós görbe grafikonja:

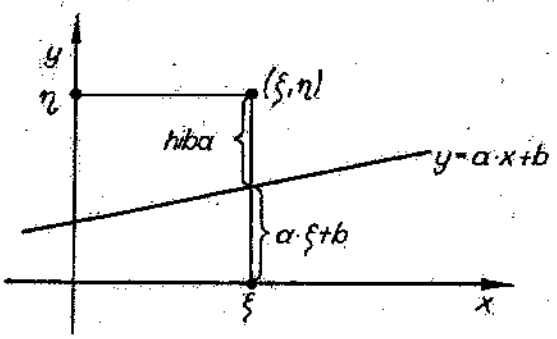


186. ábra

Ezzel a függvénnyel kell ξ -ből η -ra tippelni, ha a tippelést sokszor kell elvégezni, és minden tippelésnél a hiba négyzetével arányos veszteség ér bennünket. ■

2. Regressziós egyenes

Problémánk most is az, hogy ξ megfigyelt értékéből η -ra tippeljünk. Most azonban azt szeretnénk, hogy tippelési eljárásunk, azaz a tippeléshez használt k függvény "egyszerű" legyen. A "legegyszerűbb" függvények a lineáris függvények, vagyis azok, amelyeknek grafikonja egyenes. Ezért most $k(x) = a \cdot x + b$ alakú függvényt fogunk tippelésre használni: η -t $k(\xi) = a \cdot \xi + b$ -vel közelítjük. Persze tippelésünk hibás lesz:



187. ábra

Nyilván azt az egyenest fogjuk legszívesebben használni a tippeléshez, amelyikre a hiba valamilyen értelemben a lehető legkisebb.

Könnyen megoldható a feladat, ha a hiba négyzetének a várható értékét igyekszünk minimalizálni.

Vezessük be a következő jelöléseket: $M(\xi) = m_1$, $M(\eta) = m_2$, $D^2(\xi) = \sigma_1^2$, $D^2(\eta) = \sigma_2^2$, $\bar{\xi} = \xi - m_1$, $\bar{\eta} = \eta - m_2$. Nyilván $M(\bar{\xi}) = M(\xi) - m_1 = 0$, $M(\bar{\eta}) = M(\eta) - m_2 = 0$.

A tippelés hibája: $\zeta = \eta - (a \cdot \xi + b) = \bar{\eta} - a \cdot \bar{\xi} - b + m_2 - a \cdot m_1$.

A hiba négyzetének várható értékét így írhatjuk:

$$M(\zeta^2) = M\left((\bar{\eta} - a \cdot \bar{\xi} - b + m_2 - a \cdot m_1)^2\right).$$

A Steiner-egyenlőtlenség szerint ez nagyobb vagy egyenlő, mintha a $-b + m_2 - a \cdot m_1$ konstanst az $\bar{\eta} - a \cdot \bar{\xi}$ valószínűségi változó várható értékének megfelelően 0-val helyettesítjük:

$$M\left((\bar{\eta} - a \cdot \bar{\xi} - b + m_2 - a \cdot m_1)^2\right) \geqslant M\left((\bar{\eta} - a \cdot \bar{\xi})^2\right) =$$

$$= M(\bar{\eta}^2) - 2 \cdot a \cdot M(\bar{\xi} \cdot \bar{\eta}) + a^2 \cdot M(\bar{\xi}^2).$$

Itt

$$M(\bar{\xi}^2) = M\left((\xi - m_1)^2\right) = \sigma_1^2,$$

$$M(\bar{\eta}^2) = M\left((\eta - m_2)^2\right) = \sigma_2^2.$$

Az

$$M(\bar{\xi}\cdot\bar{\eta}) = M\Big((\xi - m_1)\cdot(\eta - m_2)\Big) =$$

$$= M(\xi\cdot\eta) - M(\xi)\cdot m_2 - m_1\cdot M(\eta) + m_1\cdot m_2 =$$

$$= M(\xi\cdot\eta) - M(\xi)\cdot M(\eta)$$

számot ξ és η <u>kovarianciájának</u> nevezzük, és $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$-val, vagy röviden c-vel jelöljük:

$$c = \mathrm{cov}(\xi,\eta) = M(\xi\cdot\eta) - M(\xi)\cdot M(\eta).$$

Ezzel így alakíthatjuk át a fenti kifejezést:

$$M(\bar{\eta}^2) - 2\cdot a\cdot M(\bar{\xi}\cdot\bar{\eta}) + a^2\cdot M(\bar{\xi}^2) = \sigma_2^2 - 2\cdot a\cdot c + a^2\cdot\sigma_1^2.$$

Ez a-nak másodfokú függvénye. Ennek minimumhelye könnyen meghatározható (például deriválással). A minimumhelyre

$$a = \frac{c}{\sigma_1^2}$$

adódik. Ezt egybevetve az $-b + m_2 - a\cdot m_1 = 0$ egyenlőségből adódó

$$b = m_2 - \frac{c}{\sigma_1^2}\cdot m_1$$

értékkel láthatjuk, hogy $M(\zeta^2)$ akkor minimális, ha az

$$y = \frac{c}{\sigma_1^2}\cdot x + m_2 - \frac{c}{\sigma_1^2}\cdot m_1$$

egyenletű egyenest használjuk a tippelésre. Ennek az egyenesnek a neve: <u>η-nak ξ-re vonatkozó regressziós egyenese.</u>

Az alábbi összefüggéssel definiáljuk ξ és η <u>korrelációs együtthatóját</u>:

$$R = R(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)\cdot D(\eta)} = \frac{c}{\sigma_1\cdot\sigma_2}.$$

Ennek segítségével a regressziós egyenes egyenlete az alábbi – nagyon könnyen megjegyezhető – alakba írható:

$$\frac{y - m_2}{\sigma_2} = R \cdot \frac{x - m_1}{\sigma_1} .$$

Innen jól látszik, hogy a regressziós egyenes átmegy az (m_1, m_2) ponton, és hogy R előjelétől függően növekszik vagy csökken.

A regressziós egyenes gyakorlati használhatóságát segíti, hogy az egyenletében szereplő konstansok $(m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2, R)$ a két valószínűségi változó együttes eloszlásából könnyen kiszámíthatók, és a kétdimenziós valószínűségi változóra végzett kísérleti eredményekből is egyszerűen közelíthetők.

A következő pontban látni fogjuk, hogy a korrelációs együttható bizonyos értelemben ξ és η kapcsolatának szorosságát méri. (Korreláció magyarul: kapcsolat. Innen az elnevezés.)

3. Korrelációs együttható

Az előző pontban láttuk, hogy ha ξ-ből η-ra $y = a \cdot x + b$ alakú függvénnyel akarunk tippelni, akkor a $\zeta = \eta - (a \cdot \xi + b)$ hiba négyzetének várható értéke akkor minimális, ha

$$a = \frac{c}{\sigma_1^2}, \qquad b = m_2 - \frac{c}{\sigma_1^2} \cdot m_1 .$$

Ezekkel az a és b értékekkel végezve a tippelést a hiba így írható

$$\zeta = \eta - a \cdot \xi - b = \eta - \frac{c}{\sigma_1^2} \cdot \xi - m_2 + \frac{c}{\sigma_1^2} \cdot m_1 =$$

$$= (\eta - m_2) - \frac{c}{\sigma_1^2} \cdot (\xi - m_1).$$

Ebből négyzetre emeléssel:

$$\zeta^2 = (\eta - m_2)^2 + \left(\frac{c}{\sigma_1^2}\right)^2 \cdot (\xi - m_1)^2 - 2\cdot\frac{c}{\sigma_1^2}\cdot(\xi - m_1)\cdot(\eta - m_2),$$

amiből a hiba négyzetének várható értéke

$$M(\zeta^2) = \sigma_2^2 + \left(\frac{c}{\sigma_1^2}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 - 2\cdot\frac{c}{\sigma_1^2}\cdot c =$$

$$= \sigma_2^2 - \frac{c^2}{\sigma_1^2} = \sigma_2^2 \cdot (1 - R^2).$$

Az $M(\zeta^2) = \sigma_2^2 \cdot (1 - R^2)$ összefüggésből több következtetést vonhatunk le:

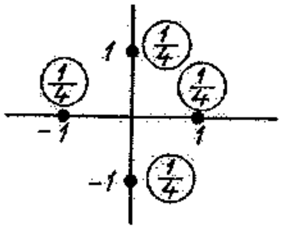
1. Mivel $M(\zeta^2) \geqslant 0$, $|R| \leqslant 1$.
2. A tippelés hibája négyzetének várható értéke annál kisebb, minél nagyobb $|R|$. Igy "az η jól tippelhető ξ-ből lineáris függvénnyel", ha $|R|$ nagy, és rosszul, ha $|R|$ kicsi.

Ilyen értelemben azt mondhatjuk, hogy a korrelációs együttható abszolut értéke arra utal, hogy ξ és η között milyen erős a "lineáris kapcsolat". A korrelációs együttható előjele pedig arra utal, hogy a regressziós egyenes növekedő vagy csökkenő függvény-e.

3. $|R| = 1$ akkor és csak akkor, ha $M(\zeta^2) = 0$. ζ^2 nem negatív valószinüségi változó, így $M(\zeta^2) = 0$ akkor és csak akkor, ha ζ majdnem biztosan 0-val egyenlő. Vagyis $|R| = 1$ akkor és csak akkor, ha η ξ-ből majdnem biztosan hiba nélkül tippelhető lineáris függvénnyel, azaz vannak olyan a és b számok, hogy az $\eta = a \cdot \xi + b$ esemény valószinüsége 1. Ez összhangban van a 2. pontban mondottakkal, mert az 1. pont szerint $|R|$ maximális értéke 1, ξ és η lineáris kapcsolata" pedig akkor a legerősebb, ha a szó igazi értelmében lineáris a kapcsolat közöttük, azaz vannak olyan a és b számok, hogy $\eta = a \cdot \xi + b$.

Végezetül megemlitjük, hogy független valószinüségi változók kovarianciája és korrelációs együtthatója 0-val egyenlő, hiszen ha ξ és η függetlenek, akkor az $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$ összefüggésből $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi \cdot \eta) - M(\xi) \cdot M(\eta) = 0$. Felhivjuk a figyelmet, hogy

$R(\xi, \eta) = 0$-ból nem következik ξ és η függetlensége. Ha például ξ és η együttes eloszlása



188. ábra

akkor $R(\xi, \eta) = 0$, de ξ és η nem függetlenek.

XIII. NORMÁLIS ELOSZLÁS

1. Moivre–Laplace-tétel
(ejtsd: moávr-láplász)

Az V. fejezetben a binomiális eloszlás határeloszlásaként megismerkedtünk a Poisson-eloszlással. Most más feltételek mellett vesszük a binomiális eloszlás határeloszlását, és ennek kapcsán jutunk egy ujabb, nagyon fontos eloszláshoz.

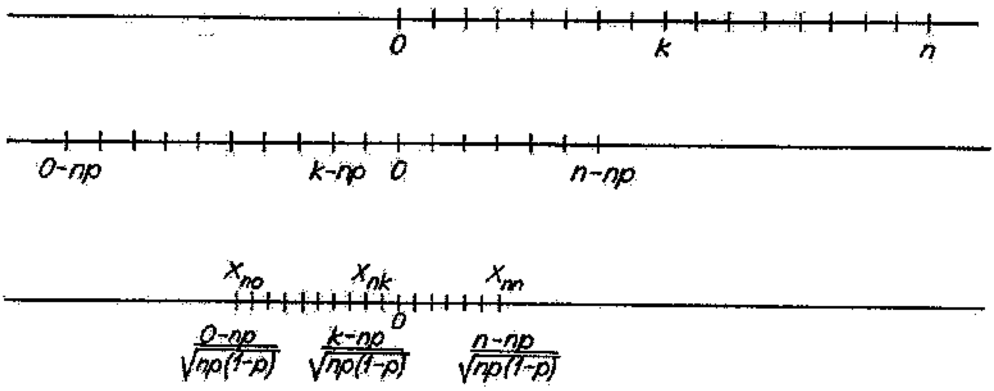
Vezessük be a következő jelölést: ha a_n $(n = 1,2,\dots)$ és b_n $(n = 1,2,\dots)$ végtelen sorozatok, akkor $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$ (olvasd: a_n aszimptotikusan egyenlő b_n-nel $n \to \infty$ esetén) azt jelenti, hogy $\frac{a_n}{b_n} \to 1$ $n \to \infty$ esetén. Tehát nagy n-ekre ilyen értelemben a_n közelitőleg egyenlő b_n-nel.

Az alábbi határértéktételnek fontos következményei lesznek:

Moivre-Laplace tétel: Ha $0 < p < 1$ fix szám, továbbá n és k ugy tartanak végtelenhez, hogy $x_{nk} = \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ korlátos marad, (tehát van olyan M szám, hogy k mindig beleesik az $n \cdot p$ szám $M \cdot \sqrt{np(1-p)}$ sugaru környezetébe), akkor

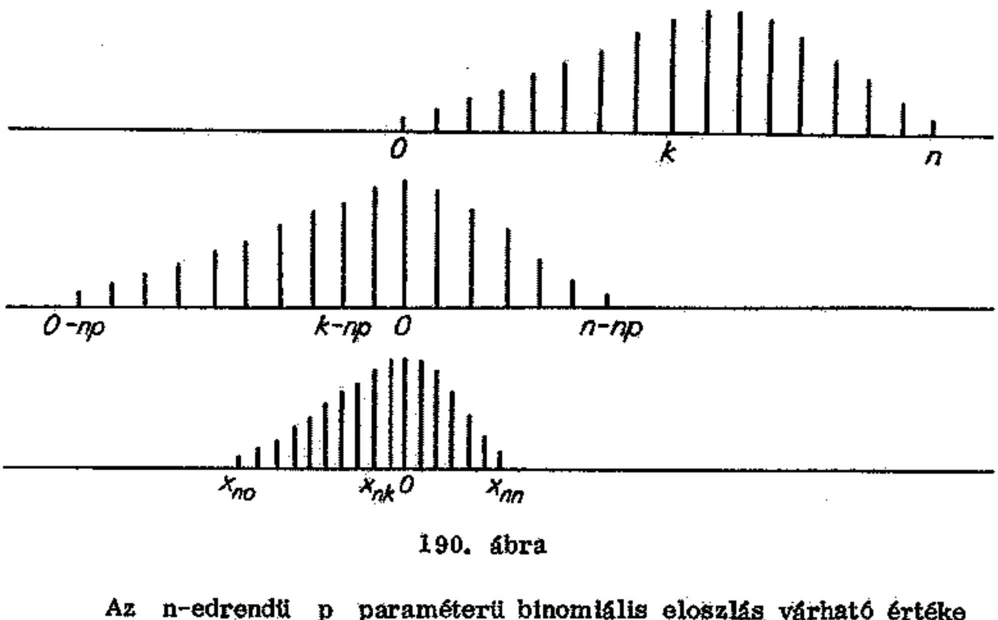
$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \quad (n \to \infty).$$

A bizonyitás előtt a tétel szemléltes jelentését és valószinüségszámitási jelentőségét magyarázzuk el. Adott n-re az $x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{nn}$ pontokat a következőképpen kaphatjuk meg a $0, 1, \dots, n$ pontokból: balra eltoljuk őket $n \cdot p$ -vel, utána a kapott pontokat az origóból zsugoritjuk $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$-vel:



189. ábra

Ha az n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlás festékcsomóit pálcikákkal ábrázoljuk, akkor a balra tolódásnál és a zsugoritásnál a festékcsomók is transzformálódnak, azaz a pálcikák áthelyeződnek a megfelelő pontokra:



190. ábra

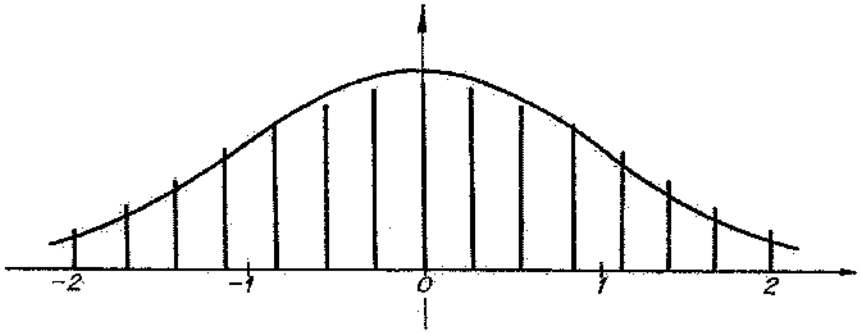
Az n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlás várható értéke $n \cdot p$, szórása $\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Ennek alapján vegyük észre, hogy az eltolás éppen ugy történt, hogy a második eloszlás várható értéke az origóba kerüljön, a zsugoritás pedig ugy, hogy a harmadik eloszlás várható értéke 0 maradjon, szórása pedig 1 legyen.

Az eloszlástranszformáció valószinüségszámitási jelentése miatt nyilvánvaló, hogy ha ξ n-edrendü p paraméterü binomiális eloszlásu valószinüségi változó, akkor az első ábra ξ eloszlása, a második ábra $\xi - n \cdot p$ eloszlása, a harmadik ábra $\frac{\xi - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ eloszlása.

A tétel azt fejezi ki, hogy a harmadik eloszlásnak, tehát $\frac{\xi - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ eloszlásának pálcikái körülbelül az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

függvény grafikonjáig érnek fel:



191. ábra

Nézzük meg, hogy a harmadik eloszlás mennyi festéket ken egy $[a,b]$ intervallumra. Ezt ugy kapjuk meg, hogy az intervallumba eső festékcsomók nagyságát (a pálcikák hosszát) összeadjuk. A következő összeg adódik:

$$\sum_{k: a \leq x_{nk} \leq b} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} .$$

A tételben kimondott formula azt sugallja, hogy ezt az összeget igy közelithetjük:

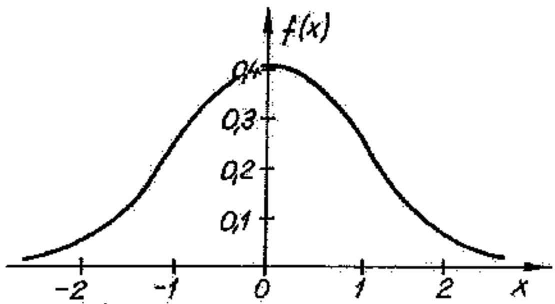
$$\sum_{k: a \leq x_{nk} \leq b} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \sum_{k: a \leq x_{nk} \leq b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} .$$

Mivel $x_{nk} - x_{nk-1} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$, a kapott összeg az

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$ integrál közelitő összege.

Ezért azt mondhatjuk, hogy nagy n esetén a harmadik eloszlás, tehát $\frac{\xi - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ eloszlása közelithető a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



192. ábra

sürüségfüggvényü folytonos eloszlással.

Ennek neve: standard normális eloszlás. A következő pontban részletesebben foglalkozunk vele.

Most nézzük a Moivre-Laplace-tétel bizonyitásának vázlatát. Akit nem érdekel, ugorja át a bizonyitást!

Vázlatos bizonyitás: Vezessük be a $q = 1 - p$, $\ell = n - k$ jelöléseket. Ezekkel

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,\ell!} \cdot p^k \cdot q^\ell .$$

Az eléggé közismert Stirling (ejtsd: sztörling) formula szerint:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} .$$

Ennek felhasználásával:

$$\frac{n!}{k!\,\ell!}\,p^k q^\ell \sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(\frac{\ell}{e}\right)^\ell \sqrt{2\pi \ell}} \cdot p^k \cdot q^\ell =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{n \cdot p}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n \cdot q}{\ell}\right)^\ell \sqrt{\frac{n}{k \cdot \ell}}\,.$$

Vegyük észre, hogy $\frac{k - np}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}$ korlátosságából következik, hogy $\frac{np}{k} \sim 1$, $\frac{nq}{\ell} \sim 1$. Ez egyrészt maga után vonja, hogy $\sqrt{\frac{n}{k \cdot \ell}} = \sqrt{\frac{np}{k}}\sqrt{\frac{nq}{\ell}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \sim \frac{1}{\sqrt{npq}}$, másrészt pedig lehetőséget ad arra, hogy az $\left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{nq}{\ell}\right)^\ell$ kifejezés logaritmusát véve az $x \sim 1$-re érvényes $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + - \ldots$ sorfejtés első két tagjának felhasználásával közelítő egyenlőséget kapjunk:

$$\ln\left[\left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{\ell}\right)^\ell\right] = k \cdot \ln\frac{np}{k} + \ell \cdot \ln\frac{nq}{\ell} \approx$$

$$\approx k \cdot \left[\left(\frac{np}{k} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{np}{k} - 1\right)^2\right] + \ell \cdot \left[\left(\frac{nq}{\ell} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{nq}{\ell} - 1\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\,x_{nk}^2 \cdot npq\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\ell}\right) = -\frac{1}{2}\,x_{nk}^2 \cdot npq\,\frac{n}{k\ell} = -\frac{1}{2}\,x_{nk}^2\,\frac{np}{k} \cdot \frac{nq}{\ell} \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2}\,x_{nk}^2\,.$$

Tehát $\left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{nq}{\ell}\right)^\ell \sim e^{-\frac{1}{2}x_{nk}^2}$. Mindez állításunkat adja. ■

2. Normális eloszlás

Az előző pontban eljutottunk az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ sürüségfüggvényü folytonos eloszláshoz, a <u>standard normális eloszlás</u>hoz.

Az ismert $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ összefüggés alapján látjuk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, tehát az eloszlás valószinüségeloszlás. A "standard" jelző arra utal, hogy várható értéke 0, szórásnégyzete és igy szórása is 1:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

Az első integrál szimmetria okokból 0. A második integrál $u = x$, $v' = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ szereposztás mellett parciális integrálással az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ integrálra vezethető vissza:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot xe^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x \cdot \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 1.$$

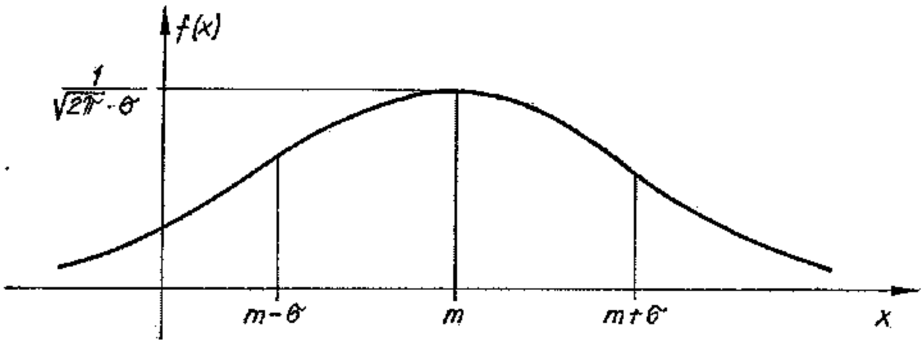
Legyen m tetszőleges, σ pedig pozitív valós szám. Az $\ell(x) = \sigma\cdot x + m$ függvény (σ-szoros nyujtás, majd m-mel való eltolás) a standard normális eloszlást olyan eloszlásba viszi, melynek sürüségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\ell^{-1}(x)\right)^2} \cdot \left|\left(\ell^{-1}(x)\right)'\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} .$$

Ennek az eloszlásnak a neve: m <u>várható értékü, σ szórásu normális eloszlás.</u>

Az eloszlás várható értéke tényleg m, szórása pedig σ, hiszen a standard normális eloszlás várható értéke 0, szórása pedig 1, és a σ-szoros nyujtás a várható értéket nem változtatja, a szórást pedig σ-szorosra növeli, az m-mel való eltolás pedig a várható értéket eltolja m-mel, és a szórást nem változtatja meg. A sürüségfüggvény grafikonja igy fest:



193. ábra

Látható, hogy a sürüségfüggvény grafikonja harang alaku görbe, melynek az $m \pm \sigma$ pontokban inflexiós pontjai vannak. A harang keskeny és magas, ha σ kicsi. Ha pedig σ nagy, akkor a harang lapultabb.

Az m várható értékü, σ szórásu normális eloszlás definiciójából kiolvasható, hogy egy ξ valószinüségi változó akkor és csak akkor követi ezt az eloszlást, ha $\frac{\xi - m}{\sigma}$ standard normális eloszlásu.

Fontossága miatt a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényére külön jelölést vezetünk be:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \; .$$

$\Phi(x)$ tehát annak az eseménynek a valószinüsége, hogy egy standard normális eloszlásu valószinüségi változó x-nél kisebbnek adódik. (A Φ függvény táblázatba foglalt értékeit a jegyzet végén találhatjuk.)
A Φ függvény fontos tulajdonsága, hogy $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Ez következik a Φ értelmezéséből, és abból, hogy az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ függvény páros függvény. A Φ függvény segitségével egy standard normális eloszlásu ξ valószinüségi változóra

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = P(\xi \leqslant b) - P(\xi \leqslant a) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Egy m várható értékü, σ szórásu ξ valószinüségi változóra pedig azzal a trükkel élhetünk, hogy $\frac{\xi - m}{\sigma}$ standard normális eloszlásu, és az $a \leqslant \xi \leqslant b$ esemény ugyanaz mint az $\frac{a-m}{\sigma} \leqslant \frac{\xi-m}{\sigma} \leqslant \frac{b-m}{\sigma}$ esemény:

$$P\left(a \leqslant \xi \leqslant b\right) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \leqslant \frac{\xi - m}{\sigma} \leqslant \frac{b-m}{\sigma}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) .$$

Könnyü meggyőződni arról is, hogy

$$P\left(\left|\xi - m\right| \leqslant z \cdot \sigma\right) = P\left(-z \leqslant \frac{\xi - m}{\sigma} \leqslant z\right) =$$

$$= \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\,\Phi(z) - 1.$$

Például $P(|\xi - m| \leqslant \sigma) = 0,6826$, $P(|\xi - m| \leqslant 3 \cdot \sigma) = 0,9972$. Tehát az m várható értékü, σ szórásu normális eloszlás az egységnyi festékmennyiség 68 százalékát az $[m-\sigma\,,\ m+\sigma]$ intervallumra helyezi. Az $[m-3\sigma\,,\ m+3\sigma]$ intervallum komplementumára pedig a festéknek csak kb. 3 ezreléke jut.

A normális eloszlás valószinüségszámitási jelentését a centrális határeloszlás-tételből érthetjük meg. A tétel megfogalmazásához szükségünk van a konvolució fogalmára. Ezzel ismerkedünk meg a következő pontban. Akit mindez nem érdekel, átugorhatja a 3. pontot és a 4. pont első felét (a tételt és az azt megelőző részt.)

3. Eloszlások konvolúciója

Ha ξ és η folytonos eloszlásu, független valószinüségi változók, akkor együttes eloszlásuk sürüségfüggvénye a külön-külön vett sürüségfüggvényekből szorzással adódik: $h(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Az együttes sürüségfüggvényből a $\xi + \eta$ összeg sürüségfüggvényét az $r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u-v,v)\,dv$ összefüggés alapján kapjuk. Ha tehát ξ és η folytonos eloszlásu független valószinüségi változók, akkor a $\xi + \eta$ összeg sürüségfüggvénye:

$$r(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u-v) \cdot g(v)\,dv.$$

Ezt az r függvényt az f és g függvények konvolucióјának szokás nevezni. Ezzel összhangban az r sürüségfüggvényü eloszlást az f illetve g sürüségfüggvényü eloszlások konvolucióјának nevezzük. Például a 2-odrendü λ paraméterü gamma eloszlás nem egyéb, mint a λ paraméterü exponenciális eloszlásnak önmagával képzett konvolucióјa (lásd a Valószinüségi változók függetlensége c. fejezetben).

Általánosabban: független ξ és η valószinüségi változók esetén ξ és η külön-külön vett eloszlásából meghatározható a $\xi + \eta$ összeg eloszlása. Ez utóbbi eloszlást a külön-külön vett eloszlások konvolucióјának nevezzük.

Diszkrét eloszlások konvolucióját például ugy kapjuk meg, hogy az $r_{ij} = p_i \cdot q_j$ szorzási szabály szerint képzett sikbeli eloszlást a 45°-os egyenesre vetitjük.

Nem célunk az eloszlások konvolucióјával kapcsolatos matematikai tudnivalókat részletezni. A konvolució fogalmára csak azért van szükségünk, hogy a centrális határeloszlás-tételt pontosan meg tudjuk fogalmazni, és a tétel valószinüségszámitási jelentését megmagyarázhassuk. Ezért a Kedves Olvasó számára csak az a fontos, hogy tisztában legyen vele, hogy

1. két eloszlás konvoluciója egy ujabb eloszlás, amit matematikai eszközökkel meg lehet határozni a két eloszlásból,

2. független valószinüségi változók összegének eloszlása a külön-külön vett eloszlások konvoluciója.

Eloszlásokat szemléltetni szoktunk szétkent festékkel, pálcikákkal, sürüségfüggvényük grafikonjával. A fontosabb eloszlásoknak nevet adtunk (pl. egyenletes eloszlás valamely intervallumon, Poisson-eloszlás valamilyen paraméterrel stb.). Most szükségünk lesz rá, hogy betükkel jelöljük az eloszlásokat. Eloszlások jelölésére a μ (olvasd: mü) és ν (olvasd: nü) betüket fogjuk használni.

A μ-vel és a ν-vel jelölt eloszlások konvolucióját $\mu \star \nu$-vel fogjuk jelölni. Ha tehát ξ és η független valószinüségi változók, és ξ eloszlását μ, η eloszlását pedig ν jelölt, akkor $\xi + \eta$ eloszlása $\mu \star \nu$. Ha μ_1, μ_2, μ_3 eloszlások, akkor van értelme annak, hogy a $\mu_1 \star \mu_2$ eloszlást a μ_3 eloszlással konvolváljuk: $(\mu_1 \star \mu_2) \star \mu_3$. Eredményül egy ujabb eloszlást kapunk. Be lehet látni, hogy ugyanehhez az eloszláshoz jutunk, ha a $\mu_1 \star (\mu_2 \star \mu_3)$ zárójelezésének megfelelő sorrendben képezzük a konvoluciókat. (A konvolució müvelete tehát asszociativ.) Ezért többszörös konvolució esetén nem kell a zárójeleket kitenni. Kézenfekvő, hogy egy többszörös konvolució valószinüségszámitási jelentése: több független valószinüségi változó összegének az eloszlását képezzük az összeg tagjainak külön-külön vett eloszlásából.

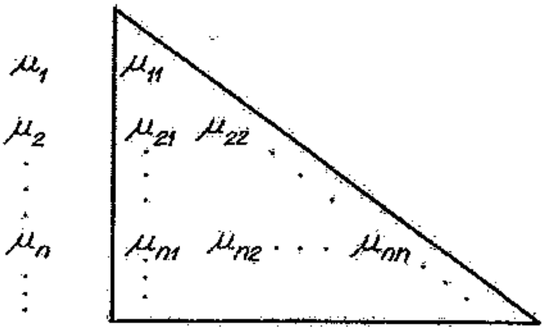
4. Centrális határeloszlás-tétel

A tétel megfogalmazásához néhány fogalomra és jelölésre van szükségünk, először ezeket vesszük.

Tegyük fel, hogy a μ_n eloszlás n darab eloszlás konvoluciójaként áll elő:

$$\mu_n = \mu_{n1} \star \mu_{n2} \star \dots \star \mu_{nn} \quad (n=1,2,\dots).$$

A könnyebb megjegyezhetőség kedvéért táblázatba rendezzük az itt szereplő eloszlásokat:



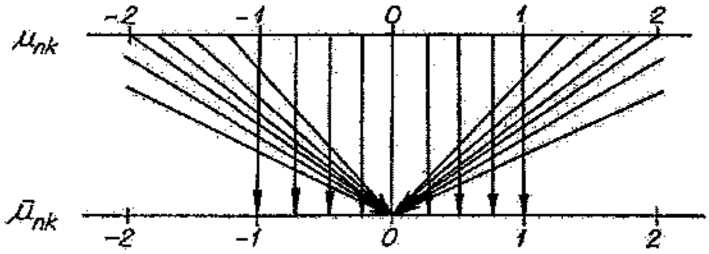
194. ábra

A táblázat bal oldalán álló eloszlások a velük egy sorban álló eloszlások konvolucIójaként adódnak. A háromszög alaku keretbe foglalt eloszlások rendszerét szériasorozatnak nevezzük. (Szériasorozat = sorozatok sorozata. Az elnevezés azzal magyarázható, hogy a háromszög alaku táblázat sorai alkotják a sorozatot, és a táblázat n-ik sora egy n elemű sorozat.) A $\mu_1, \mu_2 \dots$ sorozatot pedig a szériasorozatra épülő eloszlássorozatnak hivjuk.

Bevezetünk egy jelölést. Ha μ egy eloszlás a számegyenesen, B pedig a számegyenesnek részhalmaza, akkor $\mu(B)$-vel jelöljük azt a festékmennyiséget, amely a μ-vel jelölt eloszlás szerint a B halmazon van. Ha μ egy ξ valószinüségi változó eloszlását jelöli, akkor tehát $\mu(B)$ annak a valószinüségét jelenti, hogy ξ értéke B-be esik: $\mu(B) = P(\xi \in B)$.

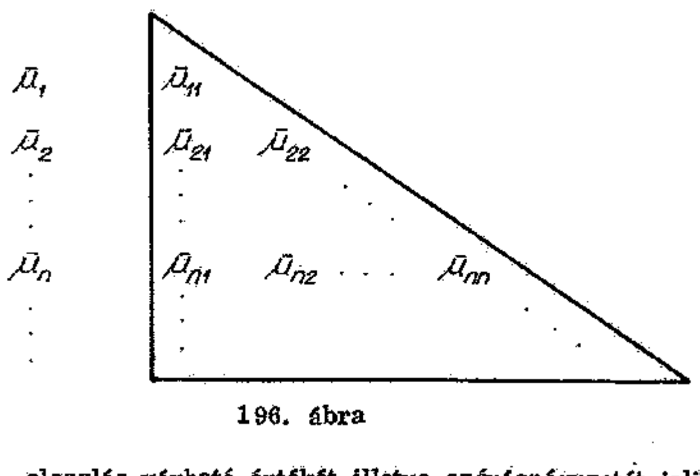
Vegyünk egy pozitiv ε számot, és tekintsük a $[-\varepsilon, \varepsilon]$ intervallumot. A μ_{nk} eloszlás szerint ennek az intervallumnak a $\overline{[-\varepsilon, \varepsilon]}$-rel jelölt komplementumán lévő festék mennyisége $\mu_{nk}\left(\overline{[-\varepsilon, \varepsilon]}\right)$. Rögzitett n mellett adjuk össze ezeket a festékmennyiségeket. Ha minden $\varepsilon > 0$-ra ez az összeg nagy n esetén pici, azaz $n \to \infty$ esetén $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_{nk}\left(\overline{[-\varepsilon, \varepsilon]}\right) \longrightarrow 0$, akkor a szériasorozatot a nulla köré koncentrálódónak nevezzük. Egy ilyen szériasorozatra épülő eloszlássrorozat n-ik tagja tehát n darab olyan eloszlás konvolucIója, melyek "lényegében a nulla köré koncentrálódnak".

Attól, hogy egy eloszlás valamilyen véges intervallum komplementumára kevés festéket helyez, még előfordulhat, hogy az eloszlás várható értéke vagy szórása nem létezik. (Ha kevés festéket a mérleg karján nagyon messzire helyezünk, akkor ez nagyon nagy forgató nyomatékot eredményez!) Ezért a nulla köré koncentrálódás még nem garantálja, hogy a szériasorozat elemeinek várható értéke és szórása létezzen. Ha viszont azt a festékmennyiséget, mely a μ_n eloszlás szerint a $[-1,1]$ intervallum komplementumán van, áthelyezzük a nulla pontra, és egyébként nem változtatjuk meg a μ_{nk} eloszlást,



195. ábra

akkor az így adódó $\bar{\mu}_{nk}$ eloszlás "alig" tér el a μ_{nk} eloszlástól, viszont lesz várható értéke és szórása. (A $\bar{\mu}_{nk}$ eloszlás értelmezésénél a $[-1,1]$ intervallum helyett akármilyen $[-\alpha, \beta]$ intervallumot is tekinthetünk, $\alpha, \beta > 0$). A $\bar{\mu}_{nk}$ eloszlások szériasorozatát táblázatba rendezve most is a táblázat bal oldalára írjuk az egy sorban álló eloszlások konvoluciójaként adódó $\bar{\mu}_n$ eloszlást:



196. ábra

A $\bar{\mu}_n$ eloszlás várható értékét illetve szórásnégyzetét jelöljük $\bar{m}_n$-sal illetve $\bar{\sigma}_n$-sal. A szériasorozatot az (m, σ) paraméter-párra stabilizálódónak nevezzük, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{m}_n = m$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$.

Ezen előkészités után a centrális határeloszlás-tételt igy fogalmazhatjuk meg:

Centrális határeloszlás-tétel: Ha a $\mu_1, \mu_2, \dots$ eloszlás-sorozat egy olyan szériasorozatra épül, mely a nulla köré koncentrálódik, és valamilyen (m, σ) paraméterpárra stabilizálódik, akkor a $\mu_1, \mu_2, \dots$ eloszlássorozat az m várható értékü, σ szórásu normális eloszláshoz tart, azaz tetszőleges $[a,b]$ intervallum esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n\left([a,b]\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$.

A centrális határeloszlás-tételt nem bizonyitjuk, csak elemezzük. Ugyanis ebből megtudhatjuk, hogy milyen tipusu valószinüségi változók tekinthetők normális eloszlásunak. A tétel szerint nagy n esetén μ_n közelitőleg normális eloszlásu. Ezért azt kell megvizsgálnunk, hogy milyen tipusu valószinüségi változók eloszlása lehet olyan szerkezetü, mint amilyen a μ_n eloszlás. A μ_n eloszlás n darab "lényegében nulla köré koncentrált" eloszlás konvoluciója. Ennek valószinüségszámitási jelentése: a μ_n eloszlás n darab "nulla körüli értékeket felvevő", független valószinüségi változó összegének eloszlása.

Tehát a centrális határeloszlás-tétel alapján mondhatjuk, hogy ha egy valószinüségi változó sok, egyenként kicsi értékeket felvevő, független valószinüségi változó összege, akkor ez a valószinüségi változó normális eloszlásunak tekinthető.

Ilyen valószinüségi változóval sokfelé találkozhatunk: az

1. ξ = ahány mázsa buza terem Somogy megyében egy év alatt,
2. η = egy élelmiszeráruház napi bevétele,
3. ζ = egy város lakosságának napi áramfogyasztása

valószinüségi változók normális eloszlásunak tekinthetők, hiszen

1. a sok buzakalász mindegyike a többitől függetlenül kicsi termésmennyiséggel járul hozzá a megye terméséhez,
2. az egyes vásárlók egymástól függetlenül 100 forintos nagyságrendü tételeket fizetnek, ami elenyésző az áruház bevételéhez képest,

3. az egyes lakásokban egymástól függetlenül égetik a lámpákat, és egy-egy lakás áramfogyasztása elhanyagolható a város fogyasztásához képest.

A szériasorozat stabilizálódását kifejező $\lim_{n\to\infty} \overline{m}_n = m$, $\lim_{n\to\infty} \overline{\sigma}_n = \sigma$ feltétel arra ad felvilágositást, hogy az összegként kiadódó-, normális eloszlásu valószinüségi változó várható értékét és szórását hogyan eszelhetjük ki, ha az összegben tagként szereplő valószinüségi változók eloszlását ismerjük. Mivel a gyakorlati feladatokban a tagok eloszlását általában nem ismerjük, más uton szokás a várható értéket és a szórást meghatározni. Például a fenti 3. példában szereplő ζ valószinüségi változó várható értékét és szórását igy számolhatjuk ki: a lakosság napi áramfogyasztását sok napon át megmérjük és a kapott

$z_1, \ldots, z_n$ számok $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_i$ átlagát ζ várható értékének, a

$z_1, \ldots, z_n$ számokból adódó pontrendszer $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2}$ szórását

pedig a ζ szórásának tekintjük. A várható érték és a szórás más trükkökkel is kieszelhető. Erre példa a következő feladat.

Feladat: Kertemben napraforgót termesztek. Tapasztalatom szerint az átlagos évi termés 45 kg, és 10 évenként általában egyszer fordul elő, hogy 50 kg-nál több a termés. Milyen gyakran fordul elő, hogy 37 kg-nál kevesebb a termés? (Ugyanis ilyenkor ráfizetéses a termelés.)

Megoldás: A buzaterméshez hasonlóan a napraforgótermést is normális eloszlásu ξ valószinüségi változónak tekinthetjük. $m = M(\xi)$, $\sigma = D(\xi)$ jelölésekkel a feladat szövege alapján $m = 45$, $P(\xi < 50) = 0,9$. σ-t pedig azzal a trükkel határozhatjuk meg, hogy a $\frac{\xi - m}{\sigma}$ valószinüségi változó standard normális eloszlásu, s igy

$$0,9 = P(\xi < 50) = P\left(\frac{\xi - 45}{\sigma} < \frac{50-45}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{50-45}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right).$$

A Φ függvény táblázatából kiolvasható, hogy $\Phi(1,28) = 0,9$, igy $1,28 = \frac{5}{\sigma}$. Ebből $\sigma = \frac{5}{1,28} = 3,91$. A $\xi < 37$ esemény valószinüsége

$$P(\xi < 37) = P\left(\frac{\xi-45}{3,91} < \frac{37-45}{3,91}\right) = \Phi\left(\frac{37-45}{3,91}\right) = \Phi(-2,05) =$$

$$= 1 - \Phi(2,05) = 0,02.$$

Tehát átlagosan $\frac{1}{0,02} = 50$ évenként fordul elő, hogy a termés 37 kg-nál kevesebb. ∎

Megjegyzések:

1. Centrális határeloszlás-tételnek szokás nevezni minden olyan tételt, ami valamilyen eloszlássorozatnak normális eloszláshoz való konvergenciájáról szól. Ilyen jellegű tétel nagyon sok van. Ezek a tételek magyarázzák meg, hogy a valószinűségszámításban központi szerepet játszó normális eloszlás miért bukkan fel olyan sokfelé. A normális eloszlás "központi" (= centrális) szerepéből ered ezeknek a tételeknek az elnevezése.

2. Az alkalmazások során gyakran előfordul, hogy egy gyakorlati problémával kapcsolatban felmerülő valószinűségi változó várható értékét és szórását kisérleti eredményekből közelitik, a valószinűségi változót pedig normális eloszlásunak veszik a kapott várható értékkel és szórással. Ez a módszer nagyon kényelmes, mert a normális eloszlással kényelmesen lehet számolni, de vigyázni kell, nehogy olyankor is normális eloszlással számoljunk, amikor a valószinűségi változó még közelitőleg sem tekinthető normális eloszlásunak.

XIV. NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYEI

1. Gyenge törvény

A nagy számok erős törvénye szerint független, azonos eloszlású, m várható értékű $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószinűségi változók esetén $P\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} = m\right) = 1$. Tehát majdnem biztos, hogy az átlagok sorozata $n \to \infty$ esetén a várható értékhez konvergál. A konvergencia tényét a gyakorlatban csak akkor tudjuk hasznositani, ha ismerjük a konvergencia gyorsaságát, azaz adott ε -hoz tudunk olyan n_o-t adni, hogy $n \geqslant n_o$ esetén a $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$ átlagnak az m-től való eltérése ε-nál kisebb. Ezt a kivánalmat nem lehet teljesiteni. Ugyanis a $\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon$ esemény bekövetkezhet. Kevesebbel kell megelégednünk: örülnünk kell annak, hogy adott ε-hoz és δ-hoz – mint látni fogjuk – olyan n_o-t tudunk választani, hogy $n \geqslant n_o$ esetén a $\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon$ esemény valószinűsége δ-nál kisebb vagy egyenlő legyen:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta, \quad \text{ha } n \geqslant n_o.$$

Ha tehát δ-t jó kicsinek választjuk, akkor $n \geqslant n_o$ esetén nagy lesz a valószinűsége annak, hogy a $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$ átlag az előirt pontossággal közeliti az m értéket. E célból vesszük a következő tételeket.

1. tétel: (Markov-egyenlőtlenség) Ha a nem negativ ξ valószinűségi változó várható értéke $M(\xi) = m$, és ε pozitiv szám, akkor

$$P(\xi \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{m}{\varepsilon}.$$

Bizonyítás: Ha ξ eloszlása folytonos, és sűrűségfüggvényét f-fel jelöljük, akkor $x \leq 0$-ra $f(x) = 0$, hiszen ξ nem negatív. Ezért:

$$m = \int_0^{\infty} x \cdot f(x)\,dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon \cdot f(x)\,dx = \varepsilon \cdot \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \varepsilon \cdot P(\xi \geq \varepsilon).$$

Ha ξ eloszlása diszkrét, akkor ugyanez a gondolatmenet véghezvihető, csak integrálok helyett szummákkal kell dolgozni. ■

2. tétel: (Csebisev-egyenlőtlenség) Ha a ξ valószínűségi változó várható értéke $M(\xi) = m$, szórásnégyzete $D^2(\xi) = \sigma^2$, akkor

$$P\left(|\xi - m| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

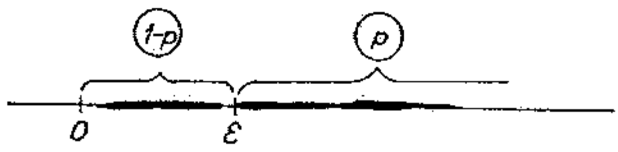
Bizonyítás: Ha a Markov-egyenlőtlenségben ξ helyére $(\xi - m)^2$-t, az ε helyére ε^2-t írunk, akkor $M\left((\xi - m)^2\right) = \sigma^2$ miatt ezt kapjuk:

$$P\left((\xi - m)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Mivel $(\xi - m)^2 \geq \varepsilon^2$ ekvivalens a $|\xi - m| \geq \varepsilon$ egyenlőtlenséggel, ebből kiadódik a Csebisev-egyenlőtlenség. ■

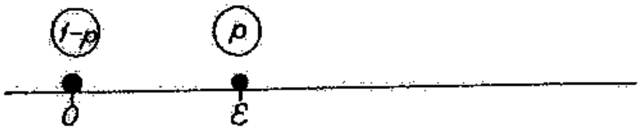
Megjegyzés: A Markov- és Csebisev-egyenlőtlenségeket könnyebben megjegyezhetjük, ha mechanikai szemléletes jelentésüket is látjuk.

Markov-egyenlőtlenség: ha egy valószínűségeloszlás a $[0, \infty)$ intervallumra koncentrálódik, és az $[\varepsilon, \infty)$ intervallumon az eloszlás szerint p festékmennyiség van,



197. ábra

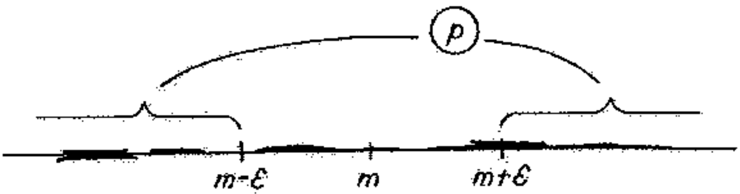
akkor az eloszlás m sulypontja legalább olyan messze van a 0 ponttól, mint az alábbi diszkrét eloszlás sulypontja:



198. ábra

Ennek az eloszlásnak a sulypontja az $\varepsilon \cdot p$ pont, ezért $\varepsilon \cdot p \leqslant m$, azaz $p \leqslant \frac{m}{\varepsilon}$.

Csebisev-egyenlőtlenség: ha egy valószinüségeloszlás m sulypontjának ε sugaru környezetén kivül az eloszlás szerint p festékmennyiség van,



199. ábra

akkor az eloszlásnak az m pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, amit az eloszlás szórásnégyzetének nevezünk, és most σ^2-tel jelölünk, nagyobb vagy egyenlő mint $\varepsilon^2 \cdot p$. Tehát $\varepsilon^2 \cdot p \leqslant \sigma^2$, azaz $p \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

3. tétel: (Bernoulli-egyenlőtlenség) Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, m várható értékü, σ^2 szórásnégyzetü valószinüségi változók, akkor

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Bizonyitás: Ha a Csebisev-egyenlőtlenségben ξ helyére a $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$ átlagot tesszük, akkor kiadódik a Bernoulli-egyenlőtlenség, mert

$$M\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)=\frac{M(\xi_1)+\ldots+M(\xi_n)}{n}=m,$$

$$D^2\left(\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}\right)=\frac{D^2(\xi_1)+\ldots+D^2(\xi_n)}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

A valószinüségi változók függetlenségét akkor használtuk fel, amikor az összeg szórásnégyzetét a szórásnégyzetek összegévé irtuk. $\blacksquare$

Ha $n \geqslant \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2\cdot\delta}$, akkor $\dfrac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2} \leqslant \delta$. Ezért a Bernoulli-egyenlőtlenségből következik, hogy

$$P\left(\left|\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}-m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta\,, \quad \text{ha} \quad n \geqslant n_0=\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\cdot\delta}.$$

Látjuk tehát, hogy akármilyen ε és δ esetén n elég nagyra választásával elérhető, hogy δ -nál kisebb legyen annak a valószinüsége, hogy a $\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$ átlagnak az m-től való eltérése ε -nál nagyobb vagy egyenlő. Ez pedig azt fejezi ki, hogy a $\dfrac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$ átlag "közel van" a várható értékhez. A "közel van" kifejezés pontos matematikai jelentése a fent megfogalmazott egyenlőtlenség. A Bernoulli-egyenlőtlenségnek ezt a következményét szokták a nagy számok (Bernoulli féle) gyenge törvényének nevezni.

Megjegyzések:

1. A Bernoulli féle gyenge törvény bizonyos értelemben többet mond az erős törvénynél, hiszen éppen azt a hiányosságot pótolja, amivel az erős törvényt "vádoltuk" ennek a pontnak az elején. Viszont az erős törvény azért erősebb a gyenge törvénynél, mert 1 valószinüséggel állitja, hogy a számtani közepek sorozata a várható értékhez konvergál. Tehát az erős törvény a számtani közepek sorozatának végtelen sok tagjáról egyidejüleg állitja majdnem biztosan, hogy "közel vannak" a várható értékhez. Ezzel szemben a gyenge törvény ennek a sorozatnak csupán az elemeiről külön-külön mond ki valószinüségek segitségével egyenlőtlenségeket, melyekből az erős törvénynek ezt az "erős" állitását nem lehet levezetni.

2. Nagy számok törvényének neveznek minden olyan tipusu tételt, ami a számtani közepeknek a várható értékhez való (valamilyen értelemben vett) konvergenciájáról szól. Ezért nem szabad meglepődni, ha va-

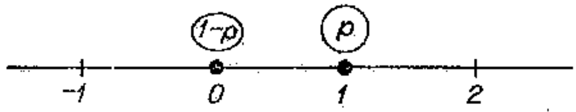
laki találkozik egy olyan tétellel, ami ezt a nevet viseli, de különbözik a jegyzetben tárgyalt tételektől.

2. Nagy számok törvényei relatív gyakoriságokra

Tekintsünk egy A eseményt, valószínűségét jelöljük p-vel: $P(A) = p$. Képzeljük el, hogy az A eseményre vonatkozólag független kisérletsorozatot végzünk. Jelöljük ξ_i-vel a következő valószínűségi változót ($i = 1, 2, \ldots$):

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-ik kisérletnél bekövetkezik az } A \text{ esemény,} \\ 0, & \text{ha} \quad \text{"} \quad \text{nem következik be az } A \text{ esemény.} \end{cases}$$

Világos, hogy ekkor $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. A közös eloszlás az a diszkrét eloszlás, mely az 1 pontra p, a 0 pontra pedig $1-p$ nagyságu festékcsomót helyez:



200. ábra

Ennek az eloszlásnak a várható értéke p-vel egyenlő:

$$m = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p.$$

Ezért a nagy számok erős törvénye szerint:

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} = p\right) = 1.$$

Gondoljuk meg, mit fejez ki a $\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$ tört! A számlálóban szereplő összeg i-ik tagja 1 vagy 0 aszerint, hogy az A esemény az i-ik kisérletnél bekövetkezik vagy nem. Ezért a számláló annyival egyenlő, ahányszor az A esemény az n darab kisérlet során bekövetkezik. Ezt szoktuk korábban n_A-val jelölni: $n_A = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

A tört tehát az $\frac{n_A}{n}$ relativ gyakoriság. Ezek szerint majdnem biztos, hogy egy A eseményre független kisérletsorozatot végezve a relativ gyakoriságok sorozata az esemény valószinüségéhez tart:

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n} = p\right) = 1.$$

Tehát matematikai modellünk kifejezi azt a tényt, hogy "nagyon hosszu" kisérletsorozatot végezve az $\frac{n_A}{n}$ relativ gyakoriság "közel van" a $P(A)$ valószinüséghez. (Az I. fejezet Relativ gyakoriság, valószinüség c. pontjában használtuk az idézőjelbe tett kifejezéseket.)

A $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószinüségi változók közös szórásnégyzete $\sigma^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - m^2 = p \cdot (1-p)$. A Bernoulli-egyenlőtlenséget a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószinüségi változókra alkalmazva ez adódik:

$$P\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}.$$

Ha $n \geqslant \frac{p \cdot (1-p)}{\delta \cdot \varepsilon^2}$, akkor $\frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \varepsilon^2} \leqslant \delta$. Ezért

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta, \quad \text{ha } n \geqslant \frac{p \cdot (1-p)}{\delta \cdot \varepsilon^2}.$$

δ-t kicsinek választva látjuk, hogy "nagy" n esetén "kicsi" a valószinüsége annak, hogy a relativ gyakoriság a valószinüségtől ε-nál jobban eltér. Másképp megfogalmazva: ha n "nagy" és "sok" ember mindegyike n hosszuságu kisérletsorozatot végez az A eseményre, akkor csak "viszonylag kevés" embernél fog a relativ gyakoriság a $P(A)$ valószinüségtől ε-nál jobban eltérni.

Tehát modellünk utólag matematikai formába öntötte a valószinüség fogalmáról az I. fejezet 4. pontjában kialakitott képet.

3. Küszöbindex keresés

Ha az A esemény $P(A) = p$ valószínűségét nem ismerjük, akkor n darab független kísérletet végezve p-t az $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakorisággal közelítjük. Az előző pontban a Bernoulli-egyenlőtlenség következményeként beláttuk, hogy $P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta$, ha $n \geqslant \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2 \cdot \delta}$. A $p \cdot (1-p)$ kifejezés maximumhelye a $p = \frac{1}{2}$ hely, és a maximum értéke $\frac{1}{4}$. Így $p \cdot (1-p) \leqslant \frac{1}{4}$. Ezért igaz az is, hogy

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta, \quad \text{ha} \quad n \geqslant n_0 = \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \delta}.$$

Tehát adott ε és δ esetén a csupán ε-tól és δ-tól függő $n_0 = \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \delta}$ küszöbnél nagyobb vagy egyenlő n-t választva, az $\frac{n_A}{n}$ relatív gyakoriság legalább $1-\delta$ valószínűséggel ε pontossággal közelíti az A esemény ismeretlen valószínűségét.

Ha például $\frac{1}{\pi}$-t a gyufadobálós feladat (Lásd: VI. fejezet, Egyenletes eloszlás c. pont) alapján akarjuk közelíteni, és az $\varepsilon = 0,05$ pontosság elérését 0,98 valószínűséggel szeretnénk garantálni, tehát $\delta = 0,02$, akkor a gyufát elég $\frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \delta} = 5000$-szer feldobni. Az 5000 dobás alapján számított relatív gyakoriság legalább 0,98 valószínűséggel 0,05-nál közelebb lesz $\frac{1}{\pi}$-hez.

Mindjárt látni fogjuk, hogy sokkal kevesebb dobás is garantálja már ugyanezt a pontosságot 0,98 valószínűséggel. Ugyanis az

n_A = ahányszor bekövetkezik az A esemény az n kísérlet során

valószínűségi változó n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlást követ, s így a Moivre–Laplace-tétel következményeként nagy n esetén

$\dfrac{n_A - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ standard normális eloszlású valószínűségi változónak tekinthető. Az $\left|\dfrac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon$ egyenlőtlenség ekvivalens az $\left|\dfrac{n_A - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p\ (1-p)}}\right| \geq$ $\geq \dfrac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{\sqrt{p \cdot (1-p)}}$ egyenlőtlenséggel. Ezért

$$P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{n_A - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right| \geq \frac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{\sqrt{p \cdot (1-p)}}\right).$$

Egy standard normális eloszlású ξ valószínűségi változóra $P\left(|\xi| \geq x\right) = 2 \cdot \left(1 - \Phi(x)\right)$, ezért

$$P\left(\left|\frac{n_A - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \geq \frac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \approx 2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{\sqrt{p \cdot (1-p)}}\right)\right).$$

Ha tehát n-t ugy választjuk meg, hogy $2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{\sqrt{p \cdot (1-p)}}\right)\right) = \delta$, akkor $P\left(\left|\dfrac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \approx \delta$. Ezért a $2 \cdot \left(1 - \Phi\left(\dfrac{\sqrt{n} \cdot \varepsilon}{\sqrt{p \cdot (1-p)}}\right)\right) = \delta$ összefüggésből n-t kifejezzük:

$$n = \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\right)^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{\varepsilon^2}.$$

(Itt Φ inverzét jelöltük Φ^{-1}-gyel.) A $p \cdot (1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ egyenlőtlenség alapján látjuk, hogy az

$$n_o = \left(\Phi^{-1}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\right)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \varepsilon^2}$$

érték is szolgálhat küszöbindexként. A Φ függvény táblázatából ki lehet olvasni, hogy $\left(\Phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\delta}{2}\right)\right)^2$ lényegesen kisebb $\dfrac{1}{\delta}$-nál, tehát ez a küszöb lényegesen kisebb a Bernoulli-egyenlőtlenségből adódó $n_o = \dfrac{1}{4 \cdot \varepsilon^2 \cdot \delta}$ küszöbnél:

δ	$\frac{1}{\delta}$	$\left(\Phi^{-1}\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\right)^2$
0,2	5	1,6
0,02	50	5,4
0,002	500	9,6

201. ábra

Az előbbi példában sem kell 5000-szer feldobni a gyufát. Már
$5,4 \cdot \frac{1}{4 \cdot 0,05^2} = 540$ dobás is elegendő.

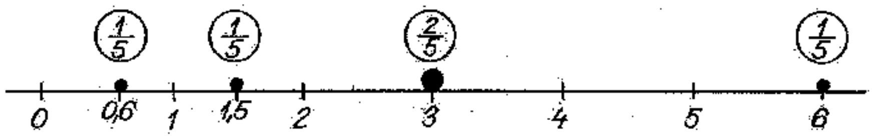
Megjegyzés: Az $\frac{n_A - n \cdot p}{\sqrt{np(1-p)}}$ valószinüségi változó csak közelítőleg standard normális eloszlású. Ezért figyelembe kellene vennünk azt a hibát, ami abból származik, hogy mi mégis standard normális eloszlással számolunk. A hiba becsléséhez szükséges tételek – melyeket ebben a jegyzetben nem tudunk megbeszélni – mutatják, hogy nagyon pontos számításoktól és szélsőséges esetektől (p közel van 0-hoz vagy 1-hez) eltekintve ez a hiba tényleg elhanyagolható a "hétköznapi" alkalmazásoknál.

4. Tapasztalati eloszlás

Tegyük fel, hogy a $\xi_1, \xi_2, \ldots$ valószinüségi változókról csak annyit tudunk, hogy függetlenek és eloszlásuk közös, de ezt a közös eloszlást nem ismerjük. Ilyen valószinüségi változó sorozathoz juthatunk, ha egy ismeretlen eloszlású ξ valószinüségi változóra független kisérletsorozatot végzünk, és ξ_i-nek vesszük az i-ik kisérlet eredményét ($i = 1,2,\ldots$).

Az első n kisérlet eredménye n darab valós számot jelöl ki a számegyenesen. Tegyünk mindegyik számra $\frac{1}{n}$ nagyságu festékcsomót. Ha egy szám többször is kijön kisérleti eredményként, akkor erre a számra annyiszor $\frac{1}{n}$ nagyságu festékcsomót tegyünk, ahányszor ez a szám lett az eredmény. Ily módon véletlentől függően egy (eléggé speciális, diszkrét) eloszlást kapunk a számegyenesen. Ezt az eloszlást a ξ_1, ξ_2, ... megfigyelt értékeiből felállított n-ik tapasztalati eloszlásnak nevezzük.

Ha például a kisérletek eredményeként $\xi_1 = 3$, $\xi_2 = 6$, $\xi_3 = 1,5$, $\xi_4 = 3$, $\xi_5 = 0,6$, akkor az ötödik tapasztalati eloszlás így néz ki:



202. ábra

A tapasztalati eloszlásokkal kapcsolatban a következőket állithatjuk:

Tétel: Ha B a számegyenesnek tetszőleges részhalmaza, akkor majdnem biztos, hogy az n-ik tapasztalati eloszlás által B-re kent festékmennyiség $n \to \infty$ esetén tart ahhoz a festékmennyiséghez, amit a fenti, közös eloszlás a B-re ken.

A tétel azt mutatja, hogy ha egy valószinüségi változóra független kisérletsorozatot végzünk, akkor a kisérleti eredményekből adódó pontrendszer körülbelül ugy helyezkedik el, ugy "oszlik el" a számegyenesen, ahogy a valószinüségi változó eloszlása szerint szétkenjük, "elosztjuk" az egységnyi festékmennyiséget.

Ezért ha a valószinüségi változó eloszlását nem ismerjük, akkor az ismeretlen eloszlást a tapasztalati eloszlásokkal közelithetjük.

Bizonyitás: Az n-ik tapasztalati eloszlás szerint annyi festék kenődik a B halmazra, amennyinek az első n kisérletből a $\xi \in B$ esemény relativ gyakorisága adódik. A nagy számok erős törvénye szerint majdnem biztos, hogy ez a relativ gyakoriság az esemény valószinüségéhez tart. A $\xi \in B$ esemény valószinüsége pedig a közös eloszlás szerint a B-re kent festékmennyiséggel egyenlő. ∎

Megjegyzések:

1. Látszik, hogy itt a nagy számok erős törvényét alkalmaztuk a $\xi \in B$ eseményre. Ha a gyenge törvényt alkalmazzuk, akkor is hasznosítható eredményekhez juthatunk.

2. Egydimenziós esetről szól a tétel, de nyilván többdimenziós esetben is igaz, és a bizonyitás is ugyanigy jó csak éppen a B halmazt a megfelelő dimenziós tér részhalmazának kell választani.

Poisson-eloszlás

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k \ λ	0,5	1	2	3	4	5	10	15
0	0,61	0,37	0,14	0,05	0,02	0,01		
1	0,30	0,37	0,27	0,15	0,07	0,03		
2	0,08	0,18	0,27	0,22	0,15	0,08		
3	0,01	0,06	0,18	0,22	0,20	0,14	0,01	
4		0,02	0,09	0,17	0,20	0,18	0,02	
5			0,04	0,10	0,17	0,18	0,04	
6			0,01	0,05	0,10	0,15	0,06	
7				0,02	0,05	0,10	0,09	0,01
8				0,01	0,03	0,07	0,11	0,02
9					0,01	0,04	0,13	0,03
10						0,02	0,13	0,05
11						0,01	0,11	0,06
12							0,09	0,08
13							0,07	0,10
14							0,05	0,10
15							0,03	0,10
16							0,02	0,10
17							0,01	0,08
18							0,01	0,07
19								0,06
20								0,04
21								0,03
22								0,02
23								0,01
24								0,01

Standard normális eloszlás

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

x	$\Phi(x)$
0	0,5000
0,05	0,5199
0,1	0,5398
0,15	0,5596
0,2	0,5793
0,25	0,5987
0,3	0,6197
0,35	0,6368
0,4	0,6557
0,45	0,6736
0,5	0,6915
0,55	0,7088
0,6	0,7257
0,65	0,7422
0,7	0,7580
0,75	0,7734
0,8	0,7881
0,85	0,8023
0,9	0,8159
0,95	0,8289
1	0,8413
1,05	0,8531
1,1	0,8643
1,15	0,8749
1,2	0,8849
1,25	0,8944
1,3	0,9032
1,35	0,9115
1,4	0,9192
1,45	0,9265

x	$\Phi(x)$
1,5	0,9332
1,55	0,9394
1,6	0,9452
1,65	0,9505
1,7	0,9554
1,75	0,9599
1,8	0,9641
1,85	0,9678
1,9	0,9713
1,95	0,9744
2	0,9772
2,1	0,9821
2,2	0,9861
2,3	0,9893
2,4	0,9918
2,5	0,9938
2,6	0,9953
2,7	0,9965
2,8	0,9974
2,9	0,9981
3	0,9986
3,1	0,9990
3,2	0,9993
3,3	0,9995
3,4	0,9997
3,5	0,9998
3,6	0,9998
3,7	0,9999
3,8	0,9999
3,9	1,0000

Poisson-eloszlás

$$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

k \ λ	0,5	1	2	3	4	5	10	15
0	0,61	0,37	0,14	0,05	0,02	0,01		
1	0,30	0,37	0,27	0,15	0,07	0,03		
2	0,08	0,18	0,27	0,22	0,15	0,08		
3	0,01	0,06	0,18	0,22	0,20	0,14	0,01	
4		0,02	0,09	0,17	0,20	0,18	0,02	
5			0,04	0,10	0,17	0,18	0,04	
6			0,01	0,05	0,10	0,15	0,06	
7				0,02	0,05	0,10	0,09	0,01
8				0,01	0,03	0,07	0,11	0,02
9					0,01	0,04	0,13	0,03
10						0,02	0,13	0,05
11						0,01	0,11	0,06
12							0,09	0,08
13							0,07	0,10
14							0,05	0,10
15							0,03	0,10
16							0,02	0,10
17							0,01	0,08
18							0,01	0,07
19								0,06
20								0,04
21								0,03
22								0,02
23								0,01
24								0,01

Standard normális eloszlás

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

x	$\Phi(x)$
0	0,5000
0,05	0,5199
0,1	0,5398
0,15	0,5596
0,2	0,5793
0,25	0,5987
0,3	0,5197
0,35	0,6368
0,4	0,6557
0,45	0,6736
0,5	0,6915
0,55	0,7088
0,6	0,7257
0,65	0,7422
0,7	0,7580
0,75	0,7734
0,8	0,7881
0,85	0,8023
0,9	0,8159
0,95	0,8289
1	0,8413
1,05	0,8531
1,1	0,8643
1,15	0,8749
1,2	0,8849
1,25	0,8944
1,3	0,9032
1,35	0,9115
1,4	0,9192
1,45	0,9265
1,5	0,9332
1,55	0,9394
1,6	0,9452
1,65	0,9505
1,7	0,9554
1,75	0,9599
1,8	0,9641
1,85	0,9678
1,9	0,9713
1,95	0,9744
2	0,9772
2,1	0,9821
2,2	0,9861
2,3	0,9893
2,4	0,9918
2,5	0,9938
2,6	0,9953
2,7	0,9965
2,8	0,9974
2,9	0,9981
3	0,9986
3,1	0,9990
3,2	0,9993
3,3	0,9995
3,4	0,9997
3,5	0,9998
3,6	0,9998
3,7	0,9999
3,8	0,9999
3,9	1,0000

TÁRGYMUTATÓ