BOLYAI-KÖNYVEK SOROZAT

A Bólyai-könyvek átfogó tudást adnak az egyes kiemelt területekről, így nem hiányozhatnak a matematikával, a mérnöki tudományokkal, a számítástechnikával foglalkozók könyvespolcáról.

A sorozat újra megjelent kötetei:

- Urbán János: Matematikai logika
- Urbán János: Határérték-számítás
- Fekete Zoltán–Zalay Miklós:
  Többváltozós függvények analízise

E kötet a differenciálegyenletekkel, azok osztályozásával, illetve megoldásával foglalkozik.

ISBN 963-16-3010-2

9 789631 630107

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

BOLYAI-KÖNYVEK

SCHARNITZKY VIKTOR

DIFFERENCIÁL-EGYENLETEK

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 4$$

SCHARNITZKY VIKTOR

DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Az

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

alakú differenciálegyenletet meg tudjuk oldani, ha az alábbi feltételek (legalább) egyike teljesül:

(a) a differenciálegyenlet változói szétválaszthatók,
(b) M és N ugyanolyan fokszámú homogén függvény,
(c) a differenciálegyenlet lineáris,
(d) a differenciálegyenlet egzakt,
(e) található alkalmas integráló tényező,
(f) van olyan helyettesítés, amely ismert típusra vezeti vissza a differenciálegyenletet.

Néhány egyszerű helyettesítés

A differenciálegyenlet alakja	A célszerű helyettesítés
$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	$y = xt$
$y' = f(ax+by+c)$	$u = ax+by+c$
$y'+y\,P(x) = y^n\,Q(x)$ (Bernoulli)	$y^{1-n} = v(x)$
$F(x, y', y'') = 0$	$y' = p(x)$
$F(y, y', y'') = 0$	$y' = p(y)$
$ax^2y''+bxy'+cy = f(x)$ (Euler)	$y = e^t$.

Az $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ differenciálegyenlet egzakt, ha $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$.

A megoldás ekkor:

$$F(x, y) = \int N(x, y)\,dy + \int\left[M(x, y) - \int \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\,dy\right]dx.$$

A BOLYAI-SOROZAT KÖTETEI:

Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
Solt György: Valószinűségszámítás
Lukács Ottó: Matematikai statisztika
Scharnitzky Viktor: Differenciálegyenletek
Bárczy Barnabás: Integrálszámítás
Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás
Urbán János: Matematikai logika
Urbán János: Határérték-számítás
Fekete Zoltán-Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise

SCHARNITZKY VIKTOR

DIFFERENCIÁL-EGYENLETEK

PÉLDATÁR

6. kiadás

MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Lektorálta:

DR. SZEREDAI ERIK
matematika-fizika szakos tanár

ISBN 963 10 0527 5 (első kiadás)
ISBN 963 16 3010 2
ISSN 1216-5344

TARTALOM

ALAPFOGALMAK 7

I. A differenciálegyenlet fogalma, származása 9
II. A differenciálegyenletek osztályozása 14
III. A differenciálegyenletek megoldása 17

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK 31

I. Elsőrendű differenciálegyenletek 33
A. Elsőrendű, y'-ben első fokú differenciálegyenletek 33
1. Explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenletek 34
2. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek 38
3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletekre visszavezethető differenciálegyenletek 65
a) Homogén fokszámú differenciálegyenletek 65
b) Az $y' = f(ax+by+c)$ típusú differenciálegyenletek 80
c) Az $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ típusú differenciálegyenletek. 88
d) Az $yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ típusú differenciálegyenletek 97
4. Egzakt differenciálegyenletek 101
5. Egzakt differenciálegyenletre visszavezethető differenciálegyenletek, integráló tényező 109
6. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek 121
a) Elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenletek 122
b) Elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek. Az állandó variálásának módszere 126
c) Elsőrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek. A próbafüggvény módszere 138
7. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletre visszavezethető egyenletek. A Bernoulli-féle differenciálegyenlet 148
8. Összefoglalás 154
B. Elsőrendű, y'-ben magasabb fokú differenciálegyenletek 171
1. p-re megoldható differenciálegyenletek 171
2. y-ra megoldható differenciálegyenletek 177
3. x-re megoldható differenciálegyenletek 184
4. A Clairaut-féle differenciálegyenlet 191

C. Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldása 195
1. Picard iterációs módszere 195
2. Elsőrendű differenciálegyenletek megoldása Taylor-sorokkal 201
3. Runge módszere 203
4. Runge—Kutta módszere 206
5. Elsőrendű differenciálegyenletek megoldása általános hatványsorok segítségével 207

II. Másodrendű differenciálegyenletek 211
A. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek 211
1. $y''=f(x)$ alakú differenciálegyenletek 212
2. $F(x, y', y'')=0$ alakú differenciálegyenletek 215
3. $F(y, y', y'')=0$ alakú differenciálegyenletek 220
B. Másodrendű lineáris differenciálegyenletek 226
1. Állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek 227
2. Állandó együtthatós, inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek. A próbafüggvény módszere 236
3. Állandó együtthatós, inhomogén másodrendű lineáris differenciálegyenletek. A két állandó variálásának módszere .. 243
4. Állandó együtthatós, másodrendű differenciálegyenletre visszavezethető differenciálegyenletek 249
a) Az Euler-féle differenciálegyenlet 249
b) Az általánosított Euler-féle differenciálegyenlet 253
5. Függvényegyütthatós, lineáris másodrendű differenciálegyenletek 258
C. Másodrendű differenciálegyenletek közelítő megoldása hatványsorok segítségével 269

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK ... 283

Elsőrendű lineáris állandó együtthatós differenciálegyenletrendszerek 286
A. Két ismeretlen függvényt tartalmazó rendszerek 286
B. Három ismeretlen függvényt tartalmazó rendszerek 293

PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK 297

I. Elsőrendű parciális differenciálegyenletek 299
A. Elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletek 300
B. Elsőrendű nemlineáris parciális differenciálegyenletek 313

II. Másodrendű parciális differenciálegyenletek 317
A. A rezgő húr differenciálegyenlete 317
B. A hővezetés differenciálegyenlete 329

ALAPFOGALMAK

I. A DIFFERENCIÁLEGYENLET FOGALMA, SZÁRMAZÁSA

Differenciálegyenletnek nevezzük az olyan egyenletet, amelyben deriváltak szerepelnek. Ez részletesebben azt jelenti, hogy a differenciálegyenletben szerepelhetnek konstansok, egy vagy több független változó, ezek valamilyen függvénye vagy függvényei, de a differenciálegyenletben szerepelnie kell e függvény vagy függvények az előbb említett független változó vagy változók szerinti közönséges, ill. parciális deriváltjának vagy deriváltjainak.

Differenciálegyenlet például az alábbi egyenletek bármelyike:

$$\frac{dy}{dx} = x^2+4, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-y = 0, \tag{2}$$

$$y'' = y'\sin x-\cos x, \tag{3}$$

$$y''+3y'+4y = 0, \tag{4}$$

$$y'^2y-\sin x = 0, \tag{5}$$

$$y'''+2y'^2+y' = e^x, \tag{6}$$

$$y''^3+y'^2+3y = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2+x\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x, \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Ha a differenciálegyenletben egyetlen független változó van [(1)—(7) példák], akkor a derivált közönséges derivált és a differenciálegyenletet *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük, ha a differenciálegyenletben kettő vagy több független változó van, a deriváltak parciális deriváltak [(8)—(10) példák], és a differenciálegyenletet *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha az ismeretlen függvények száma egynél több, akkor — az ismeretlen függvények meghatározhatósága feltételének megfelelően — az ismeretlen függvények számával egyenlő számú differenciálegyenletből álló (közönséges vagy parciális) *differenciálegyenlet-rendszerrel* van dolgunk. Ilyen differenciálegyenlet-rendszer pl. a következő:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1. \end{cases}$$

A differenciálegyenletek legtöbbször úgy keletkeznek, hogy valamilyen geometriai, fizikai, kémiai, műszaki, biológiai, technológiai, közgazdasági stb. probléma leírása vagy tanulmányozása során összefüggést találunk az ismeretlen függvények és ezek deriváltjai között.

Megjegyezzük, hogy az összefüggések megállapításakor, ill. a differenciálegyenletek felírásakor néha deriváltakat, néha differenciálokat fogunk használni. A két felírási módot egyenrangúnak tekintjük. Így például ugyanaz a differenciálegyenlet felírható az

$$y' = \frac{y}{x} + 1,$$

vagy az

$$x\,dy = (y+x)\,dx,$$

esetleg más alakban is.

Gyakorló feladatok

1. 100 gramm cukrot vízbe szórunk. Az oldódás sebessége a még fel nem oldott cukor mennyiségével arányos. Írjuk le egyenlettel a folyamatot!

Legyen a t másodperc alatt feloldódott cukor mennyisége q gramm. A fel nem oldódott cukor mennyisége ekkor $100-q$ gramm. Ha kis, dt idő alatt dq mennyiségű cukor oldódik fel, akkor az oldódás sebessége $\frac{dq}{dt}$, és ez arányos a még fel nem oldódott cukor mennyiségével, azaz

$$\frac{dq}{dt} = k(100-q),$$

ahol a k arányossági tényező. A kapott egyenlet tehát közönséges differenciálegyenlet. (A differenciálegyenlet megoldását l. a 39. oldalon.)

2. Tudjuk, hogy egy görbét az jellemzi, hogy bármely pontjában az érintő meredeksége az érintési pont koordinátáinak összegével egyenlő. Jellemezzük a görbének ezt a tulajdonságát egyenlettel!

Legyen a görbe egyenlete $y=y(x)$. A görbe egy tetszőleges pontjának koordinátái ekkor $P(x; y(x))$. Az érintő meredeksége a P pontban $m=y'(x)$. A feltételek értelmében

$$y'(x) = x+y(x),$$

vagy röviden

$$y' = x+y.$$

A felírt egyenlet közönséges differenciálegyenlet. (Megoldását l. a 81. oldalon.)

3. Ha egy testet elengedünk, akkor az szabadon esik. Írjuk fel a szabadon eső test mozgásegyenletét (a közegellenállástól tekintsünk el)!

Mint ismeretes, a test a nehézségi erő hatására állandó g gyorsulással mozog, ha a levegő légellenállásától eltekintünk. A gyorsulás az útnak idő szerinti második deriváltjával fejezhető ki, ezért ebben az esetben

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g$$

a keresett összefüggés; ez közönséges differenciálegyenlet. (Megoldását l. a 213. oldalon.)

4. Írjuk fel a három állandót tartalmazó

$$y = Ae^{3x}+Be^{2x}+Ce^{x}$$

függvény differenciálegyenletét!

A függvény első három deriváltját kiszámolva

$$y' = 3Ae^{3x}+2Be^{2x}+Ce^{x},$$

$$y'' = 9Ae^{3x}+4Be^{2x}+Ce^{x},$$

$$y''' = 27Ae^{3x}+8Be^{2x}+Ce^{x}$$

három egyenletet kapunk az ismeretlen három állandó meghatározására. A kiszámított ismeretleneket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve megkapjuk a keresett differenciálegyenletet.

Gyorsabban jutunk célhoz, ha az

$$\begin{aligned} Ae^{3x}+Be^{2x}+Ce^{x}-y &= 0, \\ 3Ae^{3x}+2Be^{2x}+Ce^{x}-y' &= 0, \\ 9Ae^{3x}+4Be^{2x}+Ce^{x}-y'' &= 0, \\ 27Ae^{3x}+8Be^{2x}+Ce^{x}-y''' &= 0 \end{aligned}$$

nullára redukált homogén egyenletrendszert oldjuk meg, ahol az ismeretlenek A, B, C, 1. Ennek akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha determinánsa 0 (l. pl. Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás*, 239. oldal, Műszaki Könyvkiadó, 1970), vagyis

$$\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{2x} & e^{x} & -y \\ 3e^{3x} & 2e^{2x} & e^{x} & -y' \\ 9e^{3x} & 4e^{2x} & e^{x} & -y'' \\ 27e^{3x} & 8e^{2x} & e^{x} & -y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Ha az első oszlopból e^{3x}-et, a másodikból e^{2x}-et, a harmadikból e^{x}-et kiemelünk, akkor

$$e^{6x}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -y \\ 3 & 2 & 1 & -y' \\ 9 & 4 & 1 & -y'' \\ 27 & 8 & 1 & -y''' \end{vmatrix} = 0,$$

ill. a determinánst utolsó oszlopa szerint kifejtve

$$e^{6x}(2y'''-12y''+22y'-12y) = 0.$$

Mivel $e^{6x}\neq 0$, ezért a görbe keresett differenciálegyenlete

$$y'''-6y''+11y'-6y = 0.$$

5. Küszöböljük ki a

$$z = ax^2+by^2+ab$$

kétváltozós függvényből az a és b állandókat!

Differenciáljuk a kétváltozós z függvényt előbb x, majd y szerint parciálisan:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2by.$$

Ebből

$$a = \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x}, \quad b = \frac{1}{2y}\frac{\partial z}{\partial y},$$

és ezt az eredeti kifejezésbe helyettesítve

$$z = \frac{x}{2}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{4xy}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},$$

ill. $4xy$-nal végigszorozva

$$4xyz = 2x^2y\frac{\partial z}{\partial x}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

A kapott összefüggés parciális differenciálegyenlet.

II. A DIFFERENCIÁLEGYENLETEK OSZTÁLYOZÁSA

A differenciálegyenleteket különféle szempontok szerint lehet osztályozni és ennek eredményeképpen többféle jelzővel ellátni. E megállapítások a megoldás menetének és módszereinek meghatározásakor nagyon fontosak lehetnek.

1. A differenciálegyenlet *rendje* az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendszámával egyenlő. Így például az előző fejezet példái közül az (1), (5), (8), (10) differenciálegyenletek elsőrendű, a (2), (3), (4), (7), (9) differenciálegyenletek másodrendű differenciálegyenletek, a (6) egyenlet harmadrendű differenciálegyenlet.

2. A közönséges differenciálegyenletek közül azokat, amelyekben az ismeretlen függvény és ennek deriváltjai legfeljebb csak az első hatványon fordulnak elő és szorzatuk nem szerepel, *lineáris differenciálegyenleteknek* nevezik. Minden más differenciálegyenlet *nemlineáris differenciálegyenlet*. Lineáris egyenlet például az (1), (2), (3), (4) egyenlet.

3. Ha a közönséges differenciálegyenletben van olyan tag, amely állandó, vagy amelyben *csak* a független változó szerepel, akkor a differenciálegyenlet *inhomogén*, ha nincs, akkor *homogén*. Az (1)—(7) példák közül a (2), (4) és (7) differenciálegyenlet homogén, a többi inhomogén.

4. Ha a közönséges differenciálegyenletben a függvényt és deriváltjait tartalmazó tagok együtthatói állandók, akkor a differenciálegyenletet *állandó együtthatós differenciálegyenletnek* nevezzük. Így például az (1), (2), (4), (5), (6), (7) egyenletek állandó együtthatós differenciálegyenletek. A nem állandó együtthatós differenciálegyenleteket szokás *függvényegyütthatós differenciálegyenleteknek* is nevezni.

Az állandó együtthatós differenciálegyenletek elsősorban a lineáris differenciálegyenletek körében játszanak lényeges szerepet, ezért szokták őket a lineáris differenciálegyenletek fontos speciális eseteként is tárgyalni.

Az előbb felsorolt jelzőket ismerve pl. a (3) egyenlet másodrendű, lineáris, függvényegyütthatós, inhomogén közönséges differenciálegyenlet, a (7) egyenlet másodrendű, nemlineáris, állandó együtthatós, homogén közönséges differenciálegyenlet, a (10) egyenlet elsőrendű háromváltozós parciális differenciálegyenlet.

Gyakorló feladatok

1. Milyen differenciálegyenlet a következő:

$$(xy^2+y)dx+(x^2y-x)dy = 0.$$

Átrendezve az egyenletet az

$$xy^2+y+x^2yy'-xy' = 0$$

alakról már látszik, hogy egy elsőrendű (a legmagasabb rendű derivált az y'), nem lineáris (mert pl. az y és az első derivált szorzata is fellép), homogén (mert csak x-től függő tag nincs benne), függvényegyütthatós differenciálegyenletről van szó.

2. Állapítsuk meg a

$$\frac{(2y''+x)^2}{xy+1} = 3$$

differenciálegyenlet rendjét! Lineáris és homogén-e az egyenlet?

Rendezzük előbb az egyenletet:

$$(2y''+x)^2 = 3xy+3,$$

$$4y''^2+4xy''-3xy+x^2-3 = 0.$$

A differenciálegyenletnek erről az alakjáról már könnyen leolvasható, hogy a differenciálegyenlet másodrendű (van benne y''), nem lineáris

(y'' a négyzeten van), inhomogén (van csak x-től függő tag, az x^2) közönséges differenciálegyenlet.

3. Milyen differenciálegyenlet a következő:

$$ax\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+by\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=e^x.$$

A kétváltozós u függvény legfeljebb második parciális deriváltjai fordulnak elő a differenciálegyenletben, ezért ez másodrendű parciális differenciálegyenlet. A jobb oldalon csak x-től függő tag van, ezért az egyenlet inhomogén.

III. A DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA

Differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint meghatározni mindazokat a függvényeket, amelyek a deriváltjaikkal együtt azonosan kielégítik az adott differenciálegyenletet. Ezek a *függvények a differenciálegyenlet megoldásai*. Mivel a differenciálegyenleteket általában integrálással oldjuk meg, a megoldást szokás a *differenciálegyenlet integráljának* is nevezni és a megoldások megkeresését a differenciálegyenlet integrálásának.

Például az

$$y''=12x$$

másodrendű differenciálegyenleteknek megoldása az

$$y=2x^3+Ax+B$$

függvény, mert

$$y'=6x^2+A,$$

$$y''=12x.$$

A differenciálegyenlet megoldása lehet *általános* vagy *partikuláris* megoldás, és lehet *reguláris* vagy *szinguláris* megoldás.

Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet *általános megoldása* az a függvény, amely pontosan n számú, tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz és deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet.

Az $y''=12x$ differenciálegyenletnek az $y=2x^3+Ax+B$ függvény az általános megoldása, mert két egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz (ezek A és B) és kielégíti a differenciálegyenletet.

A n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet *partikuláris megoldása* az a függvény, amely legfeljebb $n-1$ számú, tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz, és deriváltjaival együtt azonosan kielégíti a differenciálegyenletet. Speciális esetben a partikuláris megoldás egyetlen paramétert sem tartalmazhat. Általában (de nem mindig!) az általános megoldás tartalmazza az összes partikuláris megoldást, ezek az általános megoldásból úgy kaphatók, hogy az ott szereplő paramétereknek meghatározott értékeket adunk.

Mivel ezt végtelen sok módon tehetjük meg, egy differenciálegyenletnek végtelen sok partikuláris megoldása van.

Ha az előbbi példában $A=1$, $B=-2$, akkor

$$y = 2x^3+x-2.$$

Ez a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása.

A differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldásának kiválasztásához feltételeket kell megadni. Egy n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet esetében meg lehet adni a független változó egy adott értékéhez tartozó függvényértéket, az első, második, ..., $(n-1)$-edik derivált értékét. Ezek a *kezdeti feltételek*. Ha mind az n számú adatot megadjuk, a partikuláris megoldás nem fog paramétert tartalmazni.

Előző példánkban legyen $x=1$ és $y(1)=2$, $y'(1)=3$. (*Másodrendű* differenciálegyenlet esetén *két* kezdeti feltétel szükséges a paraméterek kiküszöböléséhez.) Ekkor a behelyettesítést elvégezve

$$y(1) = 2 = 2+A+B,$$

$$y'(1) = 3 = 6+A.$$

A második egyenletből

$$A = -3,$$

és ezt az elsőbe visszahelyettesítve

$$B = 3.$$

Az adott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás tehát

$$y = 2x^3-3x+3.$$

Ha csak egy kezdeti feltételt adtunk volna meg, akkor csak egy paramétert sikerült volna kiküszöbölnünk. A kapott függvény természetesen most is partikuláris megoldás.

Ha példánkban csak az $y(1)=2$ kezdeti feltételt adjuk meg, akkor ennek segítségével a

$$2 = 2+A+B$$

egyenlethez, és ebből a $B=-A$ feltételhez, majd az

$$y = 2x^3+Ax-A$$

partikuláris megoldáshoz jutunk el.

Az n-ed rendű közönséges differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldását úgy is ki lehet választani, hogy megadunk legfeljebb n számú összetartozó x és y értéket (pontot), amit a partikuláris megoldásnak ki kell elégítenie. Ezek a *kerületi vagy határfeltételek*. Ha pontosan n számú kerületi feltételt adunk meg, a partikuláris megoldásban nem lesz paraméter.

Legyen előző példánkban most $x_1=1$, $y_1=3$; $x_2=2$, $y_2=8$. Ekkor

$$3 = 2+A+B,$$

$$8 = 16+2A+B.$$

Megoldva az egyenletrendszert $A=-9$, $B=10$. Így a kerületi feltételeknek eleget tevő megoldás

$$y = 2x^3-9x+10.$$

Az elsőrendű

$$F(x, y, y') = 0$$

közönséges differenciálegyenlet

$$\Phi(x, y, c) = 0$$

általános megoldása az x, y síkban egy *egyparaméteres görbesereget* határoz meg.

Az itt megadható $y_1=y(x_1)$ kezdeti feltétel (összetartozó értékpár) geometriailag egy $P_1(x_1; y_1)$ pont megadását jelenti, és így az ezt az egy kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás a görbeseregnek azt a görbéjét jelenti, amely áthalad az adott P_1 ponton (1. ábra).

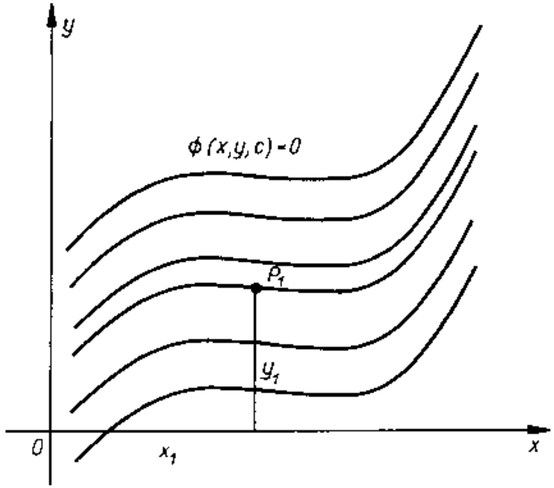
A másodrendű

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

közönséges differenciálegyenlet

$$\Phi(x, y, A, B) = 0$$

általános megoldása az x, y síkban egy *kétparaméteres görbesereget* határoz meg.



1. ábra

Az itt felírható két kezdeti feltétel geometriai jelentése a következő: az x_1 és y_1 megadása — amint már láttuk — egy olyan pont kitűzését jelenti, amelyen a partikuláris megoldást jelentő görbének át kell haladnia. Az $y'(x_1)=y_1'$ megadása geometriailag azt jelenti, hogy a P_1 ponton áthaladó görbék közül azt választjuk ki, amelynek érintője e pontban az adott y_1' meredekségű.

Példánkban az $y(1)=2$, $y'(1)=3$ kezdeti feltételek azt jelentették, hogy a $P(1; 2)$ ponton áthaladó és ott $m=3$ meredekségű érintővel rendelkező görbét választottuk ki az általános megoldás által meghatározott kétparaméteres görbeseregből.

Az $y(1)=3$, $y(2)=8$ kerületi feltételek megadása pedig geometriailag azt jelenti, hogy a kétparaméteres görbeseregből azt a görbét választjuk ki, amely áthalad az adott $P_1(1; 3)$ és $P_2(2; 8)$ pontokon.

Általában egy n-ed rendű, közönséges differenciálegyenlet általános megoldása egy n-paraméteres görbesereget határoz meg.

Ha a differenciálegyenlet általános megoldásának paramétere vagy paraméterei helyébe értékeket helyettesítünk, akkor partikuláris megoldásokat kapunk. Nem biztos azonban, hogy ilyen módon megkapjuk az összes partikuláris megoldást.

Említettük, hogy a differenciálegyenlet megoldásai között megkülönböztetünk reguláris és szinguláris megoldásokat. Most ezekről részletesebben szólunk.

Ha az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

n-ed rendű, közönséges differenciálegyenlet jobb oldalán álló függvény valamennyi változójának egy T zárt tartományban levő bármely $\{x_0, y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)\}$ értékrendszeréhez egy és csakis egy $y=y(x)$ függvény tartozik, amely azonosan kielégíti a differenciálegyenletet és a megadott kezdeti feltételeket (unicitás feltétele), akkor ez az $y=y(x)$ függvény a differenciálegyenlet *reguláris megoldása.*

Az előbb felírt n-ed rendű differenciálegyenletnek akkor és csak akkor van reguláris megoldása, ha a jobb oldalon álló f függvény T-ben korlátos, folytonos és eleget tesz az alábbi, ún. *Lipschitz-féle feltételnek* [R. Lipschitz (1832—1903) német matematikus]:

$$|f(x, y_2, y_2', \dots, y_2^{(n-1)}) - f(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})| \leq$$
$$\leq M(|y_2 - y_1| + |y_2' - y_1'| + \dots + |y_2^{(n-1)} - y_1^{(n-1)}|),$$

ahol M pozitív állandó.

Az f függvényre például biztosan teljesül a Lipschitz-féle feltétel, ha a T zárt tartományban f elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak.

A differenciálegyenlet olyan megoldását, amely egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás feltételének, *szinguláris megoldásnak* nevezzük. Ennek értelmében egy szinguláris megoldás bármely $(x; y)$ pontjának tetszőleges környezetében legalább két olyan integrálgörbe létezik, amely e ponthoz tartozó kezdeti feltételeket kielégíti. Így például ha az f függvény korlátos és folytonos, akkor szinguláris megoldások csak azokon a pontokon haladhatnak keresztül, amelyekben a Lipschitz-féle feltétel nem teljesül.

A szinguláris megoldás nem tartalmaz integrációs állandót és ezért nem származtatható az általános megoldásból a tetszőleges állandó speciális megválasztásával. A szinguláris megoldás geometriai jelentése: az általános megoldás ábrázolásakor kapott görbesereg *burkolója*. Fordítva általában nem igaz az állítás. A görbesereg burkolója nem biztos, hogy a differenciálegyenlet szinguláris megoldása.

Például az $y''=12x$ differenciálegyenlet $y=2x^3+Ax+B$ általános vagy $y = 2x^3-3x+3$ partikuláris megoldása bármely $[a, b]$ zárt intervallumban reguláris, hiszen a differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f(x)=12x$ függvény deriváltja: $f'(x)=12$ létezik és folytonos bármely $[a, b]$ intervallumban. Ennek a differenciálegyenletnek szinguláris megoldása nincs.

Ezzel szemben például a

$$2(y')^2+xy'-y = 0$$

differenciálegyenletnek van szinguláris megoldása. Tekintsük ugyanis az y' kifejezéséből adódó

$$y' = f(x, y) = \frac{-x\pm\sqrt{x^2+8y}}{4}$$

függvényt. Ennek parciális deriváltjai

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{4}\left(-1\pm\frac{x}{\sqrt{x^2+8y}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{4}\left(\pm\frac{4}{\sqrt{x^2+8y}}\right)$$

az $x^2+8y = 0$ esetben nincsenek értelmezve, így a Lipschitz-feltétel az ebből adódó

$$y = -\frac{x^2}{8}$$

parabola pontjaiban nem teljesül. Könnyen látható, hogy az előbbi függvény partikuláris megoldása a differenciálegyenletnek, hiszen

$$y' = -\frac{x}{4}$$

és ezt az egyenletbe helyettesítve

$$2\left(-\frac{x}{4}\right)^2+x\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{x^2}{8} = 8$$

valóban teljesül. Ezért differenciálegyenletünknek az $y = -\frac{x^2}{8}$ partikuláris megoldása *szinguláris megoldás.*

Az is könnyen látható, hogy differenciálegyenletünknek általános megoldása

$$y = Cx+2C^2$$

alakú, hiszen $y'=C$ és így

$$2C^2+Cx-Cx-2C^2 = 0$$

valóban teljesül és C szabadon választható paraméter. Figyeljük meg, hogy az

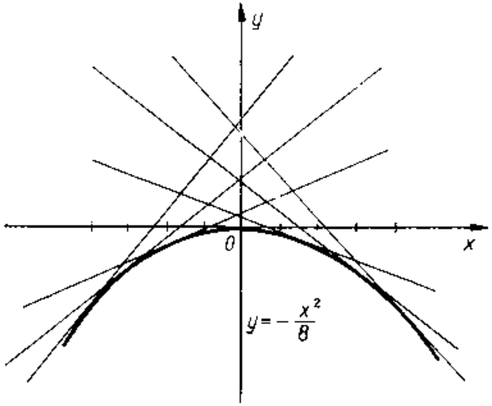
$$y = Cx+2C^2$$

általános megoldásból (sugársor egyenlete) az

$$y = -\frac{x^2}{8}$$

szinguláris megoldás (parabola egyenlete) semmiféle C érték esetén sem kapható meg. A parabola a sugársor egyeneseinek a burkolója (2. ábra).

Azt a függvényt, amely eleget tesz egy adott parciális differenciálegyenletnek, *a parciális differenciálegyenlet egy integ-*



2. ábra

ráljának nevezik. Ha ez az integrál *tetszőleges függvényeket* tartalmaz, akkor a differenciálegyenlet *általános megoldásának* nevezik, ha tetszőleges állandókat, de tetszőleges függvényeket nem, akkor az integrál a differenciálegyenlet *teljes megoldása.*

Például a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ax+y$$

parciális differenciálegyenletet a

$$z = \frac{1}{2}ax^2+xy+\psi(y)$$

függvény kielégíti, hiszen

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ax+y,$$

és ez a függvény differenciálegyenlet általános megoldása, mert tartalmaz egy tetszőleges függvényt, a $\psi(y)$ függvényt.

Ezzel szemben a

$$2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

parciális differenciálegyenletnek a

$$z = \frac{1}{2}x+c_1(3x-2y)+c_2$$

függvény a teljes megoldása, mert

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}+3c_1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2c_1$$

és így az eredeti differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítve

$$2\left(\frac{1}{2}+3c_1\right)+3(-2c_1) = 1,$$

ami a jobb oldallal azonos. A megoldás két tetszőleges állandót tartalmaz, tetszőleges függvényt nem.

Gyakorló feladatok

1. Mutassuk meg, hogy az $y = 2x+Ce^x$ az

$$y'-y = 2(1-x)$$

differenciálegyenlet általános megoldása, és keressük meg azt a partikuláris megoldást, amely kielégíti az $x=0$, $y=3$ feltételeket.

Mivel az $y = 2x+Ce^x$ egy tetszőleges állandót (paramétert) tartalmaz, és az adott egyenlet elsőrendű közönséges differenciálegyenlet, ezért a felírt megoldás csak általános megoldás lehet. Valóban az, mert differenciálva

$$y' = 2+Ce^x,$$

és így a differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítve

$$2+Ce^x-(2x+Ce^x) = 2(1-x),$$

ami a jobb oldallal azonosan egyenlő.

Az adott feltételek alapján

$$3 = 2\cdot 0+Ce^0 = C,$$

és így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_0 = 2x+3e^x.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy az $y = C_1e^x+C_2e^{2x}+x$ függvény a

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y = 2x-3$$

differenciálegyenlet általános megoldása, és keressük meg az egyenlet integrálgörbéi közül azt, amely áthalad a $P_1(0;0)$ és $P_2(1;0)$ pontokon.

Ha az adott differenciálegyenletbe behelyettesítjük az

$$y = C_1e^x+C_2e^{2x}+x,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1e^x+2C_2e^{2x}+1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1e^x+4C_2e^{2x}$$

kifejezéseket, akkor

$$C_1e^x+4C_2e^{2x}-3(C_1e^x+2C_2e^{2x}+1)+2(C_1e^x+C_2e^{2x}+x) = 2x-3,$$

ami az adott differenciálegyenlet jobb oldalával azonosan egyenlő, tehát az adott függvény másodrendű differenciálegyenletünknek valóban megoldása. A megoldás általános megoldás, mert két független állandót tartalmaz, és geometriai jelentése egy kétparaméteres görbesereg.

A görbeseregnek az a görbéje, amely az adott P_1 és P_2 pontokon halad át, e pontok koordinátáit felhasználva azonnal meghatározható. Ha ugyanis $x=0$ és $y=0$, akkor

$$C_1+C_2 = 0,$$

ha $x=1$ és $y=0$, akkor

$$C_1e+C_2e^2 = -1.$$

A két egyenletből

$$C_1 = -C_2 = \frac{1}{e^2-e},$$

és a keresett partikuláris megoldás

$$y = \frac{e^x-e^{2x}}{e^2-e}+x.$$

3. Van-e az

$$y(y')^2-2xy'+y = 0$$

differenciálegyenletnek szinguláris megoldása?

Az egyenletből y'-t kifejezve

$$y' = \frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4y^2}}{2y} = \frac{x\pm\sqrt{x^2-y^2}}{y} = f(x,y).$$

Az $f(x,y)$ függvény parciális deriváltjai

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}\left(1\pm\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mp\frac{y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}-(x\pm\sqrt{x^2-y^2})}{y^2} =$$

$$= -\left(\frac{1}{\pm\sqrt{x^2-y^2}}+\frac{x\pm\sqrt{x^2-y^2}}{y^2}\right).$$

A parciális deriváltaknak nincs értelme, ha

$$x^2-y^2 = 0, \quad \text{azaz} \quad y=\pm x,$$

ill., ha

$$y = 0.$$

Az $y_1=x$, $y_2=-x$ és $y_3=0$ függvények megoldásai az eredeti differenciálegyenletnek, mert $y_1'=1$, $y_2'=-1$, $y_3'=0$, és behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$x\cdot 1^2-2x\cdot 1+x = 0,$$

$$(-x)(-1)^2-2x(-1)-x = 0,$$

$$0 = 0$$

valóban teljesül. Tehát y_1, y_2 és y_3 a differenciálegyenlet szinguláris megoldásai.

Könnyen látható továbbá, hogy az

$$y^2 = 2Cx-C^2$$

egyenlettel megadott parabolasereg (C tetszőleges állandó) általános megoldása a differenciálegyenletnek, hiszen

$$y' = \frac{C}{y} = \frac{C}{\pm\sqrt{2Cx-C^2}},$$

és behelyettesítve

$$\pm\sqrt{2Cx-C^2}\,\frac{C^2}{2Cx-C^2} - 2x\,\frac{C}{\pm\sqrt{2Cx-C^2}} \pm\sqrt{2Cx-C^2} =$$

$$= \pm\frac{C^2-2Cx}{\sqrt{2Cx-C^2}} \pm\sqrt{2Cx-C^2} = 0$$

valóban teljesül. Ha $C=0$, akkor $y=0$ és így a parabolasereghez az x tengely is hozzá tartozik. Az x tengely tehát nem szinguláris megoldása a differenciálegyenletnek, mert az origótól eltekintve minden pontján át csak egy integrálgörbe halad át. A differenciálegyenlet szinguláris megoldásai tehát az $y_1=x$ és $y_2=-x$ egyenesek. Az egyenesek minden pontján (az origót kivéve) két integrálgörbe halad át: egy parabola és az illető egyenes, az origón pedig a két egyenes. Ezek az egyenesek a parabolák érintői a közös pontokban.

Ugyanis például az

$$y = x$$

egyenes és a $C=1$ értékhez tartozó

$$y^2 = 2x-1$$

parabola közös pontja a $P(1;1)$ pont, és a parabola érintőjének iránytényezője a pontban a differenciálással kapott

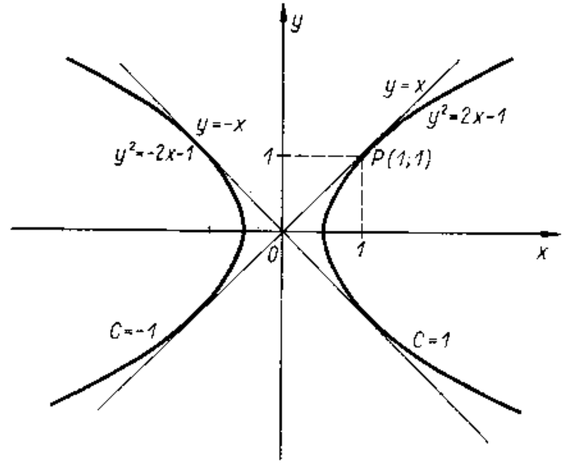
$$2yy' = 2$$

egyenletből

$$y' = \frac{1}{y}, \quad y'(1) = 1,$$

ami megegyezik az $y=x$ egyenes meredekségével. Ez bármely parabolára hasonló módon belátható.

Az $y=\pm x$ egyenesek a parabolák *burkolói*. A 3. ábrán a $C=1$ és $C=-1$ paraméterhez tartozó parabolákat (reguláris megoldások) és az $y_1=x$ és $y_2=-x$ egyeneseket tüntették fel, ezek a differenciálegyenlet szinguláris megoldásai.



3. ábra

4. Mutassuk meg, hogy az

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = z-x$$

parciális differenciálegyenletnek általános megoldása

$$\Phi(x^2+2yz,\ x+y+z) = 0$$

alakú, ahol Φ parciálisan differenciálható, de egyébként tetszőleges függvény; teljes megoldása pedig

$$x^2+2yz = c_1(x+y+z)+c_2$$

alakú, ahol c_1 és c_2 tetszőleges állandók.

Legyen $x^2+2yz=u$, $x+y+z=v$. Ekkor az implicit, majd az összetett függvények differenciálási szabálya szerint

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}2x+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}2y+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}2z+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}}{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}2y+\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}}.$$

Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve és a törteket kiküszöbölve

$$(y-z)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}2x+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)+(x-y)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}2z+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)=$$

$$=-(z-x)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}2y+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right).$$

A műveleteket elvégezve azonnal látszik, hogy a kapott egyenlet azonosság, tehát első állításunkat igazoltuk.

Második állításunk igazolásához számítsuk ki az

$$x^2+2yz-c_1(x+y+z)+c_2=0$$

egyenletből a $\frac{\partial z}{\partial x}$ és $\frac{\partial z}{\partial y}$ parciális deriváltakat. Az $F(x, y, z)$ alakú implicit függvény differenciálási szabálya szerint

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2x-c_1}{2y-c_1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{2z-c_1}{2y-c_1}.$$

Ezt az eredeti differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítve

$$-(y-z)\frac{2x-c_1}{2y-c_1}-(x-y)\frac{2z-c_1}{2y-c_1}=$$

$$=-\frac{2xy+c_1z-2yz-c_1x}{2y-c_1}=\frac{z(2y-c_1)-x(2y-c_1)}{2y-c_1}=z-x,$$

ez pedig a differenciálegyenlet jobb oldalával azonosan egyenlő, tehát

$$x^2+2yz-c_1(x+y+z)+c_2$$

valóban teljes megoldása az adott differenciálegyenletnek.

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

I. ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A. ELSŐRENDŰ, y'-BEN ELSŐFOKÚ DIFFERENCIÁL-EGYENLETEK

Az elsőrendű, y'-ben elsőfokú differenciálegyenletek általános alakja

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy = 0,$$

ahol $M(x, y)$ és $N(x, y)$ a sík valamilyen adott T tartományában értelmezett folytonos függvények. Az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ függvények típusától függően a differenciálegyenlet megoldása más-más módszerekkel történik.

Megemlítjük, hogy az elsőrendű differenciálegyenleteknek érdekes geometriai tartalom tulajdonítható. Egy

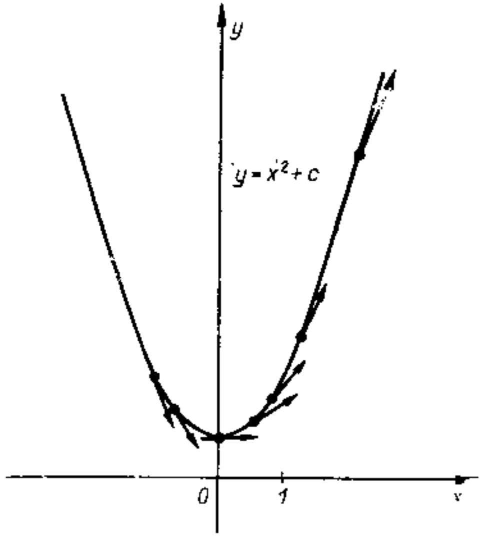
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

explicit alakú differenciálegyenlet az (x, y) pontok ama T tartományában, amelyben az egyenleteknek van megoldása, minden (x_0, y_0) ponthoz egy irányt határoz meg. Ez az

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0, y_0)} = f(x_0, y_0)$$

iranyhatározó, ahhoz az integrálgörbéhez húzható érintőnek a meredeksége, amely áthalad az (x_0, y_0) ponton. A T tartomány minden pontjához rendelt irányok összességét *iránymezőnek* nevezik. A 4. ábrán a

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$



4. ábra

differenciálegyenlet által létesített iránymező néhány pontjában megrajzoltuk az irányt és a pontokon áthaladó integrálgörbét, amelynek e pontbeli érintője ezzel az iránnyal egybeesik. Az integrálgörbék az

$$y = x^2 + c$$

egyenletű parabolák.

1. EXPLICIT ALAKÚ, ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁL-EGYENLETEK

Ha az

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

általános alakú, elsőrendű differenciálegyenlet rendezéssel

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

vagy

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

alakra hozható, explicit alakú, elsőrendű differenciálegyenletről beszélhetünk. A differenciálegyenlet általános megoldása az első esetben közvetlenül integrálással kapható meg

$$y = \int f(x)dx = F(x) + c;$$

a második esetben pedig az összetett függvény integrálási szabálya alapján [ha $g(y) \neq 0$] (l. Bárczy Barnabás: *Integrálszámítás*, Műszaki Könyvkiadó, 1972).

$$x = \int \frac{dy}{g(y)} = G(y) + c.$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az

$$y' = 2 \sin x$$

alakú differenciálegyenletet!

A differenciálegyenlet explicit alakú, tehát integrálva az általános megoldás

$$y = -2 \cos x + c,$$

ahol c tetszőleges konstans. Az integrálgörbék egybevágó görbék, amelyek az $y = -2 \cos x$ függvény görbéjéből az y tengely mentén történő eltolással kaphatók meg.

2. Keressük meg az

$$y' = \frac{1}{x+1}$$

differenciálegyenletnek azt az integrálgörbéjét, amely áthalad a $P(0; 1)$ ponton.

Integrálva

$$y = \ln |x+1| + \ln c,$$

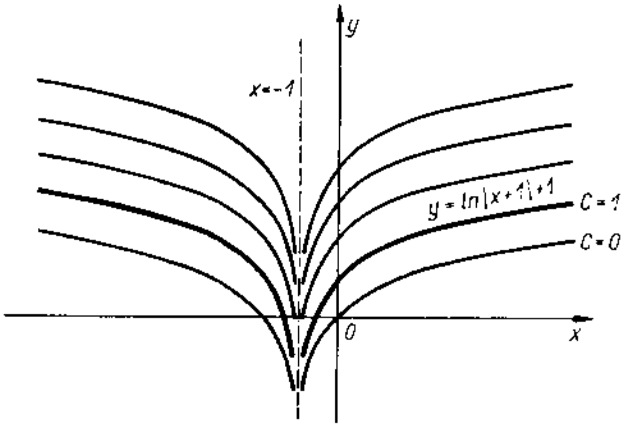
ahol a tetszőleges konstanst célszerűen $\ln c$ alakban írtuk fel. Az általános megoldás tehát

$$y = \ln c|x+1|.$$

Ha $x=0$ és $y=1$, akkor $1=\ln c$ alapján $c=e$, és a keresett partikuláris megoldás

$$y = \ln e|x+1| = \ln|x+1|+1$$

alakú. A partikuláris megoldást az 5. ábrán vastagítással jelöltük.



5. ábra

3. Megoldandó az

$$y'y^2=1$$

differenciálegyenlet.

A differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}$$

explicit alakú, tehát az általános megoldás

$$x = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}+c$$

alakú. Ebből y kifejezhető

$$y = \sqrt[3]{3x-c}.$$

4. Oldjuk meg az

$$y'+y^2 = 1$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenlet

$$y' = 1-y^2$$

explicit alakú, tehát az általános megoldás

$$x = \int \frac{1}{1-y^2}\,dy,$$

ha $y \neq \pm 1$. Az integrálást parciális törtekre bontással végezzük el:

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|1-y|+\ln|1+y|\right) = \ln\sqrt{\left|\frac{1+y}{1-y}\right|}.$$

Az általános megoldás tehát

$$x = \ln\sqrt{\left|\frac{1+y}{1-y}\right|}+\ln c = \ln c\sqrt{\left|\frac{1+y}{1-y}\right|}.$$

Vegyük észre, hogy az előbb kizárt $y=\pm 1$ függvények is megoldásai a differenciálegyenletnek. Az általános megoldásból y kifejezhető:

$$y = \frac{ke^{2x}-1}{ke^{2x}+1},$$

ahol $k = \dfrac{1}{c^2}$.

Más alakú megoldást kapunk, ha tudjuk, hogy

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \operatorname{arth} y+c, \quad \text{ha} \quad |y| < 1,$$

$$\int \frac{1}{1-y^2}\,dy = \operatorname{arcth} y+c, \quad \text{ha} \quad |y| > 1.$$

Ezt felhasználva

$$x = \operatorname{arcth} y + c, \quad \text{ha} \quad |y| < 1,$$
$$x = \operatorname{arcth} y + c, \quad \text{ha} \quad |y| > 1,$$

vagy y-t kifejezve

$$y = \operatorname{th}(x - c),$$
$$y = \operatorname{cth}(x - c).$$

2. SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ DIFFERENCIÁL-EGYENLETEK

Az

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

elsőrendű differenciálegyenlet változói szétválaszthatók (szeparálhatók), ha az egyenlet felírható az

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

alakban. Ugyanis, ha $g_1(y)f_2(x) \neq 0$, akkor elosztva ezzel az egyenletet

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0,$$

vagy más jelöléssel

$$F(x)dx + G(y)dy = 0,$$

és itt az x, ill. y változó csak egyetlen egy tagban szerepel, ezzel a változókat szétválasztottuk. A differenciálegyenlet általános megoldása integrálással kapható:

$$\int F(x)dx + \int G(y)dy = C.$$

A gyakorlatban legtöbbször az egyenlet egyik oldalára az egyik, a másik oldalára a másik változót tartalmazó kifejezéseket szokás összegyűjteni. Vigyázzunk azonban arra, hogy melyik változót tartalmazó kifejezéseket az egyenlet melyik oldalára gyűjtjük, mert ez nem önkényes, hanem ebben az esetben az x változót tartalmazó kifejezéseket oda *kell* átvinni, ahol a dx szorzóként szerepel, és hasonlóan az y változó kifejezését arra az oldalra, ahol dy szorzó.

Az integrációs konstanst fölösleges az egyenlet mind a két oldalán feltüntetni, azt legtöbbször az x változó oldalán szokás kitenni.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az első rész I. fejezetének 1. gyakorló feladatában felírt

$$\frac{dq}{dt} = k(100 - q)$$

differenciálegyenletet. Mennyi cukor lesz az oldatban t másodperc múlva?

A változókat szétválaszthatjuk:

$$\frac{dq}{100 - q} = k\,dt.$$

Integrálva

$$-\ln(100 - q) = kt - c.$$

Ha e alapra emeljük mind a két oldalt

$$100 - q = e^{-kt+c} = Ce^{-kt},$$

amiből

$$q = 100 - Ce^{-kt}.$$

Ennyi gramm cukor lesz t másodperc múlva a vízben oldott állapotban.

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$x^3dx + (y+1)^2dy = 0.$$

Az

$$x^3dx = -(y+1)^2dy$$

átalakítással a differenciálegyenlet változóit szétválasztottuk, és az egyenlet mind a két oldalán integrálva

$$\frac{x^4}{4} + c = -\frac{(y+1)^3}{3},$$

amiből az általános megoldás

$$3x^4 + 4(y-1)^3 = C$$

alakban is felírható, ahol $-12c = C$.

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$4xy^2 dy - 3y^3 dx = xy^3 dx + 2x\, dy.$$

Kíséreljük meg szétválasztani a változókat! Kiemeléssel

$$2x(2y^2-1)dy = y^3(x+3)dx,$$

és osztással ($x \neq 0$, $y \neq 0$)

$$\frac{2y^2-1}{y^3} dy = \frac{x+3}{2x} dx.$$

A szétválasztás sikerült, integráljunk mind a két oldalon:

$$2 \ln |y| + \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2} x + \frac{3}{2} \ln |x| + c.$$

Ebből az általános megoldás implicit alakban

$$\ln \frac{y^4}{|x^3|} = x - \frac{1}{y^2} + 2c.$$

Könnyen látható, hogy a kizárt $y=0$ függvény is megoldása a differenciálegyenletnek.

4. Keressük meg az

$$y(9+4x^2)y' = 1$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

Ha y' helyébe $\frac{dy}{dx}$-et írunk és a változókat szétválasztjuk, akkor az

$$y\, dy = \frac{dx}{9+4x^2}$$

egyenlethez jutunk. A jobb oldal integrálását külön végezzük el.

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + c.$$

Így

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + c,$$

vagyis

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + c}.$$

5. Írjuk fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' = \frac{4y}{x(y-3)}.$$

y' helyébe $\frac{dy}{dx}$-et írva és rendezve, az

$$\frac{y-3}{y} dy = \frac{4}{x} dx$$

alakú egyenlethez jutunk, ahol y nem lehet 0. (Az $x \neq 0$ feltételt felesleges ismét kimondanunk, mert ha $x=0$, akkor az eredetileg felírt differenciálegyenletnek sincs értelme.) A változókat sikerült szétválasztanunk. Ha az egyenlet bal oldalát

$$\left(1 - \frac{3}{y}\right) dy$$

alakban írjuk fel, könnyen integrálhatunk, és így

$$y - 3 \ln |y| = 4 \ln |x| + \ln c,$$

amiből

$$y = \ln |y^3| + \ln x^4 + \ln c,$$

azaz

$$y = \ln |cy^3 x^4|,$$

és ez az

$$e^y = cy^3 x^4$$

alakban is felírható.

A kizárt $y=0$ függvény is reguláris megoldása az eredeti differenciálegyenletnek, de nem kapható meg az általános megoldásból.

6. Megoldandó az

$$x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$$

differenciálegyenlet.

Ha $x \neq 1$ és $y \neq -1$, akkor az egyenlet az

$$\frac{x^2}{x-1} dx = -\frac{y^2}{y+1} dy$$

alakra hozható. Ha az egyenlet bal és jobb oldalán a számlálóban 1-et hozzáadunk és levonunk, a következő átalakítást végezhetjük:

$$\frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1}\,dx=-\frac{(y-1)(y+1)+1}{y+1}\,dy.$$

Az egyszerűsítés után kapott

$$\left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy$$

egyenlet mind a két oldala most már könnyen integrálható, mégpedig

$$\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+c=-\left(\frac{y^2}{2}-y+\ln|y+1|\right)$$

Rendezés után

$$x^2+y^2+2x-2y+2\ln|x-1|+2\ln|y+1|=C,$$

ill.

$$(x+1)^2+(y-1)^2+\ln[(x-1)(y+1)]^2=K$$

alakú az általános megoldás.

A kizárt $y=-1$ függvény nem kapható meg az általános megoldásból, bár az eredeti differenciálegyenletnek — amiről behelyettesítéssel könnyen meg lehet győződni — reguláris megoldása.

7. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1+2y)dx+(4-x^2)dy=0.$$

A differenciálegyenlet változói szétválaszthatók, ha $1+2y\neq 0$ és $4-x^2\neq 0$. Ekkor ugyanis

$$\frac{dy}{1+2y}=\frac{dx}{x^2-4}.$$

Az integrálás elvégzése érdekében a bal oldal számlálójában előállítjuk a nevező deriváltját, a jobb oldalon parciális törtekre bontunk.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2\,dy}{1+2y}=\int\frac{dx}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2},$$

az integrálást elvégezve

$$\frac{1}{2}\ln|1+2y|=\frac{1}{4}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)+\ln c$$

Alakítsuk át a kapott megoldást

$$\ln|1+2y|=\ln C\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|},$$

$$1+2y=C\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(C\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}-1\right).$$

Könnyen látható, hogy az előbb kizárt $y=-\dfrac{1}{2}$ is megoldása a differenciálegyenletnek.

8. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$x(x-1)y'+y(y-1)=0.$$

A változók szétválaszthatók, mert

$$x(x-1)\frac{dy}{dx}=y(1-y)$$

és így ha $y\neq 0$ és $y\neq 1$, ill. $x\neq 0$ és $x\neq 1$, akkor

$$\frac{dy}{y(1-y)}=\frac{dx}{x(x-1)}.$$

Az egyenlet mind a két oldalát résztörtekre bontva

$$\left(\frac{A}{y}+\frac{B}{1-y}\right)dy=\left(\frac{C}{x}+\frac{D}{x-1}\right)dx,$$

ahol az A, B, C és D állandókat az egyenlet két oldalának közös nevezőre hozása után kapott

$$A(1-y)+By\equiv 1\quad\text{és}\quad C(x-1)+Dx\equiv 1$$

azonosságokból számítjuk ki. Az első azonosságból

$$A=1,\quad B=1,$$

a másodikból

$$C=-1,\quad D=1.$$

Ezekkel egyenletünk az

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right) dy = \left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right) dx$$

alakot ölti, és így az

$$\int \frac{1}{y}\,dy+\int \frac{1}{1-y}\,dy = -\int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

integrálás már könnyen elvégezhető:

$$\ln|y|-\ln|1-y| = -\ln|x|+\ln|x-1|+\ln c.$$

Átalakítás után

$$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = \ln\left|\frac{c(x-1)}{x}\right|,$$

amiből

$$\frac{y}{1-y} = c\,\frac{x-1}{x},$$

ill.

$$xy = c(x-1)(1-y).$$

Figyeljük meg, hogy a megoldás során kizárt $y=0$ is megoldása a differenciálegyenletnek és ez az általános megoldásból a $C=0$ érték helyettesítésekor kapható meg, viszont az $y=1$ érték, ami ugyancsak megoldása az eredeti differenciálegyenletnek, az általános megoldásból nem kapható meg semmilyen c érték behelyettesítésével sem.

Ha a megoldás során az integrációs konstanst az egyenlet bal oldalára írtuk volna fel, akkor az általános megoldás

$$Bxy = (x-1)(1-y)$$

alakú lett volna, és ekkor $B=0$ esetén az $y=1$ partikuláris megoldást kaptuk volna meg, de az $y=0$ partikuláris megoldást nem.

9. Keressük meg az

$$(1+x^3)dy-x^2y\,dx = 0$$

differenciálegyenletnek azt az integrálgörbéjét, amely áthalad a $P(1;2)$ ponton.

A differenciálegyenlet változóit szétválaszthatjuk, hiszen rendezés után az

$$\frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \frac{dy}{y}$$

egyenlethez jutunk, ahol $x \neq -1$ és $y\neq 0$. Ha a bal oldalon álló tört számlálóját 3-mal bővítjük, a tört számlálójában a nevező deriváltja áll, ezért a tört könnyen integrálható. Ekkor

$$\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+\ln c = \ln|y|,$$

amiből

$$\ln|y^3| = \ln c^3|1+x^3|,$$

ill.

$$y^3 = C(1+x^3).$$

A kezdeti feltételek alapján

$$2^3 = C(1+1^3),$$

és ebből

$$C = 4.$$

A keresett görbe egyenlete tehát

$$y^3 = 4(1+x^3).$$

10. Írjuk fel az

$$e^{y-x}dx+e^{x-y}dy = 0.$$

differenciálegyenlettel megadott görbesereg az origón áthaladó görbéjének az egyenletét!

Az egyenlet bal oldalát átalakítva

$$\frac{e^y}{e^x}\,dx+\frac{e^x}{e^y}\,dy = 0.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{dy}{e^{2y}} = -\frac{dx}{e^{2x}},$$

ill.

$$e^{-2y}dy = -e^{-2x}dx.$$

Integrálás után

$$\frac{e^{-2y}}{-2} = \frac{e^{-2x}}{2}+c,$$

amiből

$$e^{-2y}+e^{-2x} = -2c.$$

E görbék közül az halad át az origón, amelyre

$$e^0+e^0 = -2c,$$

vagyis $c = -1$.

Így az origón áthaladó görbe egyenlete

$$e^{-2y}+e^{-2x} = 2.$$

11. Keressük meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y(1+x^2)y'+x\sqrt{1-y^2} = 0.$$

A változók szétválasztása érdekében alakítsuk át a differenciálegyenletet

$$-y(1+x^2)\frac{dy}{dx} = x\sqrt{1-y^2},$$

$$-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

ahol $|y|\neq 1$. (Azonnal látható, hogy az $|y|=1$ függvény megoldása az eredeti differenciálegyenletnek.)

Az integrálás érdekében szorozzuk meg a differenciálegyenletnek mind a két oldalát 2-vel. Ekkor

$$\int(-2y)(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int\frac{2x}{1+x^2}\,dx,$$

ill. integrálva

$$2(1-y^2)^{\frac{1}{2}} = \ln(1+x^2)+\ln c.$$

Ebből

$$\sqrt{1-y^2} = \ln\sqrt{c(1+x^2)},$$

ill.

$$y = \pm\sqrt{1-\ln^2\sqrt{c(1+x^2)}}.$$

Látható, hogy az $|y|=1$ megoldás az általános megoldásból semmilyen c érték helyettesítésével sem kapható meg.

12. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$2r\cos\varphi\,dr-\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi = 0.$$

A változók szétválaszthatók, mert

$$2r\,dr = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Integrálás után

$$r^2 = \frac{1}{\cos\varphi}+C.$$

Ha $\cos\varphi=0$, akkor nincs megoldás, de ekkor a differenciálegyenletnek sincs értelme.

13. Keressük meg az

$$e^x\cos y\,dx+(1+e^x)\sin y\,dy = 0$$

egyenletnek azt a partikuláris megoldását, amelyre $y(0)=0$.

Egyenletünk így is írható:

$$\frac{-\sin y}{\cos y}\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx,$$

ahol $\cos y\neq 0$. Integrálva (mind a két tört számlálójában a nevező deriváltja áll!).

$$\ln|\cos y| = \ln(e^x+1)+\ln c,$$

amiből az általános megoldás

$$\cos y = c(e^x+1).$$

Ha $x=0$, akkor $y=0$, és így az

$$1 = c(1+1)$$

egyenletből $c = \dfrac{1}{2}$ A keresett partikuláris megoldás tehát

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^x+1).$$

Megjegyezzük, hogy a kizárt $\cos y=0$ partikuláris megoldás az általános megoldásból $c=0$ esetben kapható meg.

14. Egy 100 literes teli víztartályban 4 gramm klórmész van oldott állapotban. A tartályba 5 l/min sebességgel tiszta víz folyik be, és az oldat ugyanilyen sebességgel a túlfolyón kifolyik. Mennyi lesz a víz klórmésztartalma fél óra múlva, ha a klórmész egyenletes eloszlását állandó keveréssel biztosítjuk?

Legyen az oldat klórmésztartalma t perc múlva x gramm. Az oldat koncentrációja ekkor

$$k = \frac{x}{100}\ \text{(g/l)}.$$

Kis, dt idő alatt $5\,dt$ liter tiszta víz folyik a tartályba és ugyanakkor $5\,dt$ liter oldat folyik ki a tartályból, ami $5\,k\,dt$ gramm klórmeszet visz magával. A tartályban levő klórmész dx megváltozása tehát

$$dx = -5k\,dt = -5\frac{x}{100}\,dt.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a klórmésztartalom csökkent. Feladatunkat tehát a

$$dx = -0{,}05\,x\,dt,$$

ill. a változók szétválasztása után kapott

$$\frac{dx}{x} = -0{,}05\,dt$$

differenciálegyenlet írja le.

A kezdeti feltételeket az integrációs határok megválasztásánál vesszük figyelembe. Az oldatban kezdetben 4 g klórmész volt, és ez csökken 30 perc alatt egy ismeretlen X mennyiségre. Így

$$\int_4^X \frac{dx}{x} = \int_0^{30} -0{,}05\,dt.$$

Integrálva

$$[\ln x]_4^X = -0{,}05[t]_0^{30},$$

a határokat behelyettesítve

$$\ln X - \ln 4 = -1{,}5,$$

vagyis

$$\frac{X}{4} = e^{-1{,}5},$$

amiből

$$X = 4e^{-1{,}5} = 4\cdot 0{,}223 = 0{,}892.$$

A vízben tehát fél óra múlva közelítőleg 0,9 g klórmész lesz.

Figyeljük meg, hogy a klórmész mennyisége az idő függvényében exponenciálisan csökken.

15. A rádium bomlási sebessége minden időpillanatban egyenesen arányos a jelen levő tömegével. Határozzuk meg, hogy az m_0 tömegű rádium hány százaléka bomlik el 100 év alatt, ha tudjuk, hogy a rádium felezési ideje (az az idő, ami alatt a rádium fele elbomlik) 1590 év!

A rádium bomlási sebességét az egységnyi idő alatt elbomlott mennyiséggel mérjük. Valamely t időpillanatban kezdődő kicsiny dt idő alatt az m tömegű rádiumból

$$dm = -km\,dt$$

mennyiségű elbomlik, ahol k a bomlási együtthatót jelenti.

A kapott differenciálegyenlet változóit szétválasztva

$$\frac{dm}{m} = -k\,dt.$$

A kezdeti feltételeket az integrációs határok megválasztásánál vesszük figyelembe. Ha a rádium kezdeti m_0 tömege 100 év alatt m_{100}-ra csökken, akkor

$$\int_{m_0}^{m_{100}} \frac{dm}{m} = -k\int_0^{100} dt.$$

Integrálva

$$[\ln m]_{m_0}^{m_{100}} = -k[t]_0^{100}.$$

A határokat behelyettesítve

$$\ln m_{100} - \ln m_0 = -100\,k,$$

azaz

$$\ln\frac{m_{100}}{m_0} = -100\,k,$$

amiből

$$m_{100} = m_0 e^{-100k}.$$

A k együtthatót abból a feltételből számítjuk ki, hogy a rádium felezési ideje 1590 év. Ebben az esetben

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-1590k},$$

vagyis

$$-\ln 2 = -1590\,k,$$

azaz

$$k = 0{,}00044.$$

Ennek segítségével

$$m_{100} = m_0 e^{-0{,}044} = m_0\cdot 0{,}957.$$

A századik év végén tehát az anyag 95,7%-a még nem bomlott el, tehát a felbomlott mennyiség az eredeti mennyiség 4,3%-a.

16. Egy teremben, amelynek méretei 15, 15 és 4 m, a szellőző berendezés bekapcsolásakor 0,2% széndioxidot észleltek a levegőben. A szellőzőberendezés percenként 90 m³ 0,05% széndioxidot tartalmazó friss levegőt nyom a terembe. Mekkora lesz a terem levegőjében a széndioxidtartalom 20 perc múlva?

Legyen x m³ széndioxid a terem levegőjében a t időpontban, ekkor a széndioxid koncentrációja $k=\dfrac{x}{900}$. Kis, dt időtartam alatt a terembe $90\cdot 0{,}0005\,dt$ m³, a teremből ugyanakkor $90\cdot\dfrac{x}{900}\,dt$ m³ széndioxid távozik. A széndioxid-mennyiség dx megváltozása tehát dt idő alatt

$$dx = 90\left(0{,}0005-\frac{x}{900}\right)dt = \frac{0{,}45-x}{10}\,dt,$$

és ez a folyamatot leíró differenciálegyenlet. A változókat szétválasztva

$$\frac{dx}{x-0{,}45} = -\frac{dt}{10}.$$

A kezdeti feltételeket az integrációs határok megállapításánál vesszük figyelembe. A szellőző bekapcsolásakor $0{,}002\cdot 900=1{,}8$ m³ széndioxid volt a levegőben, így

$$\int_{1,8}^{X}\frac{dx}{x-0{,}45} = -\int_{0}^{20}\frac{dt}{10}.$$

Az integrálást elvégezve

$$[\ln(x-0{,}45)]_{1,8}^{X} = -\frac{1}{10}[t]_0^{20},$$

amiből

$$\ln(X-0{,}45)-\ln 1{,}35 = -2,$$

vagyis a keresett széndioxidtartalom

$$X = 0{,}45+1{,}35e^{-2} = 0{,}63 \text{ m}^3,$$

vagy százalékosan kifejezve

$$\frac{0{,}63}{900} = 0{,}0007, \quad \text{azaz} \quad 0{,}07\%.$$

17. A kemencéből kivett kenyér hőmérséklete 30 perc alatt a kezdeti 120 °C-ról 60 °C-ra csökken. A levegő hőmérséklete 30 °C. A hűlés kezdetétől számítva mennyi idő alatt csökken a kenyér hőmérséklete 40 °C-ra?

Newton törvénye szerint a test lehűlési sebessége arányos a test és környezete hőmérsékletének különbségével. Mivel ez a különbség a folyamat során változik, a lehűlés nem egyenletes.

Ha T jelöli a kenyér, T_k a környezet hőmérsékletét, akkor a kenyér lehűlési sebessége, vagyis a dt idő alatt bekövetkezett dT hőmérsékletváltozás

$$\frac{dT}{dt} = a(T-T_k),$$

ahol az a arányossági tényező. A kapott differenciálegyenlet változóit szétválasztva

$$\frac{dT}{T-T_k} = a\,dt.$$

Mind a két oldalon integrálva

$$\ln(T-T_k) = at+\ln C,$$

ahol C integrációs konstans. Átalakítva az egyenletet (mivel $e^{\ln C}=C$)

$$T-T_k = e^{at+\ln C}=C\,e^{at},$$

amiből

$$T = Ce^{at}+T_k.$$

Esetünkben $T_k=30$, ezért

$$T = Ce^{at}+30.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

A C konstans értékeit a kezdeti feltételekből határozzuk meg. A folyamat kezdetekor, vagyis ha $t=0$, akkor $T=120$, és így a

$$120 = Ce^0+30$$

egyenletből

$$C = 90.$$

Az a arányossági tényezőtől függő e^a konstans értékét abból a kiegészítő feltételből határozzuk meg, hogy $t=30$ esetén $T=60$. Most

$$60 = 90\,e^{30a}+30,$$

vagyis

$$(e^a)^{30} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3},$$

és ebből

$$e^a = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{30}}.$$

A kenyér lehűlési folyamatát leíró egyenlet a feladat feltételei mellett tehát

$$T = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{30}} + 30$$

alakú. Ebből már könnyen kiszámíthatjuk azt a t időtartamot, amely alatt a kenyér hőmérséklete $T=40$ °C-ra csökken. Ugyanis a

$$40 = 90\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} + 30$$

egyenletből

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{30}} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2},$$

azaz

$$\frac{t}{30} = 2,$$

amiből

$$t = 60,$$

vagyis a kenyér 60 perc alatt hűl le 120 °C-ról 40 °C-ra, ha a levegő hőmérséklete 30 °C.

18. Az etil-acetát elszappanosítási reakciója nátronlúggal a következő reakcióegyenlet szerint folyik le:

$$CH_3COO-C_2H_5 + NaOH \rightarrow CH_3COONa + C_2H_5OH.$$

Ha az etil-acetát kezdeti koncentrációja $a=0{,}02$ súlyszázalék, a nátrium-hidroxid kezdeti koncentrációja $b=0{,}004$ súlyszázalék, és azt tapasztaljuk, hogy az etil-acetát koncentrációja 25 perc alatt 10%-kal csökken, akkor mennyi idő alatt csökken a koncentráció 15%-kal?

Ha egy kémiai reakció molekulapárok egymásra hatásából áll, akkor bimolekuláris reakcióról beszélünk. Ebben az esetben az egyik anyag 1 mólnyi mennyisége a másik anyag 1 mólnyi mennyiségével egyesül, ezért a két anyagból ugyanannyi mól vesz részt a reakcióban. Ha y jelenti a reakciótermék koncentrációját a t időpillanatban, akkor a reakciósebesség a tapasztalat szerint arányos a reakcióba lépő anyagok t időpontbeli $a-y$, ill. $b-y$ koncentrációjával

$$\frac{dy}{dt} = K(a-y)(b-y),$$

ahol K arányossági tényező.

A differenciálegyenlet változóit szétválasztva

$$\frac{dy}{K(a-y)(b-y)} = dt,$$

ahol $y \neq a$ és $y \neq b$. Az egyenlet bal oldalán az integrálás elvégzéséhez parciális törtekre bontunk. A felbontás

$$\int \frac{dy}{(a-y)(b-y)} = \int\left(\frac{A}{a-y} + \frac{B}{b-y}\right)dy$$

alakú, és az A és B együtthatókat az

$$1 \equiv A(b-y) + B(a-y)$$

azonosságból kiszámítva

$$A = \frac{1}{b-a}, \quad B = \frac{1}{a-b}.$$

Így az

$$\frac{1}{K(b-a)}\int\left(\frac{1}{a-y} - \frac{1}{b-y}\right)dy = \int dt$$

egyenlethez jutunk, majd az integrálás elvégzése után

$$\frac{1}{K(b-a)}\left[-\ln(a-y) + \ln(b-y) + \ln c\right] = t,$$

vagyis

$$t = \frac{1}{K(b-a)} \ln c\,\frac{b-y}{a-y}.$$

Ez az egyenlet általános megoldása. A c integrációs konstans kiszámításához a $t=0$, $y=0$ kezdeti feltételt használjuk fel. Ekkor a

$$0 = \frac{1}{K(b-a)} \ln c\,\frac{b}{a}$$

egyenletből

$$\ln c\,\frac{b}{a} = 0, \quad \text{azaz} \quad c\,\frac{b}{a} = 1,$$

vagyis

$$c = \frac{a}{b}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$t = \frac{1}{K(b-a)} \ln \frac{a(b-y)}{b(a-y)}.$$

A K arányossági tényezőt a $t=25$, $y=0{,}1a=0{,}1\cdot 0{,}02=0{,}002$ kiegészítő eltételből állapítjuk meg. Ennek alapján

$$25 = \frac{1}{K(0{,}004-0{,}02)} \ln \frac{0{,}02(0{,}004-0{,}002)}{0{,}004(0{,}02-0{,}002)},$$

vagyis

$$K = -\frac{1}{25(0{,}016)} \ln \frac{40}{72} = -\frac{\ln(0{,}555)}{0{,}4} \approx 1{,}47.$$

Most már könnyen válaszolhatunk feladatunk kérdésére. Esetünkben $y=0{,}15a=0{,}003$, és így

$$t = \frac{1}{1{,}47(0{,}004-0{,}02)} \ln \frac{0{,}02(0{,}004-0{,}003)}{0{,}004(0{,}02-0{,}003)} =$$

$$= -\frac{1}{0{,}0235} \ln \frac{5}{17} = 51{,}4.$$

Tehát az etil-acetát mennyisége közelítőleg 51,5 perc alatt csökken 15%-kal.

19. A folyadékcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Határozzuk meg a gömb alakú folyadékcsepp sugarát mint az idő függvényét!

Ha a kis, Δt idő alatt bekövetkezett sugárváltozást Δr-rel jelöljük, akkor a változás $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ átlagsebessége a csepp pillanatnyi felszínével arányos, azaz

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = -k4r^2\pi,$$

ahol k az arányossági tényező, a negatív előjel pedig azt jelzi, hogy a sugár csökken. Ha Δt minden határon túl csökken, akkor

$$\frac{dr}{dt} = -k4r^2\pi$$

a jelenséget leíró differenciálegyenlet.

A változókat szétválasztva

$$\frac{dr}{r^2} = -4k\pi\, dt,$$

integrálva

$$-\frac{1}{r} = -4k\pi t - c,$$

amiből

$$r = \frac{1}{4k\pi t + c}.$$

A c állandót abból a kezdeti feltételből állapítjuk meg, hogy $t=0$ esetén $r=R$ (a gömb eredeti sugara). Ekkor $R = \frac{1}{c}$, amiből $c = \frac{1}{R}$ és így a megoldás

$$r = \frac{1}{4k\pi t + \frac{1}{R}} = \frac{R}{4k\pi Rt + 1}.$$

20. Egy rakétát $v_0=120$ m/s sebességgel lőnek ki függőlegesen felfelé. Határozzuk meg, mennyi idő múlva éri el a rakéta a legmagasabb helyzetét, ha a levegő ellenállását állandónak tételezzük fel!

A rakéta mozgását a levegő ellenállása akadályozza, a rakétának ebből származó negatív gyorsulása $-kv^2$, ahol v a rakéta pillanatnyi sebessége, k a közegellenállási együttható. Így a rakéta gyorsulása

$$a = -g - kv^2.$$

Mivel

$$a = \frac{dv}{dt},$$

ezért a differenciálegyenlet a

$$\frac{dv}{dt} = -(g + kv^2)$$

alakban írható fel.

A változókat szétválaszthatjuk:

$$\frac{dv}{g + kv^2} = -dt,$$

ill.

$$\frac{dv}{1 + \frac{k}{g} v^2} = -g\, dt.$$

Ha a bal oldalt

$$\frac{dv}{1+\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v\right)^2}$$

alakban írjuk fel, könnyen integrálhatunk, hiszen

$$\int \frac{dv}{1+\left(\sqrt{\frac{k}{g}}v\right)^2} = \sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v.$$

Ezt felhasználva

$$\sqrt{\frac{g}{k}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v = -gt+C,$$

ill.

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v = -\sqrt{kg}t+c.$$

Ha $t=0$, akkor $v=v_0=120$ m/s, és így

$$c = \operatorname{arctg} 120 \sqrt{\frac{k}{g}},$$

vagyis

$$\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v = \operatorname{arctg} 120 \sqrt{\frac{k}{g}} - \sqrt{kg}t.$$

Abban a $t=T$ pillanatban, amikor a rakéta eléri pályályának a legmagasabb pontját, sebessége zérus, $v=0$. Ezeket felhasználva

$$T = \frac{\operatorname{arctg} 120 \sqrt{\frac{k}{g}}}{\sqrt{kg}}.$$

Ha $g=9{,}81$ m/s, akkor

$$T = \frac{\operatorname{arctg} 37{,}58 \sqrt{k}}{3{,}132 \sqrt{k}}.$$

21. Egy R belső sugarú hengeres tartályban H cm magasságig folyadék áll. A tartály fenekén r cm sugarú kör alakú nyílás van. Mennyi idő alatt ürül ki a tartály? Mennyi ez az idő, ha $R=20$ cm, $r=1$ cm, $H=100$ cm?

Ha a tartályban h cm magasságig áll a folyadék, akkor a kifolyási sebesség, $v=\sqrt{2gh}$ cm/s (g a nehézségi gyorsulás) volna, ha a súrlódástól eltekintenénk. A súrlódás miatt azonban a sebesség kisebb, kör alakú nyílás esetén a tapasztalat szerint $0{,}6\sqrt{2gh}$ cm/s.

A folyadéktükörnek a tartály fenekétől mért h távolsága a t idő függvénye, és a folyadéktükör süllyedésének a sebessége $-\frac{dh}{dt}$. Ha a mozgásban levő folyadékot olyan hengerrel szemléltetjük, amelynek alapterülete a mozgásban levő folyadék (állandó) keresztmetszetének területe, magassága pedig a folyadék sebessége, akkor

$$R^2\pi\left(-\frac{dh}{dt}\right) = r^2\pi 0{,}6\sqrt{2gh},$$

hiszen a kifolyás előtti és utáni folyadékmennyiség ugyanaz.

Ha bevezetjük a

$$C = \frac{0{,}6r^2\sqrt{2g}}{R^2}$$

jelölést (ezt megtehetjük, mert a jobb oldalon szereplő mennyiségek ismert állandók), akkor

$$-\frac{dh}{dt} = C\sqrt{h}.$$

A változókat szétválasztva

$$dt = -\frac{dh}{C\sqrt{h}}.$$

Ha az időt a kifolyás kezdetétől számítjuk másodpercekben, a kifolyáshoz szükséges időt T-vel jelöljük, és a kezdeti feltételeket az integrációs határokban vesszük figyelembe, akkor

$$\int_0^T dt = -\int_H^0 \frac{dh}{C\sqrt{h}},$$

vagyis

$$[t]_0^T = -\frac{1}{C}[2\sqrt{h}]_H^0.$$

A határokat behelyettesítve a kifolyási idő,

$$T = \frac{2}{C}\sqrt{h}$$

másodperc.

Feladatunk adataival

$$C = \frac{0{,}6 \cdot 1\ \text{cm}^2 \cdot 441\ \text{cm}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-1}}{400\ \text{cm}^2} = \frac{26{,}5}{400}\frac{\sqrt{\text{cm}}}{\text{s}},$$

$$T = \frac{800}{26{,}5}\frac{\text{s}}{\sqrt{\text{cm}}}\cdot\sqrt{100\ \text{cm}} = \frac{8000}{26{,}5}\text{s} \approx 300\ \text{s}.$$

A tartály tehát 5 perc alatt kiürül.

22. Egy élesztőgomba-tenyészetben az aktív fermentum mennyisége a pillanatnyi mennyiséggel arányosan növekszik. Ha 40 perc alatt ez a mennyiség megkétszereződik, hányszorosa lesz a jelenleginek 3 óra múlva?

Legyen az aktív fermentum mennyisége kezdetben f_0. A fermentumnak dt idő alatt bekövetkező df növekedése arányos a pillanatnyi mennyiséggel, vagyis

$$\frac{df}{dt} = kf.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{df}{f} = k\,dt,$$

és integrálva

$$\ln f = kt + c,$$

és ebből

$$f = e^{kt+c} = Ce^{kt}.$$

A C integrációs konstanst a kezdeti feltételből számítjuk ki. Ha $t=0$, akkor $f=f_0$ és így $C=f_0$. A k arányossági tényezőt a mellékfeltételből számítjuk ki. Ha $t = \frac{2}{3}$ óra, akkor $f=2f_0$, és így

$$2f_0 = f_0 e^{\frac{2}{3}k},$$

amiből

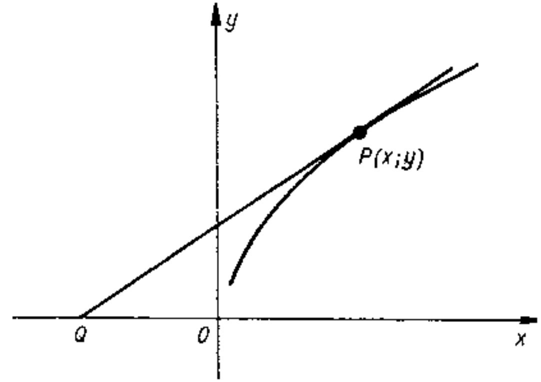
$$k = \frac{3}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{8} = 1{,}04.$$

A fermentum mennyisége 3 óra múlva

$$f_3 = f_0 e^{1{,}04\cdot 3} = f_0 e^{3{,}12} = 22{,}5 f_0,$$

vagyis az eredeti mennyiség 22,5-szerese.

23. Határozzuk meg mindazon görbék egyenletét, amelyekhez bármely pontjukban húzott érintőnek az érintési pont és az x tengely közötti darabját felezi az érintőnek az y tengelyen levő pontja (6. ábra)!



6. ábra

Legyen a keresett görbék egyikének egyenlete $y=y(x)$. A görbe egy tetszőleges pontja $P(x; y(x))$. Ebben a pontban a görbéhez húzott érintő iránytényezője $m=y'(x)$, egyenlete

$$Y - y(x) = y'(x)(X-x),$$

ahol az egyenes futó pontjának koordinátái $(X;\ Y)$. Ez az érintő ott metszi az x tengelyt, ahol $Y=0$, és így a

$$-y(x) = y'(x)(X-x)$$

egyenletből

$$X = x - \frac{y(x)}{y'(x)}.$$

A $P(x; y(x))$ érintési pont és az x tengelyen levő $Q\left(x-\frac{y(x)}{y'(x)};0\right)$ pont által meghatározott szakasz felezőpontja az y tengelyen van, tehát

$$\frac{1}{2}\left(x + x - \frac{y(x)}{y'(x)}\right) = 0,$$

amiből

$$\frac{y}{y'} = 2x.$$

Ez a keresett görbék differenciálegyenlete.

A differenciálegyenlet változóit szétválasztva

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

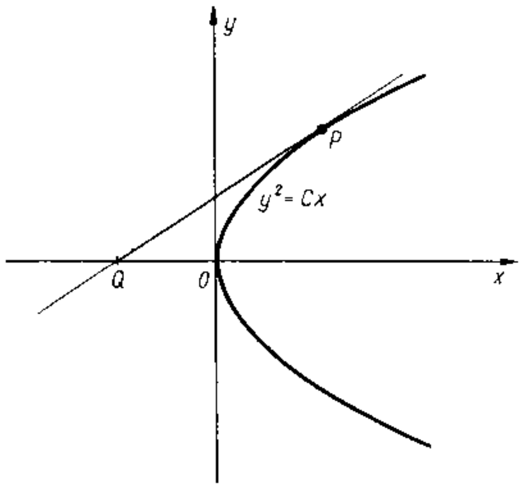
amiből

$$2\ln|y| = \ln|x| + \ln C,$$

azaz

$$y^2 = Cx.$$

A görbék tehát parabolák, amelyeknek a csúcsa az origóban van és tengelyük az x tengely (7. ábra).



7. ábra

24. Tegyük fel, hogy a lakosság száma és a szaporodási sebessége arányos. Határozzuk meg a lakosság L számának és a t időnek az $L(t)$ összefüggését, ha feltesszük, hogy ez a függvény folytonosan differenciálható, és tudjuk, hogy valamely, általunk kezdetinek vett időpontban a lakosság száma L_0 volt, és ez egy év alatt p százalékkal nőtt.

1970. január 1-én Budapest lakosainak a száma 1 940 212 volt. Az évi szaporulat 13 560 fő. Mennyi lesz Budapest lakosainak a száma 1980-ban, ha az évi szaporulat változatlan marad?

A lakosság számának a növekedési sebessége a lakosság számának az idő szerinti első deriváltja,

$$\frac{dL(t)}{dt}$$

Ez arányos a lakosság pillanatnyi számával, azaz

$$\frac{dL}{dt} = kL,$$

ahol k az arányossági tényező. A változókat szétválasztva, majd integrálva

$$\frac{dL}{L} = k\,dt,$$

$$\ln L = kt + c.$$

e alapra emelve mind a két oldalt

$$L = e^{kt+c} = Ce^{kt}.$$

Ha $t=0$, $L=L_0$, így $L_0=C$ és ezt felhasználva a differenciálegyenlet megoldása

$$L = L_0 e^{kt}.$$

Az e^k tényezőt a kiegészítő feltételből számítjuk ki. A lakosság L_0 számának évi növekedése p százalék esetén

$$L_0\frac{p}{100},$$

és így egy évvel később

$$L_1 = L_0 + L_0\frac{p}{100} = L_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = L_0\frac{100+p}{100}$$

lesz a lakosság száma. Ugyanezt kell kapnunk $t=1$ esetében, tehát

$$L_0 e^k = L_0\frac{100+p}{100},$$

amiből

$$e^k = \frac{100+p}{100}.$$

A keresett partikuláris megoldás tehát

$$L(t) = L_0\left(\frac{100+p}{100}\right)^t,$$

amivel a feladat első részét megoldottuk.

A feladat második részének adataival

$$L_{1970} = 1\,940\,212,$$

$$p = \frac{13\,560}{1\,940\,212} \cdot 100 = 0{,}6989\%,$$

és így 1980-ban

$$L_{1980} = 1\,940\,212 \left(\frac{100{,}6989}{100}\right)^{10} = 2\,080\,150$$

lakos él Budapesten.

25. Egy folyó zsiliprendszerének két szomszédos kamrája $A_1=300\text{ m}^2$ és $A_2=400\text{ m}^2$ alapterületű téglatest. Számítsuk ki, hogy a két kamra közötti, a kamrákat elválasztó fal alján levő $q=2\text{ m}^2$ területű nyílást kinyitva, mennyi idő alatt alakul ki egyenlő magasságú vízszint a két kamrában, ha kezdetben az első kamrában 4,5 m-rel magasabban áll a víz. A víz ellenállási együtthatója $k=0{,}62$.

Ha bizonyos dt idő alatt az első kamrában dx_1 méterrel csökkent, a másodikban dx_2 méterrel növekedett a víz szintje, akkor

$$-A_1\,dx_1 = A_2\,dx_2,$$

hiszen az első kamrából kifolyt víz mennyisége egyenlő a második kamrába befolyt víz mennyiségével. Ugyanezen dt idő alatt a q területű összekötő nyíláson $v = k\sqrt{2g(x_1-x_2)}$ m/s sebességgel

$$k\sqrt{2g(x_1-x_2)}\cdot q\,dt$$

mennyiségű víz ömölhet át (x_1-x_2 a víz szintkülönbsége), és így

$$-A_1\,dx_1 = kq\sqrt{2g(x_1-x_2)}\,dt,$$

vagy rendezve differenciálegyenletünket

$$-\frac{dx_1}{\sqrt{x_1-x_2}} = \frac{kq}{A_1}\sqrt{2g}\,dt,$$

ahol x_1, x_2 és t a változók, de x_1 és x_2 nem független egymástól. Az egyszerűbb megoldás érdekében helyettesítünk. Legyen

$$x_1-x_2 = n,$$

ekkor (n szerint differenciálva)

$$dx_1-dx_2 = dn.$$

Az előbb felírt $-A_1\,dx_1 = A_2\,dx_2$ egyenletből

$$dx_2 = -\frac{A_1}{A_2}\,dx_1,$$

és így

$$dx_1-dx_2 = dx_1+\frac{A_1}{A_2}\,dx_1 = \frac{A_1+A_2}{A_2}\,dx_1.$$

Ezt felhasználva az

$$\frac{A_1+A_2}{A_2}\,dx_1 = dn$$

egyenletből

$$dx_1 = \frac{A_2}{A_1+A_2}\,dn,$$

és így a differenciálegyenletünk a következő alakra hozható:

$$-\frac{A_2}{A_1+A_2}\cdot\frac{dn}{\sqrt{n}} = \frac{kq}{A_1}\sqrt{2g}\,dt.$$

Mivel a két oldalon integrálva és figyelembe véve, hogy n (a víz szintkülönbsége) h-tól 0-ig, t (az idő) 0-tól a keresett T-ig változik, kapjuk:

$$\frac{kq\sqrt{2g}}{A_1}\int_0^T dt = -\frac{A_2}{A_1+A_2}\int_h^0 \frac{dn}{\sqrt{n}} = \frac{A_2}{A_1+A_2}\int_0^h \frac{dn}{\sqrt{n}},$$

vagyis elvégezve az integrálást

$$\frac{kq\sqrt{2g}}{A_1}\,T = \frac{A_2}{A_1+A_2}\,2\sqrt{h},$$

amiből

$$T = \frac{A_1A_2\sqrt{2h}}{kq(A_1+A_2)\sqrt{g}}.$$

Adatainkkal

$$T = \frac{(300\text{ m}^2)(400\text{ m}^2)\sqrt{9\text{ m}}}{0{,}62\,(2\text{ m}^2)(300+400)\text{ m}^2\cdot 3{,}13\,\dfrac{\sqrt{\text{m}}}{\text{s}}} = 132\text{ s},$$

tehát 132 másodperc alatt lesz a vízszint azonos magasságú a két kamrában.

26. Egy forgástest alakú homogén oszlop meridiángörbéjét akarjuk meghatározni a következő feltételek mellett: legyen az oszlop magassága h, fedőlapja A területű körlap, amelyet terheljünk meg a függőlegesen lefelé ható F nyomóerővel. Úgy akarjuk megválasztani az oszlop keresztmetszetét, hogy bármely, a vízszintes alapsíktól mért y magasságban az $a(y)$ területű keresztmetszetben a nyomófeszültség (azaz a felületegységre eső nyomóerő) ugyanakkora legyen.

Válasszuk a koordináta-rendszert úgy, hogy az oszlop tengelye legyen az y tengely. A következőképpen okoskodunk: A fedőlapot csak az F erő terheli, tehát itt a nyomófeszültség

$$f = \frac{F}{A}.$$

Ekkorának kell lennie a nyomófeszültségnek az oszlop minden keresztmetszetében. Ha képzeletben kivágjuk az y tengelyre merőleges síkokkal az y és $y+\Delta y$ magasságok között levő oszloprészt, akkor ennek

$$a(y+\Delta y) = a(y)+\Delta a(y)$$

területű fedőlapjára a lefelé irányuló

$$f[a(y)+\Delta a(y)]$$

nagyságú erő hat. Az $a(y)$ területű alaplapra pedig a felfelé irányuló

$$fa(y)$$

reakcióerő, továbbá a Δy magasságú oszloprész súlyából származó és lefelé irányuló

$$\gamma a(y)\Delta y$$

nagyságú erő hat, ahol γ a homogén oszlop fajsúlya.

Az erők egyensúlyából származik következő közelítő egyenlet:

$$f[a(y)+\Delta a(y)]+\gamma a(y)\Delta y \approx fa(y),$$

azaz

$$\frac{\Delta a(y)}{\Delta y} \approx -\frac{\gamma}{f}a(y).$$

A közelítés annál jobb, minél kisebb a Δy. Ha $\Delta y \to 0$, a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{da(y)}{dy} = -\frac{\gamma}{f}a(y).$$

Legyen $\frac{\gamma}{f} = k$. Válasszuk szét a differenciálegyenlet változóit:

$$\frac{da(y)}{a(y)} = -k\,dy,$$

amiből integrálással

$$\ln|a(y)| = -ky+c,$$

ill.

$$a(y) = e^{-ky+c} = e^c e^{-ky} = Ce^{-ky}.$$

A C konstans értékét abból a feltételből határozzuk meg, hogy az $y=h$ magasságban a keresztmetszet területe $a(h)=A$. Ekkor

$$A = Ce^{-kh},$$

amiből

$$C = Ae^{kh},$$

és így

$$a(y) = Ae^{kh}\cdot e^{-ky} = Ae^{k(h-y)}.$$

Ha most még figyelembe vesszük azt is, hogy az oszlop forgástest alakú, akkor

$$a(y) = x^2\pi \quad \text{és} \quad A = r^2\pi.$$

Ezeket felhasználva

$$x^2\pi = r^2\pi e^{k(h-y)},$$

vagy mind a két oldal természetes alapú logaritmusát véve

$$\ln x^2 = \ln r^2 + k(h-y),$$

amiből a meridiángörbe egyenlete

$$y = h-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{x}{r}\right)^2 = h-\frac{f}{\gamma}\ln\left(\frac{x}{r}\right)^2.$$

3. SZÉTVÁLASZTHATÓ VÁLTOZÓJÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRE VISSZAVEZETHETŐ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

a) HOMOGÉN FOKSZÁMÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. Az $f(x, y)$ kétváltozós függvényt *n-ed fokú homogén függvénynek* nevezzük, ha

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Például az

$$f(x, y) = x^4 - x^3 y$$

függvény negyed fokú homogén függvény, mert

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\lambda x)^3 \lambda y = \lambda^4 (x^4 - x^3 y) = \lambda^4 f(x, y).$$

Az

$$f(x, y) = e^{\frac{y}{x}} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

függvény 0-ad fokú homogén függvény, mert

$$f(\lambda x, \lambda y) = e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \operatorname{tg} \frac{\lambda y}{\lambda x} = e^{\frac{y}{x}} + \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \lambda^0 f(x, y).$$

Ezzel szemben az

$$f(x, y) = x^2 + \sin x \cos y$$

függvény nem homogén függvény, mert

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + \sin \lambda x \cos \lambda y \neq \lambda^n f(x, y).$$

Az

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

elsőrendű differenciálegyenletet akkor nevezzük *homogén fokszámúnak*, ha az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ függvények ugyanolyan fokszámú homogén függvények.

Például az

$$x \ln \frac{y}{x}\, dx + \frac{y^2}{x} \arcsin \frac{y}{x}\, dy = 0$$

differenciálegyenlet homogén fokszámú differenciálegyenlet (fokszáma 1), mert az

$$x \ln \frac{y}{x} \quad \text{és} \quad \frac{y^2}{x} \arcsin \frac{y}{x}$$

függvények elsőfokú homogén függvények.

A homogén fokszámú differenciálegyenlet az

$$\frac{y}{x} = t, \quad \text{azaz} \quad y = xt$$

helyettesítéssel (transzformációval) mindig visszavezethető szétválasztható változójú differenciálegyenletre, ha az $M(x, y)$ és $N(x, y)$ függvények és parciális deriváltjai folytonosak.

Ha az $y = xt$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor

$$y' = \frac{dy}{dx} = t + x \frac{dt}{dx},$$

ill.

$$dy = t\, dx + x\, dt.$$

Ha egy differenciálegyenlet homogén fokszámú, akkor kellő rendezés után

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

alakra hozható. Ez fordítva is igaz, és ennek segítségével sokszor nagyon könnyen eldönthető, hogy egy adott differenciálegyenlet homogén fokszámú-e.

Megjegyezzük, hogy az $y = xt$ transzformáció nemcsak a homogén fokszámú differenciálegyenletek megoldásánál használható előnyösen.

Előfordulhat továbbá az is, hogy az $\frac{y}{x} = t$ helyettesítés helyett az

$$\frac{x}{y} = t, \quad \text{azaz} \quad x = yt$$

helyettesítés az előnyösebb. Ilyen esetben

$$dx = t\, dy + y\, dt.$$

Gyakorló feladatok

1. Megoldandó az

$$x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} + xy' \cos \frac{y}{x} = 0$$

differenciálegyenlet.

Ha az egyenletet x-szel elosztjuk ($x \neq 0$), látszik, hogy a differenciálegyenlet homogén fokszámú, ugyanis

$$\sin \frac{y}{x} - \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} + y' \cos \frac{y}{x} = 0,$$

és fokszáma 0.

Legyen $\dfrac{y}{x} = t$, ekkor $y' = t + x \dfrac{dt}{dx}$, és így

$$\sin t - t \cos t + t \cos t + x \frac{dt}{dx} \cos t = 0,$$

amiből

$$\frac{\cos t}{\sin t} dt = -\frac{dx}{x},$$

ill. integrálás után

$$\ln |\sin t| = -\ln |x| + \ln c = \ln \left| \frac{c}{x} \right|.$$

Így

$$\sin t = \frac{c}{x},$$

azaz visszahelyettesítés után

$$x \sin \frac{y}{x} = c.$$

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(2x+y)dx + (y+x)dy = 0.$$

Írjunk x, ill. y helyébe λx-et, ill. λy-t. Ekkor

$$M(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x + \lambda y = \lambda(2x+y) = \lambda M(x, y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda y + \lambda x = \lambda(y+x) = \lambda N(x, y),$$

tehát a differenciálegyenlet homogén fokszámú és fokszáma 1.

Legyen $y = xt$, így $dy = t\,dx + x\,dt$, és egyenletünk

$$(2+t)dx + (t+1)(t\,dx + x\,dt) = 0$$

alakú, amiből rendezéssel

$$(2+t+t^2+t)dx = -(t+1)x\,dt,$$

ill. a változókat szétválasztva

$$\frac{dx}{x} = -\frac{t+1}{t^2+2t+2} dt.$$

A jobb oldalon a számlálóban könnyen előállítható a nevező deriváltja és így az integrálás könnyen elvégezhető:

$$\ln |x| + \ln c = -\frac{1}{2} \ln (t^2+2t+2).$$

Ebből

$$cx = \frac{1}{\sqrt{t^2+2t+2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 2}},$$

vagy rendezve

$$\sqrt{y^2+2xy+2x^2} = \frac{1}{c} = k.$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x^3+y^3)dx - 3xy^2\,dy = 0.$$

A differenciálegyenlet homogén fokszámú, hiszen x^3-nal végigosztva ($x \neq 0$) és rendezve a következő alakra hozható:

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 y'.$$

A fokszám 3.

Legyen $\dfrac{y}{x} = t$, ekkor $y' = t + x \dfrac{dt}{dx}$,

és így

$$1 + t^3 = 3t^2 \left(t + x \frac{dt}{dx}\right),$$

$$1 - 2t^3 = 3t^2 x \frac{dt}{dx}.$$

A változók most már szétválaszthatók

$$\frac{dx}{x} = \frac{3t^2}{1-2t^3}\,dt,$$

és integrálva

$$\ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1-2t^3| + \ln c,$$

vagyis

$$x^2(1-2t^3) = C.$$

Ha t értékét visszahelyettesítjük,

$$x^2\left(1-2\frac{y^3}{x^3}\right) = C,$$

amiből az általános megoldás implicit alakban

$$x^3-2y^3 = Cx,$$

explicit alakban

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3-Cx}{2}}.$$

4. Keressük meg az

$$x\,dy - y\,dx - \sqrt{x^2-y^2}\,dx = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

x-szel végigosztva ($x \neq 0$) a differenciálegyenlet minden tagját, látszik, hogy a differenciálegyenlet homogén fokszámú (fokszáma 1), ugyanis az

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

alakra hozható. Legyen $\frac{y}{x} = t$, ekkor $y' = t + x\frac{dt}{dx}$, és így

$$t + x\frac{dt}{dx} = t + \sqrt{1-t^2}.$$

Szétválasztva a változókat

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{dx}{x},$$

integrálva

$$\text{arc}\,|\sin t| = \ln|x| + \ln c,$$

amiből

$$\text{arc}\sin\frac{y}{x} = \ln|cx|,$$

$$\frac{y}{x} = \sin\ln|cx|,$$

$$y = x\sin\ln|cx|.$$

5. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y\sqrt{x^2+y^2}\,dx - x\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0.$$

Annak eldöntése érdekében, hogy homogén fokszámú differenciálegyenlettel állunk-e szemben, írjunk x, ill. y helyébe λx-et, ill. λy-t. Ekkor

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda y\sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2} = \lambda^2 y\sqrt{x^2+y^2} = \lambda^2 M(x,y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = \lambda x\left(\lambda x + \sqrt{\lambda^2x^2+\lambda^2y^2}\right) = \lambda^2\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) =$$
$$= \lambda^2 N(x,y).$$

Ezért a differenciálegyenlet homogén fokszámú (fokszáma 2), és így alkalmazható az

$$y = xt, \quad dy = t\,dx + x\,dt$$

helyettesítés. Ezzel egyenletünk

$$xt\sqrt{x^2+x^2t^2}\,dx - x\left(x+\sqrt{x^2+x^2t^2}\right)(t\,dx + x\,dt) = 0$$

alakú. Ez rendezés után

$$0 = t\,dx + x\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)dt$$

alakú, ill. a változókat szétválasztva

$$-\frac{dx}{x} = \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt.$$

Integráljunk mind a két oldalon, ekkor

$$-\ln|x| = \ln|t| + \int\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt.$$

A jobb oldalon álló integrállal foglalkozzunk külön. Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt t-vel, majd helyettesítsünk $1+t^2$ helyébe u^2-et, amikor is $t\,dt = u\,du$. Ezzel a helyettesítéssel

$$\int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt = \int \frac{t\sqrt{1+t^2}}{t^2}\,dt = \int \frac{u^2}{u^2-1}\,du.$$

Az integrandus átalakításával

$$\int \frac{u^2}{u^2-1}\,du = \int \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,du = \int \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right) du =$$

$$= \int \left(1-\frac{0{,}5}{u+1}+\frac{0{,}5}{u-1}\right) du = u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|.$$

Ha u értékét visszahelyettesítjük, akkor

$$\int \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\,dt = \sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1}.$$

Visszatérve eredeti egyenletünkhöz

$$-\ln|x|-\ln c = \ln|t|+\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1},$$

ill.

$$\sqrt{1+t^2}+\ln|cxt|+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}+1} = 0.$$

Az eredeti változókra áttérve kapjuk a

$$\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+\ln|cy|+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x} = 0$$

általános megoldást.

6. Keressük meg az

$$(x^2+2xy-2y^2)\,dx+(y^2+2xy-2x^2)\,dy = 0$$

differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amelynek grafikonja áthalad a $P(0;\,3)$ ponton!

A differenciálegyenlet homogén fokszámú (foka 2), ami a következő alakról könnyen látható:

$$1+2\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left[2-2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] y'.$$

Ha $\frac{y}{x}$ helyébe t-t helyettesítünk, akkor $y' = t+x\frac{dt}{dx}$, és így

$$1+2t-2t^2 = (2-2t-t^2)\left(t+x\frac{dt}{dx}\right).$$

Rendezve

$$\frac{1+2t-2t^2}{2-2t-t^2}-t = x\frac{dt}{dx},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2-2t-t^2}{1+t^3}\,dt,$$

$$\int\frac{dx}{x} = -\int\frac{t^2+2t-2}{(t+1)(t^2-t+1)}\,dt.$$

A jobb oldalon álló integrált külön számítjuk ki parciális törtekre bontással:

$$I = \int\frac{t^2+2t-2}{(t+1)(t^2-t+1)}\,dt = \int\left(\frac{A}{t+1}+\frac{Bt+C}{t^2-t+1}\right) dt.$$

A felbontás csak úgy lehet igaz, ha fennáll a

$$t^2+2t-2 \equiv A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)$$

azonosság.

Ha $t = -1$, akkor

$$-3 = 3A, \quad \text{amiből} \quad A = -1.$$

Ha $t = 0$, akkor

$$-2 = A+C, \quad \text{amiből} \quad C = -1.$$

Ha $t = 1$, akkor

$$1 = A+2B+2C, \quad \text{amiből} \quad B = 2.$$

Így integrálunk

$$I = \int\left(\frac{-1}{t+1}+\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right) dt$$

alakú, és most már könnyen integrálhatunk:

$$I = -\ln|t+1|+\ln|t^2-t+1|.$$

Visszatérve differenciálegyenletünkhöz

$$\ln|x|+\ln c = \ln|t+1|-\ln|t^2-t+1|,$$

amiből

$$cx = \frac{t+1}{t^2-t+1}.$$

Áttérve az eredeti változókra

$$cx = \frac{\frac{y}{x}+1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)+1} = \frac{xy+x^2}{y^2-xy+x^2},$$

ill.

$$\frac{x+y}{y^2-xy+x^2} = c$$

az általános megoldás.

A keresett partikuláris megoldás esetében $x=0$, $y=3$, vagyis behelyettesítve ezeket az értékeket az általános megoldásba

$$c = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

A keresett partikuláris megoldás tehát

$$3(x+y) = y^2-xy+x^2.$$

7. Megoldandó az

$$(1+2e^{\frac{x}{y}})\,dx+2\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0$$

differenciálegyenlet.

Mivel

$$M(\lambda x, \lambda y) = 1+2e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}} = 1+2e^{\frac{x}{y}} = M(x, y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = 2\left(1+\frac{\lambda x}{\lambda y}\right)e^{\frac{\lambda x}{\lambda y}} = 2\left(1+\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}} = N(x, y),$$

a differenciálegyenlet homogén fokszámú (foka 0). Könnyen látszik az is, hogy a differenciálegyenlet most nem

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{hanem} \quad y' = g\left(\frac{x}{y}\right)$$

alakban írható fel, és ezért a célszerű helyettesítés

$$\frac{x}{y} = t, \quad \text{azaz} \quad x = yt.$$

Ekkor $dx = y\,dt+t\,dy$, és a differenciálegyenlet

$$(1+2e^t)(y\,dt+t\,dy)+2(1-t)e^t dy = 0$$

alakú. Rendezve

$$(t+2e^t)\,dy+y(1+2e^t)\,dt = 0.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1+2e^t}{t+2e^t}\,dt.$$

Integrálás után

$$\ln|y| = -\ln|t+2e^t|+\ln c,$$

ill.

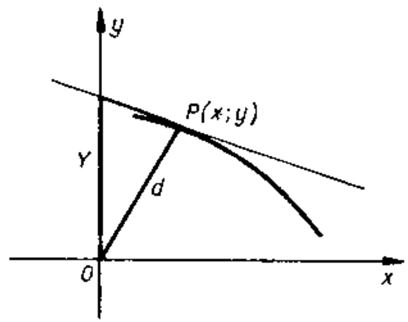
$$y = \frac{c}{t+2e^t} = \frac{c}{\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}}},$$

amiből

$$x+2ye^{\frac{x}{y}} = C.$$

Differenciálegyenletünk természetesen az eredeti $y=xt$ helyettesítéssel is megoldható, de esetünkben ekkor sokkal bonyolultabb integrálok lépnek fel.

8. Keressük meg azokat a görbéket, amelyekre a következő állítás igaz: a görbe tetszőleges $P(x; y)$ pontjának az origótól mért távolsága ugyanakkora, mint az a szakasz, amit a P pontban a görbéhez húzott érintő az Y tengelyből lemetsz (8. ábra).



8. ábra

Legyen a keresett görbék egyenlete $y=y(x)$. A görbe egy tetszőleges $P(x; y(x))$ pontjának az origótól mért távolsága

$$d = \sqrt{x^2+y^2(x)}.$$

A görbéhez a P pontban húzható érintő meredeksége $y'(x)$, ezért az érintő egyenlete (a futó pont koordinátáit most X-szel és Y-nal jelöltük)

$$Y-y(x) = y'(x)(X-x).$$

Ez az érintő ott metszi az ordinátatengelyt, ahol $X=0$, vagyis az

$$Y = y(x)-xy'(x)$$

ordinátájú pontban, és ez az Y szakasz egyenlő a d szakasszal, azaz

$$\sqrt{x^2+y^2} = y-xy'.$$

Ez a keresett görbék differenciálegyenlete. A differenciálegyenlet homogén fokszámú (fokszáma 1), ami az átrendezett

$$y' = \frac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

alakból azonnal látható.

Alkalmazzuk az $\frac{y}{x} = t$ helyettesítést. Ekkor $y' = t+x\frac{dt}{dx}$, és ezzel differenciálegyenletünk

$$t+x\frac{dt}{dx} = t-\sqrt{1+t^2}$$

alakú lett. Ebből

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}},$$

ill. integrálás után

$$\ln|x| = -\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+\ln c.$$

A logaritmusokat eltüntetve

$$x\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) = c,$$

ill. t értékét visszahelyettesítve

$$x\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) = c,$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = c.$$

A gyökös tagot a bal oldalon hagyva, négyzetre emelve és rendezve

$$2cy = c^2-x^2.$$

A keresett görbék tehát parabolák, amelyeknek tengelye az y tengely, közös gyújtópontja pedig az origó. Ezek a parabolák eleget tesznek a feladat feltételének, mert

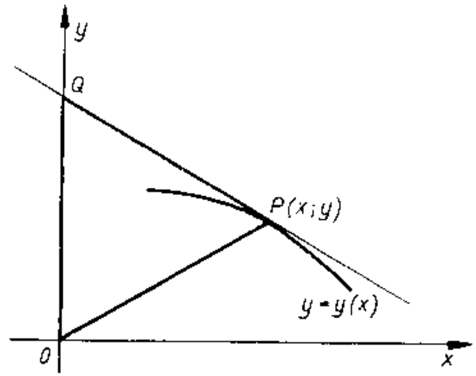
$$d = \sqrt{x^2+\left(\frac{c^2-x^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{\frac{c^4+2c^2x^2+x^4}{4c^2}} = \frac{c^2+x^2}{2c},$$

és

$$y-xy' = y-x\left(-\frac{x}{c}\right) = y+\frac{x^2}{c} = \frac{c^2-x^2}{2c}+\frac{x^2}{c} = \frac{c^2+x^2}{2c},$$

és e két szakasz valóban egyenlő.

9. Határozzuk meg mindazoknak a görbéknek az egyenletét, amelyeknél az y tengely, az érintő és az origóból az érintési ponthoz húzott egyenes közötti háromszög egyenlőszárú háromszög (9. ábra).



9. ábra

Legyen a keresett görbék egyenlete $y=y(x)$, a görbe tetszőleges pontja $P(x; y(x))$. A görbéhez a P pontban húzott érintő meredeksége ekkor $y'(x)$, egyenlete pedig

$$Y-y(x) = y'(x)(X-x).$$

Ez az érintő az y tengelyt az

$$Y = y(x)-xy'(x)$$

ordinátájú Q pontban metszi.

Az OPQ háromszög háromféle módon lehet egyenlőszárú:

$a)$ $OP = OQ$,
$d)$ $OP = QP$,
$c)$ $OQ = QP$.

Az $a)$ esetet az előző feladatban tárgyaltuk.
Most a $b)$ esettel foglalkozunk. Mivel

$$OP = \sqrt{x^2+y^2(x)},$$

$$QP = \sqrt{x^2+[xy'(x)]^2},$$

ezért

$$x^2+y^2(x) = x^2+x^2[y'(x)]^2$$

a keresett görbék differenciálegyenlete. Ez rendezés után

$$y = \pm xy'$$

alakú, amiből

$$y' = \pm \frac{y}{x}.$$

Ha a pozitív előjelet vesszük figyelembe, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

ill. a változók szétválasztása után

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

amiből

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln c,$$

azaz

$$y = cx.$$

A keresett vonalak az origón áthaladó egyenesek, de ezek nem felelnek meg a feladat $b)$ feltételének. Ekkor ugyanis $O \equiv Q$, és így nem keletkezik háromszög. Az $OP=QP$ állítás azonban igaz.
Ha a negatív előjelet vesszük figyelembe, akkor

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x},$$

ill.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

amiből integrálással

$$\ln |y| = -\ln |x| + \ln c,$$

azaz

$$y = \frac{c}{x}.$$

A kapott görbék hiperbolák, amelyeknek aszimptotái a koordinátatengelyek, és a görbék valóban eleget tesznek a feladat $b)$ feltételének, hiszen

$$OP = \sqrt{x^2+\left(\frac{c}{x}\right)^2},$$

$$QP = \sqrt{x^2+\left[x\left(-\frac{c}{x^2}\right)\right]^2} = \sqrt{x^2+\left(\frac{c}{x}\right)^2},$$

és látszik, hogy $OP=QP$.
A $c)$ esetben $OQ=QP$-nek kell teljesülnie, azaz

$$y-xy' = \sqrt{x^2+(xy')^2}.$$

Rendezés után a differenciálegyenlet

$$y^2-2xyy'-x^2 = 0,$$

ill.

$$(y^2-x^2)\,dx = 2xy\,dy$$

alakú. Erről az alakról látszik, hogy az egyenlet homogén fokszámú és foka 2. Ha y'-t kifejezzük

$$y' = \frac{y^2-x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right).$$

Legyen tehát $y=xt$, ekkor $y' = t+x\dfrac{dt}{dx}$, és ezt az egyenletbe helyettesítve

$$t+x\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),$$

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) = -\frac{1+t^2}{2t}.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{2t\,dt}{1+t^2} = -\frac{dx}{x},$$

integrálva

$$\ln|1+t^2| = \ln c - \ln|x|,$$

$$1+t^2 = \frac{c}{x}.$$

t értékét visszahelyettesítve

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x} - 1,$$

amiből

$$y^2 = cx - x^2,$$

$$x^2 - cx + y^2 = 0.$$

A keresett görbék az origón áthaladó körök, amelyeknek a középpontja az abszcisszatengelyen van. Ezek valóban kielégítik a feladat *c)* feltételét, mert

$$OQ = y - xy' = \sqrt{cx-x^2} - x\frac{c-2x}{2\sqrt{cx-x^2}} =$$

$$= \frac{2(cx-x^2) - cx + 2x^2}{2\sqrt{cx-x^2}} = \frac{cx}{2\sqrt{cx-x^2}},$$

$$QP = \sqrt{x^2+(xy')^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2(c-2x)^2}{4(cx-x^2)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4cx^3 - 4x^4 + c^2x^2 - 4cx^3 + 4x^4}}{2\sqrt{cx-x^2}} = \frac{cx}{2\sqrt{cx-x^2}}.$$

b) AZ $y' = f(ax+by+c)$ TÍPUSÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. Ha az

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

differenciálegyenlet az

$$y' = f(ax+by+c)$$

alakra hozható, ahol $a \neq 0$, $b \neq 0$, akkor az egyenlet az

$$u = ax+by+c$$

helyettesítéssel (transzformációval) szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezethető vissza. Ebben az esetben a

$$\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

egyenletből

$$y' = \frac{1}{b}\left(\frac{du}{dx} - a\right).$$

Például a

$$(3x+4y+5)\,dy - dx = 0$$

egyenlet ilyen típusú, mert egyszerű átalakítással

$$y' = \frac{1}{3x+4y+5} = f(ax+by+c)$$

alakra hozható.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az I. fejezet 1. pontjában (11. old.) felírt

$$y' = x+y$$

differenciálegyenletet!

Az egyenlet alakjáról látszik, hogy az

$$x+y = u$$

helyettesítés célszerű. (Az egyenleteknek más megoldása is lehetséges, l. a 140. és 199. oldalt.) Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dx}{dx},$$

vagy más jelöléssel $y' = u' - 1$. Ezzel

$$u' - 1 = u,$$

vagy a változókat szétválasztva

$$\frac{du}{u+1} = dx,$$

integrálva

$$\ln|u+1| = x+c,$$

amiből

$$u+1 = e^{x+c} = Ce^{x},$$

és végül u értékét visszahelyettesítve

$$y = Ce^{x} - x - 1.$$

2. Megoldandó az

$$y' = 2y+x+1$$

differenciálegyenlet.

Azonnal látszik, hogy az egyenlet $y' = f(ax+by+c)$ típusú, tehát alkalmazzuk az

$$u = 2y+x+1$$

helyettesítést. Ekkor

$$u' = 2y'+1, \quad y' = \frac{u'-1}{2},$$

és ezzel a differenciálegyenletet az

$$\frac{u'-1}{2} = u$$

alakra hoztuk. Ebből

$$\frac{du}{dx} = 2u+1,$$

és a változókat szétválasztva

$$\frac{du}{2u+1} = dx.$$

Mind a két oldalon integrálva

$$\frac{1}{2}\ln|2u+1| = x+c.$$

Emeljük mind a két oldalt e alapra. Ekkor

$$2u+1 = e^{2(x+c)} = Ce^{2x}.$$

u értékét visszahelyettesítve

$$4y+2x+3 = Ce^{2x},$$

amiből

$$y = \frac{1}{4}(Ce^{2x} - 2x - 3).$$

Megjegyezzük, hogy ezt a differenciálegyenletet más módszerrel is meg lehet oldani.

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = -2(2x+3y)^2.$$

A differenciálegyenlet alakjáról azonnal látszik, hogy a $2x+3y = u$ helyettesítés lehetővé teszi a változók szétválasztását. Ebben az esetben $2+3y' = u'$ és ebből

$$y' = \frac{u'-2}{3}.$$

Ezt felhasználva

$$\frac{u'-2}{3} = -2u^2,$$

és ebből

$$\frac{du}{dx} = -6u^2+2 = 2(1-3u^2).$$

Az egyenlet változóit szétválasztva

$$\frac{du}{1-3u^2} = 2\,dx.$$

A bal oldal integrálását külön végezzük el:

$$\int \frac{du}{1-3u^2} = \int \frac{du}{(1-\sqrt{3}u)(1+\sqrt{3}u)} =$$

$$= \int \left(\frac{0,5}{1-\sqrt{3}u} + \frac{0,5}{1+\sqrt{3}u} \right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|1-\sqrt{3}u| + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln|1-\sqrt{3}u| \right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}u}{1-\sqrt{3}u}\right|.$$

Eredményünket felhasználva

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}u}{1-\sqrt{3}u}\right| = 2x+c,$$

vagy az u értékét visszahelyettesítve

$$\ln\left|\frac{1+\sqrt{3}(2x+3y)}{1-\sqrt{3}(2x+3y)}\right| = 4\sqrt{3}x+c_1,$$

és ez még így is írható:

$$\frac{1+\sqrt{3}(2x+3y)}{1-\sqrt{3}(2x+3y)} = Ce^{4\sqrt{3}x}$$

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = \sqrt{y-2x}.$$

A differenciálegyenlet $y' = f(ax+by+c)$ alakú, azért alkalmazzuk az $y-2x = u$ helyettesítést, amikor is $y' = u'+2$. Így egyenletünk

$$\frac{du}{dx}+2 = \sqrt{u}$$

alakú, amelynek változói már szétválaszthatók, mégpedig

$$\frac{du}{\sqrt{u}-2} = dx.$$

A bal oldal integrálját külön számítjuk ki. Helyettesítsünk $\sqrt{u}-2$ helyébe új változót. Ha

$$\sqrt{u}-2 = v, \quad \text{akkor} \quad u = (v+2)^2$$

és

$$du = 2(v+2)\,dv.$$

Így az integrál

$$\int\frac{du}{\sqrt{u}-2} = \int\frac{2(v+2)\,dv}{v} = 2\int\left(1+\frac{2}{v}\right)dv =$$

$$= 2v+4\ln|v| = 2\left(\sqrt{u}-2\right)+4\ln\left|\sqrt{u}-2\right|.$$

Differenciálegyenletünk megoldása tehát

$$2\left(\sqrt{u}-2\right)+4\ln\left|\sqrt{u}-2\right| = x+c,$$

vagy visszatérve az eredeti változókra

$$2\left(\sqrt{y-2x}\right)+\ln\left(\sqrt{y-2x}-2\right)^4 = x+c+4,$$

5. Megoldandó az

$$y' = \sin(x+y)$$

differenciálegyenlet.

A differenciálegyenlet alakjáról azonnal látszik, hogy az $u = x+y$ helyettesítés célhoz vezet. Ekkor $y' = u'-1$, és egyenletünk

$$\frac{du}{dx}-1 = \sin u,$$

vagy a változókat szétválasztva

$$\frac{du}{\sin u+1} = dx$$

alakú.

A bal oldal integrálását külön végezzük el. Mivel az integrandus $\sin u$ racionális függvénye, ezért a $t = \operatorname{tg}\frac{u}{2}$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{és} \quad du = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Ennek segítségével

$$\frac{du}{\sin u+1} = \int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+1} = \int\frac{2\,dt}{2t+1+t^2} = 2\int\frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= -2\frac{1}{t+1} = \frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}+1}.$$

Differenciálegyenletünk megoldása tehát

$$\frac{-2}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}+1} = x+c,$$

vagy átalakítva

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = -\frac{2}{x+c} - 1.$$

Az eredeti változókra visszatérve

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = -\left(\frac{2}{x+c}+1\right).$$

6. Keressük meg az

$$y' = \frac{1}{2x-y}$$

differenciálegyenletnek azt az integrálgörbéjét, amely áthalad a $P(2;\ -1)$ ponton.

A differenciálegyenlet alakjáról látszik, hogy a $2x-y = u$ helyettesítést célszerű alkalmazni. Ebben az esetben $y' = 2-u'$, és így differenciálegyenletünk

$$2-u' = \frac{1}{u},$$

rendezés után

$$\frac{du}{dx} = 2-\frac{1}{u} = \frac{2u-1}{u},$$

és a változók szétválasztása után

$$\frac{u\,du}{2u-1} = dx$$

alakú. Az egyenlet bal oldalának integrálását külön végezzük el:

$$\int\frac{u\,du}{2u-1} = \frac{1}{2}\int\frac{2u-1+1}{2u-1}\,du = \frac{1}{2}\int du+\frac{1}{2}\int\frac{1}{2u-1}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\ln|2u-1|.$$

Ezt felhasználva a differenciálegyenlet integrálja

$$\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{2}\ln|2u-1|\right) = x+c,$$

ill. az eredeti változókra visszatérve

$$\frac{1}{2}\left(2x-y+\ln\sqrt{4x-2y-1}\right) = x+c.$$

A $P(2;\ -1)$ ponton áthaladó integrálgörbére

$$\frac{1}{2}\left(5+\ln\sqrt{9}\right) = 2+c.$$

amiből

$$c = 0{,}5+\ln\sqrt{3}.$$

és így a keresett görbe egyenlete

$$2x-y+\ln\sqrt{4x-2y-1} = 2x+1+\ln 3,$$

ill.

$$\ln\sqrt{4x-2y-1}-y = 1+\ln 3.$$

7. Oldjuk meg az

$$y' = \operatorname{tg}^2(x+y)$$

differenciálegyenletet!

A célszerű helyettesítés $u = x+y$, ekkor $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}-1$, és differenciálegyenletünk

$$\frac{du}{dx}-1 = \operatorname{tg}^2 u$$

alakú. Rendezve, ill. a változókat szétválasztva

$$\frac{du}{1+\operatorname{tg}^2 u} = dx.$$

A bal oldalt átalakítva

$$\cos^2 u\,du = dx,$$

$$\frac{1+\cos 2u}{2}\,du = dx.$$

Mind a két oldalon integrálva

$$\frac{1}{2}u+\frac{\sin 2u}{4} = x+c.$$

Ha az eredeti változókat visszahelyettesítjük:

$$2(x+y)+\sin 2(x+y) = 4x+C,$$

ill.

$$\sin 2(x+y)+2(y-x) = C.$$

c) AZ $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ TÍPUSÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. Ha az

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy = 0$$

differenciálegyenletben szereplő M és N függvények elsőfokúak, de nem homogének, azaz

$$M(x, y) = a_1x+b_1y+c_1,$$
$$N(x, y) = a_2x+b_2y+c_2$$

alakúak (ahol c_1 és c_2 egyszerre nem lehet 0), akkor a differenciálegyenlet helyettesítéssel szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezethető vissza.

Az eredeti egyenlet ebben az esetben felírható az

$$y' = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$$

alakban is. Ugyancsak helyettesítéssel vezethető vissza szétválasztható változójú differenciálegyenletre az előbbinél általánosabb

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

alakú egyenlet is. Két esetet különböztetünk meg.

a) eset: ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1 \neq 0,$$

akkor az

$$x = u+x_0,$$
$$y = v+y_0$$

helyettesítés célhoz vezet, ahol x_0 és y_0 az

$$a_1x+b_1y+c_1 = 0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2 = 0$$

lineáris egyenletrendszernek a megoldása. Ebben az esetben

$$dx = du, \quad dy = dv,$$

ill.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}.$$

b) eset: ha

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1 = 0,$$

akkor az előbb felírt lineáris egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása. Ebben az esetben a

$$t = a_1x+b_1y$$

helyettesítés viszi át az eredeti differenciálegyenletet szétválasztható változójú differenciálegyenletbe. Most

$$\frac{dt}{dx} = a_1+b_1\frac{dy}{dx},$$

vagyis

$$dy = \frac{1}{b_1}(dt-a_1dx),$$

ill.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b_1}\left(\frac{dt}{dx}-a_1\right).$$

Megjegyezzük, hogy az alkalmazott transzformáció geometriailag az *a)* esetben azt jelenti, hogy a koordináta-rendszer origóját az

$$a_1x+b_1y+c_1 = 0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2 = 0$$

egyenesek metszéspontjába, a $P(x_0; y_0)$ pontba toltuk el önmagával párhuzamosan.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x-y-1)dx+(4y+x-1)dy = 0.$$

Mivel az

$$M(x, y) = x-y-1,$$
$$N(x, y) = 4y+x-1$$

függvények lineárisak, de nem homogének, nézzük meg először, hogy az

$$x-y-1 = 0,$$
$$x+4y-1 = 0$$

lineáris egyenletrendszernek van-e egyértelmű megoldása. Mivel az egyenletrendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4+1 = 5 \neq 0,$$

egyértelmű megoldása van, mégpedig

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{5}{5} = 1,$$

$$y_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{5} = 0.$$

Az alkalmazott helyettesítés tehát

$x = u+1$, amikor is $dx = du$,
$y = v+0$, amikor is $dy = dv$.

Ezzel differenciálegyenletünk

$$(u-v)du+(4v+u)dv = 0$$

alakú lett, ez pedig homogén fokszámú (fokszáma 1) differenciálegyenlet. A

$$v = ut, \quad dv = t\,du+u\,dt$$

helyettesítés ezt az egyenletet az

$$u(1-t)du+u(4t+1)(t\,du+u\,dt) = 0$$

alakú szétválasztható változójú differenciálegyenletbe viszi át. Ez rendezés után

$$\frac{du}{u}+\frac{4t+1}{4t^2+1}dt = 0$$

alakú. A második tag integrálját külön számítjuk ki:

$$\int \frac{4t+1}{4t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{8t}{4t^2+1}dt+\int \frac{1}{(2t)^2+1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(4t^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2t.$$

Ezt felhasználva

$$\ln|u|+\frac{1}{2}\ln(4t^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2t = c_1,$$

ill.

$$\ln u^2(4t^2+1)+\operatorname{arctg} 2t = c.$$

Mivel $t = \dfrac{v}{u}$ és $v = y$, $u = x-1$, ezért a megoldás

$$\ln(x-1)^2\left[4\left(\frac{y}{x-1}\right)^2+1\right]+\operatorname{arctg} 2\frac{y}{x-1} = c,$$

ill.

$$\ln[4y^2+(x-1)^2]+\operatorname{arctg}\frac{2y}{x-1} = c$$

alakú.

2. Megoldandó a következő differenciálegyenlet:

$$y' = \frac{2x-5y+3}{2x+4y-6}.$$

A

$$2x-5y+3 = 0,$$
$$2x+4y-6 = 0$$

lineáris egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása, mert

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Könnyű kiszámitani, hogy az egyenletrendszer megoldása $x_0=1$, $y_0=1$, így az alkalmazandó helyettesítés

$$x = u+1, \quad y = v+1.$$

Ekkor

$$dx = du, \quad dy = dv,$$

a differenciálegyenlet pedig

$$\frac{dv}{du} = \frac{2u-5v}{2u+4v}$$

alakú. Ez homogén fokszámú (foka 1) differenciálegyenlet. Alkalmazzuk a $v = ut$, $\frac{dv}{du} = t+u\frac{dt}{du}$ helyettesítést. Ekkor

$$t+u\frac{dt}{du} = \frac{u(2-5t)}{u(2+4t)},$$

$$u\frac{dt}{du} = \frac{2-7t-4t^2}{2(1+2t)}.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{2(2t+1)}{4t^2+7t-2}\,dt = -\frac{du}{u}.$$

A bal oldalon álló integrált külön számítjuk ki. A racionális törtfüggvényt parciális törtekre bontjuk. A nevezőben álló másodfokú függvény zérushelyei $\frac{1}{4}$ és -2, gyöktényezős alakja $4\left(t-\frac{1}{4}\right)(t+2) = (4t-1)(t+2)$. A

$$\frac{4t+2}{4t^2+7t-2} = \frac{A}{4t-1}+\frac{B}{t+2}$$

azonosság alapján $A = \frac{4}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, és így az integrál

$$\int\frac{2(2t+1)}{4t^2+7t-2}\,dt = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}\ln|4t-1|+\frac{2}{3}\ln|t+2|.$$

Ezt felhasználva, differenciálegyenletünk megoldása

$$\frac{1}{3}\ln|4t-1|+\frac{2}{3}\ln|t+2| = -\ln|u|+\ln c$$

alakú. Átalakítva

$$(4t-1)(t+2)^2 = \left(\frac{c}{u}\right)^3.$$

Visszahelyettesítve előbb az u és v változókat

$$(4v-u)(v+2u)^2 = c^3,$$

majd az x és y változókat

$$(4y-x-3)(y+2x-3)^2 = C.$$

Ezzel megkaptuk a differenciálegyenlet általános megoldását.

3. Keressük meg a

$$(2x^2+3y^2-7)x\,dx-(3x^2+2y^2-8)y\,dy = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

Önként adódik az $x^2=u$, $y^2=v$ helyettesítés, amikor is $2x\,dx=du$ és $2y\,dy=dv$, és ezzel egyenletünk a

$$(2u+3v-7)du-(3u+2v-8)dv = 0$$

alakra hozható. A

$$\begin{aligned} 2u+3v-7 &= 0, \\ 3u+2v-8 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása (amint az könnyen látható)

$$u_0 = 2, \quad v_0 = 1,$$

a célszerű helyettesítés tehát a következő

$$u = r+2, \quad v = s+1.$$

Ekkor $du=dr$, $dv=ds$.

Ennek segítségével egyenletünk új alakja

$$(2r+3s)dr-(3r+2s)ds = 0.$$

Ez már homogén fokszámú egyenlet (foka 1), így az $r=st$, $dr = s\,dt+t\,ds$ helyettesítés következik. Ekkor

$$s(2t+3)(s\,dt+t\,ds)-s(3t+2)ds = 0$$

és ebből

$$2(t^2-1)\,ds+(2t+3)s\,dt = 0,$$

ill. a változókat szétválasztva

$$2\frac{ds}{s} = -\frac{2t+3}{t^2-1}\,dt.$$

A jobb oldalon álló integrált külön számítjuk ki parciális törtekre bontással. A

$$\frac{2t+3}{t^2-1} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}$$

azonosságból $A = \frac{5}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, és így

$$\int\frac{2t+3}{t^2-1}\,dt = \frac{5}{2}\int\frac{1}{t-1}\,dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t+1}\,dt =$$

$$= \frac{5}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln|t+1|+\ln c.$$

A differenciálegyenlet megoldása tehát

$$2\ln|s| = -\frac{5}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t+1|-\ln c,$$

ill.

$$s^4 = C\frac{t+1}{(t-1)^5}.$$

Fokozatosan áttérve az eredeti változókra

$$s^4 = C\frac{\frac{r}{s}+1}{\left(\frac{r}{s}-1\right)^5},$$

$$(r-s)^5 = C(r+s),$$
$$(u-v-1)^5 = C(u+v-3),$$
$$(x^2-y^2-1)^5 = C(x^2+y^2-3),$$

és ezzel megkaptuk az általános megoldást.

4. Határozzuk meg az

$$y' = \left(\frac{2x-y+1}{x}\right)^2$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

A

$$2x-y+1 = 0,$$
$$x = 0$$

egyenletrendszer megoldása $x_0=0$, $y_0=1$. A helyettesítés tehát

$$x = u+0,\quad y = v+1,$$

és ekkor $dx=du$, $dy=dv$. Így egyenletünk

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{2u-v}{u}\right)^2 = \left(2-\frac{v}{u}\right)^2$$

alakú. Legyen most $\frac{v}{u} = t$, ekkor $v = ut$ és $\frac{dv}{du} = t+u\frac{dt}{du}$. Ezzel

$$t+u\frac{dt}{du} = (2-t)^2,$$

ill. a változókat szétválasztva

$$\frac{dt}{t^2-5t+4} = \frac{du}{u}.$$

A bal oldalon álló tag nevezőjének zérushelyei $t=4$ és $t=1$, gyöktényezős alakja $(t-4)(t-1)$, és ezért

$$\int\frac{dt}{t^2-5t+4} = \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{t-4}+\frac{-\frac{1}{3}}{t-1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}(\ln|t-4|-\ln|t-1|) = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-4}{t-1}\right|.$$

Ezt felhasználva

$$\ln\left|\frac{t-4}{t-1}\right| = 3\ln|u|+\ln c,$$

$$\frac{t-4}{t-1} = cu^3.$$

Visszahelyettesítve t értékét

$$\frac{v-4u}{v-u} = cu^3,$$

végül u és v értékét

$$\frac{y-4x-1}{y-x-1} = cx^3,$$

és ezzel megkaptuk a differenciálegyenlet általános megoldását.

5. Oldjuk meg az

$$(x+y)dx+(3x+3y-4)dy = 0$$

differenciálegyenletet!

Az

$$x+y = 0,$$
$$3x+3y = 4$$

egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása, mert

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ekkor a célszerű helyettesítés

$$x+y = t, \quad dy = dt-dx,$$

és ezzel differenciálegyenletünk új alakja

$$t\,dx+(3t-4)(dt-dx) = 0,$$

vagy rendezve

$$(4-2t)dx+(3t-4)dt = 0,$$

és ennek változói már szétválaszthatók:

$$2\,dx = \frac{3t-4}{t-2}\,dt.$$

Integrálva

$$2x+C = \int\left(\frac{3t-6}{t-2}+\frac{2}{t-2}\right)dt = 3t+2\ln|t-2|.$$

Ha t értékét visszahelyettesítjük, akkor

$$3(x+y)+2\ln|x+y-2|-2x = C,$$

ill.

$$x+3y+\ln(x+y-2)^2 = C.$$

6. Megoldandó az

$$y' = \frac{3x+2y+1}{3x+2y-1}$$

differenciálegyenlet.

Azonnal látszik, hogy a

$$3x+2y+1 = 0,$$
$$3x+2y-1 = 0$$

egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása, hiszen

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Legyen ezért

$$3x+2y = v, \quad \text{ekkor} \quad y' = \frac{1}{2}(v'-3),$$

és így

$$\frac{1}{2}(v'-3) = \frac{v+1}{v-1}.$$

Ebből

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2(v+1)}{v-1}+3 = \frac{5v-1}{v-1}.$$

Szétválasztva a változókat

$$dx = \frac{v-1}{5v-1}\,dv = \frac{1}{5}\left(1-\frac{4}{5v-1}\right)dv,$$

integrálva

$$x+c = \frac{1}{5}\left(v-\frac{4}{5}\ln|5v-1|\right),$$

visszahelyettesítve

$$5x+c_1 = 3x+2y-\frac{4}{5}\ln|15x+10y-1|,$$

ill.

$$\ln|15x+10y-1| = \frac{5}{2}(y-x)+C.$$

d) AZ $yf(xy)\,dx+xg(xy)dy = 0$ TÍPUSÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. Ha az

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy = 0$$

differenciálegyenletben

$$M(x, y) = yf(xy),$$
$$N(x, y) = xg(xy)$$

alakú függvények, akkor az

$$xy = t, \quad \text{azaz} \quad y = \frac{t}{x}$$

helyettesítés a differenciálegyenletet szétválasztható változójú differenciálegyenletbe transzformálja át. Ebben az esetben

$$dy = \frac{x\,dt - t\,dx}{x^2}.$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(y - xy^2)dx - (x + x^2y)dy = 0.$$

Ha az első tagból y-t, a másodikból x-et kiemelünk, akkor

$$y(1 - xy)dx - x(1 + xy)dy = 0,$$

és a differenciálegyenletnek erről az alakjáról már látszik, hogy célszerű az $xy = t$-t helyettesíteni. Esetünkben

$$dy = \frac{x\,dt - t\,dx}{x^2},$$

és ezzel

$$\frac{t}{x}(1 - t)\,dx - x(1 + t)\,\frac{x\,dt - t\,dx}{x^2} = 0,$$

és rendezés után

$$2t\,dx - x(1 + t)\,dt = 0.$$

A változókat szétválasztva

$$2\,\frac{dx}{x} = \frac{1 + t}{t}\,dt,$$

integrálva

$$2\ln|x| + \ln c = \ln|t| + t.$$

Innen

$$\ln\left|\frac{cx^2}{t}\right| = t, \quad cx^2 = te^t,$$

ill. t értékét visszahelyettesítve

$$cx^2 = xye^{xy}, \quad cx = ye^{xy}.$$

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y(xy + 1)dx + x(1 + xy + x^2y^2)dy = 0.$$

Alkalmazzuk az

$$xy = t, \quad dy = \frac{x\,dt - t\,dx}{x^2}$$

transzformációt. Ekkor

$$\frac{t}{x}(t + 1)\,dx + x(1 + t + t^2)\,\frac{x\,dt - t\,dx}{x^2} = 0.$$

A törteket eltüntetve

$$(t^2 + t)dx + x(1 + t + t^2)dt - t(1 + t + t^2)dx = 0.$$

Rendezve

$$t^3dx = x(1 + t + t^2)dt.$$

Válasszuk szét a változókat!

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt.$$

Most már könnyen integrálhatunk:

$$\ln|x| + \ln c = -\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} + \ln|t|.$$

Ebből

$$\ln\left|c\,\frac{x}{t}\right| = -\left(\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t}\right),$$

ill. t értékének a visszahelyettesítése után

$$\ln\left|\frac{c}{y}\right| = -\left(\frac{1}{2x^2y^2} + \frac{1}{xy}\right).$$

Ha még a törteket is eltávolítjuk, akkor az általános megoldás a következő alakra hozható:

$$2x^2y^2\ln\left|\frac{c}{y}\right| = -(1 + 2xy).$$

3. Írjuk fel az

$$(1-xy+x^2y^2)dx+x^2(xy-1)dy = 0$$

differenciálegyenlet integrálgörbéi közül azt, amely áthalad a $P(1;2)$ ponton.

A differenciálegyenlet alakjáról látszik, hogy nem pontosan $yf(xy)dx+ +xg(xy)dy = 0$ alakú, hiszen az első tagban nem szerepel y szorzóként, és a második tagban nem x, hanem x^2 a $g(xy)dy$ szorzója. Tudjuk azonban azt is, hogy ha az $xy=t$ helyettesítést alkalmazzuk, akkor

$$dy = \frac{x\,dt-t\,dx}{x^2},$$

és a helyettesítés és szorzás elvégzése után most x^2-tel egyszerűsíteni tudunk. Ez arra ösztönöz, hogy ebben az esetben is megkíséreljük az $xy=t$ helyettesítését, ekkor

$$(1-t+t^2)\,dx+x^2(t-1)\,\frac{x\,dt-t\,dx}{x^2} = 0.$$

Rendezés után

$$dx+x\,(t-1)\,dt = 0,$$

a változókat szétválasztva

$$\frac{dx}{x} = (1-t)\,dt,$$

integrálva

$$\ln|x|+c = t-\frac{t^2}{2}.$$

t értékét visszahelyettesítve az általános megoldás

$$\ln|x|+c = xy-\frac{1}{2}(xy)^2.$$

A $P(1;2)$ ponton áthaladó görbére

$$c = 2-2 = 0,$$

így a görbe egyenlete

$$\ln|x| = xy-\frac{1}{2}(xy)^2.$$

4. EGZAKT DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Az

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$$

elsőrendű differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Az M és N függvényekről fel kell tennünk, hogy parciális deriváltjaik egy egyszeresen összefüggő T tartományban léteznek és folytonosak.

Egzakt differenciálegyenlet esetében van olyan $F(x,y)$ függvény, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y),$$

tehát

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy = dF(x,y),$$

vagyis a differenciálegyenlet bal oldalán az $F(x,y)$ függvény teljes differenciálja áll. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$F(x,y) = C.$$

Az $F(x,y)$ függvényt kétféle módon is meghatározhatjuk:

1. Mivel

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

ezért

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dy+f(x),$$

ahol $f(x)$ egyelőre ismeretlen (csak x-től függő) függvény. Mivel azonban

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y),$$

ezért

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int N(x,y)\,dy+f(x)\right] \equiv M(x,y),$$

azaz

$$\int \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dy + f'(x) \equiv M(x, y),$$

amiből az ismeretlen $f(x)$ függvény kiszámítható:

$$f(x) = \int \left[M(x, y) - \int \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dy \right] dx,$$

mert egzakt egyenlet esetében ez az integrandus valóban csak x-től függ. Ezt felhasználva

$$F(x, y) = \int N(x, y)\, dy + \int \left[M(x, y) - \int \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dy \right] dx.$$

Ha x és y szerepét felcseréljük, akkor

$$F(x, y) = \int M(x, y)\, dx + \int \left[N(x, y) - \int \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx \right] dy.$$

2. Az $F(x, y)$ függvény a dF teljes differenciáljából vonalintegrállal is kiszámítható. Az integrálás a T tartomány valamely $(x_0; y_0)$ pontjából kiinduló, tetszőleges, teljes egészében T-ben fekvő görbe mentén történik. Ha a görbét célszerűen úgy választjuk, hogy az a koordinátatengelyekkel párhuzamos szakaszokból álljon, akkor

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y_0)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\, d\eta.$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(4x^3y^3 - 2xy)dx + (3x^4y^2 - x^2)dy = 0.$$

A differenciálegyenlet egzakt, mert

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3y^3 - 2xy) = 12x^3y^2 - 2x,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^4y^2 - x^2) = 12x^3y^2 - 2x.$$

Ekkor (teljes differenciálként integrálva)

$$F(x, y) = \int (3x^4y^2 - x^2)dy = x^4y^3 - x^2y + f(x).$$

Azonban

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^4y^3 - x^2y + f(x)) \equiv 4x^3y^3 - 2xy,$$

azaz

$$4x^3y^3 - 2xy + f'(x) \equiv 4x^3y^3 - 2xy,$$

amiből

$$f'(x) = 0 \quad \text{vagyis} \quad f(x) = c.$$

Így

$$F(x, y) = x^4y^3 - x^2y + c,$$

és a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^4y^3 - x^2y = C.$$

Ha x és y szerepét felcseréljük, akkor

$$F(x, y) = \int (4x^3y^3 - 2xy)dx = x^4y^3 - x^2y + g(y).$$

Azonban

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^4y^3 - x^2y + g(y)) \equiv 3x^4y^2 - x^2,$$

azaz

$$3x^4y^2 - x^2 + g'(y) \equiv 3x^4y^2 - y^2,$$

amiből

$$g'(y) = 0, \quad \text{vagyis} \quad g(y) = c.$$

Így

$$F(x, y) = x^4y^3 - x^2y + c,$$

amint azt előbb is láttuk.

Ha a megoldást vonalintegrál segítségével számítjuk ki, akkor legyen a vonalintegrál kezdőpontja az origó, a végpontja a tetszőleges $(x; y)$ koordinátájú pont, és az integrációs út előbb a $(0; 0)$ pontból az $(x; 0)$ pontba, majd az $(x; 0)$ pontból az $(x; y)$ végpontba vezető szakasz (10. ábra). Az első szakasz az x tengelyen van (ekkor $y=0$), a második az y tengellyel párhuzamosan halad az y tengelytől x távolságra.

Ekkor

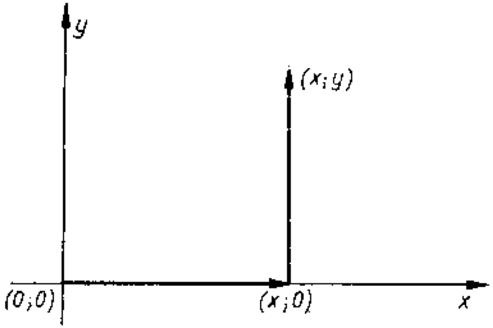
$$F(x, y) = \int_0^x (4\xi^3 \cdot 0^3 - 2\xi \cdot 0)d\xi + \int_0^y (3x^4\eta^2 - x^2)d\eta =$$

$$= 0 + \left[3x^4 \frac{\eta^3}{3} - x^2\eta \right]_0^y = x^4y^3 - x^2y.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$x^4y^3-x^2y=C,$$

amint azt már láttuk.



10. ábra

2. Határozzuk meg az

$$(x^2-y)dx-x\,dy=0$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y)=-1=\frac{\partial}{\partial x}(-x),$$

ezért a differenciálegyenlet egzakt. Így

$$F(x,y)=\int(x^2-y)dx=\frac{x^3}{3}-xy+g(y).$$

Minthogy

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3}-xy+g(y)\right)\equiv -x$$

kell, hogy legyen, ezért $g'(y)=0$, azaz $g(y)=c$, és ezt felhasználva

$$F(x,y)=\frac{x^3}{3}-xy+c,$$

és a differenciálegyenlet általános megoldása

$$\frac{x^3}{3}-xy=C.$$

Ellenőrzésképpen differenciáljuk a megoldást x szerint. Ekkor

$$x^2-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0,$$

amiből a differenciálegyenlet átrendezéssel azonnal megkapható.

3. Oldjuk meg a

$$(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$$

differenciálegyenletet!

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^3+3y)=3=\frac{\partial}{\partial x}(3x+y-1),$$

ezért a differenciálegyenlet egzakt. Esetünkben

$$F(x,y)=\int(2x^3+3y)dx=\frac{1}{2}x^4+3xy+g(y).$$

Minthogy

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^4+3xy+g(y)\right)\equiv 3x+y-1$$

kell, hogy legyen, ezért (a bal oldalon a differenciálást elvégezve és rendezve)

$$g'(y)=y-1,$$

és ebből

$$g(y)=\frac{y^2}{2}-y+c.$$

Ezt felhasználva

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^4+3xy+\frac{y^2}{2}-y+c,$$

és a differenciálegyenlet általános megoldása

$$\frac{1}{2}x^4+3xy+\frac{y^2}{2}-y=C.$$

4. Megoldandó az

$$(y^2e^{xy^2}+4x^3)\,dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)\,dy=0$$

differenciálegyenlet.

A differenciálegyenlet egzakt, mert

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2e^{xy^2}+4x^3) = 2ye^{xy^2}+2xy^3e^{xy^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2xye^{xy^2}-3y^2).$$

Ezért

$$F(x, y) = \int (2xye^{xy^2}-3y^2)\,dy = e^{xy^2}-y^3+f(x).$$

Minthogy azonban

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy^2}-y^3+f(x)) \equiv y^2e^{xy^2}+4x^3$$

kell hogy legyen, ezért

$$f'(x) = 4x^3,$$

ill.

$$f(x) = x^4+c,$$

és így

$$F(x, y) = e^{xy^2}-y^3+x^4+c.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$e^{xy^2}-y^3+x^4 = C.$$

5. Keressük a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$\left[y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right]dx+\left[\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right]dy = 0.$$

A differenciálegyenlet egzakt, hiszen

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2\right] = 2y-\frac{x(x+y)-yx}{x^2(x+y)^2} = 2y-\frac{1}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right] = -\frac{1}{(x+y)^2}+2y,$$

és a két parciális derivált azonosan egyenlő. Most

$$F(x, y) = \int\left[\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right]dy = \ln|x+y|+y^2(x+1)+f(x).$$

Mivel pedig

$$\frac{\partial}{\partial x}[\ln|x+y|+y^2(x+1)+f(x)] \equiv y^2-\frac{y}{x(x+y)}+2$$

kell hogy legyen, ezért

$$f'(x) = -\frac{y}{x(x+y)}-\frac{1}{x+y}+2 = -\frac{1}{x}+2,$$

ill.

$$f(x) = -\ln|x|+2x+c.$$

Ezzel

$$F(x, y) = \ln|x+y|+y^2(x+1)-\ln|x|+2x+C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$\ln\left|\frac{x+y}{x}\right|+y^2(x+1)+2x = C.$$

A megoldás helyes, mert például x szerint differenciálva a megoldás mind a két oldalán

$$\frac{x}{x+y}\cdot\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)x-(x+y)}{x^2}+2y\frac{dy}{dx}(x+1)+y^2+2 = 0,$$

ebből

$$\frac{1}{x(x+y)}\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)+2y\frac{dy}{dx}(x+1)+y^2+2 = 0,$$

és még dx-szel is végigszorozva az egyenletet

$$\left[\frac{1}{x+y}+2y(x+1)\right]dy+\left[-\frac{y}{x(x+y)}+y^2+2\right]dx = 0,$$

ami éppen az adott differenciálegyenlet.

6. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$(x+y\cos x)dx+\sin x\,dy = 0.$$

A differenciálegyenlet egzakt, mert

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin x = \cos x = \frac{\partial}{\partial y}(x+y\cos x).$$

Az általános megoldást most vonalintegrál segítségével határozzuk meg. Legyen az integrációs út az origóból az $(x; y)$ pontba vezető törött vonal amelynek az első szakasza az x tengelyen van, a második szakasza pedig párhuzamos az y tengellyel. Ekkor

$$F(x, y) = \int_0^x (\xi + 0 \cdot \cos \xi) d\xi + \int_0^y \sin x \, d\eta =$$

$$= \left[\frac{\xi^2}{2}\right]_0^x + [\eta \sin x]_0^y = \frac{x^2}{2} + y \sin x.$$

Az általános megoldás tehát

$$x^2 + 2y \sin x = C.$$

Válasszunk a vonalintegrál kiszámításához most más utat! Legyen az integrációs út például a $P(1; 1)$ pontból a $Q(x; y)$ ponthoz vezető törött vonal, amelynek egyik szakasza az x, másik szakasza az y tengellyel párhuzamos. Ekkor az x tengellyel párhuzamos szakaszon $y=1$.

$$F(x, y) = \int_1^x (\xi + 1 \cdot \cos \xi) d\xi + \int_1^y \sin x \, d\eta =$$

$$= \left[\frac{\xi^2}{2} + \sin \xi\right]_1^x + [\eta \sin x]_1^y =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \sin x - \frac{1}{2} + \sin 1 + y \sin x - \sin x =$$

$$= \frac{x^2}{2} + y \sin x + \sin 1 - \frac{1}{2}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$\frac{x^2}{2} + y \sin x + \sin 1 - \frac{1}{2} = c,$$

vagy

$$\frac{x^2}{2} + y \sin x = C,$$

amint azt már láttuk. Itt $C = c + \frac{1}{2} - \sin 1$.

7. Megoldandó az

$$(y^2+1)^{\frac{3}{2}} dx + \left[y^2 + 3xy(y^2+1)^{\frac{1}{2}}\right] dy = 0$$

differenciálegyenlet.

A differenciálegyenlet egzakt, mert

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(y^2+1)^{\frac{3}{2}}\right] = 3y(y^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[y^2 + 3xy(y^2+1)^{\frac{1}{2}}\right].$$

A megoldást szolgáltató $F(x, y)$ függvényt vonalintegrállal számítjuk ki. Legyen az integrációs út az origóból az $(x; y)$ pontba vezető törött vonal, amelynek egyik szakasza az x tengelyre esik, másik szakasza az y tengellyel párhuzamos. Ekkor

$$F(x, y) = \int_0^x (0+1)^{\frac{3}{2}} d\xi + \int_0^y \left[\eta^2 + 3x\eta(\eta^2+1)^{\frac{1}{2}}\right] d\eta =$$

$$= [\xi]_0^x + \left[\frac{\eta^3}{3} + \frac{3}{2} x \frac{(\eta^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^y =$$

$$= x + \frac{y^3}{3} + x(y^2+1)^{\frac{3}{2}} - x.$$

Az általános megoldás tehát

$$y^3 + 3x(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

5. EGZAKT DIFFERENCIÁLEGYENLETRE VISSZAVEZETHETŐ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK, INTEGRÁLÓ TÉNYEZŐ

Ha az

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenlet nem egzakt, sok esetben elérhető, hogy egy alkalmas $m(x, y) \neq 0$ függvénnyel megszorozva az egyenlet bal oldalát, az egzakttá válik. Az $m(x, y)$ függvényt *integráló tényezőnek* nevezik. Ha az

$$mM \, dx + mN \, dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt, akkor m eleget tesz a

$$\frac{\partial}{\partial y}(mM) = \frac{\partial}{\partial x}(mN),$$

és az ebből kapható

$$m\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=N\frac{\partial m}{\partial x}-M\frac{\partial m}{\partial y},$$

ill.

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\frac{\partial \ln m}{\partial x}-M\frac{\partial \ln m}{\partial y}$$

parciális differenciálegyenletnek, és megfordítva ennek az egyenletnek egy partikuláris megoldása integráló tényező. Az integráló tényezőre kapott parciális egyenletet nem tudjuk mindig megoldani, és ezért nem található bármilyen elsőrendű differenciálegyenlethez integráló tényező, amely ezt egzakttá tenné. Néhány speciális esetben azonban könnyen található integráló tényező. Ilyen egyszerű eseteket sorolunk fel most.

1. Ha

$$\frac{\partial \ln m}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x),$$

azaz csak x-től függő függvény, akkor

$$m=e^{\int f(x)\,dx}$$

integráló tényező.

2. Ha

$$\frac{\partial \ln m}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=g(y),$$

azaz csak y-tól függő függvény, akkor

$$m=e^{-\int g(y)\,dy}$$

integráló tényező.

3. Ha

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=Nf(x)-Mg(y),$$

akkor

$$m=e^{\int f(x)\,dx+\int g(y)\,dy}$$

integráló tényező.

4. Ha M és N azonos fokszámú homogén függvények, és $Mx+Ny\neq 0$, akkor

$$m=\frac{1}{Mx+Ny}$$

integráló tényező.

5. Ha az

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$$

differenciálegyenlet felírható

$$yf_1(xy)\,dx+xf_2(xy)\,dy=0$$

alakban, akkor

$$m=\frac{1}{Mx-Ny}$$

integráló tényező.

Amint az látható, az integráló tényező meghatározásához még a felsorolt legegyszerűbb esetekben is integrálnunk kell. Elkerülhetjük ezt a lépést (és ezzel gyorsabban juthatunk a célhoz), ha néhány gyakran előforduló kétváltozós függvény teljes differenciálját ismerjük, és az adott differenciálegyenlet tagjai között a teljes differenciál olyan részleteit ismerjük fel, amelyekből a teljes differenciál egy alkalmas szorzótényezővel — ez lesz az integráló tényező — való szorzással előállítható. Most néhány teljes differenciált sorolunk fel:

(1) $\quad x\,dy+y\,dx=d(xy),$

(2) $\quad x\,dx\pm y\,dy=d\left[\frac{1}{2}(x^2\pm y^2)\right],$

(3) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right),$$

(4) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = d\left(-\frac{x}{y}\right),$$

(5) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = d\left(\ln\frac{y}{x}\right),$$

(6) $$\frac{x\,dy + y\,dx}{xy} = d(\ln xy),$$

(7) $$\frac{x\,dy + y\,dx}{x^2 - y^2} = d\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y}\right),$$

(8) $$\frac{dx + dy}{x+y} = d[\ln(x+y)],$$

(9) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right),$$

(10) $$\frac{y\,dx - x\,dy}{(x+y)^2} = d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\right],$$

(11) $$\frac{x\,dy + y\,dx}{x^2y^2} = d\left(-\frac{1}{xy}\right),$$

(12) $$\frac{x\,dx + y\,dx}{(xy)^n} = d\left(\frac{-1}{(n-1)(xy)^{n-1}}\right) \quad n \neq 1$$

(13) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2} = d\left(\frac{1}{2}\,\frac{x+y}{x-y}\right),$$

(14) $$\frac{x\,dy - y\,dx}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = d\left(\arcsin\frac{y}{x}\right),$$

(15) $$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right].$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x^2+y^2+x)\,dx + xy\,dy = 0.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+x) = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y,$$

a differenciálegyenlet nem egzakt. Kíséreljünk meg integráló tényezőt találni.

Minthogy

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x),$$

ezért integráló tényező létezik, mégpedig

$$m(x) = e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int dx/x} = e^{\ln x} = x.$$

Ennek segítségével az

$$(x^3 + xy^2 + x^2)\,dx + x^2y\,dy = 0$$

egyenlet már egzakt.

$$F(x, y) = \int (x^3 + xy^2 + x^2)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + g(y).$$

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} + g(y)\right) \equiv x^2y$$

kell hogy legyen, ezért

$$g'(y) = 0, \quad g(y) = c.$$

Ezzel

$$F(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} + c,$$

és az egyenlet általános megoldása

$$3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C.$$

2. Megoldandó a következő differenciálegyenlet:

$$(2xy^4e^y+2xy^3+y)dx+(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x)dy = 0.$$

Mivel

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4e^y-2xy^2-3,$$

ezért az egyenlet nem egzakt. Keressünk integráló tényezőt! Minthogy

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} = 8xy^3e^y+8xy^2+4 = 4(2xy^3e^y+2xy^2+1),$$

és

$$M = y(2xy^3e^y+2xy^2+1),$$

ezért látszik, hogy

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{4}{y}$$

csak y-tól függ, és így integráló tényező létezik, mégpedig

$$m(y) = e^{-\int \frac{4}{y}dy} = e^{-4\ln y} = \frac{1}{y^4}.$$

Felhasználva az integráló tényezőt, a

$$\left(2xe^y+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx+\left(x^2e^y-\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y^4}\right)dy = 0$$

differenciálegyenlet már egzakt.

$$F(x, y) = \int\left(2xe^y+2\frac{x}{y}+\frac{1}{y^3}\right)dx =$$

$$= x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}+g(y).$$

Mivel

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4}+g'(y)$$

azonosan egyenlő kell, hogy legyen az

$$N = x^2e^y-\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y^4}$$

függvénnyel, ezért

$$g'(y) = 0, \quad \text{vagyis} \quad g(y) = c,$$

és ezzel

$$F(x, y) = x^2e^y-\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y^4}+c.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-3\frac{x}{y^4} = C.$$

3. Keressük meg az

$$(x^4+y^4)dx-xy^3dy = 0$$

differenciálegyenlet megoldását!

Az egyenlet homogén fokszámú (foka 4), és ezért megoldható az $y=xt$ helyettesítéssel is. Rövidebb a megoldás, ha az egyenletet az

$$m(x, y) = \frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{(x^4+y^4)x-xy^3y} = \frac{1}{x^5}$$

integráló tényező segítségével egzakttá tesszük. Az egzakt egyenlet

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx-\frac{y^3}{x^4}dy = 0.$$

Most

$$F(x, y) = \int-\frac{y^3}{x^4}dy = -\frac{y^4}{4x^4}+f(x).$$

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y^4}{4x^4}+f(x)\right) = \frac{y^4}{x^5}+f'(x) \equiv \frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}$$

kell hogy legyen, ezért

$$f'(x) \equiv \frac{1}{x} \quad \text{és így} \quad f(x) = \ln|x|+c.$$

$$F(x, y) = -\frac{y^4}{4x^4}+\ln|x|+c,$$

és a megoldás

$$y^4 = 4x^4 \ln |x| + cx^4.$$

4. Oldjuk meg az

$$y(x^2y^2+2)dx + x(2-2x^2y^2)dy = 0$$

differenciálegyenletet!

A differenciálegyenlet

$$yf_1(xy)dx + xf_2(xy)dy = 0$$

alakú, ezért az

$$m(x, y) = \frac{1}{Mx-Ny} = \frac{1}{xy(x^2y^2+2)-xy(2-2x^2y^2)} = \frac{1}{3x^3y^3}$$

függvény integráló tényező. A segítségével kapható egzakt differenciálegyenlet

$$\frac{x^2y^2+2}{3x^3y^2}dx + \frac{2-2x^2y^2}{3x^2y^3}dy = 0$$

alakú. Most

$$F(x, y) = \int \frac{x^2y^2+2}{3x^3y^2}dx = \int\left(\frac{1}{3x}+\frac{2}{3x^3y^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3x^2y^2} + g(y).$$

Minthogy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{3x^2y^3} + g'(y) \equiv \frac{2-2x^2y^2}{3x^2y^3},$$

ezért

$$g'(y) = -\frac{2}{3y}, \quad \text{ill.} \quad g(y) = -\frac{2}{3}\ln|y| + \ln c.$$

Ezt felhasználva

$$F(x, y) = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{3x^2y^2} - \frac{2}{3}\ln|y| + \ln c.$$

A differenciálegyenlet megoldása tehát

$$\ln|xy^2| - \frac{1}{x^2y^2} = C.$$

5. Keressük meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$x\,dy - y\,dx - (1-x^2)dx = 0.$$

Mivel

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

a differenciálegyenlet nem egzakt. Azonban

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2}{x},$$

ami csak x-től függ, és így integráló tényező létezik, mégpedig

$$m(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2}.$$

Ezt felhasználva az

$$\frac{1}{x}dy - \left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2} - 1\right)dx = 0$$

egyenlet már egzakt. Most

$$F(x, y) = \int \frac{1}{x}dy = \frac{1}{x}y + f(x).$$

Minthogy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + f'(x) \equiv -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x^2} + 1,$$

ezért

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1, \quad \text{ill.} \quad f(x) = \frac{1}{x} + x + c,$$

és így

$$F(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x + c.$$

Az általános megoldás

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = C,$$

vagy

$$y = Cx - x^2 - 1.$$

Lényegesen rövidebb úton jutunk el a megoldáshoz, ha észrevesszük, hogy az elsősorban szóba kerülhető (3)—(5) teljes differenciálok közül a (3)-at érdemes kialakítani, mert ekkor a bal oldal első két tagjából teljes differenciál képezhető. Ehhez x^2-tel kell elosztani az egyenlet minden tagját (az integráló tényező: $\frac{1}{x^2}\Big)$. Ekkor

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx = 0,$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx,$$

és ebből

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{x}-x+C,$$

amint azt már láttuk.

6. Oldjuk meg az

$$x\,dy+y\,dx = x^2y^2dx$$

differenciálegyenletet!

A differenciálegyenlet nem egzakt, sőt mivel

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x} = (1-2x^2y)-1 = -2x^2y$$

M-mel, ill. N-nel osztva nem ad csak x-től, ill. y-tól függő függvényt, integráló tényező keresése nem megy egyszerű módon. Ha azonban észrevesszük, hogy x^2y^2-tel átosztva

$$\frac{x\,dy+y\,dx}{x^2y^2} = dx,$$

és így a bal oldalon teljes differenciált kapunk [(11) eset], akkor máris készen vagyunk. Ekkor ugyanis

$$d\left(-\frac{1}{xy}\right) = dx,$$

ill. integrálás után

$$-\frac{1}{xy} = x+c,$$

amiből az általános megoldás

$$y = -\frac{1}{x(x+c)}.$$

Figyeljük meg azt is, hogy az $\frac{1}{x^2y^2}$ tényező integráló tényező, és az osztás után kapott egyenlet egzakt differenciálegyenlet.

7. Határozzuk meg az

$$y\,dx-x\,dy+\ln x\,dx = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

A differenciálegyenlet első két tagja teljes differenciálra utal. Olyan integráló tényezőt kell választanunk, amely az első két tagból teljes differenciált alakít ki (ilyen több is lehetséges), a harmadik tag pedig — az ott szereplő dx miatt — csak x-től függjön. Ezért az integráló tényező csak x-től függhet. Végigtekintve az (1)...(15) kifejezéseken, észrevehető, hogy az $m(x) = \frac{1}{x^2}$ alkalmas integráló tényező. Ezzel

$$-\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}+\frac{\ln x}{x^2}dx = 0,$$

ill. (3) alapján

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\ln x}{x^2}dx,$$

amiből

$$\frac{y}{x} = \int\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

A jobb oldalon álló integrált parciális integrálással számítjuk ki.

Legyen $u' = \frac{1}{x^2}$, $v = \ln x$, ekkor $u = -\frac{1}{x}$, $v' = \frac{1}{x}$, és ezzel

$$\int\frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+c.$$

Így a megoldás

$$y = -\ln x-1+cx.$$

8. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$x\,dy - y\,dx = x^3 y(x\,dx + y\,dx).$$

Vegyük észre, hogy ha x^2-tel ($x \neq 0$) elosztjuk az egyenlet mind a két oldalát, akkor

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = xy(x\,dy + y\,dx),$$

és (3), ill. (1) alapján mind a két oldalon teljes differenciál áll ($\frac{1}{x^2}$ az integráló tényező!):

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = xy\,d(xy).$$

Innen

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}(xy)^2 + c,$$

ill.

$$2y = x^3 y^2 + Cx.$$

9. Oldjuk meg az

$$x\,dx + y\,dy + 4y^3(x^2+y^2)dy = 0$$

differenciálegyenletet!

A bal oldal harmadik tagja azt sugallja, hogy osszuk el az egyenletet (x^2+y^2)-tel. Ekkor

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + 4y^3\,dy = 0,$$

és így (15) alapján

$$d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right] + 4y^3\,dy = 0,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + y^4 = c$$

az általános megoldás. Ez felírható még az

$$(x^2+y^2)e^{2y^4} = C$$

alakban is.

10. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x+y)dx - (x-y)dy = 0.$$

Alakítsuk át a bal oldalt

$$x\,dx + y\,dy - (x\,dy - y\,dx) = 0.$$

A bal oldalon álló tagok az $\frac{1}{x^2+y^2}$ integráló tényező bevezetését indokolják, mert akkor (15) és (9) szerint a bal oldalon két teljes differenciál áll:

$$d\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right] - d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Ebből

$$\ln(x^2+y^2) = 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c,$$

vagy átalakítva

$$x^2+y^2 = Ce^{2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása, és ez polárkoordinátás alakba írva

$$r = \sqrt{C}e^{\varphi}.$$

6. ELSŐRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Az

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

alakú differenciálegyenlet (amelyben y' és y elsőfokú) elsőrendű, *lineáris* differenciálegyenletnek nevezzük. $P(x)$ és $Q(x)$ valamilyen $[x_1, x_2]$ intervallumban értelmezett folytonos függvények.

Ha $Q(x) \equiv 0$, akkor a lineáris differenciálegyenlet *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Például az

$$y' + 2xy^2 = \sin x$$

egyenlet elsőrendű nem lineáris differenciálegyenlet, az

$$y'+2xy = \sin x$$

egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, az

$$y'+2xy = 0$$

egyenlet elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet.

Ha az y' és y együtthatói állandók, a differenciálegyenlet *állandó együtthatós* lineáris differenciálegyenlet. Ilyen például a

$$3y'+2y = e^x$$

egyenlet.

a) ELSŐRENDŰ HOMOGÉN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. Az

$$y'+P(x)y = 0$$

elsőrendű homogén lineáris differenciálegyenlet szétválasztható változójú differenciálegyenlet, ugyanis

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y,$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

és integrálva

$$\ln|y| = -\int P(x)\,dx+c,$$

amiből az általános megoldás

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

alakú, ahol C tetszőleges állandó.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket:

(*a*) $y'+2xy = 0$,
(*b*) $xy'-y = 0$,
(*c*) $y'-2y\operatorname{ctg} x = 0$.

(*a*) Ha a változókat szétválasztjuk, akkor

$$\frac{dy}{y} = -2x\,dx,$$

$$\ln|y| = -x^2+c,$$

$$y = e^{-x^2+c} = Ce^{-x^2}.$$

Ha a bevezetésben említett formulát használjuk, akkor

$$y = Ce^{-\int 2x\,dx} = Ce^{-x^2}.$$

(*b*) $$y = Ce^{-\int -\frac{1}{x}dx} = Ce^{\ln x} = Cx.$$

(*c*) $$y = Ce^{-\int -2\operatorname{ctg} x\,dx} = Ce^{2\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} =$$

$$= Ce^{2\ln|\sin x|} = C\sin^2 x.$$

2. Tekintsünk egy áramkört, amelyben egy R, Ω ellenállás, egy L, H önindukciós együtthatójú tekercs és egy U, V (állandó) belső feszültségű áramforrás van sorba kapcsolva. Írjuk fel az áramerősség változását az idő függvényében! Legyen $L=0{,}25$ H, $R=100\,\Omega$. Az áramkör zárása után mennyi idővel éri el az áramerősség a maximális áramerősség 99%-át? Az áramkör megszakítása után mennyi idővel esik le az áramerősség a maximális érték 2%-ára?

Az áramkör zárásakor (vagy megszakításakor) a tekercsben önindukciós feszültség ébred, amelynek nagysága arányos az áramerősség megváltozásának sebességével, és az őt létrehozó változást akadályozni igyekszik. Az arányossági tényező az önindukciós együttható. Az önindukciós feszültség tehát (i jelöli az áramerősséget)

$$U_ö = -L\frac{di}{dt},$$

és így a feszültség

$$u = U+U_ö = U-L\frac{di}{dt}.$$

Ohm törvénye szerint

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U - L\dfrac{di}{dt}}{R} ,$$

amiből

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U.$$

Ez a differenciálegyenlet írja le az áramerősség időben történő változását. Bár ez elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós inhomogén egyenlet, mégis megoldható a változók szétválasztásával, ha U=állandó, vagyis egyenáramról van szó. (Ha váltakozófeszültséget kapcsolunk az áramkörbe, a differenciálegyenlet jellege megmarad, de a megoldás már más. L. a *c)* alfejezet 5. feladatát.) Most

$$\frac{di}{dt} = \frac{U}{L} - \frac{R}{L}i,$$

$$\frac{di}{\dfrac{U}{L} - \dfrac{R}{L}i} = dt.$$

Integrálva

$$-\frac{L}{R}\ln\left|\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i\right| = t + k,$$

$$\frac{U}{L} - \frac{R}{L}i = ce^{-\frac{R}{L}t},$$

amiből a megoldás

$$i = \frac{U}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az áramkör zárásakor $t=0$-nak $i=0$ felel meg, vagyis az így adódó

$$0 = \frac{U}{R} + C$$

egyenletből

$$C = -\frac{U}{R},$$

és ezzel

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Ez azt jelenti, hogy az áramerősség t növekedtével fokozatosan, de gyorsan (exponenciálisan) növekszik és az $\frac{U}{R}$ értékhez (mint határértékhez) tart. A maximális áramerősség 99%-a olyan t időpontban lép fel, amikor

$$0{,}99\frac{U}{R} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

amiből

$$0{,}99 = 1 - e^{-\frac{R}{L}t},$$

vagyis

$$t = -\frac{L}{R}\ln 0{,}01 = \frac{L}{R}\ln 100.$$

A feladat adataival

$$t = \frac{0{,}25}{100}\ln 100 = \frac{0{,}0461}{4} = 0{,}0115$$

másodperc.

Az áramkör megszakításakor a $t=0$ időpillanatban $U=0$, és így ha a $t=0$-hoz tartozó áramerősség i_0, akkor

$$i_0 = 0 + C,$$

és ezzel

$$i = i_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az áramerősség nem azonnal zuhan 0-ra, hanem exponenciálisan csökken.

Az i_0 áramerősség 2%-ára esik az áramerősség, amikor

$$0{,}02i_0 = i_0 e^{-\frac{R}{L}t},$$

amiből

$$t = -\frac{L}{R}\ln 0{,}02 = \frac{L}{R}\ln 50.$$

Adatainkkal

$$t = \frac{0{,}25}{100}\ln 50 = \frac{0{,}0391}{4} = 0{,}0098$$

másodperc.

b) ELSŐRENDŰ INHOMOGÉN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. AZ ÁLLANDÓ VARIÁLÁSÁNAK MÓDSZERE. Az elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

ahol $P(x)$ és $Q(x)$ valamilyen $[a, b]$ intervallumban folytonos függvény és $Q(x) \not\equiv 0$, mert akkor az egyenlet homogén volna. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0$$

alakú, ahol Y az adott inhomogén egyenlethez tartozó

$$Y' + P(x)Y = 0$$

homogén egyenlet (homogén rész) általános megoldása, y_0 pedig az inhomogén egyenletnek egy partikuláris megoldása.

Az *a)* fejezet alapján

$$Y = Ce^{-\int P(x)\,dx},$$

az inhomogén egyenlet egy y_0 partikuláris megoldása pedig a homogén rész általános megoldásából a (Lagrange-tól származó) [J. L. Lagrange (1736—1813) francia matematikus] *állandó variálásának módszerével* határozható meg. A módszer abban áll, hogy az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását a homogén egyenlet már ismert általános megoldásához hasonló szerkezetűnek tételezzük fel, csak az abban szereplő C állandót most egy $C(x)$ függvénynek képzeljük (az állandót „variáljuk"), azaz

$$y_0 = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$$

alakúnak tekintjük. Kérdés, hogy milyen $C(x)$ függvény mellett lesz az y_0 függvény az inhomogén egyenletnek megoldása. Kiszámítva y_0'-t

$$y_0' = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)e^{-\int P(x)\,dx}(-P(x)),$$

ezt az eredeti inhomogén egyenletbe helyettesítjük:

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\,dx} =$$
$$= Q(x),$$

amiből

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

Vegyük észre, hogy ebben az egyenletben $C(x)$ nem szerepel. Integrálva

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Ezzel a $C(x)$ függvényt meghatároztuk. Ennek segítségével

$$y_0 = C(x)Y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right]e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = Y + y_0 = Ce^{-\int P(x)\,dx} + \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx\right]e^{-\int P(x)\,dx},$$

vagy

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right).$$

Ugyanehhez a megoldáshoz jutunk, ha észrevesszük, hogy

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = \frac{dy}{dx}e^{\int P(x)\,dx} + yP(x)e^{\int P(x)\,dx} =$$

$$= e^{\int P(x)\,dx}(y' + yP(x)),$$

azaz $e^{\int P(x)\,dx}$ integráló tényező, amely az inhomogén differenciálegyenlet bal oldalát teljes differenciálba viszi át. Szorozzuk meg tehát az inhomogén egyenlet mind a két oldalát az integráló tényezővel. Ekkor

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P(x)\,dx}\right) = e^{\int P(x)\,dx}Q(x).$$

Mind a két oldalon integrálva

$$ye^{\int P(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C,$$

amiből

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + C\right).$$

Egy harmadik módszerhez juthatunk akkor, ha feltételezzük, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldása két, csak x-től függő (egyelőre ismeretlen) függvény szorzata:

$$y = u(x)v(x).$$

Ekkor

$$y' = u'v + uv'$$

és ezt az eredeti differenciálegyenletbe helyettesítve

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

vagy átrendezve

$$u(v' + Pv) + (u'v - Q) = 0.$$

Ez az egyenlet bármilyen x-re fennáll, ha mind a két tagja külön-külön 0, azaz

$$v' + Pv = 0,$$

$$u'v - Q = 0.$$

Az első egyenletből (v-ben homogén lineáris differenciálegyenlet)

$$v = e^{-\int P(x)\,dx}$$

(az integrációs konstanst elhagytuk), és ha ezt a másodikba helyettesítjük

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx} + C.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = vu = e^{-\int P(x)\,dx}\left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx} + C\right).$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő lineáris differenciálegyenletet:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2.$$

Első megoldás: Oldjuk meg először az

$$Y' - \frac{Y}{x} = 0$$

homogén egyenletet (a homogén részt) például a változók szétválasztásával. Ekkor

$$\frac{dY}{dx} = \frac{Y}{x}, \quad \frac{dY}{Y} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|Y| = \ln|x| + \ln C$$

$$Y = Cx.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet y_0 partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével keressük meg. Legyen tehát

$$y_0 = C(x)x$$

alakú. Ekkor

$$y_0' = C'(x)x + C(x).$$

Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = x^2 + 3x - 2,$$

amiből

$$C'(x) = x + 3 - \frac{2}{x},$$

ill.

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|.$$

Ennek segítségével

$$y_0 = C(x)x = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|,$$

és így az általános megoldás

$$y = Y + y_0 = \frac{x^3}{2} + 3x^2 + Cx - 2x\ln|x|.$$

Második megoldás: Mivel

$$\int P(x)\,dx = \int -\frac{1}{x}\,dx = -\ln|x|,$$

így egy integráló tényező

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}$$

alakú. Ennek segítségével

$$\frac{1}{x}y = \int \frac{1}{x}(x^2+3x-2)\,dx,$$

vagyis

$$y = x\int\left(x+3-\frac{2}{x}\right)dx = x\left(\frac{x^2}{2}+3x-2\ln|x|+C\right) =$$

$$= \frac{x^3}{2}+3x^2-2x\ln|x|+Cx,$$

amint azt már láttuk.

Harmadik megoldás: Az inhomogén egyenlet általános megoldását keressük

$$y = u(x)v(x)$$

alakban. Ekkor

$$y' = u'v+uv'$$

és ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$u'v+uv'-\frac{1}{x}(uv) = x^2+3x-2,$$

ill.

$$u\left(v'-\frac{v}{x}\right)+(u'v-x^2-3x+2) = 0.$$

Ez akkor teljesül bármilyen x-re, ha

$$v'-\frac{v}{x} = 0,$$

$$u'v-x^2-3x+2 = 0.$$

Az első egyenletből (homogén egyenlet)

$$v = x,$$

ezt a másodikba helyettesítve

$$u' = x+3-\frac{2}{x},$$

ill. integrálva

$$u = \frac{x^2}{2}+3x-2\ln|x|+C.$$

Így az általános megoldás

$$y = uv = \frac{x^3}{2}+3x^2-2x\ln|x|+Cx.$$

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y'\sin x-y\cos x = -1.$$

A differenciálegyenlet lineáris, inhomogén és az állandó variálásának módszerével oldjuk meg.

Az

$$Y'\sin x-Y\cos x = 0$$

homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = Ce^{-\int -\frac{\cos x}{\sin x}dx} = Ce^{\ln|\sin x|} = C\sin x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y_0 = C(x)\sin x$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_0' = C'(x)\sin x+C(x)\cos x,$$

és visszahelyettesítve

$$C'(x)\sin^2 x+C(x)\cos x\sin x-C(x)\sin x\cos x = -1.$$

Ebből

$$C'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

integrálva

$$C(x) = \operatorname{ctg} x.$$

Ezzel

$$y_0 = \operatorname{ctg} x\cdot\sin x = \cos x,$$

és az általános megoldás

$$y = Y + y_0 = C \sin x + \cos x.$$

3. Oldjuk meg az

$$(x-2)y' - y = 2(x-2)^2$$

differenciálegyenletet!

Az inhomogén, lineáris differenciálegyenletet az $x-2$ tényezővel ($x \neq 2$) végigosztva leolvasható, hogy $P(x) = -\frac{1}{x-2}$, $Q(x) = 2(x-2)^2$, és így

$$\int P(x)\,dx = \int -\frac{1}{x-2}\,dx = -\ln|x-2|,$$

tehát egy integráló tényező az

$$e^{-\ln|x-2|} = \frac{1}{x-2}$$

kifejezés.

Ekkor

$$\frac{1}{x-2}y = \int \frac{1}{x-2}2(x-2)^2\,dx = 2\int (x-2)\,dx = (x-2)^2 + C.$$

Ebből

$$y = (x-2)^3 + C(x-2).$$

4. Keressük meg az

$$y' + y \operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x}$$

lineáris inhomogén differenciálegyenlet integrálgörbéi közül azt, amely átmegy az $P\left(\frac{\pi}{2};\ -4\right)$ ponton.

A differenciálegyenlet megoldását most szorzat alakban keressük. Legyen

$$y = u(x)v(x),$$

ekkor

$$y' = u'v + uv',$$

és ezt az egyenletbe helyettesítve

$$u'v + uv' + uv \operatorname{ctg} x = 5e^{\cos x}.$$

Átrendezve az egyenletet

$$u(v' + v \operatorname{ctg} x) + (u'v - 5e^{\cos x}) = 0,$$

és ez akkor teljesül, ha

$$v' + v \operatorname{ctg} x = 0,$$

$$u'v - 5e^{\cos x} = 0.$$

Az első egyenletből

$$\frac{dv}{v} = -\operatorname{ctg} x\,dx = -\frac{\cos x}{\sin x}\,dx,$$

amiből

$$\ln|v| = -\ln|\sin x|;\ v = \frac{1}{\sin x}.$$

Ezt a másodikba helyettesítve

$$\frac{u'}{\sin x} = 5e^{\cos x}.$$

Ebből

$$u = \int 5 \sin x\, e^{\cos x}\,dx = -5e^{\cos x} + c.$$

Így az általános megoldás

$$y = -\frac{5e^{\cos x}}{\sin x} + \frac{c}{\sin x}.$$

Ha $x = \frac{\pi}{2}$ és $y = -4$, akkor a

$$-4 = -5 + c$$

egyenletből $c = 1$, és így a keresett partikuláris megoldás

$$y = \frac{1 - 5e^{\cos x}}{\sin x}$$

alakú.

5. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' - y = \sin x + \cos x + 1.$$

Ezt a lineáris inhomogén differenciálegyenletet az állandó variálásának módszerével oldjuk meg.

A homogén

$$Y' - Y = 0$$

egyenlet általános megoldása

$$Y = e^{\int dx} = Ce^{x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_0 = C(x)e^{x}$$

alakban kereshetjük. Ekkor

$$y_0' = C'(x)e^{x} + C(x)e^{x},$$

és az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$C'(x)e^{x} = \sin x + \cos x + 1,$$

amiből

$$C(x) = \int (\sin x + \cos x + 1)e^{-x}\,dx =$$

$$= \int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx + \int e^{-x}\,dx.$$

Számítsuk ki előbb az

$$\int e^{-x}\sin x\,dx$$

integrált a parciális integrálás szabálya szerint. Legyen $u = e^{-x}$, $v' = \sin x$, ekkor $u' = -e^{-x}$, $v = -\cos x$. Ezzel

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx,$$

ill.

$$\int e^{-x}\sin x\,dx + \int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x,$$

és ezzel $C(x)$ kifejezéséből egy csapásra két integrált határoztunk meg. Így

$$C(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x},$$

amivel

$$y_0 = -e^{-x}(\cos x + 1)e^{x} = -(\cos x + 1),$$

és a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0 = Ce^{x} - (\cos x + 1).$$

6. Határozzuk meg az

$$y' + \frac{2 - 3x^2}{x^3}\,y = 1$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

A differenciálegyenlet alakjáról látszik, hogy lineáris inhomogén egyenlet, ahol $P(x) = \dfrac{2 - 3x^2}{x^3}$. Mivel

$$\int P(x)\,dx = \int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right) dx = -\frac{1}{x^2} - 3\ln|x|,$$

ezért az

$$e^{-\frac{1}{x^2} - 3\ln|x|} = e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^3}$$

integráló tényező. Ennek segítségével

$$y\,\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \int 1\cdot\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\,dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + C.$$

Ebből az általános megoldás

$$y = x^3 e^{\frac{1}{x^2}}\left(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + C\right) = \frac{x^3}{2} + Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}}.$$

7. Oldjuk meg a következő lineáris inhomogén differenciálegyenletet:

$$2(1 - x^2)y' - (1 + x)y = \sqrt{1 - x^2}.$$

A megoldást most szorzat alakban fogjuk keresni. Legyen tehát $y = u(x)v(x)$, ekkor $y' = u'v + uv'$ és behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$2(1 - x^2)(u'v + uv') - (1 + x)uv = \sqrt{1 - x^2},$$

ill.

$$u[2(1 - x^2)v' - (1 + x)v] + \left[2(1 - x^2)u'v - \sqrt{1 - x^2}\right] = 0.$$

Ez akkor teljesül, ha

$$2(1 - x^2)v' - (1 + x)v = 0,$$

$$2(1 - x^2)u'v - \sqrt{1 - x^2} = 0.$$

Az első egyenletből

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{2(1 - x)}\,dx,$$

ill. integrálás után

$$\ln|v| = -\ln\sqrt{1-x},$$

azaz

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-x}}u' - \sqrt{1-x^2} = 0.$$

Egyszerűsítés és rendezés után

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

amiből

$$u = \sqrt{1+x}+C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = uv = (\sqrt{1+x}+C)\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

8. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x\cos y+\sin 2y)\frac{dy}{dx} = 1.$$

A differenciálegyenletről azonnal látszik, hogy nem lineáris, hiszen pl. $\cos y$ is szerepel benne. Vegyük azonban észre, hogy ha a változókat felcseréljük, az egyenlet lineáris lesz. A változók felcserélése nem végezhető el mindig minden feltétel nélkül. Esetünkben például a $\cos y$ és $\sin 2y$ függvényeknek a $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ intervallumban létezik egyértékű, differenciálható inverz függvénye, ezért erre a számközre szorítkozva a változók cseréje végrehajtható. Ekkor

$$y\cos x+\sin 2x = \frac{dy}{dx}.$$

A kapott lineáris inhomogén egyenletet az állandó variálásának módszerével oldjuk meg. Az

$$Y' - Y\cos x = 0$$

homogén rész általános megoldása

$$Y = Ce^{-\int -\cos x\,dx} = Ce^{\sin x}.$$

Ha az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_0 = C(x)e^{\sin x}$$

alakban keressük, akkor

$$y_0' = C'(x)e^{\sin x}+C(x)\cos x e^{\sin x},$$

és ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve és rendezve

$$C'(x)e^{\sin x} = \sin 2x,$$

ill.

$$C'(x) = 2\sin x\cos x e^{-\sin x}.$$

Ebből

$$C(x) = 2\int \sin x\cos x e^{-\sin x}\,dx.$$

A jobb oldalon parciálisan integrálunk. Legyen

$$u = \sin x, \quad v' = \cos x e^{-\sin x}.$$

Ekkor

$$u' = \cos x,\; v = -e^{-\sin x},$$

és

$$C(x) = 2\left(-\sin x e^{-\sin x} - \int -\cos x e^{-\sin x}\,dx\right) =$$

$$= -2(\sin x e^{-\sin x}+e^{-\sin x}) = -2e^{-\sin x}(\sin x+1).$$

Ekkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

$$y_0 = -2e^{-\sin x}(\sin x+1)e^{\sin x} = -2(\sin x+1),$$

és az általános megoldás

$$y = Ce^{\sin x}-2(\sin x+1).$$

A változókat visszacserélve kapjuk az eredeti egyenlet általános megoldását:

$$x = Ce^{\sin y}-2(\sin y+1).$$

9. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y\ln y+(x-\ln y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

A differenciálegyenlet nem lineáris, de ha az y-t tekintjük független, az x-et függő változónak, akkor lineáris, mégpedig

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y\ln y} = \frac{1}{y}$$

alakú. Most az

$$e^{\int dy/y \ln y} = e^{\ln |\ln y|} = \ln y$$

integráló tényező, és ezzel

$$x \ln y = \int \frac{1}{y} \ln y \, dy = \frac{1}{2} \ln^2 y + C,$$

amiből

$$2x \ln y - \ln^2 y = 2C,$$

a differenciálegyenlet általános megoldása.

c) ELSŐRENDŰ ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. A PRÓBAFÜGGVÉNY MÓDSZERE. Az elsőrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$ay' + by = Q(x),$$

ahol a és b állandók, $Q(x)$ valamilyen $[x_1, x_2]$ számközben értelmezett folytonos függvény. Ha $Q(x) \equiv 0$, akkor az egyenlet homogén, minden más esetben inhomogén. Mivel az állandó együtthatós differenciálegyenlet a már tárgyalt függvény együtthatósnak speciális esete, ezért a megoldás meghatározására ott bemutatott módszerek itt is alkalmazhatók. Most olyan módszert mutatunk be, amely csak állandó együtthatók és speciális $Q(x)$ függvény (zavaró függvény) esetében alkalmazható. Ha az állandó együtthatós lineáris inhomogén differenciálegyenlet $Q(x)$ zavaró függvénye

polinom,
exponenciális függvény,
$\sin(\alpha x + \beta)$, $\cos(\alpha x + \beta)$ alakú trigonometrikus függvény,
ill. az előbbiek összege, különbsége, szorzata, szorzatának összege vagy különbsége,

akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását ugyanolyan típusú függvényként kereshetjük, mint amilyen típusú az inhomogenitást okozó $Q(x)$ zavaró függvény, csak határozatlan együtthatókat választunk *(próbafüggvény)*. Ezeket az ismeretlen együtthatókat a feltételezett megoldásnak az adott differenciálegyenletbe való behelyettesítésből kapott egyenletek segítségével határozzuk meg.

Ha például a zavaró függvény

$$Q(x) = x^2,$$

akkor a próbafüggvény

$$y_0(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

tehát a másodfokúig bezárólag minden hatványnak szerepelnie kell, ha pl.

$$Q(x) = \sin(\alpha x + \beta), \quad \text{vagy} \quad Q(x) = \cos(\alpha x + \beta),$$

akkor

$$y_0(x) = A \sin(\alpha x + \beta) + B \cos(\alpha x + \beta),$$

tehát mind a két esetben mind a két függvénynek szerepelnie kell, ha pl.

$$Q(x) = x^2 e^{2x},$$

akkor

$$y_0(x) = (Ax^2 + Bx + C) e^{2x}.$$

Abban az esetben, amikor a homogén egyenlet általános megoldása és a zavaró függvény alapján felírt próbafüggvény nem lineárisan független (vagyis a két függvény hányadosa állandó), *rezonanciáról* beszélünk. Rezonancia esetében az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását vagy az előző módszernek valamelyikével, például az állandó variálásának módszerével keressük meg, vagy a $Q(x)$ alapján felírt $y_0(x)$ próbafüggvényt x-szel megszorozzuk. Bebizonyítható ugyanis, hogy rezonancia esetében az $xy_0(x)$ függvény a célravezető próbafüggvény.

A próbafüggvény módszerét azért érdemes használni (amikor lehet), mert ekkor a számítások egyszerűbbek, például nem kell integrálni.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg az

$$y'-y=x$$

differenciálegyenletet. (Más megoldását l. a 81. és 199. oldalon.)

Az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet

$$Y'-Y=0.$$

Ha ezt

$$\frac{dY}{dx}=Y$$

alakban írjuk fel, és a változókat szétválasztjuk, akkor

$$\frac{dY}{Y}=dx,$$

és integrálva

$$\ln|Y|=x+c.$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y=Ce^{x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását szabad a próbafüggvény módszerével keresnünk, mert az egyenlet állandó együtthatós és a zavaró függvény polinom. Ezért legyen

$$y_0=Ax+B$$

Ekkor

$$y_0'=A,$$

és ezeket az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$A-Ax-B\equiv x.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha

$$-A=1 \quad \text{és} \quad A-B=0,$$

és ebből

$$A=-1, \quad B=-1.$$

Így

$$y_0=-x-1,$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y=Y+y_0=Ce^{x}-x-1,$$

amint azt már láttuk.

2. Határozzuk meg az

$$y'-4y=8x^3-3x+1$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

Az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet

$$Y'-4Y=0,$$

ennek általános megoldása

$$Y=Ce^{-\int -4\,dx}=Ce^{4x}.$$

Az egyenlet állandó együtthatós és a zavaró függvény polinom, ezért az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását szabad a próbafüggvény módszerével keresni.

Mivel Ce^{4x} és $8x^3-3x+1$ lineárisan függetlenek (hányadosuk nem konstans), ezért rezonancia nincs, és a próbafüggvény

$$y_0(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

alakú. Ekkor

$$y_0'(x)=3Ax^2+2Bx+C.$$

Ha y_0 és y_0' kifejezését behelyettesítjük az eredeti differenciálegyenletbe, azonosságot kell kapnunk, hiszen feltételeztük, hogy y_0 megoldása az inhomogén egyenletnek. Így

$$3Ax^2+2Bx+C-4(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\equiv 8x^3-3x+1.$$

Ez az azonosság csak úgy állhat fenn, ha az egyenlet bal és jobb oldalán álló egyenlő fokszámú tagok együtthatói egyenlőek, azaz

$$-4A=8,$$

$$3A-4B=0,$$

$$2B-4C=-3,$$

$$C-4D=1.$$

E négy egyenletből a négy ismeretlen együttható kiszámítható, mégpedig

$$A=-2, \quad B=-\frac{3}{2}, \quad C=0, \quad D=-\frac{1}{4}.$$

Ezekkel az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása

$$y_0=-2x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4},$$

az általános megoldás pedig

$$y = Y + y_0 = Ce^{4x} - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}.$$

3. Megoldandó a következő differenciálegyenlet:

$$2y' - y = \sin 2x.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet állandó együtthatós, a zavaró függvény pedig olyan alakú speciális függvény, melynél a próbafüggvény módszerének alkalmazása lehetséges.

A

$$2Y' - Y = 0$$

homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = Ce^{-\int -\frac{1}{2}dx} = Ce^{\frac{x}{2}}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását pedig

$$y_0 = A \sin 2x + B \cos 2x$$

alakban kereshetjük, ugyanis rezonancia nincs. Ekkor

$$y_0' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x,$$

ill. az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$4A \cos 2x - 4B \sin 2x - A \sin 2x - B \cos 2x \equiv \sin 2x.$$

Ez az azonosság csak akkor teljesül, ha

$$4A - B = 0 \quad \text{és} \quad -4B - A = 1.$$

A két egyenletből a két együtthatót kiszámítva

$$A = -\frac{1}{17}, \quad B = -\frac{4}{17}.$$

Így

$$y_0 = -\frac{1}{17}(\sin 2x + 4 \cos 2x),$$

és az általános megoldás

$$y = Y + y_0 = Ce^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{17}(\sin 2x + 4 \cos 2x).$$

Ha az állandó variálásának módszerével dolgozunk, akkor a homogén rész egy partikuláris megoldása

$$y_0 = C(x)e^{\frac{x}{2}}$$

alakú. Ekkor

$$y_0' = C'(x)e^{\frac{x}{2}} + C(x)\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$

Behelyettesítés és összevonás után

$$2C'(x)e^{\frac{x}{2}} = \sin 2x,$$

amiből

$$C(x) = \int \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \, dx,$$

Parciálisan integrálunk $u' = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$, $v = \sin 2x$ választással, amikor is $u = -e^{-\frac{x}{2}}$, $v' = 2\cos 2x$. Ekkor az integrál

$$\int \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \, dx = -e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x + 2\int e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x \, dx.$$

A parciális integrálás elvét a jobb oldal második tagjára ismét alkalmazva

$$\int \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \, dx =$$

$$= -e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x - 4e^{-\frac{x}{2}} \cos 2x - 8\int e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \, dx.$$

Ebből (az integrálokat összevonva)

$$\frac{1}{2}\int e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{17}e^{-\frac{x}{2}}(\sin 2x + 4 \cos 2x),$$

és így

$$y_0 = C(x)e^{\frac{x}{2}} = -\frac{1}{17}(\sin 2x + 4 \cos 2x),$$

amivel

$$y = Ce^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{17}(\sin 2x + 4 \cos 2x),$$

amint azt már előbb is láttuk. E feladatnál szembetűnő, hogy a próbafüggvény módszere mennyivel egyszerűbb, ha azt egyáltalában alkalmazni lehet.

4. Keressük meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'-2y = 3e^{2x}.$$

Az állandó együtthatók és a speciális zavaró függvény miatt az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását szabad a próbafüggvény módszerével keresni.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = Ce^{-\int -2\,dx} = Ce^{2x}.$$

Mivel ez lineárisan nem független a zavaró függvénytől (hányadosuk ugyanis állandó), ezért *rezonancia* van. Így a próbafüggvény

$$y_0 = Axe^{2x}$$

alakú. Ekkor

$$y_0' = Ae^{2x}+2Axe^{2x},$$

és ezeket visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe

$$Ae^{2x}+2Axe^{2x}-2Axe^{2x} \equiv 3e^{2x}.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha $A=3$. Ekkor

$$y_0 = 3xe^{2x},$$

és az általános megoldás

$$y = Ce^{2x}+3xe^{2x} = e^{2x}(3x+C).$$

Ha nem vettük volna észre, hogy rezonancia van, és az azonnal felírható, de hibás

$$y_0^* = Ae^{2x}$$

próbafüggvénnyel dolgoztunk volna, akkor

$$(y_0^*)' = 2Ae^{2x}$$

és behelyettesítés után a

$$2Ae^{2x}-2Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

egyenletet kaptuk volna, ami nyilvánvalóan ellentmondás, mert $e^{2x}=0$ semmilyen x-re sem teljesül.

Figyeljük meg azt is, hogy egy elsőrendű állandó együtthatós inhomogén egyenletnél rezonancia csak akkor léphet fel, ha a $Q(x)$ zavaró függvény exponenciális függvény, hiszen a homogén egyenlet általános megoldása ebben az esetben mindig exponenciális függvény.

5. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y'-3y = e^{3x}-x^2+\sin x.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet állandó együtthatós, és az inhomogenitást okozó zavaró függvény speciális alakú, tehát a próbafüggvény módszere alkalmazható.

A homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = Ce^{-\int -3\,dx} = Ce^{3x}.$$

A próbafüggvény felírásakor vigyázni kell arra, hogy a homogén egyenlet általános megoldása és a zavaró függvény első tagja között rezonancia van. Ezért a próbafüggvény

$$y_0 = Axe^{3x}+Bx^2+Cx+D+E\sin x+F\cos x.$$

Ekkor

$$y_0' = Ae^{3x}+3Axe^{3x}+2Bx+C+E\cos x-F\sin x.$$

Az egyenletbe helyettesítve és összevonva az

$$Ae^{3x}-3Bx^2+(2B-3C)x+C-3D+(E-3F)\cos x+$$
$$+(-F-3E)\sin x \equiv e^{3x}-x^2+\sin x$$

azonosságnak kell fennállnia. Az azonosság bal és jobb oldalának megfelelő tagjait összehasonlítva

$$A = 1,$$

a $-3B = -1$ egyenletből $B = \dfrac{1}{3}$,

a $2B-3C = 0$ egyenletből $C = \dfrac{2}{9}$,

a $C-3D = 0$ egyenletből $D = \dfrac{2}{27}$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{az } E-3F = 0\\ \text{a } -F-3E = 1\end{array}\right\}\text{egyenletekből}\quad \begin{array}{l}E = -\dfrac{3}{10},\\ F = -\dfrac{1}{10}.\end{array}$$

Az állandókat felhasználva az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_0 = xe^{3x}+\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}+\frac{2}{27}-\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10}\cos x,$$

és az általános megoldás

$$y = Ce^{3x} + xe^{3x} + \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} - \frac{3}{10}\sin x - \frac{1}{10}\cos x.$$

6. Az R, Ω ellenállású, L, H önindukciós áramkörben a periodikus $U^* = U\sin\omega t$ belső feszültség hat. U az U^* maximális értéke, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a körfrekvenciát, t az időt jelenti. Határozzuk meg az i áramerősség értékét egy tetszőleges időpontban, feltéve, hogy a kezdeti $t=0$ időpontban az áramerősség $i_0=0$.

Az áramkör zárásakor az áramkörben két feszültség hat, az $U^* = U\sin\omega t$ és az önindukciós hatásból származó

$$U_ö = -L\frac{di}{dt}.$$

Ezek összege

$$u = U^* + U_ö = U\sin\omega t - L\frac{di}{dt}.$$

Ohm törvénye szerint

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U\sin\omega t - L\frac{di}{dt}}{R}.$$

Rendezés után az

$$L\frac{di}{dt} + Ri = U\sin\omega t$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ez írja le a folyamatot. (Vö. a 124. oldalon található feladattal.)

A differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén egyenlet.

Az

$$L\frac{dI}{dt} + RI = 0$$

alakú homogén egyenlet általános megoldása

$$I = Ce^{-\int\frac{R}{L}dt} = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy i_0 partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével keressük meg. Legyen

$$i_0 = A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

Ekkor

$$\frac{di_0}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t.$$

Ezeket felhasználva

$$LA\omega\cos\omega t - LB\omega\sin\omega t + RA\sin\omega t + RB\cos\omega t \equiv U\sin\omega t,$$

vagyis

$$(LA\omega + RB)\cos\omega t + (RA - LB\omega)\sin\omega t \equiv U\sin\omega t,$$

ez pedig csak úgy lehetséges, ha

$$LA\omega + RB = 0,$$

$$RA - LB\omega = U.$$

Az egyenletrendszert A-ra és B-re megoldva

$$A = \frac{UR}{R^2 + L^2\omega^2}, \quad B = -\frac{U\omega L}{R^2 + L^2\omega^2}.$$

Ezekkel az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

$$i_0 = \frac{U}{R^2 + L^2\omega^2}(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t),$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása, vagyis az áramerősség időbeni változását leíró függvény

$$i = I + i_0 = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R^2 + L^2\omega^2}(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t).$$

Ha $t=0$, akkor $i=0$ és ezt felhasználva a

$$0 = C + \frac{U}{R^2 + L^2\omega^2}(-\omega L)$$

egyenletből

$$C = \frac{LU\omega}{R^2 + L^2\omega^2}$$

és ezzel a megoldás

$$i = \frac{U}{R^2 + L^2\omega^2}\left(\omega Le^{-\frac{R}{L}t} + R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t\right).$$

7. ELSŐRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETRE VISSZAVEZETHETŐ EGYENLETEK. A BERNOULLI-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLET

Az

$$y' + y P(x) = y^n Q(x)$$

alakú differenciálegyenlet, ahol $n \neq 1$, $Q(x) \not\equiv 0$ Bernoulli-féle [A Bernoulli-féle differenciálegyenletet Jacob Bernoulli (1654—1705) állította fel 1695-ben, az egyenlet megoldását Johann Bernoulli (1667—1748) adta meg 1697-ben.] differenciálegyenletnek nevezzük. Ha $n=1$ vagy $Q(x) \equiv 0$, akkor az egyenlet lineáris.

A Bernoulli-féle differenciálegyenlet új függvény bevezetésével lineárissá tehető. Legyen ugyanis

$$y^{-n+1} = v(x),$$

ekkor

$$(1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}.$$

Ha ezt az y^n-nel végigosztott $(y \neq 0)$ eredeti egyenletbe, vagyis az

$$y^{-n} y' + y^{-n+1} P(x) = Q(x)$$

egyenletbe helyettesítjük, akkor

$$\frac{dv}{dx} + v(1-n) P(x) = (1-n) Q(x),$$

ez pedig a v függvényre nézve valóban lineáris differenciálegyenlet.

Gyakorló feladatok

1. Megoldandó az

$$y' - y = xy^5$$

differenciálegyenlet.

A differenciálegyenlet Bernoulli-féle, ezért a célszerű helyettesítés

$$y^{-4} = v.$$

Ekkor

$$y^{-5} y' = -\frac{1}{4} v'.$$

A helyettesítés könnyebb végrehajtása érdekében elosztjuk az eredeti egyenletet y^5-nel:

$$y^{-5} y' - y^{-4} = x,$$

majd helyettesítünk:

$$-\frac{1}{4} v' - v = x,$$

ill.

$$v' + 4v = -4x.$$

A kapott lineáris inhomogén differenciálegyenlet $V' + 4V = 0$ homogén részének általános megoldása

$$V = Ce^{-\int 4\,dx} = Ce^{-4x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével kereshetjük. Legyen

$$v_0 = Ax + B,$$

hiszen rezonancia nincs. Ekkor

$$v_0' = A$$

és az inhomogén egyenletbe helyettesítve

$$A + 4Ax + 4B \equiv -4x.$$

Ebből

$$A = -1 \quad \text{és} \quad B = \frac{1}{4},$$

vagyis

$$v_0 = -x + \frac{1}{4}.$$

Így

$$v = V + v_0 = Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4}.$$

Az eredeti függvényre áttérve

$$y^{-4} = \frac{1}{y^4} = Ce^{-4x} - x + \frac{1}{4}.$$

2. Keressük meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$3y'+y = (1-2x)y^4.$$

Bernoulli-féle differenciálegyenletről van szó. Először az egyenlet minden tagját y^4-nel elosztjuk. Ekkor

$$3y'y^{-4}+y^{-3} = 1-2x.$$

Legyen

$$y^{-3} = v, \quad \text{ekkor} \quad -3y^{-4}y' = v',$$

és ezzel egyenletünk

$$-v'+v = 1-2x,$$

ill.

$$v'-v = 2x-1$$

alakú lesz. A $V'-V = 0$ homogén lineáris egyenlet általános megoldása

$$V = Ce^{-\int -dx} = Ce^x.$$

Az inhomogén egyenlet v_0 partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével

$$v_0 = Ax+B$$

alakban keresve $v_0'=A$, és így

$$A-Ax-B \equiv 2x-1,$$

és ez csak akkor lehetséges, ha

$$A = -2, \quad B = -1.$$

Ezekkel az együtthatókkal

$$v_0 = -2x-1,$$

$$v = V+v_0 = Ce^x-2x-1.$$

Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$\frac{1}{y^3} = Ce^x-2x-1.$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y'+y = y^2 (\cos x-\sin x).$$

Ha az egyenletet y^2-tel elosztjuk, akkor

$$y^{-2}y'+y^{-1} = \cos x-\sin x,$$

és azonnal látszik, hogy a célszerű helyettesítés

$$y^{-1} = v, \quad \text{amikor is} \quad -y^{-2}y' = v'.$$

Ezt felhasználva

$$v'-v = \sin x-\cos x.$$

A $V'-V = 0$ homogén lineáris egyenlet általános megoldása

$$V = Ce^{-\int -dx} = Ce^x.$$

Az inhomogén egyenlet v_0 partikuláris megoldását a

$$v_0 = A\sin x+B\cos x$$

alakban keresve

$$v_0' = A\cos x-B\sin x,$$

és ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve

$$A\cos x-B\sin x-A\sin x-B\cos x \equiv \sin x-\cos x.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha

$$A-B = -1 \quad \text{és} \quad -B-A = 1,$$

amiből

$$A = -1, \quad B = 0,$$

és így

$$v_0 = -\sin x.$$

Ezzel

$$v = V+v_0 = Ce^x-\sin x,$$

ill.

$$\frac{1}{y} = Ce^x-\sin x.$$

4. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x\,dy-[y+xy^3(1+\ln x)]\,dx = 0.$$

A differenciálegyenlet elsőrendű, de nem lineáris, és változói nem választhatók szét. Típusának felismerése céljából átrendezzük.

$$xy'-y = xy^3(1+\ln x).$$

Most már látszik, hogy Bernoulli-féle differenciálegyenletről van szó. Ha még xy^3-nal is végigosztunk, akkor az

$$y'y^{-3}-\frac{1}{x}y^{-2}=1+\ln x$$

alakról a célravezető helyettesítés is leolvasható:

$$y^{-2}=v, \quad \text{és ekkor} \quad -2y^{-3}y'=v'.$$

Ezzel

$$v'+\frac{2}{x}v=-2(1+\ln x).$$

A kapott lineáris inhomogén egyenlet $V'+\frac{2}{x}V=0$ homogén részének általános megoldása

$$V=Ce^{-\int\frac{2}{x}dx}=Ce^{-2\ln x}=Cx^{-2}=\frac{C}{x^2}.$$

Az inhomogén egyenlet v_0 partikuláris megoldása most nem kereshető a próbafüggvény módszerével, mert az egyenlet nem állandó együtthatós. Az állandó variálásának módszerével legyen

$$v_0=c(x)x^{-2}, \quad \text{ekkor} \quad v_0'=c'(x)x^{-2}+c(x)(-2x^{-3}),$$

és ezt visszahelyettesítve

$$c'(x)x^{-2}-c(x)2x^{-3}+\frac{2}{x}c(x)x^{-2}=-2(1+\ln x).$$

Ebből

$$c'(x)=-2x^2(1+\ln x),$$

ill. parciálisan integrálva

$$c(x)=\int-2x^2(1+\ln x)\,dx=-\frac{2x^3}{3}(1+\ln x)-\int-\frac{2x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx=$$
$$=-\frac{2x^3}{3}(1+\ln x)+\frac{2x^3}{9}.$$

Ennek segítségével

$$v_0=c(x)x^{-2}=-\frac{2x}{3}(1+\ln x)+\frac{2x}{9}=-\frac{4x}{9}-\frac{2x}{3}\ln x,$$

$$v=V+v_0=\frac{c}{x^2}-\frac{2x}{3}\left(\frac{2}{3}+\ln x\right),$$

ill. végül

$$\frac{1}{y^2}=\frac{c}{x^2}-\frac{2x}{3}\left(\frac{2}{3}+\ln x\right).$$

5. Megoldandó a következő differenciálegyenlet:

$$x^2y'+xy+\sqrt{y}=0.$$

Ha a differenciálegyenletet x^2-tel elosztjuk, akkor

$$y'+\frac{1}{x}y=-\frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

és erről az alakról már látszik, hogy Bernoulli-féle differenciálegyenletről van szó. A célszerű helyettesítés

$$v(x)=y^{-\frac{1}{2}+1}=\sqrt{y}.$$

Ekkor

$$v'=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y'=\frac{y'}{2\sqrt{y}}.$$

A könnyebb helyettesítés érdekében differenciálegyenletünket még $\sqrt{y}$-nal is elosztjuk, és ekkor a helyettesítést elvégezve a

$$v'+\frac{1}{2x}v=-\frac{1}{2x^2}$$

elsőrendű lineáris inhomogén egyenlethez jutunk.

A $V'+\dfrac{V}{2x}=0$ homogén rész általános megoldása

$$V=Ce^{-\int\frac{1}{2x}dx}=Ce^{-\frac{1}{2}\ln|x|}=Ce^{\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Az inhomogén egyenlet v_0 partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével keressük meg. Legyen

$$v_0=\frac{C(x)}{\sqrt{x}},$$

ekkor

$$v_0'=\frac{c'(x)\sqrt{x}-c(x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}.$$

Az inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve

$$\frac{c'(x)}{\sqrt{x}} - \frac{c(x)}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{2x}\frac{c(x)}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x^2},$$

amiből

$$c'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

Integrálva

$$c(x) = -\frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}\,dx = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2)x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Ezzel

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x},$$

$$v = V + v_0 = \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x},$$

és így

$$\sqrt{y} = \frac{c}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}, \quad \text{vagy} \quad yx^2 = (c\sqrt{x}+1)^2.$$

8. ÖSSZEFOGLALÁS

Az első fejezetekben áttekintettük az elsőrendű

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

alakban felírható differenciálegyenletek néhány típusának megoldási módszereit. Annak érdekében, hogy eldönthessük, milyen típusú egy-egy adott differenciálegyenlet, és kiválaszthassuk a megfelelő eljárást, a következő kérdésekre (ebben a sorrendben) célszerű választ keresni.

(*a*) Szétválaszthatók-e a differenciálegyenlet változói?
(*b*) M és N ugyanolyan fokszámú homogén függvény-e?
(*c*) Lineáris-e az adott differenciálegyenlet?
(*d*) Egzakt-e az adott differenciálegyenlet?
(*e*) Könnyen találhatunk-e alkalmas integráló tényezőt?
(*f*) Van-e alkalmas helyettesítés, amely ismert típusra vezeti vissza a differenciálegyenletet?

Ha bármely kérdésre igennel tudunk válaszolni, a megoldás módszere a kezünkben van, és a megoldásnak nincs akadálya.
Ez a felsorolás azonban nem meríti ki az összes

$$M(x, y)dx + N(x, y)dx = 0$$

alakban felírható differenciálegyenletet. A megoldás általános módszere abban áll, hogy keresnünk kell olyan $m(x, y)$ függvényt (integráló tényezőt), amellyel az egyenletet megszorozva, az egzakt egyenletté válik, azaz

$$\frac{\partial(mM)}{\partial y} = \frac{\partial(mN)}{\partial x}.$$

Ez az $m(x, y)$ függvényre nézve egy elsőrendű parciális differenciálegyenlet, amelyből $m(x, y)$ integrálokkal kifejezhető, de nem mindig számítható ki zárt alakban. Ilyenkor a differenciálegyenlet sem oldható meg pontosan, hanem közelítő módszereket kell alkalmaznunk (l. a C rész fejezeteit). A gyakorlatban előforduló elsőrendű differenciálegyenletek többsége azonban az eddig tanulmányozott módszerekkel megoldható.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$4x^2y^3\,dx - 3xy^3\,dx = x^3y^3\,dx + 2x^3\,dy.$$

A differenciálegyenlet elsőrendű, nem lineáris.
(*a*) Kíséreljük meg a változókat szétválasztani. Rendezéssel majd kiemeléssel

$$2x^3(2y^3-1)\,dy = y^3(x^2+3x)\,dx,$$

ill.

$$2\,\frac{2y^3+1}{y^3}\,dy = \frac{x^2+3x}{x^3}\,dx.$$

A változókat sikerült szétválasztani, így máris van módszerünk az egyenlet megoldására. Mind a két oldalon integrálva

$$2\int\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{y^3}\right)dy=\int\left(1+\frac{3}{x}\right)dx,$$

$$2\left(2\ln|y|+\frac{1}{2y^2}\right)=x+3\ln|x|+c,$$

$$4\ln|y|-3\ln|x|=x-\frac{1}{y^2}+c,$$

$$\ln\left|\frac{y^4}{x^3}\right|=x-\frac{1}{y^2}+c,$$

$$\frac{y^4}{x^3}=Ce^{x-\frac{1}{y^2}}.$$

2. Keressük meg a

$$(3x^2-2xy)dx+(4y^3-x^2)dy=0$$

differenciálegyenlet integrálgörbéi közül azt, amely áthalad a $P(2; 1)$ ponton.

Az adott differenciálegyenlet elsőrendű, de nem lineáris.

(*a*) Az egyenlet változói nem választhatók szét, mert sem dx, sem dy szorzótényezője nem bontható fel $f(x)g(y)$ típusú függvényekre.

(*b*) N nem homogén függvény, mert

$$N(\lambda x, \lambda y)=4\lambda^3y^3-\lambda^2x^2=\lambda^2(4\lambda y^3-x^2)\neq\lambda^2N(x, y).$$

(*c*) Az egyenlet nemlineáris.

(*d*) A differenciálegyenlet egzakt, mert

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2x=\frac{\partial N}{\partial x},$$

és ezzel megtaláltuk a megoldás útját.

$$F(x, y)=\int(3x^2-2xy)\,dx=x^3-x^2y+g(y),$$

ahol

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3-x^2y+g(y)\right)=-x^2+g'(y)\equiv 4y^3-x^2$$

köteles lenni. Ebből

$$g'(y)=4y^3,$$

$$g(y)=y^4,$$

és így

$$F(x, y)=x^3-x^2y+y^4,$$

és a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^3-x^2y+y^4=c.$$

A $P(2; 1)$ ponton áthaladó integrálgörbére

$$8-4+1=c,\quad \text{ebből}\quad c=5,$$

és így az egyenlete

$$x^3-x^2y+y^4=5.$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x-y^2)dx+2xy\,dy=0.$$

Első megoldás: A differenciálegyenlet elsőrendű.

(*a*) Az egyenlet változói nem választhatók szét, mert pl. $x-y^2$ nem bontható fel $f(x)g(y)$ alakú szorzatra.

(*b*) $M=x-y^2$ nemhomogén függvény.

(*c*) Az egyenlet nemlineáris (van benne y^2 is).

(*d*) A differenciálegyenlet nem egzakt, mert

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-2y\neq 2y=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

(*e*) Alkalmas integráló tényező megkereséséhez először is számítsuk ki a következő különbséget:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-2y-2y=-4y.$$

Ezt M-mel osztva érdektelen hányadost kapunk, de N-nel osztva

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-4y}{2xy}=-\frac{2}{x}$$

csak x-től függő függvényt kapunk, ezért alkalmas integráló tényező könnyen kapható, nevezetesen

$$m(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^2}.$$

Ezzel megszorozva az eredeti egyenletet, az

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy = 0$$

egzakt egyenlethez jutunk. Most

$$F(x, y) = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right)dx = \ln|x|+\frac{y^2}{x}+g(y),$$

ahol

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln|x|+\frac{y^2}{x}+g(y)\right] = \frac{2y}{x}+g'(y) \equiv \frac{2y}{x}$$

köteles lenni. Ebből

$$g'(y) = 0, \quad \text{vagyis} \quad g(y) = c.$$

Ezzel

$$F(x, y) = \ln|x|+\frac{y^2}{x}+c,$$

és az egyenlet általános megoldása

$$\ln|x|+\frac{y^2}{x} = C,$$

vagy

$$y^2 = Cx-x\ln|x|.$$

Második megoldás: Ha az adott differenciálegyenletet y'-re megoldjuk:

$$y' = \frac{y}{2x}-\frac{1}{2y},$$

és észrevehetjük, hogy az egyenlet Bernoulli-féle. Ezért az alkalmas helyettesítés

$$y^2 = v,$$

és ekkor

$$2yy' = v'.$$

Ezeket az egyenletbe helyettesítve a

$$v' = \frac{v}{x}-1,$$

ill.

$$xv'-v = -x$$

elsőrendű lineáris inhomogén egyenlethez jutunk. Az

$$xV'-V = 0$$

homogén rész változóit szétválasztva

$$\frac{dV}{V} = \frac{dx}{x},$$

amiből

$$V = cx.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását

$$v_0 = c(x)x$$

alakban keresve

$$v_0' = c'x+c,$$

és ezt visszahelyettesítve

$$c'x^2+cx-cx = -x.$$

Ebből

$$c' = -\frac{1}{x},$$

$$c = -\ln|x|,$$

és a partikuláris megoldás

$$v_0 = -x\ln|x|.$$

Az elsőrendű differenciálegyenlet általános megoldása

$$v = V+v_0 = cx-x\ln|x|,$$

az eredeti egyenleté pedig

$$y^2 = cx-x\ln|x|,$$

amint azt már láttuk.

4. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet:

$$(y^2+xy)dx-x^2dy = 0.$$

(*a*) A differenciálegyenlet változói nem választhatók szét, mert y^2+xy nem írható fel $f(x)g(y)$ alakban.

(*b*) Mivel

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2y^2+\lambda x\lambda y = \lambda^2(y^2+xy) = \lambda^2M(x, y),$$

$$N(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 = \lambda^2x^2 = \lambda^2N(x, y),$$

ezért az egyenlet homogén fokszámú differenciálegyenlet, amelynek foka 2. A célszerű helyettesítés

$$\frac{y}{x} = t, \quad \text{ekkor} \quad y' = t + xt'.$$

Az

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} = y'$$

alakra hozott egyenletünk ezzel

$$t^2 + t = t + xt'$$

alakú lesz és ebből a változókat szétválasztva

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t^2},$$

és integrálva

$$\ln|x| + \ln c = -\frac{1}{t}.$$

Ebből

$$-\frac{x}{y} = \ln cx,$$

ill.

$$y = -\frac{x}{\ln cx}$$

az egyenlet általános megoldása.

A differenciálegyenlet megoldható alkalmas integráló tényező segítségével is. Homogén fokszámú egyenletnél ugyanis az $\dfrac{1}{xM+yN}$ alkalmas integráló tényező. Esetünkben tehát az

$$\frac{1}{xM+yN} = \frac{1}{xy^2 + x^2y + y(-x^2)} = \frac{1}{xy^2}$$

az alkalmas integráló tényező. Az ezzel felírt

$$\frac{y^2+xy}{xy^2}\,dx - \frac{x^2}{xy^2}\,dy = 0,$$

ill.

$$\frac{y+x}{xy}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy = 0$$

differenciálegyenlet valóban egzakt. Most

$$F(x, y) = \int -\frac{x}{y^2}\,dy = \frac{x}{y} + f(x).$$

Mivel

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} + f(x)\right) = \frac{1}{y} + f'(x) \equiv \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \ln|x|,$$

és ezzel

$$F(x, y) = \frac{x}{y} + \ln|x|.$$

Az egyenlet megoldása

$$\frac{x}{y} + \ln|x| = k,$$

amiből

$$y = -\frac{x}{\ln|x| - k}.$$

Ha $-k = \ln c$, akkor a kétféle úton kapott megoldás pontosan megegyezik

5. Megoldandó a következő differenciálegyenlet:

$$x^2y' \cos y = 2x \sin y - 1.$$

(*a*) Az egyenlet változói nem választhatók szét, mert $2x \sin y - 1$ nem bontható fel $f(x)g(y)$ típusú szorzatra.

(*b*) Az egyenlet nem homogén fokszámú egyenlet, mert például $\sin \lambda y \neq \neq \lambda \sin y$.

(*c*) Az egyenlet nemlineáris.

(*d*) A differenciálegyenlet nem egzakt, mert

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(1 - 2x \sin y) = -2x \cos y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos y) = 2x \cos y,$$

és ez a kettő nem egyenlő egymással.

(*e*)

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -4x \cos y.$$

Ha ezt a kifejezést N-nel elosztjuk, akkor

$$-\frac{4x\cos y}{x^2\cos y} = -\frac{4}{x},$$

ami csak x-től függ, és így integráló tényező könnyen található:

$$m(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln|x|} = \frac{1}{x^4}.$$

Ennek segítségével

$$\frac{\cos y}{x^2}dy + \frac{1-2x\sin y}{x^4}dx = 0$$

és ez az egyenlet már egzakt. Ekkor

$$F(x, y) = \int \frac{\cos y}{x^2}dy = \frac{\sin y}{x^2} + f(x),$$

és fenn kell állnia a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin y}{x^2} + f(x)\right) = -\frac{2\sin y}{x^3} + f'(x) \equiv \frac{1}{x^4} - \frac{2\sin y}{x^3}$$

azonosságnak. Ez csak akkor áll fenn, ha

$$f'(x) = \frac{1}{x^4},$$

amiből integrálással

$$f(x) = -\frac{1}{3x^3}.$$

Ezt felhasználva

$$F(x, y) = \frac{\sin y}{x^2} - \frac{1}{3x^3},$$

és a differenciálegyenlet általános megoldása

$$\frac{\sin y}{x^2} - \frac{1}{3x^3} = C,$$

vagy

$$3x\sin y - 3Cx^3 = 1.$$

A differenciálegyenlet megoldható alkalmas helyettesítéssel is. Legyen $\sin y = t$, akkor $\cos y = \frac{dt}{dy}$ azaz $dy\cos y = dt$. Ezt felhasználva az eredeti

$$x^2(\cos y)\,dy = (2x\sin y - 1)dx$$

alakú egyenlet az

$$x^2 dt = (2xt-1)dx,$$
$$x^2t' - 2xt = -1,$$

ill.

$$t' - \frac{2t}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

alakban írható fel. A kapott egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén egyenlet, amelynek megoldása az ismert módon történhet. A

$$T' - \frac{2T}{x} = 0$$

homogén egyenlet általános megoldása

$$T = Ce^{-\int -\frac{2}{x}dx} = Ce^{2\ln|x|} = Cx^2.$$

Az inhomogén egyenlet t_0 partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével a

$$t_0 = c(x)x^2$$

alakban keressük. Ekkor

$$t_0' = c'(x)x^2 + 2xc(x),$$

és ezt visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$c'(x)x^2 + 2xc(x) - \frac{2c(x)x^2}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ebből

$$c'(x) = -\frac{1}{x^4}, \quad c(x) = \frac{1}{3x^3}.$$

$$t_0 = \frac{1}{3x^3}x^2 = \frac{1}{3x}.$$

Az általános megoldás

$$t = T + t_0 = Cx^2 + \frac{1}{3x},$$

ill. a t változót y-nal kifejezve

$$\sin y = Cx^2 + \frac{1}{3x},$$

azaz

$$3x \sin y - 3Cx^3 = 1,$$

amint azt az előbb is láttuk.

6. Határozzuk meg az

$$yy' + y^2 \operatorname{tg} x = \cos^2 x$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

(a) A differenciálegyenlet változói nem választhatók szét, mert $\cos^2 x - y^2 \operatorname{tg} x$ nem írható fel $f(x)g(y)$ alakban.

(b) Az egyenlet nem homogén fokszámú differenciálegyenlet, mert pl. $\operatorname{tg} \lambda x \neq \lambda \operatorname{tg} x$.

(c) Az egyenlet nem lineáris. Felmerül, nem tehető-e lineárissá alkalmas helyettesítéssel. Ha az egyenletet y-nal elosztjuk, akkor

$$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{y} \cos^2 x$$

és látszik, hogy Bernoulli-féle egyenletről van szó. Legyen tehát a helyettesítés

$$v = y^2, \quad \text{akkor} \quad \frac{dv}{dx} = 2yy'$$

és eredeti egyenletünk

$$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} x = \cos^2 x$$

alakú lesz. A homogén egyenlet általános megoldása

$$V = Ce^{-\int 2 \operatorname{tg} x\, dx} = Ce^{2\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx} = Ce^{2 \ln |\cos x|} = C \cos^2 x.$$

Az inhomogén egyenlet v_0 partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével keresve

$$v_0 = c(x) \cos^2 x, \; v_0' = c'(x) \cos^2 x + c(x)\, 2 \cos x(-\sin x).$$

Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$\frac{1}{2} c'(x) \cos^2 x - c(x) \cos x \sin x + c(x) \cos^2 x \operatorname{tg} x = \cos^2 x.$$

Ebből

$$c'(x) = 2, \quad c(x) = 2x.$$

Így

$$v_0 = 2x \cos^2 x,$$

ill.

$$v = V + v_0 = C \cos^2 x + 2x \cos^2 x = (C + 2x) \cos^2 x,$$

vagyis

$$y^2 = (C + 2x) \cos^2 x.$$

7. Keressük meg az

$$y^2(x^2+2) + (x^3+y^3)(y - xy') = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

A differenciálegyenlet típusának megállapítása érdekében rendezzük át az egyenletet.

$$y(x^3 + x^2y + 2y + y^3)dx - x(x^3+y^3)dy = 0.$$

(a) Az egyenlet változói nem választhatók szét.

(b) Az egyenlet nem homogén fokszámú, mert például az

$$M(x, y) = y(x^3 + x^2y + 2y + y^3)$$

kifejezésben x, ill. y helyébe λx-et, ill. λy-t helyettesítve mindegyik tagból nem emelhető ki λ ugyanolyan kitevős hatványa.

(c) Az egyenlet nemlineáris.

(d) Az egyenlet nem egzakt, mert

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^3 + 2yx^2 + 4y + 4y^3 \neq -4x^3 - y^3 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

(e) Integráló tényező nem található könnyen, mert az egyenlet bal oldala nem egészíthető ki egyszerűen teljes differenciállá.

(f) Keressünk alkalmas helyettesítést! Kíséreljük meg az $y = xt$ helyettesítést. Ekkor $y' = t + xt'$, és ezt helyettesítsük az eredeti differenciálegyenletünkbe:

$$x^2t^2(x^2+2) + x^3(1+t^3)[xt - x(t+xt')] = 0,$$

vagy rendezve

$$x^2t^2(x^2+2) = x^5(1+t^3)\frac{dt}{dx}.$$

Ha $x \neq 0$, akkor ennek az egyenletnek a változói szétválaszthatók

$$\frac{x^2+2}{x^3} dx = \frac{1+t^3}{t^2} dt.$$

Integrálva

$$\ln|x| - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2} + c.$$

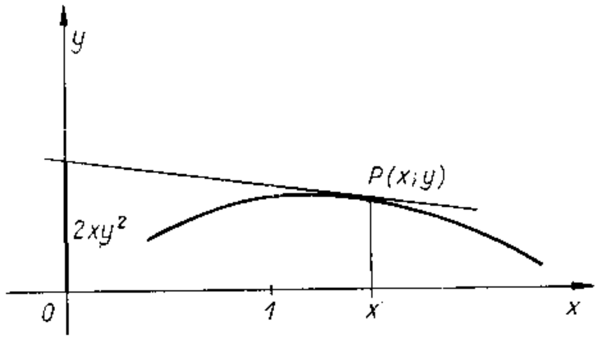
Visszahelyettesítve t értékét

$$\ln|x| - \frac{1}{x^2} = -\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + c,$$

és ebből az általános megoldás

$$2x^2y\ln|x| - 2y + 2x^3 - y^3 - 2cx^2y = 0.$$

8. Írjuk fel azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyekre a következő állítás érvényes: egy görbe bármely $(x; y)$ pontjában meghúzható érintője az y tengelyből $2xy^2$ hosszúságú szakaszt metsz le (11. ábra).



11. ábra

Tekintsük az $y = f(x)$ görbe tetszőleges $(x; y)$ pontját, és az ebben a pontban meghúzott érintőjét, amely az y tengelyből $2xy^2$ hosszúságú szakaszt metsz ki (11. ábra). Ekkor

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{y - 2xy^2}{x},$$

vagy átrendezve

$$xy' - y + 2xy^2 = 0.$$

A kapott differenciálegyenlet elsőrendű, nem lineáris (*c*) differenciálegyenlet.

(*a*) Az egyenlet változói nem választhatók szét,

(*b*) az egyenlet nem homogén fokszámú egyenlet, és

(*d*) nem egzakt egyenlet.

(*e*) Integráló tényező keresése érdekében alakítsuk át egy kicsit az egyenletet:

$$x\,dy - y\,dx + 2xy^2\,dx = 0.$$

A bal oldal első két tagja több nevezetes teljes differenciálban szerepel. Ezért érdemes a következő átrendezést elvégezni:

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 2x\,dx.$$

Vegyük észre, hogy a bal oldal teljes differenciál, mégpedig $\frac{x}{y}$-nak teljes differenciálja, és így

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = 2x\,dx,$$

amiből integrálva

$$\frac{x}{y} = x^2 + c,$$

ill.

$$y = \frac{x}{x^2 + c}.$$

Az egyenlet átrendezett alakjáról az is észrevehető, hogy az egyenlet Bernoulli-féle és így megoldható a

$$v = \frac{1}{y}$$

helyettesítéssel is.

9. Írjuk fel az $xy = c$ egyenletű hiperbolák ortogonális trajektóriáinak egyenletét.

Egy G_1 görbesereg ortogonális trajektóriáinak azt a G_2 görbesereget nevezzük, amelynek minden görbéje merőlegesen metszi a G_1 görbesereg minden görbéjét. A „merőlegesen metszi" azt jelenti, hogy két görbe metszéspontjában a két görbe érintői derékszöget zárnak be egymással.

Az $xy=c$ hiperbolasereg valamely görbéjének iránytényezője az $(x; y)$ pontban az egyenlet differenciálásával kapott

$$y+x\frac{dy}{dx}=0$$

egyenletből

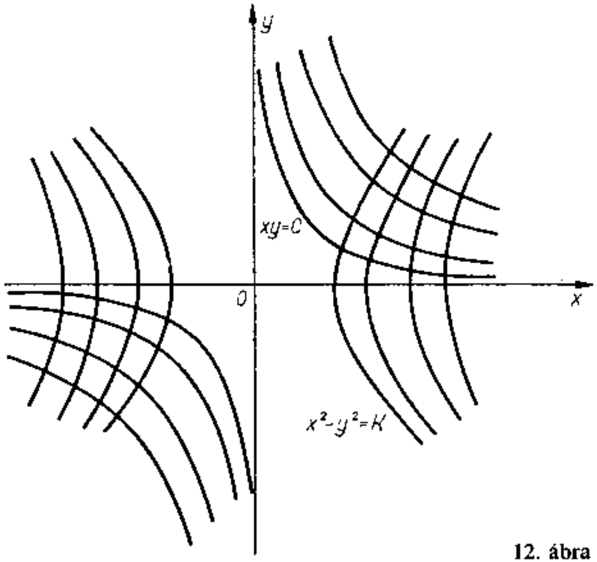
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

A rájuk merőleges görbék érintőinek meredeksége $-\frac{dx}{dy}$, és ezt felhasználva a keresett görbék differenciálegyenlete

$$-\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x},$$

ill. rendezés után

$$x\,dx=y\,dy.$$



12. ábra

Ez szétválasztható változójú (a változókat már szét is választottuk) differenciálegyenlet, amelynek megoldása

$$\frac{x^2}{2}=\frac{y^2}{2}+c,$$

ill.

$$x^2-y^2=K.$$

Az $xy=c$ hiperbolasereg ortogonális trajektóriái az $x^2-y^2=K$ hiperbolasereg (12. ábra) görbéi.

10. Egy gőzvezeték 20 cm átmérőjű csövét 6 cm vastag szigetelés védi, a szigetelőanyag hővezetési együtthatója $k=0{,}0003$. A cső hőmérséklete a szigetelés alatt 200 °C, a külső felületén 30 °C. Határozzuk meg a hőmérséklet értékét a cső tengelyétől mért x távolságban $10\leqq x\leqq 16$. Mekkora az a hőveszteség, ami 1 m cső mentén 1 óra alatt fellép?

Fourier [J. Fourier (1768—1830) francia matematikus és fizikus.] hővezetési törvénye szerint az 1 másodperc alatt átadott $\dot{Q}$ hőáram, cal/s (jelen esetben ez veszteség)

$$\dot{Q}=-kA\frac{dT}{dx},$$

ahol k a hővezetési együttható, A a vezetés irányára merőleges felület területének mérőszáma, cm², T a hőmérséklet, °C, x a hőt átadó felülettől mért távolság, cm. Esetünkben az x távolságban levő 1 cm hosszú hengerpalást felszíne $2x\pi$, cm², így

$$\dot{Q}=-k2x\pi\frac{dT}{dx},$$

amiből

$$\dot{Q}\frac{dx}{x}=-2k\pi\,dT.$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletet kaptunk.

A kezdeti feltételeket az integrációs határoknál vesszük figyelembe. Ekkor

$$\int_{10}^{16}\dot{Q}\frac{dx}{x}=\int_{200}^{30}-2k\pi\,dT,$$

ill.

$$\int_{10}^{x^*}\dot{Q}\frac{dx}{x}=\int_{200}^{T^*}-2k\pi\,dT.$$

Integrálva

$$\dot{Q}\,[\ln x]_{10}^{16} = -2k\pi[T]_{200}^{30},$$

$$\dot{Q}\,[\ln x]_{10}^{x^*} = -2k\pi[T]_{200}^{T^*}.$$

Helyettesítés után

$$\dot{Q}\ln 1{,}6 = 340k\pi,$$

$$\dot{Q}\ln\frac{x^*}{10} = -2k\pi(T^*-200).$$

Ha második egyenletet az elsővel elosztjuk, akkor

$$\frac{\ln 0{,}1x^*}{\ln 1{,}6} = \frac{T^*-200}{-170},$$

és ebből az x^* távolságban uralkodó hőmérséklet

$$T^* = 200-170\frac{\ln 0{,}1x^*}{\ln 1{,}6} = 200-170\frac{\lg 0{,}1x^*}{\lg 1{,}6}$$

fok Celsius.

Ellenőrzésképpen: ha $x=10$ cm, akkor

$$T(10) = 200-170\frac{\lg 1}{\lg 1{,}6} = 200-0 = 200\,°\mathrm{C},$$

ha $x=16$, akkor

$$T(16) = 200-170\frac{\lg 1{,}6}{\lg 1{,}6} = 200-170 = 30\,°\mathrm{C}.$$

Az integrálás után kapott első egyenletből az 1 cm hosszú cső mentén 1 másodperc alatt fellépő hőveszteség

$$\dot{Q} = \frac{340k\pi}{\ln 1{,}6}\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s}},$$

ezért egy óra alatt 100 cm hosszú cső mentén

$$60^2\,\mathrm{s}\;100\cdot\dot{Q}\,\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{s}} = 60^2\cdot 100\cdot\frac{340k\pi}{\ln 1{,}6} = 245\,000$$

kalória megy veszendőbe.

B. ELSŐRENDŰ y'-BEN MAGASABB FOKÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Az elsőrendű differenciálegyenlet legáltalánosabb alakja

$$F(x, y, y') = 0,$$

ill. ha bevezetjük az $y' = \dfrac{dy}{dx} = p$ jelölést, akkor

$$F(x, y, p) = 0.$$

Ha p fokszáma egynél nagyobb, akkor p-ben (y'-ben) magasabb fokú differenciálegyenletről beszélünk. Például a

$$p^2+2xp-2y = 0$$

egyenlet elsőrendű p-ben másodfokú differenciálegyenlet.

Az elsőrendű, p-ben n-ed fokú differenciálegyenlet általános alakja:

$$p^n+f_{n-1}(x, y)p^{n-1}+f_{n-2}(x, y)p^{n-2}+\ldots+f_1(x, y)p+ \\ +f_0(x, y) = 0,$$

ahol az $f_i(x, y)$ függvények a sík egy T tartományában folytonos függvények. Ha ebből a differenciálegyenletből a p, y, x valamelyike kifejezhető, akkor a differenciálegyenlet aránylag könnyen oldható meg; mind a három esetben arra törekszünk, hogy a magasabb fokú differenciálegyenlet megoldását első fokú egyenlet vagy egyenletek megoldására vezessük vissza. Itt fogunk találkozni olyan differenciálegyenletekkel, amelyeknek szinguláris megoldásuk is van, azaz a T értelmezési tartomány egy-egy pontján a megoldást jelentő integrálgörbék közül több is áthalad.

1. p-RE MEGOLDHATÓ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ha a

$$p^n+f_{n-1}(x, y)p^{n-1}+f_{n-2}(x, y)p^{n-2}+\ldots+f_1(x, y)p+ \\ +f_0(x, y) = 0$$

p-ben n-ed fokú racionális egész egyenletnek n számú különböző gyöke van, akkor az egyenlet gyöktényezős alakja

$$(p-F_1)(p-F_2)\ldots(p-F_n) = 0$$

alakú, ahol az F_i függvények x és y függvényei. Ez a szorzat akkor 0, ha bármelyik tényezője 0, és így n számú, elsőrendű, p-ben elsőfokú differenciálegyenlethez jutunk:

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = F_2(x, y), \ldots, \quad \frac{dy}{dx} = F_n(x, y).$$

Amennyiben e differenciálegyenletek megoldása rendre

$$\varphi_1(x, y, c) = 0, \quad \varphi_2(x, y, c) = 0, \ldots, \varphi_n(x, y, c) = 0,$$

akkor az eredeti egyenlet általános megoldása

$$\varphi_1(x, y, c) \ \varphi_2(x, y, c) \ldots \varphi_n(x, y, c) = 0,$$

azaz

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x, y, c) = 0.$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y'^2 - y' - 6 = 0.$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért írjuk fel az egyenletet a

$$p^2 - p - 6 = 0$$

alakban. A p-ben másodfokú egyenletet megoldva

$$p_1 = 3, \quad p_2 = -2,$$

így az egyenlet gyöktényezős alakja

$$(p-3)(p+2) = 0.$$

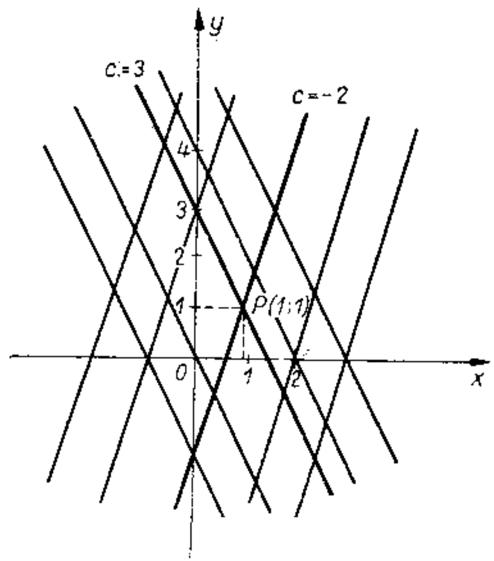
A $p-3 = 0$, ill. a $p+2 = 0$ egyenletből

$$y = 3x+c, \quad \text{ill.} \quad y = -2x+c,$$

így az általános megoldás

$$(y-3x-c)(y+2x-c) = 0.$$

Az integrálgörbék két párhuzamos egyenessereget alkotnak (13. ábra). Figyeljük meg, hogy az x, y sík minden pontján a két egyenessereg egy-egy egyenese halad át, azaz összesen két integrálgörbe. Például a $P(1; 1)$ ponton az első egyenesseregből a $c = -2$, a második egyenesseregből a $c=3$ értékhez tartozó egyenes halad át.



13. ábra

2. Keressük meg a

$$(x+2y)(3x-2y)p^2-(4x^2+4y^2-2xy)p-(2x-3y)(2x+y) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

A p-ben másodfokú egyenletből p-nek a gyökképlet segítségével történő kiszámítása hosszadalmas. Vegyük figyelembe, hogy p^2 együtthatója is és az állandó tag is két első fokú kifejezés szorzata. Kíséreljük meg a másodfokú kifejezést két első fokú kifejezés szorzatára bontani. Válasszuk az első fokú tagok együtthatójának és az állandóknak a szorzatok egy-egy tényezőjét, például így:

$$[(x+2y)p-(2x+y)][(3x-2y)p+(2x-3y)] = 0.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a műveletek elvégzése után bal oldalon valóban az eredeti egyenlet bal oldalát kapjuk.

Ezzel sikerült másodfokú differenciálegyenletünk megoldását két első fokú differenciálegyenlet megoldására visszavezetnünk. A két egyenlet

$$(x+2y)\frac{dy}{dx} = 2x+y,$$

$$(3x-2y)\frac{dy}{dx} = 3y-2x.$$

Mind a két első fokú egyenlet homogén fokszámú differenciálegyenlet, hiszen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y} = \frac{2+\frac{y}{x}}{1+2\frac{y}{x}},$$

ill.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y-2x}{3x-2y} = \frac{3\frac{y}{x}-2}{3-2\frac{y}{x}}.$$

Legyen $\frac{y}{x} = t$ a helyettesítés, ekkor $y' = t+xt'$, és ezzel az első egyenlet

$$t+xt' = \frac{2+t}{1+2t},$$

amiből

$$xt' = \frac{2-2t^2}{1+2t}.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{1+2t}{1-t^2}dt = 2\frac{dx}{x}\ .$$

A bal oldalon álló kifejezést résztörtekre bontjuk.

$$\frac{1+2t}{1-t^2} \equiv \frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t},$$

és ebből

$$1+2t = A(1+t)+B(1-t).$$

Ha $t = 1$, akkor $3 = 2A$, amiből $A = \frac{3}{2}$,

ha $t = -1$, akkor $-1 = 2B$, amiből $B = -\frac{1}{2}$.

A kiszámított együtthatókat felhasználva

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\frac{dx}{x},$$

ill. integrálva

$$-3\ln|1-t|-\ln|1+t| = 4\ln|x|+\ln c.$$

Ez a megoldás felírható az

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)^3} = cx^4$$

alakban is. Ha t értékét visszahelyettesítjük és x^4-nel egyszerűsítünk, akkor

$$\frac{1}{(x+y)(x-y)^3} = c,$$

ill.

$$(x+y)(x-y)^3 = C$$

az első differenciálegyenlet általános megoldása. Ugyanezzel a helyettesítéssel a második egyenlet

$$t+xt' = \frac{3t-2}{3-2t},$$

ill.

$$xt' = \frac{3t-2}{3-2t}-t = \frac{2t^2-2}{3-2t}$$

alakú. A változókat szétválasztva

$$\frac{3-2t}{t^2-1}dt = \frac{2}{x}dx.$$

A bal oldalon az integrálás előtt parciális törtekre bontunk. A

$$\frac{3-2t}{(t-1)(t+1)} \equiv \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}$$

azonosságból

$$3-2t \equiv A(t+1)+B(t-1).$$

Ha $t = 1$, akkor $1 = 2A$, amiből $A = \frac{1}{2}$,

ha $t = -1$, akkor $5 = -2B$, amiből $B = -\frac{5}{2}$.

Ezeket felhasználva

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t-1}-\frac{5}{t+1}\right]dt = \frac{2}{x}\,dx,$$

ill. integrálva

$$\ln|t-1|-5\ln|t+1| = 4\ln|x|+\ln c.$$

Ismert azonosságok alapján a második egyenlet megoldása

$$\frac{t-1}{(t+1)^5} = cx^4.$$

Ha t értékét visszahelyettesítjük, akkor

$$\frac{\dfrac{y}{x}-1}{\left(\dfrac{y}{x}+1\right)^5} = cx^4.$$

Ha a bal oldal számlálóját x-szel, a nevezőjét x^5-nel szorozzuk, akkor a törtet x^4-nel osztottuk, ezt a jobb oldalon is elvégezve

$$\frac{y-x}{(y+x)^5} = c,$$

és ez a második egyenlet általános megoldása. Ez a két egyenlet alkotja az eredeti másodfokú egyenlet általános megoldását, ami felírható még az

$$[(x+y)(x-y)^3-C][(y-x)(y+x)^{-5}-C] = 0$$

alakban is.

3. Keressük meg a

$$p^4-(x+2y+1)p^3+(x+2y+2xy)p^2-2xyp = 0$$

egyenlet általános megoldását!

Azonnal látszik, hogy a p-ben negyedfokú egyenlet bal oldalán p kiemelhető, és ezért $p=0$ gyöke az egyenletnek. Ha a p-vel való osztás után kapott harmadfokú egyenletnek van racionális gyöke, akkor az — ismert tétel szerint — csak az állandó tag osztói közül kerülhet ki, mivel p^3 együtthatója 1. Nézzük meg $2xy$ osztóit, nem gyöke-e valamelyik az egyenletnek. $2xy$ egyik osztója például x. Helyettesítsük ezt be a harmadfokú egyenletben p helyébe. Ekkor

$$x^3-(x+2y+1)x^2+(x+2y+2xy)x-2xy =$$

$$= x^3-x^3-2x^2y-x^2+x^2+2xy+2x^2y-2xy \equiv 0,$$

tehát $p=x$ gyöke az egyenletnek.

Könnyű belátni, hogy $p=1$ is gyöke az egyenletnek, mert

$$1-(x+2y+1)+(x+2y+2xy)-2xy \equiv 0.$$

Még egy gyököt kell megtalálnunk. $p=y$ nem gyök, de $p=2y$ gyök, hiszen

$$(2y)^3-(x+2y+1)(2y)^2+(x+2y+2xy)2y-2xy =$$

$$= 8y^3-4xy^2-8y^3-4y^2+2xy+4y^2+4xy^2-2xy \equiv 0.$$

Így az egyenlet

$$p(p-x)(p-1)(p-2y) = 0$$

alakban írható fel, és negyedfokú differenciálegyenletünk négy elsőfokú egyenletre bontható:

$$p = 0, \quad p = x, \quad p = 1, \quad p = 2y.$$

A négy egyenletet megoldva

$$y = C, \quad y = \frac{x^2}{2}+C, \quad y = x+C, \quad y = Ce^{2x}.$$

Eredeti differenciálegyenletünk megoldása e négy függvény. Megoldásunk az

$$(y-C)\left(y-\frac{x^2}{2}-C\right)(y-x-C)(y-Ce^{2x}) = 0$$

alakban is felírható.

2. y-RA MEGOLDHATÓ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ha az elsőrendű differenciálegyenletből y kifejezhető, azaz

$$y = f(x, p),$$

akkor y-t x szerint differenciálva a láncszabály szerint

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

Ez p-ben és x-ben elsőrendű, lineáris differenciálegyenlet. Ha ez zárt alakban megoldható, akkor legyen a megoldása

$$F(p, x, c) = 0.$$

Az

$$y = f(x, p),$$
$$F(p, x, c) = 0$$

egyenletrendszer a differenciálegyenlet megoldását jelenti, amiből y is és x is p-vel mint paraméterrel kifejezhető. Ha ebből az egyenletrendszerből p paraméter kiküszöbölhető, akkor közvetlen kapcsolat írható fel x és y között.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$p^2+2xp-2y = 0.$$

Az egyenlet megoldható ugyan p-re is, de a gyökök és a gyöktényezős alak felírása, majd a kapott differenciálegyenletek megoldása elég hosszadalmas. Gyorsan jutunk célhoz, ha y-t fejezzük ki:

$$y = \frac{1}{2}p^2+xp,$$

majd x szerint differenciáljuk

$$\frac{dy}{dx} = p = p\frac{dp}{dx}+p+x\frac{dp}{dx}.$$

Ebből rendezés után

$$\frac{dp}{dx}(p+x) = 0,$$

ami csak úgy állhat fenn, ha vagy

$$\frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{vagy} \quad p+x = 0.$$

Az első, ill. a második egyenletből

$$p = c, \quad \text{ill.} \quad p = -x.$$

A p paraméter értékét kiküszöbölve az

$$y = \frac{1}{2}p^2+xp,$$
$$p = c$$

egyenletrendszerből

$$y = cx+\frac{1}{2}c^2,$$

az

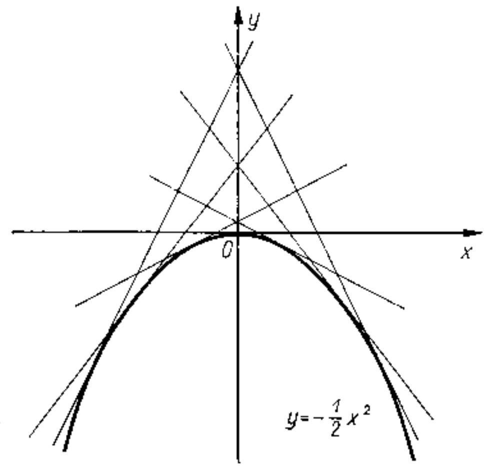
$$y = \frac{1}{2}p^2+xp,$$
$$p = -x$$

egyenletrendszerből pedig

$$y = \frac{1}{2}x^2-x^2 = -\frac{1}{2}x^2.$$

Könnyű belátni, hogy mind a két megoldás kielégíti az eredeti differenciálegyenletet.

Megjegyezzük, hogy az $y = -\frac{1}{2}x^2$ megoldás nem általános megoldás, mert nem szerepel benne tetszőleges állandó. Mivel azonban az $y = cx+\frac{1}{2}c^2$ általános megoldásból semmiféle c érték mellett sem kapható meg az $y = -\frac{1}{2}x^2$ partikuláris megoldás, ezért ez az utóbbi a differenciálegyenlet *szinguláris* megoldása. Az általános megoldás egy egyenessereg egyenlete, a szinguláris megoldás az egyenessereg burkolójának, esetünkben egy parabolának az egyenlete. A szóban forgó egyenessereg néhány egyenesét és a burkolót a 14. ábrán rajzoltuk meg.



14. ábra

2. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$p^2x-y=0.$$

Első megoldás: Az egyenletnek csak akkor van értelme, ha x és y egyező előjelű. Oldjuk meg az egyenletet y-ra

$$y=xp^2.$$

Ebből differenciálással

$$y'=p^2+x\,2pp'$$

vagyis

$$p=p^2+2pxp'.$$

$p=0$ megoldása ennek az egyenletnek. Ez azt jelenti, hogy

$$y'=0, \quad \text{amiből} \quad y=c.$$

Könnyen látható, hogy $y=c$ nem megoldása az eredeti differenciálegyenletnek.

Ha $p\neq 0$, akkor egyszerűsíthetünk vele, és

$$2xp'=1-p,$$

ill.

$$2\frac{dp}{1-p}=\frac{dx}{x}.$$

A változókat sikerült szétválasztanunk. Integrálás után

$$-2\ln|1-p|=\ln|x|-\ln c,$$

amiből

$$(1-p)^2x=c.$$

A

$$p^2x-y=0,$$

$$(1-p)^2x=c$$

egyenletrendszerből a p-t kiküszöböljük. A második egyenlet

$$x-2px+p^2x=c$$

alakú, és ide a $p=\pm\sqrt{\frac{y}{x}}$ értéket az első egyenletből behelyettesítve

$$x\pm 2\sqrt{xy}+y=c$$

a differenciálegyenlet általános megoldása. Ha x pozitív, akkor ez a megoldás a

$$(\sqrt{y}\pm\sqrt{x})^2=c$$

alakban is felírható.

Második megoldás: A differenciálegyenlet megoldható p-re is.

$$p=\pm\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Most tulajdonképpen két egyenletet kell megoldanunk. Ezek

$$p=\sqrt{\frac{y}{x}} \quad \text{és} \quad p=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Az első egyenletet tekintve

$$y'=\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Ennek változói szétválaszthatók, ha x pozitív (ekkor ugyanis a megoldás elején tett megjegyzés értelmében y is pozitív) és így

$$\frac{dy}{\sqrt{y}}=\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Integrálás után

$$\sqrt{y}=\sqrt{x}+C,$$

vagyis

$$\sqrt{y}-\sqrt{x}=C.$$

Ez felírható

$$(\sqrt{y}-\sqrt{x})^2=c$$

alakban is, ami megegyezik az első megoldásban kapott egyik eredménnyel.

A második egyenletet tekintve

$$y'=-\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

amelynek megoldása hasonló módon eljárva

$$\sqrt{y}+\sqrt{x}=C.$$

ill.

$$(\sqrt{y}+\sqrt{x})^2=c,$$

és ez megegyezik az első megoldásban kapott második eredménnyel. A két megoldási eljárást összehasonlítva azt tapasztaljuk, hogy az elsőben az általános megoldás felírásához nem volt szükség az $x>0$ feltételre, nem volt szükség az esetek szétválasztására. Ezért az első megoldási eljárás ebben az esetben egyszerűbbnek bizonyult.

3. Határozzuk meg a

$$16x^2+2p^2y-p^3x = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

Oldjuk meg az egyenletet y-ra. (p-re elég körülményes volna!) Ha $p\neq 0$, akkor

$$y = \frac{1}{2}px-8\frac{x^2}{p^2}.$$

Differenciáljunk x szerint. Ekkor $\left(\text{legyen } \frac{dp}{dx}=p'\right)$

$$y' = p = \frac{1}{2}(p'x+p)-8\frac{2xp^2-x^2 2pp'}{p^4},$$

ill.

$$2p = p'x+p-32\frac{x}{p^2}+32\frac{x^2p'}{p^3}.$$

Rendezve

$$p(p^3+32x)-x(p^3+32x)p' = 0,$$

amiből

$$(p^3+32x)(p-xp') = 0.$$

Ez akkor áll fenn, ha

$$p^3+32x = 0 \quad \text{vagy} \quad p-xp' = 0.$$

A második egyenletből

$$p-x\frac{dp}{dx} = 0.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

és integrálva

$$\ln|p| = \ln|x|+\ln c,$$

ill.

$$p = cx.$$

Ezt az eredeti differenciálegyenletbe behelyettesítve

$$16x^2+2c^2x^2y-c^3x^4 = 0.$$

Az általános megoldás explicit alakja

$$y = \frac{c^3x^2-16}{2c^2} = \frac{cx^2}{2}-\frac{8}{c^2}.$$

Az első egyenletből

$$p^3 = -32x.$$

Ez nem tartalmazza p'-t. Egy megoldás ebből közvetlenül kiszámítható. Ugyanis

$$y' = (-32x)^{\frac{1}{3}}.$$

és integrálva

$$y = -\frac{3x\sqrt[3]{4x}}{2}+c.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez csak akkor megoldása az eredeti differenciálegyenletnek, ha $c=0$. Az

$$y = -\frac{3x\sqrt[3]{4x}}{2}$$

partikuláris megoldás nem kapható meg az általános megoldásból az integrációs állandó semmiféle értéke mellett sem. Ez a megoldás az egyenlet szinguláris megoldása, geometriai jelentése: az általános megoldás görbeseregének a burkolója.

Ezt a partikuláris megoldást úgy is megkaphatjuk, ha a második egyenletből adódó $p^3 = -32x$-et közvetlenül visszahelyettesítjük az eredeti cifferenciálegyenletbe. Ekkor uggyanis

$$16x^2+2p^2y+32x^2 = 0,$$

és ebből

$$-y'^2y = 24x^2,$$

$$\sqrt{-y}\frac{dy}{dx} = \sqrt{24}\,x,$$

vagy a változókat szétválasztva

$$\sqrt{-y}\,dy = \sqrt{24}\,x\,dx.$$

Mind a két oldalon integrálva

$$-\frac{2}{3}\sqrt{-y^3} = \sqrt{24}\frac{x^2}{2}+c.$$

Legyen $c=0$, akkor

$$y^3 = -\frac{27}{2}x^4,$$

$$y = -\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{3x\sqrt[3]{4x}}{2},$$

amint azt az előbb is láttuk.

3. x-RE MEGOLDHATÓ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ha az elsőrendű differenciálegyenletből kifejezhető a független változó, azaz

$$x = f(y, p),$$

akkor ennek a függvénynek y szerinti deriváltja

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy}.$$

Ez a differenciálegyenlet p-ben és y-ban elsőrendű, első fokú differenciálegyenlet, amely legtöbbször megoldható. Legyen a megoldása implicit alakban

$$F(p, y, c) = 0.$$

Az

$$x = f(y, p),$$

$$F(p, y, c) = 0$$

egyenletrendszer alkotja az eredeti egyenlet általános megoldását paraméteres alakban. Ha az egyenletrendszerből a p paraméter kiküszöbölhető, akkor a differenciálegyenlet általános megoldását az x, y és c integrációs konstans között fennálló kapcsolat alakjában kapjuk meg.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$p^2+2y-2x = 0.$$

A differenciálegyenlet akár x-re, akár y-ra könnyen megoldható. Oldjuk meg x-re:

$$x = \frac{1}{2}(p^2+2y).$$

y szerint differenciálva

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1}{2}\left(2p\frac{dp}{dy}+2\right) = p\frac{dp}{dy}+1.$$

Ebből

$$p^2\frac{dp}{dy}+p = 1.$$

A p-ben és y-ban elsőrendű differenciálegyenlet változóit szétválasztva

$$\frac{p^2}{p-1}dp = -dy,$$

ill.

$$\left(p+1+\frac{1}{p-1}\right)dp = -dy.$$

Integrálva

$$\frac{p^2}{2}+p+\ln|p-1| = -y+C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása paraméteres alakban

$$y = C-\frac{1}{2}p^2-p-\ln|p-1|,$$

$$x = C-p-\ln|p-1|,$$

ahol x értékét úgy kaptuk meg, hogy y megkapott kifejezését az eredeti egyenletbe helyettesítettük vissza. A most kapott egyenletrendszerből p nem küszöbölhető ki.

Ha az egyenletből y-t fejezzük ki, teljesen hasonló lépésekkel jutunk ugyanahhoz az eredményhez, csak akkor x-et kapjuk meg először.

2. Keressük meg a

$$6p^2y^2+y-3px = 0$$

differenciálegyenlet minden megoldását!

A diffrenciálegyenlet a legkönnyebben x-re oldható meg,

$$x = \frac{y}{3p}+2py^2.$$

Differenciálva y szerint $\left(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}\right)$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{3p}-\frac{y}{3p^2}\frac{dp}{dy}+2\frac{dp}{dy}y^2+4py.$$

Rendezve és kiemelve

$$2p+y\frac{dp}{dy} = 6p^2y\left(y\frac{dp}{dy}+2p\right),$$

ill.

$$\left(2p+y\frac{dp}{dy}\right)(1-6p^2y) = 0.$$

Ez akkor teljesül, ha a bal oldal valamelyik tényezője 0. Ha

$$2p+y\frac{dp}{dy} = 0,$$

akkor

$$\frac{dp}{p} = -2\frac{dy}{y},$$

amiből

$$\ln|p| = -2\ln|y|+\ln c,$$

ill.

$$p = \frac{c}{y^2}.$$

Ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$y^3 = 3cx-6c^2,$$

és ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

Ha a másik tényező

$$1-6p^2y = 0,$$

akkor

$$p^2 = \frac{1}{6y},$$

ill. ha $y>0$, akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\pm\sqrt{6y}}.$$

Ha a pozitív előjelet tekintjük, akkor a változók szétválasztása után

$$\sqrt{6y}\,dy = dx,$$

amiből integrálás után

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}y^{3/2} = x+c,$$

vagy átalakítva

$$y = \left[\frac{3}{2\sqrt{6}}(x+c)\right]^{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(x+c)^{\frac{2}{3}}.$$

Könnyen belátható, hogy ez csak akkor elégíti ki az eredeti differenciálegyenletet, ha $c=0$. Így a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kaptuk:

$$y = \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{2}.$$

Ez kielégíti az eredeti differenciálegyenletet, de az általános megoldásból nem kapható meg. A megoldás szinguláris, mert a megoldást jelentő görbe egyetlen egy pontjában sem teljesül a Lipschitz-féle feltétel. Ugyanis a differenciálegyenletből kapható

$$p = y' = f(x, y) = \frac{3x\pm\sqrt{9x^2-24y^3}}{12y^2}$$

kétváltozós függvény egyik parciális deriváltja sincs értelmezve ott, ahol

$$9x^2-24y^3 = 0,$$

és ebből valóban

$$y = \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{2}.$$

Ha a p-re kapott egyenletben a negatív előjelet tekintjük, ugyanerre jutunk.

A partikuláris megoldás megkeresését most is úgy kezdhettük volna, hogy a $p^2 = \frac{1}{6y}$-t visszahelyettesítjük az eredeti differenciálegyenletbe.

Ekkor a

$$6\frac{1}{6y}y^2+y-3px = 0$$

egyenletből

$$3px = 2y,$$

ill. a változókat szétválasztva

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{3}\frac{dx}{x}.$$

Ebből integrálás után

$$\ln|y| = \frac{2}{3}\ln|x|+\ln k,$$

azaz

$$y = k\sqrt[3]{x^2}.$$

Egyszerű számolással belátható, hogy ez akkor megoldása az eredeti differenciálegyenletnek, ha

$$k = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \quad \text{vagy} \quad k = 0.$$

Az első esetben az

$$y = \frac{\sqrt[3]{3x^2}}{2}$$

szinguláris megoldást kapjuk, a második esetben $y=0$, és ez az általános megoldásból is megkapható, ha ott $c=0$.

3. Meghatározandó a

$$p^3-2xyp+4y^2 = 0$$

differenciálegyenlet megoldása.

Az egyenletből csak az x fejezhető ki könnyen:

$$x = \frac{p^2}{2y}+\frac{2y}{p}.$$

y szerint differenciálva

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{p}{y}\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{2y^2}+2\left(\frac{1}{p}-\frac{y}{p^2}\frac{dp}{dy}\right).$$

Ha a törteket eltávolítjuk és összeszorzunk

$$2py^2-4y^3\frac{dp}{dy}-p^4-2yp^3\frac{dp}{dy} = 0.$$

Kiemeléssel

$$2y^2\left(p-2y\frac{dp}{dy}\right)-p^3\left(p-2y\frac{dp}{dy}\right) = 0,$$

ill.

$$\left(p-2y\frac{dp}{dy}\right)(2y^2-p^3) = 0$$

alakra hozható az egyenlet. Ez akkor áll fenn, ha

$$p-2y\frac{dp}{dy} = 0 \quad \text{vagy} \quad 2y^2-p^3 = 0.$$

Az első esetben a változókat szétválasztva

$$2\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

és integrálás után

$$p^2 = cy.$$

Ha ennek segítségével az eredeti egyenletből p-t kiküszöböljük, előbb a

$$p(cy-2xy)+4y^2 = 0,$$

majd a

$$16y = c(c-2x)^2$$

általános megoldáshoz jutunk. Könnyű belátni, hogy ez valóban megoldása a differenciálegyenletnek.

A második esetben

$$p^3 = 2y^2,$$

ill.

$$y' = \sqrt[3]{2y^2},$$

amiből

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{2y^2}} = dx,$$

és integrálva

$$3\sqrt[3]{\frac{y}{2}} = x+k.$$

Ha ebből y-t kifejezzük, akkor

$$y = 2\left(\frac{x+k}{3}\right)^3.$$

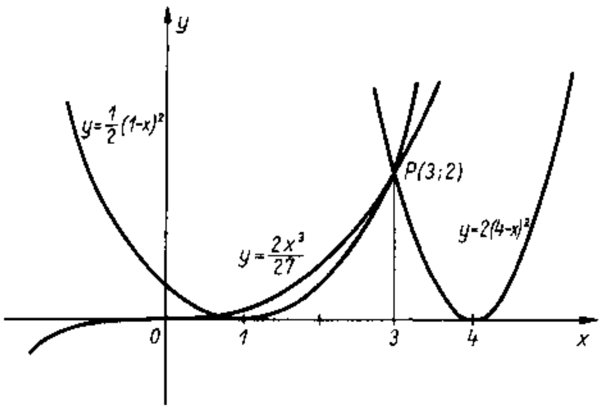
Egyszerű számolással be lehet látni, hogy ez csak $k=0$ érték mellett megoldása az eredeti differenciálegyenletnek. Az

$$y = \frac{2x^3}{27}$$

partikuláris megoldás a c integrációs konstans semmilyen értéke mellett sem kapható meg az általános megoldásból. Ez a partikuláris megoldás szinguláris megoldás, mert az integrálgörbe minden pontján az általános megoldás egy, kettő vagy három görbéje is áthalad. Ugyanis ha kiválasztjuk a szinguláris integrálgörbe egy $P_0(x_0;\ y_0)$ pontját és ennek koordinátáit behelyettesítjük az általános megoldásba, akkor a c-ben harmadfokú

$$16y_0 = c(c-2x_0)^2$$

egyenlethez jutunk, amelynek egy valós gyöke mindig van, de lehet két (ebből az egyik kétszeres) valós gyöke is. Így a P_0 ponton legalább egy és legfeljebb három integrálgörbe haladhat át.



15. ábra

Például a szinguláris integrálgörbe $P_0(3;\ 2)$ pontját választva, és ennek koordinátáit az általános megoldásba helyettesítve a

$$c^3-12c^2+36c-32 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek gyökei $c_1=2$, $c_2=2$, $c_3=8$. A $c=2$-höz, ill. a $c=8$-hoz tartozó partikuláris megoldás

$$16y = 2(2-2x)^2, \quad \text{ill.} \quad 16y = 8(8-2x)^2.$$

A $P_0(3;\ 2)$ ponton át tehát összesen három integrálgörbe halad át (15. ábra).

4. A CLAIRAUT-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLET

Az

$$y = px+f(p)$$

alakú differenciálegyenlet, ahol $p=y'$, Clairaut-féle [A. Clairaut (1713—1765) francia matematikus] differenciálegyenletnek nevezzük. Látszik, hogy az egyenlet y-ra megoldott, tehát a 177. oldalon említettek szerint számítható. Differenciáljuk az egyenlet mindkét oldalát x szerint. Ekkor

$$p = \frac{dp}{dx}x+p+\frac{df}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}.$$

Rendezve

$$\left(x+\frac{df}{dp}\right)\frac{dp}{dx} = 0.$$

Ez akkor áll fenn, ha

$$\text{vagy} \quad \frac{dp}{dx} = 0, \quad \text{vagy} \quad x+\frac{df}{dp} = 0,$$

vagy mind a két tényező 0.

Az első esetben

$$p = c,$$

és ezt az eredeti egyenletbe helyettesítve a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = cx + f(c).$$

A második esetben, ha $\frac{df}{dp}$-t $f'(p)$-vel jelöljük,

$$x = -f'(p).$$

Ha ezt az eredeti differenciálegyenletbe helyettesítjük, p-re a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$x = -f'(p),$$

$$y = px + f(p),$$

amiből p — esetleg — kiküszöbölhető. Ha p nem állandó, akkor az előbbi egyenletrendszer nem tartalmaz integrációs állandót, továbbá nem kapható meg a már kiszámított általános megoldásból semmilyen c behelyettesítése után sem, ezért ez a differenciálegyenlet szinguláris megoldása. Ezek szerint a Clairaut-féle differenciálegyenlet bármely megoldása a következő három típus valamelyikébe tartozik:

1. Az általános megoldás egyenesseregének egyenesei,
2. az egyenessereg burkolója, ez a szinguláris megoldás,
3. a burkoló egy darabja és e darab végpontjában (végpontjaiban) húzott érintőből (érintőkből) álló alakzat. Ez annak az esetnek felel meg, amikor a szorzattá alakított egyenlet mind a két tényezője egyszerre 0.

Vegyük észre, hogy a Clairaut-féle egyenlet általános megoldását azonnal felírhatjuk, ha p helyébe egy tetszőleges állandót írunk.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y = px + 2p^2.$$

Könnyen látszik, hogy Clairaut-féle egyenletről van szó, és általános megoldása

$$y = cx + 2c^2.$$

Mivel esetünkben $f(p) = 2p^2$, ezért $f'(p) = 4p$, és a szinguláris megoldás az

$$y = px + 2p^2,$$

$$x = -4p$$

egyenletrendszerből számítható ki p kiküszöbölésével. A második egyenletből p-t kifejezve és az elsőbe helyettesítve a szinguláris megoldás

$$y = -\frac{1}{8}x^2$$

zárt alakban írható fel. Az általános megoldás néhány egyenese és a burkoló görbe a 2. ábrán látható (24. old.).

Vegyük észre, hogy erről a differenciálegyenletről már szó volt az első rész III. fejezetében. Hasonlítsuk össze ezt a megoldást az ott mondottakkal.

2. Keressük meg a következő egyenlet általános és szinguláris megoldását:

$$(y - px)^2 = 1 + p^2.$$

Ha egyenletünket y-ra megoldjuk, akkor

$$y = px \pm \sqrt{1 + p^2},$$

tehát tulajdonképpen két differenciálegyenletet kell megoldanunk. Mind a két egyenlet Clairaut-féle, ezért az általános megoldás azonnal felírható:

$$y = cx \pm \sqrt{1 + c^2},$$

vagy az előbbi átalakítást visszafordítva

$$(y - cx)^2 = 1 + c^2.$$

A szinguláris megoldást az

$$y = px \pm \sqrt{1 + p^2},$$

$$x = -\frac{d}{dp}(\pm\sqrt{1 + p^2}) = \mp\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

egyenletrendszerből számíthatjuk ki.

Először a pozitív előjelet választva a második egyenletben (ekkor az elsőben a negatív előjel érvényes) fejezzük ki $\sqrt{1 + p^2}$-et és helyettesítsük az első egyenletbe:

$$y = px - \frac{p}{x}.$$

Innen

$$p = \frac{xy}{x^2 - 1}.$$

Ha ezt a második egyenletbe visszahelyettesítjük, akkor

$$x = \frac{\frac{xy}{x^2-1}}{\sqrt{1+\frac{x^2y^2}{(x^2-1)^2}}} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2-1)^2+x^2y^2}},$$

amiből

$$\sqrt{(x^2-1)^2+x^2y^2} = y,$$

ill. rendezés után

$$x^2+y^2 = 1.$$

Könnyű belátni, hogy ha az egyenletrendszer második egyenletében a negatív előjelet választjuk, akkor ugyanezt a megoldást kapjuk. Ez a differenciálegyenlet szinguláris megoldása.

Az integrálgörbék olyan egyenesek, amelyek érintői az origó középpontú egységsugarú körnek, a kör az egyenesek burkolója.

3. Keressük meg a

$$p^2\cos^2 y+p\sin x\cos x\cos y-\cos^2 x\sin y = 0$$

egyenlet általános és szinguláris megoldását!

A meglehetősen bonyolult egyenlet egyszerűbb lesz, ha a

$$\sin y = v,\ \sin x = u$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$\frac{dv}{dy} = \cos y,\quad \frac{du}{dx} = \cos x,$$

és

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{du} = \frac{\cos x}{\cos y}\,\frac{dv}{du}.$$

Ezzel a helyettesítéssel egyenletünk

$$(\cos^2 x)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(\cos^2 x\sin x)\left(\frac{dv}{du}\right) = \cos^2 x\sin y.$$

$\cos^2 x$-szel egyszerűsítve

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2+u\frac{dv}{du} = v.$$

A kapott differenciálegyenlet Clairaut-féle, ezért általános megoldása azonnal felírható:

$$v = cu+c^2,$$

ill. az eredeti változókat visszahelyettesítve

$$\sin y = c\sin x+c^2.$$

A szinguláris megoldás is könnyen meghatározható. Esetünkben ugyanis

$$f\left(\frac{dv}{du}\right) = \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = q^2,$$

és így

$$\frac{df}{dq} = 2q.$$

A szinguláris megoldás tehát a

$$v = uq+q^2,$$
$$u = -2q$$

egyenletrendszerből q kiküszöbölése után kapható meg. Ez pedig

$$v = -\frac{u^2}{4},$$

vagy az eredeti változókkal kifejezve

$$\sin y = -\frac{\sin^2 x}{4}.$$

C. ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSA

1. PICARD ITERÁCIÓS MÓDSZERE

Az

$$y' = f(x, y)$$

elsőrendű differenciálegyenlet $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek eleget tevő partikuláris megoldása fokozatos közelítéssel (Picard módszere) [E. Picard (1856—1941) francia matematikus] az alábbi módon határozható meg.

Ha az $y'=f(x, y)$ egyenletben szereplő $f(x, y)$ függvény valamilyen

$$|x-x_0| < a \leqq \infty,$$

$$|y-y_0| < b \leqq \infty$$

tartományban korlátos $\left(f(x, y) \leqq K\right)$ és folytonos, továbbá eleget tesz az

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqq M|y_2-y_1|$$

Lipschitz-féle feltételnek (M pozitív állandó), akkor az

$$y_1(x) = y(x_0)+\int_{x_0}^{x} f\left(t, y(x_0)\right) dt,$$

$$y_2(x) = y(x_0)+\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1(t)\right) dt,$$

$$y_3(x) = y(x_0)+\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_2(t)\right) dt.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x) = y(x_0)+\int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

függvénysorozat $n \to \infty$ esetén a differenciálegyenlet

$$y = y(x)$$

megoldásához konvergál az

$$|x-x_0| < \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$$

intervallumban. Megjegyezzük, hogy az integrandusban az integrációs változót azért jelöltük t-vel, mert a felső integrációs határban már szerepel az x.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az

$$y' = xy$$

differenciálegyenletnek az $y(0)=1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását a Picard-féle módszerrel!

Minthogy az $f(x, y)=xy$ függvény tetszőleges véges x és y értékre korlátos és eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek, hiszen

$$|xy_2-xy_1| = |x|\,|y_2-y_1| \leqq M|y_2-y_1|,$$

ezért az eljárás alkalmazható.

Mivel $x_0=0$ és $y(x_0)=1$, ezért a fokozatosan felírható függvénysorozat első 4 eleme a következő:

$$y_1(x) = 1+\int_0^x t\cdot 1\, dt = 1+\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = 1+\frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1+\int_0^x t\left(1+\frac{t^2}{2}\right) dt = 1+\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}\right]_0^x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8},$$

$$y_3(x) = 1+\int_0^x t\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}\right) dt = 1+\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+\frac{t^6}{48}\right]_0^x =$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+\frac{x^6}{48} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3,$$

$$y_4(x) = 1+\int_0^x t\left(1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+\frac{t^6}{48}\right) dt =$$

$$= 1+\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{8}+\frac{t^6}{48}+\frac{t^8}{384}\right]_0^x =$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^4.$$

Felismerve a képzésben mutatkozó szabályosságot

$$y_n(x) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^3+\dots+\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n.$$

Így a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k.$$

Vegyük észre, hogy

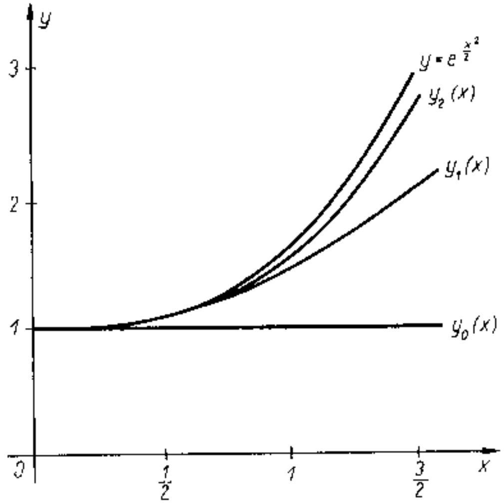
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = e^{\frac{x^2}{2}},$$

ezért a megoldás felírható az

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

alakban is. Az első három közelítő megoldás grafikonját l. a 16. ábrán.

Megjegyzés. A feladat a változók szétválasztásával is megoldható.



16. ábra

2. Keressük meg az

$$y' = y+x$$

differenciálegyenletnek az $y(0)=0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását iterációs módszerrel.

Az $f(x, y) = x+y$ függvény tetszőleges véges x, y értékekre korlátos, és eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek, ugyanis

$$|x+y_2-x-y_1| = 1\cdot|y_2-y_1| \leqq M|y_2-y_1|.$$

Mivel $x_0=0$, $y_0=0$, ezért

$$y_1(x) = 0+\int_0^x (t+0)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t+\frac{t^2}{2}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}.$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}\right]_0^x =$$

$$= \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24} = \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}.$$

Folytatva az y_k függvények képzését

$$y_n(x) = \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

Az egyenlet megoldása tehát

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Ismeretes, hogy

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

bármilyen x esetében. Ezt felhasználva vegyük észre, hogy megoldásunk felírható az

$$y(x) = e^x-x-1$$

alakban is, amint azt (más módszerekkel megoldva ezt a differenciálegyenletet) már láttuk.

3. Határozzuk meg Picard módszerével az

$$y' = 3x+y^2$$

differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely eleget tesz az $y(0)=1$ kezdeti feltételnek. Mekkora y közelítő értéke az $x=0,1$ helyen?

Esetünkben $f(x, y) = 3x+y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Az $f(x, y)$ függvény az $x=0,1$ hely környezetében korlátos és eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek, mert

$$|3x+y_2^2-3x-y_1^2| = |(y_2+y_1)(y_2-y_1)| \leqq M|y_2-y_1|,$$

ahol M véges és $M \geqq y_1+y_2$.

Ekkor

$$y_1(x) = y(x_0) + \int_0^x (3t + y_0^2)\, dt = 1 + \int_0^x (3t+1)\, dt = \frac{3}{2}x^2 + x + 1,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left[3t + \left(\frac{3}{2}t^2 + t + 1\right)^2\right] dt =$$

$$= 1 + \int_0^x \left(\frac{9}{4}t^4 + 3t^3 + 4t^2 + 5t + 1\right) dt =$$

$$= \frac{9}{20}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + 1,$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left[3t + \left(\frac{9}{20}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{4}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t + 1\right)^2\right] dt =$$

$$= 1 + \int_0^x \left(\frac{81}{400}t^{10} + \frac{27}{40}t^9 + \frac{141}{80}t^8 + \frac{17}{4}t^7 + \frac{1157}{180}t^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{136}{15}t^5 + \frac{125}{12}t^4 + \frac{23}{3}t^3 + 6t^2 + 5t + 1\right) dt =$$

$$= \frac{81}{4400}x^{11} + \frac{27}{400}x^{10} + \frac{47}{240}x^9 + \frac{17}{32}x^8 + \frac{1157}{1260}x^7 +$$

$$+ \frac{68}{45}x^6 + \frac{25}{12}x^5 + \frac{23}{12}x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + 1.$$

Ha $x=0{,}1$, akkor 0-adik, első, második, harmadik közelítő érték rendre:

$$y_0 = 1; \quad y_1 = 1{,}115; \quad y_2 = 1{,}1264; \quad y_3 = 1{,}127\,21.$$

Számításunk eredménye tehát

$$\bar{y} \approx 1{,}127\,21.$$

Vegyük észre, hogy differenciálegyenletünk nem lineáris és az eddig látott pontos módszerekkel nem oldható meg.

4. Határozzuk meg az

$$y' = x^2 + y^2$$

differenciálegyenletnek az $y(1)=2$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását az iterációs módszerrel.

Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény tetszőleges véges x, y értékekre korlátos és eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek, ugyanis

$$|x^2 + y_2^2 - x^2 - y_1^2| = |(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)| \leqq M|y_2 - y_1|,$$

ha $|y_2 + y_1| < M$. Ez azonban igaz, mert y_1 is és y_2 is véges.

Esetünkben $x_0=1$, $y(x_0)=2$, így

$$y_1(x) = 2 + \int_1^x (t^2+4)\, dt = 2 + \left[\frac{t^3}{3} + 4t\right]_1^x =$$

$$= 2 + \left(\frac{x^3}{3} + 4x\right) - \left(\frac{1}{3} + 4\right) = \frac{x^3}{3} + 4x - \frac{7}{3}.$$

$$y_2(x) = 2 + \int_1^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + 4t - \frac{7}{3}\right)^2\right] dt =$$

$$= 2 + \int_1^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} + \frac{8}{3}t^4 + 16t^2 - \frac{14}{9}t^3 - \frac{56}{3}t + \frac{49}{9}\right) dt =$$

$$= 2 + \left[\frac{t^7}{63} + \frac{8t^5}{15} - \frac{7t^4}{18} + \frac{17t^3}{3} - \frac{28t^2}{3} + \frac{49t}{9}\right]_1^x =$$

$$= \frac{x^7}{63} + \frac{8x^5}{15} - \frac{7x^4}{18} + \frac{17x^3}{3} - \frac{28x^2}{3} + \frac{49x}{9} - \frac{39}{630}.$$

$$y_3(x) = 2 + \int_1^x (t^2 + [y_2(x)]^2)\, dt.$$

Látható, hogy az integrálás minden további lépésben is elvégezhető, de a fellépő tagok rohamosan növekedő száma miatt ezt már nem végezzük el, és közelítő megoldásnak az $y_2(x)$-et fogadjuk el.

2. ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA TAYLOR-SOROKKAL

Az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása Taylor-sor segítségével is felírható.

Ismeretes, hogy az akárhányszor differenciálható $y=g(x)$ függvény Taylor-sora az x_0 helyen a következő:

$$g(x) = g(x_0) + \frac{g'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{g''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{g'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

A megoldandó

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet jobb oldalát tekintsük $g'(x)$-nek

$$y' = g'(x) = f(x, y),$$

és ekkor az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$y'' = g''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f,$$

$$y''' = g'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} f \frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

és így tovább.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért legyen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t,$$

és ezek értékét az $(x_0; y_0)$ helyen jelölje p_0, q_0 stb., továbbá legyen $f(x_0, y_0) = f_0$, akkor minden $x = x_0 + h$ helyen (ekkor $x - x_0 = h$) $g(x)$ harmadfokú Taylor-polinomja, amit a differenciálegyenlet közelítő megoldásának tekinthetünk, a következő:

$$\bar{y} = y_0 + hf_0 + \frac{1}{2}h^2(p_0 + f_0 q_0) +$$

$$+ \frac{1}{6}h^3(r_0 + p_0 q_0 + 2f_0 s_0 + f_0 q_0^2 + f_0^2 t_0).$$

Az eljárás folytatható, és a megoldás Taylor-sor alakjában is felírható.

Gyakorló feladatok

Határozzuk meg Taylor-sor segítségével az

$$y' = 3x + y^2$$

differenciálegyenletnek az $y(0) = 1$ feltételnek eleget tevő partikuláris megoldását! Mekkora y értéke az $x = 0{,}1$ helyen?

Esetünkben $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $g(x_0) = y_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
y' &= g'(x) = 3x + y^2, & g'(x_0) &= 1,\\
y'' &= g''(x) = 3 + 2yy', & g''(x_0) &= 5,\\
y''' &= g'''(x) = 2(y')^2 + 2yy'', & g'''(x_0) &= 12,\\
y^{IV} &= g^{IV}(x) = 6y'y'' + 2yy''', & g^{IV}(x_0) &= 54,\\
y^{V} &= g^{V}(x) = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}, & g^{V}(x_0) &= 354,
\end{aligned}$$

és így tovább.

A megoldás tehát

$$y = 1 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{5}{2!}(x-0)^2 + \frac{12}{3!}(x-0)^3 +$$

$$+ \frac{54}{4!}(x-0)^4 + \frac{354}{5!}(x-0)^5 + \dots,$$

ill.

$$y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + 2x^3 + \frac{9}{4}x^4 + \frac{177}{66}x^5 + \dots .$$

Ha $x = 0{,}1$, akkor

$$\bar{y} = y(0{,}1) = 1 + 0{,}1 + 0{,}025 + 0{,}002 + 0{,}000\,22 + 0{,}000\,03 + \dots,$$

$$\bar{y} \approx 1{,}127\,25.$$

(Vö. a Picard-módszerrel kapott eredménnyel, 200. old.)

3. RUNGE* MÓDSZERE

A Picard-féle módszer szerint az ott megemlített feltételek mellett az

$$y' = f(x, y)$$

* C. RUNGE (1856-1927) német matematikus

differenciálegyenletnek az $y(x_0)=y_0$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldása

$$y(x) = y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y(x))\, dt$$

alakban írható fel, és $y(x)$-szel jelöltük az $y_n(x)$ függvénysorozat határfüggvényét, ha $n\to\infty$.

Ha $x=x_0+h$, és az integrációs változót ismét x-szel jelöljük, akkor

$$\bar{y} = y_0+\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx.$$

Legyen

$$k = \bar{y}-y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx.$$

Tegyük fel, hogy az $y(x)$ megoldásfüggvény értékei az x_0, $x_0+\frac{h}{2}$, x_0+h helyen ismertek, és legyenek ezek y_0, y_1, y_2. Ekkor a határozott integrálok közelítő kiszámítására érvényes Simpson-féle* formula alapján

$$k = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y)\, dx =$$

$$= \frac{h}{6}\left[f(x_0, y_0)+4f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_1\right)+f(x_0+h, y_2)\right].$$

Most azonban csak $y(x_0)=y_0$ ismert, y_1 és y_2 nem. A Runge-féle módszer azon alapszik, hogy a nem ismert y_1 és y_2 értékeket a következő módon közelíti:

$$y_1 \approx y_0+\frac{1}{2}hf(x_0, y_0) = y_0+\frac{hf_0}{2},$$

$$y_2 \approx y_0+hf(x_0+h, y_0+hf_0).$$

* T. SIMPSON (1710—1761) angol matematikus. A Simpson-féle formulát l. pl. Bárczy Barnabás: *Integrálszámítás*, 321. oldal. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.

Ennek alapján

$$k \approx \frac{h}{6}\left[f_0+4f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{hf_0}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+f\big(x_0+h, y_0+hf(x_0+h, y_0+hf_0)\big)\right].$$

Így k-t h hatványai segítségével fejeztük ki. Be lehet látni, hogy h első három hatványának együtthatói rendre megegyeznek a Taylor-sor szerinti kifejtés megfelelő hatványának együtthatójával, így a Runge-közelítés hibája h^4 nagyságrendű.

k kiszámítását célszerű a következő lépésekben elvégezni:

$$k_1 = hf_0,$$

$$k_2 = hf(x_0+h, y_0+k_1),$$

$$k_3 = hf(x_0+h, y_0+k_2),$$

$$k_4 = hf\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1}{2}\right),$$

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1+4k_4+k_3).$$

A keresett közelítő megoldás pedig

$$\bar{y} = y_0+k.$$

Gyakorló feladatok

Határozzuk meg Runge módszerével az

$$y' = 3x+y^2$$

differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely eleget tesz az $y(0)=1$ kezdeti feltételnek. Mekkora y közelítő értéke az $x=0{,}1$ helyen?

Esetünkben $x_0=0$, $y_0=1$, $h=0{,}1$, $f(x, y)=3x+y^2$, $f_0=f(x_0, y_0)=1$,

$$k_1 = hf_0 = 0{,}1,$$

$$k_2 = hf(x_0+h, y_0+k_1) = 0{,}1[3(0+0{,}1)+(1+0{,}1)^2] = 0{,}151,$$

$$k_3 = hf(x_0+h, y_0+k_2) = 0{,}1[3(0+0{,}1)+(1+0{,}151)^2] = 0{,}162\,48,$$

$$k_4 = hf\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}1[3(0+0{,}05)+(1+0{,}05)^2] = 0{,}125\,25.$$

Felhasználva ezeket az értékeket

$$k \approx \frac{1}{6}(k_1+4k_4+k_3) = \frac{1}{6}(0{,}1+4\cdot 0{,}125\,25+0{,}162\,48) =$$

$$= 0{,}127\,25,$$

és így

$$\bar{y} = y_0+k \approx 1{,}127\,25.$$

(Vö. a Picard- és Taylor-féle módszerrel kapott eredménnyel!)

4. RUNGE—KUTTA MÓDSZERE

Az előző fejezetben ismertetett Runge-féle közelítést többféleképpen módosították. Kutta módosítása (az előző fejezet jelöléseivel) a következő:

$$K_1 = hf_0,$$

$$K_2 = hf\left(x_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = hf\left(x_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = hf(x_0+h,\, y_0+K_3),$$

és ekkor

$$k \approx \frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4).$$

A keresett megoldás pedig

$$\bar{y} = y_0+k.$$

A közelítés hibája h^5 nagyságrendű, tehát egy nagyságrenddel jobb, mint a Runge-féle módszeré.

Gyakorló feladatok

Határozzuk meg a Runge—Kutta-módszerrel az

$$y' = 3x+y^2$$

differenciálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, amely eleget tesz az $y(0)=1$ feltételnek. Mekkora y értéke az $x=0{,}1$ helyen?

Esetünkben $x_0=0$, $y_0=1$, $h=0{,}1$, $f(x, y)=3x+y^2$, $f_0=f(x_0, y_0)=1$,

$$K_1 = hf_0 = 0{,}1,$$

$$K_2 = hf\left(x_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{K_1}{2}\right) =$$

$$= 0{,}1[3(0+0{,}05)+(1+0{,}05)^2] = 0{,}125\,25,$$

$$K_3 = hf\left(x_0+\frac{h}{2},\, y_0+\frac{K_2}{2}\right) =$$

$$= 0{,}1[3(0+0{,}05)+(1+0{,}0626)^2] = 0{,}127\,91,$$

$$K_4 = hf(x_0+h,\, y_0+K_3) =$$

$$= 0{,}1[3(0+0{,}1)+(1+0{,}127\,91)^2] = 0{,}157\,24.$$

Ekkor

$$k = \frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) =$$

$$= \frac{1}{6}(0{,}1+0{,}250\,50+0{,}255\,82+0{,}157\,24) = 0{,}127\,26.$$

A keresett megoldás pedig

$$\bar{y} \approx y_0+k = 1{,}127\,26.$$

(Vö. az eddigi megoldásokkal!)

5. ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSA ÁLTALÁNOS HATVÁNYSOROK SEGÍTSÉGÉVEL

Ha az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet jobb oldalán álló függvény az

$$|x-x_0| < a \leqq \infty,$$

$$|y-y_0| < b \leqq \infty$$

tartományban folytonos és

$$|f(x, y)| \leqq K,$$

azaz korlátos, továbbá az $f(x, y)$ hatványsorba fejthető az

$$f(x, y) = \sum_{i, j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i (y-y_0)^j$$

alakban, akkor az adott differenciálegyenletnek az $y_0=y(x_0)$ kezdeti feltételt kielégítő $y=y(x)$ partikuláris megoldása az $x=x_0$ hely környezetében az

$$y(x) = y_0+\sum_{k=1}^{\infty} C_k(x-x_0)^k$$

hatványsor alakjában állítható elő. A hatványsor legalább az

$$|x-x_0| < \min\left(a, \frac{b}{K}\right)$$

intervallumban konvergens. A C_k együtthatókat a felírt megoldásnak a differenciálegyenletbe való behelyettesítése után kapott azonosság két oldalának összehasonlítása révén határozhatjuk meg.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg az

$$y' = y+x$$

differenciálegyenletnek az $y(0)=0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását hatványsor segítségével.

Az $f(x, y) = x+y$ függvény véges x és y értékekre korlátos.

Legyen a keresett megoldás

$$y(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

alakú. Ekkor

$$y'(x) = c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots .$$

$y(x)$ és $y'(x)$ hatványsorát az eredeti differenciálegyenletbe helyettesítve a

$$c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots \equiv$$

$$\equiv c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots+x$$

azonossághoz jutunk, és ez csak úgy állhat fenn, ha az egyenlő fokszámú tagok együtthatói az azonosság két oldalán megegyeznek, azaz

$$c_1 = c_0$$

$$2c_2 = c_1+1, \quad \text{ebből} \quad c_2 = \frac{c_0+1}{2},$$

$$3c_3 = c_2, \quad \text{ebből} \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0+1}{6} = \frac{c_0+1}{3!},$$

$$\vdots$$

$$nc_n = c_{n-1}, \quad \text{ebből} \quad c_n = \frac{c_{n-1}}{n} = \frac{c_0+1}{n!}.$$

A keresett megoldás tehát

$$y(x) = c_0+c_0x+\frac{c_0+1}{2!}x^2+\frac{c_0+1}{3!}x^3+\ldots+\frac{c_0+1}{n!}x^n+\ldots .$$

A kezdeti feltételek szerint ha $x=0$, akkor $y=0$, ebből következik, hogy

$$c_0 = 0,$$

és így a partikuláris megoldás

$$y_p(x) = \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots = e^x-x-1,$$

amint azt már láttuk (199. old.).

2. Határozzuk meg az

$$y' = \frac{2x-y}{1-x}$$

differenciálegyenlet megoldását hatványsor segítségével.

Az $f(x, y) = \dfrac{2x-y}{1-x}$ függvény az $x=1$ egyenes mentén nincs értelmezve, legyen tehát $x\neq 1$.

Tegyük fel, hogy az egyenlet megoldása

$$y(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

alakú. Ekkor

$$y'(x) = c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots .$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$(1-x)(c_1+2c_2x+3c_3x^2+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots) =$$

$$= 2x-(c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots).$$

A szorzást elvégezve és az egyenlő fokszámú tagok együtthatóit összehasonlítva

$$c_1 = -c_0,$$

$$2c_2 - c_1 = 2 - c_1, \quad \text{ebből} \quad c_2 = 1,$$

$$3c_3 - 2c_2 = -c_2, \quad \text{ebből} \quad c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$4c_4 - 3c_3 = -c_3, \quad \text{ebből} \quad c_4 = \frac{c_3}{2} = \frac{1}{6},$$

$$\vdots$$

$$nc_n - (n-1)c_{n-1} = -c_{n-1}, \quad \text{ebből} \quad c_n = \frac{n-2}{n} c_{n-1},$$

és így

$$c_n = \frac{n-2}{n} c_{n-1} = \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} c_{n-2} =$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} c_{n-3} = \ldots =$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)\ldots 2\cdot 1}{n(n-1)(n-2)\ldots 4\cdot 3} c_2 = \frac{2}{n(n-1)}, \quad \text{ha} \quad n \geqq 2.$$

Így a keresett hatványsor

$$y(x) = c_0 - c_0 x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{10} + \ldots + \frac{2}{n(n-1)} x^n + \ldots =$$

$$= c_0(1-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n-1)} x^n.$$

Nézzük meg, milyen x értékekre konvergens ez a sor. A Cauchy-féle hányadoskritériumot alkalmazva

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2x^{n+1}}{(n+1)n} \cdot \frac{n(n-1)}{2x^n}\right| =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)n} = |x|.$$

A sor tehát akkor konvergens, ha $|x| \leqq q < 1$.

Megjegyzés. Megemlítjük, hogy a differenciálegyenletnek a kezdeti feltételeket kielégítő pontos megoldása — ugyanis a differenciálegyenlet inhomogén lineáris egyenlet —

$$y = c(1-x) + 2(1-x)\ln(1-x) + 2x.$$

A figyelmes Olvasóra bízzuk, hogy az $\ln(1-x)$ hatványsora ismeretében a két megoldás azonosságát belássa.

II. MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A másodrendű differenciálegyenletek legáltalánosabb alakja

$$F(x, y, y', y'') = 0,$$

ahol F az x független változó és a (legalább) kétszer differenciálható y függvény és deriváltjainak valamilyen függvénye. Ha az egyenletből y'' kifejezhető, akkor a differenciálegyenlet felírható az

$$y'' = f(x, y, y')$$

explicit alakban is. Az általános másodrendű differenciálegyenletek megoldására általános módszer nem ismeretes. Bizonyos speciális alakú, ill. típusú másodrendű differenciálegyenletek megoldására azonban találtak megoldási módszereket; ezek közül mutatunk be néhányat a következő fejezetekben.

A. HIÁNYOS MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Hiányosnak nevezünk egy másodrendű differenciálegyenletet, ha az egyenletben szerepelhető x, y, y' közül egy vagy több hiányzik. y'' természetesen nem hiányozhat.

A hiányos másodrendű differenciálegyenletek közül azok oldhatók meg könnyen, amelyek megoldása például helyettesítéssel elsőrendű differenciálegyenletek megoldására vezethetők vissza. Ez nem mindig sikerül, például az $y''=f(x, y)$ alakú egyenletek (y' hiányzik) megoldása nem vezethető vissza helyettesítéssel egy vagy két elsőrendű differenciálegyenlet megoldására.

1. $y''=f(x)$ ALAKÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ebben a legegyszerűbb esetben a differenciálegyenletből y és y' is hiányzik. Azonnal látszik, hogy a differenciálegyenlet általános megoldása kétszeri integrálással kapható meg, először

$$y' = \int f(x)\,dx + c_1,$$

majd

$$y = \int \left[\int f(x)\,dx + c_1\right] dx + c_2 =$$

$$= \int \left(\int f(x)\,dx\right) dx + c_1 x + c_2.$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet

$$(1+\sin x)^2 y'' + \cos x = 0.$$

Az egyenletből y''-t kifejezve

$$y'' = -\frac{\cos x}{(\sin x+1)^2}.$$

Mind a két oldalon integrálva

$$y' = -\int (\cos x)(\sin x+1)^{-2}\,dx = \frac{1}{\sin x+1} + c_1.$$

Még egyszer integrálva

$$y = \int \frac{1}{\sin x+1}\,dx + c_1 x.$$

A jobb oldalon álló integrált a $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ helyettesítéssel számítjuk ki. Esetünkben

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Így

$$\int \frac{1}{\sin x+1}\,dx = \int \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}+1}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{(1+t)^2} =$$

$$= -\frac{2}{1+t} = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + c_2.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}} + c_1 x + c_2.$$

2. Oldjuk meg a szabadon eső test mozgását leíró

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

alakú differenciálegyenletet!

Mivel itt az $s(t)$ függvény második deriváltja állandó, kétszer integrálva először a

$$\frac{ds}{dt} = gt + c_1,$$

majd az

$$s = g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

egyenlethez jutunk, és ez a differenciálegyenlet általános megoldása. Az egyenletben szereplő két állandó az adott kezdeti feltételekből határozható meg.

Ha például a $t=0$ időpillanatban az addig tett út $s_0=0$, akkor (ezeket az adatokat a megoldásba helyettesítve)

$$0 = c_2,$$

és megoldásunk

$$s = \frac{gt^2}{2} + c_1 t$$

alakú.

Ha ezenkívül a $t=0$ időpillanatban a test kezdősebessége $v_0=0$, akkor $v=\frac{ds}{dt}$ miatt az első integrálás után kapott egyenletből

$$0=c_1,$$

és így a megoldás

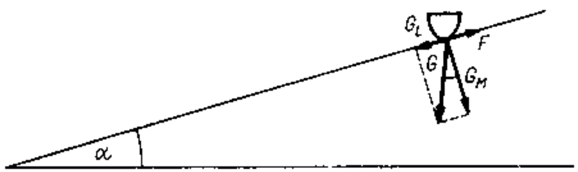
$$s=\frac{gt^2}{2}.$$

Ha a $t=0$ időpillanatban a már megtett út s_0, a kezdősebesség v_0, a differenciálegyenlet általános megoldása

$$s=\frac{gt^2}{2}+v_0t+s_0.$$

3. Amikor a hajótestet vízre bocsátják, a hajótest lejtőn csúszik a vízbe. A rögzítőkötelek elvágásától számítva mennyi idő alatt ér a vízbe a hajó, ha a lejtő hossza $l=50$ m, a lejtő hajlásszöge $\alpha=25°$, a súrlódási együttható pedig $k=0{,}4$.

Ismeretes, hogy a hajó erő hatására mozdul meg, és gyorsuló mozgással csúszik a lejtőn. A mozgatóerő a G súlyerő lejtő irányú $G_L=G\sin\alpha$ komponensének és a F súrlódási erőnek a különbsége (17. ábra). A súrló-



17. ábra

dási erő pedig a G súlyerőnek a lejtőre merőleges $G_M=G\cos\alpha$ komponensével (nyomóerővel) arányos. Így a hajót mozgató R erő

$$R=G\sin\alpha-kG\cos\alpha.$$

Mivel $R=ma=m\frac{d^2s}{dt^2}$ és $G=mg$, ezért a mozgást leíró differenciálegyenlet

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg(\sin\alpha-k\cos\alpha),$$

ill.

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha).$$

Mind a két oldalon t szerint integrálva

$$\frac{ds}{dt}=g(\sin\alpha-k\cos\alpha)t+c_1.$$

Még egyszer integrálva kapjuk az általános megoldást:

$$s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2+c_1t+c_2.$$

Az integrációs állandókat a kezdeti feltételekből határozzuk meg. Ha $t=0$, akkor $s=0$ és $v=\frac{ds}{dt}=0$. Ebben az esetben az első integrálás után kapott egyenletből

$$0=c_1,$$

a második integrálás után kapott egyenletből

$$0=c_2.$$

A feladat kezdeti feltételeit kielégítő megoldás tehát

$$s=\frac{g}{2}(\sin\alpha-k\cos\alpha)t^2.$$

Ha $s=l=50$ m, $\alpha=25°$ és $k=0{,}4$, akkor ($g=9{,}81$ m/s²)

$$50\text{ m}=\frac{9{,}81\text{ m}}{2\text{ s}^2}(\sin 25°-0{,}4\cos 25°)t^2.$$

Ebből

$$t\approx\sqrt{\frac{100}{9{,}81(0{,}4226-0{,}3625)}}=\sqrt{134}=11{,}5\text{ s},$$

vagyis a hajó 11,5 másodperc alatt csúszik a vízbe.

2. $F(x, y', y'')=0$ ALAKÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ha a másodrendű differenciálegyenletből y hiányzik, akkor a másodrendű differenciálegyenlet megoldása könnyen visszavezethető két elsőrendű differenciálegyenlet megoldására az

$$y'=p(x)$$

helyettesítés segítségével. Ekkor ugyanis $y''=p'(x)$, és eredeti egyenletünk

$$F(x, p, p') = 0$$

alakú lesz, és ebből p meghatározható. p ismeretében pedig a helyettesítést kifejező egyenletből y számítható ki.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$2y''-y'^2+4 = 0.$$

Mivel az egyenletből y hiányzik, érdemes az $y'=p(x)$ helyettesítést alkalmazni. Ekkor $y''=p'(x)$, és egyenletünk

$$2p'-p^2+4 = 0$$

alakú lesz. Megkíséreljük a kapott elsőrendű, nem lineáris differenciálegyenlet változóit szétválasztani:

$$2p' = p^2-4,$$

$$2\frac{dp}{p^2-4} = dx.$$

A szétválasztás sikerült, mind a két oldalon integrálunk. Mivel

$$2\int\frac{dp}{p^2-4} = 2\int\left(\frac{-\frac{1}{4}}{p+2}+\frac{\frac{1}{4}}{p-2}\right)dp = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p-2}{p+2}\right|,$$

ezért

$$\ln\left|\frac{p-2}{p+2}\right| = 2x+c.$$

Ebből

$$\frac{p-2}{p+2} = c_1e^{2x},$$

ill.

$$p = \frac{2(1+c_1e^{2x})}{1-c_1e^{2x}} = 2\left(1+\frac{2c_1e^{2x}}{1-c_1e^{2x}}\right).$$

p helyére visszaírva az y'-t, még az

$$y' = 2-\frac{-2\cdot 2c_1e^{2x}}{1-c_1e^{2x}}$$

elsőrendű egyenletet kell megoldanunk. Integrálva

$$y = 2x-2\ln|1-c_1e^{2x}|+c_2,$$

és ezzel megkaptuk az eredeti egyenletünk általános megoldását.

2. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$xy''-y' = x^3.$$

A másodrendű differenciálegyenletből y hiányzik, ezért az $y'=p(x)$ helyettesítés célszerű. Most $y''=p'(x)$ és így egyenletünk a helyettesítés után

$$xp'-p = x^3$$

alakú. Elsőrendű, lineáris, inhomogén, függvényegyütthatós egyenletről van szó. A homogén egyenlet

$$xP'-P = 0$$

alakú, és ennek megoldása

$$P = e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|+c} = Cx.$$

Az inhomogén egyenlet egy p_0 partikuláris megoldását

$$p_0 = c(x)x$$

alakban az állandó variálásának módszerével keressük meg. Mivel

$$p_0' = c'(x)x+c(x),$$

ezért a differenciálegyenletbe helyettesítve

$$c'(x)x^2+c(x)x-c(x)x = x^3.$$

Ebből

$$c'(x) = x,$$

ill.

$$c(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Az elsőrendű inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$p_0 = \frac{x^2}{2}\cdot x = \frac{x^3}{2}$$

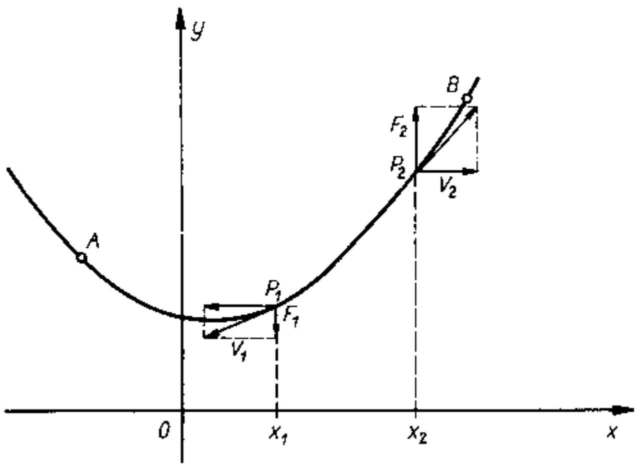
alakú, az általános megoldása pedig

$$p = \frac{x^3}{2}+Cx.$$

Mivel pedig $p=y'$, ezért

$$y=\int\left(\frac{x^3}{2}+Cx\right)dx=\frac{x^4}{8}+\frac{Cx^2}{2}+c_1.$$

3. Függesszünk fel egy homogén, állandó keresztmetszetű, hajlékony és nyúlhatatlannak feltételezett kötelet az A és B pontokban, amelyet csak a saját súlya terhel. Határozzuk meg azt az $y(x)$ függvényt, amely a kötél egyensúlyi alakját meghatározza (18. ábra).



18. ábra

Tekintsük a kötélnek az x_1 és x_2 tetszőleges abszcisszájú P_1 és P_2 pontja közötti darabját. A P_1, ill. P_2 pontokban az érintőirányú T_1 és T_2 erő hat. Ha ezeket az erőket egy-egy vízszintes és függőleges összetevőre bontjuk, akkor a kötél egyensúlyának a feltétele

a vízszintes erőkre: $V_2-V_1=0$, azaz $V_1=V_2=$állandó,

a függőleges erőkre: $F_2-F_1=\gamma L$,

ahol γ a kötél fajsúlyát, L a tekintetbe vett köteldarab ívhosszát jelenti, tehát

$$L=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Így

$$F_2-F_1=\gamma\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Ha $P_2\to P_1$, akkor $\dfrac{F_2-F_1}{x_2-x_1}\to\dfrac{dF}{dx}$, és így $\dfrac{dF}{dx}=\gamma\sqrt{1+y'^2}$.

Mivel T érintőirányú, ezért

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=\frac{F}{V},$$

amiből differenciálással (V állandó)

$$y''=\frac{1}{V}\frac{dF}{dx}.$$

A jobb oldalba helyettesítve az előbb kapott kifejezést

$$y''=\frac{1}{V}\gamma\sqrt{1+y'^2},$$

és ezzel megkaptuk a kötél egyensúlyi alakjának, az ún. kötélgörbének a differenciálegyenletét.

Olyan hiányos másodrendű differenciálegyenletet kaptunk, amelyből y hiányzik. Alkalmazzuk tehát az $y'=p(x)$ helyettesítést, amikor is $y''=p'(x)$, és ekkor differenciálegyenletünk

$$p'=\frac{\gamma}{V}\sqrt{1+p^2}$$

alakú. Az egyenlet változói szétválaszthatók.

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\gamma}{V}dx.$$

Mind a két oldalon integrálva

$$\operatorname{arsh}p=\frac{\gamma}{V}(x+C_1),$$

és ebből

$$p=\operatorname{sh}\frac{\gamma}{V}(x+C_1).$$

Az alkalmazott helyettesítés alapján tehát

$$y'=\operatorname{sh}\frac{\gamma}{V}(x+C_1),$$

és ezt integrálva kapjuk meg az általános megoldást:

$$y=\frac{V}{\gamma}\operatorname{ch}\frac{\gamma}{V}(x+C_1)+C_2.$$

Látható, hogy a kötél egyensúlyi alakját egy koszinusz hiperbolikus függvény írja le. Ezért szokás az $y = \operatorname{ch} x$ függvény görbéjét láncgörbének vagy kötélgörbének is nevezni.

Az általános megoldásban szereplő C_1, C_2 integrációs állandókat és a V vízszintes irányú erőkomponenst abból a feltételből lehet meghatározni, hogy az adott hosszúságú kötéldarab az adott A és B pontokon halad át.

Ha például egy s hosszúságú kötelet helyezünk el az $A(x_a; y_a)$ és $B(x_b; y_b)$ pontok között, akkor

$$y_a = \frac{V}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{V}(x_a + C_1) + C_2,$$

$$y_b = \frac{V}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{V}(x_b + C_1) + C_2,$$

$$s = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1+y'^2}\, dx = \frac{V}{\gamma} \int_{x_a}^{x_b} y''\, dx = \frac{V}{\gamma}(y'(x_b) - y'(x_a)) =$$

$$= \frac{V}{\gamma}\left[\operatorname{sh} \frac{\gamma}{V}(x_b + C_1) - \operatorname{sh} \frac{\gamma}{V}(x_a + C_1)\right],$$

és ebből a három egyenletből az ismeretlen C_1, C_2 és V elvben kiszámítható.

3. $F(y, y', y'') = 0$ ALAKÚ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ha a másodrendű differenciálegyenletből a független változó, az x hiányzik, akkor az $y' = p(y)$ helyettesítéssel a másodrendű differenciálegyenlet megoldása két elsőrendű differenciálegyenlet megoldására vezethető vissza. Most p az y-tól függ, és ezért

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p.$$

Eredeti másodrendű egyenletünk helyett tehát az

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy} p\right) = 0,$$

$$y' = p(y)$$

elsőrendű differenciálegyenleteket kell megoldanunk.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$yy'' = 2y'^2 - 2y'.$$

Mivel a másodrendű differenciálegyenletből a független változó hiányzik, azért az

$$y' = p(y),\ y'' = \frac{dp}{dy} p$$

helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$y \frac{dp}{dy} p = 2p^2 - 2p.$$

Azonnal látszik, hogy $p = 0$ megoldása ennek az egyenletnek, így

$$y' = 0, \quad \text{amiből} \quad y = C,$$

és ez megoldása az eredeti egyenletünknek. Ha $p \neq 0$, akkor egyszerűsíthetünk p-vel:

$$\frac{dp}{dy} y = 2(p-1).$$

A változók szétválaszthatók:

$$\frac{dp}{p-1} = 2 \frac{dy}{y},$$

és integrálás után

$$\ln |p-1| = 2 \ln |y| + 2 \ln c,$$

és ebből

$$p = c^2 y^2 + 1.$$

Mivel $p = y'$, ezért a megoldandó második differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{dx} = c^2 y^2 + 1$$

alakú. A változókat ismét szétválasztva

$$\frac{dy}{(cy)^2 + 1} = dx,$$

integrálva

$$\frac{1}{c}\operatorname{arctg} cy = x + c_1.$$

Ebből

$$cy = \operatorname{tg}(cx + c_2),$$

ill.

$$y = \frac{1}{c}\operatorname{tg}(cx + c_2).$$

2. Keressük meg az

$$yy'' + y'^2 = y^2$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

A másodrendű differenciálegyenletből hiányzik az x, ezért célszerű lesz az

$$y' = p(y),\ y'' = \frac{dp}{dy}p$$

helyettesítés. Ezzel

$$y\frac{dp}{dy}p + p^2 = y^2.$$

A kapott egyenlet elsőrendű, de nem lineáris inhomogén differenciálegyenlet. Könnyű meggyőződni arról, hogy változói nem választhatók szét. Ha y^2-tel elosztjuk az egyenlet mind a két oldalát, a

$$\frac{dp}{dy}\cdot\frac{p}{y} + \left(\frac{p}{y}\right)^2 = 1$$

egyenlethez jutunk, és erről már látható, hogy homogén fokszámú egyenlet. Újabb helyettesítésre van szükség. Legyen

$$\frac{p}{y} = t, \quad \text{akkor} \quad \frac{dp}{dy} = t + y\frac{dt}{dy}.$$

Ezt felhasználva

$$\left(t + y\frac{dt}{dy}\right)t = 1 - t^2.$$

Rendezés után a változókat szétválasztva

$$\frac{t\,dt}{1-2t^2} = \frac{dy}{y},$$

integrálva

$$-\frac{1}{4}\ln|1-2t^2| = \ln|y| - \ln k,$$

$$c = y^4(1-2t^2).$$

Visszahelyettesítve a $t = \dfrac{p}{y}$ értéket

$$c = y^4 - 2p^2y^2.$$

Mivel $y' = p$ ezért

$$y' = \pm\sqrt{\frac{y^4-c}{2y^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{y^4-c}}{y}.$$

A változókat szétválasztva

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{y^4-c}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{2}}.$$

A bal oldalon álló függvény integrálját külön számítjuk ki:

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{y^4-c}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{\left(\frac{y^2}{\sqrt{c}}\right)^2-1}} = \frac{1}{2}\int\frac{\frac{2y}{\sqrt{c}}}{\sqrt{\left(\frac{y^2}{\sqrt{c}}\right)^2-1}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arsh}\frac{y^2}{\sqrt{c}}.$$

Ezt felhasználva

$$\operatorname{arsh}\frac{y^2}{\sqrt{c}} = \pm\sqrt{2}x + c_1,$$

ill.

$$\frac{y^2}{\sqrt{c}} = \operatorname{sh}(\pm\sqrt{2}x + c_1).$$

Ebből pedig

$$y^2 = K\operatorname{sh}(\pm\sqrt{2}x + c_1)$$

a differenciálegyenlet általános megoldása.

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y'' = y'^3 + y'.$$

Az adott másodrendű differenciálegyenletből mind a független változó, mind az y hiányzik, tehát kétféle célszerű helyettesítést is ismerünk. Oldjuk meg az egyenletet mind a kétféle módon.

Legyen először

$$y' = p(y), \quad \text{ekkor} \quad y'' = \frac{dp}{dy} p.$$

Ezzel a helyettesítéssel a

$$\frac{dp}{dy} p = p^3 + p$$

elsőrendű egyenlethez jutunk. Azonnal látszik, hogy $p=0$, ill. az ebből kapható $y'=0$, $y=c$ megoldása az egyenletnek. Ha $p \neq 0$, akkor egyszerűsítve p-vel

$$\frac{dp}{dy} = p^2 + 1,$$

és ebből a változókat szétválasztva

$$\frac{dp}{p^2+1} = dy,$$

ill. integrálva

$$\operatorname{arc\,tg} p = y + c,$$

és ebből

$$p = \operatorname{tg}(y+c).$$

Mivel $p = y'$, ezért

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(y+c).$$

A változókat ismét szétválasztva

$$\operatorname{ctg}(y+c) \cdot dy = dx,$$

majd integrálva

$$\int \frac{\cos(y+c)}{\sin(y+c)} dy = x + c_1,$$

$$\ln|\sin(y+c)| = x + c_1.$$

Mind a két oldalon e alapra emelve

$$\sin(y+c) = Ce^x,$$

$$y + c = \arcsin Ce^x,$$

$$y = \arcsin Ce^x + C_1$$

a differenciálegyenlet általános megoldása.

Legyen másodszor

$$y' = p(x), \quad \text{ekkor} \quad y'' = p'(x).$$

Ezzel a helyettesítéssel eredeti egyenletünk

$$p' = p^3 + p$$

alakú. A változók szétválaszthatók, ugyanis

$$\frac{dp}{p^3+p} = dx.$$

A bal oldalon álló integrált külön számítjuk ki.

$$\int \frac{dp}{p^3+p} = \int \frac{dp}{p(p^2+1)} = \int \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \right) dp =$$

$$= \ln|p| - \frac{1}{2} \ln(p^2+1) = \ln \left| \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \right|.$$

Ezt felhasználva

$$\ln \left| \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \right| = x + c.$$

Fejezzük ki az egyenletből p-t.

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = e^{x+c},$$

$$\frac{p^2}{p^2+1} = Ce^{2x},$$

$$p^2 = \frac{Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}},$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}}.$$

Tekintsük először a pozitív előjelet. Mivel $y'=p$, ezért

$$y = \int \sqrt{\frac{Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}}\,dx = \int \frac{\sqrt{C}e^x}{\sqrt{1-Ce^{2x}}}\,dx =$$
$$= \int \frac{ke^x}{\sqrt{1-(ke^x)^2}}\,dx,$$

ahol $\sqrt{C}=k$. Azonnal látszik, hogy ez $ke^x=t$ helyettesítéssel alapintegrálra vezet, mégpedig

$$y = \arcsin ke^x + c_1.$$

Ha p negatív, akkor hasonlóan eljárva a megoldás

$$y = \arccos k_1 e^x + c_2,$$

de ez az $\arccos x = \arcsin x - \frac{\pi}{2}$ összefüggés alapján átírható, és így az általános megoldás valóban

$$y = \arcsin Ae^x + B$$

alakú, amint azt az első megoldásban is láttuk.

B. MÁSODRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Az

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

másodrendű differenciálegyenletet akkor nevezzük lineárisnak, ha benne y és deriváltjai *legfeljebb az első* hatványon fordulnak elő, és szorzatuk nem szerepel.

A másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y = f(x),$$

ahol az $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ és $f(x)$ ugyanabban az intervallumban értelmezett függvények.

Ha az $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ függvények állandók, a differenciálegyenletet *állandó együtthatós* differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha $f(x)\equiv 0$, az egyenlet *homogén,* ellenkező esetben *inhomogén.*

A másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásával kapcsolatban két tételt említünk meg.

1. Ha egy *homogén* másodrendű lineáris differenciálegyenlet két lineáris független partikuláris megoldása y_1 és y_2, akkor az egyenlet általános megoldása

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Ez azt jelenti, hogy az általános megoldás felírásához két lineárisan független partikuláris megoldás ismerete elegendő.

Az y_1 és y_2 függvényeket akkor nevezzük lineáris függetleneknek, ha a

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $c_1=c_2=0$. Két lineárisan független függvény hányadosa nem lehet állandó.

2. Ha egy *inhomogén* másodrendű lineáris differenciálegyenlet homogén részének általános megoldása Y és az inhomogén egyenletnek egy partikuláris megoldása y_0, akkor az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0,$$

ill.

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_0.$$

Ez azt jelenti, hogy az inhomogén egyenlet általános megoldásának felírásához a homogén egyenlet két lineárisan független partikuláris megoldása és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása elegendő. Hogy ezeket hogyan határozzuk meg, az az egyenletben szereplő függvényektől is függ. A legegyszerűbb az eljárás az állandó együtthatós differenciálegyenletek esetében, ezért a tárgyalást ezekkel kezdjük.

1. ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS, HOMOGÉN MÁSODRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Az állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja

$$ay''+by'+cy = 0.$$

Azonnal látszik, hogy az $y=0$ függvény megoldása a differenciálegyenletnek, ez az egyenlet triviális megoldása.

A differenciálegyenlet hiányos másodfokú differenciálegyenletnek is felfogható, de az ezzel a módszerrel történő megoldás elég hosszadalmas. Sokkal egyszerűbb a következő:

A differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az

$$y = e^{\lambda x}$$

alakban kereshetjük (ahol λ egyelőre ismeretlen), hiszen az exponenciális függvény az egyetlen, amely deriváltjaival arányos. A deriváltak

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x},$$

és ezeket a differenciálegyenletbe helyettesítve

$$e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0,$$

és ez csak úgy állhat fenn, ha

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Ez a másodfokú egyenlet a differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenlete,* amelyből λ kiszámítható. A karakterisztikus egyenlet diszkriminánsától függően három esetet különböztetünk meg.

1. eset: ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa *pozitív,* akkor két különböző valós gyöke van az egyenletnek (legyenek ezek λ_1 és λ_2), tehát a differenciálegyenlet két lineárisan független megoldása felírható az

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x},$$

alakban, és a differenciálegyenlet általános megoldása ekkor

$$Y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

y_1 és y_2 valóban lineárisan függetlenek, mert

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{állandó, mert } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

2. eset: ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa *zérus,* akkor az egyenletnek egy kétszeres (két egyenlő), valós gyöke van, legyen ez λ, és most csak egy partikuláris megoldás írható fel, mégpedig

$$y_1 = e^{\lambda x}.$$

A differenciálegyenletnek egy másik, az y_1-től lineárisan független megoldása például az állandó variálásának módszerével kereshető meg, és könnyű belátni, hogy az

$$y_2 = xe^{\lambda x}$$

alakú. A differenciálegyenlet általános megoldása így

$$Y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x).$$

y_1 és y_2 valóban lineárisan függetlenek, mert

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda x}}{xe^{\lambda x}} = \frac{1}{x} \neq \text{állandó.}$$

3. eset: ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa *negatív,* akkor az egyenletnek két (konjugált) komplex gyöke van, legyenek ezek $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Most két lineárisan független partikuláris megoldást írhatunk fel:

$$y_1 = e^{\alpha + \beta i}, \quad y_2 = e^{\alpha - \beta i}.$$

Ha felhasználjuk a komplex számok exponenciális és trigonometrikus alakja közötti összefüggést megadó Euler-féle formulát [L. Euler (1707—1783) svájci matematikus], az általános megoldás az

$$Y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

alakban írható fel.

Figyeljük meg, hogy az állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet megoldásának felírásához tulajdonképpen csak egy másodfokú egyenletet kell megoldanunk (integrálni nem is kell!).

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y''-y'-6y=0.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2-\lambda-6=0,$$

ennek gyökei

$$\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}3\\-2,\end{cases}$$

és így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$Y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}.$$

2. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''-8y'+16y=0.$$

A karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^2-8\lambda+16=0,$$

ennek két egyenlő gyöke van, hiszen $(\lambda-4)^2=0$. Így az általános megoldás

$$Y=c_1e^{4x}+c_2xe^{4x}.$$

3. Írjuk fel a

$$4y''+4y'+37y=0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

A karakterisztikus egyenlet

$$4\lambda^2+4\lambda+37=0,$$

ennek gyökei

$$\lambda_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-592}}{8}=-\frac{1}{2}\pm3i.$$

Így a differenciálegyenlet általános megoldása

$$Y=e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x).$$

4. Egy pont akkor végez csillapítatlan harmonikus rezgőmozgást, ha a gyorsulása arányos az elmozdulásával, de azzal ellentétes irányú. Ilyen mozgást végeznek jó közelítéssel például a megpendített hangvilla pontjai. Határozzuk meg az elmozdulást, mint az idő függvényét!

A csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete

$$\ddot{y}=-\omega^2y,$$

ahol most ponttal jelöljük az idő szerinti differenciálást. Az egyenlet állandó együtthatós, homogén, lineáris másodrendű differenciálegyenlet. A karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2+\omega^2=0,$$

ennek gyökei

$$\lambda_{1,2}=\pm\omega i,$$

ezért a differenciálegyenlet két partikuláris megoldása

$$y_1=\cos\omega t;\quad y_2=\sin\omega t.$$

Ezek lineárisan függetlenek (hányadosuk nem állandó), ezért a differenciálegyenlet általános megoldása

$$Y=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t.$$

Ha figyelembe vesszük a kezdeti feltételeket, az integrációs konstansok kiszámíthatók. Ha a $t=0$ (kezdeti) időpillanatban a pont kitérése $y(0)=0$, és a sebessége $y'(0)=v_0$, akkor

$$Y(0)=0=c_1,$$

$$Y'(0)=v_0=c_2\omega.$$

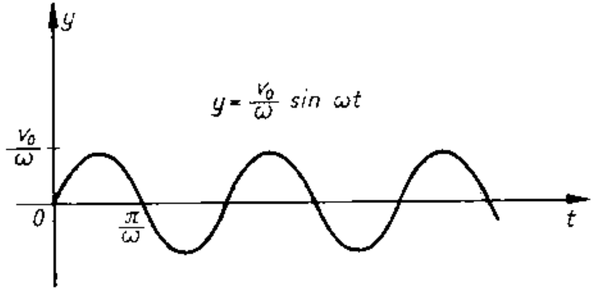
A második egyenletből

$$c_2=\frac{v_0}{\omega},$$

és így a kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldás

$$Y=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

(19. ábra).



19. ábra

5. Csillapított rezgőmozgást végez a pont akkor, amikor a harmonikus rezgését valami, például a súrlódás, akadályozza, csillapítja. Ilyen esetben a pont kitérése arányos a gyorsulásával és a sebességével, de mind a kettővel ellenkező irányú. A mozgást leíró differenciálegyenlet (m a mozgó test tömege, s a csillapítási tényező)

$$m\ddot{y} = -\omega^2 my - 2s\dot{y}.$$

Ha m-mel végigosztunk és az $\frac{s}{m} = k$ jelölést bevezetjük, akkor

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2k\dot{y},$$

ahol $\omega > 0$ állandó és k pozitív állandó. Írjuk fel a rezgő pont kitérését mint az idő függvényét!

A felírt

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

differenciálegyenlet másodrendű, állandó együtthatós, homogén egyenlet. Karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0,$$

és ennek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4\omega^2}}{2} = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2}.$$

A k és ω állandók nagyságától függően 3 esetet lehet megkülönböztetni.

1. eset: legyen $k > \omega$, vagyis $k^2 - \omega^2 > 0$. Ez azt jelenti, hogy a súrlódás a rezgést kiváltó erőhöz képest nagy. Ekkor a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós gyöke van, és mind a kettő negatív. A differenciálegyenlet általános megoldása ekkor

$$Y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Legyenek a kezdeti feltételek

$$Y(0) = 0, \quad \dot{Y}(0) = v_0 > 0.$$

Ekkor

$$0 = c_1 + c_2,$$

$$v_0 = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2.$$

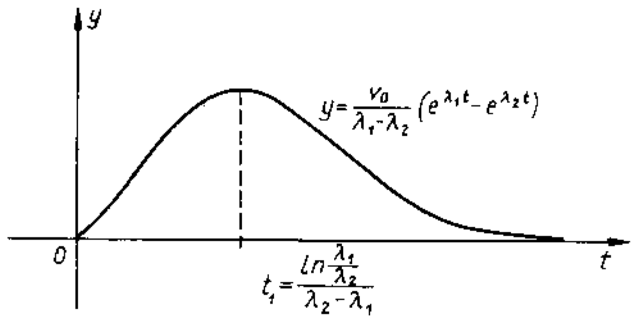
Az egyenletrendszert megoldva

$$c_1 = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{v_0}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

és így a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás

$$Y = \frac{v_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}).$$

Mivel $\lambda_1 > \lambda_2$, ezért $Y \geqq 0$. A $t = 0$ időpillanatban $Y = 0$, majd a t_1 időpillanatig növekszik, itt eléri maximumát, majd t további növekedésével (exponenciálisan) a zérushoz tart. A rezgés aperiodikus. Ezt a rezgést



20. ábra

túlcsillapított rezgésnek szokás nevezni. Így mozog például a nagy súrlódású folyadékban kitérített inga, amely a másik oldalra már nem tér ki. A kitérés grafikonját a 20. ábrán rajzoltuk meg. Függvényvizsgálatot végezve könnyen be lehet látni, hogy a rezgés maximális kitérése a

$$t_1 = \frac{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

helyen van. Figyeljük meg, hogy t_1 pozitív. Ugyanis λ_1 és λ_2 negatív és $\lambda_1 > \lambda_2$, így hányadosuk pozitív, de 1-nél kisebb, ezért ennek logaritmusa negatív. Ha pedig ezt a negatív $\lambda_2 - \lambda_1$ különbséggel osztjuk, pozitív számot kapunk.

2. eset: ha $k = \omega$, azaz $k^2 - \omega^2 = 0$, akkor a karakterisztikus egyenletnek két egyenlő gyöke van, $\lambda_1 = \lambda_2 = -k$, és a differenciálegyenlet általános megoldása

$$Y = c_1 e^{-kt} + c_2 t e^{-kt}.$$

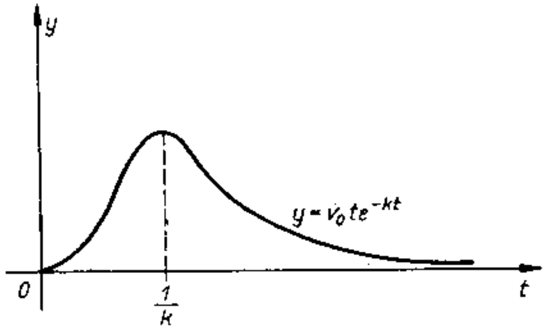
Ha figyelembe vesszük az $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = v_0 > 0$ kezdeti feltételeket, akkor

$$c_1 = 0, \quad c_2 = v_0,$$

és a megoldás

$$Y = v_0 t e^{-kt}.$$

A kitérés ebben az esetben is mindig pozitív és a kezdeti emelkedés után monoton csökken és 0-hoz tart. A rezgés most is aperiodikus (aperiodikus határállapot). Könnyű belátni, hogy a maximális kitérést a pont a $t = \dfrac{1}{k}$ időpillanatban éri el (21. ábra).



21. ábra

3. eset: legyen most $k < \omega$, azaz $k^2 - \omega^2 < 0$. Ekkor a karakterisztikus egyenlet gyökei komplexek, mégpedig

$$\lambda_{1,2} = -k \pm i\sqrt{\omega^2 - k^2}.$$

A megoldás most

$$Y = e^{-kt}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t\right).$$

Ismét az $Y(0) = 0$, $\dot{Y}(0) = v_0 > 0$ kezdeti feltételeket akarjuk érvényesíteni. Előbb kiszámítjuk az Y deriváltat:

$$\dot{Y} = -ke^{-kt}\left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t\right) +$$
$$+ e^{-kt}\left(-c_1 \sin\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t + c_2 \cos\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t\right)\cdot\left(\sqrt{\omega^2 - k^2}\right).$$

A kezdeti feltételeket felhasználva

$$0 = c_1,$$
$$v_0 = c_2\sqrt{\omega^2 - k^2} - kc_1.$$

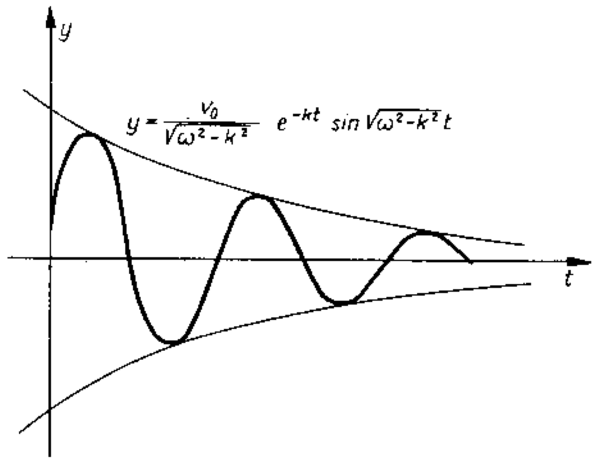
A két egyenletből az integrációs állandók

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}},$$

és ezekkel a megoldás

$$Y = \frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} e^{-kt} \sin\sqrt{\omega^2 - k^2}\,t.$$

A megoldásból leolvasható, hogy a kitérés periodikus függvénye az időnek, amplitúdója azonban nem állandó (mint a harmonikus rezgőmozgásnál), hanem t növekedtével gyorsan (exponenciálisan) csökken (22. ábra). Így mutatkozik a súrlódás fékező, csillapító hatása.



22. ábra

2. ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS, INHOMOGÉN MÁSODRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. A PRÓBAFÜGGVÉNY MÓDSZERE

Az

$$ay''+by'+cy = f(x)$$

inhomogén egyenlethez tartozó

$$aY''+bY'+cY = 0$$

homogén (csonkított) egyenlet általános megoldásának megkeresését az előző fejezetben már tárgyaltuk. Hátra van még az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának a meghatározása. Ez nagyon könnyű akkor, ha az $f(x)$ zavaró függvény speciális alakú, mégpedig

polinom,

exponenciális függvény,

$\sin(\alpha x+\beta)$, $\cos(\alpha x+\beta)$ függvény,

vagy ezek összege, szorzata, összegének szorzata, szorzatának összege.

(Ha a zavaró függvény sh x, ill. ch x, akkor azt exponenciális alakra írjuk át.) Ugyanis ekkor az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását ugyanolyan típusú függvénynek tételezzük fel, mint amilyen a zavaró függvény, csak az együtthatókat tekintjük ismeretleneknek *(próbafüggvény)*. A feltételezett függvényt és deriváltjait a differenciálegyenletbe helyettesítve azonosságot kapunk, amelyből az ismeretlen együtthatók kiszámíthatók. Most is ügyelni kell arra (l. az elsőrendű, hasonló differenciálegyenleteket), hogy például polinom zavaró függvény esetében a próbafüggvénynek tartalmaznia kell a polinom legnagyobb kitevőjű hatványánál valamennyi alacsonyabb kitevőjű hatványát akkor is, ha ezek valamelyike a zavaró függvényből hiányozna. Hasonlóképpen, ha a zavaró függvény csak $\sin(\alpha x+\beta)$ vagy csak $\cos(\alpha x+\beta)$, akkor is a próbafüggvény $A\sin(\alpha x+\beta)+B\cos(\alpha x+\beta)$ kell hogy legyen.

Külön kell itt is megemlíteni a *rezonancia* esetét. Ha a homogén egyenlet általános megoldásának valamely tagja (együtthatótól eltekintve) megegyezik a zavaró függvénnyel (vagy valamely tagjával), akkor rezonanciáról beszélünk. Be lehet látni (az elsőrendű egyenleteknél alkalmazott eljáráshoz hasonlóan), hogy ebben az esetben is a zavaró függvény alapján felírt próbafüggvényt vagy annak valamely tagját még meg kell szorozni x-szel. Ha az így kapott próbafüggvény megegyezik a homogén egyenlet megoldásának másik tagjával, azaz *kétszeres rezonancia* van (ez csak akkor léphet fel, ha a karakterisztikus egyenletnek két egyenlő gyöke van), akkor még egyszer meg kell szorozni x-szel a próbafüggvényt.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y''+5y'+4y = 3-2x-x^2.$$

Az

$$Y''+5Y'+4Y = 0$$

homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2+5\lambda+4 = 0.$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$, így a homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = c_1e^{-4x}+c_2e^{-x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kereshetjük a próbafüggvény módszerével az

$$y_0 = Ax^2+Bx+C$$

alakban, ahol A, B és C ismeretlen együtthatók. Ekkor

$$y_0' = 2Ax+B,$$

$$y_0'' = 2A.$$

Ezeket az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve a

$$2A+5(2Ax+B)+4(Ax^2+Bx+C) \equiv 3-2x-x^2$$

azonosságot kapjuk, ami csak úgy állhat fenn, ha

$$4A = -1,$$

$$10A+4B = -2,$$

$$2A+5B+4C = 3.$$

Az egyenletekből

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = \frac{23}{32}.$$

Így a partikuláris megoldás

$$y_0 = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{23}{32},$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0 = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-x} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{23}{32}.$$

2. Határozzuk meg az

$$y'' - 3y' + 2y = e^x + 2e^{3x}$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

Az

$$Y'' - 3Y' + 2Y = 0$$

homogén rész karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy y_0 partikuláris megoldása kereshető a próbafüggvény módszerével, de vegyük észre, hogy rezonancia van, mert a megoldás első és a zavaró függvény első tagja (együtthatótól eltekintve) azonos! Így a próbafüggvény

$$2\cdot|\, y_0 = Axe^x + Be^{3x}$$

alakú lesz. Most

$$-3\cdot|\, y_0' = Ae^x + Axe^x + 3Be^{3x},$$

$$1\cdot|\, y_0'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x + 9Be^{3x}.$$

A visszahelyettesítés érdekében szorozzuk meg az egyenleteket rendre 2-vel, -3-mal és 1-gyel (ezt az egyenletek bal oldalán jeleztük), majd adjuk össze őket. Ekkor

$$-Ae^x + 2Be^{3x} \equiv e^x + 2e^{3x},$$

és ebből

$$A = -1, \quad B = 1.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása tehát

$$y_0 = -xe^x + e^{3x},$$

általános megoldása pedig

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - xe^x + e^{3x} = (C_1 - x)e^x + C_2 e^{2x} + e^{3x}.$$

3. Megoldandó a következő differenciálegyenlet:

$$y'' - 6y' + 13y = x + \sin 3x.$$

A homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,$$

a gyökök

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i,$$

vagyis komplexek. A homogén rész általános megoldása így

$$Y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása kereshető a próbafüggvény módszerével és mivel rezonancia nincs, ezért

$$\begin{array}{r|l} 13\cdot & y_0 = Ax + B + C \sin 3x + D \cos 3x, \\ -6\cdot & y_0' = A + 3C \cos 3x - 3D \sin 3x, \\ 1\cdot & y_0'' = -9C \sin 3x - 9D \cos 3x. \\ \hline \end{array}$$

$$13Ax + (13B - 6A) + (13C + 18D - 9C) \sin 3x +$$

$$+ (13D - 18C - 9D) \cos 3x \equiv x + \sin 3x.$$

A kapott azonosság alapján

$$13A = 1, \quad \text{és ebből} \quad A = \frac{1}{13},$$

$$13B - 6A = 0, \quad \text{és ebből} \quad B = \frac{6}{13^2},$$

$$\begin{array}{l} 4C + 18D = 1, \\ 4D - 18C = 0 \end{array} \quad \text{és ebből} \quad C = \frac{1}{85}, \quad D = \frac{9}{170}.$$

Az inhomogén rész y_0 partikuláris megoldása tehát

$$y_0 = \frac{1}{13}x + \frac{6}{169} + \frac{1}{85}\sin 3x + \frac{9}{170}\cos 3x,$$

az általános megoldás pedig

$$y = e^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{x}{13} + \frac{6}{169} + \frac{1}{85}\sin 3x + \frac{9}{170}\cos 3x.$$

4. Írjuk fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x}.$$

A homogén rész karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0,$$

és azonnal látszik, hogy egy kétszeres gyök van: $\lambda = -3$. A homogén rész általános megoldása tehát

$$Y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

A zavaró függvény és a megoldás első tagja (együtthatótól eltekintve) egyenlő, így rezonancia van, ezért legyen a próbafüggvény

$$y_0 = Axe^{-3x}$$

alakú. Most azonban a megoldás második tagjával van rezonanciában a próbafüggvény, így még egyszer kell x-szel szoroznunk és ezért a próbafüggvény alakja

$$\begin{array}{r|l}
9\cdot & y_0 = Ax^2e^{-3x}, \\
6\cdot & y_0' = 2Axe^{-3x} + Ax^2(-3e^{-3x}), \\
1\cdot & y_0'' = 2Ae^{-3x} + 2Ax(-3e^{-3x}) + 2Ax(-3e^{-3x}) + Ax^2(9e^{-3x}) \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{2Ae^{-3x} \equiv 2e^{-3x},}
\end{array}$$

és így $A=1$. Ezzel

$$y_0 = x^2e^{-3x},$$

az általános megoldás pedig

$$y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + x^2e^{-3x} = e^{-3x}(x^2 + C_2x + C_1).$$

5. Keressük meg az

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

A homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

ennek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i,$$

a homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását kereshetjük a próbafüggvény módszerével, de ügyelni kell arra, hogy az

$$y_0 = A\cos 2x + B\sin 2x$$

első tagja rezonanciában van a homogén rész megoldásának első tagjával. Ezért a helyes próbafüggvény

$$\begin{array}{r|l}
4\cdot & y_0 = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x, \\
0\cdot & y_0' = A\cos 2x - 2Ax\sin 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x, \\
1\cdot & y_0'' = -2A\sin 2x - 2A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 2B\cos 2x + \\
 & \qquad + 2B\cos 2x - 4Bx\sin 2x \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{-4A\sin 2x + 4B\cos 2x \equiv \cos 2x.}
\end{array}$$

Ebből

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{4},$$

és így

$$y_0 = \frac{1}{4}x\sin 2x,$$

az általános megoldás pedig

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x}{4}\sin 2x.$$

6. Ha olyan pontra, amely csillapítatlan rezgőmozgást végez, periodikus erőhatást gyakorolnak, a pont *kényszerrezgést* végez. Legyen a periodikus gerjesztő erő

$$F = F_0\sin\omega_g t,$$

ekkor a mozgást leíró differenciálegyenlet

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{F_0}{m}\sin\omega_g t.$$

Legyenek a kezdeti feltételek $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=v_0$. Határozzuk meg a kitérést mint az idő függvényét!

A kapott differenciálegyenlet állandó együtthatós, inhomogén másodrendű lineáris egyenlet. Az

$$\ddot{Y}+\omega^2 Y=0$$

homogén egyenlet általános megoldását egyszer már meghatároztuk 231. oldal), ez a kezdeti feltételeket figyelembe véve

$$Y=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását szabad a próbafüggvény módszerével az

$$y_0=A\sin\omega_g t+B\cos\omega_g t$$

alakban keresni.

Ekkor

$$\dot{y}_0=\omega_g A\cos\omega_g t-\omega_g B\sin\omega_g t,$$

$$\ddot{y}_0=-\omega_g^2 A\sin\omega_g t-\omega_g^2 B\cos\omega_g t.$$

Visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe

$$A(\omega^2-\omega_g^2)\sin\omega_g t+B(\omega^2-\omega_g^2)\cos\omega_g t\equiv\frac{F_0}{m}\sin\omega_g t.$$

Ha $\omega^2-\omega_g^2\neq 0$, akkor az azonosság csak úgy teljesül, ha

$$B=0 \quad \text{és} \quad A(\omega^2-\omega_g^2)=\frac{F_0}{m},$$

és ebből

$$B=0,\quad A=\frac{F_0}{m(\omega^2-\omega_g^2)}.$$

Így az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldása

$$y_0=\frac{F_0}{m(\omega^2-\omega_g^2)}\sin\omega_g t,$$

az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y=Y+y_0=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t+\frac{F_0}{m(\omega^2-\omega_g^2)}\sin\omega_g t.$$

A létrejövő mozgás tehát két, állandó amplitúdójú, de különböző frekvenciájú rezgőmozgás eredője (ω a rendszer önfrekvenciája, ω_g a gerjesztő erő frekvenciája), ezt modulált rezgésnek szokás nevezni.

Ha bevezetjük az

$$\frac{\omega_g}{\omega}=\nu$$

paramétert, akkor

$$\frac{F_0}{m(\omega^2-\omega_g^2)}=\frac{F_0}{m\omega^2}\cdot\frac{1}{1-\nu^2},$$

ahol $\frac{1}{1-\nu^2}=N$ a nagyító tényező. Ha $\omega_g\ll\omega$, vagyis a gerjesztő frekvencia sokkal kisebb, mint a rendszer önfrekvenciája, akkor $N\approx 1$, így a kényszerrezgés amplitúdója alig változik. Ha ν növekszik, akkor ezzel együtt N is növekszik. Ha $\omega_g\to\omega$, akkor $\nu\to 1$ és $N\to\infty$. Ezért $\omega_g=\omega$ esetben rezonancia lép fel. Ha ν tovább nő, akkor N és vele együtt az $\frac{F_0}{m\omega^2}$ amplitúdó előjele megváltozik, nagysága csökken, végül ha $\nu\to\infty$, akkor $\frac{F_0}{m\omega^2}\to 0$.

Megjegyezzük, hogy a differenciálegyenlet (és a megoldása) csak olyan állapot leírására alkalmas, amikor F_0 és ω_g az időtől független állandó.

Rezonancia esetében ($\omega_g=\omega$) láttuk, hogy az amplitúdó végtelenné válik. A tapasztalat szerint ez nem következik be azonnal, hanem meghatározott begerjedési idő múlva. Ez az idő az egyenletből nem számítható ki.

3. ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS, INHOMOGÉN MÁSODRENDŰ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK. A KÉT ÁLLANDÓ VARIÁLÁSÁNAK MÓDSZERE

Az előző fejezetben láttuk, hogy az

$$y''+by'+cy=f(x)$$

inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározására a próbafüggvény módszere csak speciális zavaró függvények esetében alkalmazható. y'' együtthatóját szándékosan választottuk 1-nek (ez osztással mindig elérhető, hiszen y'' együtthatója nem lehet 0), mert a képletek felírása így egyszerűbb lesz. Ha az alább közölt képletekkel óhajtunk számolni, mindig ügyelni kell arra, hogy y'' együtthatója 1 legyen. Mindig alkalmazható a következő módszer. Az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását a homogén egyenlet általános megoldásához hasonló szerkezetűnek tételezzük fel, csak a benne szereplő két állandót (egyelőre ismeretlen) függvénynek tekintjük, vagyis

$$y_0 = k_1(x)\, y_1 + k_2(x)\, y_2$$

alakúnak képzeljük. A két ismeretlen függvény (egyértelmű) meghatározásához egyelőre csak egy egyenletünk lesz, tudniillik az, amit az y_0 és deriváltjainak a differenciálegyenletbe való behelyettesítése révén kapunk, ezért még egy önkényes kikötéssel élhetünk. A behelyettesítéshez szükségünk van a deriváltakra. Az első:

$$y_0' = k_1'(x) y_1 + k_1(x) y_1' + k_2'(x) y_2 + k_2(x) y_2'.$$

Most élünk az előbb említett lehetőséggel és feltesszük, hogy

$$(1) \quad k_1'(x) y_1 + k_2'(x) y_2 = 0.$$

Ennek figyelembevételével kiszámítjuk a második deriváltat is

$$y_0'' = k_1'(x) y_1' + k_1(x) y_1'' + k_2'(x) y_2' + k_2(x) y_2'',$$

és ha ezeket az inhomogén egyenletbe helyettesítjük, rendezés után a

$$(2) \quad k_1'(x) y_1' + k_2'(x) y_2' = f(x)$$

egyenlethez jutunk. A (1), (2) egyenletrendszernek (amelyben $k_1'(x)$ és $k_2'(x)$ az ismeretlenek), akkor van egyértelmű megoldása, ha a determinánsa, az ún. Wronski-féle determináns [H. Wronski (1778—1853) lengyel matematikus] nem 0, azaz

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha y_1 és y_2 lineárisan függetlenek, akkor $W \neq 0$, és az egyenletrendszer megoldása

$$k_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}, \quad k_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}.$$

Ebből a két ismeretlen függvény kifejezhető

$$k_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx = \int \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx,$$

$$k_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx = \int \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} dx.$$

E két függvénnyel az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y = Y + y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + k_1(x) y_1 + k_2(x) y_2.$$

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y'' + 2y' + 5y = \frac{1}{e^x \cos 2x}.$$

Az állandó együtthatós, másodrendű, lineáris inhomogén egyenlet homogén része

$$Y'' + 2Y' + 5Y = 0.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0,$$

és gyökei

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

A homogén rész két partikuláris megoldása

$$y_1 = e^{-x}\cos 2x, \quad y_2 = e^{-x}\sin 2x,$$

általános megoldása pedig

$$Y = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását két állandó variálásának módszerével keressük meg az

$$y_0 = k_1(x)e^{-x}\cos 2x + k_2e^{-x}(x)\sin 2x$$

alakban. Az ismeretlen $k_1(x)$ és $k_2(x)$ függvények meghatározásához számítsuk ki előbb a Wronski-féle determinánst:

$$W = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos 2x & e^{-x}\sin 2x \\ -e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) & e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-2x}(2\cos^2 2x - \cos 2x\sin 2x) + e^{-2x}(\cos 2x\sin 2x +$$

$$+ 2\sin^2 2x) = 2e^{-2x} \neq 0.$$

Ezt felhasználva

$$k_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x}\sin 2x \\ \dfrac{1}{e^x\cos 2x} & e^{-x}(2\cos 2x - \sin 2x) \end{vmatrix}}{2e^{-2x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{-e^{-2x}\operatorname{tg} 2x}{2e^{-2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|.$$

$$k_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x}\cos 2x & 0 \\ -e^{-x}(\cos 2x + 2\sin 2x) & \dfrac{1}{e^x\cos 2x} \end{vmatrix}}{e^{-2x}}\,dx =$$

$$= \int \frac{e^{-2x}}{2e^{-2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}x.$$

Ezek segítségével a partikuláris megoldás

$$y_0 = \frac{1}{4}e^{-x}(\cos 2x)\ln|\cos 2x| + \frac{1}{2}xe^{-x}\sin 2x,$$

az általános megoldás pedig

$$y = Y + y_0 =$$

$$= e^{-x}\left[\left(c_1 + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\right)\cos 2x + \left(c_2 + \frac{x}{2}\right)\sin 2x\right].$$

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

Az inhomogén egyenlet homogén része

$$Y'' - 4Y' + 3Y = 0.$$

Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1,$$

így a homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = c_1e^{3x} + c_2e^x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását nem kereshetjük a próbafüggvény módszerével, mert a zavaró függvény az exponenciális függvény lineáris törtfüggvénye. A két állandó variálásának módszerével dolgozunk. Legyen az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_0 = k_1(x)e^{3x} + k_2(x)e^x$$

alakú. Az ismeretlen $k_1(x)$ és $k_2(x)$ függvények meghatározása érdekében először számítsuk ki a Wronski-féle determinánst:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^x \\ 3e^{3x} & e^x \end{vmatrix} = e^{4x} - 3e^{4x} = -2e^{4x} \neq 0.$$

Ennek segítségével

$$k_1 = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{e^x}{e^x+1} & e^x \end{vmatrix}}{-2e^{4x}}\,dx = \int \frac{-\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}}{-2e^{4x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{3x} + e^{2x}}\,dx.$$

Az integrált helyettesítéssel számítjuk ki. Legyen

$$e^x = t, \quad \text{ekkor} \quad dx = \frac{dt}{t}, \quad \text{és így}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{3x}+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^3+t^2}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3(t+1)}.$$

Ha az integrandust parciális törtekre bontjuk, akkor

$$\int \frac{dt}{t^3(t+1)} = \int \left(\frac{A}{t^3}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t}+\frac{D}{t+1}\right) dt.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$1 \equiv A(t+1)+Bt(t+1)+Ct^2(t+1)+Dt^3.$$

Ha $t=0$, akkor $A=1$, ha $t=-1$, akkor $D=-1$. Ha $t=1$, ill. 2, akkor (az A és D kiszámított értékét felhasználva) rendre

$$1 = 2+2B+2C-1, \quad \text{azaz} \quad B+C = 0,$$

$$1 = 3+6B+12C-8, \quad \text{azaz} \quad B+2C = 1.$$

E két utóbbi egyenletből $B=-1$, $C=1$. Ezekkel az együtthatókkal

$$\int \frac{dt}{t^3(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{t}+\ln|t|-\ln|t+1| =$$

$$= -\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{t}+\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|.$$

Az eredeti változóra visszatérve

$$k_1(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2e^{2x}}+\frac{1}{e^x}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right).$$

Hasonló módon

$$k_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & \dfrac{e^x}{e^x+1} \end{vmatrix}}{-2e^{4x}}\,dx = \int \frac{\dfrac{e^{4x}}{e^x+1}}{-2e^{4x}}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx.$$

Alkalmazva az $e^x=t$ helyettesítést, $dx = \dfrac{dt}{t}$ és az integrál

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln|t|-\ln|t+1|) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{e^x}{e^x+1}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása tehát

$$y_0 = k_1(x)e^{3x}+k_2(x)e^x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2e^{2x}}+\frac{1}{e^x}+\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)e^{3x}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)e^x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2x}-\frac{e^x}{2}+(e^{3x}-e^x)\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right].$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1e^{3x}+c_2e^x+\frac{1}{2}\left[e^{2x}-\frac{e^x}{2}+(e^{3x}-e^x)\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right].$$

4. ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS, MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETRE VISSZAVEZETHETŐ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

a) AZ EULER-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLET. Az

$$x^2y''+rxy'+sy = f(x) \quad (x>0)$$

alakú differenciálegyenletet, ahol r és s állandók, Euler-féle differenciálegyenletnek nevezzük. Ez az egyenlet új változó bevezetésével (transzformációval) állandó együtthatós differenciálegyenletre vezethető vissza.

Legyen $x=e^t$. Ekkor $t=\ln x, \dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$, továbbá (a t szerinti deriválást ponttal jelölve)

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\dot{y}\frac{1}{x}=\frac{\dot{y}}{x},$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\dot{y}\frac{1}{x}\right)=\frac{d\dot{y}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{1}{x}+\dot{y}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\ddot{y}\frac{1}{x^2}-\dot{y}\frac{1}{x^2}=(\ddot{y}-\dot{y})\frac{1}{x^2}.$$

Helyettesítsük ezt vissza az eredeti differenciálegyenletbe:

$$x^2(\ddot{y}-\dot{y})\frac{1}{x^2}+rx\frac{\dot{y}}{x}+sy=f(e^t),$$

$$\ddot{y}+(r-1)\dot{y}+sy=f(e^t).$$

Ez pedig már állandó együtthatós differenciálegyenlet, és ennek tárgyalását már elvégeztük.

Ügyeljünk arra, hogy ha az eredeti egyenlet inhomogén, akkor a zavaró függvényben se feledkezzünk meg a helyettesítésről.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$x^2y''-xy'+4y=\cos\ln x+x\sin\ln x.$$

A differenciálegyenlet Euler-féle, és ezért az $x=e^t$ transzformációval állandó együtthatós differenciálegyenletté transzformálható. Az új egyenlet

$$\ddot{y}+(-1-1)\dot{y}+4y=\cos t+e^t\sin t.$$

Az

$$\ddot{Y}-2\dot{Y}+4Y=0$$

homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2-2\lambda+4=0,$$

ennek gyökei

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-16}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}i}{2}=1\pm\sqrt{3}i.$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása

$$Y=e^t(c_1\cos\sqrt{3}t+c_2\sin\sqrt{3}t).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kereshetjük a próbafüggvény módszerével az

$$y_0=A\sin t+B\cos t+e^t(C\sin t+D\cos t)$$

alakban, ugyanis — amint az látszik — rezonancia sincs. A deriváltak

$$\dot{y}_0=A\cos t-B\sin t+e^t(C\sin t+D\cos t)+e^t(C\cos t-D\sin t)=$$

$$=A\cos t-B\sin t+e^t[(C-D)\sin t+(C+D)\cos t],$$

$$\ddot{y}_0=-A\sin t-B\cos t+e^t[(C-D)\sin t+(C+D)\cos t]+$$

$$+e^t[(C-D)\cos t-(C+D)\sin t].$$

A próbafüggvényt és deriváltjait az inhomogén egyenletbe helyettesítve

$$-A\sin t-B\cos t+e^t[-2D\sin t+2C\cos t]+$$

$$+2B\sin t-2A\cos t-e^t[2(C-D)\sin t+2(C+D)\cos t]+$$

$$+4A\sin t+4B\cos t+e^t[4C\sin t+4D\cos t]\equiv$$

$$\equiv\cos t+e^t\sin t.$$

Ez az azonosság csak úgy állhat fenn, ha

$$3A+2B=0,$$

$$3B-2A=1,$$

$$2C=1,$$

$$2D=0.$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$A=-\frac{2}{13},\quad B=\frac{3}{13},\quad C=\frac{1}{2},\quad D=0.$$

Az inhomogén egyenlet keresett partikuláris megoldása tehát

$$y_0=-\frac{2}{13}\sin t+\frac{3}{13}\cos t+\frac{1}{2}e^t\sin t,$$

az általános megoldása pedig

$$y = e^t(c_1 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t) +$$

$$+\frac{1}{13}(3 \cos t - 2 \sin t) + \frac{1}{2} e^t \sin t.$$

Ha visszatérünk az eredeti független változóra, akkor az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = x[c_1 \cos(\sqrt{3} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{3} \ln x)] +$$

$$+\frac{1}{13}(3 \cos \ln x - 2 \sin \ln x) + \frac{1}{2} x \sin \ln x.$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x.$$

Az Euler-féle differenciálegyenlet megoldása érdekében az $x = e^t$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = e^t + e^{2t}t.$$

A homogén egyenlet

$$\ddot{Y} - 4\dot{Y} + 4Y = 0,$$

ennek karakterisztikus egyenlete pedig

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

A gyökök $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$. A homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}.$$

Az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását kereshetjük a próbafüggvény módszerével, de vegyük észre, hogy rezonancia van, a homogén egyenlet általános megoldásának második tagja (konstanstól eltekintve) megegyezik a zavaró függvény második tagjával, továbbá a karakterisztikus egyenlet gyöke kétszeres gyök. Ezért a próbafüggvény

$$y_0 = Ae^t + (Bt + C)t^2 e^{2t} = Ae^t + (Bt^3 + Ct^2)e^{2t}$$

alakú. A deriváltak

$$\dot{y}_0 = Ae^t + (3Bt^2 + 2Ct)e^{2t} + (Bt^3 + Ct^2)2e^{2t},$$

$$\ddot{y}_0 = Ae^t + (6Bt + 2C)e^{2t} + (3Bt^2 + 2Ct)2e^{2t} +$$

$$+(3Bt^2 + 2Ct)2e^{2t} + (Bt^3 + Ct^2)4e^{2t}.$$

Ha a próbafüggvényt és deriváltját az inhomogén egyenletbe helyettesítjük, akkor

$$\begin{aligned} &Ae^t + (6Bt + 2C)e^{2t} + 4(3Bt^2 + 2Ct)e^{2t} + 4(Bt^3 + Ct^2)e^{2t} - \\ &-4Ae^t \qquad -4(3Bt^2 + 2Ct)e^{2t} - 8(Bt^3 + Ct^2)e^{2t} + \\ &+4Ae^t \qquad +4(Bt^3 + Ct^2)e^{2t} \equiv \\ &\equiv e^t + te^{2t}. \end{aligned}$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$A = 1, \quad 6B = 1, \quad 2C = 0$$

vagyis

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{6}, \quad C = 0.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$y_0 = e^t + \frac{1}{6} t^3 e^{2t},$$

általános megoldása pedig

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + e^t + \frac{1}{6} t^3 e^{2t}.$$

Ha visszatérünk az eredeti változóra, az eredeti egyenlet általános megoldása

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x + x + \frac{1}{6} x^2 \ln^3 x.$$

b) AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT EULER-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLET. Az

$$(ax+b)^2y'' + r(ax+b)y' + sy = f(x), \quad (ax+b) > 0)$$

alakú differenciálegyenletet általánosított Euler-féle differenciálegyenletnek nevezzük. a, b, r és s állandók. A differenciálegyenlet az $ax + b = e^t$ helyettesítéssel állandó együtthatós, másodrendű lineáris differenciálegyenletre vezethető vissza, ugyanis most

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{a}{ax+b},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\dot{y}\,\frac{a}{ax+b}\right) =$$

$$= \frac{d\dot{y}}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\cdot\frac{a}{ax+b} + \dot{y}\left(-\frac{a^2}{(ax+b)^2}\right) =$$

$$= (\ddot{y}-\dot{y})\,\frac{a^2}{(ax+b)^2}.$$

A két deriváltat az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve

$$a^2(\ddot{y}-\dot{y})+ar\dot{y}+sy = f\left(\frac{e^t-b}{a}\right),$$

ill.

$$a^2\ddot{y}+a(r-a)\dot{y}+sy = f\left(\frac{e^t-b}{a}\right),$$

és ez már állandó együtthatós differenciálegyenlet. Mielőtt az egyenlet megoldásához hozzákezdünk, célszerű az egyenletet a^2-tel elosztani.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x+2)^2y''-(x+2)y'+y = 3x+4.$$

Mivel az egyenlet általános Euler-féle differenciálegyenlet, ezért az $x+2 = e^t$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor $t = \ln|x+2|$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x+2}$ és ezzel

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{1}{x+2} = \frac{\dot{y}}{x+2},$$

$$y'' = \ddot{y}\,\frac{1}{(x+2)^2}-\dot{y}\,\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{\ddot{y}-\dot{y}}{(x+2)^2}.$$

A deriváltakat az eredeti differenciálegyenletbe behelyettesítve

$$\ddot{y}-\dot{y}-\dot{y}+y = 3(e^t-2)+4,$$

ill.

$$\ddot{y}-2\dot{y}+y = 3e^t-2.$$

A kapott állandó együtthatós differenciálegyenlet homogén részének karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2-2\lambda+1 = 0,$$

ennek gyökei

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1.$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = C_1e^t+C_2te^t.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása esetünkben a próbafüggvény módszerével kereshető. Vegyük észre, hogy a zavaró függvény első tagja és a homogén egyenlet általános megoldása között kétszeres rezonancia van, ezért a közvetlenül felírható Ae^t függvényt még t^2-tel meg kell szoroznunk. Így a próbafüggvény

$$y_0 = At^2e^t+B$$

alakú. Deriváltjai

$$\dot{y}_0 = 2Ate^t+At^2e^t,$$

$$\ddot{y}_0 = 2Ae^t+2Ate^t+2Ate^t+At^2e^t.$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$2Ae^t+B \equiv 3e^t-2,$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -2.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása így

$$y_0 = \frac{3}{2}t^2e^t-2,$$

általános megoldása pedig

$$y = Y+y_0 = C_1e^t+C_2te^t+\frac{3}{2}t^2e^t-2.$$

Ha visszahelyettesítjük az eredeti független változót, akkor differenciálegyenletünk általános megoldása

$$y = (x+2)\left[C_1 + C_2 \ln|x+2| + \frac{3}{2}\ln^2|x+2|\right] - 2.$$

2. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$(3x+2)^2 y'' + (9x+6)y' - 36y = 3x^2+4x+1.$$

Ha a másodrendű lineáris differenciálegyenlet bal oldalán a második tagból 3-at kiemelünk, azonnal látszik, hogy általános Euler-féle differenciálegyenletről van szó, tehát a célszerű helyettesítés $3x+2 = e^t$. Ekkor $x = \dfrac{e^t-2}{3}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^t}{3}$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{3}{3x+2}$. Kiszámítjuk y első és második deriváltját.

$$y' = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\,\frac{3}{3x+2},$$

$$y'' = \ddot{y}\,\frac{9}{(3x+2)^2} + \dot{y}\left(-\frac{9}{(3x+2)^2}\right) = \frac{9(\ddot{y}-\dot{y})}{(3x+2)^2}.$$

A deriváltakat az eredeti egyenletbe helyettesítve

$$9(\ddot{y}-\dot{y}) + 9\dot{y} - 36y = 3\left(\frac{e^t-2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{e^t-2}{3}\right) + 1.$$

Az egyenletet rendezve az

$$\ddot{y} - 4y = \frac{1}{27}(e^{2t}-1)$$

állandó együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlethez jutunk. Az

$$\ddot{Y} - 4Y = 0$$

homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

és ennek gyökei

$$\lambda_{1,2} = \pm 2.$$

A homogén egyenlet általános megoldása

$$Y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével szabad keresnünk, mert az egyenlet állandó együtthatós és a zavarófüggvény speciális alakú. Legyen

$$y_0 = Ae^{2t} + B.$$

Vegyük észre, hogy rezonancia van a homogén egyenlet általános megoldásának első tagja és a zavaró függvény első tagja között. Így próbafüggvényünket módosítani kell, az első tagját meg kell szoroznunk t-vel. Ezért legyen

$$y_0 = Ate^{2t} + B.$$

Ekkor

$$\dot{y}_0 = Ae^{2t} + 2Ate^{2t},$$

$$\ddot{y}_0 = 2Ae^{2t} + 2Ae^{2t} + 4Ate^{2t}.$$

Visszahelyettesítve a deriváltakat a differenciálegyenletbe

$$4Ae^{2t} + 4Ate^{2t} - 4Ate^{2t} - 4B \equiv \frac{1}{27}(e^{2t}-1).$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$4A = \frac{1}{27}, \quad -4B = -\frac{1}{27}.$$

E két egyenletből

$$A = \frac{1}{108}, \quad B = \frac{1}{108}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$y_0 = \frac{1}{108}(te^{2t}+1),$$

általános megoldása pedig

$$y = Y + y_0 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{108}(te^{2t}+1).$$

Visszahelyettesítve t értékét, az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = C_1(3x+2)^2 + \frac{C_2}{(3x+2)^2} + \frac{1}{108}\left[(3x+2)^2 \ln(3x+2) + 1\right].$$

5. FÜGGVÉNYEGYÜTTHATÓS, LINEÁRIS, MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Amint azt már a fejezet bevezető részében említettük, az

$$a(x)\,y''+b(x)\,y'+c(x)\,y=f(x)$$

differenciálegyenlet általános megoldása az

$$y=Y+y_0=c_1\,y_1+c_2\,y_2+y_0$$

alakban írható fel, ahol y_1 és y_2 a homogén egyenlet egy-egy lineárisan független, y_0 az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása, c_1 és c_2 tetszőleges állandók. A szóban forgó három partikuláris megoldás megkeresésére általános módszer nem ismeretes. Abban az esetben, ha a homogén egyenlet egy partikuláris megoldása, például y_1 ismert, akkor y_2 az egy állandó variálásának módszerével, y_0 pedig a két állandó variálásának módszerével meghatározható.

Sokszor alkalmazható a következő módszer is: ha a homogén egyenlet y_1 partikuláris megoldása már ismert, akkor az inhomogén egyenletben az $y=y_1v$ transzformációt végrehajtva hiányos másodrendű egyenletre jutunk (v hiányzik), amit legtöbbször meg tudunk oldani. Mind a két módszer hátránya az, hogy egyrészt ki kell találni egy partikuláris megoldást, másrészt gyakran olyan függvények integrálása válik szükségessé, amelyek primitív függvénye zárt alakban nem írható fel.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1+x^2)y''+xy'-y=0.$$

Az adott differenciálegyenlet függvényegyütthatós, másodrendű lineáris homogén differenciálegyenlet. Helyettesítéssel nem alakítható át állandó együtthatósra. Kíséreljük meg egy partikuláris megoldását meghatározni. Mivel a homogén differenciálegyenletben $xy'-y$ szerepel, ezért az y'' együtthatójától függetlenül az $y_1=x$ mindig partikuláris megoldás. Azért, mert ekkor $y_1'=1$, $y_1''=0$, és behelyettesítés után azonnal látszik, hogy y_1 valóban megoldása differenciálegyenletünknek. Az y_1 ismeretében y_2 az egy állandó variálásának módszerével meghatározható. Legyen $y_2=c(x)y_1=c(x)x$, ahol $c(x)$ egyelőre ismeretlen függvény. Most

$$y_2'=c'(x)x+c(x),$$

$$y_2''=c''(x)x+2c'(x).$$

Az eredeti egyenletbe helyettesítve y_2-t és deriváltjait,

$$(1+x^2)\left(c''(x)x+2c'(x)\right)+x\left(c'(x)x+c(x)\right)-c(x)x=0.$$

$c(x)$ és deriváltjai szerint rendezve az egyenletet

$$c''(x)(x^3+x)+c'(x)(3x^2+2)+c(x)(x-x)=0.$$

Ebből

$$\frac{c''(x)}{c'(x)}=-\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}.$$

A bal oldalon könnyen integrálhatunk

$$\ln|c'(x)|=-\int\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}\,dx.$$

A jobb oldalon parciális törtekre bontással integrálunk.

$$\int\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}\,dx=\int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{x^2+1}\right)dx,$$

mert a

$$3x^2+2\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)x=(A+B)x^2+Cx+A$$

azonosságból

$$A=2,\quad B=1,\quad C=0.$$

Így

$$\ln|c'(x)|=-2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)=\ln\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}},$$

és

$$c'(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}},$$

ill.

$$c(x)=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}.$$

Az integrál kiszámítása érdekében alkalmazzuk az $x=\operatorname{sh}t$ helyettesítést. Ekkor $dx=\operatorname{ch}t\,dt$, és az integrálás könnyen elvégezhető:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\operatorname{ch}t\,dt}{\operatorname{sh}^2t\sqrt{\operatorname{sh}^2t+1}}=\int\frac{dt}{\operatorname{sh}^2t}=$$

$$=-\operatorname{cth}t=-\frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}t}=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Így

$$c(x) = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

$$y_2 = c(x)x = -\sqrt{1+x^2}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát

$$y = c_1 x + c_2 \sqrt{1+x^2},$$

és az y_2-ben szereplő negatív előjelet a c_2-be olvasztottuk.

2. Oldjuk meg az

$$y'' - (2\operatorname{tg} x)y' + 3y = \frac{2}{\cos x}$$

differenciálegyenletet.

Első megoldás: Az adott másodrendű inhomogén függvény együtthatós lineáris egyenlet homogén része

$$Y'' - (2\operatorname{tg} x)Y' + 3Y = 0.$$

Az egyetlen függvényegyüttható trigonometrikus függvény, ezért kíséreljük meg a homogén egyenlet egy partikuláris megoldását is trigonometrikus függvény alakjában keresni.

Legyen például

$$y_1 = \sin x.$$

Ekkor

$$y_1' = \cos x,$$

$$y_1'' = -\sin x.$$

Visszahelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$-\sin x - (2\operatorname{tg} x)\cos x + 3\sin x \equiv 0$$

valóban teljesül, így $y_1 = \sin x$ megoldása a homogén egyenletnek. (Ha a homogén egyenlet egy partikuláris megoldását nem tudjuk meghatározni, akkor csak közelítő módszereket vehetünk igénybe.) A homogén egyenlet egy másik, az y_1-től lineárisan független partikuláris megoldását az egy állandó variálásának módszerével keressük az

$$y_2 = c(x)\sin x$$

alakban. Most

$$y_2' = c'(x)\sin x + c(x)\cos x,$$

$$y_2'' = c''(x)\sin x + 2c'(x)\cos x - c(x)\sin x.$$

Visszahelyettesítve a homogén egyenletbe, majd a $c(x)$ függvény és deriváltjai szerint rendezve

$$c''(x)\sin x + c'(x)\left[2\cos x - 2\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right] +$$

$$+ c(x)[-\sin x - 2\sin x + 3\sin x] \equiv 0.$$

A $c(x)$ függvény együtthatója zérus, így

$$c''(x)\sin x = 2c'(x)\left[\frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x\right],$$

$$\frac{c''(x)}{c'(x)} = 2\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

Mind a két oldalon integrálva

$$\ln|c'(x)| = 2(-\ln|\cos x| - \ln|\sin x|) =$$

$$= \ln\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}.$$

Ebből

$$c'(x) = \frac{1}{(\sin x\cos x)^2} = \frac{4}{(2\sin x\cos x)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

Ismét integrálva

$$c(x) = 4\left(-\frac{\operatorname{ctg} 2x}{2}\right) = -2\operatorname{ctg} 2x.$$

Ezt felhasználva a másik partikuláris megoldás

$$y_2 = c(x)y_1 = -2\operatorname{ctg} 2x\cdot\sin x =$$

$$= -2\frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}\sin x = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x\sin x}\sin x =$$

$$= -\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Könnyű belátni, hogy ez az y_2 valóban megoldása a homogén egyenletnek.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az y_1 és y_2 megoldásokból két állandó variálásának módszerével keressük meg. Legyen tehát

$$y_0 = k_1(x)y_1 + k_2(x)y_2 =$$

$$= k_1(x)\sin x + k_2(x)\left(-\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right).$$

A $k_1(x)$ és $k_2(x)$ függvények meghatározásához számítsuk ki előbb a Wronski-féle determinánst. Mivel

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = -\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\frac{\cos 2x}{\cos x},$$

$$y_1' = \cos x, \quad y_2' = \sin x + \frac{2\sin x \cos^2 x + \sin^3 x}{\cos^2 x},$$

ezért

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} \\ \cos x & 3\sin x + \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = 3\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} +$$

$$+ \cos^2 x - \sin^2 x = 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

ami nem lehet 0. Így

$$k_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W} dx = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\cos x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} \\ \dfrac{2}{\cos x} & 3\sin x + \dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} dx =$$

$$= \int \frac{2 - 2\,\mathrm{tg}^2 x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} dx = 2\int (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx =$$

$$= 2\int \cos 2x \, dx = 2\frac{\sin 2x}{2} = \sin 2x,$$

$$k_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W} dx = \int \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \dfrac{2}{\cos x} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} dx =$$

$$= \int \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} dx = \int 2\sin x \cos x \, dx =$$

$$= \int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{2}.$$

A kiszámított függvények felhasználásával

$$y_0 = (\sin 2x)\sin x - \frac{\cos 2x}{2}\left(-\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) =$$

$$= (\sin 2x)\sin x - \frac{\cos 2x(-\cos^2 x + \sin^2 x)}{2\cos x} =$$

$$= (\sin 2x)\sin x + \frac{\cos^2 2x}{2\cos x} = \frac{\sin^2 2x + \cos^2 2x}{2\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2\cos x}.$$

Így az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1 \sin x + c_2\left(-\frac{\cos 2x}{\cos x}\right) + \frac{1}{2\cos x}.$$

Második megoldás: Az $y_1 = \sin x$ partikuláris megoldás birtokában valamivel egyszerűbben juthatunk a célhoz, ha az inhomogén egyenlet általános megoldását az

$$y = v \sin x$$

alakban keressük. Ekkor

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}\sin x + v\cos x = v'\sin x + v\cos x,$$

$$y'' = v''\sin x + v'\cos x + v'\cos x - v\sin x.$$

E transzformáció után a differenciálegyenlet

$$v''\sin x + 2v'\cos x - v\sin x - (2\,\mathrm{tg}\, x)(v'\sin x + v\cos x) + 3v\sin x =$$

$$= \frac{2}{\cos x}$$

alakú, és ez összevonás után a

$$v''\sin x + 2\left(\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)v' = \frac{2}{\cos x},$$

ill.

$$v''\sin 2x + 4v'\cos 2x = 4$$

hiányos, másodrendű differenciálegyenletbe megy át. Mivel v hiányzik, legyen

$$v' = p(x), \quad \text{ekkor} \quad v'' = p'(x)$$

és a helyettesítés után kapott elsőrendű differenciálegyenlet a következő alakú:

$$p' \sin 2x + 4p \cos 2x = 4.$$

A

$$P' \sin 2x + 4P \cos 2x = 0$$

homogén egyenlet változói szétválaszthatók:

$$\frac{dP}{P} = -4 \frac{\cos 2x}{\sin 2x},$$

és ebből

$$\ln |P| = -2 \ln |\sin 2x| + \ln c,$$

$$P = \frac{c}{\sin^2 2x}.$$

Az inhomogén egyenlet p_0 partikuláris megoldását

$$p_0 = \frac{c(x)}{\sin^2 2x}$$

alakban keresve

$$p_0' = \frac{c'(x) \sin^2 2x - c(x) 4 \sin 2x \cos 2x}{\sin^4 2x},$$

és így visszahelyettesítés után

$$\frac{c'(x)}{\sin 2x} - \frac{4c(x) \cos 2x}{\sin^2 2x} + 4 \frac{c(x) \cos 2x}{\sin^2 2x} = 4.$$

Ebből

$$c'(x) = 4 \sin 2x,$$
$$c(x) = -2 \cos 2x.$$

Így

$$p_0 = -\frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x},$$

és

$$p = P + p_0 = \frac{c}{\sin^2 2x} - \frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x}.$$

Visszatérve a v változóra

$$v' = \frac{c}{\sin^2 2x} - \frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x},$$

és így

$$v = -\frac{c}{2} \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{\sin 2x} + k.$$

Az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = v \sin x = k \sin x - \frac{c}{2} (\operatorname{ctg} 2x) \sin x + \frac{\sin x}{\sin 2x},$$

ill.

$$y = k \sin x - \frac{c}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{2 \cos x} + \frac{1}{2 \cos x}.$$

Azonnal látszik, hogy ha $k = c_1$ és $\frac{c}{4} = c_2$, akkor a két megoldás azonos.

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = x^2 e^{2x}.$$

Első megoldás: Először is kíséreljük meg az

$$xY'' - (2x+1)Y' + (x+1)Y = 0$$

homogén egyenlet egy partikuláris megoldását megtalálni. Az együtthatók alapján exponenciális függvényre gyanakodhatunk, ugyanis a függvény és deriváltjai együtthatóinak összege 0. Tegyük fel tehát, hogy

$$y_1 = e^x, \quad \text{ekkor} \quad y_1' = e^x, \quad y_1'' = e^x,$$

és ez valóban megoldása a homogén egyenletnek. Az egyenlet egy másik partikuláris megoldását

$$y_2 = c(x) y_1 = c(x) e^x$$

alakban keressük. Most

$$y_2' = c'(x) e^x + c(x) e^x = e^x (c'(x) + c(x)),$$

$$y_2'' = e^x (c'(x) + c(x)) + e^x (c''(x) + c'(x)).$$

Visszahelyettesítve a homogén egyenletbe

$$xe^x(c''(x) + 2c'(x) + c(x)) - (2x+1)e^x(c'(x) + c(x)) + (x+1)c(x)e^x = 0$$

Rendezés után a

$$c''(x)x - c'(x) = 0$$

egyenlethez jutunk. Ebből

$$\frac{c''(x)}{c'(x)} = \frac{1}{x},$$

integrálva

$$\ln |c'(x)| = \ln |x|,$$

azaz

$$c'(x) = x.$$

Ismét integrálva

$$c(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Így a másik partikuláris megoldás

$$y_2 = c(x)e^x = \frac{x^2e^x}{2}.$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y = c_1e^x + c_2x^2e^x.$$

(A 2-es osztót a c_2 konstansba olvasztottuk be.)

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a két állandó variálásának módszerével az

$$y_0 = k_1(x)e^x + k_2(x)x^2e^x$$

alakban keressük.

Mivel

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x^2e^x,$$

$$y_1' = e^x, \quad y_2' = 2xe^x + x^2e^x = (x^2+2x)e^x,$$

ezért

$$W = \begin{vmatrix} e^x & x^2e^x \\ e^x & (x^2+2x)e^x \end{vmatrix} = (x^2+2x)e^{2x} - x^2e^{2x} =$$

$$= 2xe^{2x} \neq 0, \quad \text{ha} \quad x \neq 0.$$

Képleteinket akkor tudjuk használni, ha a differenciálegyenletben y'' együtthatója 1. A homogén egyenlet megoldásához erre nem volt szükség. Hogy y'' együtthatója 1 legyen, elosztjuk az egyenlet mind a két oldalát x-szel. Ekkor az inhomogenitást okozó függvény

$$f(x) = xe^{2x}.$$

A $k_1(x)$ függvényt megadó integrál számlálójában

$$\begin{vmatrix} 0 & x^2e^x \\ xe^{2x} & (x^2+2x)e^x \end{vmatrix} = -x^3e^{3x}$$

áll, így

$$k_1(x) = \int -\frac{x^3e^{3x}}{2xe^{2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\int x^2e^x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x^2e^x - 2\int xe^x\,dx\right] =$$

$$= -\frac{x^2e^x}{2} + xe^x - \int e^x\,dx = e^x\left(-\frac{x^2}{2} + x - 1\right).$$

Hasonlóan

$$\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^{2x} \end{vmatrix} = xe^{3x},$$

és így

$$k_2(x) = \int \frac{xe^{3x}}{2xe^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int e^x\,dx = \frac{1}{2}e^x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát

$$y_0 = e^x\left(-\frac{x^2}{2} + x - 1\right)e^x + \frac{1}{2}e^x x^2e^x = e^{2x}(x-1),$$

az inhomogén egyenlet általános megoldása pedig

$$y = c_1e^x + c_2x^2e^x - (x-1)e^{2x}.$$

Második megoldás: Ha az

$$y_1 = e^x$$

partikuláris megoldás birtokában az inhomogén egyenlet általános megoldását

$$y = e^xv$$

alakban keressük, akkor

$$y' = e^xv + e^xv' = e^x(v'+v),$$

$$y'' = e^x(v'+v) + e^x(v''+v'),$$

és az eredeti differenciálegyenlet transzformált alakja

$$xe^x(v''+2v'+v) - (2x+1)e^x(v'+v) + (x+1)e^xv = x^2e^{3x},$$

vagy rendezés után

$$xv'' - v' = x^2e^x.$$

A kapott másodrendű differenciálegyenletből v hiányzik, tehát a következő helyettesítés célszerű:

$$v' = p(x), \quad v'' = p'(x).$$

Ekkor az

$$xp' - p = x^2 e^x,$$

elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet kell megoldanunk. Az

$$xP' - P = 0$$

homogén egyenlet változói szétválaszthatók.

$$\frac{dP}{P} = \frac{dx}{x},$$

és integrálás után

$$\ln |P| = \ln |x| + \ln c,$$

ill.

$$P = cx.$$

Az inhomogén egyenlet p_0 partikuláris megoldását

$$p_0 = c(x)x$$

alakban keresve

$$p_0' = c'(x)x + c(x).$$

Visszahelyettesítés után az

$$x[c'(x)x + c(x)] - c(x)x = x^2 e^x,$$

ill. a

$$c'(x) = e^x$$

egyenlethez jutunk. Ebből

$$c(x) = e^x,$$

és így

$$p_0 = xe^x,$$

$$p(x) = cx + xe^x.$$

Minthogy $v' = p(x)$, ezért

$$v = c\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x + c_1.$$

Ezt felhasználva a differenciálegyenlet megoldása

$$y = e^x v = c_1 e^x + c_2 x^2 e^x + (x-1)e^{2x},$$

ahol $\dfrac{c}{2} = c_2$.

C. MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KÖZELÍTŐ MEGOLDÁSA HATVÁNYSOROK SEGÍTSÉGÉVEL

1. Az elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldását megadó módszerek közül a hatványsorokkal történő megoldás másodrendű differenciálegyenletre is alkalmazható egyes esetekben. Mivel a megoldhatósági feltételek itt már sokkal bonyolultabbak, és a megoldás végrehajtásával kapcsolatos problémák rendkívül szerteágazóak, ezért csak két egyszerű speciális esetet említünk meg.

Tekintsük a

$$(1) \qquad P_0(x)\,y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

másodrendű, homogén, lineáris differenciálegyenletet, ahol P_0, P_1, P_2 x polinomjai.

Előrebocsátunk három elnevezést. Az $x = x_0$ pontot az (1) differenciálegyenlet *közönséges pontjának* nevezzük, ha $P_0(x_0) \neq 0$. Azt az $x = x_1$ pontot, amelyre $P_0(x_1) = 0$, a differenciálegyenlet *szinguláris pontjának* nevezik. Ha x_1 a differenciálegyenlet szinguláris pontja, és a differenciálegyenlet felírható az

$$y'' + \frac{R_1(x)}{x - x_1}y' + \frac{R_2(x)}{(x - x_1)^2} = 0$$

alakban, akkor az x_1 pont a differenciálegyenlet *szabályos szinguláris* pontja.

Például a

$$8y'' - 3x^2y' + 4 = 0$$

differenciálegyenletnek nincs szinguláris pontja, az

$$(x-3)y'' + (x+1)y' + y = 0$$

differenciálegyenletnek az $x_1 = 3$ pont szinguláris, de nem szabályos szinguláris pontja, az $x_0 = 2$ pont az

$$(x-1)^2y'' - x^2(x-1)y' + xy = 0$$

differenciálegyenlet közönséges pontja, az $x_1=1$ pont pedig szabályos szinguláris pontja, mert az eredeti egyenlet átírható az

$$y''-\frac{x^2}{x-1}y'+\frac{x}{(x-1)^2}=0$$

alakba.

2. Ha az (1) differenciálegyenletnek az x_0 pont közönséges pontja, akkor a differenciálegyenlet megoldása

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+$$
$$+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k$$

alakban kereshető. A c_k együtthatók az $y(x)$, $y'(x)$ és $y''(x)$ kiszámítása és a differenciálegyenletbe való visszahelyettesítése után kapott azonosságból határozhatók meg. A megoldás ekkor

$$y(x)=A\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x-x_0)^i+B\sum_{i=0}^{\infty}b_i(x-x_0)^i$$

alakú, ahol A és B tetszőleges állandók, a hatványsorok egymástól lineárisan függetlenek és az x_0 hely környezetében konvergensek. A hatványsorok együtthatóira sok esetben könnyen felírható rekurziós formulák találhatók.

Abban a speciális esetben, amikor $x_0=0$, a megoldás x hatványsoraként írható fel.

3. Legyen most x_1 az (1) differenciálegyenlet szabályos szinguláris pontja, és csupán arra az esetre szorítkozunk, amikor $x_1=0$. Ekkor (1)

$$(2)\qquad y''+\frac{R_1(x)}{x}y'+\frac{R_2(x)}{x^2}y=0$$

alakú, ahol $R_1(x)$ és $R_2(x)$ x polinomjai. Legyen

$$\frac{R_1(x)}{x}=p(x)=\frac{p_0}{x}+p_1+p_2x+p_3x^2+\ldots,$$

$$\frac{R_2(x)}{x^2}=q(x)=\frac{q_0}{x^2}+\frac{q_1}{x}+q_2+q_3x+q_4x^2+\ldots.$$

Az (1) differenciálegyenlet megoldása most

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^{i+r}=c_0x^r+c_1x^{r+1}+c_2x^{r+2}+\ldots$$

alakban kereshető, ahol a c_i együtthatókat és az r kitevőt kell meghatároznunk. A feltételezett megoldás első és második deriváltja

$$y'(x)=rc_0x^{r-1}+(r+1)c_1x^r+(r+2)c_2x^{r+1}+\ldots,$$
$$y''(x)=r(r-1)c_0x^{r-2}+(r+1)rc_1x^{r-1}+$$
$$+(r+2)(r+1)c_2x^r+\ldots.$$

Ha ezt, továbbá $p(x)$ és $q(x)$ sorát a (2) differenciálegyenletbe helyettesítjük, akkor

$$r(r-1)c_0x^{r-2}+(r+1)rc_1x^{r-1}+(r+2)(r+1)c_2x^r+\ldots+$$
$$+\left(\frac{p_0}{x}+p_1+p_2x+\ldots\right)(rc_0x^{r-1}+(r+1)c_1x^r+\ldots)+$$
$$+\left(\frac{q_0}{x^2}+\frac{q_1}{x}+q_2+\ldots\right)(c_0x^r+c_1x^{r+1}+c_2x^{r+2}+\ldots)\equiv 0.$$

Ez rendezés után az

$$[r(r-1)c_0+p_0rc_0+q_0c_0]x^{r-2}+$$
$$+[(r+1)rc_1+p_0(r+1)c_1+p_1rc_0+q_0c_1+q_1c_0]x^{r-1}+\ldots\equiv 0$$

alakra hozható. x valamennyi hatványának együtthatója 0 kell hogy legyen, ezért

$$[r(r-1)+p_0r+q_0]c_0=0,$$

$$[(r+1)r+p_0(r+1)+q_0]c_1+[p_1r+q_1]c_0=0,$$

és így tovább. Legyen c_0 az első nem zérus együttható a megoldás hatványsorában. Ekkor az első egyenletből

$$r(r-1)+p_0r+q_0=0$$

kell hogy legyen. Ezt a másodfokú egyenletet, amelyből a megoldást jelentő hatványsor legalacsonyabb kitevőjű hatványának fokszáma megállapítható, a differenciálegyenlet *indexegyenletének* nevezzük.

Az indexegyenlet gyökeitől függően két esetet említünk meg.

1. eset: ha a két különböző valós gyök különbsége nem egész szám, akkor a két gyök alapján az együtthatókra kapott egyenletekből két hatványsor együtthatói számíthatók ki. E két hatványsor a (2) egyenlet két lineárisan független partikuláris megoldása, és a (2) differenciálegyenlet általános megoldása e két megoldás összege:

$$y(x) = y_1(x)+y_2(x) = x^{r_1}\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i + x^{r_2}\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i,$$

ahol a c_0 és b_0 együttható szabadon választható.

2. eset: ha az indexegyenlet két gyöke egyenlő, vagy különbségük egész szám, akkor általában csak egy hatványsor, azaz általában csak egy partikuláris megoldás írható fel közvetlenül az

$$y_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{r+i}$$

alakban. Egy másik partikuláris megoldás (l. a kidolgozott feladatot) az

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + \sum_{i=1}^{\infty} b_i x^{r+i}$$

alakban írható fel, ahol a b_i együtthatók nem függetlenek a c_i együtthatóktól. A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x) = Ay_1(x)+By_2(x),$$

ahol A és B tetszőleges állandó.

Abban a speciális esetben, amikor az indexegyenlet két gyökének különbsége egész szám: $r_1-r_2 = n$, akkor az általános megoldás polinom és végtelen sor összege is lehet.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x^2-1)y''-2xy'-4y = 0.$$

Mivel $x_0=0$ a differenciálegyenlet közönséges pontja, a megoldás kereshető x hatványsora alakjában, azaz legyen

$$y(x) = c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\dots,$$

ekkor

$$y'(x) = c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\dots,$$

$$y''(x) = 2c_2+6c_3x+12c_4x^2+20c_5x^3+30c_6x^4+\dots .$$

Visszahelyettesítünk az eredeti differenciálegyenletbe, és a könnyebb áttekinthetőség kedvéért az azonos fokszámú tagokat egymás alá írjuk:

	x^0	x	x^2	x^3	x^4	
x^2y''			$2c_2$	$6c_3$	$12c_4$	...
$-y''$	$-2c_2$	$-6c_3$	$-12c_4$	$-20c_5$	$-30c_6$	...
$-2xy'$		$-2c_1$	$-4c_2$	$-6c_3$	$-8c_4$	...
$-4y$	$-4c_0$	$-4c_1$	$-4c_2$	$-4c_3$	$-4c_4$	...

Az egyes oszlopokban álló tagoknak (az egyes hatványok együtthatóinak) összege 0 kell, hogy legyen, ezért

$$2c_2+4c_0 = 0, \quad \text{és ebből} \quad c_2 = -2c_0,$$

$$6c_3+6c_1 = 0, \quad \text{és ebből} \quad c_3 = -c_1,$$

$$12c_4+6c_2 = 0, \quad \text{és ebből} \quad c_4 = -\frac{1}{2}c_2 = c_0,$$

$$20c_5+4c_3 = 0, \quad \text{és ebből} \quad c_5 = -\frac{1}{5}c_3 = \frac{1}{5}c_1,$$

$$30c_6 = 0, \quad \text{és ebből} \quad c_6 = 0.$$

A megoldás néhány tagja most már felírható.

$$y(x) = c_0+c_1x-2c_0x^2-c_1x^3+c_0x^4+\frac{1}{5}c_1x^5+0x^6+\dots =$$

$$= c_0(1-2x^2+x^4+\dots)+c_1\left(x-x^3+\frac{1}{5}x^5+\dots\right).$$

A megoldás csak kis abszolút értékű x-ek esetében ad elfogadható közelítést.

2. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$(2x^2+1)y''+3xy'-3y = 0.$$

Mivel a differenciálegyenletben $3xy'-3y = 3(xy'-y)$ szerepel, ezért azonnal látszik, hogy $y_1=x$ partikuláris megoldás. A végtelen sorokkal történő megoldás gyakorlása érdekében azonban az alábbi megoldást választjuk.

A differenciálegyenletnek az $x_0=0$ pont közönséges pontja, ezért a megoldás kereshető

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

alakban. Ekkor

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}.$$

A differenciálegyenletbe visszahelyettesítve

$$(2x^2+1)\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}+3x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}-3\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \equiv 0.$$

A műveletek elvégzése után

$$\sum_{k=2}^{\infty} 2k(k-1)c_k x^k+\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}+\sum_{k=1}^{\infty} 3kc_k x^k-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} 3c_k x^k \equiv 0.$$

x^n együtthatóját megkapjuk, ha a bal oldal első, harmadik és negyedik tagjában k helyébe n-t, a második tagban k helyébe $(n+2)$-t írunk, mert $k-2=n$. Ezt elvégezve x^n együtthatója

$$2n(n-1)c_n+(n+2)(n+1)c_{n+2}+3nc_n-3c_n,$$

ill. összevonás után

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+(2n^2+n-3)c_n$$

alakú. Ennek értéke 0 kell, hogy legyen, hiszen az egyenlet homogén volt, és így a következő rekurziós formulát kapjuk

$$c_{n+2} = -\frac{(2n+3)(n-1)}{(n+2)(n+1)}c_n.$$

n helyébe a természetes számokat helyettesítve, a hatványsor együtthatói rendre megkaphatók. Például

ha $n=0$, akkor $c_2 = -\frac{-3}{2}c_0 = \frac{3}{2}c_0$,

ha $n=1$, akkor $c_3 = -\frac{5\cdot 0}{3\cdot 2}c_1 = 0$,

ha $n=2$, akkor $c_4 = -\frac{7\cdot 1}{4\cdot 3}c_2 = -\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{2}c_0 = -\frac{7}{8}c_0$.

Látszik, hogy minden páratlan indexű együttható zérus lesz, mert $c_3=0$.

Ha $n=4$, akkor

$$c_6 = -\frac{11\cdot 3}{6\cdot 5}c_4 = -\frac{11}{10}\left(-\frac{7}{8}\right)c_0 = \frac{77}{80}c_0.$$

Megmutatható,

ha $n=2m-2$, akkor

$$c_{2m} = (-1)^{m+1}\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots(4m-1)}{2^m(2m-1)m!}c_0.$$

Differenciálegyenletünk megoldása tehát így írható fel:

$$y(x) = c_1x+c_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots(4n-1)}{2^n(2n-1)n!}x^{2n}\right].$$

Vegyük észre, hogy az $y_1=x$ partikuláris megoldást így is megkaptuk. Hányadoskritérium segítségével igazolható, hogy a megoldás minden véges x-re konvergens.

3. Határozzuk meg az

$$(x^2-2x+2)y''+2(x-1)y' = 0$$

differenciálegyenlet megoldását $x=1$ hely környezetében.

Mivel az $x=1$ pont a differenciálegyenlet közönséges pontja, ezért a megoldás

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-1)^k$$

alakban kereshető. Az egyszerűbb számítás érdekében alkalmazzuk a $v=x-1$ helyettesítést. Ekkor $x^2-2x+2 = v^2+1$, és differenciálegyenletünk

$$(v^2+1)y''+2vy' = 0,$$

alakú. A vessző most a v változó szerinti differenciálást is jelentheti, hiszen $\frac{dy}{dv}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dv}=y'\cdot 1=y'$. A differenciálegyenlet megoldását most az

$$y(v)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k v^k$$

alakban kereshetjük. A deriváltak

$$y'(v)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k k v^{k-1},$$

$$y''(v)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k k(k-1)v^{k-2}.$$

A szummációs indexeket egységesen $k=0$-tól futtatjuk, noha tudjuk, hogy a második esetben csak $k=1$-től, a harmadik esetben csak $k=2$-től kapunk 0-tól különböző együtthatót.

Ha ezeket a differenciálegyenletbe visszahelyettesítjük, akkor

$$(v^2+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_k k(k-1)v^{k-2}+2v\sum_{k=0}^{\infty}c_k k v^{k-1}=0,$$

ill.

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_k v^k+\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)c_k v^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}2kc_k v^k=0.$$

v^n együtthatója

$$n(n-1)c_n+(n+2)(n+1)c_{n+2}+2nc_n.$$

Ez zérus kell, hogy legyen és így

$$c_{n+2}=-\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+1)}c_n=-\frac{n}{n+2}c_n.$$

Ha $n=0$, akkor

$$c_2=0\cdot c_0=0,$$

és ebből következik, hogy valamennyi páros indexű együttható zérus.

Ha $n=1$, akkor $c_3=-\frac{1}{3}c_1$,

ha $n=3$, akkor $c_5=-\frac{3}{5}c_3=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)c_1=\frac{1}{5}c_1$,

ha $n=2m-1$, akkor

$$c_{2m+1}=(-1)^m\frac{(2m-1)(2m-3)\dots 1}{(2m+1)(2m-1)\dots 1}c_1=(-1)^m\frac{1}{2m+1}c_1.$$

Így a megoldás

$$y(v)=c_0+c_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{v^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=c_0+c_1\left[v-\frac{v^3}{3}+\frac{v^5}{5}-\frac{v^7}{7}+\dots+(-1)^n\frac{v^{2n+1}}{2n+1}\right].$$

Vegyük észre, hogy a szögletes zárójelben $\operatorname{arctg} v$ hatványsora áll, és így

$$y(v)=c_0+c_1\operatorname{arctg} v.$$

Ha visszatérünk az eredeti változóra, akkor a megoldás

$$y(x)=c_0+c_1\operatorname{arctg}(x-1).$$

Megjegyzés. Differenciálegyenletünk egyszerűen egzakt úton is megoldható. Ugyanis

$$\frac{y''}{y'}=-\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1},$$

ill. integrálva

$$\ln y'=-\ln[(x-1)^2+1]+\ln c_1.$$

Ebből

$$y'=\frac{c_1}{(x-1)^2+1},$$

és így

$$y=c_1\operatorname{arctg}(x-1)+c_0.$$

4. Oldjuk meg a

$$3x^2y''+x(x-5)y'+5y=0$$

differenciálegyenletet az $x=0$ hely közelében.

A differenciálegyenletnek az $x_1=0$ pont szinguláris pontja, de mivel az egyenlet felírható az

$$y''+\frac{1}{3}\frac{x-5}{x}y'+\frac{1}{3}\frac{5}{x^2}=0$$

alakban, ezért az $x_1=0$ pont szabályos szinguláris pont. Esetünkben $p_0=-\frac{5}{3}$, $q_0=\frac{5}{3}$.

Ha a differenciálegyenlet megoldását

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i+r}$$

alakban keressük, akkor a deriváltak

$$y'(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+r)c_i x^{i+r-1},$$

$$y''(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+r)(i+r-1)c_i x^{i+r-2},$$

és ezeket az eredeti differenciálegyenletbe helyettesítve

$$\sum_{i=0}^{\infty}3(i+r)(i+r-1)c_i x^{r+i}+\sum_{i=0}^{\infty}(i+r)c_i x^{r+i+1}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}5(i+r)c_i x^{r+i}+\sum_{i=0}^{\infty}5c_i x^{r+i}\equiv 0.$$

Az indexegyenlet most

$$r(r-1)-\frac{5}{3}r+\frac{5}{3}=0,$$

ill. rendezés után

$$3r^2-8r+5=(3r-5)(r-1)=0$$

alakú. Gyökei $r_1=1$, $r_2=\frac{5}{3}$. A gyökök különbsége nem egész, tehát az első esettel van dolgunk.

Ha $r_1=1$, akkor az együtthatókra kapott egyenlet

$$\sum_{i=0}^{\infty}3(i+1)ic_i x^{i+1}+\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)c_i x^{i+2}-$$

$$-5\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)c_i x^{i+1}+5\sum_{i=0}^{\infty}c_i x^{i+1}\equiv 0.$$

Az x^k hatvány együtthatója

$$3k(k-1)c_{k-1}+(k-1)c_{k-2}-5kc_{k-1}+5c_{k-1}=0,$$

ill.

$$(3k-5)(k-1)c_{k-1}=-(k-1)c_{k-2}$$

alakú, és ebből

$$c_{k-1}=-\frac{1}{3k-5}c_{k-2}.$$

Az első néhány együttható:

Ha $k=2$, akkor $c_1=-\frac{1}{6-5}c_0=-c_0$,

ha $k=3$, akkor $c_2=-\frac{1}{9-5}c_1=\frac{1}{4}c_0$,

ha $k=4$, akkor $c_3=-\frac{1}{12-5}c_2=-\frac{1}{7\cdot 4}c_0$,

és így tovább,

ha $k=n$, akkor $c_n=\frac{(-1)^{n-1}}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3n-5)}c_0$.

Az $r=1$ értékhez tartozó hatványsor tehát

$$y_1(x)=c_0x\left(1-x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4\cdot 7}x^3+\ldots\right)=$$

$$=c_0x+c_0\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3k-5)}x^k.$$

Ha $r_2=\frac{5}{3}$, akkor az együtthatókra kapott egyenlet

$$x^{\frac{5}{3}}\left[\sum_{i=0}^{\infty}3\left(i+\frac{5}{3}\right)\left(i+\frac{5}{3}-1\right)c_i x^i+\sum_{i=0}^{\infty}\left(i+\frac{5}{3}\right)c_i x^{i+1}-\right.$$

$$\left.-5\sum_{i=0}^{\infty}\left(i+\frac{5}{3}\right)c_i x^i+5\sum_{i=0}^{\infty}c_i x^i\right]\equiv 0.$$

Az x^k hatvány együtthatója

$$3\left(k+\frac{5}{3}\right)\left(k+\frac{5}{3}-1\right)c_k+\left(k-1+\frac{5}{3}\right)c_{k-1}-$$

$$-5\left(k+\frac{5}{3}\right)c_k+5c_k=0$$

kell, hogy legyen, és ebből

$$c_k=-\frac{1}{3k}c_{k-1}.$$

Az első néhány együttható:

$$\text{Ha}\quad k=1,\quad \text{akkor}\quad c_1=-\frac{1}{3}c_0,$$

$$\text{ha}\quad k=2,\quad \text{akkor}\quad c_2=-\frac{1}{6}c_1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}c_0=\frac{1}{2\cdot 3^2}c_0,$$

$$\text{ha}\quad k=3,\quad \text{akkor}\quad c_3=-\frac{1}{9}c_2=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\cdot 3^3}c_0=$$

$$=-\frac{1}{3!3^3}c_0$$

és így tovább,

$$\text{ha}\quad k=n,\quad \text{akkor}\quad c_n=\frac{(-1)^n}{3^n n!}c_0.$$

Mivel ez a c_0 nem azonos az első sor előző együtthatójával, ezért jelöljük b_0-lal, és így

$$y_2(x)=b_0x^{\frac{5}{3}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}x^n\right).$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)=$$

$$=c_0x+c_0\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots(3k-5)}x^k+$$

$$+b_0x^{\frac{5}{3}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^k k!}x^k\right).$$

A hányadoskritérium segítségével igazolható, hogy a megoldás minden véges x-re konvergens.

5. Határozzuk meg az

$$(x^2+x)y''-(2x+5)y'-4y=0$$

differenciálegyenlet megoldását az $x=0$ pont közelében.

Az $x_1=0$ pont a differenciálegyenlet szabályos szinguláris pontja, hiszen az egyenlet átalakítva

$$y''-\frac{5+2x}{x(x+1)}y'-\frac{4}{x(x+1)}y=0,$$

ill.

$$y''-\frac{5+2x}{x(x+1)}y'-\frac{4x}{x^2(x+1)}y=0$$

alakú. Ezért a differenciálegyenlet megoldása kereshető az

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^{i+r}$$

alakban. A deriváltak

$$y'(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+r)c_ix^{i+r-1},$$

$$y''(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+r)(i+r-1)c_ix^{i+r-2}.$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+r)(i+r-1)c_ix^{i+r}+\sum_{i=0}^{\infty}(i+r)(i+r-1)c_ix^{i+r-1}-$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}2(i+r)c_ix^{i+r}-\sum_{i=0}^{\infty}5(i+r)c_ix^{i+r-1}-\sum_{i=0}^{\infty}4c_ix^{i+r}\equiv 0.$$

Ha $i=0$, akkor az indexegyenlet

$$r(r-1)-5r=0,$$

és ennek gyökei

$$r_1=0,\quad r_2=6.$$

A gyökök különbsége egész szám. Legyen $r=r_1=0$. Ekkor x^k együtthatója

$$k(k-1)c_k+(k+1)kc_{k+1}-2kc_k-5(k+1)c_{k+1}-4c_k$$

alakú, és ez 0 kell hogy legyen. Rendezés után

$$(k+1)(k-5)c_{k+1}=-(k+1)(k-4)c_k,$$

és ebből

$$c_{k+1}=-\frac{k-4}{k-5}c_k.$$

$$\text{Ha}\quad k=0,\quad \text{akkor}\quad c_1=-\frac{-4}{-5}c_0=-\frac{4}{5}c_0,$$

$$\text{ha}\quad k=1,\quad \text{akkor}\quad c_2=-\frac{-3}{-4}c_1=\frac{3}{5}c_0,$$

$$\text{ha}\quad k=2,\quad \text{akkor}\quad c_3=-\frac{-2}{-3}c_2=-\frac{2}{5}c_0,$$

$$\text{ha}\quad k=3,\quad \text{akkor}\quad c_4=-\frac{-1}{-2}c_3=\frac{1}{5}c_0,$$

$$\text{ha}\quad k=4,\quad \text{akkor}\quad c_5=-\frac{0}{-1}c_4=0.$$

A következő együtthatót a rendezés előtti

$$(k-5)c_{k+1} = -(k-4)c_k$$

egyenletből számítjuk ki.
Ha $k=5$, akkor

$$0\cdot c_6 = -c_5 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy c_6 szabadon választható meg.

$$\text{Ha} \quad k = 6, \quad \text{akkor} \quad c_7 = -\frac{6-4}{6-5}c_6 = -(6-4)c_6,$$

$$\text{ha} \quad k = 7, \quad \text{akkor} \quad c_8 = -\frac{7-4}{7-5}c_7 = (7-4)c_6,$$

ill. általában

$$\text{ha} \quad k \geqq 6, \quad \text{akkor} \quad c_{k+1} = (-1)^{k+1}(k-4)c_6.$$

Két partikuláris megoldást is kaphatunk, mégpedig az

$$y_1(x) = c_0\left(1-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}x^2-\frac{2}{5}x^3+\frac{1}{5}x^4\right),$$

$$y_2(x) = c_6\left(x^6+\sum_{k=7}^{\infty}(-1)^k(k-5)x^k\right)$$

megoldásokat. Az általános megoldás pedig az $\frac{c_0}{5} = A$ és $c_6=B$ jelöléssel:

$$y(x) = A(5-4x+3x^2-2x^3+x^4)+B[x^6+\sum_{k=7}^{\infty}(-1)^k(k-5)x^k].$$

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK

Közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk akkor, ha az egy független változótól (jelölje t) függő több függvény meghatározására olyan egyenletrendszert tudunk felírni, amely a független változót, a függvényeket és ezek (t szerint vett) deriváltjait tartalmazza. A differenciálegyenlet-rendszerek megoldása hasonlóságot mutat az algebrai egyenletrendszerek megoldásához.

A következőkben csak a legegyszerűbb differenciálegyenlet-rendszerek, mégpedig elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek megoldására szorítkozunk.

A könnyebb írásmód kedvéért bevezetjük a $\frac{d}{dt} = D$ operátor segítségével a

$$\frac{dx}{dt} = Dx, \quad \frac{dy}{dt} = Dy, \quad \frac{dz}{dt} = Dz$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = D^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = D^2y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = D^2z$$

jelöléseket. Ezek segítségével például a

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 4x - y = e^t$$

egyenlet a

$$2(D^2-2)x + (D-1)y = e^t$$

alakban írható fel. A D operátor definíciója alapján könnyen be lehet látni, hogy a D operátorral formálisan úgy szabad számolni, mintha az szám volna. Így például

$$D^2x = D \cdot Dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

ELSŐRENDŰ LINEÁRIS ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK

A. KÉT ISMERETLEN FÜGGVÉNYT TARTALMAZÓ RENDSZEREK

A két ismeretlen függvényt tartalmazó és két egyenletből álló elsőrendű állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszer általános alakja

$$\begin{cases} a_{11}(D)x+a_{12}(D)y=f_1(t), \\ a_{21}(D)x+a_{22}(D)y=f_2(t), \end{cases}$$

ahol az $a_{ik}(D)$ együtthatók a D operátort legfeljebb első hatványon tartalmazzák. Ilyen egyenletrendszer például a

$$\begin{cases} 2(D-2)x+(D-1)y=e^t, \\ (D+3)x+\qquad y=0 \end{cases}$$

egyenletrendszer.

Az egyenletrendszer megoldása — az algebrai egyenletrendszerek megoldásához hasonlóan — történhet például valamely változónak a kiküszöbölésével helyettesítés útján, vagy az állandó együtthatók módszere útján, de történhet a Cramer-szabállyal is.

A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldásában szereplő tetszőleges állandók száma egyenlő az egyenletrendszer determinánsának, a

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D) \end{vmatrix}$$

determinánsnak kifejtésében szereplő D fokszámával. Ha $\Delta\equiv 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása. Ezzel az esettel nem foglalkozunk.

Megjegyezzük, hogy az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer gyakran vezet másodrendű differenciálegyenlet megoldásához.

Gyakorló feladatok

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{cases} 2x'+y'-4x-y=e^t \\ x'+\qquad 3x+y=0. \end{cases}$$

A D operátor segítségével az egyenletrendszer így is felírható:

$$\begin{cases} 2(D-2)x+(D-1)y=e^t \\ (D+3)x+\qquad y=0. \end{cases}$$

Első megoldás: Ha a második egyenletet differenciáljuk, akkor

$$D^2x+3Dx+Dy=0,$$

és ezt az egyenletet a feltételezett $x(t)$, $y(t)$ megoldás kielégíti. Egyenletrendszerünk helyébe tehát a

$$\begin{cases} 2Dx-4x+Dy-y=e^t, \\ Dx+3x+y\qquad =0, \\ D^2x+3Dx+Dy\quad =0 \end{cases}$$

egyenletrendszer léphet. Ebből azonban az y függvényt tartalmazó valamennyi tag könnyen kiküszöbölhető, ha az első egyenletet (-1)-gyel, a másodikat (-1)-gyel megszorozzuk és a harmadikhoz adjuk. Így a

$$D^2x+x=-e^t$$

másodrendű állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlethez jutunk, amely a szokott módon megoldható. Az

$$X''+X=0$$

homogén rész általános megoldása

$$X=c_1\cos t+c_2\sin t,$$

az inhomogén rész partikuláris megoldása (a próbafüggvény módszerével) pedig

$$x_0=-\frac{1}{2}e^t.$$

Így differenciálegyenlet-rendszerünk egyik megoldásfüggvénye

$$x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t-\frac{1}{2}e^t.$$

Az egyenletrendszer második egyenletéből

$$y=-(D+3)x=-Dx-3x.$$

A már kiszámított x függvényt és deriváltját ide behelyettesítve

$$y = -\left(-c_1 \sin t + c_2 \cos t - \frac{1}{2} e^t\right) -$$

$$-3\left(c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} e^t\right),$$

azaz

$$y = (c_1 - 3c_2) \sin t - (3c_1 + c_2) \cos t + 2e^t.$$

Ezzel megkaptuk a második függvényt is. A két függvény együtt alkotja az általános megoldást.

Második megoldás: Annak érdekében, hogy az adott egyenletrendszerből valamelyik ismeretlen függvényt kiküszöböljük, eljárhatunk az egyenlő együtthatók módszerével is. Például y kiküszöbölése érdekében a második egyenletet $(D-1)$-gyel megszorozzuk és kivonjuk az elsőből. (Ismételten megjegyezzük, hogy a $(D-1)$-gyel való formális szorzás valójában egy operátor alkalmazását jelenti az első egyenletre.)

$$[(2D-4)-(D+3)(D-1)]\, x = e^t,$$

ill.

$$(D^2+1)\, x = -e^t,$$

és ez pontosan megegyezik az előző megoldásban kapott másodrendű differenciálegyenlettel, amit már megoldottunk.

Harmadik megoldás: A Cramer-szabály szerint eljárva, egyértelmű megoldása akkor van az egyenletrendszernek, ha az egyenletrendszer determinánsa nem zérus. Mivel

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -(D^2+1) \not\equiv 0,$$

ezért egyértelmű megoldás van, és az két tetszőleges állandót fog tartalmazni. (D foka a kifejtés után 2.) A megoldás a Cramer-szabály szerint

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

azaz a determinánsok kifejtése után

$$-(D^2+1)\, x = e^t,$$

ill.

$$\begin{vmatrix} 2(D-2) & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 2(D-2) & e^t \\ D+3 & 0 \end{vmatrix},$$

vagyis a determinánsok kifejtése után ($De^t = e^t$)

$$-(D^2+1)\, y = 4e^t.$$

Az első másodrendű egyenlet megoldása — amint azt már láttuk —

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{2} e^t.$$

A

$$D^2 y + y = -4e^t$$

másodrendű állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenlet homogén része

$$Y'' + Y = 0,$$

ennek megoldása

$$Y = c_3 \cos t + c_4 \sin t.$$

Az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével meghatározva

$$y_0 = 2e^t,$$

így az általános megoldás

$$y = Y + y_0 = c_3 \cos t + c_4 \sin t + 2e^t.$$

Az egyenletrendszer determinánsa szerint csak két szabadon választható konstans lehet, ezért c_3 és c_4 nem független c_1-től és c_2-től. Az összefüggés megállapítása érdekében helyettesítsük be a megoldásokat például a második egyenletbe. Ekkor

$$(c_2 + 3c_1 + c_3) \cos t + (3c_2 - c_1 + c_4) \sin t \equiv 0,$$

ami csak úgy lehetséges, ha

$$c_2 + 3c_1 + c_3 = 0,$$
$$3c_2 - c_1 + c_4 = 0.$$

A két egyenletből

$$c_3 = -(3c_1 + c_2), \quad c_4 = c_1 - 3c_2,$$

ez pedig pontosan megegyezik az első megoldásban kapott együtthatókkal.

2. Oldjuk meg a

$$\begin{cases} (D-1)x + Dy = 2t+1, \\ (2D+1)x + 2Dy = t \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszert!

Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a második egyenletből, akkor

$$3x = -3t - 2.$$

(Figyeljük meg, hogy közönséges első fokú egyenletet kaptunk!) Az egyenletből x kifejezhető:

$$x = -t - \frac{2}{3}.$$

Ha ezt az első egyenletbe visszahelyettesítjük és belőle Dy-t kifejezzük, akkor

$$Dy = -(D-1)\left(-t-\frac{2}{3}\right)+2t+1 =$$

$$= 1-t-\frac{2}{3}+2t+1 = t+\frac{4}{3}.$$

Felhasználtuk, hogy $Dt=1$. Integrálva

$$y = \frac{t^2}{2}+\frac{4}{3}t+c.$$

A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása tehát

$$x = -t-\frac{2}{3},$$

$$y = \frac{t^2}{2}+\frac{4t}{3}+c.$$

A megoldásban valóban csak egy állandó szerepelhet, mert az egyenletrendszer determinánsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-1 & D \\ 2D+1 & 2D \end{vmatrix} = 2D^2-2D-2D^2-D = -3D,$$

és ebben D az első hatványon fordul elő.

3. Határozzuk meg a

$$\begin{cases} (D-3)x+2(D+2)y = 2\sin t, \\ 2(D+1)x+\ (D-1)y = \ \cos t \end{cases}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását!

Az egyenletrendszer determinánsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-3 & 2(D+2) \\ 2(D+1) & D-1 \end{vmatrix} = D^2-4D+3-4(D^2+3D+2) =$$

$$= -3D^2-16D-5 \not\equiv 0,$$

és az általános megoldásban két független állandó szerepel.

A Cramer-szabály alapján az első ismeretlen függvényre a

$$\Delta \cdot x = \begin{vmatrix} 2\sin t & 2(D+2) \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix}$$

differenciálegyenlet írható fel. A jobb oldalon a determináns kifejtése és a D operátor alkalmazása után ez a

$$-(3D^2+16D+5)x = 2\cos t-2\sin t+2\sin t-4\cos t,$$

ill. a

$$3x''+16x'+5x = 2\cos t$$

alakban írható fel. A

$$3X''+16X'+5X = 0$$

homogén egyenlet karakterisztikus egyenlete

$$3\lambda^2+16\lambda+5 = 0,$$

ennek gyökei

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3},\ \lambda_2 = -5,$$

és így a homogén egyenlet általános megoldása

$$X = C_1e^{-\frac{t}{3}}+C_2e^{-5t}.$$

Az inhomogén egyenlet x_0 partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével

$$x_0 = A\cos t+B\sin t$$

alakban kereshetjük. Ekkor

$$x_0' = -A\sin t+B\cos t,$$

$$x_0'' = -A\cos t-B\sin t,$$

és ezt az inhomogén egyenletbe helyettesítve

$$(16B+2A)\cos t+(2B-16A)\sin t \equiv 2\cos t.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$16B+2A = 2, \quad \text{és} \quad 2B-16A = 0.$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$A = \frac{1}{65}, \quad B = \frac{8}{65}.$$

Így az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

$$x_0 = \frac{1}{65}(\cos t + 8 \sin t),$$

általános megoldása pedig

$$x = X + x_0 = C_1 e^{-\frac{t}{3}} + C_2 e^{-5t} + \frac{1}{65}(8 \sin t + \cos t).$$

Ez a differenciálegyenlet-rendszerünknek eleget tevő első függvény. A második függvényre a Cramer-szabály alapján a

$$\Delta \cdot y = \begin{vmatrix} D-3 & 2 \sin t \\ 2(D+1) & \cos t \end{vmatrix},$$

ill. kifejtés után a

$$-(3D^2 + 16D + 5)y = -\sin t - 3 \cos t - 4 \cos t - 4 \sin t$$

differenciálegyenlet írható fel. Összevonás után

$$3y'' + 16y' + 5y = 5 \sin t + 7 \cos t.$$

A homogén egyenlet megoldása, amint azt az előbb már láttuk,

$$Y = C_3 e^{-\frac{t}{3}} + C_4 e^{-5t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását kereshetjük a próbafüggvény módszerével. Ha

$$y_0 = A \cos t + B \sin t,$$

akkor (felhasználva az előzőekben már kiszámított deriváltakat) a visszahelyettesítés után

$$(16B + 2A) \cos t + (2B - 16A) \sin t \equiv 5 \sin t + 7 \cos t.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha

$$16B + 2A = 7, \quad 2B - 16A = 5.$$

Az egyenletrendszert megoldva

$$A = -\frac{33}{130} \quad B = \frac{61}{130},$$

és így

$$y_0 = \frac{1}{130}(61 \sin t - 33 \cos t).$$

Az általános megoldás pedig

$$y = Y + y_0 = C_3 e^{-\frac{t}{3}} + C_4 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61 \sin t - 33 \cos t).$$

Mivel a Δ determinánsban D foka 2, ezért csak két tetszőleges állandó lehet az általános megoldásban. A C_1, C_2, C_3 és C_4 állandók közötti összefüggések kiderítése érdekében helyettesítsük a kapott megoldásokat például a második egyenletbe, akkor

$$\left(\frac{4}{3} C_1 - \frac{4}{3} C_3\right) e^{-\frac{t}{3}} + (-8C_2 - 6C_4) e^{-5t} \equiv 0.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha a zárójelekben zérus áll, és így

$$C_3 = C_1, \quad C_4 = -\frac{4}{3} C_2.$$

Ezek alapján

$$y = C_1 e^{-\frac{t}{3}} - \frac{4}{3} C_2 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61 \sin t - 33 \cos t),$$

és ezzel a megoldást befejeztük.

B. HÁROM ISMERETLEN FÜGGVÉNYT TARTALMAZÓ RENDSZEREK

A három ismeretlen függvényt tartalmazó és három differenciálegyenletből álló elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszer általános alakja

$$\begin{cases} a_{11}(D)x + a_{12}(D)y + a_{13}(D)z = f_1(t), \\ a_{21}(D)x + a_{22}(D)y + a_{23}(D)z = f_2(t), \\ a_{31}(D)x + a_{32}(D)y + a_{33}(D)z = f_3(t), \end{cases}$$

ahol az $a_{ik}(D)$ együtthatók a D operátort legfeljebb első hatványon tartalmazzák. Az egyenletrendszer megoldása az előző fejezetben leírt módszerek valamelyikével történhet.

Itt is érvényes az a tétel, hogy a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldásában pontosan annyi tetszőleges állandó szerepelhet, amekkora az egyenletrendszer Δ determinánsának a kifejtésében a D fokszáma.

Gyakorló feladat

Határozzuk meg a

$$\begin{cases} Dx-(D+1)y = 1, \\ (D+2)x-(D-1)z = 1, \\ (D+1)y+(D+2)z = 0 \end{cases}$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

Az egyenletrendszer eléggé speciális, ezért nem érdemes a Cramer-szabályt használni.

Ha az első egyenletből kivonjuk a harmadikat, akkor

$$Dx-(D+2)z = 1,$$

ebből y hiányzik. Ha most a második egyenletre a D, az előbb kapott (negyedik) egyenletre a $D+2$ operátort alkalmazzuk, és a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor

$$(5D+4)z = -2,$$

ill.

$$5z'+4z+2 = 0.$$

Ez az elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet már csak a z függvényt tartalmazza.

Az egyenlet változói szétválaszthatók

$$\frac{dz}{2z+1} = -\frac{2}{5}\,dt.$$

Integrálás után

$$\frac{1}{2}\ln|2z+1| = -\frac{2}{5}t+c,$$

és ebből

$$z = C_1e^{-\frac{4}{5}t}-\frac{1}{2}.$$

Az egyenletrendszer harmadik egyenletéből

$$(D+1)y = -(D+2)z,$$

és ha ide a kiszámított z függvényt behelyettesítjük, akkor

$$(D+1)y = \frac{4}{5}C_1e^{-\frac{4}{5}t}-2C_1e^{-\frac{4}{5}t}+1$$

ill.

$$y'+y = 1-\frac{6}{5}C_1e^{-\frac{4}{5}t}.$$

A kapott egyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén differenciálegyenlet. Az

$$Y'+Y = 0$$

homogén rész általános megoldása

$$Y = C_2e^{-t}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével kereshetjük. Ha

$$y_0 = Ae^{-\frac{4}{5}t}+B, \quad \text{akkor} \quad y_0' = -\frac{4}{5}Ae^{-\frac{4}{5}t},$$

és ezeket visszahelyettesítve

$$\left(-\frac{4}{5}A+A\right)e^{-\frac{4}{5}t}+B \equiv 1-\frac{6}{5}C_1e^{-\frac{4}{5}t}.$$

Ez csak úgy lehetséges, ha

$$A = -6C_1, \quad B = 1.$$

Így

$$y_0 = -6C_1e^{-\frac{4}{5}t}+1,$$

és az általános megoldás

$$y = Y+y_0 = C_2e^{-t}-6C_1e^{-\frac{4}{5}t}+1.$$

A harmadik függvény meghatározása érdekében helyettesítsük az egyenletrendszer első egyenletébe a most kiszámított y függvényt:

$$Dx = 1-(D+1)y = \frac{6}{5}C_1e^{-\frac{4}{5}t}.$$

Ebből integrálással

$$x = -\frac{3}{2}C_1e^{-\frac{4}{5}t}+C_3.$$

Minthogy az egyenletrendszer

$$\Delta = \begin{vmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -(D-1) \\ 0 & D+1 & D+2 \end{vmatrix} = -(5D^2+9D+4)$$

determinánsában D foka 2, ezért az egyenletrendszer általános megoldásában pontosan két tetszőleges konstans lehet. A mi megoldásunkban három van, valamelyik nem független a többitől. Önkényes és helytelen volna például a legutoljára kapott C_3 konstanst elhagyni. Az állandók közötti összefüggés kiderítése érdekében helyettesítsük be a kapott függvényeket például a második egyenletbe. Ekkor

$$\left(\frac{6}{5}C_1e^{-\frac{4}{5}t}-3C_1e^{-\frac{4}{5}t}+2C_3\right)-$$

$$-\left(-\frac{4}{5}C_1e^{-\frac{4}{5}t}+\frac{1}{2}-C_1e^{-\frac{4}{5}t}\right)\equiv 1,$$

és ez csak úgy lehetséges, ha $C_3=\dfrac{3}{4}$. Kiderült, hogy nincs ugyan összefüggés az állandók között, de C_3 nem választható meg tetszőlegesen.

A differenciálegyenlet-rendszer megoldása tehát az

$$x=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}C_1e^{-\frac{4}{5}t},$$

$$y=1-6C_1e^{-\frac{4}{5}t}+C_2e^{t},$$

$$z=-\frac{1}{2}+C_1e^{-\frac{4}{5}t}$$

függvényhármas.

PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

I. ELSŐRENDŰ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Elsőrendű parciális differenciálegyenletnek nevezzük azt a függvénykapcsolatot, amely a független változók $(x, y, z, \ldots)$, az ezektől függő ismeretlen függvény (u), és ennek az előbbi független változók szerinti elsőrendű parciális deriváltjai között összefüggést határoz meg. Általános alakja

$$f\left(x, y, z, \ldots; u; \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \ldots\right) = 0.$$

Ebben a könyvben legtöbbször csak kétváltozós függvényekre vonatkozó parciális differenciálegyenletekkel fogunk foglalkozni. Az egyszerűbb írásmód érdekében vezessük be a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q$$

jelöléseket. A kétváltozós $u(x, y)$ függvényre vonatkozó elsőrendű, parciális differenciálegyenlet általános alakja tehát

$$f(x, y, u, p, q) = 0.$$

Az $f(x, y, u, p, q)=0$ differenciálegyenlet megoldása az a kétváltozós függvény, amely deriváltjaival együtt kielégíti a differenciálegyenleteket.

Például az

$$u(x, y) = ax+by+a^2+ab+b^2$$

függvény, amelyben a és b tetszőleges állandók, megoldása az

$$u = px+qy+p^2+pq+q^2$$

differenciálegyenletnek, mert

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y} = b,$$

és ezeket az egyenlet jobb oldalába helyettesítve az

$$ax + by + a^2 + ab + b^2$$

kifejezést kapjuk, ami valóban egyenlő az u függvénnyel. Mivel a megoldásban szabadon választott állandók szerepelnek, de tetszőleges függvények nem, ezért ez a megoldás a differenciálegyenlet teljes megoldása.

A. ELSŐRENDŰ KVÁZILINEÁRIS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

A két független változót tartalmazó elsőrendű parciális differenciálegyenletet *kvázilineárisnak* nevezzük, ha felírható a

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} = R$$

ill.

$$(1) \qquad Pp + Qq = R$$

alakban, ahol P, Q és R az x és y független és az u függő változó függvényei. Fel kell tennünk, hogy P, Q és R valamilyen meghatározott térrészben a deriváltjaikkal együtt folytonosak és $P^2 + Q^2 \neq 0$.

A differenciálegyenlet az értelmezési tartomány minden pontjához két irányt rendel és ezzel két iránymezőt határoz meg. A differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint megkeresni mindazokat a kétváltozós függvényeket, amelyek a differenciálegyenletet kielégítik. Ezek geometriailag egy felületsereget (integrálfelületet) jelentenek. Be lehet látni, hogy

a megoldást azok a felületek jelentik, amelyeknek minden pontjában az érintősík tartalmazza a differenciálegyenlet által meghatározott irányokat.

A differenciálegyenlet általános megoldása tetszőleges függvényeket tartalmaz, teljes megoldása két tetszőleges állandót.

A kezdeti feltételeket most annak a görbének az egyenletével szokás megadni, melyen a kiszemelt integrálfelületnek át kell haladnia.

1. Ha az (1) egyenletben $P \equiv 0$ vagy $Q \equiv 0$, akkor az egyenlet egyetlen integrálással könnyen megoldható.

Például a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$u = x^2 + 3xy + g(y),$$

ahol $g(y)$ tetszőleges (csak y-tól függő) függvény.

2. Ha $P \neq 0$, $Q \neq 0$, $R \neq 0$, akkor — amint azt Lagrange megmutatta — az (1) parciális differenciálegyenlet megoldása visszavezethető a

$$(2) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszer megoldására (Lagrange-féle rendszer). Az egyenletrendszer megoldása általában úgy történik, hogy a három felírható egyenletből alkalmas rendezéssel két integrálható változatot keresünk. Adott esetben a második egyenlet megoldásához felhasználhatjuk az első egyenlet megoldását. Az (1) egyenlet általános megoldása felírható az

$$F(v, w) = 0$$

alakban (F tetszőleges függvény), ahol

$$v = v(x, y, u) = a, \quad w = w(x, y, u) = b$$

a (2) egyenletrendszer két független megoldása (a és b tetszőleges állandó), továbbá v és w legalább egyike tartalmazza u-t.

Ha $v(x, y, u)=a$ és $w(x, y, u)=b$ két független megoldása a (2) egyenletrendszernek, és α és β két szabadon választott, egymástól független állandó, akkor a

$$v = \alpha w+\beta$$

kifejezést az (1) differenciálegyenlet teljes megoldásának nevezik.

A teljes megoldás geometriai jelentése egy kétparaméteres felületsereg (esetünkben paraméterei α és β), amelynek — amint az igazolható — nincs burkoló felülete, hiszen a tetszőleges állandók lineáris kapcsolatban állnak a v és w megoldásokkal. Egy az α és β állandók között fennálló kapcsolat megadásával, például a $\beta=h(\alpha)$ függvény megadásával, a felületseregből kiválasztható egy olyan egyparaméteres felületsereg, amelynek van burkoló felülete, és ennek egyenlete a

$$\begin{cases} v = \alpha w+h(\alpha), \\ 0 = w+h'(\alpha) \end{cases}$$

egyenletrendszerből számítható ki.

3. Hasonló módon oldhatók meg a kettőnél több független változót tartalmazó függvényekre felírt, elsőrendű, lineáris, parciális differenciálegyenletek is.

Gyakorló feladatok

1. Keressük meg azokat az $u(x, y)$ függvényeket, amelyek eleget tesznek a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

differenciálegyenletnek. Írjuk fel annak az integrálfelületnek az egyenletét, amely átmegy az $y = -x+1$ egyenesen.

Könnyű látni, hogy valamennyi keresett $u(x, y)$ függvény az

$$u(x, y) = x+g(y)$$

alakban írható fel, ahol $g(y)$ tetszőleges függvény, mert ezekre és csak ezekre teljesül a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

differenciálegyenlet. A felírt megoldás a differenciálegyenlet általános megoldása.

Az x, y síkban levő $y+x-1 = 0$ egyenesen áthaladó integrálfelület egyenletében $u=0$. A két egyenlet jobb oldala 0, így a bal oldaluk is egyenlő kell hogy legyen, ezért

$$x+g(y) = y+x-1,$$

ebből $g(y) = y-1$, és így a keresett integrálfelület egyenlete

$$u = x+y-1,$$

ez pedig (az x, y, u tengelyű koordináta-rendszerben) egy sík egyenlete.

2. Határozzuk meg a

$$2p+3q = 1$$

differenciálegyenlet általános megoldását! Keressünk olyan integrálfelületeket, amelyeknek van burkoló felülete.

Az egyenlet lineáris, a Lagrange-féle rendszere

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{du}{1}.$$

A

$$\frac{dx}{2} = \frac{du}{1}$$

közönséges differenciálegyenlet megoldása

$$x-2u = a,$$

a

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3}$$

egyenleté

$$3x-2y = b.$$

Az általános megoldás

$$F(x-2u,\ 3x-2y) = 0,$$

ahol F tetszőleges függvény.

A harmadiknak felírható közönséges differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{3} = \frac{du}{1}$$

alakú, ennek megoldása

$$y-3u = c.$$

Ha ezt a megoldást az előző két megoldás valamelyikével társítjuk, a

$$G(x-2u,\ y-3u) = 0,$$

és a

$$H(3x-2y,\ y-3u) = 0$$

általános megoldásokhoz jutunk, ahol G és H tetszőleges függvények. Belátható, hogy e három általános megoldás ekvivalens, így ezek bármelyikét *az* általános megoldásnak tekinthetjük.

A differenciálegyenlet teljes megoldása

$$x-2u = \alpha(3x-2y)+\beta$$

alakú (α és β tetszőleges állandók), és ez kétparaméterű felületsereget, mégpedig — mivel valamennyi változó első fokú — két síksereget határoz meg.

Hogy a teljes megoldásból kiválaszthassunk olyan egyparaméteres felületsereget, amelynek van burkoló felülete, tegyük fel, hogy $\beta=\alpha^2$. Ekkor

$$(1)\quad x-2u = \alpha(3x-2y)+\alpha^2.$$

α szerint differenciálva

$$0 = 3x-2y+2\alpha,$$

és ebből

$$\alpha = \frac{1}{2}(2y-3x).$$

Ezt visszahelyettesítve az (1) teljes megoldásba

$$x-2u = -\frac{1}{2}(3x-2y)^2+\frac{1}{4}(3x-2y)^2,$$

azaz

$$(2)\qquad u = \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}(3x-2y)^2.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez parabolikus henger egyenlete. Ezek szerint az adott differenciálegyenlet teljes megoldását jelentő két síkseregből a $\beta=\alpha^2$ feltétellel olyan síksereget sikerült kiválasztanunk, amelynek burkoló felülete a (2) egyenletű parabolikus henger. A síkok e parabolikus henger érintősíkjai.

3. Oldjuk meg az

$$xp+yq = 3u$$

parciális differenciálegyenletet.

Az egyenlet lineáris, a Lagrange-féle rendszer

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{3u}.$$

Az első egyenlet

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

A közönséges differenciálegyenlet változói szeparáltak, tehát integrálva mind a két oldalon

$$\ln|x|+\ln a = \ln|y|,$$

és ebből

$$a = \frac{y}{x}.$$

Így $\quad v = \dfrac{y}{x} = a.$

Hasonló módon például a

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{3u}$$

egyenletből

$$3\ln|x|+\ln b = \ln|u|,$$

ill.

$$b = \frac{u}{x^3} = w.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát felírható az

$$F\left(\frac{y}{x},\ \frac{u}{x^3}\right) = 0$$

alakban, ahol F tetszőleges függvény.

Ha a harmadiknak felírható

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{3u}$$

egyenlet

$$\frac{u}{y^3} = c$$

megoldását társítottuk volna az előző két egyenlet megoldásának valamelyikéhez, akkor a

$$G\left(\frac{y}{x}, \frac{u}{y^3}\right) = 0,$$

$$H\left(\frac{u}{x^3}, \frac{u}{y^3}\right) = 0$$

általános megoldásokhoz jutottunk volna (G és H tetszőleges függvények). A kapott megoldások azonban ekvivalensek, és ezért ezek bármelyikét az általános megoldásnak nevezhetjük.

A differenciálegyenlet teljes megoldása az általános megoldás első alakja alapján

$$\frac{y}{x} = \alpha \frac{u}{x^3} + \beta,$$

ill.

$$u = \frac{yx^2 - \beta x^3}{\alpha} = \frac{x^2}{\alpha}(y - \beta x).$$

Ha például az általános megoldás harmadik alakjából indulunk ki, akkor

$$\frac{u}{x^3} = \alpha_1 \frac{u}{y^3} + \beta_1,$$

és ebből a teljes megoldás

$$u = \beta_1 \frac{(xy)^3}{y^3 - \alpha_1 x^3}.$$

4. Határozzuk meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását

$$x^2 p - xyq = y^2.$$

Az egyenlethez tartozó Lagrange-féle egyenletrendszer

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{du}{y^2}.$$

A

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{-xy}$$

differenciálegyenlet változóit szétválasztva

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y},$$

integrálva

$$\ln|x| = -\ln|y| + \ln a,$$

és ebből rendezés után

$$xy = a.$$

Így

$$v = xy.$$

Felhasználva, hogy $xy = a$, a másodiknak felírható közönséges differenciálegyenletünk

$$\frac{dy}{-a} = \frac{du}{y^2}$$

alakú. Az egyenlet változóit szétválasztva és integrálva

$$y^2\, dy = -a\, du,$$

$$\frac{y^3}{3} + au = b,$$

ill. a értékét visszahelyettesítve

$$\frac{y^3}{3} + xyu = b, \quad y^3 + 3xyu = 3b.$$

Így

$$w = y^3 + 3xyu.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása

$$F(xy, y^3 + 3xyu) = 0$$

alakú, ahol F tetszőleges függvény.

Ellenőrizzük számításainkat abban a speciális esetben, amikor $F(u, v) = u + v$ alakú, azaz a megoldás

$$xy + y^3 + 3xyu = 0$$

alakú! A p és q parciális deriváltak előállítása érdekében az egyenlet mind a két oldalát előbb x, majd y szerint parciálisan differenciáljuk.

$$y + 3yu + 3xyp = 0,$$

$$x + 3y^2 + 3xu + 3xyq = 0.$$

Ha az első egyenlet minden tagját y-nal egyszerűsítjük, majd x-szel megszorozzuk és az első egyenletből a másodikat kivonjuk, akkor

$$3x^2p-3xyq-3y^2=0,$$

és ez valóban eredeti differenciálegyenletünk

$$x^2p-xyq=y^2$$

alakjára hozható, tehát megoldásunk helyes volt.

Megjegyezzük, hogy az általános megoldás felírható más alakban is. Alakítsuk át a második közönséges differenciálegyenlet

$$y^3+3xyu=3b$$

megoldását a következő módon (a harmadik lépésben felhasználjuk, hogy az első egyenlet megoldása $xy=a$):

$$y^2+3xu=\frac{3b}{y}=\frac{3bx}{xy}=\frac{3b}{a}x=cx,$$

ahol c tetszőleges állandó. Ha c tetszőleges, akkor feltehetjük, hogy a tetszőleges a állandónak tetszőleges függvénye: $c=\varphi(a)$. Mivel pedig $a=xy$, azért az általános megoldás felírható az

$$y^2+3xu=c\varphi\,(xy)$$

alakban is.

5. Keressük meg az

$$(y-u)p+(x-y)q=u-x$$

parciális differenciálegyenlet teljes megoldását.

Az egyenlet kvázilineáris, a Lagrange-féle egyenletrendszer

$$\frac{dx}{y-u}=\frac{dy}{x-y}=\frac{du}{u-x}.$$

A közönséges differenciálegyenlet-rendszert most a szokásostól eltérő módon oldjuk meg. Vegyük észre, hogy az

$$(y-u)+(x-y)+(u-x)\equiv 0$$

mindig teljesül. Ha a Lagrange-féle egyenletrendszer egyenleteinek egyes, egymással egyenlő oldalait egy pillanatra A-val jelöljük, akkor

$$y-u=A\,dx,\quad x-y=A\,dy,\quad u-x=A\,du.$$

Ha ezeket az előbbi azonosságba helyettesítjük, és A-val rövidítünk, akkor

$$dx+dy+du\equiv 0.$$

A bal oldalon teljes differenciál áll, mégpedig az

$$f(x,y,u)=x+y+u$$

függvény teljes differenciálja. Így integrálva

$$x+y+u=a.$$

Hasonló módon

$$x(y-u)+u(x-y)+y(u-x)\equiv 0.$$

A zárójelben álló kifejezéseket ismét a Lagrange-féle egyenletekből ide behelyettesítve

$$x\,dx+u\,dy+y\,du=0,$$

és a bal oldalon ismét teljes differenciál áll, mégpedig — amint az könnyen észrevehető — az

$$f(x,y,u)=\frac{x^2}{2}+yu$$

függvényé. Ezért integrálás után

$$x^2+2yu=b.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$F(x+y+u,\ x^2+2yu)=0$$

alakú, ahol F tetszőleges függvény.

A differenciálegyenlet teljes megoldása

$$\alpha(x^2+2yu)+\beta=x+y+u.$$

Megjegyezzük, hogy az egyik integrálfelület-sereg hiperboloidsereg a másik siksereg.

6. Határozzuk meg az

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$$

differenciálegyenlet általános megoldását!

A differenciálegyenlet elsőrendű lineáris, de a benne szereplő u függvény három független változótól függ. A megoldás menete a kétváltozós esethez hasonló.

A Lagrange-féle egyenletrendszer most

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{xyz}$$

alakú. Az (első)

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$$

egyenlet alapján

$$\ln|x|=\ln|y|+\ln a,$$

ill.

$$v=\frac{x}{y}=a.$$

Hasonló módon a

$$\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

egyenletből

$$w=\frac{z}{y}=b.$$

A harmadik megoldás megkeresése érdekében tekintsük az

$$(yz)x+(xz)y+(xy)z-3(xyz)\equiv 0$$

azonosságot. A Lagrange-féle egyenletrendszer alapján vegyük észre, hogy x és dx, y és dy, z és dz, xyz és du arányos, és az arányossági tényező ugyanaz. Így a megfelelő helyettesítéseket elvégezve

$$yzdx+xzdy+xydz-3du\equiv 0.$$

A bal oldalon teljes differenciál áll, mégpedig az

$$f(x, y, z, u)=xyz-3u$$

függvény teljes differenciálja, így a Lagrange-féle egyenletrendszer egy megoldása, és ez esetünkben a harmadik megoldás,

$$xyz-3u=c.$$

Az adott parciális differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$F\left(\frac{x}{y},\ \frac{z}{y},\ xyz-3u\right)=0$$

alakú, ahol F tetszőleges függvény.

7. Mutassuk meg, hogy annak a feltétele, hogy az

$$m(x, y)M(x, y)dx+m(x, y)N(x, y)dy=0$$

közönséges elsőrendű differenciálegyenlet egzakt legyen, egy elsőrendű lineáris parciális differenciálegyenlettel fejezhető ki. Mutassuk meg, hogyan lehet az

$$\text{(1)}\quad M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$$

egyenlethez olyan $m(x, y)$ integráló tényezőt találni, amely azt egzakttá teszi!

Ha az

$$mM\,dx+mN\,dy=0$$

egyenlet (a független változókat nem írtuk ki) egzakt, akkor

$$\frac{\partial}{\partial y}(mM)=\frac{\partial}{\partial x}(mN).$$

A differenciálást végrehajtva

$$\frac{\partial m}{\partial y}M+m\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial m}{\partial x}N+m\frac{\partial N}{\partial x},$$

és ebből

$$M\frac{\partial m}{\partial y}-N\frac{\partial m}{\partial x}=m\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

A kapott egyenlet m-re nézve elsőrendű, lineáris parciális differenciálegyenlet, ezzel állításunk első részét beláttuk. A Lagrange-féle egyenletrendszer most

$$\text{(2)}\qquad \frac{dx}{-N}=\frac{dy}{M}=\frac{dm}{m\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}$$

alakú. Az egyenletrendszer olyan megoldása, amely tartalmazza az m függvényt, az (1) egyenlet egy integráló tényezője. Mivel ennek az egyenletrendszernek két egymástól független megoldása is lehet, ezért az (1) egyenletnek két egymástól független integráló tényezője is lehet.

Írjuk át a (2) egyenletrendszert a

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{-N}dx=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}dy=\frac{dm}{m}$$

alakba. Ha

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{-N}=f(x),$$

akkor az

$$f(x)\,dx = \frac{dm}{m}$$

egyenletből az integráló tényező

$$m = e^{\int f(x)\,dx}$$

alakú, ha pedig

$$\frac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} = g(y),$$

akkor a

$$g(y)\,dy = \frac{dm}{m}$$

egyenletből az integráló tényező

$$m = e^{\int g(y)\,dy}$$

alakú.

Ha az (1) egyenlet lineáris, azaz

$$y' + Py = Q$$

alakú, akkor $M = Py - Q$, $N = 1$ és a (2) egyenletrendszer

$$P\,dx = \frac{P}{Py-Q}\,dy = \frac{dm}{m}$$

alakú. A

$$P\,dx = \frac{dm}{m}$$

egyenletből kapható

$$m = e^{\int P\,dx}$$

függvény a lineáris egyenlet integráló tényezője, tehát lineáris egyenlethez mindig található integráló tényező.

Egy másik integráló tényező a

$$\frac{P}{Py-Q}\,dy = \frac{dm}{m}$$

egyenletből számítható ki

$$Py - Q = m$$

alakban.

A (2) egyenletrendszer azonban nem oldható meg minden esetben, ezért nem található minden elsőrendű differenciálegyenlethez integráló tényező, amely azt egzakttá tenné.

B. ELSŐRENDŰ NEMLINEÁRIS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Ha az

(1) $\quad f(x, y, u, p, q) = 0$

általános alakú elsőrendű parciális differenciálegyenlethez találunk olyan

(2) $\quad F(x, y, u, a, b) = 0$

függvényt, amelyből differenciálással az a és b állandókat kiküszöbölve az (1) differenciálegyenletet kapjuk, akkor a (2) függvényt az (1) differenciálegyenlet *teljes megoldásának* nevezzük. A teljes megoldás geometriai jelentése egy kétparaméteres felületsereg, amelynek lehet burkoló felülete. Ha a burkoló létezik, akkor annak egyenlete az a és b állandóknak az

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0$$

egyenletekből való kiküszöbölésével határozható meg. Ha ez a kiküszöböléssel kapott

$$B(x, y, u) = 0$$

függvény kielégíti az (1) egyenletet, akkor ez a függvény az (1) egyenlet *szinguláris megoldása,* és ez a felületsereg burkolójának egyenlete. Ha a B függvény felírható szorzatalakban, azaz

$$B(x, y, u) = B_1(x, y, u)\,B_2(x, y, u) = 0,$$

és $B_1(x, y, u)$ kielégíti az (1) egyenletet, de $B_2(x, y, u)$ nem, akkor $B_1(x, y, u)$ a szinguláris megoldás.

Ha a (2) teljes megoldásban szereplő két állandó egyike (legyen ez b) valamilyen ismert függvénye a másik állandónak, például $b=h(a)$, akkor az (1) differenciálegyenletnek eleget tevő

$$(3) \qquad F[x, y, u, a, h(a)] = 0$$

függvény egy egyparaméteres felületsereget határoz meg. Ennek burkolója az

$$F[x, y, u, a, h(a)] = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial a} = 0$$

egyenletekből az a állandó kiküszöbölésével kapható meg.

Az (1) differenciálegyenlet *általános megoldásának* nevezzük mindazoknak a (3) megoldásoknak az összességét, amelyek a $h(a)$ függvény minden lehetséges megválasztása útján jönnek létre.

Az első fokú nemlineáris parciális differenciálegyenletek megoldása meglehetősen hosszadalmas és nehéz feladat, ezért csak néhány nagyon egyszerű egyenlet megoldására szorítkozunk.

Gyakorló feladatok

1. Határozzuk meg a

$$p^2+q^2 = 9$$

differenciálegyenlet teljes, szinguláris és általános megoldását!

Azonnal látszik, hogy a teljes megoldás

$$u = ax+by+c$$

alakú, ahol $a^2+b^2 = 9$, továbbá a és c tetszőleges állandó.

Ugyanis $\frac{\partial u}{\partial x} = p = a, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = q = b, \quad$ és így $\quad p^2+q^2 = a^2+b^2 = 9$ valóban fennáll.

Az

$$u = ax \pm \sqrt{9-a^2}\, y+c$$

teljes megoldás az x és y független változóban első fokú függvény, ezért geometriai képe két siksereg az x, y, u derékszögű koordináta-rendszerben.

A differenciálegyenlet szinguláris megoldása az

$$F = 0, \quad \text{azaz} \quad u-ax \mp \sqrt{9-a^2}\, y-c = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \text{azaz} \quad -x \pm \frac{a}{\sqrt{9-a^2}}\, y = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial c} = 0, \quad \text{azaz} \qquad -1 = 0$$

egyenletrendszerből számítható ki. Mivel az utolsó egyenlet ellentmondást tartalmaz, ezért szinguláris megoldás nincs, a két síkseregnek nincs burkolója.

A differenciálegyenlet általános megoldásának a felírásához tegyük fel, hogy $c=h(a)$. Ekkor az általános megoldás

$$F = u-ax \mp \sqrt{9-a^2}\, y-h(a) = 0$$

alakú, ahol h tetszőleges függvény.

2. Határozzuk meg az

$$u = px+qy+p^2+pq+q^2$$

differenciálegyenlet teljes és szinguláris megoldását, ha ilyen van.

A fejezet bevezetésében már láttuk, hogy a differenciálegyenlet teljes megoldása

$$u = ax+by+a^2+ab+b^2$$

alakú. A szinguláris megoldás az

$$F = 0, \quad \text{azaz} \quad ax+by+a^2+ab+b^2-u = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \text{azaz} \quad x+2a+b = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \text{azaz} \quad y+a-2b = 0$$

egyenletrendszerből számítható ki. A két utolsó egyenletből

$$a = \frac{1}{3}(y-2x), \quad b = \frac{1}{3}(x-2y).$$

Ha ezt a teljes megoldásba helyettesítjük, akkor

$$u = \frac{1}{3}(y-2x)x+\frac{1}{3}(x-2y)y+\frac{1}{9}(y-2x)^2-$$

$$+\frac{1}{9}(y-2x)(x-2y)+\frac{1}{9}(x-2y)^2,$$

és ebből rendezés után a szinguláris megoldás

$$3u = xy-x^2-y^2.$$

Az

$$u = ax+by+a^2+ab+b^2$$

teljes megoldás két síkseregnek az egyenlete, mert az u függvény x-nek és y-nak első fokú függvénye. A szinguláris megoldás

$$x^2-xy+y^2+3u = 0$$

alakú, ez pedig — amint az megmutatható — elliptikus paraboloid egyenlete.

II. MÁSODRENDŰ PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Másodrendűnek nevezzük a parciális differenciálegyenletet, ha benne a több változótól függő u függvény legfeljebb második parciális deriváltjai szerepelnek. Kétváltozós függvényt feltételezve az általános alakja

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

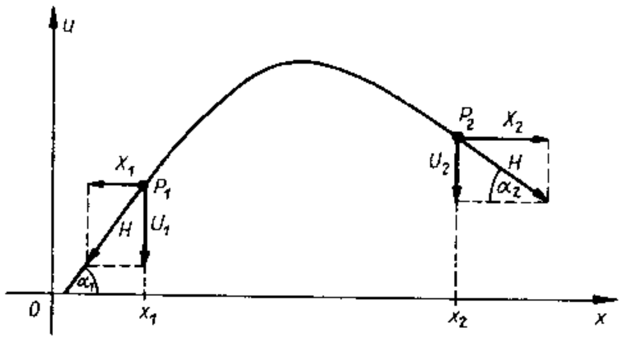
Másodrendű, parciális differenciálegyenletek megoldására általános módszer nem ismeretes. Számos speciális alakú egyenlet azonban több-kevesebb fáradsággal megoldható.

Az alábbiakban mindössze két nevezetes probléma megoldásakor fellépett, két speciális szerkezetű, másodrendű parciális differenciálegyenlet megoldását mutatjuk be.

A. A REZGŐ HÚR DIFFERENCIÁLEGYENLETE

Tekintsük az l hosszúságú, tökéletesen rugalmas (hajlékony) húrt. Legyen a nyugalomban levő húr az x tengely $[0, l]$ szakaszán. Mozdítsuk ki leírt nyugalmi helyzetéből az x tengelyre merőlegesen, és vizsgáljuk a lejátszódó folyamatot. Csak olyan rezgések vizsgálatára szorítkozunk, amelyek esetében a húr pontjai az x tengelyre merőleges u tengellyel párhuzamosan és az (x, u) síkban mozognak (transzverzális síkrezgések). A mozgást az $u(x, t)$ kétváltozós függvény írja le, amely a húr bármely x_0 abszcisszájú pontjának bármely t_0 időpillanatban felvett helyzetét az $u_0(x_0, t_0)$ alakban adja meg. Feladatunk az ismeretlen $u(x, t)$ függvény meghatározása.

Először is meghatározzuk a problémát leíró differenciálegyenletet. Tekintsük a rezgő húr egy x hosszúságú elemi darabját (23. ábra). A húr többi része erre az elemi darabra



23. ábra

H húzóerőt gyakorol. A H húzóerőnek a húrelem két végpontjában levő, az x tengellyel, ill. u tengellyel párhuzamos összetevőjét jelöljük X_1, U_1, ill. X_2, U_2-vel. Zárjon be továbbá a H erő iránya az x tengellyel a P_1 pontban α_1, a P_2 pontban α_2 szöget. Ha feltesszük azt, hogy a húrt a nyugalmi helyzetéből csak „kicsit" mozdítjuk el, azaz csak annyira, hogy a hossza gyakorlatilag ne változzék, akkor α_1 és α_2 nagyon kis szögek, vagyis

$$\cos\alpha_1 \approx 1, \qquad \cos\alpha_2 \approx 1,$$

$$\sin\alpha_1 \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}, \; \sin\alpha_2 \approx \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}$$

A P_1 pontban a húzóerőt negatívnak választva, a komponensei

$$X_1 = -H\cos\alpha_1 = -H, \; U_1 = -H\sin\alpha_1 = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1},$$

$$X_2 = H\cos\alpha_2 = H, \qquad U_2 = H\sin\alpha_2 = H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2}.$$

Adott t időpillanatban a húr nyugalomban levőnek tekinthető, tehát a rá ható erők eredője zérus kell hogy legyen. Az x irányú komponensek összege

$$X_1 + X_2 = -H + H = 0,$$

azaz valóban zérus. Az u irányú komponensek összege

$$U_1 + U_2 = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} =$$

$$= H\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right].$$

A szögletes zárójelben levő kifejezés a differenciálszámítás középértéktétele (Lagrange tétele) szerint így írható:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=\xi} \Delta x,$$

ahol $x_2 - x_1 = \Delta x$ és $x_1 < \xi < x_2$. Az u irányú komponens felírásánál figyelembe kell venni a húr tehetetlenségét is. A tehetetlenségi erő esetünkben

$$m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\Delta x,$$

ahol m az egységnyi hosszú húr tömege, $m\Delta x$ tehát a Δx hosszúságú húrelem tömege, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ pedig a gyorsulás. A húzóerő u irányú komponenseinek és a tehetetlenségi erőnek egyensúly esetén egyenlőknek kell lenni, azaz

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Delta x = H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{x=\xi}\Delta x.$$

Ha $\Delta x \to 0$, akkor $\xi \to x$, és bevezetve a $\frac{H}{m} = c^2$ jelölést differenciálegyenletünk végső alakja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Hogy ezt a differenciálegyenletet meg tudjuk oldani, meg kell még adnunk a húr alakját és minden egyes pontjának a sebességét a $t=0$ időpillanatban *(kezdeti feltételek)*, továbbá a megoldásnak figyelembe kell vennie, hogy a húr végpontjaiban nincs elmozdulás, azaz a végpontok rögzítettek *(kerületi vagy peremfeltételek)*.

A húr rezgéseit leíró, kétváltozós $u(x, t)$ függvénynek tehát ki kell elégítenie a

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (c \text{ adott állandó})$$

differenciálegyenletet, továbbá az

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} & u(x, 0) = f(x) \quad [f(x) \text{ adott függvény}] \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{(x,0)} = g(x) \quad [g(x) \text{ adott függvény}] \end{aligned}$$

kezdeti feltételeket, végül az

$$\text{(3)} \qquad u(0, t) = u(l, t) = 0$$

kerületi feltételeket.

$f(x)$ a $t=0$ időpillanat (a mozgás kezdetén) a húr alakját, $g(x)$ a pontok sebességét adja meg. Az $x=0$ és $x=l$ pontok a húr végpontjai. Ezek alkotják a húr „kerületét". (Kétdimenziós esetben ez a kerület görbe, három dimenzióban felület.)

A kapott másodrendű, állandó együtthatós, homogén parciális differenciálegyenlet D. Bernoulli-tól [David Bernoulli (1700—1782) Johann Bernoulli fia, svájci matematikus] származó megoldása azon a lényeges észrevételen alapszik, hogy a megoldást jelentő függvényt olyan szorzat alakjában lehet keresni, amelynek egyik tényezője csak az x (a hely), a másik tényezője csak a t (az idő) függvénye. Legyen tehát

$$u(x, t) = X(x)\, T(t)$$

alakú. Ha ez a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, akkor abba visszahelyettesítve azonosságot kell kapnunk. Előbb kiszámítjuk a parciális deriváltakat.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)T(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t).$$

(Az egyszerűség kedvéért vesszővel jelöltük a függvénynek a saját egyetlen változója szerinti deriválását.) A differenciálegyenletbe való helyettesítés után tehát

$$X(x)\, T''(t) = c^2 X''(x)\, T(t).$$

Az egyenlet változói szétválaszthatók:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

A kapott differenciálegyenlet bal oldala csak t-től, a jobb oldala csak x-től függ. t és x tetszőleges értékeire ez csak úgy lehetséges, ha a bal oldal is és a jobb oldal is állandó, mégpedig ugyanaz az állandó, jelöljük $(-\alpha^2)$-tel. Az állandót fizikai okok miatt kell negatívnak választani. Így

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2,$$

vagy két egyenlőségbe írva

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\alpha^2, \quad c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Látható, hogy ezzel az eljárással a másodrendű parciális differenciálegyenletünk megoldását két közönséges másodrendű differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza, mégpedig a

$$T''(t)+\alpha^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x)+\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x) = 0$$

állandó együtthatós, homogén lineáris másodrendű egyenletek megoldására. Ezek megoldása egyszerű.

Az első differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2+\alpha^2 = 0,$$

ennek gyökei $\lambda_{1,2}=\pm\alpha i$, a differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$T(t) = A\cos\alpha t + B\sin\alpha t.$$

A második differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2+\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 = 0,$$

ennek gyökei $\lambda_{1,2}=\pm\frac{\alpha}{c}i$, az általános megoldás pedig

$$X(x) = C\cos\frac{\alpha}{c}x + D\sin\frac{\alpha}{c}x.$$

A keresett $u(x, t)$ függvény ezek alapján

$$u(x, t) = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\left(C\cos\frac{\alpha}{c}x + D\sin\frac{\alpha}{c}x\right),$$

ahol A, B, C, D és α ismeretlen állandók. Ezek meghatározása a kerületi és kezdeti feltételek alapján történik.

Az $u(0, t)=0$ kerületi feltétel szerint

$$0 = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)C,$$

ami tetszőleges t esetén csak úgy lehetséges, ha $C=0$.

Az $u(l, t)=0$ kerületi feltétel alapján

$$0 = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\left(D\sin\frac{\alpha}{c}l\right).$$

Mivel D nem lehet 0, mert ekkor a megoldás azonosan 0 volna (C-ről ugyanis már kiderült, hogy 0), ezért kell, hogy

$$\sin\frac{\alpha}{c}l = 0$$

legyen, vagyis

$$\frac{\alpha l}{c} = k\pi \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

(k nem lehet 0, mert ekkor α is 0 volna). Ebből

$$\alpha = \frac{kc\pi}{l} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Mivel α végtelen sok értéket vehet fel, célszerű indexszel ellátni

$$\alpha_k = \frac{kc\pi}{l}.$$

A kerületi feltételeket figyelembe véve a megoldás most már

$$u_k(x, t) = (A_k\cos\alpha_k t + B_k\sin\alpha_k t)D_k\sin\frac{\alpha_k}{l}x$$

alakú. Azért írtunk az u, A, B, D mellé indexeket, mert minden k-hoz egy-egy megoldás tartozik. Ismeretes, hogy a homogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásainak az összege is megoldás, ezért az

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos\alpha_k t + B_k\sin\alpha_k t)D_k\sin\frac{\alpha_k}{c}x$$

függvény a differenciálegyenlet megoldása. Végezzük el a szorzást, és legyen $A_k D_k = E_k$, $B_k D_k = F_k$, akkor

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_k (\cos \alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) + \right.$$

$$\left. + F_k (\sin \alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) \right].$$

A még figyelembe nem vett

$$U(x, 0) = f(x)$$

kezdeti feltétel értelmében

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{\alpha_k}{c} x = f(x),$$

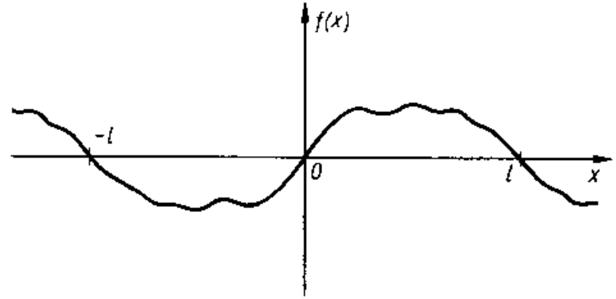
ill. α_k-t is behelyettesítve

$$\sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x).$$

Az ismeretlen E_k együtthatókat úgy határozzuk meg, hogy az adott, folytonos $f(x)$ függvényt Fourier-sorba fejtjük. [J. B. J. Fourier (1768—1830) francia matematikus.] [A Fourier-sorba fejtésre példák találhatók a B. P. Gyemidovics: *Matematikai analízis, feladatgyűjtemény* (Bp., 1971, Tankönyvkiadó) című kötetben.] Ha sikerül az adott $f(x)$ függvényt tiszta szinuszos sorba fejtenünk, akkor a keresett E_k együtthatók a tiszta szinuszos sor együtthatóival egyenlők. Tiszta szinuszos sort akkor kapunk, ha a Fourier-sorba fejtendő függvény $2l$ szerint periodikus páratlan függvény. Ezt figyelembe véve terjesszük ki a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban értelmezett $f(x)$ függvény értelmezését a $-l \leqq x \leqq l$ intervallumra úgy, hogy páratlan legyen. Ez geometriailag azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény grafikonját az origóra tükrözzük (24. ábra). Az értelmezés ilyen kiterjesztése azért lehetséges, mert a húr csupán l hosszúságú, és az $f(x)$ függvénynek a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumon kívüli viselkedése gyakorlati szempontból közömbös. Legyen tehát a folytonos $f(x)$ tiszta szinuszos Fourier-sora

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

alakú, és ekkor $b_k = E_k$.



24. ábra

Az F_k együtthatókat hasonló módon határozzuk meg. Differenciáljuk az $U(x, t)$ megoldást t szerint. Ekkor

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(-\alpha_k E_k \sin \alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) + \right.$$

$$\left. + (\alpha_k F_k \cos \alpha_k t) \left(\sin \frac{\alpha_k}{c} x \right) \right].$$

Mivel a kezdeti feltétel szerint $U_t'(x, 0) = g(x)$, ezért

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k F_k \sin \frac{\alpha_k}{c} x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k F_k \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x).$$

Terjesszük ki a $g(x)$ függvény értelmezését is a $-l \leqq x \leqq l$ intervallumra úgy, hogy abban páratlan, továbbá $2l$ szerint periodikus legyen. Ebben az esetben $g(x)$ Fourier-sora tiszta szinuszos sor, legyen ez

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

alakú. Ha ezt összehasonlítjuk $g(x)$ előbbi sorával, akkor az

$$\alpha_k F_k = G_k$$

egyenlőségből

$$F_k = \frac{G_k}{\alpha_k},$$

és ezzel az összes állandót meghatároztuk.

Összefoglalva eredményeinket kimondhatjuk: a rezgő húr

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

differenciálegyenletének az

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t'(x, 0) = g(x)$$

kezdeti, valamint az

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

kerületi feltételeket kielégítő megoldása

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (E_k \cos \alpha_k t + F_k \sin \alpha_k t) \sin \frac{k\pi}{l} x$$

alakú, ahol $\alpha_k = \dfrac{k\pi c}{l}$, továbbá E_k a páratlannak értelmezett $f(x)$ függvény Fourier-sorának együtthatóit, F_k pedig az ugyancsak páratlan $g(x)$ függvény α_k-val osztott Fourier-együtthatóit jelenti.

Megjegyzések. 1. Ha $f(x) \equiv 0$, akkor $E_k = 0$ minden k-ra és

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k \left(\sin \frac{k\pi c}{l} t\right) \left(\sin \frac{k\pi}{l} x\right).$$

Ennek a sornak az első tagja ($k = 1$)

$$u_1(x, t) = F_1 \left(\sin \frac{\pi c}{l} t\right) \sin \frac{\pi}{l} x,$$

és ez a húr alaprezgését állítja elő. Az alaprezgésnek az $x = 0$ és $x = l$ a csomópontjai, hullámhossza $2l$. Legnagyobb kitérése az $x = l/2$ húrfelező pontnak van. A sor második tagja ($k = 2$) a húr első felharmonikusát állítja elő. Ennek csomópontjai az $x = 0$, $x = l/2$, $x = l$ helyeken vannak, hullámhossza l, a legnagyobb kitérése az $x = l/4$, $x = 3l/4$ pontokban van. Hasonló minden k érték egy-egy felharmonikus rezgést szolgáltat, amelynek az $x = 0$ és $x = l$ pontokon kívül a $[0, l]$ szakasz belsejében egyenlő távolságban elhelyezkedő n számú csomópontja van, és hullámhossza $\dfrac{2l}{n+1}$.

2. Egészen más úton jutott el a rezgő húr differenciálegyenletének a megoldásához D'Alembert [J. Le Rond D'Alembert (1717—1783), francia matematikus], aki megmutatta, hogy a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

differenciálegyenlet megoldása felírható az

$$u(x, t) = u_1(x + ct) + u_2(x - ct)$$

alakban, ahol u_1 és u_2 tetszőleges függvények. Az előbbi kezdeti és kerületi feltételek segítségével u_1 és u_2 egyértelműen meghatározható.

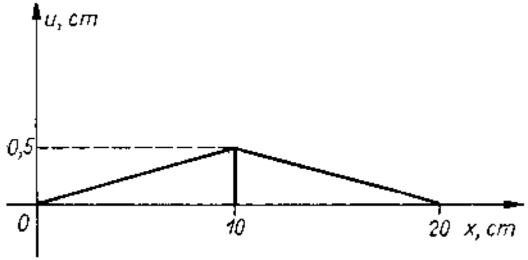
Gyakorló feladat

Tekintsük az $l = 20$ cm hosszúságú húrt és közepén feszítsük meg úgy, hogy az $x = 10$ cm abszcisszájú pontja az x tengelytől 0,5 cm-re kerüljön. Engedjük el a húrt és keressük meg a húr mozgását leíró függvényt. (Legyen $c = 1$.)

A $t=0$ időpillanatban a húr alakja a 25. ábrán látható. Esetünkben

$$f(x)=\begin{cases}0{,}05x, & \text{ha} \quad 0\leq x\leq 10\\ 1-0{,}05x, & \text{ha} \quad 10\leq x\leq 20.\end{cases}$$

A sorfejtés érdekében az $f(x)$ függvény értelmezését előbb a $-20\leq x\leq 20$ intervallumra ($2l=40$) terjesztjük ki úgy, hogy abban páratlan függvény legyen, majd az egész számegyenesre úgy, hogy $f(x)$ $2l$ szerint periodikus függvény legyen.



25. ábra

Mivel a $t=0$ időpillanatban a húrt magára hagytuk, azért a húr pontjainak sebessége kezdetben 0, így $g(x)=0$. Ebből következik, hogy az F_k együtthatók mind zérusok.

Az E_k együtthatók kiszámítása érdekében a folytonos $f(x)$ függvényt Fourier-sorba fejtjük. Az együtthatók kiszámításánál az első lépésben felhasználjuk, hogy $f(x)$ páratlan, tehát szorzata a $\sin\frac{k\pi}{l}$ függvénnyel páros, majd parciálisan integrálunk.

$$E_k=\frac{1}{l}\int_{(2l)}f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx=$$

$$=\frac{2}{20}\int_0^{10}0{,}05x\sin\frac{k\pi}{20}x\,dx+\frac{2}{20}\int_{10}^{20}(1-0{,}05x)\sin\frac{k\pi}{20}x\,dx=$$

$$=0{,}1\left[-0{,}05x\frac{20}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{20}x\right]_0^{10}+0{,}1\int_0^{10}0{,}05\frac{20}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{20}x\,dx+$$

$$+0{,}1\left[-(1-0{,}05x)\frac{20}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{20}x\right]_{10}^{20}-0{,}1\int_{10}^{20}0{,}05\frac{20}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{20}x\,dx=$$

$$=0{,}1\left\{-\frac{10}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\left[0{,}05\left(\frac{20}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi}{20}x\right]_0^{10}+\right.$$

$$\left.+\frac{10}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}-\left[0{,}05\left(\frac{20}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi}{20}x\right]_{10}^{20}\right\}=$$

$$=\frac{40}{(k\pi)^2}\sin\frac{k\pi}{2}.$$

A megoldás tehát (láttuk, hogy $F_k=0$)

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\left(\cos\frac{k\pi}{l}t\right)\left(\sin\frac{k\pi}{l}x\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{40}{k^2\pi^2}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{20}t\right)\left(\sin\frac{k\pi}{20}x\right),$$

vagy néhány tagját részletesen kiírva

$$U(x,t)=\frac{40}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi}{20}t\sin\frac{\pi}{20}x-\right.$$

$$-\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi}{20}t\sin\frac{3\pi}{20}x+$$

$$\left.+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi}{20}t\sin\frac{5\pi}{20}x-+\dots\right).$$

Megjegyzés. Felhasználva a

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

azonosságot, a differenciálegyenlet megoldása felírható az

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{20}{k^2\pi^2}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)\left[\sin\frac{k\pi}{20}(t+x)-\sin\frac{k\pi}{20}(t-x)\right]$$

alakban is. Ez a D'Alembert-féle megoldást jelenti.

B. A HŐVEZETÉS DIFFERENCIÁLEGYENLETE

Tekintsünk egy l hosszúságú homogén és izotróp rudat. Helyezzük a rudat az x tengely $[0, l]$ szakaszára. Tegyük fel, hogy a rúd egyes keresztmetszeteiben a hőmérséklet csak az x-től függ, vagyis adott keresztmetszet pontjaiban a hőmérséklet ugyanaz. A rúd két végpontját tartsuk állandóan 0 °C hőmérsékleten. A rúd pontjainak hőmérsékletét a $t=0$ időpillanatban az $u(x, 0)=f(x)$ függvény adja meg. Határozzuk meg azt az $u(x, t)$ kétváltozós függvényt, amely a rúd pontjaiban a hőmérsékletváltozást leírja!

A fizikából ismeretes, hogy az egydimenziós hővezetés differenciálegyenlete

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ahol c az anyagi minőségtől függő állandó.

Esetünkben a kezdeti feltétel

$$u(x, 0) = f(x),$$

a kerületi feltételek

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

(Mivel a differenciálegyenletben t szerint csak az első derivált szerepel, ezért csak egy kezdeti feltétel van.)

A differenciálegyenlet megoldását D. Bernoulli nyomán olyan szorzatalakban keressük, amelynek egyik tényezője csak x, másik tényezője csak t függvénye:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t),$$

és a differenciálegyenletbe helyettesítve

$$X(x)\,T'(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Az egyenlet változói szétválaszthatók

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = c^2 \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

A bal oldal csak t-től, a jobb oldal csak x-től függ. Ez csak úgy lehetséges, ha mind a két oldal állandó, azaz (az állandót $-\alpha^2$-tel jelöltük)

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\alpha^2, \quad c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha^2.$$

Ezzel a másodrendű parciális differenciálegyenlet megoldását egy elsőrendű és egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet megoldására vezettük vissza, mégpedig a

$$T'(t) + \alpha^2 T(t) = 0$$

és

$$X''(x) + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 X(x) = 0$$

differenciálegyenletek megoldására. Az első egyenlet változói szétválaszthatók:

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha^2 T$$

$$\frac{dT}{T} = -\alpha^2\, dt.$$

Mind a két oldalon integrálva

$$\ln |T| = -\alpha^2 t + a,$$

$$T = e^{-\alpha^2 t + a} = Ae^{-\alpha^2 t}.$$

A második differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 = 0,$$

ennek gyökei $\lambda_{1,2} = \pm \frac{\alpha}{c} i$, így a differenciálegyenlet megoldása

$$X(x) = B \cos \frac{\alpha}{c} x + C \sin \frac{\alpha}{c} x.$$

Az eredeti parciális differenciálegyenletet kielégítő függvény tehát

$$u(x, t) = X(x)T(t) = \left(B\cos\frac{\alpha}{c}x + C\sin\frac{\alpha}{c}x\right)Ae^{-\alpha^2 t} =$$

$$= \left(D\cos\frac{\alpha}{c}x + E\sin\frac{\alpha}{c}x\right)e^{-\alpha^2 t},$$

ahol α, $AB=D$ és $AC=E$ ismeretlen állandók. Ezeket a kezdeti feltételekből határozzuk meg.

Mivel $u(0, t)=0$, ezért

$$0 = De^{-\alpha^2 t},$$

ami csak úgy lehetséges, ha $D=0$. Mivel $u(l, t)=0$ és $D=0$, ezért

$$0 = E\left(\sin\frac{\alpha}{c}l\right)e^{-\alpha^2 t}.$$

A háromtényezős szorzat első és harmadik tényezője nem lehet 0, ezért

$$\sin\frac{\alpha}{c}l = 0, \quad \text{és ebből} \quad \frac{\alpha}{c}l = k\pi,$$

azaz

$$\alpha = \frac{k\pi c}{l},$$

ahol $k=1, 2, \ldots$. (k nem lehet 0, mert ekkor $\alpha=0$ volna, ami lehetetlen.) Mivel α végtelen sok értéket vehet fel, célszerű indexszel ellátni

$$\alpha_k = \frac{k\pi c}{l}.$$

A differenciálegyenletet és a kerületi feltételeket kielégítő megoldások tehát

$$u_k(x, t) = E_k\left(\sin\frac{\alpha_k}{c}x\right)(e^{-\alpha_k^2 t}), \quad k = 1, 2, \ldots$$

alakúak. Mivel a differenciálegyenlet homogén, ezért a partikuláris megoldások összege is megoldás, és így a differenciálegyenlet megoldása az

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k e^{-\alpha_k^2 t}\sin\frac{\alpha_k}{c}x$$

függvénysor. A még ismeretlen E_k együtthatókat a kezdeti feltételből számítjuk ki. Minthogy $t=0$ esetében

$$U(x, 0) = f(x),$$

ezért

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k\sin\frac{\alpha_k}{c}x = \sum_{k=1}^{\infty} E_k\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Az E_k együtthatókat azonnal le tudnánk olvasni, ha az adott $f(x)$ függvényt tiszta szinuszos Fourier-sorba tudnánk fejteni. Hogy ezt megtehessük, $f(x)$ értelmezési tartományát ki kell terjesztenünk. Legyen tehát a $0 \leqq x \leqq l$ intervallumban adott $f(x)$ függvény a $-l \leqq 0 \leqq l$ intervallumban páratlan függvény ($f(x)$ grafikonját az origóra tükrözzük) és egyébként $2l$ szerint periodikus (az alapintervallumban levő grafikont ismételjük). Ha ezt a függvényt Fourier-sorba fejtjük, tiszta szinuszos sort kapunk, legyen ez

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

Ebből következik, hogy

$$E_k = b_k.$$

Összefoglalva: a hővezetés

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

differenciálegyenletének az

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

kerületi és

$$u(x, 0) = f(x)$$

kezdeti feltételeknek eleget tevő megoldása

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k e^{-\left(\frac{k\pi c}{l}\right)t} \sin\frac{k\pi}{l}x$$

alakú, ahol az E_k együtthatók a $2l$ szerint periodikus páratlan $f(x)$ függvény Fourier-sorának együtthatói.

A hővezetés differenciálegyenletének a megoldása akkor is egyszerű, ha a kerületi feltételeket úgy általánosítjuk, hogy a rúd két végpontját valamilyen u_1, ill. u_2 hőmérsékleten tartjuk.

Legyen tehát

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2,$$

$$u(x, 0) = f(x).$$

A megoldást ebben az esetben összegalakban keressük:

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t),$$

ahol a v függvény csak az x helytől függ. Válasszuk v-t és w-t úgy, hogy külön-külön kielégítsék a differenciálegyenletünket. Ekkor

$$0 = c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

mert v nem függ t-től, ill.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Az első differenciálegyenlet megoldása

$$\frac{\partial v}{\partial x} = A,$$

$$v = Ax + B.$$

Az A és B integrációs állandókat úgy kell megválasztanunk, hogy a kerületi feltételek teljesüljenek, azaz

$$v(0) = u_1, \quad v(l) = u_2$$

legyen. Ekkor

$$u_1 = B, \quad u_2 = Al + B,$$

és ebből

$$B = u_1, \quad A = \frac{u_2 - B}{l} = \frac{u_2 - u_1}{l}.$$

A differenciálegyenletet és a kerületi feltételeket kielégítő függvény tehát

$$v(x) = \frac{u_2 - u_1}{l}x + u_1$$

alakú. Ezek után a $w(x, t)$ függvény úgy határozandó meg, hogy a differenciálegyenlet kielégítésén kívül

$$w(0, t) = w(l, t) = 0$$

legyen, mert ekkor a megkívánt kerületi feltételek is teljesülnek, hiszen

$$u(0, t) = v(0) + w(0, t) = u_1 + 0 = u_1,$$

$$u(l, t) = v(l) + w(l, t) = u_2 + 0 = u_2.$$

A kezdeti feltétel

$$u(x, 0) = f(x)$$

volt. Mivel

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t),$$

ezért

$$u(x, 0) = f(x) = v(x) + w(x, 0),$$

amiből

$$w(x, 0) = f(x) - v(x).$$

Ezek alapján $w(x, t)$ meghatározása ugyanúgy történik, mint az előző esetben az $u(x, t)$ meghatározása, csak az együtthatók meghatározásához nem az $f(x)$, hanem az $f(x) - v(x)$ függvényt kell Fourier-sorba fejteni.

Gyakorló feladat

Tekintsük egy 10 cm hosszú, homogén izotróp rudat. Legyen $c=1$, a $t=0$ időpontban az egész rúd hőmérséklete 100 °C, és helyezzük a rúd két végét olvadó jégbe. Milyen függvény írja le a rúd lehűlési folyamatát?

Esetünkben a

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

differenciálegyenletnek azt az $u(x, t)$ megoldását keressük, amely eleget tesz az

$$u(x, 0) = 100$$

kezdeti és az

$$u(0, t) = 0, \quad u(10, t) = 0$$

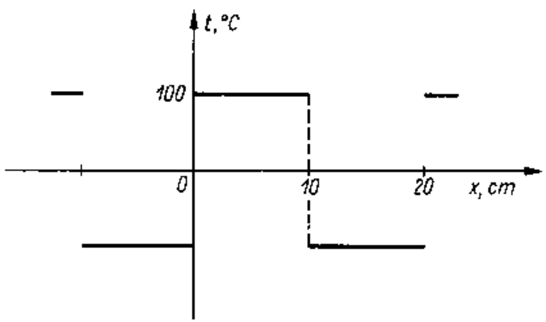
kerületi feltételeknek.

Az

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k e^{-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi}{l} x$$

alakú megoldás felírásához szükségünk van az adott $f(x)=100, 0 \leq x \leq 10$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sorára. Terjesszük ki céljainknak megfelelő módon $f(x)$ értelmezési tartományát úgy, hogy

$$f(x) = \begin{cases} 100, & \text{ha} \quad 0 < x < 10, \\ -100, & \text{ha} \quad -10 < x < 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x=0, x=10, \\ f(x) = f(x+20) & \end{cases}$$



26. ábra

legyen. Ezzel egy $2l$ szerint periodikus páratlan függvényt kaptunk (26. ábra). A függvény nem folytonos, de — ezt itt nem részletezzük — Fourier-sorba fejthető. Az együtthatók kiszámításánál először felhasználjuk, hogy $f(x)$ páratlan, majd parciálisan integrálunk.

$$E_k = \frac{1}{10}\int_{-10}^{0} -100 \sin \frac{k\pi}{10} x\, dx + \frac{1}{10}\int_{0}^{10} 100 \sin \frac{k\pi}{10} x\, dx =$$

$$= \frac{2}{10}\int_{0}^{10} 100 \sin \frac{k\pi}{10} x\, dx = 20\left[-\frac{10}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{10}x\right]_0^{10} =$$

$$= -\frac{200}{k\pi}(\cos k\pi - 1) = \begin{cases} \dfrac{400}{k\pi}, & \text{ha} \quad k = 2m-1, \\ 0, & \text{ha} \quad k = 2m. \end{cases}$$

Így a megoldás

$$U(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{400}{(2m-1)\pi} e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{100}t} \sin \frac{(2m-1)\pi}{10} x =$$

$$= \frac{400}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi^2}{100}t} \sin \frac{\pi}{10} x + \frac{1}{3} e^{-\frac{9\pi^2}{100}t} \sin \frac{3\pi}{10} x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5} e^{-\frac{25\pi^2}{100}t} \sin \frac{5\pi}{10} x + \ldots\right).$$

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Nagy Borbála okl. villamosmérnök
Az 6. kiadást gondozta: Halmos Mária
Műszaki vezető: Abonyi Ferenc
Műszaki szerkesztő: Szigeti Róbertné
A borítót tervezte: Kováts Tibor
A könyv formátuma: Fr5
Terjedelem: 17,25 (A/5) ív
Papír minősége: 70 g ofszet
Azonossági szám: 10442
Készült az MSZ 5601:1983 és 5602:1983 szerint
Az 5. kiadás változatlan utánnyomása

Nyomta és kötötte a Sylvester János Nyomda
Felelős vezető: Varró Attila ügyvezető igazgató

Az $y'+P(x)y=0$ homogén lineáris differenciálegyenlet megoldása:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Az $y'+P(x)y=Q(x)$ inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right).$$

A másodrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = Y+y_0$$

alakú, ahol Y a homogén egyenlet általános, y_0 az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása.

Az $ay''+by'+cy=0$ differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}, \quad \text{ha} \quad b^2-4ca>0,$$

$$y = e^{\lambda x}(c_1+c_2x), \quad \text{ha} \quad b^2-4ca=0,$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x), \quad \text{ha} \quad b^2-4ac<0.$$

Az $y''+by'+cy=f(x)$ differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1y_1+c_2y_2+k_1(x)y_1+k_2(x)y_2, \quad \text{ahol}$$

$$k_1(x) = \int\frac{-y_2f(x)}{y_1y_2'-y_2y_1'}dx, \quad k_2(x) = \int\frac{y_1f(x)}{y_1y_2'-y_2y_1'}dx.$$