Értékünk az ember

Humánerőforrás-fejlesztési Operatív Program

Gáspár Csaba

Analízis

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
GYŐR

Magyarország célba ér

NEMZETI FEJLESZTÉSI TERV

Készült a HEFOP 3.3.1-P.-2004-09-0102/1.0 pályázat támogatásával

Szerzők: Gáspár Csaba

Lektor: Szili László, egyetemi docens

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés

A jegyzet a Széchenyi István Egyetem mérnöki BSC-szakos hallgatói számára készült, az analízis tárgy bevezető fejezeteit tartalmazza.

Feltételezzük a szokásos középiskolai matematika ismeretét, de arra nem építünk: minden lényeges fogalmat definiálunk, és az állítások, tételek túlnyomó többségét be is bizonyítjuk. Kivételt csak a nagyon egyszerű és a nagyon nehéz állítások képeznek: előbbi esetben a bizonyításokat gyakorlásképp az Olvasónak javasoljuk elvégezni, míg utóbbi esetben a jegyzetben felépített matematikai eszköztár nem elegendő a bizonyításra. A bizonyításokat mindazonáltal a szövegtől elkülönítve, kisebb betűmérettel írtuk le, hogy a fő gondolatmenetet könnyebben lehessen követni.

A jegyzet fejezetei: alapvető fogalmak és összefüggések, komplex számok, sorozatok, sorok, valós függvények, differenciálszámítás, Taylor-sorok, primitív függvények és Riemann-integrál, valamint a komplex függvénytan alapjai.

Mindegyik fejezet utolsó szakasza az adott témakörhöz tartozó feladatokat tartalmaz. Ugyanitt megtalálhatók a megoldások is, általában rövidebb-hosszabb levezetésekkel, útmutatásokkal együtt. Ezek tanulmányozása az anyag megértését nagyban elősegíti, de ez semmiképp nem pótolja egy önálló feladatgyűjtemény használatát.

Kérjük a tisztelt Olvasókat, hogy véleményüket, megjegyzéseiket, észrevételeiket küldjék el a

gasparcs@sze.hu

e-mail címre.
Eredményes felhasználást kíván a szerző:

Dr. Gáspár Csaba

Köszönetnyilvánítás: A szerző szeretné köszönetét kifejezni Szili Lászlónak, az Eötvös Loránd Tudományegyetem docensének a jegyzet igen gondos lektorálásáért és értékes megjegyzéseiért.

2. Alapvető fogalmak és összefüggések

2.1. Halmazelméleti alapok

A halmaz fogalma alapfogalom, és mint ilyen, nem definiálható (ui. a definíciónak szükségképp még egyszerűbb fogalmakra kellene építenie). Szemléletesen: a halmaz bizonyos dolgok, elemek összessége. Bármely halmaz és bármely elem esetén a következő két, egymást kizáró alternatíva teljesül: a szóban forgó elem hozzátartozik a halmazhoz vagy nem tartozik hozzá. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha valamilyen módon meghatározható, hogy mely elemek alkotják.

A későbbiekben a halmazelméletnek csak néhány alapvető fogalom- és jelölésrendszerére lesz szükségünk, a halmazelmélet mélyebb tárgyalására – ami egyébként igen nehéz – nem kerül sor.

Néhány speciális halmaz. A továbbiakban használni fogjuk az alábbi jelöléseket:

N: a természetes számok (pozitív egészek) halmaza,
Z: az egész számok halmaza,
Q: a racionális számok halmaza,
R: a valós számok halmaza,
C: a komplex számok halmaza (ld. a következő fejezetet).

Az $x \in A$ jelölés a későbbiekben azt jelenti, hogy x eleme az A halmaznak. Ha x nem tartozik A-hoz (nem eleme A-nak), azt az $x \notin A$ szimbólummal jelöljük.

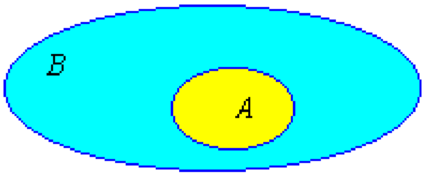
Bizonyos halmazokat (nem mindegyiket) megadhatjuk elemeik felsorolásával, pl. $\{a,b,c,...\}$ jelöli az $a,b,c,...$ elemek alkotta halmazt (adott esetben világosan definiáltnak kell lenni, hogy mely egyéb elemek tartoznak hozzá). Máskor az elemek tulajdonságával adunk meg halmazokat, pl. $\{n \in \mathbf{N} : n|8\}$ jelöli a 8 összes pozitív osztóinak halmazát, azaz az $\{1,2,4,8\}$ négyelemű számhalmazt. Más példa: $\{x \in \mathbf{R} : x^2 \leq 4\}$ jelöli mindazon valós számok halmazát, melyek négyzete legfeljebb 4, azaz a $[-4,4]$ zárt intervallumot.

Bevezetünk egy speciális halmazt, melynek egyetlen eleme sincs. Ezt *üres halmaznak* nevezzük, és a $\emptyset$ szimbólummal jelöljük.

Szokás a halmazok szemléletes ábrázolására ún. *Venn-diagramokat* használni. Itt a halmazokat síkbeli alakzatokkal szemléltetjük. Halmazelméleti összefüggések szemléltetésére a Venn-diagramok nagyon jól használhatók (bizonyító erejük azonban nincs).

Részhalmaz:

Azt mondjuk, hogy az A halmaz *része* (vagy *részhalmaza*) a B halmaznak, ha A minden eleme egyúttal B-nek is eleme. Jele: $A \subset B$.



2.1. ábra. *A részhalmaz szemléltetése Venn-diagramokkal*

Világos, hogy minden A halmaz esetén $A \subset A$. Nyilvánvaló az is, hogy az A, B halmazok pontosan akkor egyenlők, ha $A \subset B$ és $B \subset A$ egyszerre teljesül. Következésképp, ha két halmaz, pl. A, B egyenlőségét kell igazolni, ez mindig két részből áll: meg kell mutatni, hogy egyfelől $A \subset B$, másrészt pedig $B \subset A$ is teljesül.

Az A halmazt a B halmaz *valódi részének* nevezzük, ha $A \subset B$, de $A \neq B$ (tehát B-nek van olyan eleme is, mely A-hoz nem tartozik hozzá).

Megállapodás. Az üres halmazt bármely halmaz részhalmazának tekintjük.

2.1. Állítás: (a tartalmazás tranzitivitása). Ha az A, B, C halmazok olyanok, hogy $A \subset B$ és $B \subset C$, akkor szükségképp $A \subset C$ is teljesül.

Bizonyítás. A tartalmazás definíciója alapján nyilvánvaló.

Hatványhalmaz:

Az A halmaz *hatványhalmazának* azt a 2^A (más jelöléssel: $P(A)$) halmazt nevezzük, melynek elemei A részhalmazai.

Röviden: $2^A := \{B : B \subset A\}$. A fenti megállapodás értelmében $\emptyset \in 2^A$ mindig teljesül.

A jelölést az indokolja, hogy – mint azt később megmutatjuk – ha A véges, éspedig n elemből áll, akkor 2^A elemeinek száma épp 2^n.

2.1. Példa: Legyen $A := \{1,2,3\}$ (háromelemű halmaz). Akkor

$$2^A = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

(nyolcelemű halmaz).

Legyenek A, B tetszőleges halmazok.

Halmazműveletek:

Az A, B halmazok *uniójának* (vagy *egyesítésének*) az

$$A \cup B := \{x : \ x \in A \text{ vagy } x \in B\}$$

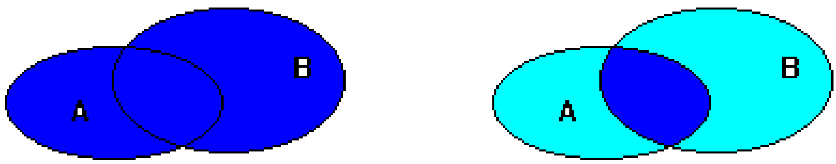
halmazt nevezzük. (Itt a „vagy” megengedő értelemben szerepel: $x \in A \cup B$ pontosabban azt jelenti, hogy x az A, B halmazok *legalább egyikében* benne van.)
Az A, B halmazok *metszetének* az

$$A \cap B := \{x : \ x \in A, x \in B\}$$

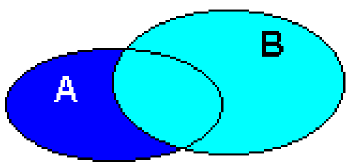
halmazt nevezzük.
Az

$$A \backslash B := \{x \in A : \ x \notin B\}$$

halmazt pedig az A, B halmazok *különbségének* nevezzük.



2.2. ábra. *Az unió és a metszet szemléltetése Venn-diagramokkal*



2.3. ábra. *A különbség szemléltetése Venn-diagramokkal*

Diszjunkt halmazok:

Két halmazt *diszjunktnak* nevezünk, ha metszetük az üres halmaz, azaz nincs közös elemük.

Megállapodás. A továbbiakban többnyire olyan halmazokkal fogunk foglalkozni, melyek egy adott, rögzített X, ún. alaphalmaz részhalmazai. Legyen $A \subset X$, akkor az $X \setminus A$ halmazt az A halmaznak X-re vonatkozó *komplementumának* (vagy *komplementer halmazának*) nevezzük, és $\overline{A}$-sal jelöljük.

Az alábbiakban összefoglaljuk a fentebb definiált halmazműveletekre vonatkozó legfontosabb összefüggéseket. Ezek a definíciókból könnyen adódnak, így a bizonyításokat elhagyjuk.

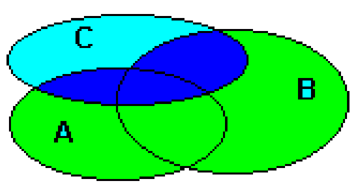
Legyen X egy adott alaphalmaz, A,B,$C \subset X$ tetszőlegesek.

2.2. Állítás: . Az unió

- kommutatív: $A \cup B = B \cup A$,
- asszociatív: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
- a metszetre nézve disztributív: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

A metszet

- kommutatív: $A \cap B = B \cap A$,
- asszociatív: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
- az unióra nézve disztributív: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.



2.4. ábra. *Az 1. disztributivitás szemléltetése Venn-diagramokkal.*

A különbség nem kommutatív és nem is asszociatív.

Következésképp többtagú (akár végtelen tagú!) uniókat, metszeteket nem kell zárójelezni. Ezekre az alábbi rövid jelöléseket fogjuk alkalmazni :

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j := A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n,$$

ill.

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j := A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n.$$

Az alábbi egyenlőségek triviálisak:

2.3. Állítás: . Tetszőleges X alaphalmaz és $A \subset X$ részhalmaz esetén:
$A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$, $A \cap X = A$,
$A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \overline{A} = X$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

A következő állítás már némi meggondolást igényel (bizonyítását feladatnak tűzzük ki):

2.4. Állítás: . Legyenek $A_1,A_2,...,A_n \subset X$ tetszőleges részhalmazai az X alaphalmaznak. Akkor

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j},$$

és

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}.$$

Descartes-szorzat:

Legyenek A, B tetszőleges halmazok. Az A és B halmazok *Descartes-szorzatának* az

$$A \times B := \{(x,y) :\ x \in A,\, y \in B\}$$

halmazt nevezzük. Ennek elemei rendezett párok, melyek első eleme A-ból, második eleme B-ből való.

Hasonlóan definiálunk többtényezős Descartes-szorzatokat rendezett hármasok, négyesek stb. segítségével.

Az (x_1,y_1) és (x_2,y_2) rendezett párt akkor tekintjük *egyenlőnek*, ha első és második komponenseik is rendre megegyeznek: $x_1 = y_1$ és $x_2 = y_2$.

Ha a Descartes-szorzatban szereplő halmazok mind megegyeznek, akkor a Descartes-szorzat jelölésére egyszerűen hatványjelöléseket is alkalmazunk: $A^2 := A \times A$, $A^3 := A \times A \times A$, és így tovább.

2.2. Példa: $\mathbf{R}^2$ elemei rendezett valós számpárok, amelyeket természetes módon lehet azonosítani egy sík pontjaival (pl. egy rögzített Descartes-féle koordinátarendszer segítségével). Hasonlóan, $\mathbf{R}^3$ a térrel azonosítható.

Függvényfogalom

Függvény:

Legyen A és B tetszőleges halmaz. Egy *A-ból B-be képező függvényen* olyan f hozzárendelési utasítást értünk, mely A bizonyos elemeihez hozzárendeli B egy-egy elemét. Jelölése: $f : A \to B$ (A-ból B-be képező f függvény).

Hangsúlyozzuk, hogy az $f(x)$ jelölés nem magát a függvényt jelenti, hanem annak értékét az $x \in A$ pontban, tehát a B halmaz egy elemét!

Egyéb elnevezések: hozzárendelés; leképezés; operátor (ha A, B elemei maguk is bizonyos függvények, így f függvényhez függvényt rendel); funkcionál (ha B számhalmaz).

Értelmezési tartomány, értékkészlet:

Az $f : A \to B$ függvény *értelmezési tartományának* mindazon A-beli elemek $\mathcal{D}_f$-fel jelölt összességét nevezzük, melyekhez az f függvény egyáltalán rendel valamilyen (B-beli) értéket. Az f függvény *értékkészlete* alatt az $\mathcal{R}_f := \{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\} \subset B$ halmazt értjük.

Grafikon:

Tetszőleges $f : A \to B$ függvény esetén az $\{(x,f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}$ alakú rendezett párok összességét (ami tehát az $A \times B$ Descartes-szorzathalmaz részhalmaza) az f függvény *gráfjának* vagy *grafikonjának* nevezzük.

Függvények megadása

A függvényeket leggyakrabban *formulával* szokás megadni, pl. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x) := 1 + \sin 2x$. Két másik elterjedt jelölésforma: $f(x) := 1 + \sin 2x$ $(x \in \mathbf{R})$ és $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto 1 + \sin 2x$. Ilyen megadásnál, ha az értelmezési tartományt nem adjuk meg explicit módon, akkor mindig feltételezzük, hogy az értelmezési tartomány az a legbővebb $\mathbf{R}$-beli halmaz, melyen a szóban forgó formula értelmezve van. Sokszor előfordul az is, hogy az értelmezési tartomány egyes részhalmazain más és más formula definiálja a függvényt.

Egy másik (a fizikában és a mérnöki tudományokban gyakran előforduló) megadási mód a *paraméteres megadás*, ilyenkor a függvény argumentumát és a függvényértéket egyaránt egy másik „segédváltozó" (paraméter) függvényében adjuk meg. Így például az $x := R\cos\omega t$, $y := R\sin\omega t$ képletpár írja jel az origó középpontú R sugarú kör kerületén állandó ω szögsebességgel egyenletes körmozgást végző pont helyzetét (pontosabban: a mozgó pont koordinátáit). Itt t az időt jelenti. A t paraméter kiküszöbölésével meghatározható, hogy az y koordináta hogyan függ közvetlenül az x koordinátától: $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (felső félkörív egyenlete) vagy $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$ is (alsó félkörív egyenlete); sokszor azonban kényelmesebb a függvényt az eredeti, paraméteres formában kezelni.

Végül megemlítendő az *implicit függvénymegadás*, amikor explicit formula helyett egy olyan egyenlőség adott, mely a függvény argumentumát és a függvényértéket egyaránt tartalmazza. Így pl. legyen egy y függvény olyan, amely kielégíti az $x^2 + \sqrt{y-1} = 3$ egyenletet. Ilyen függvény most valóban létezik, explicit alakja $y(x) = 1 + (3 - x^2)^2$. Előfordulhat, hogy az implicit alak nem határoz meg semmilyen függvényt, de az is, hogy több különböző függvényt is meghatároz. Pl. a kör implicit egyenletét ($x^2 + y^2 = R^2$) két függvény is kielégíti (az $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ és az $y(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$ explicit formulákkal adott függvények). Ilyenkor alkalmas korlátozó feltételekkel lehet a megfelelő függvényt kiválasztani (különös figyelmet fordítva az értelmezési tartomány helyes megadására). Az implicit függvénymegadás különösen olyan esetekben fontos, ahol az implicit egyenlőségből a függvényértéket nem vagy csak nagyon bonyolult módon lehet kifejezni. Tipikusan ez a helyzet, ha (y-nal jelölve a függvényértéket) az implicit alak y-ra nézve egy magas fokszámú algebrai egyenlet.

Összetett függvény:

Ha $f : A \to B$, $g : B \to C$ olyan függvények, hogy $\mathcal{R}_f \subset \mathcal{D}_g$, akkor a g és f függvények *kompozíciójának* azt a $g \circ f : A \to C$ függvényt nevezzük, mely egy tetszőleges $x \in \mathcal{D}_f$ elemhez a $g(f(x)) \in C$ elemet rendeli, azaz $(g \circ f)(x) := g(f(x))$.

A kompozíciót szokás még *összetett függvénynek* is nevezni. Ugyanígy definiáljuk kettőnél több függvény kompozícióját is (*többszörösen összetett függvények*).

2.3. Példa: Legyenek $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := 1 + x^2$, $g(x) := \sin x$. Akkor az ezekből képezett összetett függvényeket az alábbi formulák állítják elő: $(f \circ g)(x) = 1 + \sin^2 x$, és $(g \circ f)(x) = \sin(1 + x^2)$.

Inverz függvény:

Az $f : A \to B$ függvény *kölcsönösen egyértelmű* vagy *invertálható*, ha különböző A-beli elemekhez különböző B-beli elemeket rendel, azaz $f(x) = f(y)$ csak akkor teljesülhet, ha $x = y$. Ekkor az f függvény *inverzének* azt az $f^{-1} : B \to A$ függvényt nevezzük, amelyre $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ és minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f^{-1}(f(x)) = x$.

Nyilván $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$, továbbá $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.4. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := ax$ függvény (ahol $0 \neq a \in \mathbf{R}$ rögzített szám) kölcsönösen egyértelmű R-en, inverze: $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{a}$.

Általában, ha f egy képlettel adott, akkor az inverz függvény helyettesítési értékét valamely $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ szám esetén úgy nyerjük, hogy az $f(x) = y$ egyenletből x-et kifejezzük.

Leszűkítés, kiterjesztés:

Legyen $f : A \to B$ egy tetszőleges függvény, C és D két tetszőleges halmaz, melyre $C \subset \mathcal{D}_f \subset D \subset A$. Az f függvény C-re való *leszűkítésén* (vagy *megszorításán*) azt az $f|_C$ szimbólummal jelölt függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya C, és minden $x \in C$-re $f|_C(x) = f(x)$. Azt mondjuk továbbá, hogy a $g : D \to B$ függvény *kiterjesztése* f*-nek*, ha f leszűkítése g-nek (akárhogy is van definiálva g a $D \setminus \mathcal{D}_f$ halmazon).

2.5. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^2$ előírással értelmezett függvény nem kölcsönösen egyértelmű $\mathbf{R}$-en, de az $\mathbf{R}_+ := [0, +\infty)$ részhalmazra leszűkítve már igen, és itt az inverze: $f^{-1} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

2.2. Halmazok számossága

Véges halmazok esetében a halmazok számosságát kézenfekvő a halmaz elemszámával definiálni. Ily módon halmazokat lehet „összehasonlítani”. Ez a definíció nem működik végtelen halmazok esetén. Ekkor általánosabb definícióra van szükség.

Ekvivalencia:

Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok *egyenlő számosságúak* vagy *ekvivalensek*, ha létezik olyan $f : A \to B$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, melyre $\mathcal{D}_f = A$, és $\mathcal{R}_f = B$. Ezt a tényt így jelöljük: $A \sim B$.

A definícióban szereplő f függvény általában nem egyértelmű. A definíció azonnali következménye a

2.5. Állítás: . Tetszőleges A, B, C halmazokra:
(a) $A \sim A$,
(b) ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$,
(c) ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$.

Bizonyítás. A definícióban szereplő, megfelelő tulajdonságú leképezéseket kell keresni. Csak vázlatosan: (a) nyilván az $A \to A$ identikus leképezés megfelelő. (b) ha $f : A \to B$ ekvivalenciát létesít A és B közt, akkor f^{-1} nyilván ekvivalenciát létesít B és A közt. (c) ha f és g ekvivalenciát létesítő leképezések A és B ill. B és C közt, akkor a $g \circ f$ összetett leképezés ekvivalenciát létesít A és C közt.

Nyilvánvaló, hogy két véges halmaz pontosan akkor egyenlő számosságú, ha elemeik száma egyenlő, továbbá egy véges halmaz sohasem lehet ekvivalens saját valódi részével. Végtelen halmazok esetén ez utóbbi már nem igaz. Meglepő módon, egy végtelen halmaz ekvivalens lehet saját valódi részével. Például a pozitív egész számok $\{1,2,3,4,...\}$ halmaza ekvivalens a pozitív páros számok $\{2,4,6,8,...\}$ halmazával, az ekvivalenciát létesítő leképezés pedig pl. az $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) := 2x$ függvény.

Vegyük észre, hogy a számosság fogalmát magát nem definiáltuk, csak az *egyenlő számosság* fogalmát.

Megszámlálhatóság:

Az $\mathbf{N}$-nel egyenlő számosságú halmazokat (melyek az előző állítás értelmében egymással is ekvivalensek) *megszámlálhatóan végtelen* halmazoknak nevezzük. A véges és a megszámlálhatóan végtelen halmazokat közös néven *megszámlálható* halmazoknak is nevezzük.

A megszámlálható halmazokat még *sorozatba rendezhető* halmazoknak is nevezzük. Az elnevezés oka szemléletesen világos: ha A megszámlálható, f pedig $\mathbf{N}$-et (ill. véges esetben egy véges $\{1,2,3,...,n\}$ halmazt) A-ra képező kölcsönösen egyértelmű leképezés, akkor nyilván A előáll $A = \{f(1),f(2),f(3),...\}$ véges vagy végtelen sorozat alakban.

A következő két állítás a megszámlálható halmazok alapvető tulajdonságait írja le:

2.6. Állítás: . Ha A megszámlálható, akkor minden $B \subset A$ részhalmaz is megszámlálható.

Bizonyítás. Ha A véges, vagy A végtelen de B véges halmaz, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy A és B mindketten végtelen halmazok. Legyen $A = \{f(1),f(2),f(3),...\}$ sorozatba rendezett. Mivel $B \subset A$, ezért B-t az A-ból bizonyos elemek elhagyásával kapjuk, így $B = \{f(n_1),f(n_2),f(n_3),...\}$ alakú. Ekkor a $g : \mathbf{N} \to B$, $g(k) := n_k$ leképezés könnyen láthatóan ekvivalenciát létesít $\mathbf{N}$ és B közt.

2.7. Állítás: . Megszámlálható sok megszámlálható halmaz egyesítése is megszámlálható.

Bizonyítás. Legyenek $A_1 := \{a_{11},a_{12},a_{13},...\}$, $A_2 := \{a_{21},a_{22},a_{23},...\}$, $A_3 := \{a_{31},a_{32},a_{33},...\}$,... megszámlálható halmazok, és jelölje $A := \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Írjuk fel A elemeit a következő, kétszeresen végtelen táblázatba:

$$\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Ez a táblázat A minden elemét tartalmazza, némelyeket esetleg többször is (ha az A_1,A_2,... halmazok közül némelyeknek van közös elemük). Elég tehát belátni, hogy ez az esetlegesen bővebb halmaz még mindig megszámlálható. Rendezzük sorozatba e táblázat elemeit. A leszámlálást a bal felső elemmel kezdjük, majd azokat az elemeket vesszük, melyek indexeinek összege 2, ezután azokat, melyekre ez az összeg 3, és így tovább. A következő sorozatot nyerjük: $A = \{a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},...\}$, tehát A valóban megszámlálható.

2.1. Következmény: . A racionális számok $\mathbf{Q}$ halmaza megszámlálható.

Bizonyítás. Jelölje A_1 az 1 nevezőjű, A_2 a 2 nevezőjű, és így tovább, A_k a k nevezőjű törtek halmazát (ahol k negatív egész is lehet). Ezen halmazok mindegyike megszámlálható, uniójuk pedig megegyezik $\mathbf{Q}$-val. Az előző állítás miatt így $\mathbf{Q}$ megszámlálható.

Felmerül a kérdés, van-e egyáltalán nem megszámlálható halmaz. A következő állításból kiderül, hogy van, sőt, bizonyos értelemben lényegesen több van, mint megszámlálható:

2.8. Állítás: . Tetszőleges A halmaz esetén A és a 2^A hatványhalmaz nem lehetnek egyenlő számosságúak.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy van oly $f : A \to 2^A$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, mely ekvivalenciát létesít A és 2^A közt. Definiáljuk a következő $B \subset A$ részhalmazt: $B := \{a \in A : \ x \notin f(x)$. Mivel $\mathcal{R}_f = 2^A$, azért van olyan $b \in A$, hogy $B = f(b)$. Vizsgáljuk meg, hogy b eleme-e a B halmaznak. Ha $b \in B$, akkor $b \in f(b)$, de B definíciója szerint ekkor $b \notin f(b)$. Ez tehát nem fordulhat elő. Ugyanakkor, ha $b \notin B$, akkor $b \notin f(b)$. Ebből viszont, ugyancsak B definíciója szerint $b \in B$ következik. Tehát az indirekt feltevésből az adódott, hogy sem $b \in B$, sem $b \notin B$ nem lehetséges. Ez az ellentmondás az állítást igazolja.

Következésképp pl. a $2^{\mathbf{N}}$ halmaz nem megszámlálható.

2.3. Teljes indukció. Nevezetes azonosságok és egyenlőtlenségek

Sokszor előfordul, hogy egy állítást, egy tulajdonságot kell igazolni egy A halmaz minden elemére. Ha A véges, akkor az állítás elvben külön-külön bizonyítható. Ha A megszámlálhatóan végtelen, ez az út már elvben sem járható. Ekkor alkalmazható a teljes indukció, mint bizonyítási módszer. Ennek lényege a következő.

Tegyük fel, hogy valamely, n-től függő állítást igazolni kell az összes, $n = n_0$, $n = n_0 + 1$, $n = n_0 + 2$,... számra, ahol $n_0 \in \mathbf{N}$ valamely természetes szám.

1. lépés: Igazoljuk az állítást n_0-ra.

2. lépés: *Feltesszük*, hogy az állítás igaz valamely $n \geq n_0$-ra, ezt a feltevést (az ún. *indukciós feltevést*) felhasználva, igazoljuk az állítást $(n+1)$-re. Másképp fogalmazva, igazoljuk, hogy *ha* az állítás igaz valamilyen n_0-nál nem kisebb természetes számra, akkor igaz a következő természetes számra is.

Ezzel az állítás minden $n \geq n_0$-ra igazolva lesz. Valóban, n_0-ra igaz (1. lépés), ezért $(n_0 + 1)$-re is igaz (a 2. lépés alapján): de akkor már $(n_0 + 2)$-re is igaz (ismét a 2. lépés alapján), és így tovább.

A módszerben a természetes számoknak az az alapvető tulajdonsága van „elrejtve”, mely szerint, ha egy $A \subset \mathbf{N}$ részhalmaz olyan tulajdonságú, hogy $1 \in A$, és minden $n \in A$ esetén $(n+1) \in A$ is igaz, akkor szükségképp $A = \mathbf{N}$. Ez a tulajdonság *Peano-axióma* néven ismert. Nem minden végtelen halmaz rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, így pl. $\mathbf{R}$ sem. Következésképp a teljes indukciós bizonyítás (a fenti formában) nem alkalmas pl. $\mathbf{R}$ minden elemére vonatkozó állítások igazolására.

A következőkben példákat mutatunk ilyen jellegű állításokra.

2.6. Példa: Minden $n \in \mathbf{N}$-re $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Bizonyítás. Az állítás $n = 1$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy n-re igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n + 1)$-re. Ekkor, az indukciós feltevést használva $1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, tehát az állítás $(n + 1)$-re is igaz. Ezzel az állítást teljes egészében igazoltuk.

A következő állítás hasonlóan igazolható:

2.7. Példa: Minden $n \in \mathbf{N}$-re $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Binomiális együttható:

Jelölje $n \in \mathbf{N}$ esetén $n!$ (n faktoriális) az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ szorzatot. *Definiáljuk* $0!$-t 1-nek, azaz $0! := 1$. Ezek után tetszőleges $0 \leq k \leq n$ egészre legyen $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

A fenti számokat *binomiális együtthatóknak* nevezzük (a szimbólum olvasása: „n alatt k”). Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy:
(a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$,
(b) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$,
(c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
(d) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Az állítás (d) pontjának ismételt felhasználásával látható, hogy a binomiális együtthatók egy olyan háromszög alakú (végtelen) táblázatba rendezhetők, ahol minden elem a felette levő két elem összege:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ \end{array}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

azaz:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \end{array}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(*Pascal-háromszög*). Ezek felhasználásával, a teljes indukció módszerével könnyen igazolható a következő fontos állítás:

2.1. Tétel: (binomiális tétel). Tetszőleges $a,b \in \mathbf{R}$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Bizonyítás. Az állítás $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbf{N}$-re igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re. Az indukciós feltevést használva:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

$$= (a+b)\left(\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n \right) =$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a b^n +$$

$$+ \binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}.$$

A jobb oldalon most felhasználjuk a binomiális együtthatóknak az előző állítás (a) és (d) pontjában leírt tulajdonságait:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1},$$

tehát az állítás $(n+1)$-re is igaz, amivel a bizonyítást befejeztük.

Az állítás egyszerűen igazolható kombinatorikus úton is. A bal oldal ui. egy n-tényezős szorzat, mindegyik tényező $(a+b)$. Elvégezve a szorzást (minden tagot szorozva minden taggal), csoportosítsuk a szorzatokat a növekvő hatványai szerint. Akkor az $a^{n-k}b^k$ alakú szorzatok száma azzal a számmal egyenlő, ahányféleképp n különböző elemből k különböző elemet a sorrend figyelembevétele nélkül ki tudunk választani (ismétlés nélküli kombináció). Ez pedig, mint ismert, épp az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható. Ez lesz tehát a jobb oldalon $a^{n-k}b^k$ együtthatója.

2.2. Következmény: . Tetszőleges $n \in \mathbf{N}$-re

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a binomiális tételt az $a := b := 1$, ill. az $a := 1$ és $b := -1$ szereposztással.

Most már igazolhatjuk az előző szakaszban említett, a véges halmazok számosságára vonatkozó eredményt:

2.3. Következmény: . Ha A egy n-elemű véges halmaz ($n \in \mathbf{N}$), akkor a 2^A hatványhalmaz elemeinek száma 2^n.

Bizonyítás. Kombinatorikai meggondolásokkal könnyen látható, hogy az egyelemű részhalmazok száma $\binom{n}{1}$, a kételeműeké $\binom{n}{2}$, és így tovább, általában a k-elemű részhalmazok száma $\binom{n}{k}$. Végül egyetlen zérus elemszámú részhalmaz van, az üres halmaz. A részhalmazok számát összegezve, az előző következmény alapján az állítás már adódik.

2.9. Állítás: (Bernoulli-egyenlőtlenségek).
(a) Minden $x \geq -1$ és $n \in \mathbf{N}$ számra $(1+x)^n \geq 1+nx$
(b) Tetszőleges $x,y \geq 0$ és $n \in \mathbf{N}$ esetén $(x+y)^n \geq x^n + nx^{n-1}y$.

Bizonyítás. Az első egyenlőtlenség $n = 1$ mellett nyilván igaz. Feltéve, hogy valamely $n \in \mathbf{N}$-re igaz, vizsgáljuk az egyenlőtlenséget $(n+1)$-re. Az indukciós feltevést felhasználva:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

(mert $x \geq -1$ miatt $1+x \geq 0$), tehát az állítás $(n+1)$-re is igaz. Ezzel az első egyenlőtlenséget igazoltuk. A második egyenlőtlenség innen már következik: ez ui. $x = 0$ esetén nyilvánvaló, ha pedig $x > 0$, akkor

$$(x+y)^n = x^n(1+\frac{y}{x})^n \geq x^n(1+n\frac{y}{x}) = x^n + nx^{n-1}y.$$

Az egyenlőtlenségek $x,y \geq 0$ esetén a binomiális tételből egyenesen adódnak, ha a jobb oldalról az első két tagot követő többi (nemnegatív!) tagot elhagyjuk.

A Bernoulli-egyenlőtlenségből teljes indukcióval levezethető a következő, alapvető fontosságú egyenlőtlenség:

2.2. Tétel: (számtani-mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség). Legyenek $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ tetszőleges nemnegatív számok ($n \in \mathbf{N}$). Akkor érvényes a következő becslés:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}.$$

Megjegyzés. Az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést az $a_1,a_2,...,a_n \geq 0$ számok *mértani közepének* nevezzük, a jobb oldalon pedig ezen számok *számtani közepe* áll. Az egyenlőtlenség nyilván ekvivalens az $a_1a_2...a_n \leq \left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^n$ egyenlőtlenséggel.

Bizonyítás. Feltehető, hogy az a_k számok nagyság szerint rendezettek: $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Jelölje a rövidség kedvéért $M_n := a_1a_2...a_n$, $S_n := \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, akkor a bizonyítandó állítás: $M_n \leq S_n^n$. Ez $n = 1$-re nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbf{N}$-re igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re. Az indukciós feltevést használva:

$$M_{n+1} = M_n \cdot a_{n+1} \leq S_n^n \cdot a_{n+1} = S_n^{n+1} + S_n^n(a_{n+1} - S_n) =$$

$$= S_n^{n+1} + (n+1)S_n^n \frac{a_{n+1} - S_n}{n+1}.$$

Alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtleséget $x := S_n$, $y := \frac{a_{n+1}-S_n}{n+1}$ mellett $(n+1)$-re. Ez megtehető, mert a rendezettség miatt $a_{n+1} - S_n = a_{n+1} - \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq 0$.

Innen azt kapjuk, hogy:

$$M_{n+1} \le \left(S_n + \frac{a_{n+1} - S_n}{n+1} \right)^{n+1} = \left(\frac{(n+1)S_n + a_{n+1} - S_n}{n+1} \right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}}{n+1} \right)^{n+1} = S_{n+1}^{n+1},$$

amivel az állítást $(n+1)$-re is igazoltuk.

2.4. Következmény: (mértani-harmonikus közepekre vonatkozó egyenlőtlenség). Legyenek $a_1,a_2,...,a_n > 0$ tetszőleges pozitív számok ($n \in \mathbf{N}$). Akkor érvényes a következő becslés:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \ .$$

(A bal oldalon álló kifejezést az $a_1,a_2,...,a_n$ számok *harmonikus közepének* nevezzük.)

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt speciálisan az $1/a_1,1/a_2,...,1/a_n$ számokra..

2.3. Tétel: (Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség). Legyenek $a_1,a_2,...,a_n \in \mathbf{R}$, $b_1,b_2,...,b_n \in \mathbf{R}$ tetszőleges valós számok ($n \in \mathbf{N}$). Akkor

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2),$$

vagy röviden:

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Bizonyítás. A rövidség kedvéért legyenenek az a, b nemnegatív számok olyanok, hogy $a^2 := \sum_{k=1}^n a_k^2$ és $b^2 := \sum_{k=1}^n b_k^2$. Ha a vagy b bármelyike zérus, akkor az állítás a triviális $0 = 0$ egyenlőségre egyszerűsödik. Feltehető tehát, hogy $a > 0$ és $b > 0$. Induljunk ki abból, hogy tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ számra nyilván $\sum_{k=1}^n (a_k - tb_k)^2 \ge 0$, ahonnan:

$$\sum_{k=1}^n (a_k - tb_k)^2 = \sum_{k=1}^n (a_k^2 - 2ta_kb_k + t^2b_k^2) = a^2 - 2t\sum_{k=1}^n a_kb_k + t^2b^2 \ge 0.$$

Speciálisan ez a $t := a/b$ választás mellett is igaz, innen pedig:

$$a^2 - 2\frac{a}{b}\sum_{k=1}^n a_kb_k + \frac{a^2}{b^2}b^2 \ge 0.$$

Ezt rendezve a $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \le ab$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami épp a bizonyítandó állítással ekvivalens.

A bizonyítás technikájából az is világos, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a $\sum_{k=1}^{n}(a_k - tb_k)^2$ összeg minden tagja 0, azaz az a_k és a b_k számok mind arányosak, éspedig ugyanazzal az arányossági tényezővel.

2.4. Valós számok és számhalmazok

A számfogalom fokozatos bővítése röviden a következőkben foglalható össze. $\mathbf{N}$-ből kiindulva, először a 0 számot definiáljuk, és a $\{0\} \cup \mathbf{N}$ halmazra kiterjesztjük az összeadást $0 + n := n$ előírással minden $n \in \mathbf{N}$-re. Ezután definiáljuk a negatív egész számokat és kiterjesztjük rájuk az összeadást a szokásos módon. Így nyerjük a $\mathbf{Z}$ halmazt. Most definiálhatjuk a racionális számok $\mathbf{Q}$ halmazát. Erre kiterjesztve az összeadást és a szorzást, kiderül, hogy $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. $\mathbf{Q}$ elemeiből kiindulva a valós számok $\mathbf{R}$ halmaza egy, az eddigieknél bonyolultabb eljárással nyerhető, melyet nem részletezünk.

Ehelyett a valós számok $\mathbf{R}$ halmazát, rajta az összeadás és szorzás műveletét valamint a „<” rendezési relációt adottnak tételezzük fel, és elfogadjuk a következő két állítást:

2.10. Állítás: . $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$, és bármely két különböző $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$ valós szám között van $p \in \mathbf{Q}$ racionális szám, melyre tehát $a < p < b$ teljesül.

2.11. Állítás: (Cantor-axióma vagy Cantor-féle közöspont tétel). Legyen $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ korlátos és zárt $\mathbf{R}$-beli intervallumok egymásba ágyazott tetszőleges sorozata. Akkor ezen intervallumsorozatnak legalább egy közös eleme van, azaz $\cap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$.

Itt használtuk az intervallumok szokásos definícióját, melyeket az alábbiakban foglalunk össze. Ha $a,b \in \mathbf{R}$, $a \le b$ tetszőleges számok, akkor a továbbiakban jelölje:

$(a,b) := \{x \in \mathbf{R} :\ a < x < b\}$ (nyílt intervallum),
$[a,b] := \{x \in \mathbf{R} :\ a \le x \le b\}$ (zárt intervallum),
$(a,b] := \{x \in \mathbf{R} :\ a < x \le b\}$ (alulról nyílt, felülről zárt intervallum),
$[a,b) := \{x \in \mathbf{R} :\ a \le x < b\}$ (alulról zárt, felülről nyílt intervallum),

$(a,+\infty) := \{x \in \mathbf{R} : \; a < x\}$ (félig végtelen, nyílt intervallumok),
$(-\infty,a) := \{x \in \mathbf{R} : \; x < a\}$,
$[a,+\infty) := \{x \in \mathbf{R} : \; a \le x\}$ (félig végtelen, zárt intervallumok),
$(-\infty,a] := \{x \in \mathbf{R} : \; x \le a\}$,
és néha $\mathbf{R}$-et $(-\infty,+\infty)$-nel is jelöljük. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a $+\infty$, $-\infty$ szimbólumok *nem számok* (nincsenek rájuk a műveletek kiterjesztve), hanem pusztán kényelmes *jelölések*!

- Az előző állítást ismételten alkalmazva kapjuk, hogy bármely két különböző valós szám közt *végtelen sok* racionális szám van. Ezt szemléletesen úgy fejezzük ki, hogy a racionális számok a valós számok egy *mindenütt sűrű* részhalmazát alkotják.
- Az, hogy a Cantor-axiómát tételnek avagy axiómának tekintjük, attól függ, hogy a valós számoknak (egymással ekvivalens) többféle lehetséges felépítése közül melyiket választjuk. Mi a későbbiekben axiómának tekintjük.

A Cantor-axióma mindegyik feltétele lényeges. Példákkal mutatjuk meg, hogy bármelyik feltétel elhagyása esetén az állítás már általában nem igaz:
(a) Mindhárom feltétel teljesül.
Legyen $I_k := \left[0,\frac{1}{k}\right]$ $(k \in \mathbf{N})$. Ekkor közvetlenül látható, hogy $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = \{0\}$ (egyelemű halmaz).
(b) Az intervallumok nem végesek.
Legyen $I_k := [k,+\infty]$ $(k \in \mathbf{N})$. Akkor $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset$.
(c) Az intervallumok nem zártak.
Legyen $I_k := \left(0,\frac{1}{k}\right)$ $(k \in \mathbf{N})$. Akkor $\cap_{k=1}^{\infty} I_k = \emptyset$.
(d) Az állítást nem $\mathbf{R}$-ben tekintjük.
Legyen $I_1 := [1.4,1.5]$, $I_2 := [1.41,1.42]$, $I_3 := [1.414,1.415]$, és így tovább, a k-adik intervallum bal végpontja legyen a $\sqrt{2}$ szám k tizedesjegy pontossággal, a jobb végpontja pedig ettől 10^{-k}-nal nagyobb. Könnyen látható, hogy ezen intervallumsorozat kielégíti a Cantor-axióma feltételeit, az intervallumok közös pontja pedig az egyetlen $\sqrt{2}$ szám. Következésképpen, ha $\mathbf{R}$ helyett $\mathbf{Q}$-ban tekintjük ezen intervallumokat, akkor a közös rész üres. Az állítás tehát $\mathbf{Q}$-ban nem igaz. Szemléletesen szólva, az állítás azt jelenti, hogy $\mathbf{R}$-ben nincsenek „lyukak”. Ez a tulajdonsága $\mathbf{Q}$-nak nincs meg.

Korlátos halmazok:

Azt mondjuk, hogy az $A \subset \mathbf{R}$ számhalmaz *felülről korlátos*, ha van olyan $C \in \mathbf{R}$ szám, hogy minden $x \in A$-ra teljesül, hogy $x \leq C$. Ekkor az ilyen C számokat az A halmaz *felső korlátjainak* nevezzük. Hasonlóan, ha van olyan $c \in \mathbf{R}$ szám, hogy minden $x \in A$-ra $x \geq c$ teljesül, akkor az A halmazt *alulról korlátosnak* nevezzük, az ilyen tulajdonságú c számokat pedig az A halmaz *alsó korlátjainak* hívjuk. Ha egy halmaz felülről is és alulról is korlátos, akkor röviden csak *korlátosnak* nevezzük. Ekkor a halmaz lefedhető egy véges hosszúságú intervallummal.

A valós számokat alapvetően jellemzi a következő tétel, melyet bizonyítás nélkül mondunk ki (a tétel egyébként a Cantor-axiómán alapul):

2.4. Tétel: . Minden nemüres felülről korlátos A halmaznak van legkisebb felső korlátja. Ezt az A halmaz *szuprémumának* nevezzük, és $\sup A$-val jelöljük. Hasonlóan, minden nemüres alulról korlátos A halmaznak van legnagyobb alsó korlátja. Ezt az A halmaz *infimumának* nevezzük, és $\inf A$-val jelöljük.

A szuprémum és infimum esetleg maguk is a szóbanforgó halmazhoz tartoznak, de ez nem szükségszerű. Pl. a $(0,1]$ félig nyílt intervallum infimuma 0 (ami nem tartozik hozzá e halmazhoz), szuprémuma pedig 1 (ami hozzátartozik a halmazhoz). A szuprémum és az infimum a maximum ill. minimum fogalmának bizonyos irányú általánosításai abban az értelemben, hogy ha egy halmaznak van legkisebb (legnagyobb) eleme, akkor ez egyúttal a szóbanforgó halmaz infimuma (szuprémuma) is. Ámde míg minimális (maximális) elem nem feltétlen létezik – a $(0,1)$ nyílt intervallumnak pl. sem minimális, sem maximális eleme nincs –, addig a fenti tétel értelmében infimum (szuprémum) mindig létezik, amennyiban a halmaz alulról (felülről) korlátos. Könnyű látni azt is, hogy a tétel érvényét veszti, ha $\mathbf{R}$ helyett például $\mathbf{Q}$-beli halmazokat vizsgálunk. Így pl. az $\{x \in \mathbf{Q} : \ 0 < x^2 < 2\}$ halmaz korlátos, de $\mathbf{Q}$-ban nincs legkisebb felső korlátja. Ilyen értelemben ez a tétel is a valós számok hézagmentességeként interpretálható.

Elnevezés. Ha az $A \subset \mathbf{R}$ számhalmaz nem korlátos felülről (alulról), akkor azt mondjuk, hogy $\sup A = +\infty$ ($\inf A = -\infty$).

A hatványhalmaz példáján már láttuk, hogy nem mindegyik végtelen halmaz megszámlálható. Most erre konkrét példát is adunk. Bebizonyítjuk, hogy $\mathbf{R}$ nem megszámlálható.

2.12. Állítás: . A valós számok $\mathbf{R}$ halmaza nem megszámlálható.

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy az $\mathbf{R}$-nél szűkebb $(0,1)$ intervallum sem megszámlálható (ha ui. $\mathbf{R}$ megszámlálható lenne, akkor a szűkebb $(0,1)$ is az volna). Indirekt, tegyük fel, hogy a $(0,1)$ halmaz megszámlálható, ezért sorozatba rendezhető: $(0,1) = \{a_1,a_2,a_3,...\}$. Írjuk fel mindegyik a_k-t végtelen tizedestört alakban:

$a_1 = 0.x_{11}x_{12}x_{13}...,$
$a_2 = 0.x_{21}x_{22}x_{23}...,$
$a_3 = 0.x_{31}x_{32}x_{33}...,$
........,

ahol tehát x_{kj} jelöli az a_k szám j-edik tizedesjegyét (az egyértelműség kedvéért a végtelen, csupa 9-esből álló szakaszokat kizárjuk, helyettük a megfelelő véges tizedestört alakot használjuk, így az ilyen számok vége csupa 0-ból áll). Tekintsük most az $a := 0.y_1y_2y_3...$ számot, ahol az y_j tizedesjegyek olyan, 0-tól és 9-től különböző számok, melyekre teljesül, hogy $y_j \neq x_{jj}$, de egyébként tetszőlegesek. Akkor egyrészt nyilván $a \in (0,1)$, másrészt viszont a konstrukció következtében az a szám mindegyik a_k-tól különbözik (ui. legalább a k-adik tizedesjegyük nem azonos). Ez ellentmond az indirekt feltevésnek, miszerint az $\{a_1,a_2,a_3,...\}$ megszámlálható halmaz egyenlő volna a teljes $(0,1)$ intervallummal. Ez az ellentmondás az állítást igazolja.

A $(0,1)$ intervallum egyenlő számosságú a teljes $\mathbf{R}$ halmazzal, az

$$f : (0,1) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \mathrm{tg}\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

leképezés pedig ekvivalenciát létesít $(0,1)$ és $\mathbf{R}$ között.

Az $\mathbf{R}$-rel egyenlő számosságú halmazokat *kontinuum számosságú* halmazoknak nevezzük. Megjegyezzük, hogy ennél „nagyobb” számosság is van. Így pl. a $2^{\mathbf{R}}$ halmaz se nem megszámlálható, se nem kontinuum számosságú.

2.5. Feladatok

1. Mivel egyenlő $2^{\emptyset}$? És $2^{2^{\emptyset}}$? És $2^{2^{2^{\emptyset}}}$?

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B halmazokra $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B halmazokra $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ egy X alaphalmaz tetszőleges részhalmazai, akkor

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$$

és

$$\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}.$$

5. Konstruáljunk ekvivalenciát létrehozó leképezéseket (a) az $\mathbf{N}$ és a $\mathbf{Z}$ halmazok között; (b) az $\mathbf{N}$ és a $\mathbf{Z}^2$ halmaz között.

6. Mutassuk meg, hogy az irracionális számok halmaza nem megszámlálható.

7. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^2 + 3x + 2$. Milyen számhalmazra kell f-et leszűkíteni úgy, hogy az inverz függvény biztosan létezzék? Állítsuk elő az inverzet.

8. Határozzuk meg az $A := \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ számhalmaz infimumát, szuprémumát, minimumát és maximumát (amennyiben léteznek).

9. Bizonyítsuk be, hogy $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$ minden $n \in \mathbf{N}$-re.

10. Bizonyítsuk be, hogy $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ minden $n \in \mathbf{N}$-re.

11. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbf{N}$-re:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

12. A szokásos teljes indukciós módszerrel megmutatható, hogy $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)+1$ ($n \in \mathbf{N}$). Valóban, ha ez az egyenlőség valamely n-re igaz, akkor $(n+1)$-re:

$$2+4+6+\ldots+2n+(2n+2) = n(n+1)+1+2n+2 = (n+1)(n+2)+1.$$

Ugyanakkor a bal oldal mindig páros, a jobb oldal viszont páratlan, ami nem lehetséges! Hol a hiba a gondolatmenetben?

13. A Hotel Aleph Null forgóajtaja kivágódik: vendég be, s lihegve szól:

- Hány szobájuk van?
- Hát van egypár. Egészen pontosan, megszámlálhatóan végtelen.
- Ember! Azt kérdem, hány üres szobájuk van?
- Vagy úgy! Jelenleg egyetlenegy.
- Az baj, mert nekem kettő kellene. Egy nekem, egy az anyósomnak.
- Nem probléma, uram! Mindent meg lehet oldani!

És meg is tette. Szólt a 2. szobában levő vendégnek, hogy költözzön át a 3. szobába, a 3. szobában levő vendéget átirányította a 4. szobába, és így tovább. Így a 2. szoba felszabadult. Ide, és az eredetileg is üres 1. szobába elhelyezte az új vendégeket.

De hát eredetileg csak egy üres szoba volt! Hol van itt az ellentmondás?

Megoldások

1. $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, $2^{2^{\emptyset}} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, $2^{2^{2^{\emptyset}}} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

2. Legyen $x \in A \setminus B$ tetszőleges, akkor $x \in A$, de $x \notin B$, ezért $x \in \overline{B}$, azaz $x \in A \cap \overline{B}$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \setminus B \subset A \cap \overline{B}$. Megfordítva, legyen $x \in A \cap \overline{B}$ tetszőleges, akkor $x \in A$ és $x \in \overline{B}$, ezért $x \notin B$, azaz $x \in A \setminus B$. Ezzel megmutattuk, hogy $A \cap \overline{B} \subset A \setminus B$ is teljesül. Következésképp $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

3. Felhasználva a 2. feladat eredményét és a halmazműveletekre vonatkozó azonosságokat:

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap \overline{A \cap \overline{B}} = A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = A \cap B,$$

és hasonlóan:

$$B \setminus (B \setminus A) = B \cap \overline{B \cap \overline{A}} = B \cap (\overline{B} \cup A) = (B \cap \overline{B}) \cup (B \cap A) = B \cap A.$$

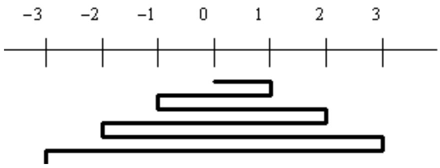
4. Igazoljuk az $\overline{\cup_{j=1}^{n} A_j} = \cap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$ egyenlőséget. Legyen $x \in \overline{\cup_{j=1}^{n} A_j}$ tetszőleges, akkor x nincs benne az $A_1,A_2,\ldots,A_n \subset X$ halmazok uniójában, tehát egyik A_k-ban sincs benne. Ekkor viszont benne van mindegyik A_k komplementumában, így azok metszetében is. Ezzel megmutattuk, hogy $\overline{\cup_{j=1}^{n} A_j} \subset \cap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$. A fordított tartalmazás igazolásához tegyük fel, hogy most $x \in \cap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$ tetszőleges. Akkor x mindegyik A_k komplementumában benne van, így egyik A_k-ban sincs benne, ezért az uniójuknak sem eleme: benne van tehát az unió komplementumában. Így $\cap_{j=1}^{n} \overline{A_j} \subset \overline{\cup_{j=1}^{n} A_j}$. Következésképp $\overline{\cup_{j=1}^{n} A_j} = \cap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$.

A második egyenlőséget hasonlóan is bizonyíthatjuk, de ahelyett felhasználhatjuk a most igazolt egyenlőséget speciálisan az $\overline{A_1},\overline{A_2},\ldots,\overline{A_n}$ részhalmazokra. Eszerint

$$\cap_{j=1}^{n} A_j = \cap_{j=1}^{n} \overline{\overline{A_j}} = \overline{\cup_{j=1}^{n} \overline{A_j}}.$$

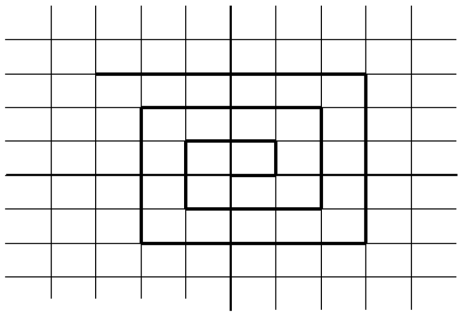
Komplementumot véve, innen $\overline{\cap_{j=1}^{n} A_j} = \cup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$.

5. (a) Rendezzük sorba $\mathbf{Z}$ elemeit az ábrán látható séma szerint, és minden n természetes számhoz rendeljük hozzá azt az egész számot,



2.5. ábra. *Az egész számok megszámlálhatósága*

melyet az n-edik lépésben érintünk. Ezzel könnyen láthatóan ekvivalenciát létesítettünk $\mathbf{N}$ és $\mathbf{Z}$ között.
(b) Rendezzük sorba $\mathbf{Z}^2$ elemeit (rácspontok!) az alábbi séma szerint:



2.6. ábra. *Az egész koordinátájú rácspontok megszámlálhatósága*

Minden n természetes számhoz rendeljük hozzá azt a rácspontot, melyet az n-edik lépésben érintünk. Ezzel könnyen láthatóan ekvivalenciát létesítettünk $\mathbf{N}$ és $\mathbf{Z}^2$ között.

6. Jelölje $\mathbf{Q}^*$ az irracionális számok halmazát. Akkor $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Q}^* = \mathbf{R}$. Ha $\mathbf{Q}^*$ megszámlálható lenne, akkor $\mathbf{Q}$ megszámlálhatósága miatt kettőjük uniója is megszámlálható lenne, ami ellentmond annak, hogy a valós számok halmaza nem megszámlálható.

7. Legyen y rögzített szám, tekintsük az $y = x^2 + 3x + 2$ egyenletet. Ha $y > -\frac{1}{4}$, akkor két megoldás is van:

$$x = \frac{-3 + \sqrt{1+4y}}{2} \quad \text{és} \quad x = \frac{-3 - \sqrt{1+4y}}{2},$$

melyek szimmetrikus helyzetűek a $-\frac{3}{2}$ helyre. A függvény tehát nem kölcsönösen egyértelmű, de leszűkítve akár a $[-\frac{3}{2}, +\infty)$, akár a $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ félegyenesekre, a leszűkített függvény már kölcsönösen egyértelmű. Az inverz formulája az előbbi esetben $f^{-1}(y) = \frac{-3+\sqrt{1+4y}}{2}$, az utóbbi esetben $f^{-1}(y) = \frac{-3-\sqrt{1+4y}}{2}$.

8. $\inf A = 0$, $\sup A = 1$, $\min A$ nem létezik, $\max A = 1$.

9.

$$2 + 4 + 6 + ... + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

10. Felhasználva az előző feladat eredményét:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = (1 + 2 + 3 + ... + 2n) - (2 + 4 + 6 + ... + 2n) =$$

$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - n(n+1) = n^2.$$

11. Az állítás $n = 1$ esetén nyilvánvaló. Feltéve, hogy valamely $n \geq 1$ egészre igaz, vizsgáljuk az állítást $(n+1)$-re. Azt kell igazolni, hogy:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+3-1}{2n+3} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Felhasználva az indukciós feltevést:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} =$$

$$\frac{2n+1-1}{2(2n+1)} + + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+1} \cdot \left(n + \frac{1}{2n+3}\right) =$$

$$\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

12. A hiba ott van, hogy az állítás *már* $n = 1$*-re sem igaz, amit nem ellenőriztünk*! Egyébként a leírt okfejtés hibátlan: ha az állítás valamely n-re igaz *lenne*, akkor $(n+1)$-re is igaz *lenne*. Ámde az állítás semmilyen n-re nem igaz.

13. Nincs ellentmondás! A feladat a végtelen halmazoknak egy szokatlan tulajdonságáról szól, hogy a végtelen halmazok ekvivalensek lehetnek saját valódi részhalmazukkal. Az ellentmondás látszatát a feladat (egyébként abszurd) szövegezése adja, ami egyfajta „megmaradási tételt" sugall a valós élet tapasztalatai alapján. Ilyenfajta „megmaradási tételek" azonban végtelen halmazokra nem vonatkoznak.

3. Komplex számok

3.1. A komplex számok bevezetése

Történetileg a számfogalom bővítését az egyenletek megoldhatóságának problematikája szülte.

Legyenek $a,b \in \mathbf{N}$ adottak, akkor az

$$x + a = b$$

egyenlet $\mathbf{N}$-ben nem mindig oldható meg (csak akkor, ha $a < b$). Ha azonban $\mathbf{N}$-et kibővítjük $\mathbf{Z}$-vé, az összeadást pedig alkalmasan kiterjesztjük a bővebb $\mathbf{Z}$ halmazra, akkor a fenti egyenlet már mindig megoldható $\mathbf{Z}$-ben, akkor is, ha $a,b \in \mathbf{Z}$ (nemcsak akkor, ha $a,b \in \mathbf{N}$).

Legyenek most $a,b \in \mathbf{Z}$ adottak, $a \neq 0$, akkor az

$$ax = b$$

egyenlet $\mathbf{Z}$-ben nem mindig oldható meg (csak akkor, ha a osztója b-nek). Ha azonban bevezetjük a $\mathbf{Z}$-nél bővebb $\mathbf{Q}$ számhalmazt, és arra a szorzást alkalmasan kiterjesztjük, akkor a fenti egyenlet már mindig megoldható $\mathbf{Q}$-ban, akkor is, ha $a,b \in \mathbf{Q}$ (nemcsak akkor, ha $a,b \in \mathbf{Z}$).

A valós számok bevezetése nem illik szorosan ebbe a sémába. Bizonyos algebrai (akár magasabb fokú), racionális együtthatós egyenletek megoldásaként ui. nem állítható elő az összes valós szám. Így csak az ún. *algebrai számok* állíthatók elő, melyek számossága egyébként csak megszámlálható (így tehát a „legtöbb” valós szám nem állítható elő racionális együtthatós egyenlet megoldásaként. Megemlítjük, hogy a π is ilyen nem-algebrai, ún. *transzcendens* szám). Másrészt pedig, ismeretes, hogy vannak olyan algebrai egyenletek, melyek nem oldhatók meg $\mathbf{R}$-ben. Így pl. már az egyszerű

$$x^2 + 1 = 0$$

egyenletnek sincs $\mathbf{R}$-beli megoldása. Mindazonáltal, éppen ezek a problémák indították el a próbálkozásokat a valós számok további bővítése irányába, melynek eredménye a komplex számok halmaza. Előrebocsátjuk, hogy a komplex számok körében már minden algebrai egyenlet (komplex együtthatós is!) megoldható.

A tárgyalás azonban független lesz a számfogalom-bővítés, ill. az egyenletek megoldhatóságának fentebb vázolt kérdéskörétől.

A komplex számok bevezetése rendezett valós számpárokkal :

Értelmezzünk $\mathbf{R}^2$ elemei (rendezett valós számpárok) között műveleteket a következőképp. Ha $(a,b),(c,d) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, akkor legyen:
$(a,b) + (c,d) := (a + c,b + d)$ (összeadás),
$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd,ad + bc)$ (szorzás),
$\lambda \cdot (a,b) := (\lambda a,\lambda b)$ (skalárral való szorzás).

3.1. Állítás: . A fenti műveletekre érvényesek az alábbi műveleti azonosságok: ha $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda,\mu \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, akkor:

- $(a,b) + (c,d) = (c,d) + (a,b)$ (az összeadás kommutatív),
- $((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a,b)+((c,d)+(e,f))$ (az összeadás asszociatív),
- $(a,b) + (0,0) = (a,b)$ ($(0,0)$ az összeadás *nulleleme*),
- minden (a,b)-hez van oly (x,y), hogy $(a,b) + (x,y) = (0,0)$, éspedig nyilván $(x,y) = (-a, -b)$; másszóval, az összeadás megfordítható (invertálható) művelet,
- $(a,b) \cdot (c,d) = (c,d) \cdot (a,b)$ (a szorzás kommutatív),
- $((a,b) \cdot (c,d)) \cdot (e,f) = (a,b) \cdot ((c,d) \cdot (e,f))$ (a szorzás asszociatív),
- $((a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$ ($(1,0)$ a szorzás *egységeleme*),
- minden $(a,b) \neq (0,0)$-hoz van oly (x,y), hogy $(a,b) \cdot (x,y) = (1,0)$, éspedig könnyen ellenőrizhetően $(x,y) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$; másszóval, a szorzás megfordítható (invertálható) művelet, ha $(a,b) \neq (0,0)$,
- $\lambda\cdot[(a,b)+(c,d)] = \lambda\cdot(a,b)+\lambda\cdot(c,d)$ (a skalárral való szorzás disztributív az összeadásra nézve),
- $(\lambda + \mu) \cdot (a,b) = \lambda \cdot (a,b) + \mu \cdot (a,b)$ (a skalárral való szorzás disztributív a skalár-összeadásra nézve is).

Bizonyítás. Az állítások egy része triviális (a valós számok megfelelő műveleti azonosságaiból adódóan), a többi a definícióból több-kevesebb számolással adódik. A szorzás asszociativitását például így igazolhatjuk:

$$((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (ac-bd,ad+bc)\cdot(e,f) = (ace-bde-adf-bcf,acf-bdf+ade+bce),$$

míg ugyanakkor:

$$(a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f)) = (a,b)\cdot(ce-df,af+de) = (ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf).$$

Komplex számsík:

Elnevezés. Az $\mathbf{R}^2$ halmazt a fenti műveletekkel ellátva *komplex számsíknak* ($\mathbf{C}$), elemeit *komplex számoknak* nevezzük.

3.2. A komplex számok algebrai alakja

Tekintsük az $(a,0)$ alakú komplex számokat. Könnyen látható, hogy a műveletek nem vezetnek ki az ilyen alakú számok halmazából, és itt megegyeznek a valós számok közt bevezetett szokásos műveletekkel. Pontosabban, tetszőleges $a_1,a_2 \in \mathbf{R}$ esetén:

$(a_1,0) + (a_2,0) = (a_1 + a_2,0)$,
$(a_1,0) - (a_2,0) = (a_1 - a_2,0)$,
$(a_1,0) \cdot (a_2,0) = (a_1 a_2,0)$,
$\frac{(a_1,0)}{(a_2,0)} = \left(\frac{a_1}{a_2},0\right)$, ha $a_2 \neq 0$.

(Itt két komplex szám különbségét, ill. hányadosát az összeadás, ill. a szorzás inverz műveleteként értelmezzük.

Az $(a,0)$ alakú számok tehát azonosíthatók a valós számokkal. A zérus szerepét a $(0,0)$, az 1 szerepét az $(1,0)$ számpár játssza.

Jelölés. Ha $(a,b) \in \mathbf{C}$ tetszőleges, akkor nyilván $(a,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$. Már láttuk, hogy $(1,0)$ a szorzás egységeleme $\mathbf{C}$-ben; jelölje i a $(0,1)$ komplex számot, akkor az (a,b) komplex szám röviden

$$a + bi$$

alakba írható. Ez a komplex szám *algebrai alakja*.

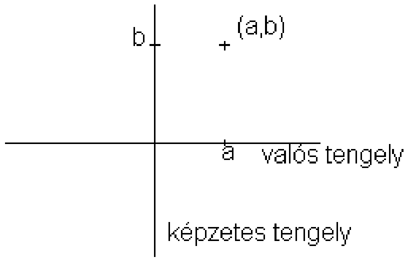
A továbbiakban a komplex számokat sokszor egyetlen betűvel jelöljük.

Elnevezés. i-t *képzetes* (imaginárius) *egységnek*, a bi alakú számokat ($b \in \mathbf{R}$) *tiszta képzetes számoknak* nevezzük.

A komplex számok az $\mathbf{R}^2$ síkon egy derékszögű koordinátarendszerben ábrázolhatók.

Valós rész, képzetes rész:

Legyen $z := a + bi \in \mathbf{C}$ tetszőleges. Az $a \in \mathbf{R}$ számot a z komplex szám *valós részének*, a $b \in \mathbf{R}$ számot pedig a z komplex szám *képzetes részének* nevezzük. A valós, ill. képzetes részt Re z-vel, ill. Im z-vel jelöljük.



3.1. ábra. *A komplex számok ábrázolása a komplex számsíkon*

Két komplex szám nyilván pontosan akkor egyenlő, ha valós és képzetes részeik külön-külön is megegyeznek. Így egy komplex $z_1 = z_2$ egyenlőség mindig *két valós* egyenlőséggel, ti. a $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$, $\mathrm{Im}\, z_1 = \mathrm{Im}\, z_2$ egyenlőségekkel ekvivalens.

Használva a komplex számok algebrai alakját, és a műveletek definícióját, nyilvánvaló, hogy tetszőleges $(a + bi) \in \mathbf{C}$ és $(c + di) \in \mathbf{C}$ esetén:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad - bc)i.$$

Speciálisan, $i^2 = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = -1 + 0i$, azaz $i^2 = -1$.

Másrészt pedig, a szorzást formálisan felírva:

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bdi^2 + bci + adi = (ad - bc) + (ad + bc)i,$$

tehát komplex algebrai kifejezésekkel pontosan ugyanúgy számolhatunk, mint a valós esetben, az $i^2 = -1$ egyenlőséget figyelembe véve.

Létezik a komplex számoknak olyan felépítése is, melynek kiindulópontja épp a fentebb levezetett $i^2 = -1$ egyenlőség. Bár ez a felépítés rövidebb, az általunk fentebb követett eljárás mégis kézenfekvőbb, mert ilyen, eddig értelmetlen egyenlőségekre mint kiindulópontra nem épít. Az említett felépítés fő gondolatmenete a következő.

Tekintsük az $a + bi$ alakú kéttagú algebrai kifejezéseket, ahol $a,b \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek, i pedig egy egyelőre tetszőleges szimbólum (melyet képzetes egységnek fogunk nevezni). Azonosítva az a valós számot az $a + 0i$

algebrai kifejezéssel, nyilván $\mathbf{R}$ egy bővítését nyertük. Most próbáljuk meg a szorzást és az összeadást kiterjeszteni a fenti alakú algebrai kifejezésekre. Avégett, hogy az összeadás és a szorzás jól ismert tulajdonságai és műveleti azonosságai (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás) érvényben maradjanak, nyilván tetszőleges $a,b,c,d \in \mathbf{R}$ esetén teljesülniük kell a következő azonosságoknak:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bdi^2 + (bc + ad)i.$$

Az összeadással nincs probléma; avégett pedig, hogy a szorzás eredménye ugyancsak egy ilyen kéttagú algebrai kifejezés maradjon, már egyedül csak az i^2 hatványt kell alkalmas módon definiálni. Igazolható (a részletektől eltekintünk), hogy erre lényegében az egyetlen értelmes definíció az $i^2 := -1$ előírás. (Ha pl. az $i^2 := 1$ definícióval élünk, akkor szükségképp $(1 + i) \cdot i = i + i^2 = i + 1$, ahonnan $i = 1$ vagy $i = -1$, tehát nem nyertünk valódi számbővítést; hasonlóan, ha $i^2 := i$-t írunk elő, akkor innen $i = 1$ vagy $i = 0$, azaz így sem lehet valódi számbővítést elérni, és így tovább.)

Bevezetve tehát az $i^2 := -1$ definíciót, a fenti kéttagú algebrai kifejezésekre kiterjesztett műveletekre igazak a szokásos műveleti azonosságok. Ezekután komplex számok alatt ilyen kéttagú algebrai kifejezéseket értünk. A konstrukció egyenértékű a feljebb vázolt, számpárokat használó megközelítéssel.

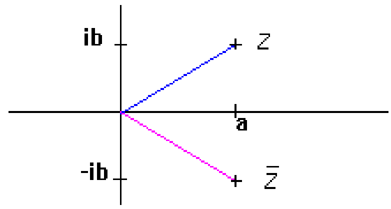
3.1. Következmény: . $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$,..., $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, tehát az i-hatványok periodikusan váltakoznak az $1,i,-1$ és a $-i$ számok között.

Konjugált:

A $z = a + bi \in \mathbf{C}$ komplex szám *komplex konjugáltjának* a $\overline{z} = a - bi \in \mathbf{C}$ komplex számot nevezzük.

A konjugálás mint a komplex sík geometriai transzformációja, könnyen láthatóan nem más, mint a valós tengelyre való tükrözés. A következő három állítás a konjugált alapvető tulajdonságait foglalja össze. Triviális számolásokkal igazolhatók, ezért a bizonyításokat elhagyjuk.

3.2. Állítás: . Tetszőleges $z \in \mathbf{C}$ komplex szám esetén $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ és $\operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.



3.2. ábra. *A komplex konjugált geometriai szemléltetése*

3.3. Állítás: . A $z \in \mathbf{C}$ komplex szám pontosan akkor valós, ha $z = \overline{z}$, és pontosan akkor tiszta képzetes, ha $z = -\overline{z}$.

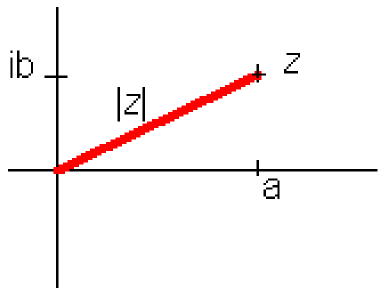
3.4. Állítás: . (a konjugálás műveleti azonosságai). Legyenek $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ tetszőlegesek, akkor
(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$,
(b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$,
(c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
(d) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$.

Abszolút érték:
A $z = a + bi \in \mathbf{C}$ komplex szám *abszolút értékének* a $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ nemnegatív valós számot nevezzük.

Az abszolút érték geometriai jelentése (a Pitagorász-tétel értelmében) a z komplex számot reprezentáló pont távolsága az origótól (azaz a $(0,0)$ komplex számtól). Könnyen látható, hogy ha történetesen z valós, akkor $|z|$ megegyezik a közönséges (valós) abszolút értékkel. Ez indokolja az elnevezést is.

Az alábbi összefüggések könnyen igazolhatók, ill. a geometriai jelentések alapján nyilvánvalók.

3.5. Állítás: . Tetszőleges $z \in \mathbf{C}$ esetén:
(a) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$,
(b) $|\mathrm{Re}\ z| \le |z|$,
(c) $|\mathrm{Im}\ z| \le |z|$,
(d) $|z| \le |\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z|$.



3.3. ábra. *A komplex abszolút érték geometriai szemléltetése*

Bizonyítás. Csak (d)-t igazoljuk, a többi könnyen látható:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 = (|a| + |b|)^2.$$

Az állítás (a) pontját felhasználva, konkrétan megadott komplex számok osztása egyszerűen elvégezhető. Ha ui. két komplex szám hányadosát kell kiszámítani, a törtet a nevező konjugáltjával bővítve, az új nevező az osztó abszolút értékének négyzete, tehát valós szám lesz.

3.1. Példa:

$$\frac{1+2i}{4-3i} = \frac{1+2i}{4-3i} \cdot \frac{4+3i}{4+3i} = \frac{-2+11i}{16+9} = -\frac{2}{25} + \frac{11}{25}i.$$

A következő egyenlőség igen nevezetes, és szintén az előző állítás (a) pontjából adódik:

3.6. Állítás: . Tetszőleges $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ esetén:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\text{Re } z_1\overline{z_2} + |z_2|^2.$$

Bizonyítás.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} =$$

$$= |z_1|^2 + 2\text{Re}\, z_1\overline{z_2} + |z_2|^2.$$

Az alábbi állítás pedig az abszolút érték leglényegesebb összefüggéseit foglalja össze:

3.7. Állítás: . Legyenek $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ tetszőlegesek, akkor:
(a) $|z| \geq 0$ és $|z| = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $z = 0$,
(b) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
(c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, és $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ (háromszög-egyenlőtlenségek).

Bizonyítás. Csak a (c)-t igazoljuk, a többi könnyen adódik az eddigi eredményekből. Az előző állítást felhasználva:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\text{Re}\, z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \leq$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Innen a (c) pont második egyenlőtlensége már adódik, ui.

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|.$$

3.3. A komplex számok trigonometrikus alakja

Polárkoordináták $\mathbf{R}^2$*-ben*

Legyen $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ a sík egy tetszőleges pontja. E pont helyzete egyértelműen jellemezhető egyrészt az (x, y) koordinátapárral is, de azzal az (r, ϕ) számpárral is, ahol r jelenti a pont távolságát az origótól, ϕ pedig az origóból kiinduló, az adott ponton átmenő félegyenes irányszögét. Ezeket a számokat az (x, y) pont *polárkoordinátáinak* nevezzük. Megkülönböztetésül, x-et és y-t *derékszögű koordinátáknak* nevezzük. Nyilván egyrészt

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi,$$

másrészt pedig

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \text{tg}\,\phi = \frac{y}{x},$$

tehát ugyanazon pont derékszögű és polárkoordinátái kölcsönösen kifejezhetők egymással.

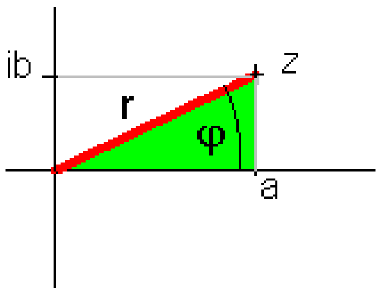
A ϕ irányszöget $[0{,}2\pi)$-beli számnak tekintjük. Az $(r{,}\phi)$ és az $(r{,}\phi+2k\pi)$ polárkoordinátákat nem tekintjük különbözőnek, ha $k \in \mathbf{N}$, azaz, ha ugyanazt a síkbeli pontot határozzák meg.

A komplex számok trigonometrikus alakja

Legyen $z := a + bi \in \mathbf{C}$. Tekintsük a komplex síkon a z pontnak az r és a ϕ polárkoordinátáit. Definíció szerint ekkor $r = |z|$. A ϕ irányszöget a z komplex szám *argumentumának* nevezzük. Az r, ϕ polárkoordinátákat az a, b derékszögű koordinátákkal kifejezve kapjuk, hogy

$$a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Ezt a formát nevezzük a z komplex szám *trigonometrikus alakjának*.



3.4. ábra. *A komplex számok trigonometrikus alakjának szemléltetése*

- Speciálisan legyen $a > 0$ pozitív valós szám. Ennek trigonometrikus alakja:
$$a = a(\cos 0 + i \sin 0).$$
- A $-a$ negatív valós szám trigonometrikus alakja:
$$-a = a\left(\cos \pi + i \sin \pi\right).$$
- Az ia tiszta képzetes szám trigonometrikus alakja:
$$ia = a\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$
- Az $-ia$ tiszta képzetes szám trigonometrikus alakja:
$$-ia = a\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

A következő állítás azt mutatja, hogy a trigonometrikus alakban a szorzás viszonylag bonyolult definíciója lényegesen egyszerűbb alakot eredményez:

3.1. Tétel: (Moivre). Ha $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i \sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ tetszőleges komplex számok, akkor szorzatuk:
$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

Bizonyítás. Elemi trigonometrikus addíciós tételek alkalmazásával kapjuk, hogy
$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i\sin\phi_1\cos\phi_2 + i\cos\phi_2\sin\phi_1 =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)).$$

Speciális eset. Miután könnyen láthatóan i argumentuma épp $\pi/2$, abszolút értéke pedig 1, az i-vel való szorzás a komplex síkon egy origó középű, $\pi/2$ szögű, pozitív irányú elforgatásnak felel meg. Hasonlóan, a (-1)-gyel való szorzás egy origó középű, π szögű elforgatást jelent, ami ekvivalens az origóra való tükrözéssel.

3.2. Következmény: . Ha $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ tetszőleges komplex számok ($z_2 \neq 0$), akkor kettőjük hányadosa:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)).$$

Speciálisan, ha $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$ tetszőleges, akkor

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\phi - i\sin\phi).$$

Ez utóbbi egyenlőség onnan is következik, hogy:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{r}{r^2}(\cos\phi - i\sin\phi).$$

3.4. Hatványozás és gyökvonás

A Moivre-tétel ismételt alkalmazásával azonnal adódik a következő eredmény:

3.3. Következmény: (komplex számok hatványozása). Ha

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

és $n \in \mathbf{N}$ tetszőleges, akkor

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi).$$

3.2. Példa: Számítsuk ki a $z := \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ komplex szám n-edik hatványát!

Megoldás. Először z-t átírjuk trigonometrikus alakra: $z = \frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, ezután pedig a Moivre-tételt alkalmazhatjuk: $z = \cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}$.

Az előző Következményből trigonometrikus azonosságok sora vezethető le azáltal, hogy az n-edik hatvány még a binomiális tétel alapján is kiszámítható. Pl. legyen a z komplex szám $z = \cos\phi + i\sin\phi$ alakú (ekkor abszolút értéke 1!), akkor egyrészt a binomiális tételből:

$$z^3 = \cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi,$$

másrészt az előző Következményből:

$$z^3 = \cos 3\phi + i\sin 3\phi,$$

ahonnan a valós és képzetes részek összehasonlításával az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$\cos 3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi, \qquad \sin 3\phi = 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi.$$

Gyökvonás komplex számokból

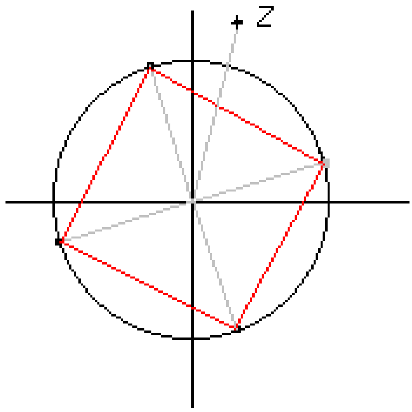
Probléma. Adott $n \in \mathbf{N}$ egészhez és $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \in \mathbf{C}$ nemzérus komplex számhoz keressünk olyan $w = R(\cos t + i\sin t)$ komplex számo(ka)t, mely(ek)re $w^n = z$.

Ha ilyen komplex szám egyáltalán van, akkor szükségképp $w^n = R^n(\cos nt + i\sin nt) = z$, azaz pl. $R^n = r$, $nt = \phi$. Ez a választás valóban meg is felel, de nem ez az egyetlen lehetőség: az $nt = \phi + 2k\pi$ egyenlőséget kielégítő argumentumok mind megfelelnek, ha $k \in \mathbf{Z}$ (a sin és cos függvények 2π-periodicitása miatt). Ezek összesen n db lényegesen különböző argumentumot adnak, azaz azt kaptuk, hogy:

3.8. Állítás: . A $w^n = R^n(\cos nt + i\sin nt) = z$ egyenlőséget n db különböző $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ komplex szám elégíti ki, éspedig ezek trigonometrikus alakja:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

A fenti w_k számokat a z komplex szám *n-edik gyökeinek* nevezzük. Ezek elhelyezkedése a komplex számsíkon szemléletes: egy origó középű, $\sqrt[n]{r}$ sugarú, szabályos n-szög csúcsaira illeszkednek.



3.5. ábra. *A komplex gyökök elhelyezkedése a komplex síkon*

3.3. Példa: Számítsuk ki a $(-i)$ szám komplex negyedik gyökeit!

Megoldás. $(-i)$ trigonometrikus alakja: $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, innen $(-i)$ komplex 4-ik gyökeinek alakja:

$$\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}$$

$(k = 0,1,2,3)$, azaz:

$$\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}, \quad \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}, \quad \cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}, \quad \cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}.$$

A zérus számnak nyilvánvalóan bármelyik pozitív kitevőjű gyöke csak a zérus lehet.

Speciális eset. Az 1 szám komplex n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük. A fentiek alapján ezek trigonometrikus alakja:

$$\epsilon_k^n = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0,1,\ldots,n-1)$$

Ezen n db pont a komplex síkon egy origó közepű, egységsugarú körvonalra illeszkedik, és egy szabályos n-szöget alkot.

3.5. Algebrai egyenletek

Az n-edfokú ($n \in \mathbf{N}$) algebrai egyenletek általános alakja:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n = 0,$$

ahol $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ adott komplex számok, és $a_n \neq 0$.

Ismeretes, hogy ha az egyenlet együtthatói speciálisan *valós* számok, akkor már másodfokú egyenletek esetében is előfordul, hogy az egyenletnek nincs *valós* megoldása. Ha viszont van, akkor az zárt formulával kifejezhető (megoldóképlet). Látni fogjuk, hogy a bővebb $\mathbf{C}$ halmazon viszont mindig van megoldás, akkor is, ha az egyenlet együtthatói maguk is komplex számok. Harmad- és negyedfokú egyenletek esetében megoldóképlet még mindig létezik (bár a másodfokúénál lényegesen bonyolultabb). Kiderült azonban, hogy általános ötöd- és ennél magasabb fokú egyenletekre már megoldóképlet sem létezik, azaz a megoldások általában nem állíthatók elő az együtthatókból az alapműveletek (gyökvonást is beleértve) véges sokszori alkalmazásával.

Valós együtthatós egyenletek gyökeinek elhelyezkedését egyszerűen jellemezhetjük:

3.9. Állítás: . Ha a $z \in \mathbf{C}$ szám megoldása a valós együtthatós

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n = 0$$

egyenletnek, akkor egyúttal $\overline{z}$ is megoldás. Következésképp valós együtthatós egyenletek megoldásai vagy maguk is valósak, vagy pedig komplex konjugált gyökpárokat alkotnak.

Bizonyítás. Legyen $z \in \mathbf{C}$ megoldás, azaz tegyük fel, hogy $a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n = 0$. Véve mindkét oldal konjugáltját: $a_0 + a_1 \overline{z} + ... + a_n \overline{z}^n = 0$, azaz $\overline{z}$ is megoldás.

Felvetődik a kérdés, hogy egy n-efokú egyenletnek egyáltalán *létezik-e* megoldása. A következő híres tétel pozitívan válaszol erre:

3.2. Tétel: (az algebra alaptétele). Minden komplex együtthatós n-edfokú algebrai egyenletnek van $\mathbf{C}$-ben gyöke, éspedig éppen n darab (ezek nem feltétlen különbözők). Jelölje $z_1, z_2, ..., z_n$ a gyököket, ekkor minden $z \in \mathbf{C}$ komplex szám mellett teljesül az

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n \equiv a_n (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$$

azonosság.

A tétel érdekessége még, hogy bár állítása tisztán algebrai jellegű, a tétel bizonyításához mégis analitikai, éspedig komplex függvénytani eszközök szükségesek.

A továbbiakban csak másodfokú és arra visszavezethető egyenletekkel foglalkozunk. Legyenek $a,b,c \in \mathbf{C}$ tetszőleges (komplex!) számok, és tekintsük az

$$az^2 + bz + c = 0$$

egyenletet. A valós együtthatós esetből már ismert teljes négyzetté való kiegészítés most is alkalmazható:

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0,$$

ahonnan kapjuk, hogy $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$, azaz

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Formálisan tehát visszakaptuk az ismert megoldóképletet, azonban itt a gyökjel *komplex* négyzetgyökvonást jelent, mely két, általában különböző komplex számot ad. Speciálisan, ha a $D := b^2 - 4ac$ diszkrimináns valós és pozitív, akkor a D-ből vont komplex négyzetgyök két értéke megegyezik a valós négyzetgyökkel és annak ellentettjével, így tehát ekkor a jól ismert közönséges megoldóképlethez jutunk vissza.

3.4. Példa: Oldjuk meg $\mathbf{C}$-ben az alábbi egyenletet: $z^2 - 2z + 10 = 0$.

Megoldás. $z = \frac{2+\sqrt{4-4\cdot 10}}{2}$. A (-36) szám komplex négyzetgyökei: $6i$ és $(-6i)$, így a két megoldás: $z_1 = 1 + 3i$, és $z_2 = 1 - 3i$.

3.5. Példa: Oldjuk meg $\mathbf{C}$-ben az alábbi egyenletet: $z^2 + iz - 1 = 0$.

Megoldás. $z = \frac{-i+\sqrt{-1+4}}{2} = \frac{-i+\sqrt{3}}{2}$. A 3 szám komplex négyzetgyökei: $\sqrt{3}$ és $-\sqrt{3}$, így a két megoldás: $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, és $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Másodfokúra visszavezethető egyenletek

Ezek általános alakja:

$$az^{2n} + bz^n + c = 0$$

ahol $n \in \mathbf{N}$ tetszőleges.

Az egyenlet z^n-re nézve másodfokú, ezért $z^n = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, innen pedig

$$z = \sqrt[n]{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Hangsúlyozzuk, hogy mindkét gyökvonás komplex értelemben értendő. A „belső" négyzetgyök 2, a „külső" n-edik gyök n db különböző értéket eredményez. Így az egyenletnek $2n$ db megoldása van (melyek között lehetnek egyenlők is).

3.6. Példa: Oldjuk meg **C**-ben az alábbi egyenletet: $z^3 + \frac{1}{z^3} = -2$.

Megoldás. Szorozva z^3-nal, kapjuk, hogy $z^6 + 2z^3 + 1 = 0$. Ez z^3-ra nézve másodfokú egyenlet, melynek egyetlen megoldása $z^3 = -1$. Innen z értékeit komplex köbgyökvonással kapjuk. Áttérve trigonometrikus alakra: $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$, innen 3 különböző megoldást kapunk:

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$z_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$z_3 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.6. Feladatok

1. Számítsuk ki az

$$\frac{1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{2006}}{1-i+i^2-i^3+\ldots+i^{2006}}$$

kifejezés értékét.

2. Végezzük el az alábbi osztásokat: (a) $\frac{2+5i}{1-4i}$, (b) $\frac{5+4i}{2+6i}$.

3. Határozzuk meg az alábbi komplex számok trigonometrikus alakját: (a) $1+i\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{3}-i$, (c) $-2+2i$.

4. „A Moivre-tétel szerint

$$\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

Kiszámítva azonban a bal oldalt:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+i)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(1+2i+i^2)=i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

adódik. A jobb oldal ugyanakkor i.” Hol a hiba a gondolatmenetben?

5. Legyen $z:=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Számítsuk ki az $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2$ összeget.

6. Számítsuk ki az (a) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i}\right)^{18}$ és a (b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{6}$ hatványok értékét.

7. Jelölje z_0, z_1, z_2, z_3 az $(1-i)$ szám komplex 4-ik gyökeit. Számítsuk ki a $z_0+z_1+z_2+z_3$ összeget.

8. Mi lehet egy olyan komplex szám 5-ik hatványa, melynek 3-ik hatványa épp i?

9. Tekintsük az $1999z^2-19z+199=0$ egyenletet, jelölje z_1, z_2 a két (komplex!) gyököt. Mennyivel egyenlő $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^{1999}$?

10. Határozzuk meg mindazon z komplex számokat, melyekre $z^3=-\frac{i}{z^3}$.

11. Keressük meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását: $z^3 - 1 = \frac{6}{z^3}$.

12. Keressük meg az $\frac{1}{z^2} + 2z^2 = 2$ egyenlet összes komplex megoldását.

Megoldások

1. Figyelembe véve az i-hatványokra vonatkozó összefüggéseket:

$$1 + i + i^2 + i^3 = i^4 + i^5 + i^6 + i^7 = ... = 0$$

és

$$1 - i + i^2 - i^3 = i^4 - i^5 + i^6 - i^7 = ... = 0.$$

A számláló és a nevező tagjait tehát négyesével csoportosíthatjuk. Egy-egy négyes csoport összege 0, innen

$$\frac{1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2006}}{1 - i + i^2 - i^3 + ... + i^{2006}} = \frac{i^{2004} + i^{2005} + i^{2006}}{i^{2004} - i^{2005} + i^{2004}} = \frac{1 + i - 1}{1 - i - 1} = -1.$$

2. (*a*)

$$\frac{2 + 5i}{1 - 4i} = \frac{2 + 5i}{1 - 4i} \cdot \frac{1 + 4i}{1 + 4i} = \frac{-18 + 13i}{1 + 16} = -\frac{18}{17} + i\frac{13}{17}.$$

(*b*)

$$\frac{5 + 4i}{2 + 6i} = \frac{5 + 4i}{2 + 6i} \cdot \frac{2 - 6i}{2 - 6i} = \frac{34 - 22i}{4 + 36} = \frac{17}{20} - i\frac{11}{20}.$$

3. (*a*)

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

(*b*)

$$\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right).$$

(*c*)

$$-2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

4. A két oldal kiszámítása hibátlan, de a Moivre-tétel nem alkalmazható, mert a bal oldalon nem trigonometrikus alakú komplex számok állnak. Így a két oldal valóban nem egyenlő.

5. Vegyük észre, hogy ($|z| = 1$ miatt) $\frac{1}{z} = \overline{z}$ és $\frac{1}{z^2} = \overline{z^2} = \overline{z}^2$. Innen $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 = 1 + 2\text{Re}\, z + 2\text{Re}\, z^2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, mert $z^2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$.

6. (a)

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i}=\frac{2}{1+i\sqrt{3}}=\frac{2(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=$$
$$=\frac{2(1-i\sqrt{3})}{1+3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}.$$

Innen

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i}\right)^{18}=\cos\frac{18\cdot 5\pi}{3}+i\sin\frac{18\cdot 5\pi}{3}=1.$$

(b) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}$, innen

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{6}=\cos 11\pi+i\sin 11\pi=-1.$$

7. $1-i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, innen

$$z_0=\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right),$$

$$z_1=\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=iz_0,$$
$$z_2=\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{2\pi}{2}\right)\right)=-z_0,$$
$$z_3=\sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{16}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=-iz_0.$$

Következésképp $z_0+z_1+z_2+z_3=0$.

Megjegyezzük, hogy ehhez a gyökök konkrét kiszámítása nem kellett, csak a $z_1=iz_0$, $z_2=-z_0$, $z_3=-iz_0$ összefüggések felismerése!

8. Azon komplex számok, melyek 3-ik hatványa i, az i szám komplex köbgyökei, azaz a $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}$ számok. Ezek 5-ik hatványai:

$$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6},$$
$$\cos\frac{25\pi}{6}+i\sin\frac{25\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},$$

és

$$\cos\frac{45\pi}{6}+i\sin\frac{45\pi}{6}=\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}.$$

9. Az egyenlet megoldása nélkül: mivel az egyenlet *valós* együtthatós, a diszkrimináns pedig negatív, a két komplex gyök egymás konjugáltja, így abszolút értékük megegyezik. Ezért $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^{1999}=1$.

10. Az egyenlet ekvivalens az alábbival: $z^6=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$. Innen

$$z=\cos\frac{3\pi+4k\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi+4k\pi}{12}\qquad(k=0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5)$$

11. Az egyenlet ekvivalens az alábbival: $z^6-z^3-6=0$. Innen

$$z^3=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}3=3(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)\\-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)\end{cases}$$

ezért

$$z_1=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$
$$z_2=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$
$$z_3=\sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{3},$$
$$z_4=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$z_5=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}\right)=-\sqrt[3]{2},$$
$$z_6=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

12. Az egyenlet ekvivalens az alábbival: $2z^4-2z^2+1=0$. Innen

$$z^2=\frac{2+\sqrt{4-8}}{4}=\frac{2\pm 2i}{4}=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\end{cases}$$

ezért

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right),$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right),$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right),$$

$$z_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \right).$$

4. Valós számsorozatok

Legyen X egyelőre tetszőleges halmaz.

Sorozat:

Egy $f : \mathbf{N} \to X$ függvényt, melyre $\mathcal{D}_f = \mathbf{N}$, X-beli *sorozatnak* nevezünk.

Speciálisan, ha $X = \mathbf{R}$ (vagy $X = \mathbf{C}$), akkor valós (ill. komplex) *számsorozatról* beszélünk.

A kialakult szokás szerint az $f(1), f(2), f(3), \ldots$ függvényértékekre inkább az $f_1, f_2, f_3, \ldots$ jelölésekkel hivatkozunk, és a függvény argumentumát (az 1,2,3 stb. számokat) a sorozat *indexének* nevezzük. Az, hogy f egy X-beli sorozat, szokás (kissé következetlenül) az $(f_n) \subset X$ szimbólummal jelölni. Magát az f sorozatot (ami tehát egy függvény) pedig szokás szerint az (f_n) szimbólummal jelöljük, ahol f_n a sorozat n-edik tagja.

Részsorozat:

Ha $(f_n) \subset X$ egy X-beli sorozat, $1 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ pedig természetes számokból álló szigorúan növekvő sorozat, akkor az $f_{n_1}, f_{n_2}, f_{n_3}, \ldots$ (röviden: az $(f_{n_k}) \subset X$) sorozatot az eredeti $(f_n) \subset X$ sorozat egy *részsorozatának* nevezzük.

Nyilván minden sorozat részsorozata önmagának.

A fejezet további részében *valós számsorozatokról* lesz szó. Már itt megjegyezzük, hogy a legtöbb fogalom és tétel nehézség nélkül általánosítható *komplex* számsorozatok esetére is.

Sorozatokat legtöbbször explicit formulával adunk meg, pl. $x_n := \frac{1}{n}$ $(n = 1,2,\ldots)$. Szokásos még az ún. *rekurzív megadás* is, amikor a sorozat egy tagját nem az indexével, hanem a megelőző indexű tagok segítségével definiáljuk, pl.

$$x_1 := A, \qquad x_{n+1} := (1+p)x_n \qquad (n = 1,2,\ldots),$$

ahol p adott valós szám. (Ez a példa egy A nagyságú tőke évi p kamatláb melletti évenkénti növekedését írja le.) A rekurzív módon megadott sorozat sok esetben átírható explicit sorozattá. Az előző példában:

$$x_n = A \cdot (1+p)^{n-1} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

4.1. Sorozatok konvergenciája, alapvető tételek

Most bevezetjük a valós analízis egyik legfontosabb fogalmát:

Konvergencia:

Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ számsorozat *konvergens, éspedig az $x \in \mathbf{R}$ számhoz tart*, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ ún. *küszöbindex*, hogy minden $n \geq N$ indexre $|x_n - x| < \epsilon$ teljesül. Ezt a tényt így jelöljük: $x_n \to x$ vagy $\lim x_n = x$. Az x számot a sorozat *határértékének*, vagy *limeszének* nevezzük. A nem konvergens sorozatokat *divergensnek* is nevezzük.

Ha (x_n)-et egy bonyolultabb kifejezés definiálja, és nem nyilvánvaló, hogy mi a sorozat indexe, akkor szokás még az $x_n \to x \quad (n \to +\infty)$ vagy a $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ jelölések használata.

Szemléletesen: a sorozat "nagy indexű" tagjai „tetszőleges pontossággal” megközelítik az x számot.

A definícióból nyilvánvaló, hogy sem a konvergencia ténye, sem a határérték nem változik, ha a sorozat *véges sok* tagját megváltoztatjuk.

A későbbiekben, a kialakult gyakorlat szerint az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat jelölésére mindig az (x_n) szimbólumot használjuk, és nem x-et (egyéb függvények jelölésétől eltérően). Nem fog tehát félreértést okozni, ha az (x_n) sorozat határértékét esetenként x-szel jelöljük.

Nem hivatalos használatra bevezetjük a következő elnevezést ill. szóhasználatot. Azt mondjuk, hogy valamely tulajdonság egy sorozat *majdnem minden* tagjára teljesül, ha az illető tulajdonság csak véges sok indexre nem teljesül, azaz, ha valamely indextől kezdve az összes további indexre teljesül. Ezzel a szóhasználattal: egy $(x_n) \subset \mathbf{R}$ számsorozat konvergens, és $x_n \to x$, ha bármely (bármilyen kicsi) $\epsilon > 0$ szám esetén a sorozat majdnem minden tagja ϵ-nál közelebb esik x-hez.

Nyilvánvaló, hogy konvergens sorozat minden részsorozata is konvergens, és az eredeti sorozat határértékéhez tart.

A definíció nem tartalmazza a határérték egyértelműségét, azonban látni fogjuk, hogy (a szemlélettel összhangban) konvergens sorozatoknak csak egy határértékük van.

A zérushoz tartó sorozatokat röviden *zérussorozatoknak* nevezzük.

A gyakorlatban határértékekek számításakor jól felhasználható a konvergencia definíciójának alábbi átfogalmazása (a bizonyítást az Olvasóra hagyjuk).

4.1. Állítás: . Tetszőleges $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozatra $x_n \to x$ pontosan akkor, ha $|x_n - x| \to 0$.

Most egy, a konvergenciánál jóval egyszerűbb, de fontos és könnyebben ellenőrizhető fogalmat vezetünk be:

Korlátos sorozat:
Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *korlátos*, ha az abszolút értékekből képezett $\{|x_n| : \ n \in \mathbf{N}\}$ számhalmaz felülről korlátos $\mathbf{R}$-ben, azaz, ha van oly $C \geq 0$ szám, hogy $|x_n| \leq C$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$ indexre. Az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *felülről* (*alulról*) *korlátos*, ha a sorozat tagjaiból képezett $\{x_n : \ n \in \mathbf{N}\}$ számhalmaz felülről (alulról) korlátos $\mathbf{R}$-ben.

A korlátosság a konvergenciánál gyengébb fogalom, amint azt a következő állítás is mutatja.

4.2. Állítás: . Minden $(x_n) \subset \mathbf{R}$ konvergens sorozat korlátos is.

Bizonyítás. Legyen $x_n \to x$. Akkor speciálisan az $\epsilon := 1$ számhoz is van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $|x_n - x| < 1$, azaz véges sok kivétellel a sorozat tagjai 1-nél közelebb vannak x-hez, tehát lefedhetők az $(x - 1, x + 1)$ véges hosszúságú intervallummal. A kivételes tagok szintén lefedhetők egy alkalmas véges hosszúságú intervallummal, ezért ez a sorozat összes tagjára is igaz, azaz a sorozat korlátos.

Az állítás megfordítása nem igaz, a korlátosságból a konvergencia nem következik!

Példák

4.1. Példa: Az $x_n := a \quad (n = 1,2,\ldots)$ *stacionárius sorozat* (melynek minden tagja a-val egyenlő) korlátos, konvergens és a-hoz tart tetszőleges a valós azám esetén.

4.2. Példa: Az $x_n := \frac{1}{n} \quad (n = 1,2,\ldots)$ sorozat korlátos, konvergens és 0-hoz tart.

Valóban, $|x_n| \leq 1$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$-re; továbbá tetszőleges $\epsilon > 0$ mellett minden olyan $N \in \mathbf{N}$ szám jó küszöbindexnek, melyre $N > \frac{1}{\epsilon}$.

4.3. Példa: Az $x_n := \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n = 1,2,...)$ sorozat korlátos, konvergens és 0-hoz tart.

Valóban, $|x_n| \leq 1$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$-re; továbbá tetszőleges $\epsilon > 0$ mellett minden olyan $N \in \mathbf{N}$ szám jó küszöbindexnek, melyre $N > \frac{1}{\epsilon^2}$.

4.4. Példa: Legyen $c \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $|c| < 1$. Akkor az $x_n := c^n$ $(n = 1,2,...)$ sorozat korlátos, konvergens és 0-hoz tart.

Valóban, $|x_n| \leq 1$ teljesül minden $n \in \mathbf{N}$-re; továbbá tetszőleges $\epsilon > 0$ mellett minden olyan $N \in \mathbf{N}$ szám jó küszöbindexnek, melyre $N > \frac{\lg \epsilon}{\lg |c|}$.

4.5. Példa: Az $x_n := n$ $(n = 1,2,...)$ sorozat nem korlátos, ezért divergens.

4.6. Példa: Az $x_n := (-1)^n$ $(n = 1,2,...)$ sorozat korlátos és divergens. Ennek egy részsorozata a $(-1, -1, -1, ...)$ stacionárius sorozat (ami konvergens).

Az alábbi egyszerű állításokban összefoglaljuk a konvergencia legfontosabb tulajdonságait. Figyeljük meg a bizonyítások jellegzetes technikáit!

4.3. Állítás: . Minden konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat olyan, hogy $x_n \to x$ és $x_n \to y$, ahol $x \neq y$. Jelölje $\epsilon := \frac{|x-y|}{2}$. Akkor léteznek $N_1 \in \mathbf{N}$ és $N_2 \in \mathbf{N}$ küszöbindexek úgy, hogy $|x_n - x| < \epsilon$ minden $n \geq N_1$-re és $|x_n - y| < \epsilon$ minden $n \geq N_2$-re. Jelölje N a két küszöbindex közül a nagyobbikat, akkor minden $n \geq N$-re $|x_n - x| < \epsilon$ és $|x_n - y| < \epsilon$, innen:

$$2\epsilon = |x - y| = |x - x_n - y + x_n| \leq |x - x_n| + |y - x_n| < 2\epsilon,$$

ami nem lehetséges.

4.4. Állítás: . Ha $(x_n),(y_n) \subset \mathbf{R}$ olyan konvergens sorozatok, hogy minden n indexre $x_n \leq y_n$, akkor $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $x := \lim x_n > y := \lim y_n$. Jelölje $\epsilon := \frac{x-y}{2}$, akkor léteznek $N_1 \in \mathbf{N}$ és $N_2 \in \mathbf{N}$ küszöbindexek úgy, hogy $|x_n - x| < \epsilon$ minden $n \geq N_1$-re és $|x_n - y| < \epsilon$ minden $n \geq N_2$-re. Jelölje N a két küszöbindex közül a nagyobbikat, akkor minden $n \geq N$-re $x - x_n < \epsilon$, azaz $x_n > x - \epsilon$, ugyanakkor $y_n - y < \epsilon$, azaz $y_n < y + \epsilon$. Innen:

$$y_n < y + \epsilon = y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2} = x - \frac{x-y}{2} = x - \epsilon < x_n,$$

ami ellentmond az $x_n \leq y_n$ $(n \in \mathbf{N})$ feltevésnek.

4.1. Következmény: . Nemnegatív tagú konvergens sorozatok határértéke is nemnegatív.

Az állítás az előző állítás speciális esete, azt az $x_n :\equiv 0$ stacionárius sorozatra alkalmazva.

4.5. Állítás: („rendőr elv”). Ha (x_n),(y_n),$(z_n) \subset \mathbf{R}$ olyan sorozatok, hogy minden n indexre $x_n \le y_n \le z_n$, továbbá (x_n)-nek és (z_n)-nek közös határértéke van: $\lim x_n = \lim z_n = x$, akkor az (y_n) sorozat szükségképp konvergens és határértéke ugyanez a közös érték: $\lim y_n = x$.

Bizonyítás. A feltétel miatt $x_n - x \le y_n - x \le z_n - x$. Ha most $y_n - x \ge 0$ teljesül, akkor $|y_n - x| \le |z_n - x|$; ha pedig $y_n - x < 0$, akkor $|y_n - x| \le |x_n - x|$. Mindenképp igaz tehát, hogy: $|y_n - x| \le |x_n - x| + |z_n - x|$. Legyen most $\epsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor léteznek $N_1 \in \mathbf{N}$ és $N_2 \in \mathbf{N}$ küszöbindexek úgy, hogy $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$ minden $n \ge N_1$-re, és $|x_n - z| < \frac{\epsilon}{2}$ minden $n \ge N_2$-re. Jelölje N a két küszöbindex közül a nagyobbikat, akkor minden $n \ge N$-re $x_n - x < \frac{\epsilon}{2}$ és $x_n - z < \frac{\epsilon}{2}$, innen $|y_n - x| \le |x_n - x| + |z_n - x| < \epsilon$, azaz $y_n \to x$.

4.2. Következmény: . Ha (x_n),$(y_n) \subset \mathbf{R}$ olyan sorozatok, hogy minden n indexre $|x_n| \le y_n$ és $y_n \to 0$, akkor az (x_n) sorozat is szükségképp konvergens és szintén 0-hoz tart.

Mivel $-y_n \le x_n \le y_n$ $(n \in \mathbf{N})$, és $-y_n \to 0$, ezért az előző állítás alapján $x_n \to 0$.

Sorozatok határértékének kiszámítását nagyon megkönnyíti, hogy a határérték a szokásos műveletekkel felcserélhető:

4.6. Állítás: . Tegyük fel, hogy (x_n),$(y_n) \subset \mathbf{R}$ konvergens sorozatok, $x_n \to x$, $y_n \to y$, és legyen $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám. Akkor:
(a) $(x_n + y_n)$ is konvergens és $x_n + y_n \to x + y$,
(b) $(x_n - y_n)$ is konvergens és $x_n - y_n \to x - y$,
(c) $(c \cdot x_n)$ is konvergens és $c \cdot x_n \to cx$,
(d) $(x_n y_n)$ is konvergens és $x_n y_n \to xy$,
(e) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ is konvergens és $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}$ (feltéve, hogy $y \ne 0$).

Bizonyítás. Példaképpen (d)-t igazoljuk, a többit az Olvasóra bízzuk.

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \le |x_n| \cdot |y_n - y| + |y| \cdot |x_n - x|.$$

Ámde (x_n) konvergens lévén, korlátos is, így alkalmas $C \ge 0$ konstans mellett $|x_n y_n - xy| \le C \cdot (|y_n - y| + |x_n - x|)$. Következésképp a jobb oldal zérushoz tart, innen pedig $x_n y_n \to xy$.

4.7. Példa: Számítsuk ki az alábbi sorozat határértékét (ha az létezik):

$$x_n := \frac{3+n-5n^2}{2-10n+2n^2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megoldás: Osszuk el a számlálót és a nevezőt is n^2-tel, és alkalmazzuk az előző állítást:

$$x_n = \frac{\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n}-5}{\frac{2}{n^2}-\frac{10}{n}+2} \to -\frac{5}{2},$$

mert $\frac{1}{n} \to 0$ és $\frac{1}{n^2} \to 0$.

4.8. Példa: Számítsuk ki az alábbi sorozat határértékét (ha az létezik):

$$x_n := \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megoldás: Szorozzunk és osszunk is $(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})$-nel:

$$x_n = (\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}.$$

Innen

$$|x_n| = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \le \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,$$

ahonnan $x_n \to 0$ következik.

4.9. Példa: Számítsuk ki az alábbi rekurzív módon megadott sorozat határértékét (ha az létezik):

$$x_1 := 0 \quad \text{és} \quad x_{n+1} := \frac{3}{5}x_n - 4 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Megoldás: A feladat most két, jól elkülöníthető részre bomlik:
(a) Kiszámítjuk, hogy *ha* a sorozat konvergens, akkor mi lehet a határérték. *Tegyük fel* tehát, hogy valamely x számra $x_n \to x$. Akkor a rekurzív definíció baloldala nyilván szintén x-hez tart, a jobboldal pedig $\left(\frac{3}{5}x-4\right)$-hez. A kettő szükségképp egyenlő, azaz $x = \frac{3}{5}x - 4$, ahonnan $x = -10$. Tehát: *ha* létezik a határérték, akkor az csakis (-10) lehet.
(b) Igazoljuk, hogy a sorozat valóban konvergens. A rekurzív definíció mindkét oldalából kivonva az előbb kiszámított lehetséges határértéket: $x_{n+1}+10 := \frac{3}{5}x_n + 6 = \frac{3}{5}(x_n+10)$. Ugyanezt az egyenlőséget alkalmazva az egyre kisebb indexekre:

$$x_{n+1}+10 = \frac{3}{5}(x_n+10) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 (x_{n-1}+10) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 (x_{n-2}+10) =$$

$$= \ldots = \left(\frac{3}{5}\right)^n (x_1 + 10) = 11 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0,$$

amivel igazoltuk, hogy a sorozat valóban konvergens, és újra megkaptuk, hogy a határérték (-10)-zel egyenlő.

4.2. Korlátos sorozatok, monoton sorozatok

Már láttuk, hogy a konvergens sorozatok szükségképp korlátosak is. Az állítás megfordítása nem igaz (egy korlátos sorozat nem feltétlen konvergens), de mindenesetre van konvergens részsorozata:

4.1. Tétel: (Bolzano–Weierstrass). Ha $(x_n) \subset \mathbf{R}$ korlátos sorozat, akkor kiválasztható belőle konvergens részsorozat.

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset \mathbf{R}$ korlátos sorozat, akkor van oly I_0 véges hosszúságú zárt intervallum, hogy $(x_n) \subset I_0$. Felezzük meg I_0-t, és jelölje I_1 azt a felét, amelyik a sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza (ha mindkét fél ilyen, válasszuk tetszőlegesen az egyiket). Most felezzük meg I_1-et, és jelölje I_2 azt a felét I_1-nek, amelyik a sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza, és így tovább. Így kapunk egy $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ egymásba ágyazott zárt intervallum-sorozatot. A Cantor-axióma miatt ezeknek van közös pontja, jelöljön x egy ilyet. Mindegyik I_k intervallumban a sorozatnak végtelen sok tagja van: legyenek $x_{n_k} \in I_k$ tetszőleges (különböző) tagok ($k \in \mathbf{N}$). Akkor (x_{n_k}) részsorozata (x_n)-nek, és $(x_{n_k}) \to x$, mert a felezéses konstrukció miatt

$$|x_{n_k} - x| \le |I_k| = \frac{1}{2^k} \cdot |I_0| \to 0,$$

ahol $|I_k|$ jelöli az I_k intervallum hosszát.

A tétel a konvergens részsorozatok számáról és azok határértékéről semmit sem állít. Lehet, hogy több, különböző határértékű részsorozat is kiválasztható.

Most egy fontos, speciális sorozattípust vezetünk be:

Monoton sorozat:
Az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *monoton növő*, ha $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots$, ill. *monoton fogyó*, ha $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots$. A monoton növő és fogyó sorozatokat röviden *monoton* sorozatoknak is nevezzük.

Ha a korlátosság mellett a monotonitást is feltesszük, akkor ez már elegendő a konvergenciához. Pontosabban:

4.2. Tétel: (a monoton sorozatok tétele). Minden monoton növő és felülről korlátos sorozat konvergens is. Hasonlóan, minden monoton fogyó és alulról korlátos sorozat konvergens is.

Bizonyítás. Legyen az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat monoton növő (a másik eset hasonló módon kezelhető). Jelölje $x := \sup\{x_1, x_2, ...\}$. Megmutatjuk, hogy $x_n \to x$. Egyrészt nyilván $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x$, (mert x felső korlát), másrészt tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz van oly N index, hogy $x_N > x - \epsilon$ (mert x a *legkisebb* felső korlát, így $x - \epsilon$ már nem felső korlátja a sorozatnak). Kihasználva a monotonitást, minden $n \geq N$ index mellett $x_n > x - \epsilon$ is igaz. Ez az egyenlőtlenség az előző $x_n \leq \epsilon$ egyenlőtlenséggel együtt azt jelenti, hogy $|x_n - x| < \epsilon$ teljesül minden $n \geq N$-re. Tehát valóban, $x_n \to x$.

A tétel csak a konvergencia tényét mondja ki. Az, hogy a határértéket hogyan lehet *kiszámítani*, egészen más (és rendszerint sokkal nehezebb) probléma.

4.10. Példa: Tekintsük az

$$x_1 := 0, \quad x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n} \qquad (n = 1,2,...)$$

rekurzív sorozatot. Ennek tagjai: $0, \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...$, ahonnan világos, hogy a sorozat monoton növő. Kiszámítva az első néhány tagot, sejthető, hogy $x_n \leq 2$ teljesül minden n-re. Ez valóban így is van, ezt teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás $n = 1$-re nyilván igaz. Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ indexre igaz, és vizsgáljuk az állítást $(n + 1)$-re: $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leq \sqrt{2 + 2} = 2$, tehát állítás $(n + 1)$-re is igaz, ennélfogva valamennyi n indexre igaz. A sorozat tehát monoton növő és felülről korlátos, így konvergens is. A rekurzív sorozat határértékét ezek után könnyen kiszámíthatjuk: jelölje $x := \lim x_n$, akkor a rekurzív definícióból $x_{n+1}^2 := 2 + x_n$ adódik. A baloldal x^2-hez, a jobboldal $(2 + x)$-hez tart, így az x határérték megoldása az $x^2 = 2 + x$ másodfokú egyenletnek, azaz $x = 2$ (az egyenlet másik gyöke negatív, ami nem jöhet számításba, lévén a sorozat tagjai pozitívak).

A gyakorlatban sokszor előfordul a divergens sorozatok egy speciális osztálya, melyre ezért külön elnevezést vezetünk be:

Végtelenbe tartó sorozat:

Azt mondjuk, hogy az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat a $(+\infty)$-hez tart (ill. a $(-\infty)$-hez tart), ha minden $C > 0$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ index esetén $x_n > C$ (ill. $x_n < -C$). Ezt a tényt így jelöljük: $x_n \to +\infty$, vagy $\lim x_n = +\infty$ (ill. $x_n \to -\infty$, vagy $\lim x_n = -\infty$).

Szemléletesen: egy sorozat a $(+\infty)$-hez tart, ha bármely (nagy) $C > 0$ korlát esetén a sorozat majdnem minden tagja meghaladja ezt a korlátot.

Nyilvánvaló, hogy egy $(+\infty)$-hez tartó sorozat minden részsorozata is $(+\infty)$-hez tart. Az is könnyen látható, hogy ha egy monoton növő sorozatnak van $(+\infty)$-hez tartó részsorozata, akkor maga a sorozat is $(+\infty)$-hez tart. Végül, a definíció azonnali következménye, hogy ha $x_n \to +\infty$ és $(y_n) \subset \mathbf{R}$ olyan sorozat, hogy $x_n \leq y_n$ teljesül minden n indexre, akkor a „nagyobb" sorozat szintén $(+\infty)$-hez tart: $y_n \to +\infty$.

Hangsúlyozzuk, hogy a hasonló jelölés ellenére a $(+\infty)$-hez ill. $(-\infty)$-hez tartó sorozatok *nem konvergensek*!

4.11. Példa: Az $x_n := n$ $(n = 1,2,...)$ sorozat $(+\infty)$-hez tart. (Ez nyilvánvaló.)

4.12. Példa: Az $x_n := 2^n$ $(n = 1,2,...)$ sorozat $(+\infty)$-hez tart (mert az előző sorozat egy részsorozata).

4.13. Példa: Az $x_n := \sqrt{n}$ $(n = 1,2,...)$ sorozat $(+\infty)$-hez tart (mert monoton nő, és van $(+\infty)$-hez tartó részsorozata: a $\sqrt{1},\sqrt{4},\sqrt{9},...$, azaz az $1,2,3,...$ részsorozat egy ilyen részsorozat).

A végtelenbe tartó sorozatok és a zérussorozatok szoros kapcsolatban állnak, pontosabban:

4.7. Állítás: . Ha $x_n \to +\infty$ vagy $x_n \to -\infty$, akkor az $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ reciprok sorozat zérussorozat.

Bizonyítás. Csak az $x_n \to +\infty$ esetet igazoljuk, a másik eset hasonlóan bizonyítható. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges, akkor az $1/\epsilon$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$-re $x_n > \frac{1}{\epsilon}$. Innen minden $n \geq N$-re $\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{x_n} < \epsilon$, tehát $\frac{1}{x_n} \to 0$.

Az állítás megfordítása nem igaz: zérussorozatok reciprokai nem feltételen tartanak $(+\infty)$-hez vagy $(-\infty)$-hez. *Ellenpélda*: $x_n := \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$, akkor $x_n \to 0$, de $\frac{1}{x_n}$ nem tart sem $(+\infty)$-hez, sem $(-\infty)$-hez, hiszen az egymást követő tagok előjelei váltakoznak.

4.3. Cauchy-sorozatok

A konvergencia definíciójának gyakorlati alkalmazását sokszor nehézzé teszi, hogy a definíció tartalmazza magát a határértéket is. Ha egy sorozatról csak azt szeretnénk eldönteni, hogy konvergens-e, a definíció alkalmazásához meg kell „sejteni” a határértéket is, ami nem mindig egyszerű. A következő fogalom éppen ezt teszi lehetővé: konvergenciavizsgálatot a határérték előzetes ismerete nélkül.

Cauchy-sorozat:

Az $(x_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *Cauchy-sorozat*, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz van olyan $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n,m \geq N$ indexre $|x_n - x_m| < \epsilon$ teljesül.

Szemléletesen: egy sorozat Cauchy-sorozat, ha bármely (kicsi) $\epsilon > 0$ szám esetén a sorozat majdnem minden tagja egymáshoz ϵ-nál közelebb van.

A Cauchy-tulajdonságból a korlátosság könnyen következik:

4.8. Állítás: . Minden Cauchy-sorozat korlátos.

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset \mathbf{R}$ Cauchy-sorozat. Ekkor speciálisan az $\epsilon := 1$ számhoz is van oly N küszöbindex, hogy minden $n,m \geq N$-re $|x_n - x_m| < 1$. Az $m := N$ választással:

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + x_N \leq 1 + |x_N| = 1 + C \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol C jelöli az $|x_N|$ számot. Tehát a sorozat tagjainak abszolút értéke véges sok kivétellel (az első N tag kivételével) egy közös szám $(C + 1)$ alatt maradnak, azaz lefedhetők egy véges intervallummal. Az első N tag ugyancsak lefedhető egy másik véges intervallummal, így tehát a sorozat valóban korlátos.

A konvergenciából a Cauchy-tulajdonság szintén egyszerűen adódik.

4.9. Állítás: . Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x_n \to x$, és legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. Akkor $\epsilon/2$-höz is van oly N küszöbindex, hogy $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$, ha $n \geq N$. Legyenek $n,m \geq N$ tetszőlegesek. Akkor

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

tehát (x_n) valóban Cauchy-sorozat.

Meglepő módon az állítás megfordítható, tehát a Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával. Ez azonban már egyáltalán nem nyilvánvaló.

4.3. Tétel: . Minden Cauchy-sorozat konvergens.

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset \mathbf{R}$ Cauchy-sorozat, akkor korlátos is, így (a Bolzano–Weierstrass-tétel miatt) kiválasztható belőle konvergens (x_{n_k}) részsorozat. Jelölje $x := \lim x_{n_k}$. Megmutatjuk, hogy az eredeti (x_n) sorozat is x-hez tart. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges, akkor $\epsilon/2$-höz van oly N küszöbindex, hogy minden $n,m \geq N$-re $|x_n - x_m| < \epsilon/2$ (mert (x_n) Cauchy-sorozat), továbbá van oly M küszöbindex is, hogy minden $k \geq M$-re $|x_{n_k} - x| < \epsilon/2$ (mert $x_{n_k} \to x$). Jelölje L e két küszöbindex közül a nagyobbikat. Mivel nyilván $n_k \geq k$, azért

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Ez teljesül minden $n \geq L$ esetén, tehát valóban, $x_n \to x$.

Bár a bizonyítás technikája az előzőkénél nem nehezebb, a tétel állítása sokkal mélyebb: a bizonyításból kiderül, hogy a tétel a Bolzano–Weierstrass-tételen múlik, az pedig, mint már láttuk, a Cantor-axiómán. Mindegyik tétel tehát a valós számokat alapvetően jellemző „hézagmentesség” folyománya.

4.4. Speciális határértékek

A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi határértékekre, de a példák önmagukban is érdekesek.

4.14. Példa: Tetszőleges $a > 0$ valós szám esetén $x_n := \sqrt[n]{a} \to 1$ $(n \to +\infty)$.

Bizonyítás. Ha $a \geq 1$, a Bernoulli-egyenlőtlenséget használhatjuk:

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(1 + \sqrt[n]{a} - 1\right)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$$

Innen $0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \to 0$, így a „rendőr-elv” miatt $\sqrt[n]{a} - 1 \to 0$, azaz $\sqrt[n]{a} \to 1$. Ha pedig $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, így $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \to 1$, ahonnan az állítás már következik.

4.15. Példa: $x_n := \sqrt[n]{n} \to 1 \ (n \to +\infty)$.

Bizonyítás. Jelölje $y_n := x_n - 1$. Elég azt igazolni, hogy $y_n \to 0$. A binomiális tétel szerint:

$$n = (1 + y_n)^n = 1 + \binom{n}{1} y_n + \binom{n}{2} y_n^2 + \binom{n}{3} y_n^3 + \ldots + y_n^n.$$

Mivel $y_n \geq 0$, azért a jobb oldal minden tagja nemnegatív, így az összeg csak csökkenhet, ha belőle tagokat hagyunk el. Elhagyva a harmadik tag kivételével az összes tagot, kapjuk, hogy:

$$n \geq \binom{n}{2} y_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} y_n^2,$$

ahonnan $y_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{4}{n}} \to 0$, ezért $y_n \to 0$.

4.16. Példa: $x_n := \sqrt[n]{n!} \to +\infty \ (n \to +\infty)$.

Bizonyítás. A sorozat monoton növő, mert

$$\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n!)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{n+1}{(n!)^{1/n}} = \left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)^{1/n} =$$

$$\left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}\right)^{1/n} \geq 1,$$

ezért $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, azaz $x_{n+1} \geq x_n$ is igaz. Tekintsük a sorozat $2n$-edik tagját, és csökkentsük a kifejezés értékét azáltal, hogy az $1,2,\ldots,n$ számok helyébe 1-et, az $(n+1),(n+2),\ldots,2n$ számok helyébe pedig n-et írunk:

$$x_{2n} = (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot 2n)^{1/2n} \geq (1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot n \cdot \ldots \cdot n)^{1/2n} =$$

$$= (n^n)^{1/2n} = \sqrt{n} \to +\infty.$$

Az (x_n) sorozat tehát monoton növő, és van a $(+\infty)$-hez tartó részsorozata, így maga is a $(+\infty)$-hez tart.

4.17. Példa: Az $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens.

Bizonyítás. A sorozat *monoton növő*, mert a számtani-mértani közép egyenlőtlenség miatt:

$$x_n = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq$$

$$\leq \left(\frac{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} =$$

$$= \left(\frac{1+n+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.$$

A sorozat ugyanakkor *felülről korlátos is*, mert ugyancsak a számtani-mértani közép egyenlőtlenség alapján:

$$x_n = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \leq$$

$$\leq 4 \cdot \left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+\ldots+(1+\frac{1}{n})}{n+2}\right)^{n+2} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1+n+1}{n+2}\right)^{n+1} = 4.$$

Következésképp a sorozat konvergens is.

Jelölés: A fenti sorozat határértéke az analízisben igen fontos, ezért külön jelölést vezetünk be rá, és a továbbiakban e-vel jelöljük.

Az e szám irracionális, egy közelítő értéke $e \approx 2.71$.

A fenti sorozattal kapcsolatos a következő paradoxon. Mivel (x_n) csupa $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ tényezők szorzata, azt gondolhatnánk, hogy $x_n \to 1$, hiszen mindegyik tényező nyilvánvalóan 1-hez tart. A hiba a gondolatmenetben ott van, hogy rosszul alkalmaztuk a határértékekre vonatkozó alapösszefüggéseket. Ezekből ui. csak az következik, hogy tetszőleges, de *rögzített számú* sorozat szorzatának határértéke megegyezik a határértékek szorzatával. Jelen esetben pedig a tényezők száma is n függvénye.

4.18. Példa: Az $x_n := \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat konvergens.

Bizonyítás. Tekintsük a reciprok sorozatot:

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

innen $x_n \to \frac{1}{e}$ már következik.

4.5. Konvergenciasebességek összehasonlítása

Az alábbi fogalom nagyon szemléletes, és sokat segíthet konkrét sorozatok határértékeinek kiszámításában.

Elnevezés: Azt mondjuk, hogy az $(a_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat *gyorsabban tart a* $(+\infty)$*-hez*, mint a $(b_n) \subset \mathbf{R}$ sorozat, ha mindketten a $(+\infty)$-hez tartanak, de $\frac{b_n}{a_n} \to 0$.

Az első két példa nyilvánvaló, ezért ezeket nem bizonyítjuk.

4.19. Példa: Ha $a > b > 1$, akkor a^n gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint b^n.

4.20. Példa: Ha $\alpha > \beta > 0$, akkor n^α gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint n^β.

4.10. Állítás: . Minden $a > 1$, $\alpha > 0$ esetén a^n gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint n^α.

Bizonyítás. Legyen k tetszőleges egész, melyre $k \geq \alpha$. Akkor

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \leq \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{b^n}\right)^{2k} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(1+(b-1))^n}\right)^{2k},$$

ahol $b := a^{1/2k} < 1$. A tört nevezőjét a Bernoulli-egyenlőtlenséggel csökkethhetjük, innen:

$$\frac{n^\alpha}{a^n} \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{1+n(b-1)}\right)^{2k} = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}+(b-1)}\right)^{2k} \to 0.$$

4.11. Állítás: . Minden $a > 1$ esetén $n!$ gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint a^n.

Bizonyítás. Jelölje $x_n := \frac{a^n}{n!}$. Igazolni kell, hogy $x_n \to 0$. Nyilván

$$x_n^{1/n} = \frac{a}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

(mert $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$). Legyen $\epsilon := \frac{1}{2}$. Mivel az $(x_n^{1/n})$ sorozat konvergens, ehhez van oly N küszöbindex, hogy az ezt meghaladó n indexekre:

$$0 < x_n^{1/n} < \frac{1}{2},$$

innen pedig $0 < x_n < \frac{1}{2^n} \to 0$, azaz valóban, $x_n \to 0$.

4.6. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az $x_0 := 0$, $x_{n+1} := -x_n^2 - \frac{1}{4}$ $(n = 0,1,2,...)$ rekurzív módon definiált sorozat monoton fogy.

2. Mutassuk meg, hogy a következő sorozat $(+\infty)$-hez tart:

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

3. Mutassuk meg, hogy a következő sorozat 1-hez tart:

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

4. Konvergensek-e a következő sorozatok, és ha igen, akkor mi a határértékük?

(a)

$$a_n := \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(4n+1)(5n+1)(6n+1)} \quad (n = 1,2,...),$$

(b)

$$a_n := \frac{n^2+2n}{n+3} - \frac{n^3+3n^2}{n^2-2} \quad (n = 1,2,...),$$

(c)

$$a_n := \frac{2^{n-2}+2}{2^{n+2}-2} \quad (n = 1,2,...),$$

(d)

$$a_n := \frac{n^3+4^n}{n^5-4^n} \quad (n = 1,2,...),$$

(e)

$$a_n := \frac{(1+2n^2)^3}{(1+3n^3)^2} \quad (n = 1,2,...).$$

5. Konvergens-e az alábbi sorozat, és ha igen, akkor mi a határértéke?

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := -1000 + \frac{a_n}{1001} \quad (n = 0,1,2,...)$$

6. Igazoljuk, hogy a következő rekurzív sorozatok nem konvergensek.

(a)

$$x_1 := 1, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n - \frac{3}{x_n} \quad (n = 1,2,...),$$

(b)
$$a_1 := 2, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n - \frac{1}{a_n}\right) \quad (n = 1,2,\ldots).$$

7. A törpék matematikát tanulnak. Kuka épp az $a_n := \frac{100^n}{n!}$ sorozattal bajlódik. Azt mondja magában: „Nézzük csak, hogy is viselkedhet ez a sorozat... számoljunk egy kcsit... $a_1 = 100$; $a_2 = 5000$; $a_3 = 166666.6\ldots$ úgy tűnik, hogy ez a sorozat nő, méghozzá jó gyorsan. Tudor! A monoton sorozat az ugye konvergens is?” „Te anyaszomorító, hát még mindig nem tudod? Ha korlátos, akkor biztosan, egyébként akármi is lehet.” „Na és ha monoton nő, és nem korlátos?” „Nohát ekkor mondjuk, hogy a $(+\infty)$-hez tart.” „Akkor megvan! $a_n \to +\infty$.”

Morgó közbemorog: „Kuka, te már megint nem figyeltél az előadáson. Ott elmondták, hogy a $\frac{2^n}{n!}$ sorozat 0-hoz tart.” Kuka ránéz: „De ez nem az a sorozat, és azt is mondták, hogy 100^n gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint a 2^n. Úgyhogy te itt csak ne szövegelj.”

Segítsünk Kukának! Hol hibázott? Mi a helyzet hát ezzel a sorozattal?

Megoldások

1. Ugyanis

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 - x_n - \frac{1}{4} = -\left(x_n + \frac{1}{2}\right)^2 < 0.$$

2. Felhasználjuk, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ monoton növő és ezért minden n indexre $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$. Innen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 2^n \to +\infty,$$

és ezért

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty.$$

3. Felhasználjuk, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$, méghozzá monoton növő módon. Ezért

$$1 \leq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \leq \sqrt[n]{e} \to 1.$$

Következésképp a közrefogott $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat is 1-hez tart.

4. (a)

$$a_n = \frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(4n+1)(5n+1)(6n+1)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(5+\frac{1}{n}\right)\left(6+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{20}.$$

(b)

$$a_n = \frac{n^2+2n}{n+3} - \frac{n^3+3n^2}{n^2-2} =$$

$$= \frac{n^4+2n^3-2n^2-4n-n^4-3n^3-3n^3-9n^2}{n^3+3n^2-2n-6} =$$

$$= \frac{-4n^3-11n^2-4n}{n^3+3n^2-2n-6} = \frac{-4-\frac{11}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{6}{n^3}} \to -4.$$

(c)

$$a_n = \frac{2^{n-2}+2}{2^{n+2}-2} = \frac{\frac{1}{4}\cdot 2^n+2}{4\cdot 2^n-2} = \frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{2^n}}{4-\frac{2}{2^n}} \to \frac{1}{16}.$$

(d)

$$a_n = \frac{n^3 + 4^n}{n^5 - 4^n} = \frac{\frac{n^3}{4^n} + 1}{\frac{n^5}{4^n} - 1} \to -1.$$

(e) .

$$a_n = \frac{(1+2n^2)^3}{(1+3n^3)^2} = \frac{1 + 6n^2 + 12n^4 + 8n^6}{1 + 6n^3 + 9n^6} = \frac{\frac{1}{n^6} + \frac{6}{n^4} + \frac{12}{n^2} + 8}{\frac{1}{n^6} + \frac{6}{n^3} + 9} \to \frac{8}{9}.$$

5. Mindenekelőtt kiszámítjuk, hogy ha a sorozat egyáltalán konvergens, akkor mi lehet a határértéke. Jelölje $a := \lim a_n$, akkor a rekurzív definícióból: $a = -1000 + \frac{a}{1001}$, azaz $a = -1001$.

Most megmutatjuk, hogy a sorozat valóban konvergens (egyúttal újra megmutatva, hogy (-1001)-hez tart):

$$a_n + 1001 = 1 + \frac{a_{n-1}}{1001} = \frac{1}{1001} \cdot (a_{n-1} + 1001).$$

A jobb oldalt kifejezhetjük a még eggyel korábbi taggal, és így tovább:

$$a_n + 1001 = \frac{1}{1001^2} \cdot (a_{n-2} + 1001) = ... = \frac{1}{1001^n} \cdot (a_0 + 1001) =$$

$$= \frac{1001}{1001^n} \to 0.$$

6. (a) Ha a sorozat konvergens volna és határértéke valamilyen x (valós!) szám lenne, akkor szükségképp fennállna az $x = \frac{1}{2}x - \frac{3}{x}$ egyenlőség, ahonnan: $\frac{1}{2}x^2 = -3$ következne, ami pedig nem lehetséges (a bal oldal pozitív, a jobb oldal viszont negatív).
(b) Ha a sorozat konvergens volna és határértéke valamilyen a (valós!) szám lenne, akkor szükségképp fennállna az $a = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$ egyenlőség. Ennek az egyenletnek viszont nincs valós megoldása.
7. Kukának nem volt igaza. Abból, hogy a $\frac{2^n}{n!}$ sorozat 0-hoz tart, ugyanakkor 100^n gyorsabban tart a $(+\infty)$-hez, mint a 2^n, még nem következik, hogy a $\frac{100^n}{n!}$ sorozat a $(+\infty)$-hez tartana. A sorozat első néhány tagja valóban gyorsan nő, de aztán nagyobb indexekre a sorozat csökkenni kezd, és határértéke 0. A feladat tanulsága, hogy bár a sorozat első néhány tagjának viselkedéséből sokszor megsejthető az egész sorozat viselkedése, ez nem mindig van így, és a kapott sejtést mindig ellenőrizni kell!

5. Végtelen sorok

Ebben a részben speciális sorozatokról lesz szó, amelyek azonban számos területen annyira fontosak, hogy a sorozatok általános elméletétől elkülönítve tárgyaljuk. Elöljáróban kiemeljük, hogy a sorok bevezetése *végtelen tagszámú összeg* pontos definiálását jelenti. Látni fogjuk, hogy a véges összegek jól ismert tulajdonságai itt már nem mindig igazak.

A tárgyalást a valós számok körében végezzük, de megemlítjük, hogy *komplex* tagú sorok bevezetése is nehézség nélkül, a valóshoz hasonlóan történhet.

5.1. Végtelen sorok, konvergenciájuk

Sor konvergenciája:

Legyen $(a_n) \subset \mathbf{R}$ egy tetszőleges sorozat. Tekintsük az ebből képezett

$$S_n := a_1 + a_2 + ... + a_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

(rövid jelöléssel: $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$) új sorozatot (a *részletösszegek* sorozatát). Ha az (S_n) sorozat konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

végtelen sornak van összege, vagy *konvergens*. (S_n) határértékét pedig a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen sor *összegének* nevezzük. Ha $(S_n) \to +\infty$ (vagy $(S_n) \to -\infty$), akkor azt mondjuk, hogy a sor összege $+\infty$ (ill. $-\infty$). Ennek jele: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ (ill. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$).

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen sort a szemléletesség kedvéért sokszor így is írjuk: $a_1 + a_2 + a_3 + ...$. Konkrét sorok esetén azonban mindig világos kell, hogy legyen, hogy a ki nem írt tagok pontosan mivel egyenlők.

Nem kötelező a tagok indexét 1-től indítani: sokszor célszerű 0-tól, vagy akár egy 1-nél nagyobb pozitív számtól. Ez a sor konvergenciájának fogalmán nem változtat. Világos az is, hogy ha a sor tagjai közül *véges sokat* megváltoztatunk, ez a sor konvergenciájának tényét nem befolyásolja, a sor összegét természetesen igen.

5.1. Példa: Tetszőleges $q \in \mathbf{R}$ szám esetén, amelyre $|q| < 1$, a

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$$

ún. *végtelen mértani sor* konvergens, összege pedig $\frac{1}{1-q}$.

Bizonyítás.

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n.$$

Ez a soktagú összeg zárt alakra hozható, mert

$$(1-q)S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n - (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1},$$

ahonnan

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - q \cdot \frac{q^n}{1-q} \to \frac{1}{1-q}.$$

Nem konvergens sorokra a legegyszerűbb példa a $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\ldots$ sor, melynek összege nyilván $+\infty$.
További példák.

5.2. Példa: A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$$

sor konvergens, összege 1.

Bizonyítás.

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

5.3. Példa: A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

sor (*hiperharmonikus sor*) konvergens.

Bizonyítás. Az (S_n) részletösszeg-sorozat nyilván monoton növő (csupa pozitív számokat adunk össze), és felülről korlátos, mert:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n\cdot n} \le 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

Következésképp (S_n) konvergens is.

Amint az az bizonyításából kiderül, a fenti sor konvergenciájának ténye nagyon egyszerűen igazolható. Sokkal nehezebb feladat a sorösszeg kiszámítása. (Érdekességképpen megemlítjük, hogy a fenti hiperharmonikus sor összege $\pi^2/6$.) Általában is igaz, hogy sokszor egészen más eszközöket igényel a konvergencia meglétének vizsgálata, mint a sorösszeg kiszámítása. Vizsgálatainkat az előbbi problémakörre korlátozzuk. Az olyan jellegű tételeket, melyek segítségével a sor konvergenciája (vagy divergenciája) igazolható, *konvergenciakritériumoknak* nevezzük.

5.2. Konvergenciakritériumok

Sorozatokra a Cauchy-tulajdonság ekvivalens a konvergenciával. Ennek a ténynek speciálisan egy sor részletösszegeire való átfogalmazása azonnal egy konvergenciakritériumot eredményez a sorokra vonatkozóan.

5.1. Állítás: (Cauchy-kritérium sorokra). A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $m \ge n \ge N$ indexekre a $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$ egyenlőtlenség teljesül.

5.4. Példa: A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

sor (*harmonikus sor*) divergens, összege $(+\infty)$.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy a sor *nem* teljesíti a Cauchy-kritériumot. Valóban, pl. $\epsilon := \frac{1}{2}$-re nem létezik a kívánt tulajdonságú küszöbindex, mert tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ és $m := 2n$ indexek mellett:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n+1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

A Cauchy-kritériumból azonnal következik a sorok konvergenciájának egy egyszerű szükséges feltétele.

5.1. Következmény: . Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens, akkor a sor tagjainak sorozata szükségképp zérussorozat, azaz $a_n \to 0$.

Bizonyítás. A Cauchy-kritériumban szereplő m indexet speciálisan $m := n$-nek választva kapjuk, hogy minden $\epsilon > 0$ számhoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ indexre $\left|\sum_{k=n}^{n} a_k\right| < \epsilon$, azaz $|a_n| < \epsilon$ teljesül, ezért valóban, $a_n \to 0$.

A fenti következmény egy hasznos átfogalmazása: ha a sor tagjai nem alkotnak zérussorozatot, azaz $a_n \to 0$ nem teljesül, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor biztosan divergens.

A fenti következmény megfordítása nem igaz. Abból, hogy $a_n \to 0$, még nem következik a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergenciája. Ez a helyzet pl. a harmonikus sor esetében is. Bizonyos speciális esetben, további feltételek mellett ez mégis igaz.

5.2. Következmény: . Legyen (a_n) nemnegatív tagú, monoton fogyó zérussorozat: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq 0$, $a_n \to 0$. Akkor az

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - ...$$

váltakozó előjelű sor (vagy *Leibniz-sor*) konvergens.

Bizonyítás. A Cauchy-tulajdonságot fogjuk igazolni. Az n-edik részletösszeg: $S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - ... \pm a_n$. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges, akkor $a_n \to 0$ miatt van oly N index, hogy $a_N < \epsilon$. Legyen $n \geq N$ teszőleges, akkor

$$|S_{n+1} - S_n| = a_{n+1} \leq a_N < \epsilon,$$

$$|S_{n+2} - S_n| = |a_{n+1} - a_{n+1}| \leq a_{n+1} \leq a_N < \epsilon,$$

$$|S_{n+3} - S_n| = |a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+1}| \le a_{n+1} \le a_N < \epsilon,$$

és így tovább. Így minden $m \ge n \ge N$ esetén

$$|S_m - S_n| \le a_{n+1} \le a_N < \epsilon.$$

A részletösszegek sorozata tehát Cauchy-sorozat, ezért a sor konvergens.

5.5. Példa: Az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ sor konvergens.

Három, a gyakorlatban jól használható konvergenciakritérium következik.

5.1. Tétel: (majoráns kritérium). Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sorhoz van olyan konvergens $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sor, hogy $|a_k| \le b_k$ teljesül minden k indexre (*majoráns sor*), akkor az eredeti $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens, és a sorösszegre teljesül, hogy $\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Bizonyítás. A Cauchy-kritériumot fogjuk használni. Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergens, azért ϵ-hoz van oly $N \in \mathbf{N}$ küszöbindex, hogy minden $m \ge n \ge N$ indexekre $\sum\limits_{k=n}^{m} b_k < \epsilon$ teljesül. Innen, használva az $|a_k| \le b_k$ egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} b_k < \epsilon,$$

tehát az eredeti $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is kielégíti a Cauchy-kritériumot, ezért konvergens. A sor részletösszegeit pedig a következőképp becsülhetjük:

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{n} |a_k| \le \sum_{k=1}^{n} b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

mert a nemnegatív tagú $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ majoráns sor részletösszegeinek sorozata nyilván monoton növő. Kaptuk, hogy

$$|S_n| \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

innen a bal oldalon $n \to +\infty$ esetben is:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

A majoráns kritérium lényege, hogy ha az eredeti sor tagjait kicseréljük abszolút értéküknél nem kisebb pozitív számokra úgy, hogy a módosított sorról (a majoráns sorról) sikerül kimutatni a konvergenciát, akkor ez az eredeti sorra nézve is biztosítja a konvergenciát. Természetesen arra törekszünk, hogy a majoráns sor minél egyszerűbb (ill. már ismert konvergens sor) legyen.

5.6. Példa: A

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$$

sor minden $\alpha \ge 2$ (nem feltétlen egész!) szám esetén konvergens.

Bizonyítás. A sort ui. a konvergens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ hiperharmonikus sor majorálja, így maga is konvergens.

Abszolút konvergencia:

Az $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sort *abszolút konvergensnek* nevezzük, ha a tagok abszolút értékeiből képzett $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ sor konvergens.

Nem nyilvánvaló, hogy egy abszolút konvergens sor konvergens is, de a majoráns kritériumból ez már egyszerűen következik.

5.3. Következmény: . Minden abszolút konvergens sor konvergens is.

Bizonyítás. Ha ui. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ egy konvergens majoráns sora, így az eredeti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is konvergens.

5.4. Következmény: . Ha egy sornak létezik konvergens majoráns sora, akkor az eredeti sor abszolút konvergens (nemcsak konvergens).

Bizonyítás. A majoráns kritérium ui. egyidejűleg az abszolút értékekből képezett sorra is fennáll.

Megjegyezzük, hogy az egyik előző példában szereplő Leibniz-típusú sor konvergens, de nem abszolút konvergens, ui. a tagok abszolút értékei által alkotott sor a divergens harmonikus sor. Érdekességképp megjegyezzük még, hogy konvergens, de nem abszolút konvergens sorok esetében a végtelen tagú összeg, meglepő módon, már nem asszociatív. A tagok alkalmas cseréjével elérhető, hogy a kapott sor összege más és más legyen, sőt az is, hogy az átrendezett sor egyáltalán ne legyen konvergens. Ez is mutatja, hogy a végtelen tagú összegekre a véges összegekre jól ismert műveleti azonosságok már nem feltétlen teljesülnek. Ez a fajta anomália abszolút konvergens sorok esetén nincs, azok tetszőlegesen átrendezhetők, és az átrendezett sor továbbra is abszolút konvergens marad, a sorösszeg pedig nem változik.

5.2. Tétel: (hányadoskritérium). Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha van olyan $0 \leq q < 1$ szám, hogy minden n indexre $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.

Bizonyítás. Az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ feltételt ismételten alkalmazva a megelőző indexekre is:

$$|a_n| \leq q \cdot |a_{n-1}| \leq q^2 \cdot |a_{n-2}| \leq ... \leq q^n \cdot |a_0|.$$

Kaptuk, hogy a sort a konvergens $|a_0| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mértani sor majorálja, így maga is abszolút konvergens.

5.3. Tétel: (gyökkritérium). Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha van olyan $0 \leq q < 1$ szám, hogy minden n indexre $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.

Bizonyítás. Az $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ feltételből: $|a_n| \leq q^n$. Így a sort a konvergens $|a_0| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mértani sor majorálja, ezért maga is abszolút konvergens.

5.7. Példa: A

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}$$

sor abszolút konvergens.

Bizonyítás. A hányadoskritériumot alkalmazva:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} \leq \frac{2}{3},$$

tehát a sor valóban abszolút konvergens.
A gyökkritériumot is alkalmazhatjuk:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3}.$$

A Bernoulli-egyenlőtlenségből: $2^n = (1+1)^n \geq 1+n \geq n$, innen pedig

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{\sqrt[n]{2^n}}{3} = \frac{2}{3},$$

amiből szintén következik a sor abszolút konvergenciája.

Mivel a sor konvergenciájának ténye nem változik, ha a sor véges sok tagját megváltoztatjuk, világos, hogy a hányados-, ill. a gyökkritériumban szereplő egyenlőtlenségeket nem kell valójában minden n indexre megkövetelni. Elég, ha ezek csak valamilyen $N \in \mathbf{N}$ küszöbindexet meghaladó indexekre teljesülnek. Ez a feltétel tovább gyengíthető. Ha történetesen a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (ill. a $\sqrt[n]{|a_n|}$) sorozat *maga is konvergens, és határértéke 1-nél kisebb*, akkor véges sok kivétellel teljesül pl. az

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(1 + \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) < 1$$

(ill. az

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\left(1 + \lim \sqrt[n]{|a_n|}\right) < 1$$

egyenlőtlenség, ami már elegendő a sor abszolút konvergenciájához.

Ezt az észrevételt külön állításban is megfogalmazzuk.

5.2. Állítás: . Legyen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor.
(a) Ha az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ sorozat konvergens, és $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.
(b) Ha az $\sqrt[n]{|a_n|}$ sorozat konvergens, és $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a sor abszolút konvergens, következésképp konvergens is.

Ha valamelyik szóban forgó határérték épp 1-gyel egyenlő, akkor a konvergencia azzal a kritériummal nem dönthető el. Pl. a harmonikus sor és a hiperharmonikus sor esetén $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ is és $\sqrt[n]{|a_n|}$ is egyaránt 1-hez tartanak, ugyanakkor a harmonikus sor divergens, míg a hiperharmonikus sor konvergens.

Gyakori hiba a hányados- és gyökkritérium alkalmazásakor, hogy csak azt ellenőrizzük, hogy $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ ill. $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ teljesül-e, és ha igen, ebből (hibásan) a sor abszolút konvergenciájára következtetünk. Az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, ill. a $\sqrt[n]{|a_n|}$ szám egy *1-nél kisebb pozitív konstans alatt kell, hogy maradjon*, ráadásul n-től függetlenül. A fenti gondolatmenet hibáját ismét jól példázza a harmonikus sor, ahol $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1}$, ami mindig kisebb 1-nél, de a sor divergens. Itt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$, így nincs olyan 1-nél kisebb pozitív konstans, hogy az $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ hányados ez alatt maradna minden n indexre.

További példák.

5.8. Példa: Legyen $|x| < 1$ tetszőleges valós szám. Akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} nx^n$ sor abszolút konvergens.

Bizonyítás. A hányadoskritériummal

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} = |x| \cdot \frac{n+1}{n} \to |x| < 1.$$

A gyökkritériumot is használhatnánk, mivel

$$\sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \sqrt[n]{n} \to |x| < 1.$$

Mindkét esetben a kritérium teljesül, amiből az abszolút konvergencia következik.

A gyakorlatban a hányados- és a gyökkritérium alkalmazhatósági köre lényegében ugyanaz.

Ezt a részt a sorok divergenciájának eldöntését célzó kritériumokkal zárjuk, melyek formailag nagyon hasonlók a konvergenciakritériumokhoz:

5.3. Állítás: . Ha a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sorhoz van olyan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ún. *minoráns sor*, hogy $a_k \geq b_k \geq 0$ teljesül minden k indexre és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty$, akkor az eredeti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor is divergens, összege $+\infty$.

Bizonyítás. Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens lenne, akkor majoráns sora lenne $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$-nak, így a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor is konvergens volna.

5.4. Állítás: . Legyen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ teljesül minden n indexre, akkor a sor divergens.

Bizonyítás. Ekkor ui. a sor tagjainak abszolút értékei monoton növő sorozatot alkotnak, így a konvergenciához szükséges $a_n \to 0$ feltétel nem teljesül.

5.5. Állítás: . Legyen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ egy végtelen sor. Ha $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ teljesül minden n indexre, akkor a sor divergens.

Bizonyítás. Ekkor ui. a sor tagjaira $|a_n| \geq 1$, így a konvergenciához szükséges $a_n \to 0$ feltétel nem teljesül.

Az utóbbi három állításban a divergencia ténye (a konvergenciakritériumokhoz hasonlóan) akkor is igaz marad, ha a tett feltételek nem mindegyik n indexre teljesülnek, hanem csak valamely N küszöbindexet meghaladó indexekre.

5.3. Sorok Cauchy-szorzata

Cauchy-szorzat:

A $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ és a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ végtelen sorok *Cauchy-szorzatán* azt a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_k b_0 \quad (k = 0,1,2,\ldots).$$

A definíciót az alábbi észrevétel indokolja. Tegyük fel, hogy az a_k, b_k $(k = 0,1,2,\ldots)$ tagok közül csak véges sok különbözik 0-tól. Ekkor a $P(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és a $Q(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ előírással értelmezett függvények polinomok. Kettőjük $P(x)Q(x)$ szorzata szintén polinom, melynek

0. fokú tagja: $a_0 b_0$,
1. fokú tagjának együtthatója: $a_0 b_1 + a_1 b_0$,
2. fokú tagjának együtthatója: $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$,

és így tovább, azaz a szorzatpolinom együtthatói épp az eredeti sorok Cauchy-szorzatának egyes tagjai. Az is világos, hogy ekkor $P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$,

$Q(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$, és $P(1)Q(1) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$, azaz

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k,$$

ami indokolja, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ sort miért nevezhetjük szorzatnak.

Ez a meggondolás nem működik akkor, amikor *végtelen sok* a_k,b_k együttható különbözik 0-tól (már láttuk, hogy végtelen tagú összeg esetén nem feltétlen teljesül az összeg asszociativitása). Várható tehát, hogy a fenti $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ egyenlőség teljesüléséhez (tehát a Cauchy-szorzatsor konvergenciájához) további feltételek szükségesek.

A következő tétel szerint ehhez az *abszolút* konvergencia elegendő. A tételt bizonyítás nélkül közöljük (a bizonyítás nem épít új fogalomra, tételre, de hosszadalmas).

5.4. Tétel: . Ha a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ és a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok mindegyike abszolút konvergens, akkor a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ Cauchy-szorzatsor is abszolút konvergens, és

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k.$$

5.9. Példa: Legyen $|x| < 1$ tetszőleges valós szám. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

sor konvergens, és számítsuk ki az összegét.

Megoldás. Az állítás azonnal következik az előző tételből, ha észrevesszük, hogy a sor nem más, mint az abszolút konvergens $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ mértani sor önmagával képezett Cauchy-szorzata. Mivel e mértani sor összege $\frac{1}{1-x}$, azért

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

5.4. Az exponenciális sor és az exponenciális függvény

Exponenciális sor:

Legyen $x \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám. A

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

végtelen sort *exponenciális sornak* nevezzük.

5.6. Állítás: . Az $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ exponenciális sor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén abszolút konvergens.

Bizonyítás. A hányadoskritérium alapján:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \to 0,$$

tehát a sor valóban abszolút konvergens. (Megjegyezzük, hogy a gyökkritériumot is alkalmazhattuk volna.)

Nem véletlenül nevezzük a fenti sort exponenciális sornak. Meg fogjuk mutatni, hogy az így definiált függvény megegyezik az e alapú exponenciális függvénnyel. A definícióból nyilvánvaló, hogy $\exp(0) = 1$; most azt mutatjuk meg, hogy $\exp(1) = e$.

5.7. Állítás: . $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.

Bizonyítás. Tekintsük a részletösszegeket: $S_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots$. Már tudjuk, hogy (S_n) konvergens, jelölje $S := \lim S_n$. Megmutatjuk, hogy $e \le S$, és ugyanakkor $e \ge S$, innen $e = S$ következik, amivel az állítás igazolva lesz.

A binomiális tételt használva:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \le$$

$$\le 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n^2}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n^3}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

A bal oldal határértéke e, a jobb oldalé S, így $e \leq S$.
Másrészt, legyen $m \in \mathbf{N}$ tetszőleges index, és $n \geq m$. Ismét a binomiális tételt használjuk:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}.$$

A jobb oldal csak csökkenhet, ha abból néhány tagot elhagyunk. Megtartva csak az első $m+1$ db tagot, innen:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq$$

$$= 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} \cdot \frac{1}{n^m} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}.$$

Az $n \to +\infty$ határátmenetet véve kapjuk, hogy

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!}$$

Ez igaz tetszőleges m indexre, innen ($m \to +\infty$ esetén is) $e \geq S$, amivel a bizonyítást befejeztük.

Most megmutatjuk, hogy az exponenciális sor, mint x függvénye, teljesíti hatványozás azonosságait.

5.8. Állítás: . Tetszőleges $x,y \in \mathbf{R}$ számokra teljesül, hogy:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy az $\exp(x)$ és az $\exp(y)$ sorok Cauchy-szorzata épp $\exp(x+y)$.

Jelölje $c_0, c_1, c_2, \ldots$ a Cauchy-szorzat tagjait, akkor a binomiális tételt alkalmazva:

$$c_k = \frac{x^0}{0!} \cdot \frac{y^k}{k!} + \frac{x^1}{1!} \cdot \frac{y^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^0}{0!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(y^k + \frac{k!}{1!(k-1)!}xy^{k-1} + \frac{k!}{2!(k-2)!}x^2y^{k-2} + \ldots + \frac{k!}{k!0!}x^k\right) =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(y^k + \binom{k}{1}xy^{k-1} + \binom{k}{2}x^2y^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k}x^k\right) = \frac{1}{k!}(x+y)^k,$$

tehát c_k valóban $\exp(x+y)$ sorának k-adik tagja.

Az állítás ismételt alkalmazásával és az $\exp(0) = 1$ egyenlőség felhasználásával azonnal adódik az

5.5. Következmény: . Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ számokra:
(a) $\exp(nx) = (\exp(x))^n$,
(b) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Speciálisan, egész számok esetén, $\exp(1) = e$ felhasználásával kapjuk, hogy:

5.6. Következmény: . $\exp(-n) = \frac{1}{e^n}$ minden $n \in \mathbf{N}$-re.

Ha pedig $p,q \in \mathbf{Z}$ egész számok, akkor

$$\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = \exp\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \ldots \cdot \exp\left(\frac{p}{q}\right) =$$

$$= \exp\left(\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}\right) = \exp(p) = e^p.$$

5.7. Következmény: . $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = e^{p/q}$ minden $p,q \in \mathbf{Z}$-re ($q \neq 0$).

Látjuk tehát, hogy az exp függvény megegyezik az e alapú exponenciális függvénnyel (legalábbis a racionális számok halmazán). Ezért a későbbiekben az $\exp(x)$ jelölés helyett a szokásos e^x jelölést fogjuk használni.

Ezt a részt az exponenciális függvényre vonatkozó két fontos egyenlőtlenséggel zárjuk:

5.9. Állítás: .
(a) Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén $e^x \geq 1 + x$.
(b) Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq x \leq 1$ esetén $e^x \leq 1 + 2x$.

Bizonyítás. (a) Legyen először $x \geq 0$, akkor

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \geq 1 + x,$$

mert minden elhagyott tag nemnegatív.

Legyen most $x < 0$ és $y := -x$. Ekkor

$$e^y(1-y) = \left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\right) - \left(y + \frac{y^2}{1!} + \frac{y^3}{2!} + \frac{y^4}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{1!}\right) y^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) y^3 + \ldots \le 1,$$

mert minden elhagyott tag 0-nál nem nagyobb. Innen pedig $e^{-x}(1+x) \le 1$, azaz $e^x \ge 1 + x$ következik.

(b)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \le 1 + x + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) \le$$

$$\le 1 + x + x^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) \le 1 + 2x.$$

Itt felhasználtuk azt, hogy az $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$ végtelen mértani sor összege 1, valamint azt, hogy $0 \le x \le 1$ esetén $x^2 \le x$.

Eddig mindig valós sorozatokkal és sorokkal foglalkoztunk. Elvileg semmi akadálya sincs *komplex* sorozatok és sorok bevezetésének és vizsgálatának. A korlátosság, a konvergencia, a Cauchy-tulajdonság definiálása értelemszerű változtatásokkal történik (a komplex abszolút érték használatával). A legtöbb tétel igaz marad, értelemszerűen a monoton sorozatok és a végtelenbe tartó sorozatra vonatkozó eredmények kivételével (a komplex számok körében nincs értelmezve a rendezési reláció). A fogalmak és tételek pontos átfogalmazásától eltekintünk, de megjegyezzük, hogy pl. az exponenciális függvény ily módon nehézség nélkül kiterjeszthető a komplex számok $\mathbf{C}$ halmazára is.

5.5. Feladatok

1. A legújabb kutatások alkalmával rábukkantak egy eleddig ismeretlen egyiptomi piramis romjaira. A piramis lépcsőzetes volt, sok emelettel, de hogy pontosan hány emeletes volt, azt nem tudni. Fennmaradt viszont egy töredékes építészeti leírás, miszerint „...az első emelet hossza és szélessége legyen 288 könyök, magassága 40 könyök... Minden emelet legyen arányosan kisebb, mint a megelőző... a harmadik emelet szélessége tehát már csak 200 könyök...”. Hány könyök lehetett legfeljebb a piramis teljes magassága?

2. Konvergensek-e a következő sorok?

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \cdot \sin \frac{k\pi}{2},$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{k^3+2k+1},$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k^3+k^4}{2^k+3^k+4^k},$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2-1} + \frac{k}{k^2+1} \right),$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k^2},$$

(f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k} \right)^{k^2},$$

(g)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k} \right)^{k},$$

(h)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{k}{2}},$$

(i)

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \quad .$$

3. Legyen $a_1 := \frac{1}{2}$, $a_{n+1} := \frac{1}{2} a_n - 1$ $(n \in \mathbf{N})$. Konvergens-e a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor?

4. Konvergens-e a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ sor? Konvergens-e a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}$ sor?

5. Konvergens-e a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{2^k}$$

sor? Ha igen, mi az összege?

Megoldások

1. A töredékből kiderül, hogy az emeletek adatai azonos q kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. A kvóciens értéke a szélességadatokból számítható: $q^2 = \frac{200}{288}$, innen $q = \frac{10}{12}$. Az egyes emeletek magasságai innen 40, $40q$, $40q^2$, $40q^3$,... könyök. A teljes magasság tehát legfeljebb a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergens mértani sor összege, azaz $\frac{40}{1-\frac{10}{12}} = 240$ könyök.

2. (a) A sor konvergens, mert a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens hiperharmonikus sor majorálja.

(b) A sor konvergens, mert a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergens hiperharmonikus sor majorálja, ui. a sor tagjaira:

$$\left|\frac{k-1}{k^3+2k+1}\right| \leq \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$

(c) A sor konvergens, mert a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3k^4}{4^k}$ konvergens sor majorálja. Ez utóbbi valóban konvergens, mert a gyökkritériumot alkalmazva:

$$\sqrt[n]{\frac{3k^n}{4^n}} = \sqrt[n]{3} \cdot (\sqrt[n]{n})^4 \cdot \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}.$$

(d) A sor tagjai:

$$\frac{k}{k^2-1} + \frac{k}{k^2+1} = k \cdot \frac{k^2+1-k^2+1}{k^4-1} = \frac{2k}{k^4-1} \leq \frac{2k}{k^4-\frac{k^4}{2}} = \frac{4}{k^3}$$

Ezért a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^3}$ sor konvergens majoráns sor, tehát az eredeti sor konvergens.

(e) A sor nem konvergens, mert tagjai nem alkotnak zérussorozatot: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1.$

(f) A gyökkritériumot alkalmazva:

$$\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1,$$

így a sor konvergens.

(g) A sor tagjai:

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e},$$

tehát nem alkotnak zérussorozatot, így a sor nem konvergens.

(h) A sor tagjaira teljesül, hogy

$$\frac{1}{\binom{k}{2}} = \frac{2}{k(k-1)} \le \frac{2}{k^2 - \frac{k^2}{2}} = \frac{4}{k^2},$$

tehát a sort a konvergens hiperharmonikus $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ sor majorálja. Ezért az eredeti sor is konvergens.

(i) A sor konvergens, mert az $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ konvergens hiperharmonikus sor majorálja.

3. Nem konvergens, mert a rekurzív definícióból azonnal következik, hogy a sorozat határértéke 0 nem lehet, azaz a sor tagjai nem alkotnak zérussorozatatot.

4. A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$ sor konvergens, ui. a gyökkritérium alapján $\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{3} \to \frac{1}{3}$.
A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^3}$ sor viszont nem konvergens, mert a sor tagjai nem alkotnak zérussorozatatot, ui. $\frac{3^k}{k^3} \to +\infty$.

5. A sor konvergens, mert konvergens mértani sor majorálja. A sor összege:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{2^k} = \frac{1}{2^1} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^7} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\ldots\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\ldots\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{2}{5}.$$

6. Egyváltozós valós függvények

6.1. Alapfogalmak

Mindenekelőtt összefoglaljuk a valós függvényekkel kapcsolatos legfontosabb fogalmakat.

Függvények vizsgálatakor mindig tisztázni kell a függvény értelmezési tartományát. *Ha egy függvényt valamilyen formulával adunk meg, és nem jelöljük az értelmezési tartományát, akkor azon mindig* $\mathbf{R}$*-nek azt a legbővebb részhalmazát értjük, amelyen az adott formula értelmezhető.*

Monotonitás:

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény (*szigorúan*) *monoton nő az* $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$ *intervallumon*, ha minden $a < x < y < b$ szám esetén $f(x) \leq f(y)$ (ill. $f(x) < f(y)$). Hasonlóan, az f függvény (*szigorúan*) *monoton fogy az* $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$ *intervallumon*, ha minden $a < x < y < b$ szám esetén $f(x) \geq f(y)$ (ill. $f(x) > f(y)$).

Elnevezés. Az $x \in \mathbf{R}$ szám $\delta > 0$ *sugarú környezetén* az $(x-\delta,x+\delta)$ intervallumot értjük. *Bal oldali* (*jobb oldali*) *környezet* alatt pedig egy $(x-\delta,x]$ (ill. $[x,x+\delta)$) alakú intervallumot értünk ($\delta > 0$).

Lokális minimum, lokális maximum:

Legyen $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f-nek az x_0 szám *lokális minimumhelye*, ha x_0-nak van oly $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ környezete, hogy ott az $f(x_0)$ függvényérték minimális, azaz minden $x \in (x_0-\delta,x_0+\delta)$ esetén $f(x) \geq f(x_0)$ teljesül. A lokális minimum *szigorú*, ha minden $x \in (x_0-\delta,x_0+\delta)$, $x \neq x_0$ esetén $f(x) > f(x_0)$ teljesül. Hasonlóan definiáljuk a (*szigorú*) *lokális maximumhelyet* is.

A következő állítás a definíciók alapján nyilvánvaló.

6.1. Állítás: . Ha az f függvény (szigorúan) monoton nő az $(x_0-\delta,x_0]$ intervallumon és (szigorúan) monoton fogy az $[x_0,x_0+\delta)$ intervallumon, akkor f-nek x_0-ban (szigorú) lokális maximuma van.

Hasonló állítás érvényes a (szigorú) lokális minimumra is.

Legyen most f olyan, hogy $\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$.

Páros, páratlan függvények:

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *páros*, ha $f(-x) = f(x)$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

A szokásos függvényábrázolásában páros függvények grafikonja a 2. tengelyre (szokásos elnevezéssel: az y-tengelyre), páratlan függvények grafikonja az origóra szimmetrikus.

6.1. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^n$ ($n \in \mathbf{N}$) hatványfüggvény páros n kitevő esetén páros, páratlan n kitevő esetén pedig páratlan.

Periodikus függvények:

Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *periodikus*, és $\lambda \in \mathbf{R}$ egy *periódusa* (röviden: az f függvény λ*-periodikus*), ha $f(x + \lambda) = f(x)$ teljesül minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy ha f periodikus a λ periódussal, akkor minden egész $k \in \mathbf{Z}$ szám esetén $k\lambda$ periódussal is periodikus. A legkisebb pozitív periódust (ha ilyen egyáltalán létezik) *alapperiódusnak* is nevezzük. A későbbiekben periódus alatt mindig alapperiódust értünk.

6.2. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \sin x$ függvény periodikus, 2π periódussal.

6.2. Határérték és folytonosság

Függvény határértéke:

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *határértéke* az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban az $a \in \mathbf{R}$ szám, ha minden konvergens $(x_n) \subset \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to a$ teljesül. Jele: $a = \lim_{x_0} f$ vagy $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Az x_0 pont maga nem kell, hogy az értelmezési tartományba essék.

A definíció lényeges része, hogy az $f(x_n)$ függvényérték-sorozat *az* $x_n \to x_0$ *sorozat megválasztásától függetlenül* a-hoz tartson.

A határérték fogalmát tekinthetjük úgy is, hogy a definícióban szereplő sorozatokat x_0-nak csak az egyik oldali környezetéből választjuk:

Bal oldali, jobb oldali határérték:

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *bal oldali* (*jobb oldali*) *határértéke* az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban az $a \in \mathbf{R}$ szám, ha minden $(x_n) \subset \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\}$, $x_n < x_0$ (ill. $x_n > x_0$), $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to a$ is teljesül. Jele: $a = \lim_{x_0 - 0} f$ vagy $a = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ (ill. $a = \lim_{x_0 + 0} f$ vagy $a = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$).

Könnyen látható, hogy f-nek az x_0 pontban pontosan akkor létezik határértéke, ha ugyanott létezik bal- és jobb oldali határértéke is és ezek megegyeznek.

Ha f-nek x_0-ban van bal- és jobb oldali határértéke, de ezek nem egyeznek meg, akkor azt mondjuk, hogy f-nek *ugrása* van x_0-ban.

A továbbiakban a határérték-fogalmat értelemszerűen kiterjesztjük a végtelenre is, pontosan úgy, ahogy azt a sorozatok esetén tettük:

Kiterjesztett határértékfogalom:

(a) Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény határértéke az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban $(+\infty)$, ha minden $(x_n) \subset \mathcal{D}_f \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to +\infty$. (b) Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény határértéke az $(+\infty)$-ben az $a \in \mathbf{R}$ szám (ill. $(+\infty)$), ha minden $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$, $x_n \to +\infty$ sorozat esetén $f(x_n) \to a$ (ill. $f(x_n) \to +\infty$).

Hasonlóan definiáljuk a $(-\infty)$-ben vett határértéket, a $(-\infty)$-nel egyenlő határértéket. Szintén értelemszerűen történik a $(\pm\infty)$-nel egyenlő egyoldali határérték definiálása. Az összes lehetséges kombináció meggondolását nem részletezzük, azt az Olvasóra bízzuk.

Folyonosság:

Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény *folytonos az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pontban*, ha minden konvergens $(x_n) \subset \mathcal{D}_f$, $x_n \to x_0$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(x_0)$ is teljesül. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az f függvénynek *szakadása van az x_0 pontban*. A függvényt *folytonosnak* nevezzük, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

6.3. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) :\equiv 1$ konstans függvény folytonos $\mathbf{R}$-en.

6.4. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x$ folytonos $\mathbf{R}$-en. Határértéke $(+\infty)$-ben $(+\infty)$, $(-\infty)$-ben pedig $(-\infty)$.

6.5. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^2$ folytonos $\mathbf{R}$-en. Határértéke mind $(+\infty)$-ben mind pedig $(-\infty)$-ben $(+\infty)$.

6.6. Példa: Az sgn : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

előjelfüggvény folytonos $\mathbf{R}$-en, kivéve a 0 pontot. Itt nem folytonos, de van bal oldali határértéke (-1) és jobb oldali határértéke is $(+1)$, tehát a 0-ban ugrása van.

6.7. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

Dirichlet-függvény sehol sem folytonos és sehol sincs sem bal oldali sem jobb oldali határértéke.

6.8. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ reciprokfüggvény 0-ban vett bal oldali határértéke $(-\infty)$, jobb oldali határértéke pedig $(+\infty)$. Az értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.

Ez a függvény a 0-ban nincs értelmezve, így helytelen (bár elterjedt) azt mondani, hogy a 0-ban szakadása van. *A folytonosságot, ill. szakadást csak az értelmezési tartomány pontjaiban definiáltuk.*

6.3. Folytonos függvények tulajdonságai

A gyakorlati alkalmazások során különösen fontos szerepet játszanak a folytonos függvények. Szükséges tehát olyan tételeket kimondani és bizonyítani, melyekkel függvények folytonosságát igazolni lehet.

Az alábbi állítások egyenes következményei a sorozatokra vonatkozó megfelelő állításoknak. Azt fejezik ki, hogy folytonos függvényekből az algebrai műveletekkel képezett függvények mind folytonosak.

6.2. Állítás: . Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények folytonosak valamely $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, akkor
(a) $f + g$ is folytonos x-ben,
(b) $f - g$ is folytonos x-ben,
(c) $f \cdot g$ is folytonos x-ben,
(d) $\frac{f}{g}$ is folytonos x-ben, feltéve, hogy $g(x) \neq 0$.

A következő állítás szerint folytonos függvények kompozíciója szintén folytonos. Az állítás bizonyítása a folytonosság definíciója alapján egyszerűen elvégezhető, ezért elhagyjuk. Javasoljuk azonban, hogy az Olvasó gondolja végig!

6.3. Állítás: . Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény folytonos valamely $x \in \mathcal{D}_f$ pontban, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pedig folytonos az $f(x) \in \mathcal{D}_g$ pontban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény folytonos az x pontban.

6.9. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

előírással értelmezett függvény a 0 kivételével mindenütt folytonos, de a 0-ban nem folytonos.

Bizonyítás. A szinusz- és a reciprokfüggvény folytonossága miatt (ld. később) f folytonos a 0-tól különböző helyeken. A 0-ban viszont nem folytonos, mert pl. az

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

sorozatra $x_n \to 0$, de

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \equiv 1,$$

így $f(x_n)$ nem tart $f(0)$-hoz.

6.10. Példa: Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

előírással értelmezett függvény mindenütt (tehát a 0-ban is) folytonos.

Bizonyítás. A szinusz- és a reciprokfüggvény folytonossága miatt (ld. később) f folytonos a 0-tól különböző helyeken. Legyen most $x_n \to 0$ tetszőleges, akkor

$$|f(x_n) - f(0)| = |f(x_n)| \leq |x_n| \cdot \left|\sin \frac{1}{x_n}\right| \leq |x_n| \to 0$$

azaz f a 0-ban is folytonos.

A 6.4. Példa és a 6.2. Állítás azonnali következménye, hogy *minden polinom folytonos függvény* $\mathbf{R}$-en. Látni kell azonban, hogy ezekből az állításokból *nem* következik pl. a gyökfüggvény, a szinuszfüggvény, exponenciális függvény stb. folytonossága sem. A következő két állítás a gyakorlatban nagyon jól használható elégséges feltételt ad a folytonosságra.

6.4. Állítás: . Legyen I egy intervallum és $f : I \to \mathbf{R}$ egy függvény. Ha van olyan $C \geq 0$ szám, hogy minden $x_1,x_2 \in I$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq C \cdot |x_1 - x_2|$$

teljesül, akkor f folytonos I minden pontjában.

Bizonyítás. Ekkor tetszőleges $(x_n) \subset I$, $x_n \to x \in I$ esetén:
$|f(x_n) - f(x)| \leq C \cdot |x_n - x| \to 0$, azaz $f(x_n) \to f(x)$.

Az állításban szereplő feltételt *Lipschitz-féle feltételnek*, a C állandót pedig *Lipschitz-állandónak* (*Lispchitz-konstansnak*) nevezzük. A feltétel teljesülése szemléletesen azt jelenti, hogy egymáshoz „közeli” pontokat az f függvény egymáshoz „közeli” pontokba visz, a képpontok távolsága legfeljebb egy fix számszorosa az argumentumok távolságának.

Kontrakció:
Ha egy függvény kielégíti a Lipschitz-feltételt valamely 1-nél kisebb Lipschitz-konstanssal, akkor az illető függvényt *kontraktív (összehúzó) leképezésnek*, vagy röviden *kontrakciónak* nevezzük.

A Lipschitz-feltételhez hasonló, de ellenkező irányú becslés az inverz függvény létezésére és mindjárt annak folytonosságára is ad egy elegendő feltételt.

6.5. Állítás: . Tegyük fel, hogy I és J intervallum, továbbá $f : I \to J$ egy, az I intervallumot a J intervallumra leképező függvény. Ha van olyan $c > 0$ szám, hogy minden $x_1,x_2 \in I$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| \ge c \cdot |x_1 - x_2|$$

teljesül, akkor f invertálható I-n, továbbá az f^{-1} inverz függvény folytonos a J intevallum minden pontjában.

Bizonyítás. Ha $x_1,x_2 \in I$, $x_1 \ne x_2$, akkor a feltétel miatt $|f(x_1) - f(x_2)| \ge c \cdot |x_1 - x_2| > 0$, azaz $f(x_1) \ne f(x_2)$. Ezért f kölcsönösen egyértelmű, így invertálható. Az f^{-1} inverz függvény tehát létezik. Megmutatjuk, hogy az inverz függvény kielégíti a Lipschitz-feltételt, ebből az 6.4. Állítás alapján f^{-1} folytonossága már következik. Legyenek $y_1,y_2 \in J$ tetszőlegesek, akkor alkalmas $x_1,x_2 \in I$ számokra $f(x_1) = y_1$ és $f(x_2) = y_2$. Innen a feltétel alapján:

$$|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)| = |x_1 - x_2| \ge \frac{1}{c}|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{1}{c}|y_1 - y_2|,$$

tehát f^{-1} valóban kielégíti a Lipschitz-feltételt J-n, mégpedig $1/c$ Lipschitz-állandóval.

6.11. Példa: Az $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$ leképezés folytonos a $\mathbf{R}_+$ intervallumon.

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy a gyökfüggvény folytonos minden $[a,b] \subset \mathbf{R}_+$ intervallumon, ahol $0 < a < b$ tetszőleges pozitív számok. Ekkor minden $x_1,x_2 \in [a,b]$ esetén

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \left|\frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \le \frac{1}{2\sqrt{a}}|x_1 - x_2|,$$

tehát a gyökfüggvény $[a,b]$-n kielégíti a Lipschitz-feltételt az $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ Lipschitz-állandóva, így folytonos is $[a,b]$-n (ld. a 6.4. Állítást).

Megjegyezzük, hogy a gyökfüggvény a 0-ban is folytonos, de ez a fentiekből nem következik. A 0-ban való folytonosság igazolását feladatként tűzzük ki.

6.12. Példa: Az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sin x$ függvény folytonos.

Bizonyítás. Legyenek $x_1,x_2 \in \mathbf{R}$ tetszőlegesek. Az ismert trigonometrikus addíciós tételek alapján:

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = 2\left|\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \le$$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq |x_1-x_2|,$$

ahol felhasználtuk a nemnegatív α szögekre vonatkozó ismert $\sin\alpha \leq \alpha$ összefüggést. A szinuszfüggvény tehát kielégíti a Lipschitz-feltételt a $C=1$ Lipschitz-állandóval, így folytonos is (ld. a 6.4. Állítást).

Hasonlóan igazolható, hogy a koszinuszfüggvény is folytonos, innen pedig a tangens- és kotangensfüggvények folytonossága is következik.

6.13. Példa: Az $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto e^x$ exponenciális függvény folytonos $\mathbf{R}$-en.

Bizonyítás. Először azt igazoljuk, hogy az $x\mapsto e^x$ leképezés folytonos a $[0,1]$ intervallumon. Legyenek $x_1,x_2\in[0,1]$ tetszőleges számok, akkor

$$|e^{x_1}-e^{x_2}| = e^{x_2}\cdot\left|e^{x_1-x_2}-1)\right| \leq 2e^{x_2}|x_1-x_2| \leq 2e\cdot|x_1-x_2|$$

Az exponenciális függvény tehát $[0,1]$-en kielégíti a Lipschitz-feltételt a $C=2e$ Lipschitz-állandóval, így folytonos is (ld. a 6.4. Állítást). Hasonlóan látható, hogy az $x\mapsto e^x$ leképezés az összes $[n,n+1]$ intervallumon is folytonos (ahol n tetszőleges egész), tehát valóban folytonos az egész számegyenesen.

Az exponenciális függvény definíciójából azonnal következik, hogy az szigorúan monoton nő, így invertálható. Inverzét (természetes alapú) *logaritmusfüggvénynek* nevezzük, és azt a log vagy az ln szimbólumok valamelyikével jelöljük. Ennek értelmezési tartománya a nemnegatív valós számok $(0,+\infty)$ halmaza.

6.14. Példa: Az $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\log x$ logaritmusfüggvény folytonos a $(0,+\infty)$ intervallumon.

Bizonyítás. Legyenek $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ tetszőlegesek, $x_1\geq x_2$. Ekkor

$$|e^{x_1}-e^{x_2}| = e^{x_2}\cdot\left|e^{x_1-x_2}-1)\right| \geq e^{x_2}|x_1-x_2| \geq |x_1-x_2|$$

A 6.5. Állítás alapján tehát a logaritmusfüggvény folytonos.

6.15. Példa: Tetszőleges $n\in\mathbf{N}$ esetén az $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}$, $x\mapsto\sqrt[n]{x}$ gyökfüggvény folytonos a $[0,+\infty)$ intervallumon.

Bizonyítás. A gyökfüggvény felírható

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\cdot\log x} \qquad (x\in(0,+\infty))$$

alakban, azaz három folytonos függvény kompozíciójakért, így maga is folytonos a $(0,+\infty)$ intervallumon. A 0 pontbeli folytonosság a definíció alapján igazolható.

A folytonos függvényekre még két tételt mondunk ki és bizonyítunk. Ezek rávilágítanak a folytonosság jelentőségére.

6.1. Tétel: (Weierstrass). Legyen f folytonos a korlátos, zárt $[a,b]$ intervallumon. Akkor f-nek van maximuma és minimuma ebben az intervallumban.

Bizonyítás. Csak a maximum létezését igazoljuk (a minimum létezése hasonlóan igazolható). Jelölje $\alpha := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Legyenek $x_n \in [a,b]$ olyan számok, hogy $f(x_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$. Ilyen számok vannak, mert α az értékkészlet *legkisebb* felső korlátja, így $\alpha - \frac{1}{n}$ már nem felső korlát. A konstrukció miatt $(x_n) \subset [a,b]$ egy olyan korlátos sorozat, melyre $f(x_n) \to \alpha$. A Bolzano–Weierstrass-tétel miatt (x_n)-ből kiválasztható egy konvergens (x_{n_k}) részsorozat. Jelölje $x_0 := \lim x_{n_k}$. Akkor $(f(x_{n_k}))$ részsorozata $(f(x_n))$-nek, így szintén α-hoz tart: $f(x_{n_k}) \to \alpha$. Innen f folytonossága miatt $f(x_0) = \alpha$ adódik, tehát α nemcsak szuprémuma, de maximuma is az értékkészletnek, azaz f-nek maximuma van x_0-ban.

A tétel állítása *szemléletesen* nyilvánvaló. Azt fejezi ki, hogy korlátos, zárt intervallumon folytonos függvény grafikonján van legmagasabban és legalacsonyabban fekvő pont. Valójában egyáltalán nem nyilvánvaló állításról van szó, amely a valós számok alapvető tulajdonságain múlik, csakúgy, mint a szuprémum létezésének tétele vagy a Bolzano–Weierstrass-tétel.

6.2. Tétel: (Bolzano). Legyen f folytonos a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek. Akkor f-nek van (legalább egy) zérushelye ebben az intervallumban.

Bizonyítás. Legyen pl. $f(a) < 0$ és $f(b) > 0$ ($f(a) > 0$ és $f(b) < 0$ esetén a bizonyítás hasonló). Felezzük meg az $[a,b]$ intervallumot, és jelölje $[a_1,b_1]$ azt a felét, melyre $f(a_1) < 0$ és $f(b_1) > 0$ (ha a felezőpontban a függvényérték épp 0, akkor ott a függvénynek zérushelye van, így a bizonyítás kész). Most felezzük meg az $[a_1,b_1]$ intervallumot is, és jelölje $[a_2,b_2]$ azt a felét, melyre $f(a_2) < 0$ és $f(b_2) > 0$, és így tovább. Így kapunk egy egymásba ágyazott zárt intervallumsorozatot: $[a,b] \supset [a_1,b_1 \supset [a_2,b_2] \supset \dots$. A Cantor-axióma miatt ezen intervallumoknak van közös pontja, pl. x. Megmutatjuk, hogy x zérushelye f-nek. Valóban, nyilván $a_n \to x$ és $b_n \to x$, továbbá f folytonossága miatt $f(a_n) \to f(x)$ és $f(b_n) \to f(x)$. Másrészt minden n-re $f(a_n) < 0$ és $f(b_n) > 0$, innen a (közös) limeszre teljesül, hogy $f(x) \geq 0$ és ugyanakkor $f(x) \leq 0$, következésképp $f(x) = 0$.

A tétel állítása ismét nagyon szemléletes. Azt fejezi ki, hogy ha egy folytonos függvény grafikonja egy intervallum bal végpontján az 1. tengely alatt, a jobb végpontján pedig felette van, akkor a két végpont között legalább egyszer metszi az 1. tengelyt. Ez a tétel is a már többször említett, a valós számok „hézagmentességét” kifejező tételek közé sorolható.

6.1. Következmény: . Legyen f folytonos a korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon. Akkor az f függvény minden, az $f(a)$ és $f(b)$ számok közé eső értéket legalább egyszer felvesz $[a,b]$-n.

Bizonyítás. Legyen y tetszőleges érték az $f(a)$ és $f(b)$ számok között. Az állítás az előző tételből adódik, azt a konstanssal eltolt $f - y$ függvényre alkalmazva.

A 6.2. Tétel egyúttal egy, a gyakorlatban is jól használható numerikus módszert ad az

$$f(x) = 0$$

alakú egyenletek közelítő megoldására, ahol f teljesíti a tétel feltételeit. Általában a fenti egyenlet pontos megoldására nincs remény. Egy megoldást viszont előállíthatunk egy konvergens sorozat limeszeként (a módszer ezért nem tekinthető „egzakt” megoldásnak), amelyet a következő rekurzív módon definiált algoritmus határoz meg. Tegyük fel, hogy ismertek a szóban forgó intervallum a, b végpontjai, és $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ teljesülnek, akkor:

- 1.lépés: Legyen $c := \frac{a+b}{2}$.
- 2.lépés: Ha $f(c) = 0$, akkor az eljárást befejeztük, az f függvénynek a c szám zérushelye. Ellenkező esetben, ha $f(a) < 0$ és $f(c) > 0$, akkor legyen $\alpha := a$ és $\beta := c$, egyébként pedig legyen $\alpha := c$ és $\beta := b$.
- 3.lépés: Frissítsük az a, b értékeket: $a := \alpha$, $b := \beta$.
- 4.lépés: Ismételjük az eljárást az 1. lépéstől mindaddig, amíg az $|b - a|$ intervallumhossz egy előre adott hibahatár alá nem csökken.
- 5.lépés: A gyök közelítésére elfogadjuk akár a legutolsó a-, akár a legutolsó b-értéket (vagy akár azok számtani közepét).

A 6.2. Tétel elvileg is megalapozza pl. a négyzetgyök, köbgyök stb. *létezését*. Így pl. egy A nemnegatív szám négyzetgyökének neveztük azt a nemnegatív számot, melynek négyzete épp A. Nem nyilvánvaló azonban, hogy ilyen szám valóban létezik is. Épp ezt biztosítja a 6.2. Tétel, ha az $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$, $f(x) := x^2 - A$ függvényt egy $[0,C]$ intervallumon vizsgáljuk, ahol C elég nagy, pontosabban, teljesül a $C^2 > A$ egyenlőtlenség.

Végül példát mutatunk az 6.2. Tétel egy algebrai jellegű alkalmazására.

6.16. Példa: Igazoljuk, hogy bármely valós együtthatós pontosan harmadfokú egyenletnek van (legalább egy) valós gyöke.

Megoldás. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^3 + bx^2 + cx + d$ ahol $b,c,d \in \mathbf{R}$. Azt kell igazolni, hogy f-nek van zérushelye. Könnyen látható, hogy $\lim_{+\infty} f = +\infty$ és $\lim_{-\infty} f = -\infty$ (vajon miért?). Ez azt jelenti, hogy elég nagy $A,B > 0$ számok mellett már $f(-A) < 0$, és $f(B) > 0$. Az állítás most már a 6.2. Tétel egyenes következménye, a tételt a $[-A,B]$ intervallumra alkalmazva.

6.4. Kontrakciók és a Banach-féle fixponttétel

A 6.2. Tétel kapcsán szó volt bizonyos

$$f(x) = 0$$

alakú egyenletek megoldásáról. Most tekintsük az

$$x = f(x)$$

alakú egyenleteket, ahol $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ adott függvény. Nagyon sok gyakorlati probléma ilyen egyenletekre vezet, ill. ilyen alakúra hozható.

Fixpont:

Az $x = f(x)$ egyenlet megoldását az f függvény *fixpontjának* nevezzük.

Egyáltalán nem biztos, hogy egy ilyen egyenletnek van megoldása. Ez még általában akkor sem igaz, ha f folytonos. A következő tétel egy jól használható elegendő feltételt ad a megoldás létezésére, a megoldás közelítő előállítása pedig egy egyszerű, általában könnyen megvalósítható algoritmussal történik.

6.3. Tétel: (Banach-féle fixponttétel). Legyen I egy zárt intervallum, és legyen $f : I \to I$ kontrakció (azaz f kielégíti a Lipschitz feltételt I-n, mégpedig 1-nél kisebb Lipschitz-állandóval). Akkor f-nek az I intervallumban pontosan egy x^* fixpontja van, és ez előáll az alábbi konvergens, rekurzív sorozat limeszeként:

$$x_0 \in I, \qquad x_{n+1} := f(x_n) \quad (n = 0,1,2,...)$$

a sorozat x_0 kezdő tagjának megválasztásától függetlenül.

Bizonyítás. Jelölje $0 \le q < 1$ az f függvény Lipschitz-állandóját. Ekkor tehát minden $x,y \in I$-re $|f(x) - f(y)| \le q \cdot |x - y|$ teljesül. Tekintsük az $x_{n+1} := f(x_n)$ rekurzív módon definiált sorozatot. *Először megmutatjuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat, ezért konvergens I-ben.*

A Lipshchitz-feltételt sorozatosan alkalmazva az egyre kisebb indexekre, becsüljük meg két egymást követő tag eltérését:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})|| \le q \cdot |x_n - x_{n-1}| = q \cdot |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})| \le$$
$$\le q^2|x_{n-1} - x_{n-2}| \le ... \le q^n|x_1 - x_0|.$$

Ezt felhasználva, tetszőleges $m \ge n$, $m = n + k$ alakú indexre:

$$|x_m - x_n| = |x_{n+k} - x_n| =$$
$$= |x_{n+k} - x_{n+k-1} + x_{n+k-1} - x_{n+k-2} + x_{n+k-2} - ... + x_{n+1} - x_n| \le$$
$$\le |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + ... + |x_{n+1} - x_n| \le$$
$$\le (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + q^{n+k-2} + ... + q^n) \cdot |x_1 - x_0| \le$$
$$\le q^n \cdot (1 + q + q^2 + q^3 ...) \cdot |x_1 - x_0| = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|,$$

ahol felhasználtuk a végtelen mértani sor összegképletét (a sor konvergens, mert $0 \le q < 1$). A jobb oldal $n \to +\infty$ esetén 0-hoz tart, azaz minden ϵ számhoz van oly N küszöbindex, hogy minden $n \ge N$ természetes számra $\frac{1}{1-q} \cdot q^n|x_1 - x_0| < \epsilon$. Következésképp minden $m \ge n \ge N$ indexre $|x_m - x_n| < \epsilon$, tehát (x_n) valóban Cauchy-sorozat.

Ezért (x_n) konvergens I-ben, jelölje $x^* := \lim x_n$. Megmutatjuk, hogy ez fixpontja f-nek. A rekurzív definíció szerint $x_{n+1} = f(x_n)$. A bal oldal nyilván x^*-hoz tart. A jobb oldal f folytonossága miatt $f(x^*)$-hoz konvergál. Innen $x^* = f(x^*)$, tehát x^* valóban fixpont.

Végül igazoljuk, hogy csak egy fixpont van. Ha x^* és x^{**} két különböző fixpont, akkor

$$0 < |x^* - x^{**}| = |f(x^*) - f(x^{**}| \le q \cdot |x^* - x^{**}|,$$

ami lehetetlen, mert $q < 1$. Ezzel a tételt teljes egészében bebizonyítottuk.

A tétel feltételeiben lényeges, hogy f az I intervallumot önmagába képezi.

A rekurzív módon definiált $x_0 \in I$, $x_{n+1} := f(x_n)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ sorozatot sokszor *fixpont-iterációs* sorozatnak is nevezzük.

6.17. Példa: Oldjuk meg közelítően az $x = \frac{1}{2}\cos x$ egyenletet!

Megoldás. Az $x \mapsto \frac{1}{2}\cos x$ leképezés a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumot önmagába képezi, és itt kontrakció, mert a trigonometrikus addíciós tételek alapján

$$\left|\frac{1}{2}\cos x_1 - \frac{1}{2}\cos x_2\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left|\sin\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq$$
$$\leq \left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|x_1-x_2|,$$

ahol felhasználtuk a nemnegatív α szögekre igaz $\sin\alpha \leq \alpha$ egyenlőtlenséget is.

Az egyenlet tehát fixpont-iterációval megoldható. Legyen

$$x_0 := 0, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\cos x_n \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

A sorozat első néhány tagja (4 tizedesjegy pontossággal): 0,0000; 0,5000; 0,4387; 0,4526; 0,4496; 0,4502; 0,4501; 0,4501; 0,4501; ...

A fixpont 4 tizedesjegy pontossággal: 0,4501 .

6.5. Néhány nevezetes határérték

6.18. Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Megoldás. A pozitív x-ekre érvényes $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$ ismert egyenlőtlenség alapján

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1 \leq \frac{\sin x}{x\cdot\cos x}$$

Ezt átrendezve $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$, ami már *negatív x-ekre* is igaz. Ezért tetszőleges $x_n \to 0$ zérussorozat esetén adódik, hogy

$$\cos x_n \leq \frac{\sin x_n}{x_n} \leq 1 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

A bal oldal 1-hez tart (a koszinuszfüggvény folytonossága miatt). A jobb oldal pedig azonosan 1. Ezért a középső sorozat is konvergens és 1-hez tart.

6.19. Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Megoldás.

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}\to\frac{1}{2},$$

ha $x\to 0$, ahol felhasználtuk az előző példa eredményét.

6.20. Példa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Megoldás:

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{-1+1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots}{x}=\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots.$$

Innen tetszőleges $|x|<1$ esetén

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right|=\left|\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\dots\right|\le|x|\cdot\left(\frac{1}{2!}+\frac{|x|}{3!}+\frac{|x|^2}{4!}+\dots\right)\le|x|\cdot e.$$

Ezért, ha $x_n\to 0$, akkor

$$\left|\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-1\right|\le e\cdot|x_n|\to 0,$$

azaz $\frac{e^{x_n}-1}{x_n}\to 1$.

6.21. Példa:

(*a*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

(*b*)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x}=-1$$

Megoldás. (*a*) Jelölje $x:=\log(y+1)$, akkor

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{\log(y+1)}-1}{\log(y+1)}=\frac{y+1-1}{\log(y+1)}=\frac{y}{\log(y+1)}.$$

Ha most $y_n \to 0$ tetszőleges, akkor a logaritmusfüggvény folytonossága miatt az $x_n := \log(y_n + 1)$ $(n \in \mathbf{N})$ sorozat is zérussorozat. Innen pedig, felhasználva az előző példa eredményét:

$$\frac{y_n}{\log(y_n + 1)} = \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} \to 1.$$

A (b) eset az (a)-ra visszavezethető, x helyébe annak ellentettjét írva.

6.22. Példa:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Megoldás.

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \to \frac{1}{2},$$

ha $x \to 0$.

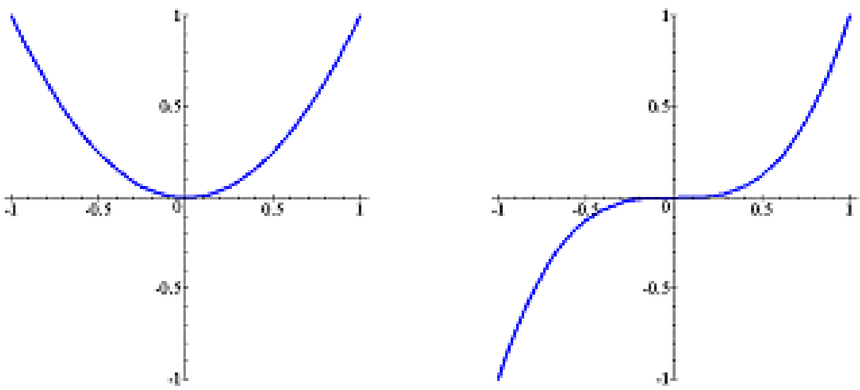
6.6. Elemi függvények

Ebben a részben összefoglaljuk a korábbiakban megismert egyszerű függvénytípusokat, és néhány új függvényt is bevezetünk.

Hatványfüggvények:

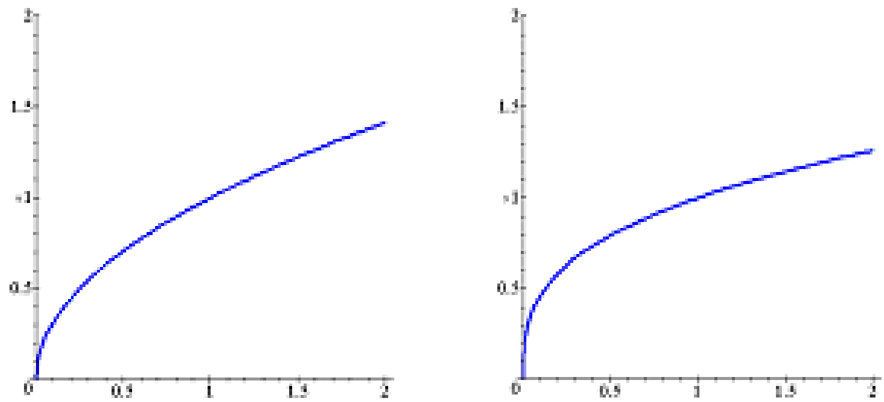
$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := x^n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

A függvény páros, ha n páros és páratlan, ha n páratlan.



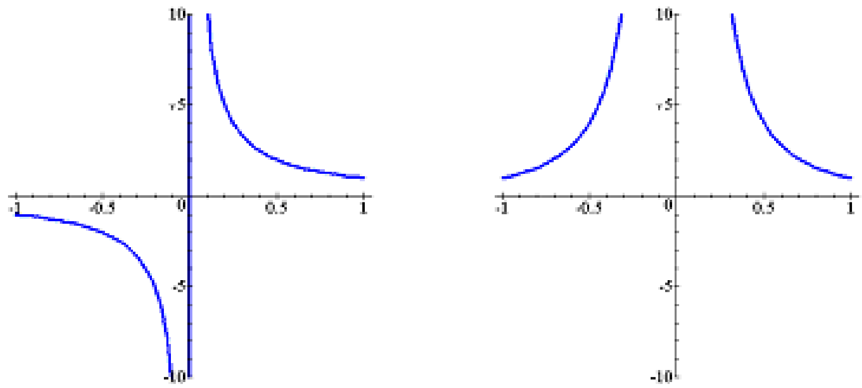
6.1. ábra. *Az* $x \mapsto x^2$ *és az* $x \mapsto x^3$ *függvény grafikonja*

Ha a kitevő nemnegatív, de nem egész, akkor a megfelelő függvényt csak az $\mathbf{R}_+$ halmazon értelmezzük.



6.2. ábra. *Az* $x \mapsto x^{1/2}$ *és az* $x \mapsto x^{1/3}$ *függvény grafikonja*

Ha a kitevő negatív egész, akkor a függvény az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ halmazon értelmezhető.

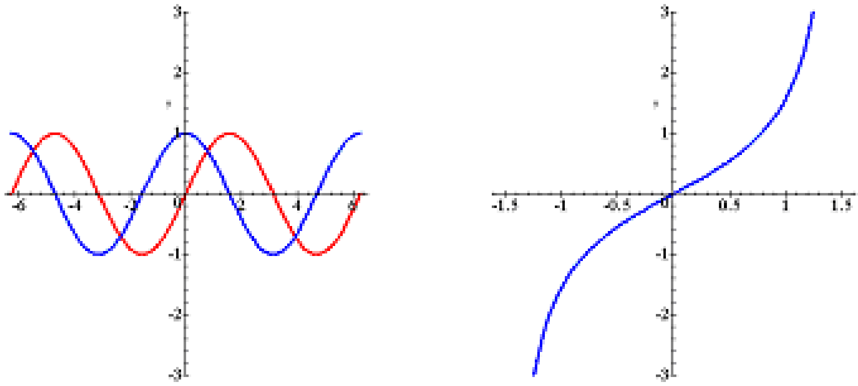


6.3. ábra. *Az* $x \mapsto x^{-1}$ *és az* $x \mapsto x^{-2}$ *függvény grafikonja*

Trigonometrikus függvények

$$x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \operatorname{tg} x, \quad x \mapsto \operatorname{ctg} x$$

A szinusz- és a koszinuszfüggvény az egész $\mathbf{R}$ halmazon értelmezett és 2π-



6.4. ábra. *Az* $x \mapsto sin x$, $x \mapsto cos x$ *és az* $x \mapsto$ *tg* x *függvény grafikonja*

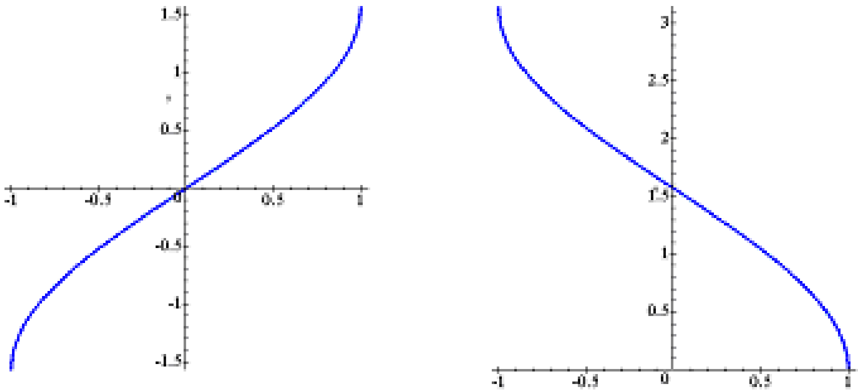
periodikus. A tangensfüggvény π-periodikus, értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2}) \cdot \pi : \ k \in \mathbf{Z}\}$ halmaz. A kotangensfüggvény szintén π-periodikus, értelmezési tartománya az $\mathbf{R} \setminus \{k\pi : \ k \in \mathbf{Z}\}$ halmaz.

Trigonometrikus függvények inverzei

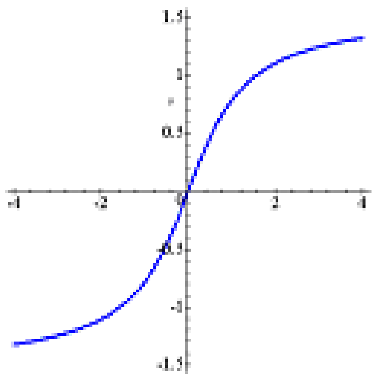
A szinuszfüggvény $\mathbf{R}$-en nem kölcsönösen egyértelmű, de a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumra leszűkítve már igen, ezért itt invertálható. Az inverz függvényt az arcsin szimbólummal jelöljük. Ennek értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum, értékkészlete a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallum.

Hasonlóan, a koszinuszfüggvény a $[0,\pi]$ intervallumra leszűkítve kölcsönösen egyértelmű, ezért itt invertálható. Az inverz függvényt az arccos szimbólummal jelöljük. Értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum, értékkészlete a $[0,\pi]$ intervallum.

A tangensfüggvény ugyancsak kölcsönösen egyértelmű a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra leszűkítve. A leszűkített függvény inverzét az arctg szimbólummal jelöljük. Értelmezési tartománya a teljes $\mathbf{R}$ halmaz, értékkészlete a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallum.



6.5. ábra. *Az* $x \mapsto$ *arcsin* x *és az* $x \mapsto$ *arccos* x *függvények grafikonjai*



6.6. ábra. *Az* $x \mapsto$ *arctg* x *függvény grafikonja*

Az exponenciális- és a logaritmusfüggvény

Az e alapú exponenciális-, ill. logaritmusfüggvényt az

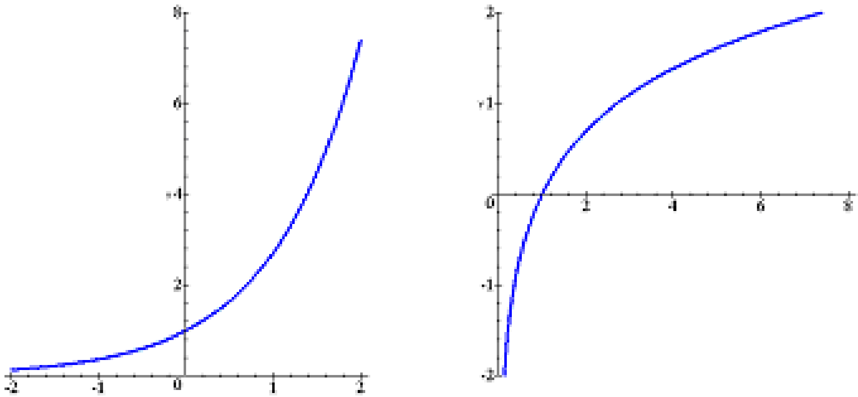
$$x \mapsto e^x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$x \mapsto \log x \qquad (x \in \mathbf{R}_+)$$

hozzárendelések definiálják. Ezek segítségével értelmezzük a tetszőleges alapú exponenciális- és logaritmusfüggvényt az alábbi módon. Tegyük fel, hogy $a > 0$, $a \neq 1$ adott valós szám, és legyen

$$a^x := e^{x \cdot \log x}, \text{ továbbá } \log_a x := \frac{\log x}{\log a} \quad (x > 0).$$

Igazolható, hogy ez az *egyetlen* lehetséges definíció, ha azt akarjuk, hogy a hatványozás ismert azonosságai mind érvényben maradjanak.



6.7. ábra. *Az $x \to e^x$ és az $x \to \log x$ függvények grafikonjai*

Hiperbolikus függvények

Az exponenciális függvények segítségével több új, a gyakorlat számára is fontos függvényt definiálunk. Az alábbi függvényeket *hiperbolikus függvényeknek* nevezzük. Ezek meglepő hasonlóságokat mutatnak a trigonometrikus függvényekkel (jóllehet, a grafikonjaik nagyon különbözőek).

Hiperbolikus függvények:

Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ mellett jelölje

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{(hiperbolikus szinusz)},$$

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{(hiperbolikus koszinusz)},$$

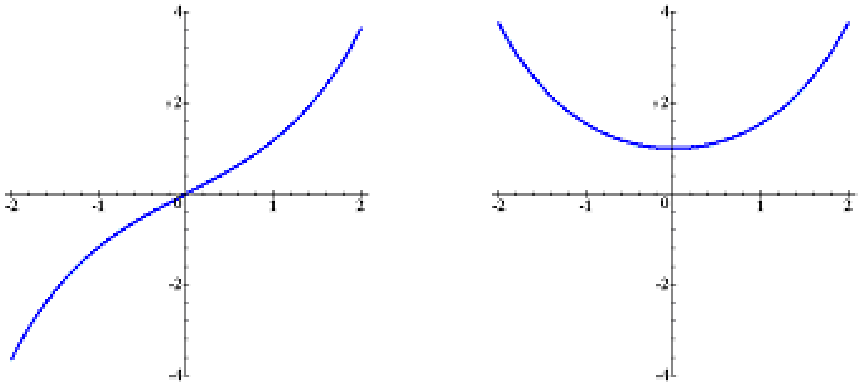
$$\operatorname{th} x := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{(hiperbolikus tangens)}.$$

Az elnevezést az indokolja, hogy e függvényekre a trigonometrikus függvényekéhez igen hasonló azonosságok teljesülnek. A következő állításban összefoglaljuk a legfontosabbakat. Ezek mind közvetlen számolással igazolhatók, az ellenőrzés részleteit az Olvasóra bízzuk.

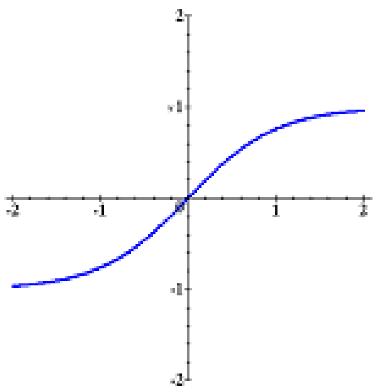
6.6. Állítás: . Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén

- $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,
- $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$,
- $\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$,
- $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$,
- $\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.

A hiperbolikus koszinuszfüggvény grafikonját szokták még *láncgörbének* is nevezni. Az elnevezést az indokolja, hogy egy, a végein rögzített, saját súlya alatt belógó lánc jó közelítéssel ilyen függvénnyel leírható alakot vesz fel.



6.8. ábra. *Az* $x \to$ *sh* x *és az* $x \to$ *ch* x *függvények grafikonjai*



6.9. ábra. *Az* $x \to$ *th* x *függvény grafikonja*

6.7. Feladatok

1. Igazoljuk, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x^\alpha \cos\frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

formulával értelmezett függvény mindenütt folytonos ($\alpha > 0$ adott paraméter).

2. Igazoljuk, hogy az $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$ leképezés a 0 pontban jobbról folytonos.

3. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$.

4. Mutassuk meg, hogy minden $x,y \in [0,\frac{\pi}{2}]$ esetén

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin\frac{x+y}{2}.$$

5. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := \frac{2}{3-x}$ formulával értelmezett függvénynek két fixpontja is van, az 1 és a 2 számok. Nem mond-e ez ellent a Banach-fixponttételnek? Mihez konvergál a fixpont-iterációs sorozat?

6.Van-e pozitív megoldása az $\frac{1}{4}e^{-x} - x + 1 = 0$ egyenletnek? Ha igen, számítsuk ki legalább 3 tizedesjegy pontossággal!

7. Számítsuk ki a az alábbi határértékeket (ha léteznek):

(a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6},$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-7x+9}{3x^2+5},$$

(*c*)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1},$$

(*d*)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6},$$

(*e*)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}},$$

(*f*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x},$$

(*g*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2},$$

(*h*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x},$$

(*i*)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\log \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{ctg} x},$$

(*j*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3(x-8)}{\sin 2x-2\sin x},$$

(*k*)

$$\lim_{x\to +0} (1+xy)^{1/x} \qquad (y>0 \text{ rögzített szám}),$$

(l)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sin^2 x},$$

(m)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}} + \log\sqrt{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}}}{x^2}.$$

Megoldások

1. $x \neq 0$ esetén f nyilván folytonos x-ben, mert folytonos függvényekből állítható össze (az alapműveletek és a kompozíció segítségével). Elég tehát csak a 0-beli folytonosságot igazolni. Legyen $x_n \to 0$ tetszőleges sorozat, akkor $|f(x_n)| \leq |x_n|^\alpha \to 0$, azaz $f(x_n) \to 0$, tehát a függvény valóban folytonos 0-ban is.

2. $\sqrt{x} = e^{\frac{1}{2}\log x}$ minden $x > 0$ esetén. Legyen $x_n > 0$, $x_n \to 0$ tetszőleges. Ekkor $\log x_n \to -\infty$, ezért $\sqrt{x_n} = e^{\frac{1}{2}\log x_n} \to 0$, tehát a gyökfüggvény valóban folytonos a 0-ban is.

3. Jelölje $y := \operatorname{arctg} x$, akkor $x = \operatorname{tg} y$. Innen:

$$x^2 = \operatorname{tg}^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y}.$$

Kifejezve $\cos^2 y$-t $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$ adódik, ezért

$$\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Feltehető, hogy $x \leq y$. Mivel a $[0, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon a szinuszfüggvény monoton nő, a koszinuszfüggvény pedig monoton fogy, azért

$$\sin\frac{x}{2} \leq \sin\frac{y}{2} \qquad \text{és} \qquad \cos\frac{x}{2} \geq \cos\frac{y}{2}.$$

Innen:

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}\right) \leq \left(\sin\frac{y}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{y}{2}\right),$$

azaz

$$\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} \leq \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Az addíciós tételek alkalmazásával innen

$$\frac{1}{2}\sin\frac{2x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2y}{2} \leq \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right),$$

amiből az állítás már következik.

5. A függvény a $[0,\frac{3}{2}]$ zárt intervallumot önmagába képezi (mert itt f monoton nő, és $f(0) = \frac{2}{3}$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{4}{3}$). Ebben az intervallumban f kontrakció. Valóban, tetszőleges $x,y \in [0,\frac{3}{2}]$ számok esetén:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{2}{3-x} - \frac{2}{3-y}\right| = 2\cdot\frac{|3-y-3+x|}{(3-x)(3-y)} = \frac{2}{(3-x)(3-y)}\cdot|x-y|$$

A jobb oldalon x, y helyébe a maximális értékeiket (3/2) beírva a nevező csak csökkenhet. Innen

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{8}{9}\cdot|x-y|,$$

tehát f kielégíti a Lipschitz-feltételt $\frac{8}{9}$ értékű Lipschitz-konstanssal, azaz f kontrakció a $[0,\frac{3}{2}]$ zárt intervallumban, ezért itt pontosan egy fixpontja van (az 1 szám), és bármely $x_0 \in [0,\frac{3}{2}]$ kezdőérték esetén az $x_{n+1} := \frac{2}{3-x_n}$ $(n \in \mathbf{N})$ iterációs sorozatra $x_n \to 1$ teljesül.

A másik fixpont (a 2 szám) környezetében f *nem kontrakció* (mutassuk meg!). Ennek létezése tehát nem mond ellent a Banach-fixponttételnek.

6. Ha $f(x) := \frac{1}{4}e^{-x} + 1$, akkor az egyenlet ekvivalens az $x = f(x)$ egyenlettel. Az f függvény monoton fogyó, és az $[1,2]$ zárt intervallumot önmagába képezi (valóban, $f(1) = \frac{1}{4e} + 1 \in [1,2]$, és $f(2) = \frac{1}{4e^2} + 1 \in [1,2]$). Megmutatjuk, hogy f itt kontrakció. Legyenek $x,y \in [1,2]$ tetszőlegesek, feltehető, hogy x a nagyobb. Akkor

$$|f(x)-f(y)| = \frac{1}{4}|e^{-x}-e^{-y}| = \frac{e^{-x}}{4}|1-e^{x-y}| \leq \frac{e^{-x}}{4}|x-y| \leq \frac{1}{4}|x-y|$$

tehát f valóban kontrakció. Így az egyenletnek 1 és 2 közt pontosan egy gyöke van, és ez fixpont-iterációval meghatározható, pl.

$$x_1 := 0, \quad x_{n+1} := \frac{1}{4}e^{-x_n} + 1.$$

Négy iterációs lépés után a közelítő megoldás $1{,}0845$, és az első 3 tizedesjegy a további iterációk során már nem változik.

7. (*a*)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-3} = 0.$$

(*b*)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-7x+9}{3x^2+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{7}{x}+\frac{9}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\frac{1}{3}.$$

(*c*)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)=3.$$

(*d*)

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6}=$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{11x+3}-\sqrt{4x+17}}{x^2-5x+6}\cdot\frac{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}=$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{11x+3-4x-17}{(x-3)(x-2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}=$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{7(x-2)}{(x-3)(x-2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{11x+3}+\sqrt{4x+17}}=-\frac{7}{10}.$$

(*e*) Bevezetve az $y := \pi - x$ helyettesítést (ekkor $x \to \pi$ esetén $y \to 0$):

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}=\lim_{y\to0}\frac{\sin(\pi-y)}{1-\frac{(\pi-y)^2}{\pi^2}}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{1-\frac{\pi^2-2\pi y+y^2}{\pi^2}}=$$
$$=\lim_{y\to0}\frac{\pi^2\sin y}{2\pi y-y^2}=\lim_{y\to0}\left(\frac{\pi^2}{2\pi-y}\cdot\frac{\sin y}{y}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Itt felhasználtuk a 6.18. Példa eredményét.

(*f*)

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}=1,$$

ahol felhasználtuk a 6.20. Példa eredményét.

(g)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{ch } x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{ch } x-1}{x^2}\cdot\frac{\text{ch } x+1}{\text{ch } x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\text{ch}^2 x-1}{x^2(\text{ch } x+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{sh}^2 x}{x^2(\text{ch } x+1)}=\frac{1}{2},$$

ahol felhasználtuk az előző feladat eredményét.

(h)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg } 4x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 4x}\cdot\frac{\sin 4x}{\sin 5x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 4x}\cdot\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{4}{5}\right)=\frac{4}{5},$$

ahol felhasználtuk a 6.18. Példa eredményét.

(i) Bevezetve az $y:=\text{tg } x$ helyettesítést (ekkor $x\to\frac{\pi}{4}$ esetén $y\to 1$):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\log\text{tg } x}{1-\text{ctg } x}=\lim_{y\to 1}\frac{\log y}{1-\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 1}\left(y\cdot\frac{\log(1+(y-1))}{y-1}\right).$$

Most vezessük be a $z:=y-1$ helyettesítést (ekkor $z\to 0$), innen végül:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\log\text{tg } x}{1-\text{ctg } x}=\lim_{z\to 0}\left((z+1)\cdot\frac{\log(1+z)}{z}\right)=1,$$

ahol felhasználtuk a 6.21. Példa eredményét.

(j)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3(x-8)}{\sin 2x-2\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{2\sin x\cos x-2\sin x}\cdot(x-8)\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x^2}{\cos x-1}\cdot(x-8)\right)=8,$$

ahol felhasználtuk a 6.18. és a 6.19. Példák eredményeit.

(k) Bevezetve a $w := \frac{1}{xy}$ helyettesítést (ekkor $x \to +0$ esetén $w \to +\infty$, mert y pozitív!)

$$\lim_{x\to+0}(1+xy)^{1/x} = \lim_{w\to+\infty}(1+\frac{1}{w})^{wy} = e^y.$$

(l)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sin^2 x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-1+x^2}{(\sin^2 x)\cdot(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Itt felhasználtuk a 6.18. Példa eredményét.

(m)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}}+\log\sqrt{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\log\left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\log\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\log(1-x^2)-\log(1+x^2)}{x^2} = -1.$$

Itt felhasználtuk a 6.21. Példa eredményét.

7. Egyváltozós valós függvények differenciálszámítása

Ebben a fejezetben a valós analízis egyik legfontosabb fogalmát, a differenciálhányadost vezetjük be. Számtalan közvetlen és közvetett alkalmazása közül említsük meg a szélsőérték problémák megoldását és a differenciálegyenletek témakörét. Ez utóbbi pl. fizikai, mérnöki, közgazdasági stb. folyamatok matematikai modellezésének elsőrangú eszköze.

7.1. A differenciálhányados

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy függvény, $x \in \mathcal{D}_f$ olyan pont, hogy nemcsak x_0 maga, hanem annak egy egész $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ alakú környezete is a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartományba esik.

Differenciálhányados:

Az f függvény *differenciálható* (vagy *deriválható*) az x_0 pontban, ha az

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték létezik és véges. Ekkor az $f'(x_0)$ számot az f függvény x_0-beli *differenciálhányadosának* (vagy *deriváltjának*) nevezzük.

Ha f értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható, akkor röviden csak azt mondjuk, hogy f *differenciálható*.

Néha (különösen, ha f-et bonyolult formula definiálja, és nem világos, hogy melyik betű jelenti az argumentumot), az $f'(x_0)$ deriváltat a $\frac{df}{dx}(x_0)$ szimbólummal is szokás jelölni. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ebben a jelölésmódban $\frac{df}{dx}$ *egybetartozó szimbólum*, és *nem tört*, a jelölés csak a differenciálhányados származtatására utal.

Elnevezés. A definícióban szereplő $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hányadost (ahol $x \neq x_0$) az f függvénynek az $[x_0, x]$ intervallumra vonatkozó, az x_0 ponthoz tartozó *különbségi hányadosának* (vagy *differenciahányadosának*) nevezzük.

Ha a különbségi hányados határértéke x_0-ban nem létezik, de létezik az x_0-ban vett bal oldali (jobb oldali) határérték, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény x_0-ban *balról* (*jobbról*) *differenciálható*, és a szóban forgó bal oldali (jobb oldali) $f'_-(x_0)$ (ill. $f'_+(x_0)$) határértéket a függvény *bal oldali* (*jobb oldali*) *deriváltjának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy f pontosan akkor deriválható x_0-ban, ha ugyanott balról és jobbról is deriválható, és a bal- és jobb oldali deriváltak megegyeznek.

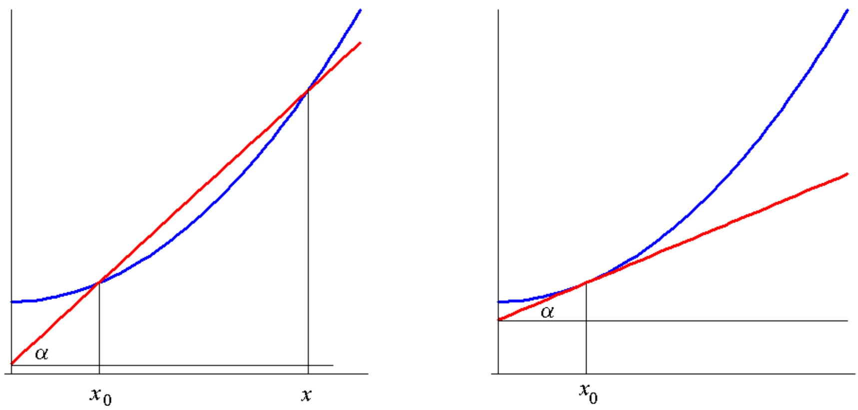
Deriváltfüggvény:

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvény. Az $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f'(x)$ függvényt az f függvény *deriváltfüggvényének* vagy röviden *deriváltjának* nevezzük. (Az f' függvényt néha a $\frac{df}{dx}$ szimbólummal is jelöljük.)

A különbségi hányados a függvény *relatív megváltozását* mutatja az $[x_0,x]$ intervallumban. Ennek megfelelően, a differenciálhányados a függvény x_0-beli lokális relatív megváltozását „méri” (másszóval a változás sebességét). Geometriailag nagyon szemléletes fogalmakról van szó. A különbségi hányados az f függvény grafikonjának $(x_0,f(x_0))$ és $(x,f(x))$ pontjai által meghatározott szelő iránytangense. $x \to x_0$ esetén a szelők határhelyzete az x_0-beli *érintő* lesz, ily módon az $f'(x_0)$ differenciálhányados a grafikon $(x_0,f(x_0))$ pontjához húzott érintő iránytangense. Magának az érintőnek az egyenlete tehát

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(valóban, ez az egyenes illeszkedik az $(x_0,f(x_0))$ pontra, és meredeksége $f'(x_0)$).



7.1. ábra. tg $\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tg $\alpha = f'(x_0)$

Nyilvánvaló, hogy ha x_0-ban a bal-és jobb oldali deriváltak léteznek, de nem egyenlők, akkor f grafikonjához az $(x_0,f(x_0))$ pontban két fél-érintő is húzható, amelyek azonban nem esnek egy egyenesbe. Ekkor az x_0 pontot az f függvény *töréspontjának* is nevezzük.

Az $(x - x_0)$ különbséget az f függvény *argumentumának megváltozásával* is interpretálhatjuk. Ekkor az $f(x) - f(x_0)$ különbség a *függvényérték megváltozása*. Jelölje röviden $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ és $\Delta x := x - x_0$, akkor

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

ami magyarázza a hagyományos $\frac{df}{dx}$ jelölést. Ha $(x - x_0)$-t h-val jelöljük, akkor

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Konkrét függvények esetén a derivált kiszámítása akár ezzel, akár a definícióban szereplő formulával történhet.

A függvényérték relatív változását a deriváltnál néha szemléletesebben mutatja a közgazdaságban fontos szerepet játszó *elaszticitás*. Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy differenciálható függvény, akkor az f függvény *x-beli elaszticitásának* az

$$Ef(x) := \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$$

számot nevezzük, feltéve, hogy $f(x) \neq 0$. Ha pl. x valamely jószág árát, $f(x)$ pedig az iránta való keresletet jelenti az x ár mellett, akkor az elaszticitás azt mutatja meg, hogy az ár 1% -os megváltozása kb. hány % -os változást okoz a keresletben. Ez nyomban adódik a definícióval egyenértékű alábbi összefüggésből:

$$Ef(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

7.1. Példa: Ha egy egyenesvonalú mozgást végző (pontszerű) test pillanatnyi helyzetét a $t \mapsto s(t)$ függvény írja le (ahol t az idő), akkor az $\frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$ különbségi hányados a $[t_0,t]$ időtartamra vonatkozó *átlagsebesség*. Ennek t_0-ban vett határértéke (azaz a t_0-beli differenciálhányados) a t_0-beli *pillanatnyi sebesség*. Az s elmozdulás v deriváltfüggvénye a *sebességfüggvény*. Ugyanígy, a $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ különbségi hányados a $[t_0,t]$ időtartamra vonatkozó *átlaggyorsulás*. Ennek t_0-ban vett határértéke a t_0-beli *pillanatnyi gyorsulás*.

7.2. Példa: (a konstans függvény deriváltja). Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := c$, ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám. Akkor $f' \equiv 0$.

Megoldás. Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén ugyanis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0,$$

ahonnan $f'(x) = 0$ következik.

7.3. Példa: (az identikus leképezés deriváltja). Legyen $f(x) := x$ ($x \in \mathbf{R}$). Akkor $f' \equiv 1$.

Megoldás. Tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ esetén ugyanis

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1,$$

ahonnan $f'(x) = 1$ következik.

7.4. Példa: Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := 3x^2 + 2$. Számítsuk ki e függvény deriváltját egy tetszőleges $x \in \mathbf{R}$ helyen.

Megoldás. A különbségi hányados

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2+2-3x^2-2}{h} = \frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h} = 6x+3h.$$

A jobb oldal határértéke $h \to 0$ mellett nyilván $6x$, ezért $f'x) = 6x$.

Az előző példából sejthető, hogy bonyolultabb formulával adott függvények deriváltjának kiszámítása bonyolult határértékek meghatározásához vezet. Olyan jellegű tételekre van tehát szükségünk, melyek a derivált kiszámítását (amennyire csak lehetséges) leegyszerűsítik.

Ilyen technikák ismertetése előtt két tételt igazolunk a deriválhatóságra vonatkozóan. Az első azt állítja, hogy a differenciálhatóság erősebb fogalom a folytonosságnál.

7.1. Tétel: . Ha az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény deriválható egy x_0 pontban, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás. Legyen $x_n\to x_0$ tetszőleges sorozat ($x_n\neq x_0$), akkor

$$|f(x_n)-f(x_0)|=\left|\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right|\cdot|x_n-x_0|\to|f'(x_0)|\cdot 0=0,$$

azaz f valóban folytonos x_0-ban.

A differenciálható függvényeket sokszor röviden „sima” függvényeknek nevezzük, arra utalva, hogy a függvénynek ekkor sem szakadásai, sem töréspontjai nincsenek.

A következő állítás pedig a derivált egyik legfontosabb alkalmazását alapozza meg.

7.2. Tétel: . Ha az $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ függvény deriválható egy x_0 pontban és ott lokális szélsőértéke van, akkor szükségképp $f'(x_0)=0$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban pl. lokális maximuma van (a bizonyítás a minimum esetében hasonlóan végezhető el). Legyen $x_n\to x_0$ tetszőleges olyan sorozat, melyre $x_n>x_0$ minden n index esetén. Ekkor $f(x_n)\le f(x_0)$ miatt $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\le 0$, így a határértékre is teljesül, hogy $f'(x_0)\le 0$. Ha pedig $x_n\to x_0$ tetszőleges olyan sorozat, melyre $x_n<x_0$ minden n index esetén, akkor most $f(x_n)\le f(x_0)$ miatt $\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\ge 0$, ahonnan $f'(x_0)\ge 0$. E két egyenlőtlenségből $f'(x_0)=0$ adódik, ahogy állítottuk.

A tétel értelmében, ha egy adott differenciálható függvény lokális szélsőértékeit akarjuk feltérképezni, elég meghatározni a deriváltfüggvény zérushelyeit. Lokális szélsőértékek (ha vannak egyáltalán) csak itt lehetnek. Hogy aztán e pontokban valóban van-e szélsőérték, és ha igen, akkor milyen típusú, ezt további meggondolásokkal kell eldönteni. A 7.6. szakaszban részletesebben foglalkozunk ezzel a problémakörrel.

Megjegyzés.
1. Vigyázat, a 7.2. Tétel csak *differenciálható* függvényekre igaz! Így pl. az $x\mapsto|x|$ abszolútérték-függvénynek a 0-ban nyilván lokális minimuma van, de itt a függvény nem deriválható (bizonyítsuk ezt be!); a deriváltfüggvénynek sehol sincs zérushelye (bizonyítsuk be ezt is!), így a 0-beli minimum *nem* kapható meg a derivált zérushelyeinek feltérképezésével. Ugyancsak nem vonatkozik a tétel olyan esetekre, ahol (tipikusan az értelmezési tartomány határán) csak egyoldali deriváltak léteznek. Így pl. a $[0,1]$ intervallumon értelmezett $x\mapsto x$ identikus leképezésnek az értelmezési tartomány bal végpontján lokális minimuma, jobb végpontján

lokális maximuma van; ugyanakkor a 0-ban vett jobb oldali és az 1-ben vett bal oldali derivált (és az összes többi pontban vett „közönséges” derivált is) a definícióból azonnal következően 1-gyel egyenlő.
2. A 7.2. Tétel *nem fordítható meg*! Abból, hogy egy függvény deriváltja valahol 0, nem következik, hogy ott a függvénynek szélsőértéke is van. Ellenpéldaként tekintsük az $x \mapsto x^3$ leképezést. A következő szakaszban megmutatjuk, hogy ennek deriváltja x-ben $3x^2$, így a 0-ban a derivált eltűnik. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy a leképezésnek a 0-ban nincs lokális szélsőértéke. A függvény minden pozitív helyen pozitív, minden negatív helyen pedig negatív értéket vesz fel.

7.2. A derivált kiszámítása

Először az algebrai műveletekkel képezett függvények deriválhatóságát vizsgáljuk.

7.3. Tétel: (differenciálási szabályok). Ha az $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvények mindketten differenciálhatók az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, akkor
(a) $f+g$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

(b) $f-g$ is differenciálható x_0-ban és

$$(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0),$$

(c) fg is differenciálható x_0-ban és

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

(d) $\frac{f}{g}$ is differenciálható x_0-ban (feltéve, hogy $g(x_0) \neq 0$) és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Bizonyítás. (a) és (b) a definícióból nyomban adódik.
(c) Egyszerű algebrai átalakításokkal kapjuk, hogy:

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

A jobb oldal első tagja $x \to x_0$ esetén g folytonossága miatt (7.1. Tétel) $f'(x_0)g(x_0)$-hoz, míg a második tag definíció szerint $f(x_0)g'(x_0)$-hoz tart, ami az állítást igazolja.
(d) Hasonló átalakítási trükköt alkalmazunk:

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} =$$
$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} =$$
$$= \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left(g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right).$$

A jobb oldalon a nevező $x \to x_0$ esetén g folytonossága miatt (7.1. Tétel) $(g(x_0))^2$-hez, a zárójeles kifejezés első tagja $f'(x_0)g(x_0)$-hoz, a második pedig $f(x_0)g'(x_0)$-hoz tart. Innen az állítás már következik.

Már tudjuk, hogy a konstans függvény deriváltja mindenütt 0 (ld. a 7.2. Példát). Ezt kombinálva a 7.3. Tétel (c) és (d) pontjával, a következő eredményeket kapjuk (amelyeket szintén érdemes megjegyezni):
(e) Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, akkor minden $c \in \mathbf{R}$ konstans esetén a $c \cdot f$ függvény is differenciálható x_0-ban, és

$$(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0).$$

(f) Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban és $f(x_0) \neq 0$, akkor az $\frac{1}{f}$ reciprokfüggvény is differenciálható x_0-ban, és

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}.$$

A szorzat deriválási szabályát (7.3. Tétel (c) pont), értelemszerűen általánosíthatjuk kettőnél több tényezős (de véges sok tényezőből álló) szorzatokra. Így pl. (a rövidség kedvéért az argumentumokat elhagyva) háromtényezős szorzatra

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh',$$

négytényezős szorzatra

$$(abcd)' = a'bcd + ab'cd + abc'd + abcd',$$

és így tovább.

7.4. Tétel: (összetett függvény differenciálása). Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, a $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény pedig differenciálható az $f(x_0)$ pontban, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is differenciálható x_0-ban, és

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Bizonyítás. Legyen $x_n \to x_0$ egy tetszőleges sorozat. Tegyük fel először, hogy $f(x_n) \neq f(x_0)$ semmilyen indexre. Ekkor:

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = \frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{f(x_n) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

ahonnan a jobb oldal határértéke nyilván $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Az állítás igaz marad akkor is, ha *véges sok* indexre $f(x_n) = f(x_0)$ (a fenti kifejezés értelmes marad minden, elég nagy indexre, így a határérték változatlan marad). Ha pedig *végtelen sok* indexre teljesül, hogy $f(x_n) = f(x_0)$, akkor szükségképp $f'(x_0) = 0$ (vajon miért?!), továbbá ezen indexekre

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} = 0,$$

a fennmaradó indexekre pedig

$$\frac{g(f(x_n)) - g(f(x_0))}{x_n - x_0} \to g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0,$$

tehát a különbségi hányados minden esetben a $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ számhoz tart.

Mivel a függvénykompozíció során a külső g függvényt úgy is felfoghatjuk, hogy az valójában f-től (pontosabban az $f(x)$ függvényértékektől) függ, a 7.4. Tétel állítása az alábbi alakba is írható:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

Ezen forma alapján a 7.4. Tételt *láncszabálynak* is nevezik. Hasonló állítás igaz többszörösen összetett függvényekre is. Pl., ha $u(x) = h(g(f(x)))$, akkor

$$u'(x_0) = h'(g(f(x_0))) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0),$$

vagy röviden

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dg} \cdot \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}.$$

7.5. Tétel: (az inverz függvény differenciálása). Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, $f'(x_0) \neq 0$, az f^{-1} inverz függvény pedig létezik és folytonos az $f(x_0)$ pont egy környezetében, akkor f^{-1} differenciálható $f(x_0)$-ban, és

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bizonyítás. Jelölje $y_0 := f(x_0)$, és legyen $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ $(= \mathcal{R}_f)$ tetszőleges. Jelölje továbbá $x := f^{-1}(y)$, akkor

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}.$$

Ha most $y \to x_0$, akkor f^{-1} folytonossága miatt $x \to x_0$, így a jobb oldal $\frac{1}{f'(x_0)}$-hoz tart, ahogy állítottuk.

Mivel $x_0 = f^{-1}(y_0)$, a tétel állítása az

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

alakban is írható.

Ha az f leképezést, pongyolán fogalmazva, egy $x \mapsto f$ leképezésnek fogjuk fel (ami tehát az x-értékekhez f-értékeket rendel), akkor az inverz leképezés egy $f \mapsto x$ típusú leképezés. Ebben a felfogásban az inverz függvény deriváltja $\frac{dx}{df}$, a 7.5. Tétel állítása pedig a következő szemléletes (bár nem egészen korrekt, mindenesetre könnyen megjegyezhető)

$$\frac{dx}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

alakba írható.

7.6. Tétel: (paraméteresen adott függvény deriválása). Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ és $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ olyan függvény, hogy
(a) f és g differenciálhatók egy $t_0 \in \mathbf{R}$ pontban és $f'(t_0) \neq 0$;
(b) az f^{-1} inverz függvény létezik és folytonos az $f(t_0)$ pont egy környezetében.
Akkor az $x := f(t)$, $y := g(t)$ paraméteresen megadott függvény (azaz az $y(x) := g(f^{-1}(x))$ formulával értelmezett függvény) differenciálható az $x_0 := f(t_0)$ pontban, és

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

Bizonyítás. A szóban forgó, az $y(x) := g(f^{-1}(x))$ formulával értelmezett függvény deriváltja (felhasználva a 7.4. és 7.5. Tételeket):

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = g'(f^{-1}(x_0)) \cdot (f^{-1})'(x_0) = \frac{g'(f^{-1}(x_0))}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}.$$

A tétel állítása a következő szemléletes, könnyen megjegyezhető formába is írható:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

7.3. Néhány elemi függvény deriváltja

A következő elemi függvények jól ismert formulákkal adottak: feltesszük, hogy (szokásos módon) a lehető legbővebb tartományon értelmezettek. A rövidség kedvéért a deriválást a formula utáni vessző jelöli.

Az alábbi állítást már láttuk (7.2. Példa), itt csak a teljesség kedvéért ismételjük meg.

7.1. Állítás: (a konstans függvény deriváltja). Tekintsük az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto c$ függvényt (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám). Akkor

$$(c)' \equiv 0.$$

7.2. Állítás: (lineáris függvény deriváltja). Tekintsük az $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto ax$ függvényt (ahol $a \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám). Akkor

$$(ax)' \equiv a \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás. Valóban, $\frac{a(x+h)-ax}{h} \equiv a$, ahonnan az állítás már következik.

7.3. Állítás: (kvadratikus függvény deriváltja).

$$(x^2)' = 2x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás. A szorzat deriválására vonatkozó 7.3. (c) Tétel és az előző állítás szerint

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

7.4. Állítás: (hatványfüggvény deriváltja). Az előző állításhoz hasonlóan:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

és így tovább, minden $n \in \mathbf{N}$-re:

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

7.5. Állítás: (az exponenciális függvény deriváltja).

$$(e^x)' = e^x \quad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás. Felhasználva a 6.20. Példa eredményét:

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \to e^x \quad (\text{ha } h \to 0).$$

7.6. Állítás: (tetszőleges alapú exponenciális függvény deriváltja).

$$(a^x)' = a^x \cdot \log a \quad (x \in \mathbf{R}),$$

ahol $a > 0$, $a \neq 1$ tetszőleges szám.

Bizonyítás. Definíció szerint $a^x = e^{x \cdot \log a}$. Felhasználva az előző állítást és az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tételt:

$$(a^x)' = (e^{x \cdot \log a})' = e^{x \cdot \log a} \cdot \log a = a^x \cdot \log a.$$

7.7. Állítás: (a természetes alapú logaritmusfüggvény deriváltja).

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Bizonyítás. Jelölje $f(x) := \log x$, $g(x) := e^x$, akkor $f = g^{-1}$. Felhasználva az inverz függvény deriválására vonatkozó 7.5. Tételt:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}.$$

Megjegyezzük, hogy a deriváltat közvetlenül is kiszámíthatjuk:

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{h} = \frac{1}{x} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \to \frac{1}{x},$$

ha $h \to 0$. Itt felhasználtuk a $\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 0$ nevezetes határértéket.

7.8. Állítás: (tetszőleges alapú logaritmusfüggvény deriváltja).

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \log a} \qquad (x > 0),$$

ahol $a > 0$, $a \neq 1$ tetszőleges szám.

Bizonyítás. Definíció szerint $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$. Innen, felhasználva az előző állítást:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' = \frac{1}{x \cdot \log a}.$$

7.9. Állítás: (általános, valós kitevőjű hatványfüggvény deriváltja). Legyen $\alpha \in \mathbf{R}$ tetszőleges valós szám (nem feltétlen egész), akkor

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad (x > 0),$$

azaz a 7.4. Állításban szereplő formula nemcsak egész, hanem tetszőleges valós kitevőkre is érvényes.

Bizonyítás. Definíció szerint $x^\alpha = e^{\alpha \cdot \log x}$. Innen, felhasználva az exponenciális és a logaritmusfüggvény deriváltját valamint az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tételt:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \cdot \log x})' = e^{\alpha \cdot \log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha - 1} \cdot \alpha.$$

Speciálisan $\alpha = \frac{1}{2}$ mellett (érdemes külön is megjegyezni):

7.10. Állítás: (a gyökfüggvény deriváltja).

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0).$$

Megjegyezzük, hogy a gyökfüggvény a 0-ban nem differenciálható (vajon miért?).

7.11. Állítás: (trigonometrikus függvények deriváltja).
(a)

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

(b)

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

(c)

$$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi \cdot (k + \frac{1}{2}) : \ k \in \mathbf{Z}\}),$$

(d)

$$(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás.
(a) Felírva a különbségi hányadost:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h^2} \cdot h + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \to \cos x,$$

ha $h \to 0$. Itt felhasználtuk a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ és a $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ nevezetes határértékeket.
A (b) állítás hasonlóképp igazolható, de felhasználhatjuk a $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ azonosságot is:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x.$$

ahol alkalmaztuk az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tételt.
A (c) állítás (a)-ból és (b)-ből a hányados deriválásáról szóló 7.3. Tétel alkalmazásá-

val adódik:

$$(\text{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(felhasználva a $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ azonosságot).
Végül a (d) állításban felhasználjuk az inverz függvény deriválásáról szóló 7.5. Tételt. Legyenek $f(x) := \text{arctg}\,x$, $g(z) := \text{tg}\,z$, akkor g inverze épp f, és:

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \cos^2 \text{arctg}\,x.$$

Jelölje most a rövidség kedvéért $z := \text{arctg}\,x$, akkor $x = \text{tg}\,z = \frac{\sin z}{\cos z}$. Innen $x^2 = \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1-\cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, ahonnan $\cos^2 z$ kifejezhető x függvényében: $\cos^2(\text{arctg}\,x) = \cos^2 z = \frac{1}{1+x^2}$, ahogy állítottuk.

7.12. Állítás: (hiperbolikus függvények deriváltja).
(a)

$$(\text{sh}\,x)' = \text{ch}\,x,$$

(b)

$$(\text{ch}\,x)' = \text{sh}\,x.$$

Bizonyítás. A hiperbolikus függvények definíciójából, felhasználva az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tételt:

$$(\text{sh}\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}\cdot(-1)}{2} = \frac{e^2 + e^{-x}}{2} = \text{ch}\,x,$$

és hasonlóan:

$$(\text{ch}\,x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{2} = \frac{e^2 - e^{-x}}{2} = \text{sh}\,x.$$

A fenti formulák alapján és a deriválási tételek felhasználásával lényegében minden, a gyakorlatban előforduló függvény deriváltját már ki tudjuk számítani, még az olyan szokatlan és/vagy bonyolult függvényekét is, amelyeket az alábbi példák illusztrálnak.

7.5. Példa: Legyen $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^x$. Számítsuk ki f deriváltját.

Megoldás. Definíció szerint $x^x = e^{x\cdot\log x}$, innen az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tétel szerint f differenciálható, és

$$f'(x) = e^{x\cdot\log x} \cdot \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\log x + 1).$$

Egy másik, jól használható módszer ilyen típusú feladatok megoldására a *logaritmikus deriválás*. Vegyük az $f(x) = x^x$ egyenlőség mindkét oldalának logaritmusát: $\log f(x) = x \log x$. Deriváljuk mindkét oldalt, és a bal oldalon használjuk az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tételt:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \log x + x \cdot \frac{1}{x}.$$

A kapott egyenlőségből $f'(x)$-et kifejezve

$$f'(x) = f(x) \cdot (\log x + 1) = x^x \cdot (\log x + 1).$$

egyezésben a korábban kapott eredménnyel.

Bár a logaritmikus deriválás mindig megkerülhető, a módszer azonban sokszor gyorsabban vezet célhoz. Különösen igaz ez olyan esetekben, ahol olyan törtkifejezést kell deriválni, amelyben a számláló és a nevező is soktényezős szorzat. Most ilyen esetre mutatunk példát.

7.6. Példa: Legyen $f(x) := \frac{x^p(ax+b)^q}{(cx+d)^r}$ (a lehető legbővebb tartományon értelmezve). Számítsuk ki f deriváltját.

Megoldás. Vegyük a definiáló egyenlőség mindkét oldalának logaritmusát:

$$\log f(x) = p \log x + q \log(ax+b) - r \log(cx+d).$$

Mindkét oldalt deriválva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{p}{x} + \frac{aq}{ax+b} - \frac{cr}{cx+d},$$

ahonnan $f'(x)$ már kifejezhető:

$$f'(x) = \frac{x^p(ax+b)^q}{(cx+d)^r} \cdot \left(\frac{p}{x} + \frac{aq}{ax+b} - \frac{cr}{cx+d} \right).$$

7.4. Implicit függvények deriválása

Végül röviden vázoljuk az *implicit módon adott függvények* deriválásának technikáját. Pontos tételek kimondása helyett a problémát két példán keresztül mutatjuk be.

7.7. Példa: Tegyük fel, hogy egy $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto y(x)$ típusú (alkalmas intervallumon értelmezett) függvény explicit formula helyett az alábbi egyenlőséggel van megadva:

$$(1+x) \cdot y^{3/2} = 3.$$

Keressük az y függvény deriváltját egy x helyen.

Megoldás. A természetes megközelítés, hogy a definiáló egyenlőségből y-t kifejezzük x függvényeként:

$$y = \left(\frac{3}{1+x}\right)^{2/3} = 3^{2/3} \cdot (1+x)^{-2/3},$$

majd deriválunk:

$$y' = -3^{2/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+x)^{-5/3}.$$

Azonban ez az út nem mindig járható, mert sok esetben y-t nem is lehet explicit formában kifejezni.

Ehelyett deriváljuk közvetlenül a definiáló egyenlőség mindkét oldalát. A bal oldalon alkalmazzuk az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tételt:

$$y^{3/2} + (1+x) \cdot \frac{3}{2} \cdot y^{1/2} \cdot y' = 0.$$

Ebből y' kifejezhető:

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot y.$$

y helyére akár a korábban kapott kifejezést is beírhatjuk:

$$y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 3^{2/3} \cdot (1+x)^{-2/3} = -\frac{2}{3} \cdot 3^{2/3} \cdot (1+x)^{-5/3},$$

egyezésben az előző eredménnyel.

A bemutatott *implicit differenciálási módszer* különösen akkor előnyös, ha a deriváltat csak néhány, adott (x,y) koordinátákkal jellemzett pontban kell kiszámítani. Ezt illusztrálja a következő példa.

7.8. Példa: Tekintsük azt az (alkalmas intervallumon definiált) $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto y(x)$ típusú függvényt, amelyet az alábbi egyenlet határoz meg:

$$x + y = y^7 - x^3 + 2y^3.$$

Számítsuk ki a deriváltat az $x = 1$, $y = 1$ koordinátájú helyen (amely kielégíti az egyenletet, azaz az $(1,1)$ pont rajta van az y függvény grafikonján).

Megoldás. Most y-t nem tudjuk explicit formában kifejezni x függvényeként (ehhez 7-edfokú egyenletet kellene megoldani). Deriváljuk az egyenlőség mindkét oldalát, a bal oldalon alkalmazva az összetett függvény deriválásáról szóló 7.4. Tételt:

$$1 + y' = 7y^6y' - 3x^2 + 6y^2y'$$

Innen y' kifejezhető. A konkrét $(x,y) = (1,1)$ helyen $y'(1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

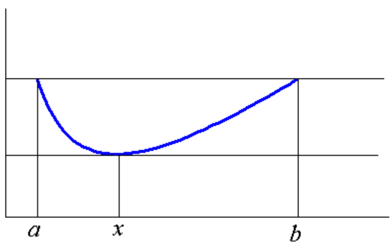
7.5. A differenciálszámítás középértéktételei és alkalmazásai

Ebben a szakaszban olyan jellegű tételeket mondunk ki és bizonyítunk be, amelyek intervallumon értelmezett függvényeknek az intervallumra vonatkoztatott különbségi hányadosai és valamely „közbülső” helyen vett differenciálhányadosai közötti kapcsolatra utalnak.

E szakaszban mindvégig feltesszük, hogy az itt szereplő függvények folytonosak egy korlátos és zárt $[a,b]$ intervallumon, a nyílt (a,b) intervallum pontjaiban pedig differenciálhatók. A végpontokban való egyoldali differenciálhatóságot nem szükséges feltenni.

7.7. Tétel: (Rolle tétele). Ha $f(a) = f(b)$, akkor van (legalább egy) olyan $x \in (a,b)$ pont, hogy $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. Ha f konstans függvény, akkor deriváltja azonosan 0, így a tétel állítása nyilvánvalóan igaz. Ha f nem konstans függvény, akkor Weierstrass tétele (6.1. Tétel) miatt $[a,b]$-n van maximumhelye és minimumhelye. Ezek közül legalább egyik a nyílt (a,b) intervallumba esik, azaz nem lehet mindkettő az intervallum végpontja (mert akkor f konstans volna). Jelölje x a nyílt (a,b) intervallumba eső maximum- vagy minimumhelyet. f deriváltja itt szükségképp zérus (7.2. Tétel).



7.2. ábra. *A Rolle-tétel szemléltetése*

A tétel geometriailag nagyon szemléletes. Azt fejezi ki, hogy az f függvény grafikonjának $[a,b]$ intervallumra vonatkozó (vízszintes!) szelője önmagával párhuzamosan elmozgatható oly módon, hogy az elmozgatott egyenes érinti a grafikont valamilyen közbülső helyen.

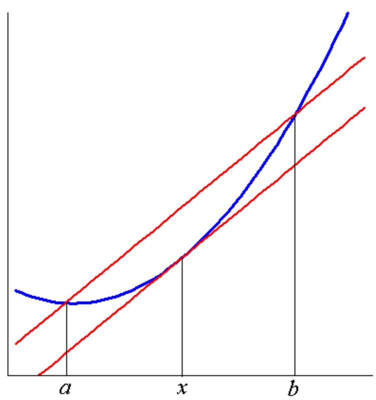
Rolle tétele általánosítható nem feltétlen vízszintes szelővel rendelkező függvényekre.

7.8. Tétel: (Lagrange-féle középértéktétel). Létezik (legalább egy) olyan $x \in (a,b)$ pont, hogy

$$f'x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Legyen $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Ez az F függvény nyilván folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n, továbbá könnyen ellenőrizhetően $F(a) = F(b) = f(a)$. F-re alkalmazva Rolle tételét (7.7. Tétel), kapjuk, hogy alkalmas $x \in (a,b)$ helyen $F'(x) = 0$. Világos, hogy $F'(x) := f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ezért $f'x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ahogy azt állítottuk.

A Lagrange-középértéktétel szemléletes jelentése hasonló a Rolle tételéhez. Azt fejezi ki, hogy az f függvény grafikonjának $[a,b]$ intervallumra vonatkozó szelője önmagával párhuzamosan elmozgatható oly módon, hogy az elmozgatott egyenes érinti a grafikont valamilyen közbenső helyen. Más megfogalmazásban: az $[a,b]$ intervallumra vonatkozó különbségi hányados *pontosan* egyenlő a függvény valamely közbülső helyen vett differenciálhányadosával.



7.3. ábra. *A Lagrange-középértéktétel szemléltetése*

A tétel tovább általánosítható.

7.9. Tétel: (Cauchy-féle középértéktétel). Legyen f és g a szakasz elején megfogalmazott tulajdonságú függvény. Tegyük fel, hogy $g'(x) \neq 0$ semmilyen $x \in (a,b)$ esetén. Akkor létezik (legalább egy) olyan $x \in (a,b)$ pont, hogy

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás technikája hasonló az előző tétel bizonyításához. Legyen $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$. Az F függvény nyilván folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n, továbbá $F(a) = F(b) = f(a)$. F-re alkalmazva Rolle tételét (7.7. Tétel), kapjuk, hogy alkalmas $x \in (a,b)$ helyen $F'(x) = 0$. Mivel

$$F'(x) := f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x),$$

ezért

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

ahogy állítottuk.

A következőkben a fenti középértéktételek néhány közvetlen alkalmazását mutatjuk be. Első példánk előtt emlékeztetünk arra, hogy a konstans függvény deriváltja azonosan 0 (7.2. Példa). Most már meg tudjuk mutatni, hogy ennek megfordítása is igaz.

7.13. Állítás: . Ha az f függvény deriváltja azonosan 0 az (a,b) intervallumon, akkor f szükségképp azonosan konstans (a,b)-n.

Bizonyítás. Legyen $x \in (a,b)$ tetszőleges. Alkalmazzuk a Lagrange-középértéktételt az $[a,x]$ intervallumra. Eszerint alkalmas $t \in (a,x)$-re $f'(t) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ teljesül. Ámde $f'(t) = 0$, ezért $f(x) = f(a)$. Tehát f valóban azonosan konstans (a,b)-n (mindenütt az $f(a)$ értéket veszi fel).

Következő példánk a Banach-fixponttétellel (6.3. Tétel) kapcsolatos. Emlékeztetünk rá, hogy a fixpont létezésének feltételei között az szerepelt, hogy a szóban forgó f függvény kontrakció legyen, azaz kielégítse a Lipschitz-feltételt valamely 1-nél kisebb Lipschitz-állandóval. A gyakorlatban ezt eléggé nehézkes ellenőrizni. Sokkal egyszerűbb a helyzet, ha f differenciálható is.

7.14. Állítás: . Ha az f' deriváltfüggvény folytonos a (korlátos és zárt) $[a,b]$ intervallumon és itt $|f'| < 1$ teljesül, akkor f kontrakció $[a,b]$-n.

Bizonyítás. Jelölje q az $|f'|$ függvény $[a,b]$-n vett maximumát (ez Weierstrass tétele értelmében létezik, ld. a 6.1. Tételt). Ekkor nyilván $q < 1$. Legyenek $x_1, x_2 \in [a,b]$ tetszőleges pontok. Az $[x_1, x_2]$ intervallumra a Lagrange-középértéktételt felhasználva kapjuk, hogy van olyan $x \in (x_1, x_2)$ pont, hogy

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(x)| \cdot |x_1 - x_2| \le q \cdot |x_1 - x_2|,$$

azaz f valóban kontrakció $[a,b]$-n.

Most megmutatjuk, hogy egy függvény monoton növekedése illetve fogyása eldönthető pusztán a deriváltfüggvény előjelének ismeretében:

7.15. Állítás: . A differenciálható f függvény pontosan akkor monoton növő (fogyó) az (a,b) intervallumon, ha $f' \ge 0$ (a,b)-n (ill. $f' \le 0$ (a,b)-n).

Bizonyítás. Csak a monoton növekedés esetével foglalkozunk, a másik eset hasonlóan bizonyítható. Tegyük fel, hogy f monoton növő (a,b)-n, és legyenek $a < x_0 < x < b$ tetszőleges számok. A monoton növekedés miatt $f(x_0) \le f(x)$, következésképpen $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$. Ebből az $x \to x_0$ határátmenetet véve kapjuk az $f'(x_0) \ge 0$ egyenlőtéenséget. Ez igaz minden $a < x_0 < b$ esetén, azaz $f' \ge 0$ (a,b)-n.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f' \ge 0$ (a,b)-n, és legyenek $a < x_1 < x_2 < b$ tetszőleges pontok. A Lagrange-középértéktételt alkalmazva az $[x_1, x_2]$ intervallumra kapjuk, hogy alkalmas $x \in (x_1, x_2)$ esetén $f'(x) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$. Ámde $f'(x) \ge 0$, ezért $f(x_2) - f(x_1) \ge 0$, azaz $f(x_1) \le f(x_2)$. Ez igaz minden $a < x_1 < x_2 < b$ esetén, tehát f monoton nő (a,b)-n.

Ez utóbbi állítás a valós függvények menetének vizsgálatakor játszik fontos szerepet. Egyúttal egy elegendő feltételt is kapunk a lokális szélsőértékek létezésére (vö. a 7.2. Tétel utáni megjegyzéssel, amely szerint abból, hogy valamely pontban a függvény deriváltja 0, még nem következik, hogy ott szükségképp szélsőérték is van).

7.1. Következmény: . Ha valamely $x_0 \in (a,b)$ helyen $f'(x_0) = 0$ és x_0-ban a deriváltfüggvény *előjelet vált*, azaz
(a) egy $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumon $f' \ge 0$ és egy $(x_0, x_0 + \epsilon)$ intervallumon pedig $f' \le 0$,
vagy
(b) egy $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumon $f' \le 0$, egy $(x_0, x_0 + \epsilon)$ intervallumon pedig $f' \ge 0$
(alkalmas δ, ϵ pozitív számok mellett), akkor f-nek x_0-ban biztosan lokális szélsőértéke van, éspedig az (a) esetben lokális maximuma, a (b) esetben pedig lokális minimuma.

Bizonyítás. Az (a) esetben a 7.15. Állítás értelmében f monoton nő az $(x_0 - \delta, x_0)$

intervallumon és monoton fogy az $(x_0,x_0+\epsilon)$ intervallumon, x_0-ban tehát lokális maximuma van. Hasonlóan, a (b) esetben f monoton fogy az $(x_0-\delta,x_0)$ intervallumon és monoton nő az $(x_0,x_0+\epsilon)$ intervallumon, x_0-ban tehát lokális minimuma van.

A következő szakaszban a szélsőérték létezésének eldöntésére még egyszerűbb feltételt fogalmazunk meg.

Ne gondoljuk, hogy egy függvény lokális szélsőértéke mindig ilyen tulajdonságú, azaz monoton szakaszok „elválasztópontja" (bár a legtöbb gyakorlati esetben ez igaz). Ellenpéldaként tekintsük pl. az alábbi formulával értelmezett függvényt:

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x}, & \text{ha } x \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény mindenütt differenciálható (a 0-ban is! - bizonyítsuk ezt be!). A függvénynek a 0-ban nyilván minimuma van, mert $f(0) = 0$ és minden x-re $f(x) \geq 0$. Ugyanakkor a 0-nak bármilyen kis környezetében végtelen sok hullámot vet, azaz nincs olyan bal- ill. jobb oldali környezete a 0-nak, ahol f monoton volna.

Végül a középértéktételek egy határértékszámítási alkalmazását mutatjuk be. Ennek alapja az alábbi tétel.

7.10. Tétel: (L'Hospital-szabály). Legyenek az f és g függvények differenciálhatók az $x_0 \in \mathbf{R}$ pont egy környezetében. Ha
(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$ és
(b) a $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik,
akkor a $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték is létezik, és

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bizonyítás. A Cauchy-középértéktétel (7.9. Tétel) szerint tetszőleges $x < x_0$-hoz van oly $t \in (x,x_0)$, hogy $\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ (itt felhasználtuk az (a) feltételt). Ha most $x \to x_0$, akkor nyilván $t \to x_0$ is teljesül. A bal oldalnak a (b) feltétel szerint létezik határértéke, ezért a jobb oldalnak is létezik, és ezek egyenlők.

A tétel az ún. „0/0" típusú határértékek kiszámítására ad lehetőséget.

A módszer a gyakorlatban akkor használható, ha az új $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték kiszámítása egyszerűbb, mint az eredeti határértéké. Előfordulhat, hogy ehhez a fenti tételt többször is kell alkalmazni egymás után.

7.9. Példa: Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\operatorname{arctg} x}$$

határértéket (ha létezik egyáltalán).

Megoldás. Könnyű látni, hogy a L'Hospital-szabály feltételei teljesülnek a 0 pont körül. A L'Hospital-szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{\operatorname{arctg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x^2}} = 1,$$

mivel a számláló és nevező deriváltjai a 0-ban folytonos függvények, így hányadosuk határértéke egyszerűen a helyettesítési értékük hányadosa (ez értelmezve van, mert a nevező 0-ban vett deriváltja 0-tól különbözik).

7.10. Példa: Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

határértéket (ha létezik egyáltalán).

Megoldás. A L'Hospital-szabály feltételei ismét teljesülnek a 0 körül. Innen kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sh}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} = -\left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{2\operatorname{ch} x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right).$$

A jobb oldali első határérték a kifejezés helyettesítési értéke, azaz $\frac{1}{2}$. A második határértékre pedig ismét alkalmazható a L'Hospital-szabály, ahonnan

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\operatorname{ch} x} = -\frac{1}{2}.$$

Gyakori hiba, hogy nem ellenőrizzük a L'Hospital-szabály feltételeinek meglétét, mindenekelőtt azt, hogy vajon teljesül-e, hogy $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Ennek elmulasztása természetesen hibás eredményekhez vezethet.

A L'Hospital-szabály egy jól használható, „mechanikus” eszköz bizonyos határértékek kiszámítására. Használatának veszélye éppen ebben van. Előfordulhat ugyanis, hogy ha az adódó egyszerűsítési lehetőségeket nem használjuk ki, akkor a L'Hospital-szabály az eredetinél bonyolultabb számolásokhoz vezet. Ilyen egyszerűsítési lehetőség az előző példában az $\frac{1}{2\text{ch}\, x}$ tényező kiemelése, melynek 0-beli határértéke egyszerűen a helyettesítési érték. Még világosabban látható ez a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{1000} x}{x^{1000}}$ határérték példáján. A mechanikus hozzáállás szerint ennek kiszámítása a L'Hospital-szabály 1000-szeri alkalmazásával kellene, hogy történjék, ha nem vesszük észre, hogy ez a határérték a már ismert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ határérték 1000-ik hatványa, azaz 1.

A tételt a „$0/0$” típusú határértékekre mondtuk ki. Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy hasonló L'Hospital-szabály alkalmazható az ún. „$\frac{+\infty}{+\infty}$” típusú határértékekre is, amikor tehát az $f(x_0) = g(x_0) = 0$ feltétel helyett a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ egyenlőséget tesszük fel.

7.6. Magasabbrendű deriváltak és szélsőértékfeladatok

Legyen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy intervallumon differenciálható függvény.

Másodrendű derivált:

Az f' deriváltfüggvény valamely x_0 pontbeli deriváltját az eredeti f függvény x_0-beli *másodrendű differenciálhányadosának* (*másodrendű deriváltjának*) nevezzük, és az $f''(x_0)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ szimbólumok valamelyikével jelöljük. Hasonlóan, az f' deriváltfüggvény deriváltfüggvényét az eredeti f függvény *másodrendű deriváltfüggvényének* nevezzük. Jele f'' vagy $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Hasonlóan definiáljuk a harmadrendű, negyedrendű stb. deriváltakat is. A k-adrendű deriváltfüggvény jele $f^{(k)}$ vagy $\frac{d^k f}{dx^k}$. Megállapodunk abban is, hogy a 0-rendű derivált magát az eredeti f függvényt jelenti. Azt mondjuk, hogy az f függvény *k-szor folytonosan differenciálható egy I intervallumon*, ha az $f^{(k)}$ deriváltfüggvény létezik és folytonos I-n.

Az előző szakasz eredményeiből most már könnyen levezethető a lokális szélsőértékek létezésének egy újabb, elegendő feltétele.

7.11. Tétel: . Tegyük fel, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény kétszer folytonosan differenciálható az $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében és

$$f'(x_0) = 0, \qquad \text{de} \qquad f''(x_0) \neq 0.$$

Akkor f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van, mégpedig lokális minimuma, ha $f''(x_0) > 0$, ill. lokális maximuma, ha $f''(x_0) < 0$.

Bizonyítás. Mivel f'' folytonos x_0-ban és $f''(x_0) \neq 0$, azért f''-nak egy $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ alakú környezetére is igaz, hogy ott $f'' \neq 0$ (valamilyen $\delta > 0$ szám mellett). Legyen itt pl. $f'' > 0$. Ekkor f' monoton nő ebben az intervallumban (7.15. Állítás). Mivel pedig $f'(x_0) = 0$, ezért $f' \leq 0$ az $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumban és $f' \geq 0$ az $(x_0, x_0 + \delta)$ intervallumban, azaz f' előjelet vált x_0-ban. Így f-nek valóban lokális minimuma van x_0-ban (7.1. Következmény). A lokális maximumra vonatkozó állítás ugyanígy látható be.

Az eddigiek alapján az egyváltozós valós függvények lokális szélsőértékhelyeinek meghatározása az alábbi algoritmussal történhet. Legyen az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, és kétszer folytonosan differenciálható az (a,b) intervallumon.

- 1. lépés: Kiszámítjuk f deriváltfüggvényét.
- 2. lépés: Meghatározzuk a deriváltfüggvény zérushelyeit. Ezek a lehetséges szélsőértékhelyek (az ún. *stacionárius pontok*).

- 3. lépés: Minden stacionárius pontban kiszámítjuk az f függvény másodrendű deriváltját. Ha ez pozitív (negatív), akkor a függvénynek itt lokális minimuma (maximuma) van.

Ha egy stacionárius pontban a másodrendű derivált zérus, akkor eddigi eszközeinkkel nem tudjuk eldönteni, hogy van-e itt lokális szélsőérték, és ha igen, milyen típusú. Ez (a legtöbb esetben) a még magasabb rendű deriváltak vizsgálatával határozható meg. Ennek részleteivel azonban nem foglalkozunk, mert a gyakorlati esetek túlnyomó többségében az eddigi tételek használata elegendő.

Hangsúlyozzuk, hogy ez az algoritmus a *lokális* szélsőértékhelyek feltérképezésére alkalmas, és csak *kétszer folytonosan differenciálható* függvények esetén működik jól. Az algoritmus nem alkalmas sem olyan lokális szélsőértékek megkeresésére, ahol a függvény nem differenciálható, sem pedig az *abszolút szélsőértékhelyek* megkeresésére, ha azok az értelmezési tartomány valamelyik végpontjában helyezkednek el.

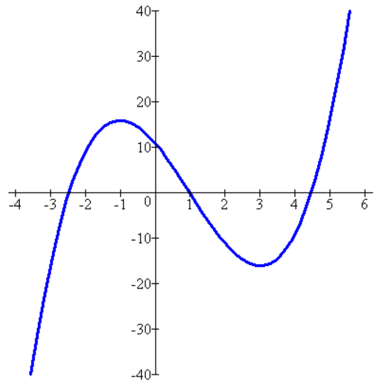
Az algoritmust ezért néha célszerű kiegészíteni az alábbi lépéssel:

- 4. lépés: Kiszámítjuk az $f(a)$ és $f(b)$ függvényértékeket, és ellenőrizzük, hogy ezek szélsőértékhelyek-e, azaz az itt felvett valamelyik függvényérték kisebb-e az előzőekben meghatározott lokális minimumértékek legkisebbikénél is, ill. nagyobb-e a a lokális maximumértékek legnagyobbikánál is.

Ez a lépés értelemszerűen elmarad, ha pl. f egy nyílt intervallumon vagy az egész $\mathbf{R}$-en értelmezett, vagy ha a szélsőértékfeladat tartalmából előre tudjuk, hogy az értelmezési tartomány határán nem lehet szélsőérték, ill. annak nincs gyakorlati jelentése.

7.11. Példa: Hol vannak lokális szélsőértékhelyei az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ függvénynek?

Megoldás. A függvény nyilván (akárhányszor) deriválható, deriváltja: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Ennek zérushelyei: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Lokális szélsőérték tehát csak ezekben a pontokban lehet. A másodrendű derivált: $f''(x) = 6x - 6$, innen $f''(x_1) > 0$, és $f''(x_2) < 0$. Ezért az $x_1 = 3$ helyen a függvénynek lokális minimuma, az $x_2 = -1$ helyen pedig lokális maximuma van (ld. az ábrát).



7.4. ábra. *Az* $x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 11$ *harmadfokú függvény grafikonja*

7.12. Példa: Folyóparti, 3200 m^2 területű téglalap alakú telket szeretnénk venni, az egyik oldal teljes egészében a parton halad. Hogyan válasszuk meg a téglalap méreteit, hogy a telek bekerítésének költsége (a parti oldal mentén nincs kerítés!) a lehető legkisebb legyen?

Megoldás. Jelölje x a parti oldal hosszát, akkor rá merőleges oldal hossza $\frac{3200}{x}$. Így a kerítés összhossza $L(x) = x + \frac{6400}{x}$, és ezt kell minimalizálni x függvényében. Az L függvény a $(0, +\infty)$ intervallumban értelmezett. Deriváltja: $L'(x) = 1 - \frac{6400}{x^2}$, amelynek zérushelyei $x = 80$ és $x = -80$. Ez utóbbit eleve elvetjük, mert nem tartozik L értelmezési tartományába (a telek oldalhosszúsága nem lehet negatív). Az $x = 80$ helyen pedig L-nek lokális minimuma van, mert itt a másodrendű derivált $L''(x) = \frac{2 \cdot 6400}{x^3}$. Ez a lokális minimumhely egyúttal *abszolút* minimumhely is, mert az értelmezési tartomány (azaz a $(0, +\infty)$ intervallum) bal végpontjában $\lim_{x \to +0} L(x) = +\infty$, és ugyanakkor $\lim_{x \to +\infty} L(x) = +\infty$ is teljesül. Az optimális alakú telek oldalhosszúságai tehát 80 és 40 m; a hosszabbik oldal halad a part mentén.

7.7. Newton–módszer nemlineáris egyenletek megoldására

Legyen az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek, így Bolzano tétele értelmében f-nek biztosan van zérushelye az (a,b) intervallumban.

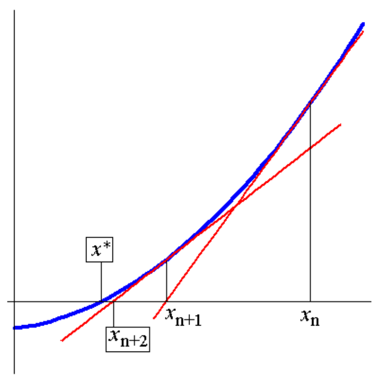
Tekintsük tehát az

$$f(x) = 0$$

egyenletet. Ha f-et egy bonyolult képlet definiálja, akkor ennek egzakt megoldására általában nincs lehetőség. Közelítő megoldása azonban sokszor lehetséges. Egy ilyen közelítő megoldási módszer a *Newton-módszer*, amely (eltérően az algebrai egyenletek megoldóképleteitől) a megoldást nem véges számú művelet elvégzésével, hanem egy *konvergens sorozat határértékeként* állítja elő.

Tegyük fel, hogy f differenciálható az (a,b) intervallumon, és itt f-nek csak egy zérushelye van. Jelölje x^* ezt a zérushelyet.

A Newton-módszer alapötlete, hogy ha már ismerjük az x^* zérushelynek egy x_n közelítését, akkor rendszerint jobb közelítéshez jutunk, ha x_n körül az f függvény grafikonját annak x_n-beli érintőjével helyettesítve, meghatározzuk az érintőegyenes zérushelyét. Az eljárást aztán tetszés szerinti lépésszámban megismételhetjük. Így, kiindulva valamilyen $x_1 \in (a,b)$ kezdeti közelítésből, egy (x_n) sorozathoz jutunk, melyről azt várjuk, hogy (bizonyos feltételek teljesülése esetén) az x^* megoldáshoz konvergál.



7.5. ábra. *A Newton-módszer működése*

Mivel az x_n pontbeli érintő egyenlete: $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$, az érintő zérushelye ott van, ahol $f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0$, azaz $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Jelölje x_{n+1} ezt a számot, ez lesz tehát a megoldás új közelítése.

A következő iterációs sorozatot nyertük. Kiindulva egy $x_1 \in (a,b)$

kezdeti közelítésből, legyenek

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n = 1,2,3,...).$$

Igazolható, hogy ha f-nek egyetlenegy zérushelye van (a,b)-ben, továbbá f *kétszer* folytonosan deriválható az $[a,b]$ intervallumon és $f'(x^*) \neq 0$, akkor minden „elég jó” kezdeti $x_1 \in (a,b)$ közelítésből kiindulva, a fenti rekurzióval definiált sorozat az x^* megoldáshoz tart. A konvergencia sebessége általában igen nagy, így elég csak néhány iterációs lépést végrehajtani ahhoz, hogy elfogadható pontosságú közelítést nyerjünk a megoldásra. Az „elég jó” kitétel azt jelenti, hogy létezik olyan (közelebbről sajnos csak nehezen meghatározható) $\delta > 0$ szám úgy, hogy minden, x^*-hoz δ-nál közelebb eső kezdeti közelítés esetén a kapott iterációs sorozat biztosan x^*-hoz konvergál. Más kezdeti közelítés választása esetén előfordulhat, hogy az iteráció divergál, vagy a közelítések egy idő után kiesnek az $[a,b]$ intervallumból.

A szóban forgó eljárást az alábbi példán mutatjuk be.

7.13. Példa: Legyen $f(x) := x^2 - A$, ahol A rögzített pozitív szám. Ekkor az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen (pozitív) megoldása: $x = \sqrt{A}$. Kiindulva egy tetszőleges $x_1 > 0$ kezdeti közelítésből (pl. $x_1 := A$), képezzük az alábbi iterációs sorozatot:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{A}{x_n} \right) \qquad (n = 1,2,...).$$

Az így definiált sorozatra $x_n \to \sqrt{A}$ teljesül (bizonyítsuk ezt be!). A konvergencia nagyon gyors, az értékes jegyek száma minden iterációs lépésben kb. megkétszereződik. A módszer érdekessége, hogy a $\sqrt{A}$ szám fenti közelítésére pusztán az alapműveleteket használja fel.
Konkrétan, legyen pl. $A := 2$. Kiindulva az $x_1 := 2$ kezdeti közelítésből, az iterációs sorozat első néhány tagja (4 tizedesjegy pontossággal): 2,0000; 1,5000; 1,4166; 1,4142; 1,4142; ... , és már a 3. iterált is 4 tizedesjegy pontossággal közelíti a pontos $\sqrt{2}$ megoldást.

A példa kézenfekvő módon általánosítható magasabb kitevőjű gyökök számítására is. Legyen $m \geq 2$ egész, és $f(x) := x^m - A$, ahol A rögzített pozitív szám. Ekkor az $f(x) = 0$ egyenlet egyetlen (pozitív) megoldása $x = \sqrt[m]{A}$. Kiindulva egy tetszőleges $x_1 > 0$ kezdeti közelítésből (pl. $x_1 := A$), a

Newton-módszer az

$$x_{n+1} := x_n - \frac{x_n^m - A}{m x_n^{m-1}} = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{A}{x_n^{m-1}} \qquad (n = 1,2,\ldots).$$

iterációs sorozatot szolgáltatja, amelyre $x_n \to \sqrt[m]{A}$ teljesül.

7.8. Feladatok

1. Deriváljuk az alábbi függvényeket:
(a)

$$f(x) := \frac{\sin x^2}{\cos^2 x},$$

(b)

$$f(x) := e^{e^{\sqrt{1+x^2}}},$$

(c)

$$f(x) := (1 + (ax)^y)^{1/y},$$

(ahol $y > 0$ adott paraméter),
(d)

$$f(x) := \mathrm{arctg}\sqrt{1 + e^x},$$

(e)

$$f(x) := \log(\sin^2 x^3),$$

(f)

$$x^2 + (f(x))^3 = x \cdot f(x) + 1,$$

az $x = 0$ helyen (implicit függvény).

2. Mi az alábbi kifejezések határértéke $x \to 0$ esetén?
(a)

$$\frac{\log\sqrt{1 + x^2}}{\sin^2 x},$$

(b)

$$\frac{\log(1 + x^4)}{\log(1 - x^4)},$$

(c)

$$\frac{\sin^3 x}{x - \sin x},$$

(d)

$$\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-5x}}{\sin x},$$

(e)

$$\frac{e^{2x^2}-e^{3x^2}}{x^2}.$$

3. Legyenek $f,g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ differenciálható függvények. Igazoljuk az elaszticitásra vonatkozó alábbi összefüggéseket:

(a)

$$E(f+g)(x) = \frac{f(x)\cdot Ef(x)+g(x)\cdot Eg(x)}{f(x)+g(x)},$$

(b)

$$E(fg)(x) = Ef(x)+Eg(x).$$

4. Részlet a Magazine for the Stupid 2005.április 1-i számából.
"Szenzációs hír járta be a minap a tudományos világot. Egy ifjú tudós, Bob Butthead szellemesen elegáns ellenpéldát konstruált a régóta igaznak hitt ún. 'L'Hospital-szabályra'. 'Nem értem ezeket a régivágású matematikusokat - nyilatkozta lapunknak Bob -, az ellenpélda olyan egyszerű, hogy egy átlagos elsőéves hallgató is azonnal megérti, minden komolyabb előképzettség és tudományos fokozat nélkül. Tanult kollégáimnak régesrég rá kellett volna jönniük, hogy e tétel körül valami nem stimmel. Úgy látszik, a kritikátlan tekintélyelv ebben az egzaktnak hitt tudományban is kezd elharapózni.'
Lapunknak sikerült megszerezni az elhíresült ellenpéldát.
Feladat: Számítsuk ki a $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{-2x}+1}$ határértéket!
Egyrészt nyilván:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{-2x}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(e^{x}-e^{-x})}{e^{-x}(e^{-x}+e^{x})} = \lim_{x\to 0}(e^{2x}\cdot \operatorname{th} x) = 0.$$

Másrészt a L'Hospital-szabály szerint:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^{-2x}+1} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{-2e^{-2x}} = -1,$$

és ez ellentmond az előző eredménynek.
Az interjúra reagálva Dr. O. K. Clever, a linkostown-i egyetem professzora

kijelentette: 'Bob? Az egy ökör. Már sajnálom, hogy nem rúgtam ki, amikor analízisből vizsgázott nálam.'"

Kinek volt igaza és miért?

5. Csingacsguk delavár főnök nősül, ezért új sátrat (egyenes körkúp) kell készítenie. Összegyűjt 10 m^2-nyi anyagot, és konzultál a delavárok nagy varázslójával, hogyan kell ebből a lehető legnagyobb térfogatú sátrat csinálni. Miután sikeresen elkészül, ünnepélyes sátoravatóra hívja legjobb barátját, Sólyomszemet. Sólyomszem 183 cm magas. Ki tud-e egyenesedni a sátorban?

6. Három vadnyugati városka, Gunville, Deathtown és Cowboy City (a továbbiakban G, D, C) összefognak, és közös erővel közös kocsmát akarnak nyitni a prérin, valahol a három városka által meghatározott háromszög belsejében. A kocsmához mindegyik városból utat is építenek. Hol legyen az ivó, hogy a beruházás összköltsége minimális legyen? Távolságok: G és D közt 10 mérföld, G és C valamint D és C közt egyaránt 20 mérföld.
(Az utak építési költsége egyenesen arányos a hosszukkal.)

7. Micimackó mézesbödönje elveszett. Róbert Gida szerez 4 dm^2-nyi bádoglemezt, és nekiáll, hogy ebből új bödönt (hengert fenékkel, fedőlap nélkül) készítsen. De aztán jó nagy legyen! - kéri Micimackó. Nyugodt lehetsz - válaszolja Róbert Gida - a lehető legnagyobbat fogom megcsinálni. Literes lesz vajon? kérdi Micimackó mohón.
Mit válaszolhatott Róbert Gida, és miért?
(A kiszabási veszteségtől eltekintünk: feltesszük, hogy Róbert Gida olyan apró darabokból rakta össze a bödönt, hogy nincs hulladék.)

8. Furkó Ferkó kft-jével új vállalkozásba kezd: konzervdobozokat gyárt. Fél literes (zárható henger alakú) konzervdobozok hatalmas mennyiségét kell leszállítania. De mégis, mekkorák legyenek? - kérdi a műszaki igazgató. - Most mondtam, fél literesek! - Figyelj már, te fafejű. Ha túl laposak, akkor azért kell hozzá sok anyag. Ha túl magasak, akkor meg azért. Ha rosszul választod meg az arányokat, inged-gatyád rámegy az anyagköltségre! Ferkónak azóta nincs egy nyugodt perce. Segítsünk neki! Mi az átmérő és a magasság aránya az optimális alakú doboz esetén?

9. Tervezzünk egy körhenger alakú, alul és felül egyaránt zárt 1 m^3-es víztartályt a lehető legkevesebb felületű lemez felhasználásával!

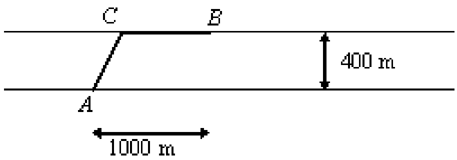
10. A törpék egy hatalmas díszdobozzal akarják meglepni Hófehérkét a születésnapján. Aranyszalagjuk már van, mellyel majd két oldalán átkötik a dobozt. A szalag hossza épp 3 m, amit Kuka hebehurgya módon már elvágott egy 1 és egy 2 méteres darabra. Mekkorák legyenek a doboz méretei, hogy térfogata maximális legyen?

11. Épül a Kamatláb Bank Rt. legújabb, kacsalábon forgó palotája. A kacsaláb tartószerkezeténél tartanak éppen, amikor elfogy a gerenda. Kerítenek egy szép, egészséges, pontosan félkör keresztmetszetű 20 cm sugarú rönköt. Hogyan kell ebből kifaragni a legerősebb gerendát? (A gerenda téglalap keresztmetszetű, és annál erősebb, minél nagyobb a keresztmetszetének területe.)

12. Gazdagné Zsugory Eufrozina legújabb ötlete, hogy egy négyzet alapú, 32 köbméteres (egyenletes mélységű) medencét építtet a kertjébe. A medence oldalfalait és alját méregdrága csempével akarja burkoltatni, amikor rádöbben, hogy fogytán a pénze. Tervéről nem mond le, de szeretné a lehető legkevesebb csempéből megúszni a burkolást. Hogyan kell ehhez méretezni a medencét?

13. Restaurálják a Szent Kleofás neoromán kápolnát. A kápolnaablakot (téglalap, felső felén egy félkörrel kiegészítve) teljesen újjá kell építeni. Korabeli krónikákból ismert, hogy az ablak felülete épp 3 m^2, és teljes kerülete aranyszegélyes. A szponzor azonban csak akkor hajlandó finanszírozni a munkálatokat, ha ez a kerület legfeljebb 7 méter. Lehet-e ennek megfelelően méretezni az ablakot? Ha igen, hogyan?

14. A bergengóciai Styx folyó két partján levő A és B pontok közt kábelt kell lefektetni. A kábelfektetés költsége szárazföldön 100 peták méterenként, a folyó alatt 200 peták méterenként. Hogyan vezessük a kábelt, hogy a beruházás költsége minimális legyen?



7.6. ábra. *Kábelfektetési probléma vázlata*

Megoldások

1. (*a*)

$$f'(x) = \frac{(\cos x^2)\cdot 2x\cos^2 x + (\sin x^2)\cdot 2\cos x\sin x}{\cos^4 x} =$$
$$= 2\frac{(\cos x^2)\cdot x\cos x + (\sin x^2)\cdot \sin x}{\cos^3 x}.$$

(*b*)

$$f'(x) = e^{e^{\sqrt{1+x^2}}}\cdot e^{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x.$$

(*c*)

$$f'(x) = \frac{1}{y}(1+(ax)^y)^{\frac{1}{y}-1}\cdot y(ax)^{y-1}\cdot a = a^y\cdot(1+(ax)^y)^{\frac{1-y}{y}}\cdot x^{y-1}.$$

(*d*)

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{(2+e^x)\sqrt{1+e^x}}.$$

(*e*)

$$f'(x) = \frac{2\sin x^3\cos x^3\cdot 3x^2}{\sin^2 x^3} = \frac{6x^2\cdot\cos x^3}{\sin x^3}.$$

(*f*)

$$2x + 3f(x)^2 f'(x) = f(x) + x\cdot f'(x), \quad \text{innen} \quad f'(x) = \frac{f(x)-2x}{3f(x)^2 - x}.$$

Az $x = 0$ helyen nyilván $f(x) = 1$, ezért tehát $f'(0) = \frac{1}{3}$.

2. (*a*) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\sqrt{1+x^2}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{2\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{(1+x^2) \cdot \cos x} = \frac{1}{2}.$$

(b) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x^4)}{\log(1-x^4)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4x^3}{1+x^4}}{\frac{-4x^3}{1-x^4}} = -1.$$

(c) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \sin^2 x \cos x}{1 - \cos x} = \left(\lim_{x \to 0} 3 \cos x \right) \cdot \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} \right).$$

A jobb oldal első tényezője 3, második tényezőjében a L'Hospital-szabály ismét alkalmazható.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^3 x}{x - \sin x} = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} = 6.$$

(d) A L'Hospital-szabály alkalmazható, de a feladat enélkül is megoldható:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-5x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2x - 1 + 5x}{(\sin x) \cdot (\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-5x})} =$$

$$= 7 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cdot \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-5x}} = \frac{7}{2}.$$

(e) A L'Hospital-szabály alkalmazható:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} - e^{3x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4xe^{2x^2} - 6xe^{3x^2}}{2x} = -1.$$

3.(a)

$$E(f+g)(x) = \frac{x}{f(x)+g(x)} \cdot (f'(x) + g'(x)) =$$

$$= \frac{x}{f(x)+g(x)} \cdot \left(\frac{f(x)f'(x)}{f(x)} + \frac{g(x)g'(x}{g(x)}) \right) = \frac{f(x) \cdot Ef(x) + g(x) \cdot Eg(x)}{f(x)+g(x)}$$

(b)

$$E(fg)(x) = \frac{x}{f(x)g(x)} \cdot (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) =$$

$$= \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) + \frac{x}{g(x)} \cdot g'(x) = Ef(x) + Eg(x).$$

4. Clever professzornak volt igaza. Az „ellenpéldában” ui. a L'Hospital-szabály *nem* alkalmazható (a nevező nem zérus az $x = 0$ helyen; ettől az apróságtól eltekintve minden részletszámítás helyes). Feladatunk erre a – sajnos gyakran elkövetett – hibára hívja fel a figyelmet.

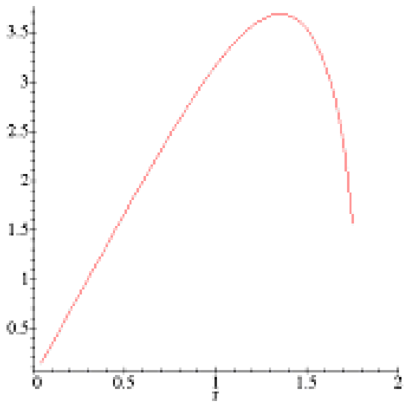
5. Legyen r a sátor alapkörének sugara, a a kúp alkotója és m a magassága. Akkor Pitagorász tétele miatt $m = \sqrt{a^2 - r^2}$. A sátor palástja egy a sugarú körcikké teríthető ki, ívhossza megegyezik a sátor alapkörének kerületével ($2r\pi$), így a palást felszíne $F = \frac{1}{2}a \cdot 2r\pi$ ($= 10\ \mathrm{m}^2$), ahonnan $a = \frac{F}{r\pi}$. Így a sátor térfogata kifejezhető pusztán r függvényében:

$$V(r) = \frac{1}{3}r^2\pi\sqrt{\frac{F^2}{r^2\pi^2} - r^2} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{F^2r^2}{\pi^2} - r^6},$$

és ezt kell maximalizálni, ahol $r > 0$ (valójában r csak egy véges intervallumban változhat, $0 \le r \le \sqrt[4]{\frac{F^2}{\pi^2}}$). Vegyük észre, hogy elég a gyök alatti mennyiséget maximalizálni, mert annak (a gyökfüggvény monoton növő volta miatt) szükségképp ugyanott van maximumhelye, mint V-nek. Jelölje tehát $f(r) := \frac{F^2r^2}{\pi^2} - r^6$. Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $f'(r) := \frac{2rF^2}{\pi^2} - 6r^5$. A zérushelyre több lehetséges érték is adódik, de ezek közül csak egy pozitív: $r_1 = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3\pi^2}}$. Itt f-nek valóban lokális maximuma van, mert:

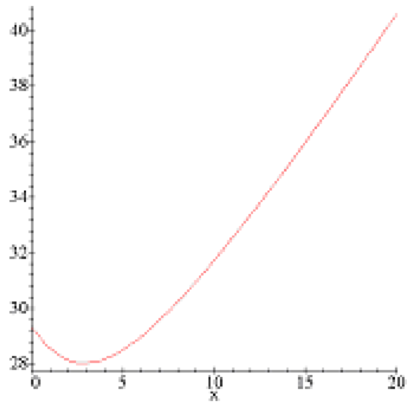
$$f''(r_1) = \frac{2F^2}{\pi^2} - 30r_1^4 = \frac{2F^2}{\pi^2} - 30 \cdot \frac{F^2}{3\pi^2} < 0.$$

Itt a V függvénynek *abszolút* maximuma is van, mert nyilván $V(0) = 0$ és $V(\sqrt[4]{\frac{F^2}{\pi^2}}) = 0$. A maximális térfogatú sátor alapkörének sugara tehát $r_1 = \sqrt[4]{\frac{F^2}{3\pi^2}} \approx 1.35$ m. Alkotója $a = \frac{F}{r_1\pi} \approx 2.35$ m, így a sátor magassága: $m = \sqrt{a^2 - r_1^2} \approx 1.92$ m. Vagyis Sólyomszem nyugodtan kiegyenesedhet a sátorban (igaz, csak középtájékon).



7.7. ábra. *A V függvény grafikonja az 5. feladatban*

6. A GDC háromszög egyenlő szárú. Elemi geometriai megfontolásokkal adódik, hogy a keresett tulajdonságú pont (melynek a háromszög csúcsaitól mért távolságösszege minimális) csakis a háromszög szimmetriatengelyén lehet. (Ha ui. nem ott lenne, akkor a szimmetriatengelyen található lenne olyan pont, amelyre vonatkozó távolságösszeg határozottan kisebb: vajon hol?) Tekintsünk tehát a szimmetriatengelyen egy tetszőleges pontot, jelölje x ennek távolságát a GD oldaltól. Akkor, Pitagorász tételét használva, a pont távolsága a G és D pontoktól egyaránt $\sqrt{25+x^2}$ mérföld, a C ponttól pedig $\sqrt{400-25}-x=\sqrt{375}-x$ mérföld. A csúcspontoktól mért távolságösszeg tehát $f(x):=2\sqrt{25+x^2}+\sqrt{375}-x$ mérföld, és ezt kell minimalizálni (ahol x zérus és $\sqrt{375}$ közt változhat). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált, zérus, azaz $f'(x)=2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{25+x^2}}-1=0$. Ennek az egyenletnek egyetlen pozitív megoldása van: $x_1=\sqrt{\frac{25}{3}}\approx 2.89$ mérföld. Itt f-nek valóban minimuma van, mert $f''(x_1)=\frac{50}{(25+x_1^2)^{3/2}}>0$. A kocsma megépítésére az optimális hely tehát a GDC háromszög szimmetriatengelyén, a GD oldaltól kb. 2.89 mérföld távolságra van C irányában. Könnyen ellenőrizhető az is, hogy a lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az f függvény az értelmezési tartomány perempontjaiban (0 és $\sqrt{375}$), nagyobb értéket vesz fel, mint x_1-ben.

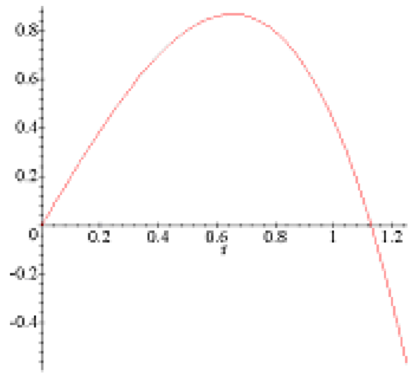


7.8. ábra. *Az f függvény grafikonja a 6. feladatban*

7. Jelölje r a henger alapkörének sugarát, akkor a bödön felszíne $F = r^2\pi + 2r\pi m = 4\mathrm{dm}^3$. Innen $m = \frac{F-r^2\pi}{2r\pi}$. A bödön térfogata tehát kifejezhető csak az r sugár függvényében:

$$V(r) = r^2\pi \cdot \frac{F-r^2\pi}{2r\pi} = \frac{Fr - r^3\pi}{2},$$

és ezt kell maximalizálni ($0 \leq r \leq \sqrt{\frac{F}{\pi}}$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált, zérus, azaz $v'(r) = \frac{F-3r^2\pi}{2} = 0$. Pozitív zérushely egyetlenegy van: $r_1 = \sqrt{\frac{F}{3\pi}} \approx 0.65$ dm. Itt V-nek valóban maximuma van, mert $V''(r_1) = \frac{-6r_1\pi}{2} < 0$. A maximális térfogat ezért $V_{\max} = V(r_1) = \frac{Fr_1 - r_1^3\pi}{2} \approx 0.87\ \mathrm{dm}^3$. A lokális maximum egyúttal abszolút maximum is, mert az értelmezési tartomány perempontjaiban a V függvény zérus értéket vesz fel. Tehát szegény Micimackó vágya, a literes bödön, így nem teljesíthető. Megjegyezzük azonban, hogy ha Róbert Gida félgömb alakú „bödönt" készít a 4 dm^2 bádogból, akkor annak térfogata valamivel még nagyobb is 1 liternél (ellenőrizzük!).



7.9. ábra. *A V függvény grafikonja a 7. feladatban*

8. Jelölje r a henger alapkörének sugarát, akkor a konzervdoboz térfogata $V = r^2\pi m$ (= 0,5 liter), ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi}$. Mivel a konzervdoboz teljes felszíne $F = 2r^2\pi + 2r\pi m$, azért F kifejezhető csak az r sugár függvényében:

$$F(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r},$$

és ezt kell minimalizálni ($r > 0$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $F'(r) = 4r\pi - \frac{2V}{r^2} = 0$, innen a zérushelyre egyetlen érték adódik: $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ dm. Itt F-nek valóban lokális minimuma van, mert $F''(r_1) = 4\pi + \frac{4V}{r_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az F függvény határértéke mind a 0-ban, mind a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális felszínhez tartozó magasság:

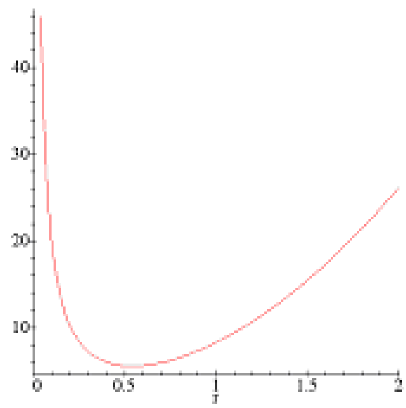
$$m = \frac{V}{r_1^2\pi} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} \cdot \frac{V}{\pi} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r_1.$$

Így az optimális alakú doboz esetében az átmérő épp a magassággal egyezik (a térfogattól függetlenül).

9. Jelölje r a henger alapkörének sugarát, akkor a tartály térfogata $V = r^2\pi m$ ($= 1$ m^3), ahonnan $m = \frac{V}{r^2\pi}$. Mivel a tartály teljes felszíne $F = 2r^2\pi + 2r\pi m$, azért F kifejezhető csak az r sugár függvényében:

$$F(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{V}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V}{r},$$

és ezt kell minimalizálni ($r > 0$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $F'(r) = 4r\pi - \frac{2V}{r^2} = 0$, innen a zérushelyre egyetlen érték adódik: $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 0{,}54$ m. Itt F-nek valóban lokális minimuma van, mert $F''(r_1) = 4\pi + \frac{4V}{r_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az F függvény határértéke mind a 0-ban, mind a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális felszínű tartály átmérője tehát $2r_1 \approx 1.08$ m, magassága pedig $m = \frac{V}{r_1^2\pi} \approx 1.08$ m (*pontosan* egyezik az átmérővel).



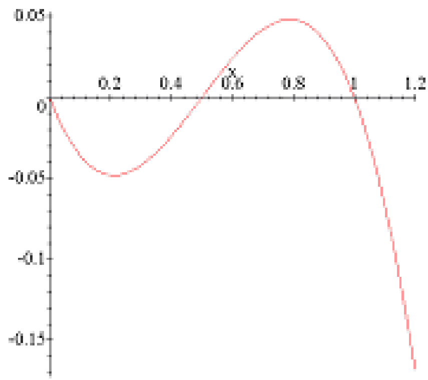
7.10. ábra. *Az F függvény grafikonja a 8. és 9. feladatban*

10. Legyenek a doboz élei x, y, z, akkor az átkötések adott hossza miatt $2x + 2y = 2$ és $2y + 2z = 1$ kell, hogy teljesüljön. Innen y és z is kifejezhető x függvényében: $y = 0 - x$, és $z = \frac{1}{2} - y = -\frac{1}{2} + x$. A térfogat tehát

$$V(x) = x(1-x)\left(-\frac{1}{2} + x\right) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,$$

és ezt kell maximalizálni, (ahol x nyilván legfeljebb a $[0{,}2]$ intervallumot futhatja be). Lokális szélsőérték ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz

$V'(x) = -3x^2 + 3x - \frac{1}{2}$. Innen a szóbajöhető értékek: $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. Az ezeknek megfelelő y és z értékek: $y_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $y_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, és $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, $z_2 = \frac{-\sqrt{3}}{6}$. Világos, hogy a 2-es indexű értékek nem jöhetnek számításba. Ha van tehát lokális maximum, akkor az csakis az $x = x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ érték mellett lehet. Itt pedig valóban lokális maximum van, mert $V''(x) = -6x + 3$, így $V''(x_1) = -3 - \sqrt{3} + 3 < 0$. A lokális maximum egyúttal abszolút maximum is, mert az értelmezési tartomány perempontjaiban a V függvény zérus, ill. negatív értéket vesz fel. A legnagyobb térfogatú doboz méretei tehát: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 79$ cm, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 21$ cm, és $\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 29$ cm. Megjegyezzük még, hogyha Kuka nem vágta el



7.11. ábra. *A V függvény grafikonja a 10. feladatban*

volna a szalagot, akkor a legnagyobb térfogatú doboz kocka alakú lenne, melynek egy oldala $\frac{3}{8} = 0.375$ méter; ennek térfogata alig nagyobb az előzőekben méretezett doboz térfogatánál.

11. A legnagyobb keresztmetszet nyilván úgy érhető el, hogy a keresztmetszeti téglalap egyik oldalával a félkör átmérőjére illeszkedik, ezzel párhuzamos oldalának csúcsai pedig a félkörvonalon vannak. Jelölje x a téglalapnak a félkör átmérőjére illeszkedő oldalát, akkor a másik oldalának hossza Pitagorász tétele értelmében $\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ (ahol R a félkör sugara (=

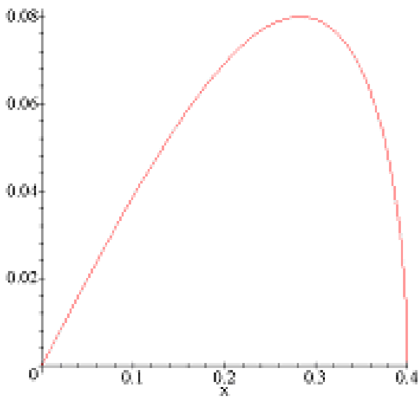
20 cm)). Így a téglalap T területe kifejezhető x függvényében:

$$T(x) = 2x\sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$$

és ezt kell maximalizálni ($0 \le x \le 2R$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $T'(x) = \frac{R^2x-4x^3}{2\sqrt{4R^2x^2-x^4}} = 0$. A deriváltfüggvénynek tehát 3 zérushelye van, de ezek közül csak egy pozitív: $x_1 = R\sqrt{2} \approx 28$ cm. Könnyen látható, hogy x_1-ben a deriváltfüggvény előjelet is vált, éspedig pozitívból negatívba, így x_1-ben T-nek valóban lokális maximuma van. A lokális maximum egyúttal abszolút maximum is, mert az értelmezési tartomány perempontjaiban a T függvény zérus értéket vesz fel. A téglalap másik oldalának hossza:

$$\sqrt{R_2 - \left(\frac{x_1}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{2R^2}{4}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 14 \text{ cm}$$

(pontosan feleakkora, mint a hosszabbik oldal). A feladat egyébként differenciálszámítás nélkül, elemi geometriai eszközökkel is megoldható (hogyan?)



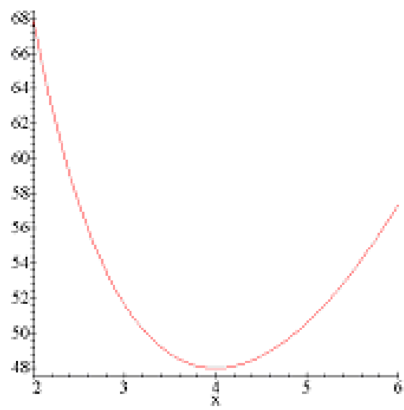
7.12. ábra. *A T függvény grafikonja a 11. feladatban*

12. Jelölje x a medence oldalhosszúságát, m a mélységét, akkor $V = x^2m$ (= 32 m^2). Innen m kifejezhető: $m = \frac{V}{x^2}$, a burkolandó felület

pedig felírható x függvényében:

$$F(x) = x^2 + 4xm = x^2 + \frac{4V}{x},$$

és ezt kell minimalizálni ($r > 0$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált, zérus, azaz $F'(x) = 2x - \frac{4V}{x^2} = 0$, innen a zérushelyre egyetlen érték adódik: $x_1 = \sqrt[3]{2V}$ = 4 m. Itt F-nek valóban lokális minimuma van, mert $F''(x_1) = 2 + \frac{8V}{x_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az F függvény határértéke mind a 0-ban, mind pedig a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális felülethez tartozó oldalhosszúság és mélység tehát 4 m és 2 m.

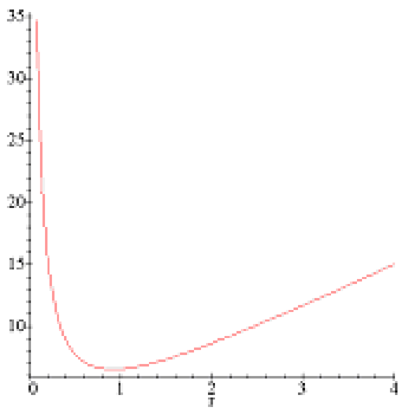


7.13. ábra. *Az F függvény grafikonja a 12. feladatban*

13. Jelölje r a félkör sugarát, akkor a téglalap ehhez illeszkedő oldalának hossza $2r$. Legyen a másik oldal hossza a, akkor az ablak felülete: $F = 2ar + \frac{1}{2}r^2\pi$ (= 3 m^2). Innen a kifejezhető: $a = \frac{F}{2r} - \frac{r\pi}{4}$. Így az ablak kerülete felírható csak az r sugár függvényében:

$$K(r) = 2a + 2r + r\pi = \frac{F}{r} - \frac{r\pi}{2} + 2r + 2\pi = \frac{F}{r} + \frac{r\pi}{2} + 2r,$$

és ezt kell minimalizálni ($r > 0$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz $K'(r) = -\frac{F}{r^2} + \frac{\pi}{2} + 2 = 0$. Pozitív zérushelye a deriváltfüggvénynek csak egy van: $r_1 = \sqrt{\frac{F}{\frac{\pi}{2}+2}} \approx 0.92$ m. Itt valóban lokális minimum van, mert $K''(r_1) = \frac{2F}{r_1^3} > 0$. A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert a K függvény határértéke mind a 0-ban, mind pedig a $(+\infty)$-ben $(+\infty)$. A minimális kerület: $K_{\min} = \frac{F}{r_1} + \frac{r_1\pi}{2} + 2r_1 \approx 6{,}55$ m, így tehát a szponzor még épp finanszírozza a munkálatokat.



7.14. ábra. *A K függvény grafikonja a 13. feladatban*

14. A kérdés a C pont optimális megválasztása. Jelölje x az A és C pontok vízszintes (folyásirányú) távolságát, akkor a folyóban $\sqrt{x^2+400^2}$ méter, a szárazföldön $1000-x$ méter kábelt kell fektetni. A költség tehát petákban kifejezve:

$$f(x) = 200\sqrt{x^2+400^2}+100\cdot(1000-x) = 100\cdot\left(2\sqrt{x^2+400^2}+1000-x\right),$$

és ezt kell minimalizálni ($0 \le x \le 1000$). Lokális szélsőérték csak ott lehet, ahol a derivált zérus, azaz

$$f'(x) = 100\cdot\left(2\frac{2x}{2\sqrt{x^2+400^2}}-1\right) = 0.$$

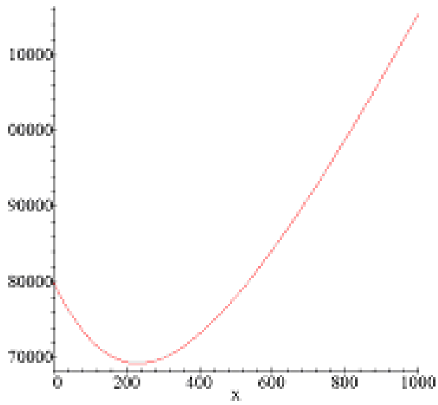
A $(0{,}1000)$ intervallumban a deriváltnak egyetlen zérushelye van, éspedig $x_1 = \frac{400}{\sqrt{3}} \approx 230{,}9$ m. Itt pedig valóban lokális minimum van, mert

$$f''(x) = 200\cdot\frac{400^2}{(x_1^2+400^2)^{3/2}} > 0.$$

A lokális minimum egyúttal abszolút minimum is, mert az f függvény az értelmezési tartomány perempontjaiban nagyobb értéket vesz fel, mint az x_1 helyen. Optimális esetben tehát $\sqrt{x_1^2+400^2} \approx 461.9$ méter kábelt kell víz alatt, $1000-x_1 \approx 769.1$ métert pedig szárazföldön lefektetni.

Megjegyezzük, hogy az optimális C pont helyzete független B helyzetétől *mindaddig, amíg B az A ponttól vízszintesen mérve, x_1-nél távolabb van*. Ellenkező esetben a költségfüggvény x-nek monoton fogyó függvénye, a szélsőértékhely az értelmezési tartomány határán lesz, így nem kapható meg a mutatott differenciálszámítási eszközökkel. Egyébként ekkor az optimális stratégia az, hogy a kábelt teljes egészében a vízen keresztül fektetjük.

Megjegyezzük még, hogy a megoldás során hallgatólagosan feltettük, hogy a Styx vize sekély, azaz a vízen át fektetett kábel hossza épp az AC szakasz hosszával egyenlő. Valójában a kábel hossza ennél több. Ha ezt is figyelembe akarjuk venni, a feladat sokkal nehezebbé válik (általános medergeometria esetén eddigi eszközeinkkel nem megoldható).



7.15. ábra. *Az f függvény grafikonja a 14. feladatban*

8. Taylor-sorok

Számos elméleti és gyakorlati feladat esetében előforduló igény, hogy bizonyos bonyolult formulával megadott függvényeket egyszerűbbekkel közelítsünk. Ebben a fejezetben egy lehetséges ilyen technikát mutatunk be. Itt feltesszük, hogy a közelítendő függvények elég simák, azaz elég sokszor differenciálhatók. A közelítés pedig az egyik legegyszerűbb függvényosztállyal, nevezetesen polinomokkal történik.

8.1. Taylor-polinomok

Taylor-polinom:

Legyen $a \in \mathbf{R}$ egy rögzített pont és f az a pont egy környezetében értelmezett elég sima valós függvény, azaz legyen $f : [a-\delta, a+\delta] \to \mathbf{R}$ n-szer folytonosan differenciálható. A

$$T_n(f,x) := f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{1!}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

n-edfokú polinomot az f függvény a helyen vett n-edfokú *Taylor-polinomjának* nevezzük.

Látjuk, hogy a Taylor-polinom előállításához az adott f függvénynek csak az egyetlen $a \in \mathbf{R}$ pontban felvett értékének és deriváltjainak ismeretére van szükség.

8.1. Példa: A definíció azonnali következménye, hogy egy legfeljebb n-edfokú polinom n-edfokú Taylor-polinomja önmagával egyezik meg.

8.2. Példa: Az e alapú exponenciális függvény 0 körüli elsőfokú Taylor-polinomja $1 + x$.

Megmutatjuk, hogy a Taylor-polinom az a hely körül „körülbelül" úgy viselkedik, mint az eredeti f függvény. Pontosabban:

8.1. Állítás: . Az f függvény és deriváltjainak értéke az a pontban megegyezik a megfelelő Taylor-polinom értékével ill. deriváltjaival, az n-edrendű deriválttal bezárólag:

$$f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(f,a) \qquad (k = 0,1,\dots,n).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $f(a) = T_n(f,a)$. T_n-et deriválva:

$$T_n'(f,x) = f'(a) + \frac{2}{2!}f''(a)(x-a) + \frac{3}{3!}f'''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{n}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1} =$$

$$= f'(a) + \frac{1}{1!}f''(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f'''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1},$$

innen $T_n'(f,a) = f'(a)$. Még egyszer deriválva:

$$T_n''(f,x) = f''(a) + \frac{2}{2!}f'''(a)(x-a) + \frac{3}{3!}f^{IV}(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{(n-1)}{(n-1)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2} =$$

$$= f''(a) + \frac{1}{1!}f'''(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{IV}(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n-2)!}f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2},$$

innen pedig $T_n''(f,a) = f''(a)$, és így tovább. Az eljárás az n-edik derivált kiszámításáig folytatható: $T_n^{(n)}(f,a) = f^{(n)}(a)$. T_n-nek minden, n-nél magasabb rendű deriváltja azonosan 0.

A bizonyításából kiolvasható az önmagában is érdekes alábbi állítás.

8.2. Állítás: . Az f függvény n-edfokú Taylor-polinomjának deriváltja megegyezik az f' deriváltfüggvény $(n-1)$-edfokú Taylor-polinomjával:

$$T_n'(f,x) = T_{n-1}(f',x).$$

Speciális esetek:

(a) Az f függvény 0-adfokú Taylor-polinomja:

$$T_0(f,x) = f(a).$$

(b) Az f függvény elsőfokú Taylor-polinomja:

$$T_1(f,x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Most megmutatjuk, hogy a Taylor-polinom bizonyos értelemben valóban jól közelíti az eredeti f függvényt (nemcsak az a pontban):

8.1. Tétel: (kifejtési tétel). Ha az f függvény $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható az $[a-\delta,a+\delta]$ intervallumon, akkor minden $x \in [a-\delta,a+\delta]$ ponthoz van oly ξ az a és az x számok között, hogy

$$f(x) = T_n(f,x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A formula $x = a$ esetén nyilvánvaló. Legyen tehát $x \neq a$ egy tetszőleges, rögzített szám. Jelölje g a

$$g(t) := f(t) - T_n(f,t) - \omega(t-a)^{n+1}$$

képlettel értelmezett függvényt, ahol ω a következő számot jelöli:

$$\omega := \frac{f(x) - T_n(f,x)}{(x-a)^{n+1}}.$$

Akkor $g(a) = f(a) - T_n(f,a) = 0$ (az előző állítás miatt) és

$$g(x) = f(x) - T_n(f,x) - \frac{f(x) - T_n(f,x)}{(x-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1} = 0,$$

azaz $g(a) = g(x)$. A *Rolle-tétel* miatt van oly $x_1 \in (a,x)$, hogy $g'(x_1) = 0$. Deriválva g-t:

$$g'(t) = f'(t) - T_n'(f,t) - \omega(n+1)(t-a)^n.$$

Innen $g'(a) = 0$ (ismét az előző állítás miatt). Mivel pedig $g'(x_1) = 0$, ismét a Rolle-tétel miatt van oly $x_2 \in (a,x_1)$, hogy $g''(x_2) = 0$, és így tovább. Egészen $(n+1)$-ig mehetünk: van tehát olyan $x_{n+1} \in (a,x_n)$, hogy $g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$. Ugyanakkor g definíciójából ezt a deriváltat közvetlenül is kiszámíthatjuk:

$$0 = g^{(n+1)}(x_{n+1}) = f^{(n+1)}(x_{n+1}) - \omega \cdot (n+1)!$$

Innen ω-ra azt kapjuk, hogy $\omega = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{n+1)!}$, amit ω definíciójával összehasonlítva:

$$\omega = \frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{n+1)!} = \frac{f(x) - T_n(f,x)}{(x-a)^{n+1}},$$

ahonnan

$$f(x) = T_n(f,x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_{n+1})(x-a)^{n+1},$$

és ezzel a bizonyítás kész ($\xi := x_{n+1}$ mellett).

Lagrange-féle maradéktag:

A fenti formulában az $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$ tagot *Lagrange-féle maradéktagnak* nevezzük, és $R_{n+1}(f,x)$-szel jelöljük.

Ezzel a jelöléssel a tétel az

$$f(x) = T_n(f,x) + R_{n+1}(f,x)$$

alakba írható.

Innen nyilvánvaló, hogy az f függvényt a Taylor-polinomja akkor közelíti „jól”, ha a megfelelő Lagrange-maradéktag „kicsi”. A következő szakaszban ennek pontosabb megfogalmazásával foglalkozunk.

8.2. Taylor- és Maclaurin-sorok, konvergenciájuk

A kifejtési tétel azonnali következménye, hogy ha a Lagrange-maradéktag egy intervallumon 0-hoz tart ($n \to +\infty$ mellett), akkor a Taylor-polinomok sorozata azon az intervallumon az eredeti f függvényhez tart.

8.1. Következmény: . Legyen f akárhányszor differenciálható (más szóhasználattal: végtelen sokszor differenciálható) az $[a-\delta,a+\delta]$ intervallumon. Ha valamely $x \in [a-\delta,a+\delta]$ mellett $R_n(f,x) \to 0$, akkor $f(x) = \lim_{n\to+\infty} T_n(f,x)$, azaz, más felírásban:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$= f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \dots.$$

Ezt a végtelen sort az f függvény a pont körüli *Taylor-sorának* nevezzük.

Speciális eset. A 0 pont körüli Taylor-sorokat *Maclaurin-soroknak* is nevezzük. Ennek formája tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-a)^k = f(0) + \frac{1}{1!}f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \dots.$$

Felmerül a kérdés, hogy milyen feltételek biztosítják a Lagrange-féle maradéktag 0-hoz tartását, tehát azt, hogy a Taylor-sor konvergens legyen. Ehhez az kell, hogy a deriváltak abszolút értéke ne nőjön túl gyorsan a deriválás rendjével. Erre egy egyszerű elégséges feltételt ad a következő állítás.

8.3. Állítás: . Legyen f akárhányszor differenciálható az $[a-\delta,a+\delta]$ intervallumon. Ha vannak olyan $A,C \geq 0$ számok, hogy minden $x \in [a-\delta,a+\delta]$ mellett $|f^{(n)}(x)| \leq C \cdot A^n$ (a deriváltak abszolút értéke legfeljebb exponenciálisan nő n növekedésével), akkor $R_n(f,x) \to 0$ a szóban forgó intervallumon, tehát a függvény a körüli Taylor-sora minden $x \in [a-\delta,a+\delta]$ esetén konvergens, és összege $f(x)$.

Bizonyítás. Ekkor

$$|R_n(f,x)| = \frac{|f^{(n)}(\xi)| \cdot |x-a|^n}{n!} \leq C \cdot \frac{A^n|x-a|^n}{n!} \to 0$$

(ha $n \to +\infty$) minden $x \in [a-\delta,a+\delta]$ pontban.

Megjegyezzük, hogy a fenti feltétel már sokszor igen egyszerű függvények esetén sem teljesül, ahogy az a következő példákban is látható.

8.3. Példa: Legyen $f(x) := \frac{1}{1-x}$ és $a := 0$. Akkor

$$|f^{(n)}(x)| = \frac{n!}{|1-x|^{n+1}},$$

innen $|f^{(n)}(0)| = n!$, azaz a deriváltak abszolút értéke *faktoriális* sebességgel nő, ami nagyon gyors növekedés.

8.4. Példa: Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Igazolható, hogy $f^{(n)}(0) = 0$ minden $n \in \mathbf{N}$ esetén, így a függvény Maclaurin-sora azonosan 0. A Maclaurin-sor tehát minden $x \in \mathbf{R}$ esetén konvergens ugyan, de csak a 0-ban állítja elő az eredeti f függvényt.

8.3. Néhány függvény Maclaurin-sora

Mivel egy egyszerű változótranszformációval mindig elérhető, hogy a Taylor-kifejtés a 0 körül legyen végrehajtva, a továbbiakban már csak ezzel a speciális esettel foglalkozunk.

8.5. Példa: Legyen $f(x) := e^x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...,$$

vagyis az exponenciális függvény Maclaurin-sora saját definiáló sorával, az exponenciális sorral egyezik meg.

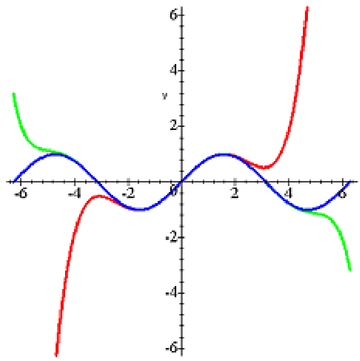
Megoldás. Ekkor ui. minden $n \in \mathbf{N}$ mellett $f^{(n)}(x) = e^x$, így $f^{(n)}(0) = 1$. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

8.6. Példa: Legyen $f(x) := \sin x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + ...$$

Megoldás. $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$ és így tovább. Innen minden páros n-re $f^{(n)}(0) = 0$ és minden páratlan n-re $f^{(n)}(0)$ az 1 és (-1) számok valamelyike. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

Az alábbi ábrán illusztrációként bemutatjuk, hogyan közelíti a szinuszfüggvényt a 0 körül az ötödfokú, ill. a 11-edfokú Taylor-polinomja.



8.1. ábra. *A szinuszfüggvény 0 körüli közelítése 5-ödfokú és 11-edfokú Taylor-polinomokkal*

8.7. Példa: Legyen $f(x) := \cos x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots.$$

Megoldás $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ és így tovább. Innen minden páratlan n-re $f^{(n)}(0) = 0$, és minden páros n-re $f^{(n)}(0)$ az 1 és (-1) számok valamelyike. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

A következő két példa ismét rávilágít a trigometrikus és hiperbolikus függvények analógiájára.

8.8. Példa: Legyen $f(x) := \operatorname{sh} x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \ldots,$$

vagyis a sor csak a tagok előjelében különbözik a szinuszfüggvény Maclaurin-sorától.

Megoldás. $f'(x) = \operatorname{ch} x$, $f''(x) = \operatorname{sh} x$, $f'''(x) = \operatorname{ch} x$ és így tovább. Innen minden páros n-re $f^{(n)}(0) = 0$, és minden páratlan n-re $f^{(n)}(0) = 1$. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

8.9. Példa: Legyen $f(x) := \operatorname{ch} x$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \ldots,$$

vagyis a sor csak a tagok előjelében különbözik a koszinuszfüggvény Maclaurin-sorától.

Megoldás. $f'(x) = \operatorname{sh} x$, $f''(x) = \operatorname{ch} x$, $f'''(x) = \operatorname{sh} x$ és így tovább. Innen minden páratlan n-re $f^{(n)}(0) = 0$, és minden páros n-re $f^{(n)}(0) = 1$. A Lagrange-maradéktag minden $x \in \mathbf{R}$ esetén: $|R_n(f,x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} \to 0$, ha $n \to +\infty$.

8.10. Példa: Legyen $f(x) := \frac{1}{1-x}$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

vagyis a Maclaurin-sor a már ismert végtelen mértani sor.

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}, \ldots,$$

és így tovább, tetszőleges $n \in \mathbf{N}$ esetén $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, ahonnan $f^{(n)}(0) = n!$. Innen a Maclaurin-sor fenti alakja már következik. Ismeretes, hogy a sor minden $|x| < 1$ szám esetén konvergens és összege $\frac{1}{1-x}$.

8.11. Példa: Legyen $f(x) := \frac{1}{1+x}$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots.$$

Megoldás. Az előző példából következik, x helyére $(-x)$-et írva.

8.12. Példa: Legyen $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots.$$

Megoldás. Az előző példából következik, x helyére x^2-et írva.

8.13. Példa: Legyen $f(x) := \log(1+x)$. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

Megoldás. A függvény deriváltja $\frac{1}{1+x}$, az n-edik derivált megegyezik az $\frac{1}{1+x}$ függvény $(n-1)$-edik deriváltjával, ami $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Innen

$$\log(1+x) = 0 + \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots.$$

8.14. Példa: (binomiális sor). $f(x) := (1+x)^\alpha$, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$ adott szám (nem feltétlen egész). Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$ esetén:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots.$$

Speciálisan

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots,$$

és

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots.$$

Megoldás.

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$
$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$
$$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},$$

és így tovább. Innen

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \alpha, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \quad f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \ldots,$$

ahonnan a Maclaurin-sor alakja már adódik. Azt, hogy a sor minden $|x| < 1$ esetén konvergens, és összege $(1+x)^\alpha$, nem bizonyítjuk.

8.4. A komplex exponenciális függvény. A komplex számok exponenciális alakja

Mint azt már korábban említettük, az exponenciális függvény az exponenciális sor segítségével minden nehézség nélkül kiterjeszthető a komplex számsíkra.

Komplex exponenciális függvény:

Legyen $z \in \mathbf{C}$ tetszőleges komplex szám és

$$e^z := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots.$$

Az így nyert $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ függvényt *komplex exponenciális függvénynek* nevezzük.

Speciálisan, legyen $t \in \mathbf{R}$ tetszőleges, és tekintsük a komplex exponenciális függvényt a tiszta képzetes (it) argumentummal:

$$e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{i^2t^2}{2!} + \frac{i^3t^3}{3!} + \frac{i^4t^4}{3!} + \dots = 1 + \frac{it}{1!} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{3!} + \dots,$$

felhasználva az i-hatványokra vonatkozó korábbi észrevételt.

Különválasztva a valós és képzetes tagokat és felhasználva a szinusz- és koszinuszfüggvények Maclaurin-sorát:

$$e^{it} = \left(1 + -\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} - \dots\right) + i\left(\frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) = \cos t + i \sin t$$

A következő tételhez jutottunk.

8.4. Állítás: (Euler-formula). Tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ esetén

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

Innen és a komplex számok trigonometrikus alakjából azonnal adódik:

8.2. Következmény: (a komplex számok exponenciális alakja). Legyen $z \in \mathbf{C}$ tetszőleges komplex szám, amelynek trigonometrikus alakja $z = r(\cos t + i \sin r)$. Akkor teljesül a

$$z = re^{it}$$

egyenlőség is, amelyet a z komplex szám *exponenciális alakjának* nevezünk.

8.15. Példa: Az i-hatványok exponenciális alakjai:

$$i = e^{\frac{\pi}{2}i}, \quad i^2 = -1 = e^{\pi i}, \quad i^3 = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i}, \quad i^4 = 1 = e^{2\pi i}, \quad \ldots.$$

Megjegyezzük, hogy a szorzás és az osztás, különösen pedig a hatványozás és a gyökvonás az exponenciális alakkal – felhasználva a hatványozás azonosságait – még a trigonometrikus alak használatánál is egyszerűbb.

8.5. Feladatok

1. „Az $x \to \sin x$ függvény Maclaurin-sora:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots.$$

Ezért az $x \to \sin\sqrt{x}$ függvény Maclaurin-sora:

$$\sin\sqrt{x} = x^{1/2} - \frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{1}{5!}x^{5/2} - \frac{1}{7!}x^{7/2} + \ldots".$$

Igaz-e ez az állítás vagy sem, és miért?

2. Igazoljuk, hogy $|x| < 1$-re a

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \ldots$$

sor konvergens, és összege $-\frac{1}{(1+x)^2}$.

3. Van egy, csak a négy alapműveletet ismerő kalkulátorunk. Adjunk algoritmust a $\log 2$ szám közelítő kiszámítására! (Ha kell, használjuk az $e = 2{,}71828\ldots$ értéket, de a feladat enélkül is megoldható!)

4. Van egy csak 4 alapműveletes gépünk. Felhasználva azt, hogy $\log 2 = 0{,}693147\ldots$, számítsuk ki $\log 2{,}01$ értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal!

5. Ismerve a $\log 100 = 4{,}60517\ldots$ értéket, hogyan lehet $\log 101$-et kiszámítani 4 alapművelettel (tetszőleges pontossággal)?

6. Határozzuk meg az alábbi formulákkal értelmezett függvények Maclaurin-sorát.

(a)
$$x \to e^{-x^2},$$

(b)
$$x \to \frac{2}{3-x},$$

(c)
$$x \to \frac{1+x^2}{1-x^2},$$

(d)
$$x \to \log(2+x^2),$$

(e)
$$x \to \log\frac{1+x}{1-x},$$

(f)
$$x \to e^{1+x^2}+e^{1-x^2},$$

(g)
$$x \to \log\frac{(1+x)^2}{1-x^2},$$

(h)
$$x \to \log\frac{e^x+2}{2e^{-x}+1}.$$

Megoldások

1. Nem igaz. A szóban forgó függvény ui. a 0-ban *nem* differenciálható. Ugyanakkor igaz, hogy

$$\sin\sqrt{x} = x^{1/2} - \frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{1}{5!}x^{5/2} - \frac{1}{7!}x^{7/2} + \ldots \quad (x \in \mathbf{R}),$$

de a jobb oldali sor nem Maclaurin-sor.

2. Az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) := -\frac{1}{(1+x)^2}$ függvényt fejtsük Maclaurin-sorba. Nyilván:

$$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f''(x) = -\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f'''(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^5}, \ldots$$

innen

$$f(0) = -1, \quad f'(0) = 2!, \quad f''(0) = -3!, \quad f'''(0) = 4!, \ldots$$

és így tovább. Ezért a

$$-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \ldots$$

sor az $x \mapsto -\frac{1}{(1+x)^2}$ függvény Maclaurin-sora. A 8.14. Példa állításából következik, hogy a sor minden $|x| < 1$ szám esetén konvergens, és összege $-\frac{1}{(1+x)^2}$.

3.

$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = -\log\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1\cdot 2^1} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \ldots.$$

Más megoldás:

$$\log 2 = \log\left(e\cdot\frac{2}{e}\right) = 1+\log\frac{2}{e} = 1+\log\frac{e-(e-2)}{e} = 1+\log\left(1-\frac{e-2}{e}\right) =$$

$$1 - \frac{e-2}{e} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{e-2}{e}\right)^2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{e-2}{e}\right)^3 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{e-2}{e}\right)^4 - \ldots.$$

4.

$$\log 2{,}01 = \log(2+0{,}01) = \log 2 + \log(1+0{,}005) =$$

$$= \log 2 + 0{,}005 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}005^2 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}005^3 - \ldots$$

Már az első két tag összege 4 tizedesjegy pontossággal adja a kívánt eredményt: $\log 2{,}01 \approx 0{,}6981$.

5.

$$\log 101 = \log(100+1) = \log 100 + \log(1+0.01) =$$
$$= \log 100 + 1 - 0.01 + \frac{1}{2} \cdot 0.01^2 - \frac{1}{3} \cdot 0.01^3 + \ldots$$

6. (a)

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{1}{1!}(-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \frac{1}{3!}(-x^2)^3 + \frac{1}{4!}(-x^2)^4 + \ldots =$$
$$= 1 - \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \ldots$$

(b)

$$\frac{2}{3-x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \ldots\right) =$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}x + \frac{2}{3^3}x^2 + \frac{2}{3^4}x^3 + \ldots$$

(c)

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2+2x^2}{1-x^2} = 1 + 2x^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} =$$
$$= 1 + 2x^2 \cdot (1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) = 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots$$

(d)

$$\log(2+x^2) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) =$$
$$= \log 2 + \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^3 + \ldots$$
$$= \log 2 + \frac{1}{1 \cdot 2^2}x^2 - \frac{1}{2 \cdot 2^2}x^4 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}x^6 - \frac{1}{4 \cdot 2^4}x^8 + \ldots$$

(*e*)

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...\right) - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - ...\right)$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + ...$$

(*f*)

$$e^{1+x^2} + e^{1-x^2} = e\cdot e^{x^2} + e\cdot e^{-x^2} =$$

$$= e\cdot\left(1 + \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^5 + ...\right) + e\cdot\left(1 - \frac{1}{1!}x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^5 + ...\right) =$$

$$= 2e + \frac{2e}{2!}x^4 + \frac{2e}{4!}x^8 + ...$$

(*g*)

$$\log\frac{(1+x)^2}{1-x^2} = \log\frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x)} = \log\frac{1+x}{1-x} = \log(1+x) - \log(1-x) =$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...\right) - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - ...\right)$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + ...$$

(*h*)

$$\log\frac{e^x+2}{2e^{-x}+1} = \log\left(e^x\cdot\frac{1+2e^{-x}}{2e^{-x}+1}\right) = \log e^x = x,$$

és ez a Maclaurin-sor is (minden további x-hatvány együtthatója 0).

9. Primitív függvény és Riemann-integrál

Ebben a fejezetben a differenciálás műveletének megfordításáról lesz szó: a deriváltfüggvény ismeretében keressük az eredeti függvényt. Ezután értelmezzük a folytonos függvények grafikonja alatti területet. Megmutatjuk, hogy – az egészen különböző származtatás ellenére – a két fogalom szoros kapcsolatban áll egymással.

9.1. A primitív függvény

Először a bevezetőben említett első problémával foglalkozunk. Legyen $(a,b) \subset \mathbf{R}$ egy tetszőleges nyílt (nem feltétlen korlátos) intervallum.

Primitív függvény:

Az $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ függvény *primitív függvényén* olyan $F : (a,b) \to \mathbf{R}$ differenciálható függvényt értünk, melyre $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in (a,b)$ pontban.

Ilyen függvény – ha létezik egyáltalán – több is van, amint a következő állítás mutatja.

9.1. Állítás: . A függvényt a deriváltja additív konstans erejéig egyértelműen határozza meg, azaz, ha F és G olyan, az (a,b) intervallumon differenciálható függvények, melyekre $F' \equiv G'$ teljesül az (a,b) intervallumon, akkor van olyan $C \in \mathbf{R}$ szám, hogy $F(x) = G(x) + C$ teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

Bizonyítás. Jelölje $H := F - G$, akkor nyilván $H' \equiv 0$, ezért H azonosan konstans függvény (7.13. Állítás): $H \equiv C$, alkalmas $C \in \mathbf{R}$ esetén, ahonnan az állítás már következik.

A 9.1. Állítás szerint egy intervallumon adott függvénynek a primitív függvénye csak additív állandó erejéig meghatározott. Ha F primitív függvénye f-nek, akkor minden $C \in \mathbf{R}$ esetén $F + C$ is az, továbbá f minden primitív függvénye előáll ilyen alakban. Az f függvény primitív függvényének jelölésére az $\int f$ („integrál f”) vagy az $\int f(x)\,dx$ szimbólumok valamelyikét használjuk. Ez utóbbi jelölés akkor kényelmes, ha f-et formulával adjuk meg, és nem akarunk külön jelet bevezetni a függvényre; pl. $\int (3x^2 + 1)\,dx$. Felhívjuk a figyelmet, hogy ebben a jelölésben $\int \ldots dx$ *összetartozó szimbólumok*, és „dx” *nem* szorzást jelöl.

A primitív függvényt sokszor az f függvény *antideriváltjának* vagy *határozatlan integráljának* is nevezik. (Néha f összes primitív függvényeinek

$f(x)$	Értelmezési tartomány	$\int f(x)\,dx$
$x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$(0, +\infty)$	$\frac{1}{\alpha}x^{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$(0, +\infty)$	$\log x$
$\frac{1}{x}$	$(-\infty,0)$	$\log(-x)$
e^x	$(-\infty, +\infty)$	e^x
$a^x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$	$(-\infty, +\infty)$	$\frac{1}{\log a}a^x$
$\sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$-\cos x$
$\cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$\sin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$(-\infty, +\infty)$	$\mathrm{arctg}\, x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$	$\arcsin x$
$\mathrm{sh}\, x$	$(-\infty, +\infty)$	$\mathrm{ch}\, x$
$\mathrm{ch}\, x$	$(-\infty, +\infty)$	$\mathrm{sh}\, x$

1. táblázat. *Az alapintegrálok táblázata*

halmazát nevezik határozatlan integrálnak, de ez nem okoz félreértést, mert a fentiek szerint ezek csak additív állandóban különbözhetnek). Az „integrálni” kifejezést a „primitív függvényt venni” értelemben használjuk. Az $\int f$ jelölésben az f függvényt magát *integrandusnak* is nevezzük. Megjegyezzük még, hogy a 9.1. Állításból még *nem* következik, hogy egy adott f függvénynek létezik is primitív függvénye. Erre vonatkozó tételt csak később tudunk igazolni.

A derivált alaptulajdonságaiból azonnal adódnak a primitív függvényekre vonatkozó alábbi alapvető állítások:

9.2. Állítás: . Ha $f,g : (a,b) :\to \mathbf{R}$ függvényeknek van primitív függvényük, akkor az $(f + g)$, $(f - g)$ és a $c \cdot f$ függvényeknek is van (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám), éspedig
(a) $\int(f \pm g) = \int f \pm \int g$
(b) $\int(cf) = c \cdot \int f$ minden $c \in \mathbf{R}$ esetén.

Sajnos a szorzatfüggvény primitív függvényére nincs a deriválási szabályokhoz hasonló összefüggés. Mindenesetre, az elemi függvények deriváltjainak felhasználásával már egy sor függvény primitív függvénye meghatározható. Ezeket tartalmazza az 1. táblázat (az *alapintegrálok táblázata*). A függvények helyességét deriválással ellenőrizhetjük. Külön kiemeljük, hogy az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény primitív függvénye $x \mapsto \log x$ vagy $x \mapsto \log(-x)$ aszerint, hogy az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvényt a $(0, +\infty)$ vagy a $(-\infty,0)$

intervallumon értelmezzük.

9.2. Tippek és trükkök a primitív függvény meghatározására

Most néhány olyan hasznos fogást mutatunk, amellyel bizonyos speciális alakú függvények primitív függvénye meghatározható. A formulák mindegyike deriválással egyszerűen ellenőrizhető, így a bizonyításoktól eltekintünk.

9.3. Állítás: . Ha f differenciálható az I intervallumon, és $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$, akkor

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C = \begin{cases} \log f(x) + C\,, & \text{ha } f(x) > 0 \\ \log(-f(x)) + C\,, & \text{ha } f(x) < 0 \end{cases}$$

9.4. Állítás: . Ha f differenciálható az I intervallumon, akkor

$$\int (f(x))^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C.$$

9.5. Állítás: . Ha az f függvénynek az I intervallumban egy primitív függvénye F, akkor

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b) + C \qquad (ax+b \in I)$$

tetszőleges $a,b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ szám esetén.

A fenti állításokat az alábbi példákon illusztráljuk.

9.1. Példa:
(a) A $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\, dx = -\log|\cos x| + C.$$

(b) Tetszőleges I intervallumon

$$\int \sin^3 x\, dx = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)\, dx = \int \sin x\, dx - \int \sin x \cos^2 x\, dx =$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

(c) A $\left(-\frac{2}{5}, +\infty\right)$ intervallumon

$$\int \sqrt{5x+2}\, dx = \frac{1}{5}\int 5\sqrt{5x+2}\, dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}(5x+2)^{3/2} + C.$$

Sokszor azonban a fenti trükkök alkalmazása sem elég. Általában elmondható, hogy a primitív függvény meghatározására általános recept nincs, egy-egy konkrét eset akár több integrálási módszer alkalmazását is szükségessé teheti. Ilyen esetekben különösen hasznos lehet a szimbolikus programcsomagokba (pl. MAPLE) beépített tudásanyag.

Most két, elég általánosan használható integrálási módszert mutatunk.

Parciális integrálás

9.6. Állítás: . Ha u, v olyan differenciálható függvények, hogy $u'v$-nek van primitív függvénye, akkor uv'-nek is van primitív függvénye, és

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Bizonyítás. A szorzatfüggvény deriválására vonatkozó $(uv)' = u'v + uv'$ összefüggésből $uv' = (uv)' - u'v$. Mindkét oldalt integrálva, az állítás adódik.

A parciális integrálás nem közvetlenül az uv' függvény primitív függvényt szolgáltatja, hanem a problémát *visszavezeti egy másik primitív függvény* (nevezetesen $u'v$ primitív függvényének) *kiszámítására*. Természetesen a módszert akkor célszerű alkalmazni, ha ez a másik primitív függvény az eredeténél egyszerűbben határozható meg.

Az, hogy az integrandust hogyan bontjuk fel uv' szorzatra, nem mindig látható és nem is mindig egyértelmű, ehhez bizonyos gyakorlatra van szükség. A módszert néha egymás után többször is kell alkalmazni, ill. kombinálni más integrálási módszerekkel. Jellegzetes alkalmazási lehetőségeket az alábbi példákon keresztül mutatunk be.

9.2. Példa: $\int x \cdot \sin x \, dx = ?$

Megoldás. Próbálkozzunk először az alábbi szereposztással: $u(x) := \sin x$ és $v'(x) := x$. Ekkor $u'(x) = \cos x$ és $v(x) = \frac{x^2}{2}$. A parciális integrálás formulája szerint

$$\int x \cdot \sin x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x \, dx,$$

de a jobb oldali integrál még bonyolultabb lett az eredeténél. Így ez a szereposztás nem vezet célra. Próbálkozzunk a fordított szereposztással: $u(x) := x$ és $v'(x) := \sin x$. Ekkor $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos x$, így

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cdot \cos x + \int 1 \cdot \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

A kapott eredmény deriválással ellenőrizhető:

$$(-x \cos x + \sin x)' = -1 \cdot \cos x + x \cdot \sin x + \cos x = x \cdot \sin x.$$

Ha tehát az egyik tényező polinom, akkor célszerű azt u-nak választani, mert a deriváláskor annak fokszáma csökken.

Magasabb fokszámú polinomok esetén a módszert többször is kell alkalmazni, mint azt az alábbi példa is mutatja.

9.3. Példa: $\int x^2 e^{3x} \, dx = ?$

Megoldás. Legyen $u(x) := x^2$ és $v'(x) := e^{3x}$, ekkor $u'(x) = 2x$ és $v(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$. Ezért

$$\int x^2 e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} \, dx.$$

A jobb oldalon ismét parciálisan integrálunk $u(x) := x$, $v'(x) := e^{3x}$ szereposztással. Ekkor $u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$, ahonnan

$$\int x^2 e^{3x} \, dx = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} \, dx \right) = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C.$$

A példát általánosítva, könnyen látható, hogy egy n-edfokú polinom és egy exponenciális (vagy trigonometrikus) függvény szorzatának integrálása n db parciális integrálási lépésen keresztül valósítható meg.

Néha segít, ha u-nak magát az integrandust, v'-nek pedig az azonosan 1 függvényt választjuk.

9.4. Példa: $\int \log x \, dx = ?$

Megoldás. Az $u(x) := \log x$, $v'(x) := 1$ választással $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = x$, így

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \log x - x + C.$$

Integrálás helyettesítéssel

9.7. Állítás: . Legyenek $I, J \subset \mathbf{R}$ intervallumok. Legyen az $f : J \to \mathbf{R}$ függvény egy primitív függvénye az $F : J \to \mathbf{R}$ függvény. Ha $g : I \to J$ egy differenciálható függvény, akkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek van primitív függvénye, és

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(x))$$

Bizonyítás. Az összetett függvény deriválására vonatkozó

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = F'(g(x)) g'(x)$$

egyenlőségből:

$$\frac{d}{dx}(F(g(x))) = f(g(x)) g'(x)$$

Integrálva mindkét oldalt, az állítás adódik.

A tétel gyakorlati alkalmazásában a következő, nem egészen korrekt, de könnyen megjegyezhető eljárást szokták ajánlani. Vezessünk be egy új változót: $t := g(x)$. Ennek deriváltja $\frac{dt}{dx} = g'(x)$. Formálisan átszorozva dx-szel, kapjuk, hogy $dt = g'(x) \, dx$. Ezt, valamint $g(x)$ helyébe t-t helyettesítve

$$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt = F(t) = F(g(x)),$$

az előző állítással egyezésben.

A módszert az alábbi példán illusztráljuk.

9.5. Példa: $\int xe^{-x^2}\,dx =?$

Megoldás. Legyen $t := x^2$, akkor $dt = 2x\,dx$. Innen

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x^2}2x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C,$$

melynek helyessége deriválással könnyen ellenőrizhető.

Sokszor célszerűbb az állítás alábbi változatát használni. Tekintsük a $\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))$ egyenlőséget valamilyen $g^{-1}(x)$ helyen (feltéve persze, hogy a g^{-1} inverz függvény létezik). A bal oldali $(f\circ g)g'$ integrandus egy primitív függvényét H-val jelölve, kapjuk, hogy $F(x) = H(g^{-1}(x))$. A következő állítást nyertük:

9.1. Következmény: . Legyenek I,$J \subset \mathbf{R}$ intervallumok. Ha $g : I \to J$ egy olyan differenciálható függvény, melynek g^{-1} inverze létezik, továbbá az $f : J \to \mathbf{R}$ függvény olyan, hogy a $(f\circ g)g'$ függvénynek van primitív függvénye, akkor f-nek is van primitív függvénye, és

$$\int f(x)\,dx = H(g^{-1}(x)),$$

ahol H jelöli $(f\circ g)g'$ egy primitív függvényét.

Az állítás tehát az f függvény primitív függvényének megkeresését visszavezeti az $(f\circ g)g'$ függvény primitív függvényének megkeresésére. A módszer a gyakorlatban akkor használható, ha ez utóbbi feladat már egyszerűbb az eredetinél.

A fenti következmény látszólag a megelőző állítás egy variánsa. Különbség van azonban a gyakorlati alkalmazás terén, melyet a fentebb leírt formalizmus könnyen áttekinthetővé és megjegyezhetővé tesz. Szemben az előző megközelítéssel, amikor a g függvényt helyettesítettük új változóval, most az x változó helyett vezetünk be egy új függvényt: $x := g(t)$. Deriválva: $dx = g'(t)\,dt$, továbbá nyilván $t = g^{-1}(x)$. Ezeket behelyettesítve az eredeti integrálba, kapjuk, hogy

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt = H(t) = H(g^{-1}(x)),$$

a fenti következménnyel egyezésben.

9.6. Példa: Tekintsük ismét az $\int xe^{-x^2}\,dx$ integrált. Legyen $t := x^2$, innen $x = \sqrt{t}$ (g szerepét most a gyökfüggvény játssza: $g(t) = \sqrt{t}$). Deriválva: $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$, azaz

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\cdot e^{-t}\cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C.$$

Végül vissza kell térni a régi változóhoz, azaz a jobb oldali kifejezést a $t = g^{-1}(x) = x^2$ helyen vesszük, innen:

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

A következő példában a helyettesítést és a parciális integrálást együttesen kell alkalmazni.

9.7. Példa: $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = ?$

Megoldás. Helyettesítsünk: legyen $t := \sqrt{x}$, akkor $x = t^2$, és $dx = 2t\,dt$. Innen $\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int e^t\cdot t\,dt$. A jobb oldalon parciálisan integrálunk az $u(t) := t$, $v'(t) := e^t$ szereposztással. Innen $u'(t) = 1$, $v(t) = e^t$, ezért

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot\left(t\cdot e^t - \int e^t\,dt\right) = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Racionális törtfüggvények integrálása

Végül röviden vázoljuk *racionális törtfüggvények* (azaz két polinom hányadosaként kifejezhető függvények) integrálási technikáját. Nem törekszünk teljes általánosságra, csak valós együtthatós polinomokat tekintünk, és csak azt az esetet vizsgáljuk, mikor a nevező legfeljebb másodfokú polinom. *Feltesszük, hogy a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál*, ellenkező esetben egyszerű algebrai műveletekkel (nevezetesen: maradékos osztással) elérhető, hogy az integrandus egy polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegeként álljon elő, ahol a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál. Az algoritmust az alábbi példával szemléltetjük: az eljárás könnyen általánosítható tetszőleges polinomok esetére.

9.8. Példa: Hozzuk egyszerűbb alakra az alábbi formulával értelmezett racionális törtfüggvényt (azaz osszuk el maradékosan a számlálót a nevezővel):

$$f(x) := \frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + x + 3}.$$

Megoldás. A hányadospolinom legmagasabb fokú tagját a számláló és a nevező legmagasabb fokú tagjainak hányadosa adja. Esetünkben ez x. A maradékot visszaszorzással és különbségképzéssel kapjuk:

$$\frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + x + 3} = x + \frac{(x^3 + 5x - 1) - x \cdot (x^2 + x + 3)}{x^2 + x + 3} = x + \frac{-x^2 + 2x - 1}{x^2 + x + 3}$$

A jobb oldali második törtkifejezésben a számlálója már csak másodfokú. A hányados tehát $\frac{-x^2}{x^2} = -1$, a maradékot ugyanúgy kapjuk, mint az előző lépésben:

$$\frac{x^3 + 5x - 1}{x^2 + x + 3} = x - 1 + \frac{(-x^2 + 2x - 1) - (-1) \cdot (x^2 + x + 3)}{x^2 + x + 3} = x - 1 + \frac{3x + 2}{x^2 + x + 3}.$$

Előállítottuk tehát a kiindulási törtfüggvényt egy elsőfokú polinom és egy olyan racionális törtfüggvény összegeként, ahol a számláló már határozottan kisebb fokszámú, mint a nevező. Figyeljük meg, hogy az algoritmus az egész számok jól ismert osztási algoritmusának pontos megfelelője.

1. Elsőfokú nevező: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x + a}\, dx$$

Megoldás. Az integrál a 9.3. Állítás segítségével azonnal meghatározható:

$$\int \frac{1}{x + a}\, dx = \log|x + a| + C.$$

9.9. Példa:

$$\int \frac{1}{2x + 6}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x + 3}\, dx = \frac{1}{2} \log|x + 3| + C$$

minden olyan intervallumon, amely a (-3) számot nem tartalmazza.

2. Másodfokú nevező: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{x+a}{x^2+px+q}\,dx$$

Feltehető, hogy a számláló konstans. Ellenkező esetben az integrandus két olyan törtkifejezés összegére bontható, hogy az elsőben a számláló épp a nevező deriváltja (így a 9.3. Állítás alkalmazható), a másodikban pedig a számláló konstans:

$$\int \frac{x+a}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \frac{-p+2a}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+px+q| + \frac{-p+2a}{2}\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx,$$

így elég a jobb oldali második integrált meghatározni. Az alkalmazott integrálási technika *a nevező valós gyökeinek számától* függ, az alábbiakban ezeket részletezzük.

2a. *Nincs valós gyök*, azaz $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Ekkor a nevező teljes négyzetté alakítható:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})}\,dx =: \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + c^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{c^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{c}\right)^2 + 1}\,dx.$$

Alkalmazzuk a $t := \frac{x+\frac{p}{2}}{c}$ helyettesítést, innen $dx = c\,dt$, és ezért

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{c}\mathrm{arctg}\,t + C = \frac{1}{c}\mathrm{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{c}\right) + C,$$

ahol tehát $c^2 := q - \frac{p^2}{4}$.

9.10. Példa: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx$$

Megoldás. A nevezőnek nincs valós gyöke, és teljes négyzetté alakítható, innen

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+9}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+1}\,dx.$$

Alkalmazzuk a $t := \frac{x+2}{3}$ helyettesítést. Innen $dx = 3\,dt$, és

$$\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{3}\text{arctg}\, t + C = \frac{1}{3}\text{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right) + C.$$

2b. *Egyetlen valós gyök van*, azaz $\frac{p^2}{4} - q = 0$. Ekkor a nevező a gyöktényező négyzete, a primitív függvény pedig azonnal adódik:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2}\,dx = -\frac{1}{x+\frac{p}{2}} + C.$$

9.11. Példa: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx$$

Megoldás. A nevezőnek egyetlen valós gyöke van, a (-2). Ezért:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = -\frac{1}{x+2} + C.$$

2c. *Két különböző valós gyök van*, azaz $\frac{p^2}{4} - q > 0$. Ekkor a nevező két különböző gyöktényező szorzata:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx,$$

ahol x_1,x_2 a nevező gyökei.

Közös nevezőre hozással könnyen ellenőrizhető az alábbi algebrai átalakítás helyessége:

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right),$$

azaz az integrál két 1. típusú integrál összegére bomlik. Az integrálás most már nehézség nélkül elvégezhető:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{x_1-x_2}\left(\int \frac{1}{x-x_1}\,dx - \int \frac{1}{x-x_2}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\log\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C.$$

Az iménti algebrai átalakítást a *parciális törtekre bontás* módszerének nevezik. Az átalakítás algoritmusa az alábbi módon is megjegyezhető, ill. alkalmazható. Próbáljuk meg az $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$ törtkifejezést két egyszerűbb tört *összegeként* előállítani:

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2},$$

ahol A, B egyelőre ismeretlen számok. A jobbooldalt közös nevezőre hozva kapjuk, hogy:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2} = \frac{Ax-Ax_2+Bx-Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x+(-Ax_2-Bx_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

A kifejezés biztosan azonosan egyenlő a kiindulási $\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$ törtkifejezéssel, ha

$$A+B=0, \qquad -Ax_2-Bx_1=1.$$

Megoldva ezt a kétismeretlenes egyenletrendszert, A, B meghatározható.
Az eljárás könnyen kiterjeszthető arra az esetre is, ha a nevező elsőfokúnál magasabb fokú polinomok szorzata.

9.12. Példa: Határozzuk meg az alábbi primitív függvényt:

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx$$

Megoldás. A nevezőnek két különböző valós gyöke van, éspedig a (-5) és az 1. A nevező gyöktényezős alakja tehát $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)$. Bontsuk az $\frac{1}{(x+5)(x-1)}$ kifejezést parciális törtek összegére:

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-1},$$

ahol A, B egyelőre ismeretlenek. A jobb oldalt közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-1} = \frac{Ax-A+Bx+5B}{(x+5)(x-1)} = \frac{(A+B)x+(-A+5B)}{(x+5)(x-1)}.$$

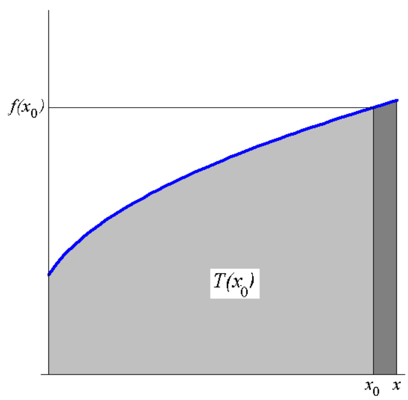
Az így kapott kifejezés biztosan egyenlő $\frac{1}{(x+5)(x-1)}$-gyel, ha $A+B=0$, és $-A+5B=1$. Megoldva ezt az egyenletrendszert, kapjuk, hogy $A=-\frac{1}{6}$, $B=\frac{1}{6}$. Innen tehát

$$\int \frac{1}{x^2+4x-5}\,dx = -\frac{1}{6}\int \frac{1}{x+5}\,dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{6}\log\left|\frac{x-1}{x+5}\right| + C$$

minden olyan intervallumon, amely sem az 1, sem a (-5) számot nem tartalmazza.

9.3. A Riemann-integrál

Ebben a szakaszban a primitív függvény megkeresésének egy általános módszerét építjük fel. Az elv, nagy vonalakban, az alábbi lesz. Legyen $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ folytonos és (egyelőre) nemnegatív függvény, és jelölje $T(x)$ az f függvény grafikonja alatti területet az a és valamely $x\in[a,b]$ hely közt. Akkor tetszőleges $a\le x_0<x\le b$ mellett a $T(x)-T(x_0)$ különbség nyilván



9.1. ábra. *A T területfüggvény és megváltozása*

a grafikon alatti terület az x_0 és az x helyek közt, és ez, szemléletesen láthatóan, „körülbelül” az $f(x_0)\cdot(x-x_0)$ értékkel egyezik, ha x „elég közel” van x_0-hoz. Ez esetben tehát

$$\frac{T(x)-T(x_0)}{x-x_0}\approx f(x_0).$$

Várható ezért, hogy $x\to x_0$ esetén a bal oldal $f(x_0)$-hoz tart. Ha ez valóban így van, akkor $T'(x_0)=f(x_0)$ minden $x_0\in[a,b]$ esetén, azaz a

T területfüggvény primitív függvénye f-nek $[a,b]$-n. Ahhoz, hogy ezt igazolni tudjuk, az intuitív területfogalmat kell pontosítani. Ezt tesszük meg a következőkben. A szigorú tárgyalás meglehetősen nehéz, ezért ahol csak lehet, igyekezünk szemléletes fogalmakkal dolgozni, részben feláldozva a szabatosságot.

Integrálközelítő összegek

Legyen $[a,b] \subset \mathbf{R}$ korlátos intervallum, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ pedig egy egyelőre tetszőleges függvény.

Intervallum felbontása:

Az $[a,b]$ intervallum egy *felbontásán* (vagy *felosztásán*) egy $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ véges sorozatot értünk. Jelölje a továbbiakban $h_k := x_k - x_{k-1}$ ($k = 1,2,...,N$). A felbontás *finomságának* a $\delta_N := \max_{1\leq k\leq N} h_k$ számot, azaz a maximális hosszúságú részintervallum hosszát nevezzük. Azt mondjuk, hogy a felbontások egy sorozata *korlátlanul finomodó*, ha a megfelelő δ_N számok sorozata zérussorozat, azaz $\delta_N \to 0$ ($N \to +\infty$).

Most definiálunk két nagyon szemléletes fogalmat, melyek a görbe alatti terület fogalmának megalapozásához szükségesek.

Alsó, felső integrálközelítő összegek:

Legyen $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges felbontása. Az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény ezen felbontáshoz tartozó *alsó integrálközelítő összegén* az

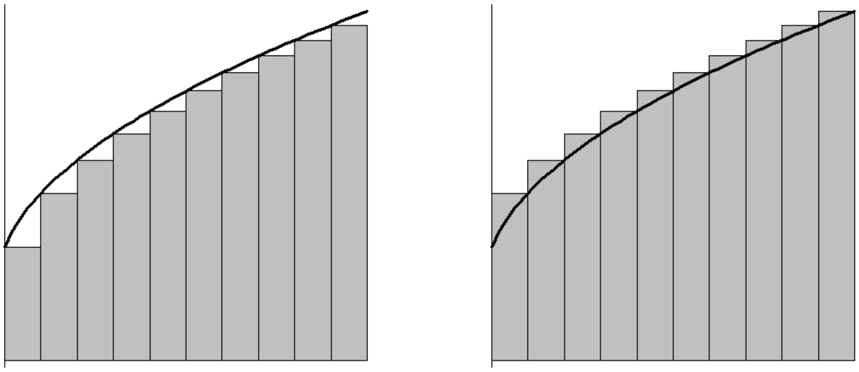
$$S_-^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^{N} f_k^{\min} \cdot h_k$$

számot, *felső integrálközelítő összegén* pedig az

$$S_+^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^{N} f_k^{\max} \cdot h_k$$

számot értjük, ahol $f_k^{\min}$ ill. $f_k^{\max}$ jelöli az f függvénynek az $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumon felvett minimális ill. maximális értékét (feltéve, hogy ezen értékek léteznek).

Ha pl. az f függvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon, akkor a definícióban szereplő $f_k^{\min}$, $f_k^{\max}$ Weierstrass tétele értelmében mindig léteznek,



9.2. ábra. *Alsó és felső integrálközelítő összeg*

ekkor tehát a definíció mindig értelmes. Nyilvánvaló, hogy minden felbontás esetén teljesül, hogy

$$S_-^{(N)}(f) \leq S_+^{(N)}(f).$$

Alsó, felső integrál:

Az $S_-(f) := \sup S_-^{(N)}(f)$ (ill. az $S_+(f) := \inf S_+^{(N)}(f)$) számot az f függvény *alsó integráljának* (ill. *felső integráljának*) nevezzük, ahol az infimum és szuprémum az $[a,b]$ intervallum összes felbontására vonatkozik.

Nyilvánvaló, hogy minden f függvény és minden felbontás esetén

$$S_-^{(N)}(f) \leq S_-(f) \leq S_+(f) \leq S_+^{(N)}(f).$$

Riemann-integrál:

Azt mondjuk, hogy az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvény *Riemann-integrálható*, vagy röviden: *integrálható*, ha az alsó és felső integrálja megegyezik. Ekkor ezt a közös értéket f-nek az $[a,b]$ intervallumon vett *Riemann-integráljának* (vagy *határozott integráljának*) nevezzük, és az $\int_a^b f$ vagy az $\int_a^b f(x)dx$ szimbólummal jelöljük.

A primitív függvényhez hasonló elnevezés és jelölés indokoltságát a következő szakaszban fogjuk látni. Kiderül, hogy a teljesen különböző származtatás ellenére a Riemann-integrál és a primitív függvény igen szoros kapcsolatban állnak egymással.

Nyilvánvaló, hogy minden Riemann-integrálható f függvény és minden felbontás esetén

$$S_-^{(N)}(f) \leq \int_a^b f \leq S_+^{(N)}(f),$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy a Riemann-integrál az intuitív „görbe alatti terület" pontos megfelelője. Valóban, a szóban forgó síkbeli halmaz (melyet tehát az f függvény grafikonja, az x tengely valamint az $x = a$ és $x = b$ függőleges egyenesek határolnak) minden alsó integrálközelítő összeget reprezentáló téglalap-együttesnél csak bővebb, és minden felső integrálközelítő összeget reprezentáló téglalap-együttesnél csak szűkebb lehet, így területe az alsó és felső integrálközelítő összegek közé kell, hogy essék.

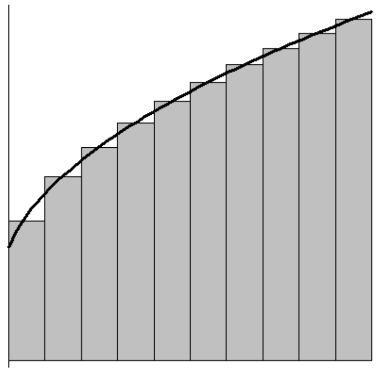
Egyáltalán nem magától értetődő, hogy az alsó és felső integrál minden függvény esetén megegyezne. Ez valóban nincs így. Ellenpéldaként tekintsük pl. a $[0,1]$ intervallumon értelmezett *Dirichlet-függvényt* (mely minden racionális számhoz 1-et és minden irracionális számhoz 0-t rendel). Könnyen látható, hogy ennek minden alsó integrálközelítő összege (és ezért alsó integrálja is) 0-val, és minden felső integrálközelítő összege (és ezért felső integrálja is) 1-gyel egyenlő. Ez a függvény tehát nem Riemann-integrálható. Azonban a legtöbb általunk már ismert függvény az. Triviális példa erre a konstans függvény. Az alábbi állítás igazolását az Olvasóra bízzuk.

9.13. Példa: Az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, $f(x) \equiv c$ függvény (ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges szám) Riemann-integrálható, éspedig $\int_a^b f = c \cdot (b - a)$.

Látni kell azonban azt, hogy a Riemann-integrál pontos kiszámítására a definíció a legtöbbször teljesen alkalmatlan. Közelítő meghatározása azonban – elvileg – igen könnyű. Tekintsük az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$ felbontását. Minden $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumban vegyünk fel egy tetszőleges $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ pontot, és készítsük el a

$$\sigma_N := \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k$$

összeget (*Riemann-összeg* vagy *téglányösszeg*). Megmutatható (de nem bizonyítjuk), hogy *az f függvény pontosan akkor Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon, ha minden korlátlanul finomodó felbontássorozat esetén a megfelelő Riemann-összegek sorozata a felbontástól és a $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ pontok választásától*



9.3. ábra. *Egy Riemann-összeg*

függetlenül konvergens, éspedig ugyanahhoz a számhoz tart. Ekkor ez a közös határérték az $\int_a^b f$ Riemann-integrállal egyezik.

Röviden (bár nem egészen pontosan) tehát

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k \to \int_a^b f, \quad \text{ha} \quad \delta_N = \max_{1 \leq k \leq N} h_k \to 0.$$

Következésképp minden, elég finom felbontás esetén egy tetszőleges Riemann-összeg a Riemann-integrált jól közelíti. A közelítés hibája azonban nehezen becsülhető, ehhez az f függvénytől többet kell megkövetelni, pl. azt, hogy f elégítse ki a Lipschitz-feltételt (ld. alább).

A Riemann-összegek definíciójából nyilvánvaló, hogy egy adott felbontáshoz tartozó tetszőleges Riemann-összeg tetszőleges alsó és felső integrálközelítő összegek közé esik, azaz

$$S_-^{(N)}(f) \leq \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k \leq S_+^{(N)}(f).$$

Megjegyezzük még, hogy a Riemann-integrál szemléletes jelentése *előjeles terület*, azaz negatív értékű függvények esetében a görbe alatti (helyesebben: a görbe *feletti*) területhez negatív előjel járul.

Felvetődik a kérdés, hogy miféle feltételek biztosítják egy függvény Riemann-integrálhatóságát. A következő állítás azt mutatja, hogy ehhez elegendő, ha a függvény kielégíti a Lipschitz-feltételt (amiből a folytonosság már következik).

9.8. Állítás: . Ha az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ függvényhez van olyan $C \geq 0$ szám, hogy minden $x,y \in [a,b]$ esetén teljesül az $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|$ becslés, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Bizonyítás. Tekintsük $[a,b]$-nek egy $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = b$ felbontását. Akkor a felső és alsó integrálközelítő összegek különbségére teljesül, hogy

$$0 \leq S_+^{(N)} - S_-^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} (f_k^{\max} - f_k^{\min}) \cdot h_k \leq \sum_{k=1}^{N} C|x_k - x_{k-1}| \cdot h_k =$$

$$= C \cdot \sum_{k=1}^{N} h_k^2 \leq C \cdot \max_{1 \leq k \leq N} h_k \cdot \sum_{k=1}^{N} h_k = C \cdot \delta_N \cdot (b - a).$$

Tekintsünk felbontásoknak egy korlátlanul finomodó sorozatát. Ekkor $\delta_N \to 0$ miatt a jobb oldal zérushoz tart, ami azt jelenti, hogy egymáshoz tetszőlegesen közeli alsó és felső integrálközelítő összegek léteznek. Innen $S_-(f) = S_+(f)$ már következik, azaz f valóban Riemann-integrálható $[a,b]$-n.

Megjegyezzük, hogy a fenti állítás bizonyítása egyúttal egy hibabecslést is szolgáltat a Riemann-összegekre nézve. Valóban, mivel mind a Riemann-integrál, mind pedig egy tetszőleges Riemann-összeg az alsó és felső integrálközelítő összegek közé esnek, azért

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h_k \right| \leq S_+^{(N)} - S_-^{(N)} \leq C \cdot \delta_N \cdot (b - a),$$

tehát a Riemann-összeg és a Riemann-integrál eltérése pusztán a felbontás finomságával és a Lipschitz-konstanssal megbecsülhető.

Lényegében a fenti állítás bizonyításának technikájával mutatható meg az is, hogy ha *f monoton és korlátos az* $[a,b]$ *intervallumon, akkor ott Riemann-integrálható is*.

A fenti állításnál sokkal erősebb tétel (bizonyításához eddigi eszköztárunk nem elegendő), hogy a Riemann-integrálhatóságot már a *folytonosság* is biztosítja.

9.1. Tétel: . Minden, az $[a,b]$ korlátos intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható is $[a,b]$-n.

Megjegyezzük még, hogy az integrálfogalom sokkal tágabb függvényosztályra is kiterjeszthető. Így pl. elegendő a szakaszonkénti folytonosság, tehát az integrandusnak (véges sok pontban) ugrása is lehet, az integrál pedig az egyes részintervallumokon vett integrálok összegével egyezik. Igazolható továbbá, hogy ha az integrandus értékét *véges sok* pontban tetszőlegesen megváltoztatjuk, ez sem az integrálhatóságot, sem pedig az integrál értékét nem befolyásolja. Az integrálfogalom kiterjesztésének részleteivel azonban (a később tárgyalandó improprius integrál kivételével) e jegyzet keretein belül nem foglalkozhatunk.

A következő tételben összefoglaljuk a Riemann-integrál alaptulajdonságait. Mindegyik állítás egyszerűen belátható a Riemann-összegekre való áttéréssel a határértékekre vonatkozó összefüggéseket alkalmazva, így a bizonyításokat elhagyjuk.

9.2. Tétel: . Legyenek $f,g : [a,b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integrálható függvények. Akkor
(a) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$,
(b) $\int_a^b (f-g) = \int_a^b f - \int_a^b g$,
(c) $\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$ tetszőleges $c \in \mathbf{R}$ esetén,
(d) ha $f \leq g$ teljesül $[a,b]$-n, akkor $\int_a^b f \leq \int_a^b g$,
(e) $\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^b f$.

Definíció szerint legyen mindig $\int_a^a f := 0$ (a szemlélettel teljes összhangban), továbbá, ha $b < a$, akkor *jelölje* $\int_a^b f := -\int_b^a f$. Ezekkel a megállapodásokkal az előző Tétel (e) állítása akkor is teljesül, ha az α szám nem feltétlen esik bele az $[a,b]$ intervallumba (feltéve, hogy f az itt előforduló, az $[a,b]$ intervallumnál bővebb $[\alpha,b]$ ill. $[a,\alpha]$ intervallumon integrálható.

A szakasz végén még egyszer hangsúlyozzuk, hogy eddigi eszközeink birtokában egy-egy konkrét függvény Riemann-integráljának kiszámítása még mindig nagyon nehézkes, bár elvileg tetszőleges pontossággal meghatározható (pl. a Riemann-összegek segítségével). A következő szakaszban megmutatjuk, hogy az f függvény egy *primitív függvényének* ismeretében a Riemann-integrál meghatározása már igen egyszerű. Ez egyúttal kapcsolatot is jelent a differenciálszámítás és a Riemann-integrál mindeddig teljesen különbözőnek tűnő területei között.

9.4. Az integrálszámítás középértéktétele és a Newton–Leibniz-tétel

9.3. Tétel: (az integrálszámítás középértéktétele). Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos (így Riemann-integrálható) függvény, akkor van (legalább egy) olyan $\xi \in [a,b]$ pont, melyre

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. Jelölje $m := \min_{a \le x \le b} f(x)$, és $M := \max_{a \le x \le b} f(x)$ (e számok Weierstrass tétele értelmében jól definiáltak). Könnyen látható, hogy $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, azaz

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \le M.$$

Bolzano tétele miatt tehát létezik olyan $\xi \in [a,b]$ hely, ahol az f függvény a $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ értéket veszi fel.

A tételben szereplő $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ számot az f függvénynek az $[a,b]$ intervallumra vonatkozó *integrálközepének* nevezzük.

A tétel igen szemléletes. Azt fejezi ki, hogy a görbe alatti terület *pontosan* egyenlő egy olyan téglalapnak a területével, melynek egyik oldala maga az $[a,b]$ intervallum, másik oldala pedig valamilyen „közbenső" $f(\xi)$ függvényérték (ld. a 9.4. ábrát).

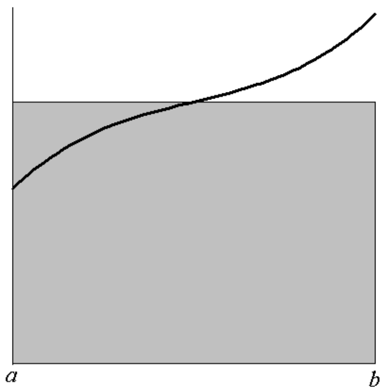
A tételt alkalmazva az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges felbontásakor fellépő részintervallumokra, azonnal kapjuk azt az érdekes következményt, hogy az $[a,b]$ intervallum *bármely felbontásához találhatók olyan* $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ *pontok, hogy a megfelelő* $\sum_{k=1}^N f(\xi_k)h_k$ *Riemann-összeg pontosan egyenlő az* $\int_a^b f(x)dx$ *Riemann-integrállal.* Kis túlzással mondhatjuk tehát, hogy a Riemann-összegek nem is olyan rossz közelítései a Riemann-integrálnak.

A középértéktétel segítségével most már jellemezni tudjuk az előző szakasz elején említett T területfüggvényt.

9.2. Következmény: . Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, és minden $a \le x \le b$ esetén jelölje

$$T(x) := \int_a^x f$$

(integrálfüggvény). Akkor az így definiált T függvény primitív függvénye f-nek az $[a,b]$ intervallumon.



9.4. ábra. *Az integrálközép szemléltetése*

Bizonyítás. Legyenek $x,x_0 \in [a,b]$ tetszőlegesek. A Riemann-integrál alaptulajdonságai (9.2. Tétel) következtében

(a) Ha $x > x_0$, akkor $T(x) - T(x_0) = \int_a^x f - \int_a^{x_0} f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^x f - \int_a^{x_0} f$, azaz $T(x) - T(x_0) = \int_{x_0}^x f$. A középértéktétel (9.3. Tétel) miatt van oly $\xi \in [x_0,x]$, hogy $f(\xi) = \frac{1}{x-x_0} \int_x^{x_0} f(x)dx$, innen $\frac{T(x)-T(x_0)}{x-x_0} = f(\xi)$.

(b) Ha $x < x_0$, akkor $T(x_0) - T(x) = \int_a^{x_0} f - \int_a^x f = \int_a^x f + \int_x^{x_0} f - \int_a^x f$, azaz $T(x_0) - T(x) = \int_x^{x_0} f$. Újra a középértéktétel miatt van oly $\xi \in [x,x_0]$, hogy $f(\xi) = \frac{1}{x_0-x} \int_x^{x_0} f(x)dx$, ahonnan $\frac{T(x_0)-T(x)}{x_0-x} = f(\xi)$.

Mindkét esetben van tehát olyan ξ hely az x és x_0 között, hogy

$$\frac{T(x) - T(x_0)}{x - x_0} = f(\xi)$$

Ha most $x \to x_0$, akkor nyilván $\xi \to x_0$ is teljesül, így f folytonossága miatt $f(\xi) \to f(x_0)$. Ezért T differenciálható x_0-ban, és $T'(x_0) = f(x_0)$, amivel a bizonyítás kész.

Most már bebizonyíthatjuk a primitív függvény és a Riemann-integrál kapcsolatát leíró alapvető tételt, melyet az *integrálszámítás alaptételének* is neveznek.

9.4. Tétel: (Newton–Leibniz-tétel). Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, és legyen F ennek egy tetszőleges primitív függvénye. Akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás. Vezessük be ismét a T integrálfüggvényt: $T(x) := \int_a^x f$. Az előző Következmény értelmében T primitív függvénye f-nek, így az F primitív függvénytől csak egy konstansban különbözhet: $F = T + C$ alkalmas $C \in \mathbf{R}$ számra. Innen pedig

$$F(b) - F(a) = T(b) + C - T(a) - C = \int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

ami a tételt igazolja.

Bevezetve a tömör $[F]_a^b := F(b) - F(a)$ jelölést, a Newton–Leibniz-tétel az alábbi formába is írható

$$\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = \left[\int f(x)dx\right]_a^b,$$

ami egyúttal indokolja a hasonló jelölést is.

Mivel pedig f definíció szerint primitív függvénye az f' deriváltfüggvénynek (ha az létezik), azért igaz az alábbi

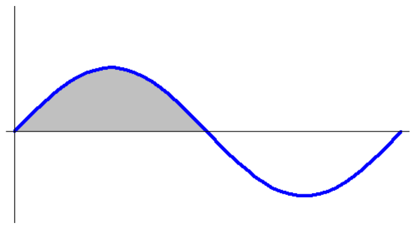
9.3. Következmény: . Ha $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonosan deriválható az $[a,b]$ intervallumon, akkor

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Az eredményeket néhány példán keresztül szemléltetjük.

9.14. Példa: Határozzuk meg a szinuszfüggvény grafikonjának egyetlen félhulláma alatti területet.

Megoldás. A szóban forgó terület az $\int_0^\pi \sin x\,dx$ Riemann-integrállal egyenlő. Ennek értéke $\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2.$

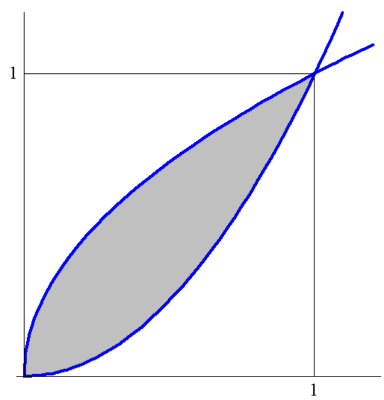


9.5. ábra. *Fél szinuszhullám alatti terület*

9.15. Példa: Mekkora területet fognak közre az $x \mapsto x^2$ és az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvények grafikonjai?

Megoldás. A szóban forgó terület két Riemann-integrál különbségeként fejezhető ki, mégpedig

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$



9.6. ábra. *Az $x \mapsto x^2$ és az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvények grafikonjai közti terület*

A primitív függvények meghatározására a már tárgyalt integrálási módszereket használhatjuk. Külön megemlítendő azonban a *helyettesítéses integrálás* esete, mely határozott (Riemann-) integrálok kiszámítására valamivel egyszerűbben használható, mint a primitív függvények meghatározására.

9.9. Állítás: . Ha az $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény primitív függvénye F, $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ pedig folytonosan differenciálható függvény, akkor

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F]_{g(a)}^{g(b)}.$$

Az állítás a 9.7. Állítás azonnali következménye. Különbség van azonban a gyakorlati alkalmazásban. Bevezetve a $t := g(x)$ helyettesítést, deriválással a formális $dt = g'(x)dx$ egyenlőség adódik. Az állítást ebben a formalizmusban úgy interpretáljuk, hogy ha az eredeti x változó befutja az $[a,b]$ intervallumot, akkor az új t változó nyilván a $[g(a),g(b)]$ intervallumot futja be, innen

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = [F]_{g(a)}^{g(b)}.$$

Az integrandusban tehát $g(x)$-et kicseréljük t-re, $g'(x)dx$-et dt-re, az integrálási határokat pedig $g(a)$-ra ill. $g(b)$-re, így egy új integrált kapunk, melyet feltehetően már könnyebb kiszámítani. A fenti gondolatmenet matematikailag nem egészen korrekt, de könnyen megjegyezhető, és, mint láttuk, mégis korrekt eredményre vezet.

9.16. Példa: Számítsuk ki az $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin x^2\,dx$ Riemann-integrált.

Megoldás. Legyen $t := x^2$, akkor deriválással $dt = 2x\,dx$. Mikor x befutja a $[0,\sqrt{\pi}]$ intervallumot, t a $[0,\pi]$ intervallumot futja be, így

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin x^2 \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}[-\cos t]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = 1.$$

A 9.9. Állítás egy hasznos speciális esetét nyerjük, ha az integrálási határokat (a és b) kicseréljük a $g^{-1}(a)$ és $g^{-1}(b)$ számokra (feltéve persze, hogy a g^{-1} inverz függvény létezik). Felcserélve az x és t változójelöléseket (ez megtehető, egy-egy integrálon belül a függvény argumentumának jelölése közömbös), a következő állításhoz jutunk.

9.4. Következmény: . Ha $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pedig olyan folytonosan differenciálható függvény, melynek g^{-1} inverze létezik, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt.$$

Az állítás gyakorlati alkalmazása a már megismert szemléletes formalizmusban a következő. Szemben a 9.9. Állítás esetével, ahol egy függvényt helyettesítettünk változóval, most az x változót helyettesítjük egy g függvénnyel: $x := g(t)$. Deriválva: $dx = g'(t)\,dt$. Az új változónak megfelelő integrálási határokat az alábbi meggondolással nyerjük. Nyilván $t = g^{-1}(x)$, így ha x befutja az $[a,b]$ intervallumot, akkor t a $[g^{-1}(a),g^{-1}(b)]$ intervallumot futja be. Az integrandusban tehát kicseréljük x-et $g(t)$-re, dx-et $g'(t)\,dt$-re, az integrálási határokat pedig $g^{-1}(a)$-r ill. $g^{-1}(b)$-re. Így egy új integrált kapunk, melyet – reményeink szerint – már könnyebb kiszámítani.

9.17. Példa: Határozzuk meg az $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ függvény grafikonja (negyedkör) alatti területet.

Megoldás. A kérdéses terület nyilván az $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ Riemann-integrál értékével egyezik. Legyen $x := \sin t$, akkor $dx = \cos t\,dt$. Könnyen látható, hogy amennyiben t befutja a $[0,\frac{\pi}{2}]$ intervallumot, x épp a $[0,1]$ intervallumot futja be. (Gépiesebben: t befutja az $[\arcsin 0,\arcsin 1]$ intervallumot.) Innen

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

Alkalmazva a $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ trigonometrikus azonosságot:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\cdot\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Megkaptuk tehát az egységsugarú kör területének negyedrészét. Az eredmény persze jól ismert, ami azt jelzi, hogy a Riemann-integrál valóban a geometriai területfogalmat általánosítja.

9.5. Ívhossz és térfogat

Ebben a szakaszban *síkgörbék* ívhosszát fogjuk értelmezni és a kiszámítására formulát adni. Nem célunk teljes általánosságra törekedni. Csak olyan görbékkel foglalkozunk, melyek *folytonos* függvények grafikonjaként állíthatók elő. Hasonlóan, a térfogatot is csak bizonyos *forgástestekre* vizsgáljuk, mégpedig olyanokra, amelyek egy folytonos $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával keletkeznek.

Ívhossz:

Legyen $[a,b] \subset \mathbf{R}$ egy korlátos intervallum, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ adott folytonos függvény. Jelölje Γ az f függvény grafikonját, azaz

$$\Gamma := \{(x,f(x)) : \ a \le x \le b\} \subset \mathbf{R}^2.$$

Legyen $a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felbontása. Tekintsük az ehhez tartozó *beírt töröttvonal* hosszát:

$$L_N := \sum_{k=1}^{N} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Ha a beírt töröttvonalak halmaza felülről korlátos, akkor azt mondjuk, hogy a Γ görbének *van ívhossza*, a beírt töröttvonal-hosszak felső határát pedig a görbe *ívhosszának* nevezzük, és a $|\Gamma|$ szimbólummal jelöljük.

A definíció igen szemléletes, de konkrét görbék ívhosszának kiszámítására alkalmatlan. Ha azonban az f függvény nemcsak folytonos, de *folytonosan differenciálható* is, az ívhosszra (elvben) egyszerű formulát tudunk adni.

9.5. Tétel: . Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény, jelölje Γ a függvény grafikonját. Akkor Γ-nak van ívhossza, éspedig

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Bizonyítás. Jelölje szokásosan $h_k := x_k - x_{k-1}$ ($k = 1,2,...,N$), akkor az adott felosztáshoz tartozó beírt töröttvonalhossz:

$$L_N = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{h_k^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot h_k$$

A Lagrange-középértéktétel szerint alkalmas $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ számok mellett az itt fellépő különbségi hányadosok pontosan egyenlők a $f'(\xi_k)$ deriváltakkal, innen

$$L_N = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot h_k,$$

azaz L_N az $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ integrál egy Riemann-összege (az integrál létezik, mert f' folytonos). A felbontás korlátlan finomítása mellett tehát az L_N számok ehhez az integrálhoz tartanak, ami egyúttal az L_N számok szuprémuma is. A részletes meggondolásokat elhagyjuk.

9.18. Példa: Számítsuk ki az R sugarú félkör kerületét.

Megoldás. Jelölje $f(x) := \sqrt{R^2-x^2}$ (ahol $-R \le x \le R$), akkor f grafikonja épp egy origó középű R sugarú félkör. Nyilván $f'(x) := \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, így a 9.5. Tétel miatt a görbe ívhossza

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx = \int_a^b \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx$$

Helyettesítsünk: $x := R\sin t$, akkor $dx = R\cos t\,dt$. Az új integrálási határok: $-\pi/2$ és $\pi/2$. Innen

$$|\Gamma| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R}{R\cos t} R\cos t\,dt = R\pi.$$

Az eredmény persze jól ismert. A példa azt illusztrálja, hogy a fenti fogalom valóban az intuitív ívhossz-fogalmat takarja.

9.19. Példa: Számítsuk ki az $x \mapsto \operatorname{ch} x$ láncgörbe ívhosszát a -1 és 1 abszcisszájú pontok közt.

Megoldás. A függvény deriváltja: $x \mapsto \operatorname{sh} x$, innen az ívhossz:

$$|\Gamma| = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x\,dx = 2\operatorname{sh} 1 = e - \frac{1}{e}.$$

Ha a görbe $x = a(t)$, $y = b(t)$ paraméteres formában adott (ahol t valamilyen $[\alpha,\beta]$ intervallumot fut be), akkor a $\frac{dy}{dx} = \frac{b'(t)}{a'(t)}$ összefüggést felhasználva, az $x := a(t)$ helyettesítéssel az ívhossz alábbi kifejezéséhez jutunk:

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(a'(t))^2 + (b'(t))^2}\,dt$$

(mivel ekkor $dx = a'(t)\,dt$). Ez a megközelítés már alkalmas az ívhossz-fogalomnak és az ívhossz kiszámításának *térgörbékre* való kiterjesztésére. Megmutatható (a részletektől eltekintünk), hogy ha egy térgörbe $x = a(t)$,

$y = b(t)$, $z = c(t)$ paraméteres formában adott (ahol a, b, c adott, folytonosan differenciálható függvények, t pedig valamilyen $[\alpha,\beta]$ intervallumot fut be), akkor e térgörbe ívhossza az alábbi formulával számítható ki:

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(a'(t))^2 + (b'(t))^2 + (c'(t))^2}\, dt.$$

Rátérünk a forgástestek térfogatának témakörére.

Forgástest térfogata:

Legyen $[a,b] \subset \mathbf{R}$ egy korlátos intervallum, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ adott folytonos függvény. Legyen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ az $[a,b]$ intervallum egy felbontása, jelölje $h_k := x_k - x_{k-1}$. Tekintsük az f függvény grafikonja által meghatározott forgástestet, amikor a grafikont az x tengely körül forgatjuk. Definiáljuk a *beírt térfogat-összegeket*:

$$V_-^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^N (f_k^{\min})^2 \pi \cdot h_k,$$

és a *körülírt térfogat-összegeket*:

$$V_+^{(N)}(f) := \sum_{k=1}^N (f_k^{\max})^2 \pi \cdot h_k,$$

ahol $f_k^{\min}$ ill. $f_k^{\max}$ jelöli f minimális ill.maximális értékét az $[x_{k-1},x_k]$ részintervallumon. Ha a $V_-^{(N)}(f)$ számok halmazának felső határa és a $V_+^{(N)}(f)$ számok halmazának alsó határa megegyezik, akkor ezt a közös V értéket a fenti forgástest *térfogatának* nevezzük.

A definíció szemléletes: a térfogatot beírt és körülírt *hengerek* össztérfogatával közelítjük. Valóban, a k-adik henger sugara épp $f_k^{\min}$ ill. $f_k^{\max}$, magassága pedig h_k. A konstrukció pontos megfelelője a Riemann-integrál alsó és felső integrálközelítő összegeinek. Világos, hogy a beírt ill. körülírt térfogatösszegek épp a $\pi \cdot f^2$ függvény alsó ill. felső integrálközelítő összegeivel egyeznek, innen azonnal kapjuk a forgástestek térfogatának kiszámítására vonatkozó tételt.

9.6. Tétel: . Legyen $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ folytonos függvény, akkor a grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával nyert forgástestnek mindig van térfogata, éspedig

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

9.20. Példa: Határozzuk meg az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis x-tengely körüli forgatásával nyert forgási ellipszoid térfogatát.

Megoldás. A felső fél-ellipszist leíró függvény formulája: $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ (ahol $x \in [-a,a]$). Innen a térfogat:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = b^2\pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = 2b^2\pi \cdot \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{4ab^2\pi}{3}.$$

9.6. Improprius integrál

A Riemann-integrál felépítésekor mindvégig egy *korlátos és zárt* $[a,b]$ intervallumon értelmezett függvényeket vizsgáltunk. Általában feltettük, hogy a szóban forgó függvények folytonosak, így azok automatikusan korlátosak is (Weierstrass tétele értelmében). Most ezeket a feltételeket igyekszünk gyengíteni, azaz az integrálfogalmat igyekszünk kiterjeszteni bizonyos nem korlátos intervallumokra ill. nem korlátos függvényekre.

Integrálás nem korlátos intervallumon

Legyen $f : [a, +\infty) \to \mathbf{R}$ egy (félig végtelen intervallumon értelmezett) folytonos függvény. Már tudjuk (9.1. Tétel), hogy f minden $[a,b]$ korlátos intervallumon Riemann-integrálható ($b > a$).

Improprius integrál:

Ha a $T(x) := \int_a^x f$ integrálfüggvénynek a $(+\infty)$-ben van véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^{+\infty} f$ *improprius integrál létezik* (vagy *konvergens*), és ezt a határértéket f-nek az $[a, +\infty)$ intervallumon vett *improprius integráljának* nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^{+\infty} f$ improprius integrál nem létezik vagy *divergens*.

Hasonlóan definiáljuk a $(-\infty,a]$ félig végtelen intervallumon vett improprius integrált is. Azt mondjuk, hogy az egész $\mathbf{R}$-en értelmezett folytonos f függvény improprius értelemben integrálható, ha minden $a \in \mathbf{R}$ esetén az $\int_{-\infty}^{a} f$ és az $\int_{a}^{+\infty} f$ improprius integrálok mindig léteznek. Ekkor az $\int_{-\infty}^{a} f + \int_{a}^{+\infty} f$ összeg nem függ az a szám megválasztásától (miért?); ezt az összeget f-nek az $\mathbf{R}$-en vett improprius integráljának nevezzük és az $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ vagy az $\int_{\mathbf{R}} f$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.

Legyen ismét f egy $[a,+\infty)$ intervallumon értelmezett folytonos függvény. Jelölje F ennek egy primitív függvényét. A Newton–Leibniz-tétel értelmében minden $b > a$ számra

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

teljesül. Képezve mindkét oldal határértékét $b \to +\infty$ mellett, azonnal kapjuk, hogy

9.10. Állítás: . Az $\int_{a}^{+\infty} f$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha F-nek véges határértéke van a $(+\infty)$-ben, éspedig ekkor

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

A jobb oldalon álló különbséget röviden az $[F]_{a}^{+\infty}$ szimbólummal is szokás jelölni. Formálisan tehát a Newton–Leibniz-tétel most is igaz, a $(+\infty)$-ben vett „helyettesítési érték” helyett értelemszerűen határértéket véve.

Analóg állítás fogalmazható meg a $\int_{-\infty}^{a} f$ és a $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ típusú improprius integrálok kiszámítására is.

9.21. Példa: Számítsuk ki az $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

Megoldás. Az integrandusnak az $[1,+\infty)$ intervallumon egy primitív függvénye az $F(x) := \log x$ előírással értelmezett függvény. Ennek nincs véges határértéke a $(+\infty)$-ben, így a szóban forgó improprius integrál nem létezik (divergens).

9.22. Példa: Számítsuk ki az $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

Megoldás. Az integrandusnak az $[1,+\infty)$ intervallumon egy primitív függvénye az $F(x) := -\frac{1}{x}$ előírással értelmezett függvény. Ennek határértéke a $(+\infty)$-ben zérus, innen

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1.$$

Nem korlátos függvények integrálja

Legyen $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ egy (félig nyílt intervallumon értelmezett) folytonos függvény, ahol f nem feltétlen korlátos: $\lim_b f$ esetleg $(+\infty)$ vagy $(-\infty)$ is lehet.

Nem korlátos függvény improprius integrálja:

Ha a $T(x) := \int_a^x f$ integrálfüggvénynek a b helyen van véges határértéke, akkor azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ *improprius integrál létezik* (vagy *konvergens*), és ezt a határértéket f-nek az $[a,b)$ intervallumon vett *improprius integráljának* nevezzük. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $\int_a^b f$ improprius integrál nem létezik vagy *divergens*.

Ha a $\lim_b f$ határérték létezik és véges, akkor az $f(b) := \lim_b f$ definícióval az f függvényt kiterjeszthetjük az $[a,b]$ zárt intervallumra és a kiterjesztett f folytonos marad $[a,b]$-n. Könnyen látható, hogy ekkor a „közönséges” $\int_a^b f$ Riemann-integrál megegyezik a fentebb definiált improprius integrállal, tehát semmi újat nem kapunk; de ez az észrevétel indokolja az azonos jelölésmódot (ami olykor megtévesztő is lehet, lévén az improprius integrál a Riemann-integrálnál összetettebb fogalom).

Analóg módon definiáljuk a $(a,b]$ félig nyílt intervallumon vett improprius integrált is, ahol $\lim_a f$ esetleg $(+\infty)$ vagy $(-\infty)$ is lehet, ill. az (a,b) nyílt intervallumon vett improprius integrált, ha f határértéke az intervallum mindkét végpontjában végtelen is lehet.

Hasonlóan a nem korlátos intervallumon vett improprius integrálok esetéhez, a Newton–Leibniz-tétel most a következő módosított formába írható.

9.11. Állítás: . Legyen $f : [a,b) \to \mathbf{R}$ egy félig nyílt intervallumon értelmezett folytonos, de a b pont környezetében nem feltétlen korlátos függvény, jelölje F egy primitív függvényét. Az $\int_a^b f$ improprius integrál pontosan akkor létezik, ha F-nek véges határértéke van a b-ben, éspedig ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b} F(t) - F(a).$$

A jobb oldalon álló különbséget röviden (ám kissé pongyola módon) most is az $[F]_a^b$ szimbólummal szokás jelölni. A Newton–Leibniz-tétel tehát formálisan továbbra is igaz marad, a b-ben vett helyettesítési érték helyett értelemszerűen a határértéket véve.

9.23. Példa: Számítsuk ki az $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

Megoldás. Az integrandusnak a $(0,1)$ intervallumon egy primitív függvénye az $F(x) := \log x$ előírással értelmezett függvény. Ennek nincs véges határértéke a 0-ban, így a szóban forgó improprius integrál nem létezik (divergens).

9.24. Példa: Számítsuk ki az $\int_0^1 \log x\,dx$ improprius integrált (ha az létezik egyáltalán).

Megoldás. Ha az improprius integrál létezik, akkor egyenlő az $\int_\epsilon^1 \log x\,dx$ értékek $\epsilon \to 0$ melletti határértékével ($\epsilon > 0$). Ez utóbbi Riemann-integrált parciális integrálással számíthatjuk ki. Legyen $u(x) := \log x$, és $v'(x) := 1$, akkor $u'(x) = \frac{1}{x}$ és $v(x) = x$, innen

$$\int_\epsilon^1 \log x\,dx = [x \cdot \log x]_\epsilon^1 - \int_\epsilon^1 \frac{1}{x} \cdot x\,dx = 1 \cdot \log 1 - \epsilon \cdot \log \epsilon - (1-\epsilon) = -1 + \epsilon - \epsilon \cdot \log \epsilon.$$

A $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \log \epsilon$ határérték kiszámításához jelölje $t := -\log \epsilon$. Ha $\epsilon > 0$, és $\epsilon \to 0$, akkor nyilván $t \to +\infty$. Továbbá $\epsilon \cdot \log \epsilon = -e^{-t} \cdot t$, innen pedig

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \cdot \log \epsilon = -\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$$

(mert az exponenciális függvény gyorsabban tart $(+\infty)$-be, mint a hatványfüggvény). Következésképp az $\int_0^1 \log x\,dx$ improprius integrál konvergens, éspedig $\int_0^1 \log x\,dx = -1$.

A fenti levezetést – pongyolán és lerövidítve – néha az alábbi formába szokták írni:

$$\int_0^1 \log x\,dx = [x \cdot \log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot x\,dx = [x \cdot \log x]_0^1 - 1 = -1,$$

ahol az $[x \cdot \log x]_0^1$ kifejezés kiértékelésekor a felső határon értelemszerűen helyettesítési értéket, az alsó határon pedig határértéket számítunk.

9.7. Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi primitív függvényeket.
(a)

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx,$$

(b)

$$\int \cos^2 x \, dx,$$

(c)

$$\int x^{13} \log x \, dx,$$

(d)

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx,$$

(e)

$$\int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx,$$

(f)

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \, dx,$$

(g)

$$\int \frac{1}{4x^2 + 1} \, dx,$$

(h)

$$\int \frac{e^x}{\operatorname{ch} x} \, dx.$$

2. „Az $\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 \, dx$ integrált határozzuk meg parciális integrálással: $u(x) := \frac{1}{x^3}$, $v'(x) := x^2$ akkor nyilván $u'(x) = -\frac{3}{x^4}$, $v(x) = \frac{x^3}{3}$. Innen

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 \, dx = \frac{1}{3} + \int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 \, dx,$$

ahonnan pedig az adódik ($\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2 dx$ kivonásával), hogy $0 = \frac{1}{3}$ (??)”.
Hol a hiba a gondolatmenetben, és mi a primitív függvény?

3. Számítsuk ki az alábbi Riemann-integrálokat.
(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx,$$

(b)

$$\int_0^2 \frac{\log x}{x}\, dx,$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\, dx.$$

4. Számítsuk ki az $f(x) := \frac{x^2}{2}$ formulával definiált függvény grafikonjának ívhosszát a 0 és 1 abszcisszájú pontok között.

5. Egy kancsal fecske (aki 60^o-kal balra kancsalít, azaz amiről úgy gondolja, hogy egyenesen előtte van, annak valójában 60^o-kal eltér a fecske pillanatnyi irányától) haza akar repülni a tőle légvonalban 1 km-re levő fészkére. Kancsalsága miatt persze állandóan elvéti az irányt, de folyamatosan korrigálja azt úgy, hogy a fészket mindvégig maga előtt látja. Mennyi utat mesz meg ténylegesen, míg hazaér? (*Útmutatás*: a fecske pályája egy $x(t) := e^{-ct}\cos t$, $y(t) := e^{-ct}\sin t$ paraméteres egyenletű *logaritmikus spirális*, ahol a c paraméter a kancsalítás mértékéből határozható meg.)

6. Az $y = \frac{x^2}{2}$ egyenletű parabola grafikonjának az $y \leq 2$ feltételt kielégítő darabját forgassuk meg az y tengely körül. Mekkora az így nyert forgási paraboloid térfogata?

7. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

(a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\, dx,$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+1}\, dx,$$

(c)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+1}\, dx,$$

(d)

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx.$$

Megoldások

1. (a)

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = -\frac{\cos 2x}{4}.$$

A feladat parciális integrálással is megoldható. Legyen $u(x) := \sin x$, $v'(x) := \cos x$, akkor $u'(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$, innen $\int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x - \int \cos x \sin x \, dx$, ahonnan a keresett integrál kifejezhető: $\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x$. Az eredmény nincs ellentmondásban az előző eredménnyel. A két úton kiszámított primitív függvények egy konstansban különbözhetnek, és különböznek is:

$$-\frac{\cos 2x}{4} = -\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4} = -\frac{1 - \sin^2 x - \sin^2 x}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 x.$$

(b)

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}.$$

(c) Integráljunk parciálisan: $u(x) := \log x^{13} = 13 \log x$, $v'(x) := x^{13}$, akkor $u'(x) = \frac{13}{x}$, $v(x) = \frac{x^{14}}{14}$, innen

$$\int x^{13} \log x \, dx = \frac{1}{14} x^{14} \log x - \frac{13}{14} \int x^{13} = \frac{1}{14} x^{14} \log x - \frac{13}{196} x^{14}.$$

(d) Integráljunk parciálisan: $u(x) := \operatorname{arctg} x$, $v'(x) := 1$, akkor $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és $v(x) = x$, innen

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2).$$

(e) Integráljunk parciálisan: $u(x) := \text{arctg } x$, $v'(x) := x$, akkor $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ és $v(x) = \frac{1}{2}x^2$, innen

$$\int x \cdot \text{arctg } x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \text{arctg } x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \text{arctg } x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \text{arctg } x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\text{arctg } x.$$

(f)

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}\, dx = x - 2\text{arctg } x.$$

(g) Helyettesítsünk: $t := 2x$, akkor $x = \frac{t}{2}$ és $dx = \frac{1}{2}\, dt$, innen

$$\int \frac{1}{4x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\text{arctg } t = \frac{1}{2}\text{arctg } 2x.$$

(h)

$$\int \frac{e^x}{\text{ch } x}\, dx = \int \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx.$$

Helyettesítsünk: $t := e^x$, akkor $x = \log t$ és $dx = \frac{1}{t}\, dt$, innen

$$\int \frac{e^x}{\text{ch } x}\, dx = \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{2t^2}{t^2+1} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \int \frac{2t}{t^2+1}\, dt = \log(t^2+1) =$$

$$= \log(e^{2x}+1).$$

2. A hiba ott van, hogy a primitív függvény csak additív konstans erejéig egyértelmű. Az

$$\int \frac{1}{x^3} \cdot x^2\, dx = \frac{1}{3} + \int \frac{1}{x^3} \cdot x^2\, dx,$$

egyenlőség két oldalán álló primitív függvény tehát egy konstansban különbözhet (és különbözik is).

3. (a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx =$$
$$= [\operatorname{tg} x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(b)

$$\int_0^2 \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (2\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot[\log^2 x]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\log^2 2.$$

(c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx =$$
$$= -2[\log|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -2\log\frac{\sqrt{2}}{2} = -\log\frac{1}{2} = \log 2.$$

4. A függvény deriváltja: $f'(x) = x$, így a kérdéses ív L hossza:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$$

Helyettesítsünk: $x := \operatorname{sh} t$, akkor $dx = \operatorname{ch} t\,dt$, az új határok pedig 0 és A, ahol $\operatorname{sh} A = 1$. Innen

$$L = \int_0^A \operatorname{ch}^2 t\,dt = \int_0^A \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sh} 2t}{2}\right]_0^A = \frac{1}{2}(A + \operatorname{sh} A\operatorname{ch} A) =$$
$$= \frac{1}{2}(A + \operatorname{sh} A\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 A}).$$

Felhasználva, hogy $\operatorname{sh} A = 1$, azt kapjuk, hogy

$$L = \frac{1}{2}(A + \sqrt{2}).$$

Az A szám meghatározható a $\operatorname{sh} A = \frac{1}{2}(e^A - e^{-A}) = 1$ egyenletből. Innen $A = \ln(1+\sqrt{2})$, (az e^A-ra vonatkozó másodfokú egyenlet másik gyöke negatív!) azaz

$$L = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

5. A görbe paraméteres egyenlete: $x(t) := e^{-ct}\cos t$, $y(t) := e^{-ct}\sin t$, így a pillanatnyi sebesség vektorának komponensei: $x'(t) = -ce^{-ct}\cos t - e^{-ct}\sin t$, $y'(t) = -ce^{-ct}\sin t + e^{-ct}\cos t$. Speciálisan a $t = 0$ időpillanatban a sebességvektorának komponensei: $-c$ és 1. Így a kacsalítás α szögére fennáll, hogy

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} = \frac{1}{2}.$$

A spirális teljes L hossza:

$$L = \int_0^\infty \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{(-ce^{-ct}\cos t - e^{-ct}\sin t)^2 + (-ce^{-ct}\sin t + e^{-ct}\cos t)^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{1+c^2}\int_0^\infty e^{-ct}\, dt = \sqrt{1+c^2}\left[\frac{e^{-ct}}{-c}\right]_0^\infty = \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} = 2,$$

ahol kihasználtuk a c-re nyert korábbi összefüggést is.

A teljes ívhossz egy sokkal egyszerűbb „fizikai” meggondolásból is megkapható. Közelítsük a pályát töröttvonallal, az egyes szakaszok hossza legyen Δs_1, Δs_2,... Az egyes szakaszokon érvényes elmozdulásvektort bontsuk fel radiális és arra merőleges komponensre. A radiális elmozduláskomponens hossza $\Delta s_k \cos 60^o = \frac{1}{2}\Delta s_k$, és ez megegyezik a közeledés mértékével. Minden szakaszon tehát a megtett út *felével* közeledik a fecske a fészekhez. A megtett utak összege tehát a fecske és a fészek kezdeti távolságának kétszerese.

6. A térfogat nyilván egyenlő az *inverz függvény* grafikonjának a 1. tengely körüli forgatásával nyert forgástest térfogatával. Az inverz függvény formulája $x = \sqrt{2y}$, innen a keresett térfogat:

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (\sqrt{2y})^2\, dy = \pi \cdot \int_0^2 2y\, dy = 4\pi.$$

7. (a)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,dx = \lim_{A\to+\infty}(A-[\log(1+e^x)]_0^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}(A-\log(1+e^A)+\log 2) = \log 2 + \lim_{A\to+\infty}(A-\log(e^A(e^{-A}+1))) =$$

$$= \log 2 + \lim_{A\to+\infty}(A-A-\log(e^{-A}+1)) = \log 2.$$

(b) Helyettesítsünk: $t := 2x$, akkor $dx = \frac{1}{2}\,dt$. Az új változónak megfelelő határok szintén $(-\infty)$ és $(+\infty)$, innen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}[\operatorname{arctg} t]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi.$$

(c) Helyettesítsünk: $t := \frac{\sqrt{2}}{x}$, akkor $x = \frac{\sqrt{2}}{t}$ és $dx = -\frac{\sqrt{2}}{t^2}\,dt$. Az új változónak megfelelő határok $(+\infty)$ és 0, innen

$$\int_0^{+\infty} \frac{\frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+1}\,dx = -\int_{+\infty}^{0} \frac{t^2}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{t^2}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}[\operatorname{arctg} x]_0^{+\infty} = \sqrt{2}\frac{\pi}{4}.$$

(d) Helyettesítsünk: $t := x^3$, akkor $dt = 3x^2\,dx$. Az új változónak megfelelő határok szintén 0 és $(+\infty)$, innen

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{1}{3}[-e^{-t}]_0^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

10. A komplex függvénytan alapvető fogalmai és összefüggései

Ebben a fejezetben gyors áttekintést adunk a komplex függvénytannak azon fogalamiról és tételeiről, amelyek a informatikai és a villamosmérnöki BSc-képzés szempontjából szükségesek. Nem törekszünk teljességre – ez nem is lehet cél –, mindazonáltal összefüggő tárgyalásban mutatjuk be a komplex függvénytan alapvető fejezeteit, olyan kevés állítást hagyva bizonyítás nélkül, amilyen keveset csak lehetséges. Mint a valós integrálszámítás esetében is tettük, lehetőleg szemléletes fogalmakkal dolgozunk, olykor a matematikai szigorúság rovására is.

10.1. Komplex változós függvények folytonossága és differenciálhatósága

Mindenekelőtt a valós analízisből már jól ismert fogalmakat fogjuk általánosítani komplex változós, komplex értékű, azaz $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ típusú függvényekre.

A továbbiakban szó lesz *komplex sorozatokról*, amelyek alatt értelemszerűen $\mathbf{N} \to \mathbf{C}$ leképezéseket értünk. Azt mondjuk, hogy a $(z_n) \subset \mathbf{C}$ komplex sorozat *konvergens*, éspedig a $z \in \mathbf{C}$ számhoz tart, ha a $(\mathrm{Re}\, z_n)$ és $(\mathrm{Im}\, z_n)$ valós sorozatok konvergensek, éspedig $\mathrm{Re}\, z_n \to \mathrm{Re}\, z$, és $\mathrm{Im}\, z_n \to \mathrm{Im}\, z$.

Komplex sorozatok határértékére hasonló tételek igazolhatók, mint a valós sorozatok esetében. Az alábbi állításban összefoglaljuk a legfontosabb konvergenciatételeket. A bizonyítások részleteit az Olvasóra bízzuk.

10.1. Állítás: . Legyenek (z_n),$(w_n) \subset \mathbf{C}$ konvergens sorozatok, mégpedig $z_n \to z$, $w_n \to w$. Akkor

- $(z_n + w_n)$ is konvergens, és $z_n + w_n \to z + w$;
- $(z_n - w_n)$ is konvergens, és $z_n - w_n \to z - w$;
- $(z_n w_n)$ is konvergens, és $z_n w_n \to zw$;
- $(\frac{z_n}{w_n})$ is konvergens, és $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$; (feltéve, hogy w_n,$w \neq 0$);
- $z_n \to z$ pontosan akkor, ha $|z_n - z| \to 0$.

Komplex változós függvények vizsgálatakor a későbbiekben mindig feltesszük, hogy a szóban forgó függvény nem akármilyen halmazon, hanem *tartományon* értelmezett. Egy $D \subset \mathbf{C}$ halmazt *tartománynak* nevezünk, ha

- D *nyílt*, azaz minden $z \in D$ pont esetén valamilyen z középpontú, nemzérus sugarú kör is teljes egészében D-ben fekszik;
- D *összefüggő*, azaz bármely két $z_1, z_2 \in D$ pont összeköthető olyan töröttvonallal (véges sok, végpontjukon csatlakozó egyenesszakasszal), amely teljes egészében D-ben fekszik.

A szokásos geometriai síkidomok mint pl. kör, ellipszis, önmagát nem metsző sokszög stb. mind tartomány, amennyiben nem értjük hozzájuk a határoló vonalukat. Az egész komplex számsík maga is tartomány. Nem tartomány viszont semmilyen véges sok pontból álló halmaz, továbbá semmilyen egyenes és semmilyen körvonal sem. Nem tartomány pl. egy kör sem, amennyiben abba a határoló körvonalát beleértjük: a határoló vonal pontjai köré írt tetszőleges nemzérus sugarú kör ui. tartalmaz az eredeti körbe eső és abba nem eső pontokat egyaránt.

A továbbiakban egy tetszőleges $z \in \mathbf{C}$ pont egy *környezete* alatt olyan $\mathbf{C}$-beli halmazt értünk, mely tartalmaz valamilyen z középpontú, nemzérus sugarú körlemezt. Az egyértelműség kedvéért *kör* alatt a továbbiakban a körvonalat értjük. A $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| < r\}$ halmazt z_0 közepű r sugarú *nyílt körlemeznek*, a $\{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| \leq r\}$ halmazt z_0 közepű r sugarú *zárt körlemeznek* nevezünk.

Ezekután már definiálhatjuk a komplex változós függvények folytonosságát. A definíció pontos megfelelője a valós függvények folytonosságának.

Komplex változós függvény folytonossága:

Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbf{C}$ függvény *folytonos a $z \in D$ pontban*, ha minden $(z_n) \subset D$, $z_n \to z$ sorozat esetén $f(z_n) \to f(z)$. Az f függvény folytonos a D tartományon, ha D minden pontjában folytonos.

Az alábbi példákban a folytonosság a definíció közvetlen alkalmazásával igazolható.

10.1. Példa:

- Minden $n \in \mathbf{N}$ esetén a $z \mapsto z^n$ hatványfüggvény folytonos.
- A $z \mapsto \text{Re}\, z$ és a $z \mapsto \text{Im}\, z$ függvények folytonosak.
- A $z \mapsto \overline{z}$ függvény folytonos.
- A $z \mapsto |z|$ abszolútérték-függvény folytonos.
- A $z \mapsto \frac{1}{z}$ függvény minden, 0-tól különböző pontban folytonos.

Érvényben maradnak továbbá a valós analízisből már ismert, a folytonosságra vonatkozó főbb tételek is:

10.2. Állítás: . Ha $f,g : D \to \mathbf{C}$ folytonos függvények, akkor az $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ függvények mind folytonosak (az $\frac{f}{g}$ hányadosfüggvény természetesen csak ott, ahol a nevező nem zérus). Továbbá, ha $\mathcal{R}_f \subset \mathcal{D}_g$, akkor a $g \circ f$ összetett függvény is folytonos. Végül, ha f kielégíti a *Lipschitz-féle feltételt*, azaz $|f(z_1) - f(z_2)| \leq C \cdot |z_1 - z_2|$ teljesül alkalmas $C \geq 0$ mellett minden $z_1, z_2 \in D$ esetén, akkor f folytonos D-n.

A derivált értelmezése komplex változós függvények esetében *formálisan* ugyanúgy történik, mint a valós változós függvények esetében.

Komplex változós függvény differenciálhatósága:

Az $f : D \to \mathbf{C}$ függvény *differenciálható a $z \in D$ pontban*, ha minden $(z_n) \subset D$, $z_n \to z$ sorozat esetén a

$$\lim \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z}$$

határérték létezik, és az független a $z_n \to z$ sorozat választásától. Ekkor ezt a határértéket az f függvény z-beli differenciálhányadosának (deriváltjának) nevezzük és $f'(z)$ vel jelöljük. Az f függvény *differenciálható a D tartományon*, ha annak minden pontjában differenciálható. Ekkor azt is mondjuk, hogy f *analitikus* (vagy *reguláris* vagy *holomorf*) a D tartományon. Ha a függvény z egy egész környezetében értelmezett (magát a z pontot esetleg kivéve), és z-ben nem differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy a függvénynek z-ben *szingularitása* van (vagy z *szinguláris pontja* a függvénynek).

A definíció most is átfogalmazható a következő – sokszor kényelmesebben használható – módon:

10.3. Állítás: . Az $f : D \to \mathbf{C}$ függvény pontosan akkor differenciálható a $z \in D$ pontban, ha minden $(h_n) \subset \mathbf{C}$, $h_n \to 0$ (komplex) zérussorozat esetén a

$$\lim \frac{f(z+h_n) - f(z)}{h_n}$$

határérték létezik, és független a $h_n \to 0$ sorozat választásától.

A definícióban, ill. a fenti állításban szereplő határértékeket röviden így jelöljük:

$$\lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \qquad \text{ill.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Igaz marad az a tétel, hogy a deriválhatóságból a folytonosság következik.

10.4. Állítás: . Ha az $f : D \to \mathbf{C}$ függvény differenciálható a $z \in D$ pontban, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás. Legyen $(z_n) \subset D$, $z_n \to z$ tetszőleges sorozat, akkor

$$|f(z_n) - f(z)| = \left| \frac{f(z_n) - f(z)}{z_n - z} \right| \cdot |z_n - z| \to |f'(z)| \cdot 0 = 0,$$

tehát f valóban folytonos z-ben.

Fontos megjegyezni, hogy a formai hasonlóság ellenére, a komplex differenciálhatóság sokkal erősebb fogalom a valós értelemben vett differenciálhatóságnál. Ez elsősorban annak következménye,hogy egy *komplex* sorozat zérussorozat volta azzal ekvivalens, hogy a valós és képzetes részekből alkotott sorozatok külön-külön is zérussorozatok, így az a feltétel, hogy a $\lim \frac{f(z+h_n)-f(z)}{h_n}$ határérték független legyen a $h_n \to 0$ sorozat választásától, sokkal erősebb, mint a valós analízisben. Míg valós függvények között pl. csak „mesterkélten" lehet folytonos, de nem differenciálható függvényekre példát mutatni, addig egészen egyszerű formulákkal értelmezett komplex változós függvények is lehetnek folytonosak, ugyanakkor nem differenciálhatók. A lényeges hasonlóság a hatványfüggvények esete. Ezek komplex értelemben is differenciálhatók. Később megmutatjuk, hogy – bizonyos értelemben – a véges és végtelen hatványsorokon kívül nincs is más komplex értelemben differenciálható függvénytípus.

10.2. Példa: A $z \mapsto \text{Re } z$ és a $z \mapsto \text{Im } z$ függvények sehol sem differenciálhatók.

Bizonyítás. Legyen először speciálisan $h_n \to 0$ *valós sorozat*. Akkor

$$\frac{\text{Re }(z+h_n) - \text{Re } z}{h_n} = \frac{\text{Re } z + \text{Re } h_n) - \text{Re } z}{h_n} = \frac{h_n}{h_n} \equiv 1.$$

Ugyanakkor, ha $h_n = it_n \to 0$ *tiszta képzetes* (ahol $(t_n) \subset \mathbf{R}$, $t_n \to 0$), akkor

$$\frac{\text{Re }(z+h_n) - \text{Re } z}{h_n} = \frac{\text{Re } z + \text{Re } it_n) - \text{Re } z}{h_n} = \frac{0}{h_n} \equiv 0,$$

tehát a különbségi hányados határértéke *nem* független a $h_n \to 0$ sorozat megválasztásától, így a $z \mapsto \text{Re } z$ függvény nem differenciálható z-ben.

Hasonlóan, ha $h_n \to 0$ *valós sorozat*, akkor

$$\frac{\text{Im }(z+h_n) - \text{Im } z}{h_n} = \frac{\text{Im } z + \text{Im } h_n) - \text{Re } z}{h_n} = \frac{0}{h_n} \equiv 0.$$

Ugyanakkor, ha $h_n = it_n \to 0$ *tiszta képzetes* (ahol $(t_n) \subset \mathbf{R}$, $t_n \to 0$), akkor

$$\frac{\text{Im }(z+h_n) - \text{Im } z}{h_n} = \frac{\text{Im } z + \text{Re } it_n) - \text{Re } z}{h_n} = \frac{i_n}{it_n} \equiv -i,$$

tehát a különbségi hányados határértéke *nem* független a $h_n \to 0$ sorozat megválasztásától, így a $z \mapsto \text{Im } z$ függvény sem differenciálható z-ben.

10.3. Példa: A $z \mapsto \overline{z}$ függvény sehol sem differenciálható.

Bizonyítás. Legyen először $h_n \to 0$ valós sorozat, akkor

$$\frac{\overline{z+h_n} - \overline{z}}{h_n} = \frac{\overline{z} + h_n - \overline{z}}{h_n} \equiv 1.$$

Ha viszont $h_n = it_n \to 0$ tiszta képzetes (ahol $(t_n) \subset \mathbf{R}$, $t_n \to 0$), akkor

$$\frac{\overline{z+h_n} - \overline{z}}{h_n} = \frac{\overline{z} - it_n - \overline{z}}{it_n} \equiv -1,$$

tehát a különbségi hányados határértéke nem független a $h_n \to 0$ sorozat megválasztásától, így a $z \mapsto \overline{z}$ függvény nem differenciálható z-ben.

10.4. Példa: A $z \mapsto |z|^2$ függvény csak a 0-ban differenciálható.

Bizonyítás. Legyen először $h_n \to 0$ valós sorozat, akkor

$$\frac{|z+h_n|^2 - |z|^2}{h_n} = \frac{|z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(zh_n) + |h_n|^2 - |z|^2}{h_n} =$$

$$= \frac{2h_n\mathrm{Re}\,(z) + |h_n|^2}{h_n} \to 2\mathrm{Re}\,(z),$$

ha viszont $h_n = it_n \to 0$ tiszta képzetes (ahol $(t_n) \subset \mathbf{R}$, $t_n \to 0$), akkor

$$\frac{|z+h_n|^2 - |z|^2}{h_n} = \frac{|z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(izt_n) + |it_n|^2 - |z|^2}{it_n} =$$

$$= \frac{-2t_n\mathrm{Im}\,(z) + |t_n|^2}{it_n} \to 2i\mathrm{Im}\,(z),$$

és ez a két határérték csak akkor egyezik meg, ha $z = 0$. Tehát a $z \mapsto |z|^2$ függvény a 0-n kívül nem differenciálható. A 0-ban viszont igen (és deriváltja 0), mert minden $(h_n) \subset \mathbf{C}$, $h_n \to 0$ esetén

$$\frac{|0+h_n|^2 - |0|^2}{h_n} = \frac{|h_n|^2}{h_n} = \frac{h_n\overline{h_n}}{h_n} = \overline{h_n} \to 0.$$

10.5. Példa: A $z \mapsto c$ $(c \in \mathbf{C})$ konstans függvény mindenütt differenciálható, és deriváltja 0.

Bizonyítás. Tetszőleges $(h_n) \subset \mathbf{C}$, $h_n \to 0$ esetén ui.

$$\frac{c-c}{h_n} \equiv 0.$$

10.6. Példa: A $z \mapsto cz$ $(c \in \mathbf{C})$ függvény mindenütt differenciálható, és deriváltja c.

Bizonyítás. Tetszőleges $(h_n) \subset \mathbf{C}$, $h_n \to 0$ esetén ui.

$$\frac{cz + ch_n - cz}{h_n} = \frac{ch_n}{h_n} \equiv c.$$

Hasonló technikával, mint a valós függvények esetben tettük, megmutatható, hogy az alapvető differenciálási szabályok érvényesek maradnak komplex változós függvények esetében is:

10.5. Állítás: . Ha f,$g : D \to \mathbf{C}$ differenciálható függvények, akkor az $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ és $\frac{f}{g}$ függvények mind differenciálhatók (az $\frac{f}{g}$ hányadosfüggvény természetesen csak ott, ahol a nevező nem zérus), éspedig

- $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$;
- $(f-g)'(z) = f'(z) - g'(z)$;
- $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2}$;

Továbbá, ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, akkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható, éspedig $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

10.7. Példa: A $z \mapsto z^n$ leképezés (n egész szám) differenciálható (esetleg a 0 hely kivételével) , és $(z^n)' = nz^{n-1}$. Ha n nemnegatív, akkor a leképezés a 0-ban is differenciálható, ha n negatív, akkor a 0 hely szinguláris pontja a leképezésnek.

10.8. Példa: A $z \mapsto e^z$ komplex exponenciális függvény az egész komplex számsíkon differenciálható, és $(e^z)' = e^z$.

A komplex exponenciális függvény *nem kölcsönösen egyértelmű.* $e^z = e^{z+2k\pi i}$ (minden k egész szám mellett), így a logaritmusfüggvény nem értelmezhető az exponenciális függvény inverzeként.

10.2. Komplex vonalintegrál

Mindenekelőtt a *vonal* (vagy görbe) fogalmát értelmezzük.

Valós változós, komplex értékű függvény folytonossága:

Azt mondjuk, hogy a $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $w(t) := a(t) + ib(t)$ függvény *folytonos*, ha az a és b valós függvények folytonosak.

Egy ilyen w leképezés értékkészlete egy (folytonos) *görbe* a komplex síkon. A w leképezést magát ezen görbe egy *reprezentánsának* (vagy *paraméterezésének*) nevezzük. Egy-egy görbének nyilván mindig több reprezentánsa is van.

10.9. Példa: A $t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1)$ leképezés egy, a z_1 és z_2 pontokat összekötő egyenest ír le. Ezt a leképezést a $[0,1]$ intervallumra leszűkítve, z_1 és z_2 pontokat összekötő *egyenesszakaszhoz* jutunk (ezt $[z_1,z_2]$-vel jelöljük).

10.10. Példa: A $t \mapsto z_0 + Re^{it}$ leképezés egy z_0 középpontú R sugarú körvonalat ír le. E körvonal egy másik reprezentánsa pl. a $t \mapsto z_0 + Re^{it^2}$ leképezés.

Valóban, a $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $w(t) := z_0 + Re^{it}$ leképezésre minden t valós szám mellett $w(t) - z_0 = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$ teljesül, ahonnan $|w(t) - z_0|^2 \equiv R^2$. Ugyanakkor könnyen láthatóan, a körvonal minden z pontja előáll $z = w(t)$ alakban alkalmas t paraméter mellett. Annak belátását, hogy a $t \mapsto z_0 + Re^{it^2}$ leképezés ugyanezt a körvonalat reprezentálja, az Olvasóra hagyjuk.

Rektifikálható görbe:

Legyen $w : [\alpha,\beta] \to \mathbf{C}$ egy folytonos reprezentánsa a Γ görbének. Legyen $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = \beta$ az $[\alpha,\beta]$ intervallum egy felbontása. A megfelelő $\{z_0,z_1,\ldots,z_N\} \subset \Gamma$ véges sorozatot (ahol $z_k := w(t_k)$, $k = 0,1,\ldots,N$) a Γ görbe egy felbontásának, a $[z_0,z_1]$, $[z_1,z_2]$, ... $[z_{N-1},z_N]$ szakaszok összességét pedig *a* Γ *görbébe írt töröttvonalnak* nevezzük. A Γ görbét *rektifikálhatónak* nevezzük, ha a beírt töröttvonalak hosszainak halmaza felülről korlátos, azaz a

$$\sum_{k=1}^{N} |z_k - z_{k-1}|$$

összegek minden felbontás esetén közös korlát alatt maradnak. Ezen összegek felső határát (szuprémumát) a Γ görbe *ívhosszának* nevezzük, és a $|\Gamma|$ szimbólummal jelöljük.

A definícióban szereplő $z_0,z_1,\ldots,z_N$ véges sorozatot röviden csak *a* Γ *görbe egy felbontásának* (vagy *felosztásának*) nevezzük. Az $A := w(\alpha)$ és $B := w(\beta)$ komplex számok a görbe *végpontjai*. Felbontások egy sorozatát – a valós Riemann-integrál esetével analóg módon – *korlátlanul finomodónak* nevezünk. ha az egyes felbontások finomságát jellemző

$$\max_{1 \le k \le N} |z_k - z_{k-1}|$$

számok sorozata zérussorozat.

Az ívhossz definíciójában a szuprémum az összes reprezentánsra is vonatkozik, így az ívhossz maga a reprezentánstól független. A fogalom maga szemléletes, de a definíció konkrét görbék ívhosszának kiszámítására teljesen alkalmatlan. Látni fogjuk viszont, hogy ha a görbe nemcsak folytonos, hanem folytonosan differenciálható is, akkor az ívhossz egyszerű (valós) Riemann-integrál segítségével számítható.

Valós változós, komplex értékű függvény differenciálhatósága:

Azt mondjuk, hogy a $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $w(t) := a(t)+ib(t)$ függvény (folytonosan) *differenciálható*, ha az a és b valós függvények (folytonosan) differenciálhatók. Ekkor definíció szerint legyen $w'(t) := a'(t) + ib'(t)$.

A folytonosan differenciálható reprezentánssal rendelkező görbéket folytonosan differenciálható vagy röviden *sima* görbéknek nevezzük. Azt mondjuk, hogy egy görbe *szakaszonként sima*, ha előáll véges sok, egymáshoz a végpontjaikkal csatlakozó sima görbék egyesítéseként.

A későbbiekben, hacsak nem hangsúlyozzuk az ellenkezőjét, görbe alatt mindig szakaszonként sima görbét értünk. Ez magában foglalja az összes szokásos geometriai görbét (egyenes, kör, ellipszis, sokszögvonal stb.)

Sima görbék ívhossza – elvben – egyszerűen számítható:

10.6. Állítás: . Ha a Γ sima görbe egy reprezentánsa a $w = (a+ib) : [\alpha,\beta] \to \mathbf{C}$ függvény, akkor az ívhossza:

$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta |w'(t)|\,dt.$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = \beta$ az $[\alpha,\beta]$ intervallum egy felbontása. Akkor a megfelelő beírt töröttvonal hossza:

$$\sum_{k=1}^N |w(t_k) - w(t_{k-1}| = \sum_{k=1}^N \sqrt{(a(t_k) - a(t_{k-1}))^2 + (b(t_k) - b(t_{k-1}))^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^N \sqrt{\frac{(a(t_k) - a(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2} + \frac{(b(t_k) - b(t_{k-1}))^2}{(t_k - t_{k-1})^2}} \cdot (t_k - t_{k-1}).$$

A jobb oldalon a Lagrange-középértéktétel értelmében az egyes különbségi hányadosok *pontosan* egyenlők alkalmas, valamely $[t_{k-1},t_k]$-beli helyeken vett deriváltakkal. Így a jobb oldal az $\int_\alpha^\beta \sqrt{a(t)^2 + b(t)^2}\,dt$ Riemann-integrál egy Riemannösszegével egyezik. Így a felbontás korlátlan finomítása mellett ezen összegek a jelzett Riemann-integrálhoz tartanak. A részletes meggondolásokat elhagyjuk.

10.11. Példa: Számítsuk ki az R sugarú kör kerületét!

Megoldás. A természetes reprezentáns: $w(t) := Re^{it} = R(\cos t + i \sin t)$. Innen

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = 2R\pi.$$

Valós változós, komplex értékű függvény Riemann-integrálját egyszerűen a valós és a képzetes részek integráljaival értelmezzük:

Valós változós függvény integrálja:

Azt mondjuk, hogy a $w : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, $w(t) := a(t) + ib(t)$ függvény integrálható az $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$ intervallumon, ha az a és b függvények ugyanitt integrálhatók, és ekkor

$$\int_\alpha^\beta w(t)\, dt := \int_\alpha^\beta a(t)\, dt + i \cdot \int_\alpha^\beta b(t)\, dt.$$

Végül – a valós Riemann-integrál pontos analógiájára – definiálhatjuk a komplex függvénytan másik alapvető fogalmát, a komplex vonalintegrált:

Komplex vonalintegrál:

Legyen $f : D \to \mathbf{C}$ egy folytonos függvény. Legyen Γ egy rektifikálható görbe D-ben, és legyen $z_0, z_1, \ldots, z_N$ egy felbontása. Ha a

$$\sum_{k=1}^{N} f(w_k)(z_k - z_{k-1})$$

összegeknek (ahol $w_k \in [z_{k-1}, z_k]$ tetszőleges pont) létezik határértéke, amikor a görbe felosztása korlátlanul finomodik, és ez a határérték a görbe felosztásaitól, valamint a w_k számok megválasztásától független, akkor azt mondjuk, hogy *z f függvény a Γ görbe mentén integrálható*, és a fenti határértéket az f függvénynek a Γ görbe mentén vett *vonalintegráljának* nevezzük. Jele: $\int_\Gamma f(z)\, dz$.
Ha Γ *zárt görbe*, azaz kezdő- és végpontja megegyezik, akkor a vonalintegrált sokszor így is jelöljük: $\oint_\Gamma f(z)\, dz$.

A vonalintegrál függ a görbe *irányításától*, de csak egy előjel erejéig:

10.7. Állítás: . Ha a görbe irányítását megváltoztatjuk, akkor a vonalintegrál előjelet vált.

A kezdő- és végpont felcserélése esetén ui. minden integrálközelítő összeg is előjelet vált. Pontosabban, ekkor egy felbontás $z_N, z_{N-1}, \ldots, z_1, z_0$ alakú, és a megfelelő integrálközelítő összeg:

$$f(w_N)(z_{N-1} - z_N) + f(w_{N-1}(z_{N-2} - z_{N-1} + \ldots + f(w_2)(z_1 - z_2) + f(w_1)(z_0 - z_1) =$$

$$= -\left(f(w_1)(z_1 - z_0) + f(w_2)(z_2 - z_1) + \ldots + f(w_N)(z_N - z_{N-1})\right),$$

tehát minden integrálközelítő összeg valamilyen, az eredeti irányítás melletti integrálközelítő összeg ellentettje.

10.8. Állítás: . Ha az $|f|$ függvény korlátos a D tartományon, és $M \geq 0$ olyan szám, melyre $|f(z)| \leq M$ teljesül minden $z \in D$ mellett, akkor

$$\left| \int_\Gamma f(z)\, dz \right| \leq M \cdot |\Gamma|.$$

Valóban, ekkor minden integrálközelítő összegre:

$$\left| \sum_{k=1}^N f(w_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^N |f(w_k)| \cdot |z_k - z_{k-1}| \leq M \cdot \sum_{k=1}^N |z_k - z_{k-1}|.$$

Ha a felbontás korlátlanul finomodik, akkor a bal oldal a $|\int_\Gamma f(z)\, dz|$ számhoz, a jobb oldal az $M \cdot |\Gamma|$ számhoz tart. Innen az állítás már következik.

Látni kell viszont, hogy általános esetben a komplex vonalintegrál kiszámítása a definíció alapján általában igen nehézkes. Mindazonáltal egyszerű függvények esetében olykor célhoz vezet:

10.12. Példa: Legyen Γ rektifikálható görbe, végpontjai legyenek A és B. Az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) :\equiv c \in \mathbf{C}$ konstans függvény vonalintegrálja:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = c \cdot (B - A).$$

Speciálisan, ha Γ zárt görbe, azaz $B = A$, akkor

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Valóban, tetszőleges $z_0, z_1, \dots, z_N$ felbontás esetén a megfelelő integrálközelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^{N} f(w_k)(z_k - z_{k-1}) = c \cdot \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1}) = c \cdot (-z_0 + z_N) = c \cdot (B - A).$$

10.13. Példa: Legyen Γ rektifikálható görbe, végpontjai legyenek A és B. Az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) := z$ függvény vonalintegrálja:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \frac{B^2 - A^2}{2}.$$

Speciálisan, ha Γ zárt görbe, azaz $B = A$, akkor

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

Valóban, legyen $z_0, z_1, \dots, z_N$ egy tetszőleges felbontás és legyen először $w_k := z_{k-1}$ Ekkor a megfelelő integrálközelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^{N} f(w_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} z_{k-1}(z_k - z_{k-1}).$$

Legyen most $w_k := z_k$, akkor a megfelelő integrálközelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^{N} f(w_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} z_k(z_k - z_{k-1}).$$

A két összeg külön-külön is a $\int_\Gamma z\, dz$ vonalintegrálhoz tart, így számtani közepük is. Ámde

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} (z_k + z_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = \frac{-z_0^2 + z_N^2}{2},$$

ahonnan az állítás már adódik.

Ha a görbe nemcsak rektifikálható, de sima is, akkor a vonalintegrál egyetlen valós változós (komplex értékű) függvény Riemann-integráljaként áll elő.

10.9. Állítás: . Ha a Γ görbe sima, azaz létezik egy $w : [\alpha,\beta] \to D$ folytonosan differenciálható reprezentánsa, $f : D \to \mathbf{C}$ pedig kielégíti a Lipschitz-feltételt, akkor az f függvény a Γ görbe mentén integrálható, éspedig:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(w(t)) \cdot w'(t)\,dt.$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_N = \beta$ az $[\alpha,\beta]$ intervallum egy felbontása, és legyen $w_k := z_k = w(t_k)$. Akkor a megfelelő integrálközelítő összeg:

$$\sum_{k=1}^N f(w_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N f(w(t_k))(w(t_k) - w(t_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^N f(w(t_k))\frac{(w(t_k) - w(t_{k-1}))}{t_k - t_{k-1}} \cdot (t_k - t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^N f(w(t_k))w'(\tau_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^N f(w(\tau_k))w'(\tau_k) \cdot (t_k - t_{k-1}) + \sum_{k=1}^N (f(w(t_k)) - f(w(\tau_k)))w'(\tau_k) \cdot (t_k - t_{k-1}),$$

ahol felhasználtuk a Lagrange-középértéktételt. Az első összeg a $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(w(t))\cdot w'(t)\,dt$ integrál egy integrálközelítő összege. Ha a felbontás korlátlanul finomodik, az első összeg ehhez az integrálhoz tart, a második pedig 0-hoz, mert

$$\left|\sum_{k=1}^N (f(w(t_k)) - f(w(\tau_k)))w'(\tau_k) \cdot (t_k - t_{k-1})\right| \le$$

$$\le C \cdot \max_{1\le k\le N}(t_k - t_{k-1}) \cdot \max|w'| \cdot (\beta - \alpha) \to 0.$$

Innen az állítás már következik.

10.14. Példa: Legyen $f(z) := \frac{1}{z}$, Γ pedig az origó közepű, R sugarú kör. Akkor

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i.$$

Bizonyítás. A Γ görbe egy paraméterezése: $w(t) := Re^{it}$, innen $w'(t) := iRe^{it}$, és

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} \cdot iRe^{it}\,dt = 2\pi i.$$

10.15. Példa: Legyen $f(z) := \frac{1}{z-z_0}$, (ahol $z_0 \in \mathbf{C}$ tetszőleges) Γ pedig egy z_0 középpű, R sugarú kör. Akkor

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i.$$

Bizonyítás. A Γ görbe egy paraméterezése: $w(t) := z_0 + Re^{it}$, innen $w'(t) := iRe^{it}$, és

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + Re^{it} - z_0} \cdot iRe^{it}\,dt = 2\pi i.$$

10.16. Példa: Legyen $f(z) := z^k$ (k egész, de $k \neq -1$), Γ pedig az origó középpű, R sugarú kör. Akkor

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Bizonyítás. A Γ görbe egy paraméterezése: $w(t) := Re^{it}$, innen $w'(t) := iRe^{it}$, és

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} R^k e^{ikt} \cdot iRe^{it}\,dt =$$

$$= iR^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt = iR^{k+1} \int_0^{2\pi} (\cos(k+1)t + i\sin(k+1)t)\,dt = 0.$$

Az integrál kiszámítása értelemszerűen általánosítható *szakaszonként* sima görbékre. Ekkor a vonalintegrál értékét az egyes (sima) görbéken vett integrálok összege adja.

10.3. A Cauchy-féle integráltétel és a Cauchy-féle integrálformula

Az előző fejezet példái közt már találkoztunk analitikus függvényeknek *zárt* görbe mentén vett vonalintegráljával. A vizsgált példákban ezek 0-val voltak egyenlők. Ez nem véletlen, az észrevétel sokkal nagyobb általánosságban is igaz marad, legalábbis akkor, ha a D tartomány *egyszeresen összefüggő*.

Egyszeresen összefüggő tartomány:

A $D \subset \mathbf{C}$ tartományt *egyszeresen összefüggőnek* nevezzük, ha minden (önmagát nem metsző) folytonos, zárt D-ben haladó görbe belseje is teljes egészében D-ben fekszik.

Itt felhasználtuk azt a szemléletesen kézenfekvő, de valójában egyáltalán nem nyilvánvaló tényt, hogy egy (önmagát nem metsző) zárt görbe a síkot két részre bontja: egy korlátos részre (ez a görbe belseje) és egy nem korlátos részre (ez a görbe külseje), melyeknek nincs közös pontja. Ez az állítás *Jordan tételeként* ismert. Szemléletesen: egy tartomány egyszeresen összefüggő, ha nincsenek benne „lyukak".

10.17. Példa: A körlemez, az ellipszis, és bármely (önmagát nem metsző) sokszögtartomány egyszeresen összefüggő. Ha viszont a körből elhagyjuk a középpontját, az így kapott „lyukas" tartomány már nem egyszeresen összefüggő: egy, az eredetivel koncentrikus, de kisebb sugarú kör belseje már nem esik teljes egészében e tartományba. Hasonlóan, bármely tartományból elhagyva véges sok pontot, a maradék tartomány biztosan nem egyszeresen összefüggő. Összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő tartomány a gyűrűtartomány is.

Ezek után már megfogalmazhatjuk komplex függvénytan egyik alaptételét, bizonyításához azonban eddigi eszközeink nem elegendőek, így azt elhagyjuk:

10.1. Tétel: (*Cauchy-féle integráltétel*). Ha f analitikus egy egyszeresen összefüggő $D \subset \mathbf{C}$ tartományon, akkor minden, D-ben haladó zárt Γ görbére

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

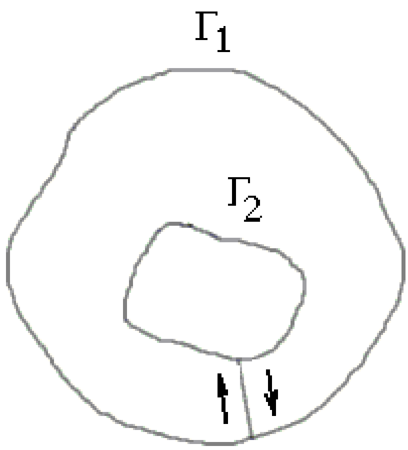
teljesül.

A tétel azonnali következménye, hogy bizonyos esetekben egyes vonalintegrálok más, alkalmasint lényegesen egyszerűbb görbék menti vonalintegrálokkal fejezhetők ki.

10.1. Következmény: . Legyen D egy egyszeresen összefüggő tartomány, legyenek Γ_1 és Γ_2 a D-ben haladó zárt görbék, úgy, hogy Γ_2 teljes egészében a Γ_1 görbe belsejében halad. Ha f analitikus a Γ_1 és Γ_2 görbék közötti tartományon, akkor

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Bizonyítás (vázlat). Vágjuk fel a szóban forgó, a két görbe közé eső tartományt egy görbével (azaz hagyjuk el belőle e görbe pontjait). Így elérhető, hogy felvágott tartomány *egyszeresen összefüggő* legyen (ez szemléletesen nyilvánvaló, de nem bizonyítjuk).



10.1. ábra. *Gyűrűszerű tartomány felvágásával kapott egyszeresen összefüggő tartomány*

Alkalmazzuk a felvágott tartomány határoló görbéjére a Cauchy-tételt, és vegyük figyelembe, hogy Γ_1 és Γ_2 mentén a görbe irányítása biztosan ellentétes; továbbá a vágás mentén a kétszer is integrálunk, de ellentétes irányításokkal. Jelöljük Γ-val a vágást, akkor a fentiek szerint

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma} f(z)\,dz - \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$$

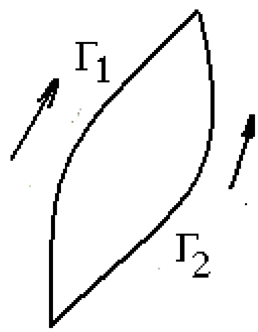
amiből az állítás már következik.

A Cauchy-tétel másik következménye, hogy analitikus függvénynek egy nem feltétlen zárt görbe menti integrálja csak a görbe kezdő- és végpontjától függ, a görbe lefutásától nem. Pontosabban:

10.2. Következmény: . Legyen D egy egyszeresen összefüggő tartomány, Γ_1 és Γ_2 a D-ben haladó, közös kezdő- és végpontú görbék, akkor:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Cauchy-tételt a két görbe által határolt tartományra.



10.2. ábra. *Azonos kezdő- és végpontú görbék által határolt tartomány*

Az integrálás során a két görbe egyikén az irányítás biztosan megváltozik, ezért:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0,$$

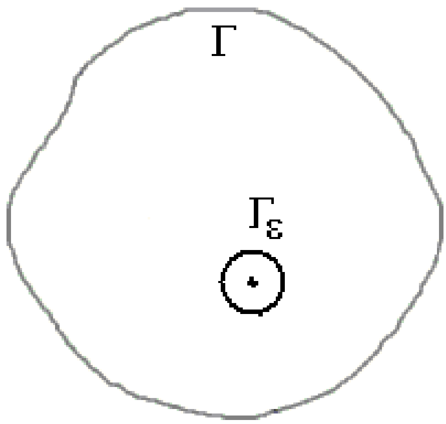
amiből az állítás már következik.

Ugyancsak a 10.1. Tételből vezethető le az a meglepő következmény, hogy egy analitikus függvény értéke egy zárt görbe belsejében mindenütt előállíthatók csak a görbe pontjaiban felvett értékek segítségével.

10.2. Tétel: (*Cauchy-féle integrálformula*). Ha f analitikus egy egyszeresen összefüggő D tartományon, akkor minden, D-ben haladó zárt Γ görbére, és a görbe belsejének tetszőleges z pontjára teljesül, hogy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Bizonyítás. A z pont köré írjunk egy (elég kis) $\epsilon > 0$ sugarú kört úgy, hogy az még teljes egészében Γ belsejébe essék. Alkalmazzuk a 10.1. Következményt az



10.3. ábra. *Vázlat a Cauchy-féle integrálformula bizonyításához*

$F(w) := \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ előírással értelmezett F függvényre, mely *analitikus* a $D \setminus \{z\}$ tartományon. Eszerint:

$$\oint_\Gamma F(w)\, dw = \oint_{\Gamma_\epsilon} F(w)\, dw.$$

Ugyanakkor

$$\oint_{\Gamma_\epsilon} F(w)\, dw = \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \cdot \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{w-z}\, dw = \oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \cdot 2\pi i,$$

ahol felhasználtuk a 10.14. Példa eredményét is. Mivel pedig F könnyen láthatóan *korlátos* a z pont egy környezetében:

$$\left| \oint_{\Gamma_\epsilon} F(w)\, dw \right| \to 0,$$

ha $\epsilon \to 0$. Ezt összevetve az előbb kapott egyenlőséggel, az állítás már adódik.

Ebből a tételből már levezethető az – a valós analízisben már végképp nem érvényes – eredmény, hogy egy analitikus függvény automatikusan *akárhányszor differenciálható* is. Ez a tétel markánsan mutatja a különbséget a valós és komplex deriváltfogalom között.

10.3. Következmény: . Egy D tartományon analitikus függvény akárhányszor differenciálható, és tetszőleges D-ben haladó olyan zárt Γ görbére, melynek belseje is D-ben fekszik, és a görbe belsejének tetszőleges z pontjára teljesül, hogy

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

Bizonyítás vázlat. Tekintsük a 10.2. Tétel által szolgáltatott formulát $f(z)$ kifejezésére:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Igazolható (a részletekkel ebben a jegyzetben nem foglalkozhatunk) hogy a jobb oldali kifejezés mint z függvénye differenciálható, és a deriváltat úgy kapjuk meg, hogy a jobb oldali integrandust deriváljuk (a z változó szerint). Ennélfogva:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw,$$

$$f''(z) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^3}\, dw,$$

$$f'''(z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^4}\, dw,$$

és így tovább.

10.4. Taylor-sorok, Laurent-sorok

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a valós analízisből már ismert Taylor-sorfejtés analitikus függvényekre is érvényes marad (az így nyert sor pedig konvergens egy körlemezen). Ez annyit jelent, hogy egy analitikus függvény értékeit egy egész körlemezen meghatározza *egyetlen* pontbeli viselkedése (azaz értéke és deriváltjainak értéke).

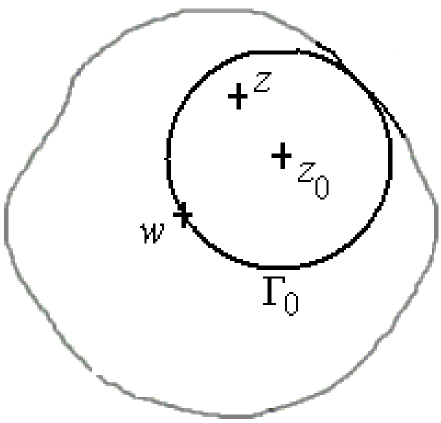
10.3. Tétel: (Taylor-kifejtés). Legyen f analitikus függvény egy D tartományon. Legyen $z_0 \in D$ tetszőleges pont és Γ_0 egy z_0 középpontú kör, mely teljes egészében D-be esik. Akkor e kör belsejébe eső z számokra érvényes az alábbi *Taylor-sorfejtés*:

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k,$$

ahol a sor együtthatói:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\,dw = \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

Bizonyítás vázlat. A körvonal w pontjaira nyilván $|z-z_0| < |w-z_0|$, azaz $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$.



10.4. ábra. *A Taylor-kifejtés bizonyításához*

Ezt felhasználva

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} =$$

$$= \frac{1}{w-z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{w-z_0} + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^3 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{w-z_0} + \frac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(w-z_0)^3} + \frac{(z-z_0)^3}{(w-z_0)^4} + \ldots$$

Szorozzuk mindkét oldalt $\frac{1}{2\pi i} f(w)$-vel, és integráljunk a Γ_0 körön. Megmutatható (nem bizonyítjuk), hogy a jobb oldali végtelen sor vonalintegrálját úgy kaphatjuk, hogy az egyes tagokat külön-külön integráljuk, és az integrálokat összegezzük (végtelen összegre ez *nem* következik az integrál additivitásából!). Röviden: a végtelen sort tagonként integrálhatjuk. A bal oldal integrálja a Cauchy-integrálformula miatt $f(z)$-vel egyenlő, innen

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw + \frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_{\Gamma_0}\frac{f(w)}{(w-z_0)^3}\,dw + \ldots$$

A jobb oldalon $(z-z_0)^k$ együtthatója a 10.3. Következmény értelmében épp a_k-val egyezik ($k = 0,1,2,\ldots$), és ezzel a bizonyítás kész.

10.18. Példa: Az exponenciális függvény 0 körüli Taylor-sora:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots,$$

mivel e^z (összes) deriváltja e^z-vel egyenlő. Tehát az exponenciális függvény 0 körüli Taylor-sora most is – a valós esethez hasonlóan – a definiáló exponenciális sorral egyezik.

Hasonlóan, egy sereg jól ismert valós függvényt ki lehet terjeszteni analitikus módon az egész komplex számsíkra a Maclaurin-soruk segítségével. Így kapjuk pl. a komplex szinusz- és koszinuszfüggvényeket, hiperbolikus függvényeket stb:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

Amennyiben az f függvény magában a z_0 pontban nem feltétlen analitikus, egy általánosabb sorfejtéshez jutunk:

10.4. Tétel: (Laurent-kifejtés). Legyen f analitikus függvény egy D tartományon, egy z_0 pontot esetleg kivéve. Legyenek Γ_0 és Γ_1 koncentrikus, z_0 középpontú körök, (Γ_0 sugara legyen kisebb) melyek által határolt gyűrűtartomány teljes egészében D-be esik. Akkor e gyűrűtartomány belsejébe eső z számokra érvényes az alábbi *Laurent-sorfejtés*:

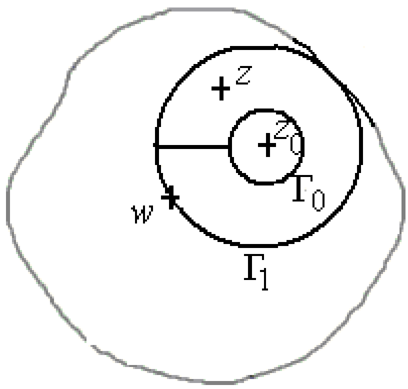
$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k,$$

ahol a sor együtthatói (a negatív indexekre is):

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}}\, dw \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Bizonyítás vázlat. Vágjuk fel egy egyenesszakasszal a gyűrűtartományt úgy, hogy ez az egyenesszakasz ne menjen át a z ponton.



10.5. ábra. *A Laurent-kifejtés bizonyításához*

A felvágott tartományra alkalmazzuk a Cauchy-féle integrálformulát (10.2. Tétel):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

A jobb oldali első integrálban a Γ_1 körvonal w pontjára nyilván $|z-z_0|<|w-z_0|$, azaz $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$. Ezt felhasználva:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}}=$$

$$=\frac{1}{w-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{w-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2+\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{w-z_0}+\frac{z-z_0}{(w-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(w-z_0)^3}+\frac{(z-z_0)^3}{(w-z_0)^4}+\ldots$$

A jobb oldali második integrálban a Γ_0 körvonal w pontjára nyilván $|w-z_0|<|z-z_0|$, azaz $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|<1$. Ezt felhasználva:

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)}=\frac{-1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}}=$$

$$=-\frac{1}{z-z_0}\left(1+\frac{w-z_0}{z-z_0}+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^2+\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^3+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{z-z_0}-\frac{w-z_0}{(z-z_0)^2}-\frac{(w-z_0)^2}{(z-z_0)^3}-\frac{(w-z_0)^3}{(z-z_0)^4}-\ldots.$$

Az így nyert sorokat beírva a jobb oldali integrálokba, és tagonként integrálva (nem bizonyítjuk ennek jogosságát):

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw+\frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw+\frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^3}\,dw+\ldots$$

$$+\frac{(z-z_0)^{-1}}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(w)\,dw+\frac{(z-z_0)^{-2}}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(w)(w-z_0)\,dw+$$

$$+\frac{(z-z_0)^{-3}}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}f(w)(w-z_0)^2\,dw+\ldots$$

Az állítás innen már következik.

Ha f a Γ_0 kör belsejében is analitikus (z_0-ban is), akkor a negatív indexű együtthatók a Cauchy-integráltétel miatt mind 0-val egyenlő, és így a Laurent-sor a Taylor-sorral egyezik.

10.19. Példa: Legyen $f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^2}$. Fejtsük f-et Laurent-sorba az $z_0 := i$ hely körül!

Megoldás. Nyilván

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^2} =: \frac{1}{(z-i)^2} \cdot g(z).$$

g-t az i pont körül Taylor-sorba fejtjük. Nyilván

$$g'(z) = -\frac{2!}{(z+i)^3}, \quad g''(z) = \frac{3!}{(z+i)^4}, \quad g'''(z) = -\frac{4!}{(z+i)^5}, \quad g^{(4)}(z) = \frac{5!}{(z+i)^6} ...,$$

ahonnan

$$g(i) = -\frac{1}{2^2}, \quad g'(i) = \frac{2!}{2^3 i}, \quad g''(i) = \frac{3!}{2^4}, \quad g'''(i) = -\frac{4!}{2^5 i}, \quad g^{(4)}(i) = -\frac{5!}{2^6} ....$$

Ezért g-nek i körüli Taylor-sora:

$$g(z) = -\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3 i}(z-i) + \frac{3}{2^4}(z-i)^2 - \frac{4}{2^5 i}(z-i)^3 - \frac{5}{2^6}(z-i)^4 + ...,$$

ahonnan f-nek i körüli Laurent-sor már adódik:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2^2}(z-i)^{-2} + \frac{2}{2^3 i}(z-i)^{-1} + \frac{3}{2^4} - \frac{4}{2^5 i}(z-i) - \frac{5}{2^6}(z-i)^2 + ...$$

Figyeljük meg, hogy a Laurent-sor csak két negatív indexű tagot tartalmaz.

10.5. A reziduumtétel

A Cauchy-tétel (10.1. Tétel) szerint egyszeresen összefüggő tartományon analitikus függvény zárt görbe menti integrálja mindig 0 (amennyiben a görbe a szóban forgó tartományban fekszik). Ebben a szakaszban ezt az eredményt általánosítjuk nem mindenütt analitikus, azaz szingularitásokkal bíró függvényekre. Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor a szinguláris pontok *izoláltak*, azaz minden szinguláris pontnak van olyan alkalmas környezete, melyen belül ez az egyetlen szingularitás. Ilyen szingularitásoknak három osztályát szokás megkülönböztetni:

Izolált szingularitások fajtái:

Az f függvény egy z_0 izolált szinguláris pontját

- *megszüntethető szingularitásnak* nevezzük, ha $f(z_0)$ értelmezésének alkalmas megváltoztatásával f z_0-ban is analitikus lesz, azaz a z_0 körüli Laurent-sorban az összes negatív indexű együttható 0;
- *k-adrendű pólusnak* nevezzük ($k \in \mathbf{N}$), ha a z_0 körüli Laurent-sor a_{-k} együtthatója nem zérus, de az összes a_{-n} együttható zérus, ha $n > k$ ($n \in \mathbf{N}$);
- *lényeges szingularitásnak* nevezzük, ha a z_0 körüli Laurent-sorban végtelen sok negatív indexű együttható különbözik 0-tól.

Reziduum:

Egy f függvény valamely z_0 pont körüli Laurent-sorában a $(z - z_0)^{-1}$ tag együtthatóját (azaz az a_{-1} számot) az *f függvény z_0-beli reziduumának* nevezzük. Jele: $\mathrm{Res}(f,z_0)$.

A 10.4. Tétel értelmében tehát:

$$\mathrm{Res}(f,z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} f(w)\,dw,$$

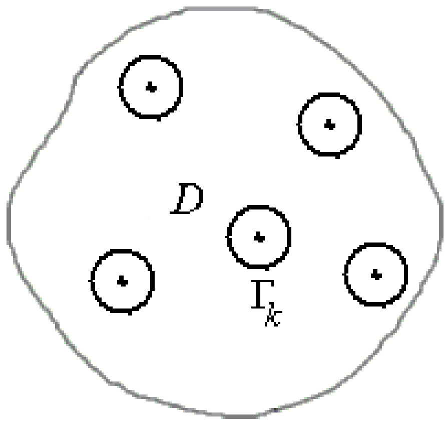
azaz az f függvénynek a Γ_0 körön vett integrálja a z_0-beli reziduum $2\pi i$-szerese. A következő tétel ezt általánosítja véges sok izolált szingularitás esetére:

10.5. Tétel: (reziduumtétel). Legyen f analitikus függvény egy $D \subset \mathbf{C}$ tartományon, kivéve esetleg a $z_1,z_2,...,z_N$ izolált szinguláris pontokat. Legyen Γ olyan zárt görbe, mely teljes egészében D-ben halad, és belseje tartalmazza f szingularitásait. Akkor:

$$\oint_{\Gamma} f(w)\,dw =$$

$$= 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f,z_1) + \mathrm{Res}(f,z_2) + ... + \mathrm{Res}(f,z_N)\right) = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,z_k).$$

Bizonyítás vázlat. Vegyük körül a szinguláris pontokat kis $\Gamma_1,\Gamma_2,...,\Gamma_N$ körökkel, akkor (alkalmas görbeívekkel felvágva az így nyert többszörösen összefüggő tartományt):



10.6. ábra. *Vázlat a reziduumtétel bizonyításához*

$$\oint_{\Gamma} f(w)\,dw = \sum_{k=1}^{N} \oint_{\Gamma_k} f(w)\,dw,$$

ahol alkalmaztuk a 10.1.Kövekezményt. A jobb oldali összegben mindegyik integrál a megfelelő reziduum $2\pi i$-szerese, ahonnan:

$$\oint_{\Gamma} f(w)\,dw = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,z_k).$$

A reziduumtétel jelentősége ott van, hogy segítségével alkalmasint igen bonyolult görbe menti integrálokat lehet kiszámítani egyszerű módon. Elég csak a szingularitásokhoz tartozó reziduumokat meghatározni. Ez pedig sokszor egyszerű technikák alkalmazásával megtehető. Elvben nem okoz pl. gondot a reziduum meghatározása, ha a függvény $g(\frac{1}{z-z_0})$ alakú, ahol g a 0 körül Taylor sorba fejthető.

10.20. Példa: Legyen $f(z) := e^{2/z}$. Határozzuk meg f-nek a 0-ban vett reziduumát.

Megoldás. Az exponenciális sorból f 0 körüli Laurent-sora azonnal adódik:

$$e^{2/z} = 1 + \frac{1}{1!}\frac{2}{z} + \frac{1}{2!}\frac{2^2}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{2^3}{z^3} + \dots,$$

innen a reziduum az $\frac{1}{z}$ tag együtthatója, azaz 2.

Analitikus függvények hányadosának z_0-beli reziduuma egyszerű deriválással számítható, ha a nevezőnek z_0 legfeljebb egyszeres gyöke:

10.10. Állítás: . Ha g, h analitikus függvények a z_0 pont egy környezetében, és $g(z_0) \neq 0$, akkor $\operatorname{Res}\left(\frac{h}{g}, z_0\right) = 0$. Ha g-nek z_0 egyszeres gyöke (azaz $g(z_0) = 0$, de $g'(z_0) \neq 0$), akkor pedig

$$\operatorname{Res}\left(\frac{h}{g}, z_0\right) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Bizonyítás. Ha $g(z_0) \neq 0$, akkor h/g *analitikus* a z_0 hely egy környezetében, így reziduuma automatikusan 0 (a Laurent-sorban minden negatív indexű együttható zérus, és a Laurent-sor Taylor-sorral egyezik). Ha pedig z_0 egyszeres gyöke g-nek, akkor g előáll $g(z) = (z - z_0)u(z)$ alakban, ahol u analitikus a z_0 hely egy környezetében. Ezért az $F(z) := (z - z_0) \cdot \frac{h(z)}{g(z)}$ előírással értelmezett függvénynek z_0-ban megszüntethető szingularitása van: z_0-on kívül $F(z) = \frac{h(z)}{u(z)}$. Így F z_0 körül Taylor-sorba fejthető:

$$F(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots.$$

A h/g függvény Laurent-sora innen

$$\frac{h(z)}{g(z)} = \frac{a_0}{z - z_0} + a_1 + a_2(z - z_0) + a_3(z - z_0)^2 + \ldots,$$

azaz a z_0-beli reziduuma épp az a_0 $(= \frac{h(z_0)}{u(z_0)})$ szám. Ezt pedig könnyű kiszámítani, mert

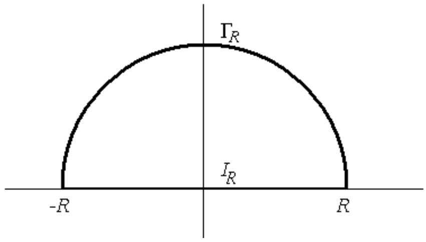
$$a_0 = \lim_{z \to z_0} F(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

10.21. Példa: A komplex kotangens függvénynek a $k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) számok mind szinguláris helyei (éspedig egyszeres pólusai). Mindegyik szinguláris helyhez tartozó reziduum 1-gyel egyenlő.

Valóban, $f(z) := \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, és a nevezőnek a $k\pi$ számok egyszeres zérushelyei. Az előző állítás szerint pedig

$$\operatorname{Res}(f, k\pi) = \frac{\cos z}{(\sin z)'}\Big|_{z = k\pi} = \frac{\cos k\pi}{\cos k\pi} = 1.$$

A reziduumtétel egy érdekes és gyakran előforduló alkalmazási területe bizonyos *valós improprius integrálok* kiszámítása, melyet a hagyományos integrálszámítási eszközökkel nem vagy csak nehézkesen lehetne végrehajtani. A módszer alapötletét a következőkben szemléltetjük.
Legyen f olyan komplex változós függvény, mely a felső félsíkon véges sok szinguláris pont ($z_1,z_2,...,z_N$) kivételével analitikus.



10.7. ábra. *Valós improprius integrálok kiszámítása a reziduumtétellel*

Akkor a reziduumtétel miatt minden, elég nagy R esetén

$$\oint_{I_R \cup \Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,z_k).$$

Ha $R \to +\infty$ *mellett a* Γ_R *félköríven vett integrál zérushoz tart, akkor az* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens, és*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,z_k).$$

Kérdés, milyen feltételek biztosítják, hogy az $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$ integrál zérushoz tartson $R \to +\infty$ mellett. Ehhez könnyen láthatóan elegendő, ha $|f(z)|$ elég gyorsan zérushoz tart $|z| \to +\infty$ mellett. Pontosabban, igaz a következő állítás.

10.11. Állítás: . Ha a Γ_R félkör mentén $|f| \le \frac{C}{R^{1+\alpha}}$ valamely $\alpha > 0$ pozitív szám és egy R-től független C konstans mellett, akkor $\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \to 0$ ($R \to +\infty$ mellett), azaz ekkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(f,z_k).$$

Bizonyítás. Ekkor ui.

$$|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz| \le \frac{C}{R^{1+\alpha}} \cdot |\Gamma_R| = \frac{C}{R^{1+\alpha}} \cdot R\pi = \frac{C\pi}{R^\alpha} \to 0,$$

ha $R \to +\infty$.

A most vázolt módszer természetesen csak akkor kecsegtet sikerrel, ha a kiindulási improprius integrál integrandusát ki tudjuk terjeszteni legalább a komplex félsík felső felére úgy, hogy a kiterjesztett függvénynek legfeljebb csak véges sok izolált szingularitása van a felső félsíkon, ezeket kivéve analitikus ugyanitt.

A módszert néhány példán keresztül szemléltetjük.

10.22. Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = ?$$

Megoldás. Legyen $f(z) := \frac{1}{1+z^2}$, akkor f-nek a felső félsíkon egyetlen szinguláris pontja van, éspedig az i szám. A reziduum e pontban:

$$\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = \frac{1}{(1+z^2)'}\,|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

A Γ_R félkör mentén

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \le \frac{1}{R^2-1} \le \frac{2}{R^2},$$

így a félköríven vett integrál 0-hoz tart, ha $R \to +\infty$. Innen pedig

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

E példában az integrál komplex függvénytani eszközök nélkül is kiszámítható:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\text{arctg}\, x]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Figyeljük meg azonban, hogy az első megoldáshoz sem a primitív függvény, sem az arkusz tangens függvény határértékének ismerete nem szükséges.

10.23. Példa: Ha a Q polinomnak nincs valós gyöke, és legalább 2-vel magasabb fokú, mint a P polinom, akkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(\frac{P}{Q}, z_k),$$

ahol $z_1, z_2, \ldots, z_N$ jelöli a Q polinom gyökeit.

Bizonyítás. Ekkor ui. az integrandus legalább $1/R^2$ sebességgel tart a 0-hoz, ha $R \to +\infty$. Pontosabban, ha a számláló pontosan m-edfokú, a nevező pedig legalább $(m+2)$-edfokú, akkor alkalmas $C \geq 0$ mellett minden elég nagy R esetén a Γ_R félkörív mentén:

$$\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq C \cdot \frac{R^m}{R^{m+2}} = \frac{C}{R^2}.$$

Az állítás ezek után az előző 10.11. Állítás egyenes következménye.

10.24. Példa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = ?$$

Megoldás. Legyen $f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^2} =$, akkor f-nek a felső félsíkon egyetlen szinguláris pontja van, éspedig az i szám. Az i körüli Laurent-sort a 10.19. Példából már ismerjük:

$$f(z) = -\frac{1}{2^2}(z-i)^{-2} + \frac{2}{2^3 i}(z-i)^{-1} + \frac{3}{2^4} - \frac{4}{2^5 i}(z-i) - \frac{5}{2^6}(z-i)^2 + \ldots.$$

Innen az i-beli vett reziduum: $\mathrm{Res}(f,i) = \frac{1}{4i}$. A Γ_R félkörön pedig érvényes az alábbi becslés:

$$\left|\frac{1}{(1+z^2)^2}\right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2} \leq \frac{4}{R^4}.$$

Így a Γ_R felső félkörön vett integrál 0-hoz tart, ha $R \to +\infty$ (10.11. Állítás), és

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f,i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$

10.6. Feladatok

1. Számítsuk ki a

$$\oint_{\Gamma} |z|^2 \, dz$$

vonalintegrált, ahol Γ jelöli a 0 1, $1+i$, i pontok által meghatározott egységnégyzetet (pozitív körüljárási irány szerint).

2. Számítsuk ki a

$$\int_{\Gamma} z^2 \, dz$$

vonalintegrált, ahol Γ az $y = x^2 + 1$ egyenletű görbe $(0{,}1)$ és $(1{,}2)$ pontjai közötti ív. Majd számítsuk ki ugyanezt a vonalintegrált, ahol most $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, és $\Gamma_1 = [i{,}1+i]$, $\Gamma_2 = [1+i{,}1+2i]$.

3. Igazoljuk, hogy minden $z \in \mathbf{C}$ esetén $\overline{\sin z} = \sin \overline{z}$.

4. Fejtsük Laurent-sorba az

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

formulával meghatározott függvényt a $z = 3$ hely körül.

5. Számítsuk ki a

$$\oint_{\Gamma} \frac{e^z}{z-3} \, dz$$

vonalintegrált, ahol Γ a $|z| = 4$ egyenletű körvonal (pozitív körüljárási irányban).

6. Határozzuk meg az alábbi improprius integrál értékét (ha az konvergens egyáltalán):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} \, dx.$$

Megoldások

1. A vonalat négy részre bontjuk:

$$\oint_\Gamma |z|^2\,dz = \int_{[0,1]} |z|^2\,dz + \int_{[1,1+i]} |z|^2\,dz + \int_{[1+i,i]} |z|^2\,dz + \int_{[i,0]} |z|^2\,dz,$$

és az egyes szakaszokon vett integrálokat külön számítjuk. A legegyszerűbb paraméterező függvények: $w(t) = t$, $w(t) = 1 + it$, $w(t) = 1 + i - t$, $w(t) = i - it$ (mind a négy esetben $t \in [0,1]$), innen

$$\int_{[0,1]} |z|^2\,dz = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3},$$

$$\int_{[1,1+i]} |z|^2\,dz = \int_0^1 (1+t^2)\cdot i\,dt = \frac{4}{3}i,$$

$$\int_{[1+i,i]} |z|^2\,dz = \int_0^1 ((1-t)^2+1)\cdot(-1)\,dt = -\frac{4}{3},$$

$$\int_{[i,0]} |z|^2\,dz = \int_0^1 (1-t)^2\cdot(-i)\,dt = -\frac{1}{3}i,$$

a teljes vonalintegrál ezért:

$$\oint_\Gamma |z|^2\,dz = -1 + i.$$

Az integrandus nem analitikus függvény, és a zárt görbe mentén vett integrál 0-tól különbözik.

2. A görbe legegyszerűbb paraméterezése: $w(t) = t + i(t^2+1)$ ($t \in [0,1]$), innen $w'(t) = 1 + 2it$, és

$$\int_\Gamma z^2\,dz = \int_0^1 \left(t + i(t^2+1)\right)^2 \cdot (1+2it)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 + 2i(t^2+1) - (t^2+1)^2\right) \cdot (1+2it)\,dt =$$

$$\int_0^1 (-5t^4 - 5t^2 - 1)\,dt + i\int_0^1 (-2t^5)\,dt = -\frac{11}{3} - \frac{1}{3}i.$$

A másik, két egyenesszakaszból álló összetett görbe kezdő- és végpontja ugyancsak i és $1+2i$, így az ennek mentén vett vonalintegrál változatlan marad. Ezt most ki is számítjuk:

$$\int_{\Gamma_1} z^2\,dz = \int_0^1 (t+i)^2\,dt = -\frac{2}{3}+i,$$

$$\int_{\Gamma_2} z^2\,dz = \int_0^1 (1+i+it)^2 i\,dt = -3-\frac{4}{3}i,$$

így e kettő összege:

$$\int_{\Gamma_1} z^2\,dz + \int_{\Gamma_2} z^2\,dz = -\frac{2}{3}+i-3-\frac{4}{3}i = -\frac{11}{3}-\frac{1}{3}i.$$

3. Minden $z \in \mathbf{C}$-re:

$$\overline{\sin z} = \overline{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots} = \overline{z}-\frac{\overline{z}^3}{3!}+\frac{\overline{z}^5}{5!}-\frac{\overline{z}^7}{7!}+\ldots = \sin\overline{z}.$$

4. Jelölje $g(z) := \frac{1}{z-1}$. Akkor g analitikus a $z=3$ hely egy környezetében, ezért itt Taylor-sorba fejthető. Mivel $g'(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$, $g''(z) = \frac{2!}{(z-1)^3}$, $g'''(z) = -\frac{3!}{(z-1)^4}$,... , ezért $g(3) = \frac{1}{2}$, $g'(3) = -\frac{1}{2^2}$, $g''(3) = \frac{2!}{2^3}$, $g'''(3) = -\frac{3!}{2^4}$,... és g-nek a 3 körüli Taylor-sora:

$$g(z) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(z-3)+\frac{2!}{2^3}(z-3)^2-\frac{3!}{2^4}(z-3)^3+\ldots,$$

ahonnan f-nek a 3 körüli Laurent-sora már adódik:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{1}{2^2}+\frac{2!}{2^3}(z-3)-\frac{3!}{2^4}(z-3)^2+\ldots$$

5. Az integrandusnak egyetlen szinguláris helye: $z=3$ és ez benne van a $|z|=4$ körvonal belsejében. A reziduum:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z-3},3\right) = e^3,$$

innen a vonalintegrál:

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z-3}\,dz = 2\pi i e^3.$$

6. A 10.23. Példa technikája alkalmazható. Az improprius integrál értéke az integrandus felső félsíkon levő szinguláris pontjaihoz tartozó reziduumok összegének $2\pi i$-szerese. A felső félsíkon levő szinguláris helyek: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ és $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$. A hozzájuk tartozó reziduumok:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_1\right) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{(1+i)^3},$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4+1}, z_2\right) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{(-1+i)^3}.$$

Innen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = 2\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{(1+i)^3}+\frac{1}{(-1+i)^3}\right) =$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(-1+i)^3+(1+i)^3}{-8} == \pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Tárgymutató

Ajánlott irodalom

Bronstejn, K.A., Szemengyajev, G.: Matematikai kézikönyv
Typotex, Budapest, 2000.

Csernyák László: Analízis
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.

Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: Analízis I.
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

Szász Pál: Differenciál és integrálszámítás elemei
Typotex, Budapest, 2001.

Szili László: Analízis feladatokban I.
ELTE, Eötvös Kiadó, Budapest, 2005.