Valószínűségszámítás

Ketskeméty László

Budapest, 1998. szeptember 18.

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

A jegyzet a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar Informatikus szakának Valószínűségszámítás c. tantárgyához készült segédanyag.

A jegyzet az elmélet szokásos felépítését követve négy fejezetre tagolódik, a fejezetek szakaszokból állnak. Az első fejezet tartalmazza a valószínűségszámítás axiómarendszerét, a valószínűségi mérték legfontosabb tulajdonságait és kiszámításának klasszikus módszereit. A második fejezet a valószínűségi változókkal, a harmadik fejezet a valószínűségi vektorváltozókkal foglakozik. A negyedik fejezetben kapnak helyet a nagy számok törvényei és a centrális határeloszlás tételek. A fejezetek végén nagy számú kidolgozott feladat és önállóan megoldandó gyakorlat található. A jegyzet végén a felhasznált jelölések, szimbólumok összefoglalása, tárgymutató, ajánlott irodalmak jegyzéke és függelékben a normális eloszlás táblázata olvasható még.

A Valószínűségszámítás c. tantárgy előkészíti a Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben és az Információelmélet c. tantárgyakat, de olyan más tárgyak is építenek rá, mint pl. a Matematikai statisztika, Sztochasztikus folyamatok, Véletlen számok generálása és szimulációk, Megbízhatóságelmélet, Operációkutatás, stb.

A valószínűségszámítást axiomatikus felépítésben tárgyaljuk, eleve elfogadott alapfogalmakból és alaptételekből kiindulva jutunk el az egyszerűbb tételeken és definíciókon keresztül az összetettebb állításokhoz és fogalmakhoz. A tételek nagy része bizonyításokkal együtt szerepel, ami az elméleti háttér jobb megértését szolgálja. Ugyanezt segítik a bemutatott példák és kidolgozott feladatok, valamint a mellékelt ábrák is. Az összetett, bonyolult bizonyításokat első olvasáskor mellőzni lehet, a főbb összefüggések anélkül is megérthetők.

Ezúton mondok köszönetet Dr. Györfi László akadémikusnak a kézirat gondos átnezéséért, a jegyzet szerkezeti felépítésével kapcsolatos tanácsaiért és értékes szakmai megjegyzéseiért, kiegészítéseiért. Köszönöm Pintér Márta doktorandusznak is, hogy körültekintően elolvasta a kéziratot, és segített a hibák, pontatlanságok kiküszöbölésében. Köszönettel tartozom Győri Sándor másodéves informatikus hallgatónak is, aki sokat dolgozott a szöveg internet hálózatra tételével. Végezetül köszönöm Salfer Gábor tanársegédnek a LaTeXszövegszerkesztővel kapcsolatos tanácsait, segítségét.

Budapest, 1998. szeptember 15.

Ketskeméty László

I. fejezet

A Kolmogorov-féle valószínűségi mező

I.1. A valószínűségszámítás alapfogalmai és axiómarendszere

Az *alapfogalmak* szemléletből eredő, magától értetődő fogalmakat jelentenek, amelyeket egyszerűbb fogalmak segítségével nem lehet definiálni, hanem csupán körülírni lehet őket, illetőleg példákat lehet mutatni rájuk.

Hasonlóan, az *axiómák* bizonyítás nélkül elfogadott állítások, amelyek annyira nyilvánvalóak, hogy csupán a szemléletből vezetjük le őket.

I.1.1. Alapfogalom: *Véletlen kísérlet*en ($\mathfrak{K}$) olyan folyamatot, jelenséget értünk, amelynek kimenetele előre bizonyosan meg nem mondható, csupán az, hogy elvileg milyen kísérletkimenetelek lehetnek. A véletlen kísérletet akárhányszor meg lehet figyelni, vagy végre lehet hajtani azonos feltételek mellett.

I.1.1. Példa:

a.) Egy szabályos játékkockával dobunk. Nem tudjuk előre megmondani az eredményt, de azt állíthatjuk, hogy az 1,2,3,4,5,6 érték közül valamelyiket kapjuk.

b.) Egy teljes, jól megkevert csomag magyarkártyából véletlenszerűen kihúzunk 10 lapot. A véletlentől függ, hogy melyik lesz az a 10 lap, de azt tudjuk, hogy a 32 lap összes ismétlés nélküli kombinációja közül lehet csak valamelyik.

c.) Egy telefonkészüléket figyelve mérjük a két hívás között eltelt időt. A lehetséges kimenetelek a $[0, \infty)$ intervallum pontjai.

I.1.2. Alapfogalom: A $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi esemény*nek nevezzük. A véletlen kísérlet végrehajtása során az elemi események halmazából mindig csak egy fog realizálódni. Az elemi események jelölésére az ω, esetleg ω_i szimbólumokat fogjuk használni.

I.1.1. Definíció: A $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes elemi esemény halmazát *eseménytér*nek nevezzük és Ω-val jelöljük.

I.1.2. Példa:

a.) A kockadobás kísérletével kapcsolatos elemi események az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékek, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b.) A kártyahúzás kísérlethez tartozó elemi események a 32-es csomag összes 10 lapos részhalmazai, a lapok sorrendjét nem figyelembevéve, $\Omega = \{\omega : \omega$ a 32 kártyacsomag egy 10 elemszámú kombinációja$\}$.

c.) A telefonhívások közötti időtartamra vonatkozó kísérlethez tartozó elemi események az $\Omega = [0, \infty)$ intervallum pontjai.

I.1.2. Definíció: Az elemi események halmazait, az Ω eseménytér részhalmazait *esemény*eknek nevezzük, és a latin abc betűivel jelöljük: $A, B, C, \ldots$.

Megjegyzés:

a.) Az események definiálását gyakran logikai állítások megfogalmazásával tesszük. Ilyenkor az eseménynek megfelelő halmaz azokból az elemi eseményekből áll, amelyek realizálódása esetén a logikai állítás értéke *igaz*.

b.) Az egyetlen elemi eseményből álló eseményeket az egyszerűség kedvéért a továbbiakban szintén elemi eseményeknek fogjuk nevezni, holott matematikailag az elem és az elemből álló egyelemű halmaz fogalma nem ugyanaz! A legalább kételemű eseményeket *összetett esemény*nek is nevezzük.

I.1.3. Definíció: Az A esemény *bekövetkezik*, ha a kísérlet végrehajtása után olyan elemi esemény realizálódott, ami az A eleme.

I.1.3. Példa: a.) A kockadobás kísérletével kapcsolatos esemény a $\{2, 4, 6\}$ elemi esemény-halmaz, melyet a „párosat dobunk” logikai állítással is definiálhatunk.

b.) A kártyahúzás kísérlethez tartozó esemény pl. a. „van ász a kihúzott lapok között” állításhoz tartozó kártya-kombinációk halmaza, amelyhez az Ω-át alkotó $\binom{32}{8}$ db. elemi eseményből $\binom{32}{8} - \binom{28}{8}$ tartozik.

c.) A telefonhívások közötti időtartamra vonatkozó kísérlethez tartozó esemény pl. az „öt percen belül fog csöngeni”, ami éppen a $[0, 5)$ intervallum pontjait definiálja.

I.1.4. Definíció: Az A esemény *maga után vonja* a B eseményt, ha az A esemény részhalmaza a B eseménynek. Jelölés: $A \subseteq B$.

Megjegyzés: A $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlet ω elemi eseményeit jellemzi az, hogy nincs olyan $B \neq \emptyset$ esemény, amely ω-t maga után vonná.

I.1.4. Példa: a.) Kockadobásnál a „hatost dobunk” esemény maga után vonja a „párosat dobunk” eseményt.

b.) Kártyahúzásnál a „mind a négy ászt kihúztuk” esemény maga után vonja a „van piros színű lap a kihúzottak között” eseményt.

c.) Telefonhívásnál az „öt percen belül csörögni fog” maga után vonja a „tíz percen belül csörögni fog” eseményt, hiszen $[0, 5) \subset [0, 10)$.

I.1.5. Definíció: Az A és B események *ekvivalensek*, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$ teljesül egyszerre. Ekvivalens események között nem teszünk különbséget. Jelölés: $A = B$.

I.1.6. Definíció: *Lehetetlen esemény*nek nevezzük azt a $\emptyset$-vel jelölt eseményt, amely a $\mathfrak{K}$ bármely végrehajtása során soha nem fog bekövetkezni, azaz $\emptyset$ az üres halmaz. $\emptyset$ megfelel a konstans hamis állításnak, olyan esemény, ami elvileg soha nem következhet be.

I.1.7. Definíció: *Biztos esemény*nek nevezzük azt az eseményt, amelyik a $\mathfrak{K}$ bármely végrehajtása során mindig bekövetkezik. Ez az esemény nem más, mint az Ω eseménytér. Ω megfelel a kontans igaz állításnak.

I.1.5. Példa:

a.) A kockadobásnál a „10-nél kisebb értéket dobunk” esemény az Ω-val, a „negatív értéket dobunk” esemény pedig $\emptyset$-vel ekvivalens.

b.) Kártyahúzásnál „van a lapok között hetestől különböző” Ω-val, míg a „minden lap értéke legalább tíz” $\emptyset$-vel ekvivalens.

c.) Telefonhívásnál „valamikor csörögni fog” Ω-val, „soha nem fog csörögni” pedig $\emptyset$-vel ekvivalens.

I.1.8. Definíció: Egy A esemény *ellentett eseménye* az az $\bar{A}$ -val jelölt esemény, ami pontosan akkor következik be, amikor A nem következik be. $\bar{A}$ az A-nak az Ω-ra vonatkoztatott komplementer halmaza, azaz $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

I.1.9. Definíció: Az A és B események *összegén* azt az $A + B$-vel jelölt eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, ha A és B közül legalább az egyik bekövetkezik. ($A + B$ az A és B események uniója).

I.1.10. Definíció: Az A és B események *szorzatán* azt az AB vagy $A \cdot B$-vel jelölt eseményt értjük, amely pontosan akkor következik be, amikor A is és B is egyidejűleg bekövetkezik. (AB az A és B események metszete).

I.1.11. Definíció: Az A és B események *különbségén* azt az $A \setminus B$ -vel jelölt eseményt értjük, ami pontosan akkor következik be, amikor A bekövetkezik, de B nem. ($A \setminus B = A \cdot \bar{B}$).

I.1.1. Tétel: Tetszőleges A, B és C eseményekre igazak az alábbiak:
a.) $A + B = B + A$,
b.) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
c.) $A + A = A$,
d.) $AB = BA$,
e.) $(AB)C = A(BC)$,
f.) $AA = A$,
g.) $A(B + C) = (AB) + (AC)$,
h.) $A + (BC) = (A + B)(A + C)$,
i.) $\overline{\overline{A}} = A$,
j.) $\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$,
k.) $\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}$,

l.) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$,
m.) $A + \bar{A} = \Omega$,
n.) $A\Omega = A$,
o.) $A + \Omega = \Omega$,
p.) $A\emptyset = \emptyset$,
r.) $A + \emptyset = A$.

Bizonyítás: Mivel az események közötti műveletek a halmazok közötti unió és metszet illetve a komplementer segítségével voltak értelmezve, és ott igazak a Boole algebra összefüggései, itt is érvényesek lesznek. ■

I.1.12. Definíció: Az A és B események *egymást kizáróak*, ha $AB = \emptyset$, azaz szorzatuk a lehetetlen esemény. Egymást kizáró események egyidejűleg nem következhetnek be.

I.1.13. Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ események (nem feltétlenül véges elemszámú) rendszere*teljes eseményrendszer*t alkot, ha i, j -re $A_i \cdot A_j = \emptyset$ (páronként egymást kizárják) és $\sum\limits_{\forall i} A_i = \Omega$ teljesül.

Megjegyzés:

a.) A $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlet egy végrehajtása során a teljes eseményrendszer eseményei közül csak egyikük fog biztosan bekövetkezni.

b.) Az A és $\bar{A}$ kételemű teljes eseményrendszer.

I.1.6. Példa: A francia kártyából való húzásnál az A_1 =„kőrt húzok”, A_2 =„kárót húzok”, A_3 =„pikket húzok” és A_4 =„treffet húzok” események teljes eseményrendszert alkotnak.

I.1.1. Axiómák: A $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlettel kapcsolatos összes események $\Im$ rendszere (az ú.n. *eseményalgebra*) σ-algebra, azaz kielégíti az alábbi tulajdonságokat:
1^o $\Omega \in \Im$
2^o Ha $A \in \Im \Rightarrow \bar{A} \in \Im$ is.
3^o Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im \Rightarrow \sum\limits_{\forall i} A_i \in \Im$ is.

Megjegyzés:

a.) $\Im$ nem feltétlenül esik egybe Ω összes részhalmazainak 2^Ω halmazrendszerével. $\Im$-ben csak a kísérlettel kapcsolatba hozható ú.n. megfigyelhető események vannak. Nem zárjuk ki, hogy lehetnek Ω-nak olyan A részhalmazai, amelyeket nem tudunk megfigyelni, azaz lehet olyan kimenetel, ami végén nem tudjuk megmondani, hogy A bekövetkezett-e vagy sem. Az axiómákkal éppen az ilyen A eseményeket akarjuk kizárni a további vizsgálatainkból.

b.) Az axiómák nyilvánvaló tulajdonságokat fogalmaznak meg. Az 1^o pontban azt követeljük meg, hogy a biztos esemény megfigyelhető legyen. A 2^o-ben azt állítjuk, hogy ha az A eseményt meg tudjuk figyelni, akkor az ellentettjét is meg tudjuk. A 3^o-ban pedig az az állítás, hogy ha eseményeknek egy rendszerét egyenként meg tudjuk figyelni, akkor azt az eseményt is meg fogjuk tudni figyelni, amely akkor következik be, ha a felsorolt események közül legalább egy bekövetkezik.

I.1.2. Tétel: Az axiómákból levezethetők $\Im$-nek további tulajdonságai is:

a.) $\emptyset \in \Im$, azaz a lehetetlen esemény is megfigyelhető.

b.) Ha $A, B \in \Im \Rightarrow A + B \in \Im$ is, azaz a 3^o axióma véges sok esetre is igaz.

c.) Ha $A, B \in \Im \Rightarrow AB \in \Im$ is, azaz megfigyelhető események szorzata is megfigyelhető.

d.) Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im \Rightarrow \prod_{\forall i} A_i \in \Im$ is igaz, azaz megfigyelhető események együttbekövetkezése is megfigyelhető.

e.) Ha $A, B \in \Im \Rightarrow A \setminus B \in \Im$ és $B \setminus A \in \Im$, azaz megfigyelhető események különbségei is megfigyelhetőek.

Bizonyítás:

a.) Az 1^o és 2^o axiómákból triviálisan következik.

b.) Az $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = A_4 = \cdots = \emptyset$ választással, a 3^o axiómából következik.

c.) Ha $A, B \in \Im$, akkor 2^o miatt $\bar{A}, \bar{B} \in \Im$ is igaz, de akkor b.) miatt $\bar{A} + \bar{B} \in \Im$ is fennáll, de újra a 2^o axiómára hivatkozva ekkor $\overline{\bar{A} + \bar{B}} = A \cdot B \in \Im$ is fennáll. Az utolsó lépésben a I.1.1 tétel j.) és i.) állításait használtuk fel.

d.) Az előzőhöz hasonlóan, a 2^o és 3^o axiómákból valamint a *De Morgan* azonosságokból következik.

e.) 2^o miatt $\bar{A}, \bar{B} \in \Im$ is igaz, így c.) miatt $(A \setminus B =) A \cdot \bar{B} \in \Im$ és $(B \setminus A =) B \cdot \bar{A} \in \Im$ is igaz. ■

I.1.2. Axiómák: Adott egy $\mathbf{P} : \Im \to [0, 1]$ halmazfüggvény, melyet *valószínűség*nek nevezünk. A $\mathbf{P}$ függvény kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

1^o $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

2^o Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im$ páronként egymást kizárják, azaz $\forall i \neq j$-re $A_i \cdot A_j = \emptyset$, akkor $\mathbf{P}(\sum\limits_{\forall i} A_i) = \sum\limits_{\forall i} \mathbf{P}(A_i)$.

Megjegyzés:

a.) A 2^o axiómában megfogalmazott tulajdonságot a valószínűség *σ-additivitási* tulajdonságának nevezzük.

b.) A megfigyelhető események valószínűségeit kiszámíthatónak tételezzük fel. A $\mathbf{P}(A)$ érték az A esemény bekövetkezésének mértéke, esélye. A $\mathbf{P}$ halmazfüggvény rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, amikkel minden más mérték is rendelkezik (pl. hossz,terület, térfogat,tömeg stb.) A 2^o axióma azt állítja, hogy egymást kizáró események összegének valószínűsége az események valószínűségeinek összege, mint ahogy pl. egymást át nem fedő részekből álló síkidom területe egyenlő a részek területeinek összegével. Az 1^o axióma azt posztulálja, hogy legyen a biztos esemény valószínűsége 1, és ehhez képest jellemezzük a többi esemény bekövetkezésének esélyét. A fizikai mennyiségekhez mérőműszerek szerkeszthetők, hogy az adott test egy fizikai jellemzőjének elméleti értékét nagy pontossággal megbecsülhessük. Ilyen műszer a hosszmérésre a méterrúd, tömegre a karosmérleg. Ugyanúgy, mint más mértéknél, a valószínűség esetén is szerkeszthető mérőműszer, amivel az elméleti valószínűség számértéke jól becsülhető lesz. Ez a „mérőműszer” a később értelmezendő relatív gyakoriság lesz. (Lásd az I.3. szakaszt !)

I.1.14. Definíció: Az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ hármast a $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlethez tartozó *Kolmogorov-féle valószínűségi mező*nek nevezzük.

I.1.3. Tétel: A valószínűség axiómarendszeréből levezethetőek a valószínűség alábbi tulajdonságai:

a.) $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$,

b.) $\mathbf{P}(\emptyset) = 1 - \mathbf{P}(\Omega) = 0$,

c.) Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor $\sum\limits_{\forall i} \mathbf{P}(A_i) = 1$,

d.) Ha $A \subseteq B$, akkor $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$,

e.) $\mathbf{P}(A \backslash B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$.

Bizonyítás:

a.) $A \cdot \bar{A} = \emptyset$, $A + \bar{A} = \Omega$ és 1^o, 2^o miatt $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(A + \bar{A}) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A})$.

b.) $\bar{\Omega} = \emptyset$ miatt az előző állításból triviális.

c.) Mivel $\sum\limits_{\forall i} A_i = \Omega$ és az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ események egymást páronként kizárják, az axiómákból már következik az állítás.

d.) $B = A + \bar{A} \cdot B$ és $A \cdot (\bar{A} \cdot B) = \emptyset$, így $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$. Mivel $\mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) \geq 0$, már következik az állítás.

e.) $B = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$ és $(A \cdot B) \cdot (\bar{A} \cdot B) = \emptyset$ miatt $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cdot B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B)$. Mivel $B \setminus A = B \cdot \bar{A}$ így az állítás már következik. ∎

I.1.4. Tétel: *(Poincare-tétel)*
Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ tetszőlegesek, akkor $\mathbf{P}(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} S_i^n$, ahol $S_i^n = \sum\limits_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq n} \mathbf{P}(A_{j_1} \cdot A_{j_2} \cdot \cdots \cdot A_{j_i})$.

Bizonyítás: n-re vonatkozó teljes indukcióval:
$n = 2$ esetben:
$A_1 + A_2 = A_1 + (A_2 \cdot \bar{A}_1)$ és $A_1 \cdot (A_2 \cdot \bar{A}_1) = \emptyset$ miatt I.1.3 tétel e.) állítását felhasználva: $\mathbf{P}(A_1+A_2) = \mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2\cdot\bar{A}_1) = \mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)-\mathbf{P}(A_1\cdot A_2)$.
Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n \geq 2$ esetben.
$n + 1$-re az állítás bizonyítása:
$\sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i + A_{n+1}$, így
$\mathbf{P}(\sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbf{P}(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}(A_{n+1} \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} A_i) =$
$= \mathbf{P}(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cdot A_{n+1})$.
Az indukciós feltevés felhasználásával:
$\mathbf{P}(\sum\limits_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum\limits_{i<j} \mathbf{P}(A_iA_j) + \sum\limits_{i<j<k} \mathbf{P}(A_iA_jA_k) - + \cdots +$
$+(-1)^n\mathbf{P}(A_1A_2\cdot\dots\cdot A_n) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_iA_{n+1}) + \sum\limits_{i<j} \mathbf{P}(A_iA_jA_{n+1}) - +$
$\cdots + (-1)^n\mathbf{P}(A_1A_2\cdot\dots\cdot A_nA_{n+1})$
ahonnan a tagok felcserélésével az állítást kapjuk. ∎

I.1.5. Tétel: *(Boole-egyenlőtlenség)*
Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Akkor minden $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Im$ esetén

a.) $\mathbf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$,

b.) $\mathbf{P}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\bar{A}_i)$.

Bizonyítás:

a.) $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus (A_1 + A_2)) + \cdots + (A_n \setminus \sum\limits_{i=1}^{n-1} A_i)$.
Ez egy diszjunkt felbontás, és
$A_2 \setminus A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \mathbf{P}(A_2 \setminus A_1) \leq \mathbf{P}(A_2)$,
$A_3 \setminus (A_1 + A_2) \subseteq A_3 \Rightarrow \mathbf{P}(A_3 \setminus (A_1 + A_2)) \leq \mathbf{P}(A_3)$,
$\vdots$

$A_n \setminus \sum_{i=1}^{n-1} A_i \subseteq A_n \Rightarrow \mathbf{P}\left(A_n \setminus \sum_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \mathbf{P}(A_n)$.

A valószínűség $\sigma-$additivitása miatt:

$$\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2 \setminus A_1) + \mathbf{P}(A_3 \setminus (A_1 + A_2)) + \cdots$$
$$+ \cdots + \mathbf{P}\left(A_n \setminus \sum_{i=1}^{n-1} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

b.) A De Morgan azonosságból:

$\overline{\sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i} = \prod_{i=1}^{n} \overline{\overline{A_i}} = \prod_{i=1}^{n} A_i.$

Így az a.) állítás eredményét is felhasználva:

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}\overline{\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right)} = 1 - \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\left(\bar{A}_i\right). \blacksquare$$

I.1.6. Tétel: *(A valószínűség folytonossági tulajdonsága)*

a.) Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ olyan események, hogy

$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} A_i \doteq \lim_{n\to\infty} A_n,$

akkor $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

b.) Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ olyan események, hogy

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots \supseteq \prod_{i=1}^{\infty} A_i \doteq \lim_{n\to\infty} A_n,$

akkor $\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

Megjegyzés: A tétel elnevezése azért jogos, mert folytonos függvényeknél fennáll a $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ tulajdonság.

Bizonyítás:

a.) Legyen $A_0 = \emptyset$ és $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.
Ekkor $C_i \cdot C_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, mert
$(A_i \setminus A_{i-1}) \cdot (A_j \setminus A_{j-1}) = A_i(A_j \cdot \bar{A}_{i-1})\bar{A}_{j-1} = \emptyset$, ha $i \neq j$.
Továbbá $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} C_i$.

Így $\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(C_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(C_i) =$
$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P}(A_i) - \mathbf{P}(A_{i-1})) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{P}(A_n) - \mathbf{P}(A_0)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

b.) Legyen $B_i = \bar{A}_i$, akkor $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots \subseteq \sum_{i=1}^{\infty} B_i$.

Mivel $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$, ezért $\overline{\sum_{i=1}^{\infty} B_i} = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, tehát alkalmazva az a.) eredményét
$\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} (1 - \mathbf{P}(A_n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$,
$\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - \mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n)$. ■

I.2. Példák valószínűségi mezőkre

I.2.1. Példa: *A klasszikus valószínűségi mező, a diszkrét egyenletes eloszlás*
Ekkor az eseménytér véges elemszámú elemi esemény halmaza:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, az $\Im$ eseményalgebra Ω összes részhalmazainak rendszere, és mindegyik elemi esemény bekövetkezésének egyforma a valószínűsége: $\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = \cdots = \mathbf{P}(\{\omega_n\})$. Mivel az összes elemi események rendszere teljes eseményrendszert alkot, ezért $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^{n} \{\omega_i\}) = n \cdot \mathbf{P}(\{\omega_1\}) \;\Rightarrow\; p_i = \mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} \;\forall\, i$ -re.

Így, ha A tetszőleges esemény, akkor $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbf{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n} \sum_{\omega\in A} 1 = \frac{k_A}{n}$, ahol k_A az A esemény számossága. Vagyis az események valószínűsége ilyenkor úgy számítható, hogy az esemény bekövetkezése szempontjából kedvező elemi események számát osztjuk a kísérlettel kapcsolatos összes elemi események számával.

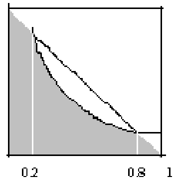
Klasszikus valószínűségi mezővel modellezhető a kockadobás, a pénzfeldobás, a rulettezés, a kártyahúzás, a lottóhúzás, a totótippelés stb.

I.2.2. Példa: *Geometriai valószínűségi mező*
Alkosson a $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlet elemi eseményeinek halmaza egy véges mértékű

geometriai alakzatot. Ilyenkor az eseményrendszer a geometriai alakzat mérhető részhalmazait jelenti, és az A esemény valószínűségét a $\mathbf{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ módon számítjuk, ahol μ a geometriai tér mértékét jelöli. Ha pl. Ω intervallum, akkor hosszmérték, ha síkidom, akkor területmérték, ha test, akkor térfogatmérték stb.

Például, ha x és y két véletlenül választott 0 és 1 közé eső szám, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy $x + y < 1$ és $xy < 0{,}16$ lesz?

Ω most az egységnégyzet lesz, az kérdéses esemény pedig az alábbi ábrán besatírozott területnek felel meg:



A besatírozott terület nagysága: $\int\limits_{0,2}^{0,8} \frac{0{,}16}{x}\,\mathrm{d}x + 0{,}2 = 0{,}42.$

I.3. Kísérletsorozat, az események relatív gyakorisága

I.3.1. Definíció: Tekintsünk egy $\mathfrak{K}$ véletlen kísérletet, és jelölje $\mathfrak{K}_n$ azt a kísérletet, amely a $\mathfrak{K}$ n-szeres azonos körülmények közötti ismételt végrehajtásából áll. $\mathfrak{K}_n$-t egy n-szeres*kisérletsorozat*nak nevezzük.

I.3.1. Példa: Amikor tízszer dobunk egy szabályos játékkockával, a kockadobáshoz tartozó tízszeres kisérletsorozatról van szó. A lottóhúzások sorozata több mint harminc éven át tartó kisérletsorozatként is felfogható, így az n kísérletszámra igaz az $n > 1500$. Ultizásnál minden játék előtt az osztásnál végrehajtjuk az I.1.1/b.) példában említett $\mathfrak{K}$ kísérletet, azaz itt is kisérletsorozatról van szó.

I.3.2. Definíció: Ha egy n-szeres kísérletsorozatban az A esemény k_A -szor következett be, akkor k_A az A esemény *gyakorisága*, $r_n(A) = \frac{k_A}{n}$ pedig a *relatív gyakorisága*.

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy mind a gyakoriság, mind a relatív gyakoriság konkrét értéke függ a véletlentől. A relatív gyakoriság rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

I.3.1. Tétel: Egy adott n-szeres kísérletsorozatnál

a.) $r_n : \Im \to [0,1]$,

b.) $r_n(\Omega) = 1$,

c.) Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ egymást kizáró események, akkor $r_n(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} r_n(A_i)$.

Megjegyzés: Az előző tétel azt állítja, hogy a relatív gyakoriság rendelkezik a valószínűség tulajdonságaival. Később látni fogjuk azt is, hogy n növekedtével $r_n(A) \to \mathbf{P}(A)$ is fennáll. (Nagy számok Bernoulli-féle törvénye). Ezt a törvényszerűséget először tapasztalati úton fedezték fel a XVII. században, mikor megfigyelték, hogy a relatív gyakoriság egyre kisebb mértékben ingadozik egy 0 és 1 közé eső szám körül. A klasszikus matematikusok éppen ez alapján definiálták az események elméleti valószínűségét: az az érték, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik. A relatív gyakoriság tehát alkalmas a valószínűség — mint fizikai mennyiség — mérésére.

Kolmogorov az axiómáiban a relatív gyakoriság a.)-c.) tulajdonságait örökítette át a valószínűségre, minthogy a határátmenet ezeket a tulajdonságokat megtartja.

I.4. A feltételes valószínűség és az események függetlensége

A $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlet elemi eseményei számunkra véletlenszerűen következnek be, mégpedig azért, mert a végeredményt befolyásoló körülmények bonyolult komplexumát nem ismerjük pontosan. Viszont ismerjük az egyes események, elemi események bekövetkezési esélyeit — a valószínűséget —, vagy legalábbis tetszőleges pontossággal mérhetjük őket. Ha viszont az A esemény bekövetkezési körülményeiről további információkat szerzünk be, vagy bizonyos pontosító feltételezéssel élünk, megváltozhat az A bekövetkezési esélye, nőhet is, de csökkenhet is. Pl. a kockadobás kísérletnél, a 6-os dobás esemény valószínűsége 0, ha tudjuk, hogy a dobott érték páratlan szám, és $\frac{1}{3}$, ha tudjuk, hogy a dobott érték páros volt.

Hogyan változik (változna) az A esemény valószínűsége, ha az A-val egyidejűleg megfigyelhető B esemény bekövetkezését ismerjük (ismernénk)? Tegyük fel, hogy a $\mathfrak{K}$ kísérlettel végrehajtottunk egy n hosszúságú kisérletsorozatot. Az A eseményt k_A -szor, a B eseményt k_B -szer, az AB eseményt pedig k_{AB} -szer figyeltük meg. Ekkor a B esemény bekövetkezéséhez képest az A esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága nyilván $r_n(A\,|B\,) = \frac{k_{AB}}{k_B}$, melyet az A eseménynek a B eseményre vonatkoztatott relatív gyakoriságának nevezünk. Ez az arány az A bekövetkezési esélyeit pontosabban tükrözi, ha a B bekövetkezéséről biztos tudomásunk van, mint az $r_n(A) = \frac{k_A}{n}$.

A feltételes relatív gyakoriság tulajdonságai nyilván:

a.) $0 \le r_n(A\,|B\,) \le 1$,

b.) $r_n(B\,|B\,) = 1$,

c.) Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im$ egymást kizáró események, akkor $r_n(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\,|B\,) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} r_n(A_i\,|B\,)$.

Az $r_n(A\,|B\,) = \frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{\frac{k_{AB}}{n}}{\frac{k_B}{n}} = \frac{r_n(AB)}{r_n(B)}$ átírás után, ha $n \to \infty$, kapjuk, hogy $r_n(A\,|B\,) \to \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$.

I.4.1. Definíció: Legyenek $A, B \in \Im$ olyan események, hogy A tetszőleges és $\mathbf{P}(B) > 0$. Akkor az A eseménynek a B-re vonatkoztatott *feltételes valószínűségén* a $\mathbf{P}(A\,|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}$ számot értjük.

I.4.1. Tétel: Tekintsük az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt. $B \in \Im, \mathbf{P}(B) > 0$ rögzített.

Ekkor a $\mathbf{P}_B(A) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(A\,|B)$ feltételes valószínűségre teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

a.) $0 \le \mathbf{P}_B(A) \le 1 \quad (\forall\, A \in \Im)$,

b.) $\mathbf{P}_B(B) = 1$, $\mathbf{P}_B(\emptyset) = 0$,

c.) $\forall\, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im : A_i \cdot A_j = \emptyset \;\; (i \ne j) \;\; \Rightarrow$ $\mathbf{P}_B(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}_B(A_i)$.

Bizonyítás:

a.) Mivel $AB \subseteq B$, ezért $\mathbf{P}(AB) \leq \mathbf{P}(B)$, tehát következik az állítás.

b.) $B \cdot B = B$ miatt $\mathbf{P}_B(B) = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1$ és $B \cdot \emptyset = \emptyset$, tehát $\mathbf{P}_B(\emptyset) = \frac{\mathbf{P}(\emptyset)}{\mathbf{P}(B)} = 0$.

c.) Mivel az $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ eseményrendszer egymást kizáró eseményekből áll, ezért $A_1 \cdot B, A_2 \cdot B, \ldots, A_n \cdot B, \ldots$ is egymást kizáró eseményekből álló rendszer, így a valószínűség σ-additivitási tulajdonságából: $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty}(A_i B)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i B)$. Mindkét oldalt osztva $\mathbf{P}(B)$-vel már adódik az állítás. ■

Megjegyzés:

a.) Az előző tétel azt állítja, hogy ha B-t rögzítjük, és $\Im_B \doteq \{C; C = A \cdot B,\ A \in \Im\}$, akkor a $(B, \Im_B, \mathbf{P}_B)$ kielégíti a Kolmogorov valószínűségi mező axiómáit.

b.) Vannak A, B események, amelyekre $\mathbf{P}(A \,|\, B) = \mathbf{P}(A)$ teljesül, azaz A valószínűsége nem változik meg, ha a B esemény bekövetkezését ismerjük; az A valószínûsége független a B bekövetkezésétől.

I.4.2. Definíció: Legyenek $A, B \in \Im$ teszőleges események. Az A és B események *függetlenek*, ha $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$ fennáll.

Megjegyzés:

a.) Ha az $A, B \in \Im$ események függetlenek és $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0$, akkor $\mathbf{P}(A \,|\, B) = \mathbf{P}(A)$ és $\mathbf{P}(B \,|\, A) = \mathbf{P}(B)$ is fennáll, vagyis az egyik esemény bekövetkezésének ismerete, nem befolyásolja a másik esemény valószínűségét.

b.) Nem szabad összekeverni az egymást kizáró események és a független események fogalmait! Ha két esemény egymást kizárja, azaz $AB = \emptyset$, akkor az egyik bekövetkezése igencsak meghatározza a másik bekövetkezését: ha pl. A bekövetkezik, akkor B biztosan nem következik be. Független események esetén, ha az egyik esemény bekövetkezését ismerjük, nem változik meg a másik bekövetkezési valószínűsége.

c.) Az események függetlenségének a fogalma különbözik a fizikai értelemben vett függetlenség fogalmától is. A fizikai függetlenség azt jelenti, hogy az okozat nem következménye az oknak, tehát itt a függetlenség nem szimmetrikus.

I.4.2. Tétel: Ha az $A, B \in \Im$ események függetlenek, akkor

a.) A és $\bar{B}$,

b.) $\bar{A}$ és B,

c.) $\bar{A}$ és $\bar{B}$

is függetlenek.

Bizonyítás:

a.) $\mathbf{P}(A\bar{B}) + \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) =$
$\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(B)) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B})$
$\Rightarrow\quad A, \bar{B}$ függetlenek.

b.) $\mathbf{P}(\bar{A}B) + \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P}(\bar{A}B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) =$
$\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\bar{A})$
$\Rightarrow\quad B, \bar{A}$ függetlenek.

c.) $\mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) + \mathbf{P}(A\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{B}) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{B}) - \mathbf{P}(A\bar{B}) =$
$\mathbf{P}(\bar{B}) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{B})(1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(\bar{B})\mathbf{P}(\bar{A})$
$\Rightarrow\quad \bar{B}, \bar{A}$ függetlenek. ■

I.4.3. Tétel: Az $\emptyset$ és Ω események minden $A \in \Im$ eseménytől függetlenek.

Bizonyítás: $\mathbf{P}(\emptyset A) = \mathbf{P}(\emptyset) = 0 = 0\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\emptyset)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \emptyset$ és A függetlenek. $\mathbf{P}(\Omega A) = \mathbf{P}(A) = 1 \cdot \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\Omega)\mathbf{P}(A) \Rightarrow \Omega$ és A függetlenek. ■

I.4.3. Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ események *páronként függetlenek*, ha $\mathbf{P}(A_i \cdot A_j) = \mathbf{P}(A_i) \cdot \mathbf{P}(A_j)$ $(\forall\ i \neq j)$.

I.4.4. Definíció: Az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ események *teljesen függetlenek*, ha $\forall\ k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ és $\forall\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ indexkombinációra $\mathbf{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2})\cdots\mathbf{P}(A_{i_k})$.

I.4.4. Tétel: Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ események teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek. Fordítva általában nem igaz.

Bizonyítás:
Az I.4.4 definícióban, amikor $k = 2$, éppen az I.4.3 definíciót kapjuk.
A megfordításra ellenpélda:
$\mathfrak{K}$: Dobjunk egy szabályos kockával egymás után kétszer.
A: „elsőre páratlant dobunk"; B: „másodikra páratlant dobunk";
C: „a két dobott szám összege páratlan".
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(AC) = \mathbf{P}(BC) = \frac{1}{4} \Rightarrow A, B, C$ páronként függetlenek.
De! $\mathbf{P}(ABC) = 0 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = \frac{1}{8}$, azaz teljesen nem függetlenek A, B és C. ■

I.4.5. Tétel: Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ események teljesen függetlenek, akkor közülük bármelyiket az ellentett eseményére felcserélve, újra teljesen független rendszert kapunk.

Bizonyítás:
Cseréljük fel pl. A_1-et $\bar{A}_1$-gyel. Ekkor a teljesen függetlenség feltételrendszerében csak azokat az összefüggéseket kell ellenőrizni, amelyekben A_1 szerepelt. Legyen egy ilyen pl. $\mathbf{P}(\bar{A}_1 \cdot A_{i_2} \cdot \cdots \cdot A_{i_k})$, ahol $1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.
Kihasználva, hogy az eredeti rendszer teljesen független volt:
$\mathbf{P}(A_1 A_{i_2} \cdot \cdots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_1) \cdot \mathbf{P}(A_{i_2} A_{i_3} \cdot \cdots \cdot A_{i_k})$,
azaz A_1 független a $A_{i_2} A_{i_3} \cdot \cdots \cdot A_{i_k}$ szorzateseménytől, így a I.4.2 tétel miatt $\bar{A}_1$ is az. De ekkor
$\mathbf{P}(\bar{A}_1 A_{i_2} \cdot \cdots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(\bar{A}_1) \cdot \mathbf{P}(A_{i_2} A_{i_3} \cdot \cdots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(A_{i_2}) \cdot \cdots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k})$,
azaz teljesül $\bar{A}_1$ -re is a teljesen függetlenséghez szükséges felbomlás. ■

I.4.6. Tétel: *(Szorzási szabály)*
Legyenek az $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ tetszőleges események úgy, hogy
$\mathbf{P}(\prod_{i=1}^{n} A_i) > 0$. Ekkor

$$\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbf{P}\left(A_n \middle| \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) \mathbf{P}\left(A_{n-1} \middle| \prod_{i=1}^{n-2} A_i\right) \cdots \mathbf{P}\left(A_2 \middle| A_1\right) \mathbf{P}\left(A_1\right).$$

Bizonyítás:

$$\mathbf{P}\left(A_n \middle| \prod_{i=1}^{n-1} A_i\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)}{\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right)}, \mathbf{P}\left(A_{n-1} \middle| \prod_{i=1}^{n-2} A_i\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n-1} A_i\right)}{\mathbf{P}\left(\prod_{i=1}^{n-2} A_i\right)}, \ldots,$$

$\mathbf{P}(A_2 | A_1) = \dfrac{\mathbf{P}(A_1 A_2)}{\mathbf{P}(A_1)}$.
Látható, hogy összeszorzás és egyszerűsítés után az állítást kapjuk. ■

I.4.7. Tétel: *(A teljes valószínűség tétele)*
Alkosson $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im$ teljes eseményrendszert, vagyis $A_i \cdot A_j = \emptyset$, $(i \neq j)$ és $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbf{P}(A_i) > 0$ minden i-re. Ekkor tetszőleges $B \in \Im$ eseményre $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(B | A_i)\mathbf{P}(A_i)$.

Bizonyítás:
Mivel $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ és $B = B \cdot \Omega = B \cdot \sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty}(A_i B)$, valamint $(A_i B) \cdot (A_j B) = \emptyset$, a valószínűség σ-additivitási tulajdonságából következik, hogy $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} A_i B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(B | A_i)\mathbf{P}(A_i)$. ■

I.4.8. Tétel: *(Bayes tétele)*
Alkosson $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \Im$ teljes esményrendszert, vagyis $A_i \cdot A_j = \emptyset$, $(i \neq j)$ és $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$. Tegyük fel továbbá, hogy $\mathbf{P}(A_i) > 0$ minden i-re. Ekkor tetszőleges $B \in \Im$ eseményre, ahol $\mathbf{P}(B) > 0$,
$\mathbf{P}(A_i | B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(B|A_j)\mathbf{P}(A_j)}$.

Bizonyítás:
A feltételes valószínűség definíciójából: $\mathbf{P}(A_i | B) = \frac{\mathbf{P}(A_i B)}{\mathbf{P}(B)}$. A számláló helyébe $\mathbf{P}(B | A_i)\,\mathbf{P}(A_i)$ -t írva, a nevező helyébe pedig a teljes valószínűség tételéből kapott formulát helyettesítve azonnal adódik az állítás. ■

I.5. Kidolgozott feladatok és gyakorlatok

I.5.1. Feladat: A próbagyártás során két szempontból vizsgálják a késztermékeket. Az A esemény azt jelenti, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott mintadarab anyaghibás, a B pedig az az esemény, hogy a kiválasztott gyártmány mérethibás. Tudjuk, hogy $\mathbf{P}(A) = 0{,}15$, $\mathbf{P}(B) = 0{,}3$ és $\mathbf{P}(AB) = 0{,}08$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy valamelyik termék hibátlan?

Megoldás: $\mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) = 1-\mathbf{P}\left(A+B\right) = 1-\mathbf{P}\left(A\right)-\mathbf{P}\left(B\right)+\mathbf{P}\left(AB\right) = 0,63$

I.5.2. Feladat: Mennyi $\mathbf{P}\left(A \mid \bar{B}\right)$ ha $\mathbf{P}(A) = 0,6, \mathbf{P}(B) = 0,5$ és $\mathbf{P}(A+B) = 0,8$?

Megoldás: $\mathbf{P}\left(A \mid \bar{B}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(A\bar{B}\right)}{\mathbf{P}\left(\bar{B}\right)} = \frac{\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(AB)}{1-\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A+B)-\mathbf{P}(B)}{1-\mathbf{P}(B)} = 0,6.$

I.5.3. Feladat: Egy fekete és fehér golyókat tartalmazó urnából kihúzunk n db golyót. $A_i$jelentse azt az eseményt, hogy az i-ediknek kihúzott golyó fehér. ($1 \le i \le n$). Fejezzük ki az A_i események segítségével az alábbi eseményeket:
A : „Mindegyik golyó fehér”,
B : „Legalább egy golyó fehér”,
C : „Pontosan egy golyó fehér”,
D : „Mindegyik golyó ugyanolyan színű”.

Megoldás:
$A = A_1 A_2 \cdots A_n,$
$B = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$
$C = \sum_{i=1}^{n} A_i \prod_{i \neq j} A_j,$
$D = \prod_{i=1}^{n} A_i + \prod_{i=1}^{n} \bar{A}_i.$

I.5.4. Feladat: Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B eseményekre $\left(\mathbf{P}\left(AB\right)\right)^2 + \left(\mathbf{P}\left(A\bar{B}\right)\right)^2 + \left(\mathbf{P}\left(\bar{A}B\right)\right)^2 + \left(\mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right)\right)^2 \ge 0{,}25$!

Megoldás: $\mathbf{P}\left(AB\right)+\mathbf{P}\left(A\bar{B}\right)+\mathbf{P}\left(\bar{A}B\right)+\mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) = 1$. Legyen $\mathbf{P}\left(AB\right) = x+0{,}25, \mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) = y+0{,}25, \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) = z+0{,}25,\ \mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) = v+0{,}25$. Mivel $x+y+z+v = 0 \Rightarrow (x+0{,}25)^2 + (y+0{,}25)^2 + (z+0{,}25)^2 + (v+0{,}25)^2 = x^2+y^2+z^2+v^2+\frac{x+y+z+v}{2}+0,25 \ge 0{,}25$.

I.5.5. Feladat: Ketten sakkoznak. Az A esemény akkor következik be, ha a világossal játszó nyer, a B esemény akkor, ha a sötéttel játszó másik, reminél pedig a C esemény következik be. Fogalmazzuk meg szavakban, mit jelentenek az alábbi események:

a. $AB + \bar{A}\bar{B}$,

b. $\bar{A}\bar{B}$,

c. $A + C$?

Megoldás: a. és b. a C eseményt jelenti, c. $\bar{B}$ azaz nem a sötéttel játszó játékos nyer.

I.5.6. Feladat: Egy céltábla tíz koncentrikus körből áll, és a sugarakra fennáll az $R_1 < R_2 < \cdots < R_{10}$ reláció. A_k azt az eseményt jelenti, hogy egy lövés az R_k sugarú körbe esik. Fogalmazzuk meg szavakban, mit jelentenek az alábbi események: $B = A_1 + A_3 + A_6$, $C = A_2 A_4 A_6 A_8$, $D = (A_1 + A_3) A_6$!

Megoldás: $B = A_6$, $C = A_2$, $D = A_3$.

I.5.7. Feladat: Tegyük fel, hogy A, B $\frac{1}{2}$ valószínűségű események. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}\left(\overline{A \cdot B}\right)$!

Megoldás:
$\bar{A} \cdot \overline{B} = \overline{A + B} \Rightarrow \mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = 1 - \mathbf{P}(AB)$
$\mathbf{P}(A + B) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{A + B}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) \Rightarrow$ állítás.

I.5.8. Feladat: Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}\left(\bar{A}B + A\bar{B}\right) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB)$!

Megoldás: $\mathbf{P}\left(\bar{A}B + A\bar{B}\right) = \mathbf{P}\left(\bar{A}B\right) + \mathbf{P}\left(A\bar{B}\right) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$.

I.5.9. Feladat: Ha az A és B események közül az egyik feltétlenül bekövetkezik, $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{2}{3}, \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{3}$, mennyi a $\mathbf{P}(A)$ és $\mathbf{P}(B)$ valószínűség?

Megoldás: $\mathbf{P}(A + B) = 1, \mathbf{P}(AB) = \frac{2}{3}\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}\mathbf{P}(A)$, így
$1 = \mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)+0,5\mathbf{P}(A)-\frac{1}{3}\mathbf{P}(A) = \frac{7}{6}\mathbf{P}(A)$, azaz $\mathbf{P}(A) = \frac{6}{7}$ és $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{7}$.

I.5.10. Feladat: Legyen $\mathbf{P}(A) = \frac{2}{3}, \mathbf{P}(A \mid B) = \frac{2}{3}, \mathbf{P}(B \mid A) = \frac{1}{3}$. Határozza meg a $\mathbf{P}(A + B)$ és $\mathbf{P}(\bar{A} \mid \bar{B})$ valószínűségeket!

Megoldás: $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = 2/9, \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A|B) = 1/3$, így $\mathbf{P}(A + B) = 2/3 + 1/3 - 2/9 = 7/9$. $\mathbf{P}(\bar{A} \mid \bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A}\bar{B})/\mathbf{P}(\bar{B}) = (1 - \mathbf{P}(A + B)) / (1 - \mathbf{P}(B)) = \frac{1}{3}$.

I.5.11. Feladat: *(De Méré lovag feladványa)*
Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: hogy „egy kockával négyszer dobva legalább egyszer hatost dobunk" (A), vagy annak, hogy „két kockával huszonnégyszer dobva legalább egyszer két hatosunk lesz" (B)?

Megoldás: Két különböző valószínűségi mezőről van szó. Az elsőben egy szabályos kockával négyszer dobunk. Az összes elemi események száma $n = 6^4$.

A vizsgált A esemény ellentettje az az esemény, hogy „egyszer sem dobunk hatost". Ilyen eset összesen 5^4 lehet, vagyis az ellentett esemény valószínűsége: $\mathbf{P}\left(\bar{A}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$. Így az A esemény valószínűsége: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177472$. A második vizsgált esemény egy egészen más kísérlethez és eseménytérhez tartozik. Most a véletlen kísérlet az, hogy két szabályos kockával dobunk 24-szer. Az összes elemi esemény most sokkal több: 36^{24}. A második esemény ellentettje most az, hogy „a dobássorozatban egyszer sem dobunk duplán hatost". Ennek a valószínűsége $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. A második esemény valószínűsége így $\mathbf{P}(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914049\ldots$ Látható, hogy az A esemény valószínűsége a nagyobb.

Megjegyzés: A feladatot De Méré lovag adta fel Blaise Pascal francia matematikusnak, aki ezen feladat kapcsán elkezdett vizsgálódásai nyomán jutott el a valószínűségszámítás első komoly eredményeihez. A feladatban egyébként első pillantásra az tűnik fel, hogy mindkét esemény esetében a dobások számának és a lehetséges kimenetelek számának aránya azonos: A-nál $4:6$, a B-nél $24:36$.

I.5.12. Feladat: Egy urnából, ahol fehér és fekete golyók vannak, véletlenszerűen kiveszünk visszatevéssel két golyót. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a golyók ugyanolyan színűek, nem lehet kisebb mint 0,5.

Megoldás: Legyen a fehér golyók száma n, a feketéké m $(n, m \geq 1)$. Ekkor a véletlen kísérlet elemi eseményeinek száma $(n+m)^2$, a kedvező eseteké pedig $n^2 + m^2$. A keresett valószínűség: $p = \frac{n^2+m^2}{(n+m)^2}$. Mivel $(n-m)^2 \geq 0 \Rightarrow$ $2n^2 + 2m^2 \geq n^2 + 2nm + m^2 \Rightarrow p \geq 0{,}5$.

I.5.13. Feladat: *(Pólya-féle urnamodell)*
Egy urna r darab fekete és s darab fehér golyót tartalmaz. Véletlenszerűen kihúzunk egy golyót. A kihúzott golyót és még plusz c darab ugyanolyan színű golyót visszateszünk az urnába. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

az n-edik húzás után a-szor húztuk ki a fekete, és b-szer a fehér golyót? $(a+b=n)$.

Megoldás: Pl. annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az első a húzáskor mindig fekete és az utolsó b húzáskor pedig csupa fehér golyót fogunk húzni: $\frac{r(r+c)(r+2c)(r+3c)\cdots(r+(a-1)c)s(s+c)(s+2c)\cdots(s+(b-1)c)}{(r+s)(r+s+c)(r+s+2c)(r+s+3c)\cdots(r+s+(n-1)c)}$.

De minden más olyan húzássorozatnak, ahol a-szor húztuk ki a fekete, és b-szer a fehér golyót is ugyanekkora a valószínűsége. A különböző kimenetelek száma $\binom{n}{a}$, így a keresett valószínűség:
$\binom{n}{a}\frac{r(r+c)(r+2c)(r+3c)\cdots(r+(a-1)c)s(s+c)(s+2c)\cdots(s+(b-1)c)}{(r+s)(r+s+c)(r+s+2c)(r+s+3c)\cdots(r+s+(n-1)c)}$.

I.5.14. Feladat: Ha egy szabályos pénzérmét n-szer feldobunk, mennyi a valószínűsége, hogy k-val többször fogunk fejet kapni, mint írást? $(0\le k\le n)$.

Megoldás: Ha a fejdobások számát f, az írásokét i jelöli, fenn kell állnia, hogy $f+i=n$ és $f-i=k$. Innen következik, hogy $2f=n+k$ és $2i=n-k$, vagyis n és k paritásának meg kell egyeznie. Annak valószínűsége, hogy egy n hosszúságú dobássorozatban éppen f fejet dobunk $\binom{n}{f}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{\frac{n+k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ugyanis, minden n hosszúságú sorozat egyformán $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ valószínűségű, és ezek között $\binom{n}{f}$ olyan különböző dobássorozat lehet, ahol a fejek száma éppen f (kedvező esetek).

I.5.15. Feladat: Egy minden oldalán befestett fakockát a lapokkal párhuzamos síkokban 1000 azonos méretű kis kockára fűrészelnek szét. A kapott kis kockákból véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy a kockának éppen k oldala festett? $(0\le k\le 3)$.

Megoldás: Összes eset $n=1000$. Kedvező esetek $k=0$-nál 8^3 (a belső $8\times 8\times 8$ kisnégyzetben lévő mindegyik részkocka jó), $k=1$-nél $6\cdot 64$ (mindegyik lapon a belső 8×8-as négyzethez tartozóan), $k=2$-nél $12\cdot 8$ (minden élen van 8 ilyen kocka) és végül $k=3$-nál 8 (a csúcsok nál lehet ilyen eset).

I.5.16. Feladat: Egy kalapban az angol ABC 26 betűje van. Visszatevéssel 11-szer húzva, a kihúzott betűket sorban egy papírra felírva, mennyi a valószínűsége, hogy a kapott szóból legfeljebb két betűt felcserélve éppen a STATISZTIKA szó jön ki?

Megoldás: Az összes eset $n = 26^{11}$, kedvező esetek száma $k = 1 + \binom{11}{2} - \binom{3}{2} - 3\binom{2}{2} = 50$ (az azonos betűk egymás közti cseréit le kell vonni).

I.5.17. Feladat: Egy szabályos érmével n-szer dobva, mennyi a valószínűsége, hogy a fejdobások száma páratlan lesz?

Megoldás: A valószínűség éppen 0,5. Ugyanis, ha tekintünk egy olyan sorozatot, amelyben a fejek száma páratlan, akkor ha az első dobást kicserélnénk az ellenkezőjére, olyan sorozatot kapunk, melyben a fejek száma már páros lesz. Azaz a páros és a páratlan fejdobásos sorozatok között kölcsönösen egy-egyértelmű leképezés hozható létre, vagyis mindegyikük ugyanolyan valószínű.

I.5.18. Feladat: Egy szabályos érmével n-szer dobva, mennyi a valószínűsége, hogy

a. először az n-edikre jön fej?

b. ugyanannyi fejet dobunk, mint írást?

c. pontosan két fejet dobunk?

d. legalább két fejet dobunk?

Megoldás: a: $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, b: 0, ha n páratlan és $\binom{n}{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ha n páros, c: $\binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, d: $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

I.5.19. Feladat: Egy kalapban három cédula van, amelyekre az $1, 2, 3$ számjegyek vannak felírva. Véletlenszerűen egyesével kihúzzuk a cédulákat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a húzáskor lesz olyan cédula, amelyikre éppen az a szám van felírva, ahányadikként kihúztuk azt?

Megoldás: Az összes eset $n = 3! = 6$. Ezek között a nem kedvező eset csak kettő van: $2, 3, 1$ és $3, 1, 2$. A keresett valószínűség: $2/3$.

I.5.20. Feladat: Feldobunk három szabályos pénzérmét. Mennyi a valószínűsége az A, B, C eseményeknek, ahol A: „legalább két érmével fejet dobunk”, B: „pontosan két érmével fejet dobunk”, C: „legfeljebb két érmével fejet dobunk”?

Megoldás:
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\text{„vagy kettő, vagy három fejet dobunk”}) = \left(\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}5$,
$\mathbf{P}(B) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$, $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(\text{„nem három fejet dobunk”}) =$
$1 - \mathbf{P}(\text{„három fejet dobunk”}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}$.

I.5.21. Feladat: A 90/5 lottóhúzás előtt mennyi a valószínűsége, hogy $k = 1, 2, 3, 4, 5$ találatunk lesz?

Megoldás: Az összes lehetsége lottóhúzások száma $n = \binom{90}{5} = 43949268$, a kedvező esetek száma
$k = 1$ találatnál: $\binom{5}{1}\binom{85}{4}$,
$k = 2$-nél $\binom{5}{2}\binom{85}{3}$,
$k = 3$-nál $\binom{5}{3}\binom{85}{2}$,
$k = 4$-nél $\binom{5}{4}\binom{85}{1}$,
és végül $k = 5$-nél $\binom{5}{5}\binom{85}{0} = 1$.

I.5.22. Feladat: Egy urnában fehér és fekete golyók vannak, melyeket egymás után visszatevés nélkül kihúzunk. Az A vagy a B eseménynek nagyobb-e a valószínűsége, ahol A: „az első golyó fehér”, és B: „az utolsó golyó fehér”?

Megoldás: Ha N a golyók száma, ebből K a fehéreké, akkor
$\mathbf{P}(A) = \frac{K(N-1)(N-2)\cdots 1}{N!} = \frac{K}{N}$ és $\mathbf{P}(B) = \frac{(N-1)(N-2)\cdots 1 \cdot K}{N!} = \frac{K}{N}$, azaz a két esemény ugyanolyan valószínűségű.

I.5.23. Feladat: Ha n egyforma ládába elhelyezünk n egyforma golyót úgy, hogy bármely ládába ugyanolyan valószínűséggel tesszük bármelyik golyót, mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik ládában lesz golyó?

Megoldás: Összes eset n^n, a kedvező esetek száma pedig: $n!$.

I.5.24. Feladat: Egy csomag 52 lapos francia kártyából 13 lapot találomra visszatevés nélkül kihúzunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a. a treff király a kihúzott lapok között lesz?

b. pontosan két treff lesz a leosztott lapok közt?

c. a treff király és a treff ász a kihúzott lapok közt van?

d. van treff a leosztott lapok között?

Megoldás: a: $\frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}}$ b: $\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{11}}{\binom{52}{13}}$ c: $\frac{\binom{50}{11}}{\binom{52}{13}}$ d: $1-\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}$.

I.5.25. Feladat: Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy van közöttük fej?

Megoldás: $\mathbf{P}$ („nem dobunk fejet”) $= 1 - \frac{1}{2^n} \geq 0,9 \Rightarrow n \geq 4$.

I.5.26. Feladat: Egy szórakozott polgár elfelejtette bankkártyájának személyi azonosító (PIN) kódját, csak abban biztos, hogy a négy számjegy között volt pontosan két hármas, és az első jegy biztosan nem a nulla volt. Ha tíz másodpercenként beüt egy lehetséges variációt, akkor mennyi az esélye annak, hogy egy órán belül eltalálja a helyes azonosító számot?

Megoldás: Az összes lehetséges variációk száma: $3 \cdot 8 \cdot 9 + 3 \cdot 9^2 = 459$. Ennek beütéséhez szükséges idő: 4590 másodperc. Egy órában 3600 másodperc van, így a valószínűség: $p = \frac{360}{459} \approx 0,71$.

I.5.27. Feladat: Egy érmét n-szer feldobunk, a „fej” valószínűsége p. Jelöljük p_n-nel annak valószínűségét, hogy az n dobás során páros számú fejet dobtunk. Mennyi p_n?

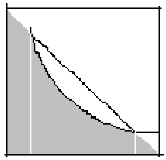
Megoldás:

$$p_n = (1-p)\,p_{n-1} + p\,(1-p_{n-1})\,,\ \ p_0 = 1.$$
$$p_n = p_{n-1}(1-2p) + p = p_{n-2}(1-2p)^2 + p\,(1-2p) + p =$$
$$= \cdots = p_0 (1-2p)^n + p \sum_{i=0}^{n-1} (1-2p)^i = \tfrac{1}{2}\left(1 + (1-2p)^n\right).$$

Ha az érme szabályos, $p_n = 0{,}5$.

I.5.28. Feladat: Ha az egységnégyzetben véletlenszerűen kiválasztunk egy $P(x, y)$ pontot, akkor mennyi a valószínűsége, hogy az a téglalap, melynek az origó és P az ellentétes csúcsai olyan lesz, hogy a kerülete kisebb 2-nél, a területe pedig ugyanakkor kisebb lesz 0,16-nál?

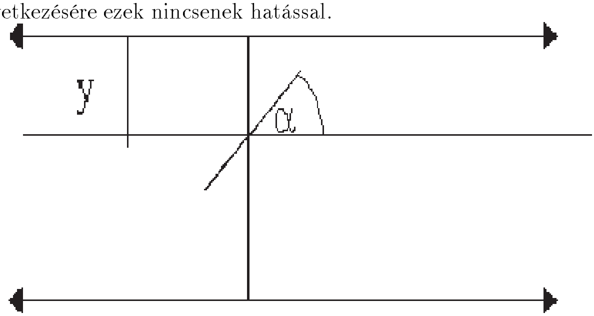
Megoldás: Ω most az egységnégyzet lesz, az kérdéses esemény pedig az ábrán besatírozott területnek felel meg:



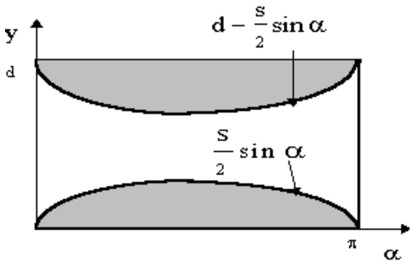
A besatírozott terület nagysága: $\int\limits_{0,2}^{0,8} \frac{0,16}{x}\,\mathrm{d}x + 0,2 = 0,42.$

I.5.29. Feladat: *(A Buffon-tű probléma, 1777.)*
Egy szobában egymástól d távolságban párhuzamosan padlórések futnak. Leejtve egy $s < d$ hosszúságú tűt, mekkora a valószínűsége, hogy a tű éppen egy padlórést fog metszeni?

Megoldás: A tű helyzetét egyértelműen a felezőpontjának a felső padlóréstől vett y távolságával és a padlórések irányával bezárt αszögével jellemezzük. Azokkal a körülményekkel, hogy melyik két rés által meghatározott sávba esik a középpont, és hogy a párhuzamosokra merőleges faltól milyen messze van a középpont nem foglalkozunk, mert a „tű metszi a padlórést" esemény bekövetkezésére ezek nincsenek hatással.



Nyilván $0 \leq y \leq d$ és $0 \leq \alpha \leq \pi$. A tű leejtése után y és α egyértelműen meghatározható, vagyis a véletlen kísérlet elemi eseményei azon (y, α) pontpárok, melyek elemei a $[0, d]$ és $[0, \pi]$ intervallumok által meghatározott téglalapnak. (Ez a téglalap az Ω eseménytér). Metszés egyszerre csak egy padlórésnél következhet be, mert $s < d$. A metszés csak akkor következhet be, ha $0 \le y \le \frac{s}{2}\sin\alpha$, vagy ha $(d-y) \le \frac{s}{2}\sin\alpha$ teljesül. A feltételeknek megfelelő (y,α) pontpárok tartományát az alábbi ábrán besatíroztuk:



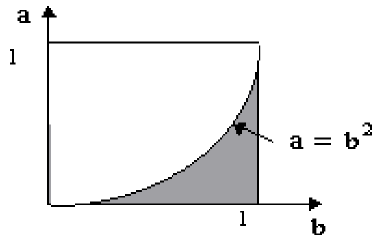
A sötétített terület nagysága $T = 2\int\limits_0^{\pi} \frac{s}{2}\sin\alpha d\alpha = s\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi} = 2s$ a téglalap területe pedig $d\pi$.

Így a keresett valószínűség: $\mathbf{P}$ („a tű metszi a padlórést”) $= \frac{2s}{d\pi}$.

Megjegyzés: Mivel a valószínűség kapcsolatos π-vel, lehetőség van statisztikus eszközökkel a π becslésére. Ha nagyon sokszor végrehajtjuk a véletlen kísérletet, és számoljuk a metszések bekövetkezését, azaz a vizsgált esemény gyakoriságát, akkor ezt a kísérletek számával elosztva (relatív gyakoriság) a fenti valószínűséget jól lehet közelíteni. Ebből π-t kifejezve kapjuk a közelítést. 1885-ben *Stephan Smith* angol matematikus 3200-szer végrehajtva a kísérletet, π-re 3,1553 -t kapott.

I.5.30. Feladat: Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen az egységnégyzetben, melynek koordinátáit jelölje (a,b). Tekintve a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinomot, mekkora a valószínűsége annak, hogy a $p(x) = 0$ egyenletnek van valós gyöke?

Megoldás: Egy polinomnak akkor van valós gyöke, ha a diszkriminánsa pozitív, azaz $D = 4b^2 - 4a \ge 0$. Innen következik, hogy a véletlenszerűen kiválasztott pont koordinátái között fenn kell állnia a $b^2 \ge a$ relációnak. Ennek megfelelő tartományt az egységnégyzetben besötétítettük:

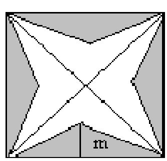


A besötétített tartomány területe megegyezik a keresett valószínűséggel, mivel az egységnégyzet területe 1.

Így $\mathbf{P}$ („van valós gyök") $= \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

I.5.31. Feladat: Válasszunk ki egy pontot véletlenszerűen az egységnégyzetben, melynek koordinátáit jelölje (a, b). Mekkora a valószínűsége annak, hogy a pont közelebb van a négyzet egy oldalához, mint egy átlójához?

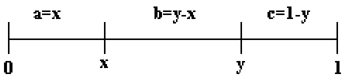
Megoldás: Egymást metsző egyenesektől egyenlő távolságra fekvő pontok mértani helye az egyenesek szögének felező egyenese. Az oldalegyenesek és az átló egyeneseinek szögfelezői az oldalegyenesekkel 22,5°-os szöget zárnak be. A vizsgált esemény pontjai ezért az oldalak és a szögfelezők által határolt tartományba esnek:



Az ábrán jelölt magasságvonal $m = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 22{,}5°$. A besötétített terület most is a keresett valószínűséggel egyezik meg:
$\mathbf{P}$ („a pont közelebb van az oldalhoz") $= T = 4\frac{m \cdot 1}{2} = \operatorname{tg} 22{,}5° = \sqrt{2} - 1$.

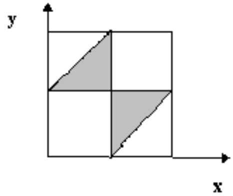
I.5.32. Feladat: Az egységintervallumban véletlenszerűen kijelölve két pontot, mekkora a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból háromszög szerkeszthető?

Megoldás: Jelöljük a két pontnak a 0-tól vett távolságait rendre x-el és y-nal. Az (x, y) pár ilyenkor egy pontot határoz meg az egységnégyzetben, ami tehát most is a véletlen kísérlethez tartozó Ω eseménytér. A háromszög szerkesztéséhez a keletkező három szakasz a, b, c hosszainak ki kell elégítenie egyidejűleg az $a + b \leq c$, $a + c \leq b$ és $b + c \leq a$ egyenlőtlenségeket. Az $x < y$ esetben a három szakasz az $a = x, b = y - x$ és $c = 1 - y$. Így a háromszög szerkeszthetősége az alábbi egyenlőtlenségek egyidejű fennállását követeli meg x, y-tól:



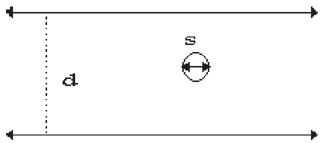
$$x + (y - x) \geq 1 - y \iff y \geq 0{,}5,$$
$$x + (1 - y) \geq y - x \iff y \leq x + 0{,}5,$$
$$(y - x) + (1 - y) \geq x \iff x \leq 0{,}5.$$

Az $y \leq x$ esetben a fenti egyenlőtlenségeknek a $x \geq 0{,}5$, $x - 0{,}5 \leq y$ és $y \leq 0.5$ rendszer fog megfelelni. A két kritériumrendszerhez tartozó tartományt besötétítettük az egységnégyzetben:



Így a keresett valószínűség 0,25 lesz.

I.5.33. Feladat: Egy szobában egymástól d távolságban párhuzamosan padlórések futnak. Leejtve egy $s < d$ átmérőjű pénzdarabot, mennyi a valószínűsége, hogy a pénz éppen egy padlódeszka belsejébe esik, azaz nem metszi a padlórést?



Megoldás: A pénz középpontjának $s/2$-nél nagyobb távolságra kell lennie mindkét padlóréstől, így a valószínűség $p = 1 - s/d$.

I.5.34. Feladat: Egy $d = 10$ cm oldalhosszúságú négyzetrácsos padlózatra leejtünk egy $s = 3$ cm átmérőjű pénzdarabot.

a. Mennyi a valószínűsége, hogy a pénz teljes terjedelmével egy négyzet belsejébe fog esni?

b. Mennyi a valószínűsége, hogy hússzor végrehajtva a kísérletet, az esemény éppen ötször következik be?

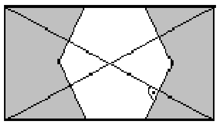
Megoldás: a. Ahhoz, hogy a pénzdarab benne legyen a négyzetben, a pénz középpontjának a belső 7 cm oldalhosszúságú négyzetbe kell esnie, így a valószínűség $p = 0,49$. **b.** Az előző p valószínűséggel: $\binom{20}{5}p^5\,(1-p)^{15}$ képlettel számolhatjuk ki.

I.5.35. Feladat: Egy $d = 10$ cm oldalhosszúságú négyzetrácsos padlózatra leejtünk egy $s = 3$ cm hosszú tűt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű teljes egészében egy négyzet belsejébe kerül?

Megoldás: A keresett valószínűség $p = 1 - \frac{4sd-s^2}{d^2\pi}$. Ha A azt az eseményt jelenti, hogy a tű a vízszintes oldalt metszi, B pedig azt, hogy a tű függőleges oldalt keresztez, akkor meghatározandó a $\mathbf{P}(A+B)$ valószínűség. Poincare tételéből: $\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$. A Buffon-tű problémánál láttuk, hogy $\mathbf{P}\,(A) = \mathbf{P}\,(B) = \frac{2s}{d\pi}$ Az AB szorzatesemény valószínűsége $\mathbf{P}\,(AB) = \frac{4}{d^2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\frac{s}{2}\sin\alpha}\int\limits_0^{\frac{s}{2}|\cos\alpha|} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}\alpha = \frac{s^2}{d^2\pi}$. A képletben x és y a tű középpontjának koordinátái, α pedig a tű egyenesének a vízszintessel bezárt szöge. A $\mathbf{P}(AB)$ valószínűség a két oldalt egyszerre metsző tűelhelyezkedésekhez tartozó (x, y, α) pontok alkotta térrész térfogatának és a $d \times d \times \pi$ hasáb térfogatának aránya.

I.5.36. Feladat: Egy $a = 1$, $b = 2$ oldalhosszúságú téglalapon kiválasztunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pont közelebb van egy csúcshoz, mint a középponthoz?

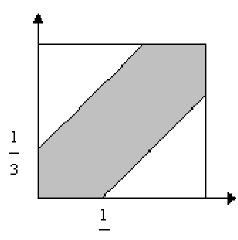
Megoldás: Két pont között egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye a pontokat összekötő szakasz felező merőlegese. Így a keresett eseménynek megfelelő tartományt az alábbi ábrán besötétítéssel szemléltethetjük:



A középső (fehér) alakzat két szimmetrikus trapézból áll. Mivel a trapézok középvonalai az átlók meghatározta háromszög középvonalával egyeznek meg, a hosszuk 1. A trapéz magasság $0,5$. Így a fehér alakzat területe éppen 1 lesz. Ezért a besötétített alakzat területe is 1, így a keresett valószínűség 0,5.

I.5.37. Feladat: Ketten megbeszélik, hogy 10 és 11 óra között egy meghatározott helyen találkoznak. Megállapodás szerint, aki korábban érkezik 20 percet vár a másikra, és csak azután távozik. Mennyi a találkozás valószínűsége, ha mindketten véletlenszerűen érkeznek?

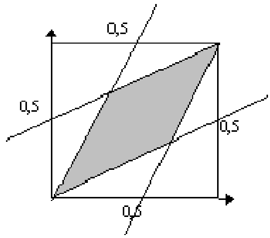
Megoldás: Jelölje x az egyik, y a másik ember véletlen megérkezésének idejét. Az (x, y) pár egy véletlen pontot határoz meg az egységnégyzetben. A találkozáshoz fenn kell állnia a $|x - y| < \frac{1}{3}$ relációnak, melyet kielégítő pontok besötétítve láthatók az alábbi ábrán:



Az ábráról közvetlenül leolvasható, hogy a keresett valószínűség: $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

I.5.38. Feladat: Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint bármelyik végponthoz?

Megoldás: A vizsgált eseményhez tartozó pontok (x, y) koordinátáira fennáll $x < y$ esetben, hogy $y - x < 1 - y$ és $y - x < x$. (Az $y < x$ esetben ezek a kritériumok $x - y < 1 - x$ és $x - y < y$ lennének.) Az egységnégyzeten bejelölve a relációknak eleget tevő pontok alkotta tartományt:



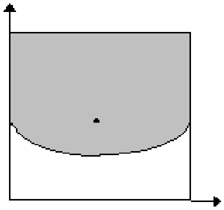
Ezek alapján a keresett valószínűség: $\frac{1}{3}$.

I.5.39. Feladat: Egy ötemeletes házban az emeletek között 6 m távolság van, a földszint és az első emelet között 8 m. Ha a liftajtó 2 m, mennyi a valószínűsége annak, hogy a lift megakadásakor az ajtót teljes egészében fal takarja?

Megoldás: A lift teljesen a fal mögötti takarásban van a földszinten 4 m-en keresztül, az 1., 2., 3. és 4. emeleten 2-2 m-en át. A lift összútja $8 + 4 \cdot 6 + 2 = 34$ m. Így a keresett valószínűség: $p = \frac{12}{34}$.

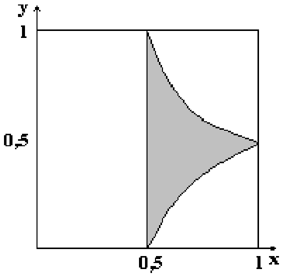
I.5.40. Feladat: Az ABCD egységnégyzeten véletlenszerűen kiválasztva egy pontot, mennyi a valószínűsége, hogy a pont közelebb lesz a négyzet középpontjához, mint az AB oldalhoz?

Megoldás: Egy ponttól és egy egyenestől azonos távolságban fekvő pontok mértani helye a síkban a parabola. Így a négyzet pontjai közül azok lesznek a középponthoz közelebb, mint az alapon fekvő AB oldalhoz, amelyek felette vannak azon parabola vonalának, melynek a középpont a fókusza, és az AB vonala a direktrisze. Ha AB az x tengelyre esik, és az A pont éppen az origó, akkor a parabola egyenlete: $y = (x-0{,}5)^2 + 0{,}25$. A keresett terület: $1 - \int\limits_0^1 \left((x-0{,}5)^2 + 0{,}25\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.



I.5.41. Feladat: Egy egységnyi hosszú szakaszt eltörünk, majd a hosszabbik részt újból eltörjük. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból lehet háromszöget szerkeszteni?

Megoldás: Jelölje az első törés után keletkezett hosszabbik szakasz hosszát x $(0,5 \le x \le 1)$. A második törésnél ezt az x hosszúságú szakaszt törjük ketté: xy és $(1-y)\,x$ hosszú szakaszok keletkeznek, ahol $0 \le y \le 1$. A három szakaszhossz most $a = xy, b = (1-y)\,x$ és $1-x$. Háromszög akkor szerkeszthető, ha $xy + (1-y)\,x \ge 1-x \iff x \ge 0{,}5, xy + 1 - x \ge (1-y)\,x \iff 1 - \frac{1}{2x} \le y, (1-y)\,x + 1 - x \ge xy \iff \frac{1}{2x} \ge y$. Miután az első feltétel triviálisan teljesül, a szerkeszthetőség feltétele: $1 - \frac{1}{2x} \le y \le \frac{1}{2x}, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), y \in (0,1)$. A feltételeknek megfelelő tartomány sötétített az alábbi ábrán:



A besatírozott terület nagysága: $T = \int\limits_{0,5}^{1} \left(\frac{1}{2x} - \left(1 - \frac{1}{2x}\right)\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{0,5}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1\right) \mathrm{d}x = \ln 2 - \frac{1}{2}$ a biztos eseménynek megfelelő téglalap területe: 0,5, így a keresett valószínűség: $p = 2\,(\ln 2 - 0{,}5) = \ln \frac{4}{e}$.

I.5.42. Feladat: Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros feltéve, hogy összegük legalább tíz!

Megoldás: Legyen A: „Két szabályos kockával dobva mindkét érték páros lesz" és B: „A dobott értékek összege nem kisebb mint 10". $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}($„Az összeg 10 vagy 11 vagy 12"$)= \mathbf{P}($„A dobások eredménye $(6,4)$,$(4,6)$,$(5,5)$ vagy $(5,6),(6,5)$ vagy $(6,6)$"$)= \frac{1}{6}$. $\mathbf{P}(A) = \frac{3 \cdot 3}{36} = \frac{1}{4}$. $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}($„A dobások eredménye $(6,4),(4,6)$ vagy $(6,6)$"$)= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. A definíciót használva $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{1}{2}$. Láthatjuk, hogy a feltételes valószínűség most nagyobb, mint a feltétel nélküli.

I.5.43. Feladat: A 32 lapos magyar kártyából három lapot húzunk egymás után visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első kihúzott lap hetes, a második kilences, a harmadik ismét hetes?

Megoldás: Legyenek $A_7^{(1)}$: „Az elsőnek húzott lap hetes", $A_9^{(2)}$: „A másodiknak kihúzott lap 9-es", $A_7^{(3)}$: „A harmadiknak húzott lap hetes". A keresett valószínűséget a a szorzási szabályból számolhatjuk: $\mathbf{P}(A_7^{(1)} A_9^{(2)} A_7^{(3)}) = \mathbf{P}(A_7^{(1)}) \cdot \mathbf{P}(A_9^{(2)} | A_7^{(1)}) \cdot \mathbf{P}(A_7^{(3)} | A_7^{(1)} A_9^{(2)})$. Az egyes tényezőket egyszerűen meghatározhatjuk: $\mathbf{P}(A_7^{(1)}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $\mathbf{P}(A_9^{(2)} | A_7^{(1)}) = \frac{4}{31}$,
$\mathbf{P}(A_7^{(3)} | A_7^{(1)} A_9^{(2)}) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$. Így a keresett valószínűség $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{31} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{610}$.

I.5.44. Feladat: Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Az első játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) A második játékhoz ismét találomra veszünk ki három labdát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az utóbb kivett labdák mind még használatlanok lesznek?

Megoldás: Vezessük be az alábbi eseményeket:
A_i : „Az első játékhoz éppen i db használatlan labdát vettünk ki", $i = 0,1,2,3$.
B : „A második játszmához három használatlant vettünk ki".

Látható, hogy az A_i események teljes eseményrendszert alkotnak.
A B eseménynek az A_i eseményekre vonatkozó feltételes valószínűségei:
$\mathbf{P}(B \mid A_i) = \frac{\binom{9-i}{3}}{\binom{15}{3}}$ $(i = 0,1,2,3)$.
míg az A_i események valószínűségei:
$\mathbf{P}(A_i) = \frac{\binom{9}{i}\binom{6}{3-i}}{\binom{15}{3}}$ $(i = 0,1,2,3)$.
A teljes valószínűség tételét alkalmazva:
$\mathbf{P}\left(B\right) = \sum\limits_{i=0}^{3} \mathbf{P}\left(B \mid A_i\right)\mathbf{P}\left(A_i\right) \approx 0{,}045.$

I.5.45. Feladat: Hat doboz mindegyikében hat-hat darab golyó van, melyek között rendre $1,2,3,4,5,6$ darab fehér színű található (a többi fekete). Egy dobozt véletlenszerűen kiválasztunk, majd abból visszatevéssel három golyót kihúzunk. Ha azt tapasztaljuk, hogy mindhárom golyó fehér színű, mennyi annak a valószínűsége, hogy a csupa fehér golyót tartalmazó dobozt választottuk ki?

Megoldás: Legyenek A_i-k a következő események: „Azt a dobozt választottuk, amelyikben i db fehér golyó van", $i = 1,2,3,4,5,6$. Nyilvánvaló, hogy ezek az események teljes eseményrendszert alkotnak, és mindegyikük bekövetkezése egyformán $\frac{1}{6}$ valószínűségű. Legyen továbbá B az az esemény, hogy „Visszatevéssel húzva mindegyik golyó színe fehér". $\mathbf{P}(B|A_i) = \left(\frac{i}{6}\right)^3$, $i = 1,2,3,4,5,6$. A Bayes-tételt alkalmazva:
$\mathbf{P}(A_6 \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B|A_6)\mathbf{P}(A_6)}{\sum\limits_{i=1}^{6}\mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i)} = \frac{216}{441} \approx 0{,}49.$

I.5.46. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{P}(A) \geq 0{,}8$, $\mathbf{P}(b) \geq 0{,}8$, akkor $\mathbf{P}(AB) \geq 0{,}6$!

Megoldás: $0{,}8+0{,}8-\mathbf{P}(AB) \leq \mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(AB) \leq 1 \Rightarrow.$ $\mathbf{P}(AB) \geq 0{,}6$

I.5.47. Feladat: Dobjunk két kockával! Mondjunk olyan eseményeket ezzel a kísérlettel kapcsolatban, amelyek függetlenek, és olyanokat, amelyek nem függetlenek egymástól!

Megoldás: Pl. A: „Az egyik kockán kettest dobunk", B: „A másik kockán hármast dobunk", C: „Van hatos a két dobott érték között", D: „A dobott értékek nem egyenlőek". Az A és B függetlenek, C és D nem, hiszen $\mathbf{P}(CD) = \frac{10}{36} \neq \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(D) = \frac{55}{216}$.

I.5.48. Feladat: Ha $\mathbf{P}(A|B) = 0{,}7$, $\mathbf{P}(B|A) = 0{,}6$, $\mathbf{P}(A \mid \bar{B}) = 0{,}3$, akkor mennyi $\mathbf{P}(A)$?

Megoldás: $\mathbf{P}(AB) = 0{,}7\mathbf{P}(B) = 0{,}6\mathbf{P}(A) \Rightarrow \mathbf{P}(B) = 6/7\mathbf{P}(A)$. Másrészt $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(AB)+\mathbf{P}(A\bar{B}) = 0{,}6\mathbf{P}(A)+0{,}3\mathbf{P}(\bar{B}) = 0{,}6\mathbf{P}(A)+0{,}3-0{,}3\mathbf{P}(B) = 24/70\mathbf{P}(A) + 0{,}3$, ahonnan $\mathbf{P}(A) = 21/46$.

I.5.49. Feladat: Három szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy van hatos értékünk, ha tudjuk, hogy mindegyik dobás páros lett?

Megoldás: Ha B: „Mindegyik dobás páros", A: „Van hatos dobás". $\mathbf{P}(B) = \frac{3^3}{6^3} = \frac{1}{8}$, $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(\bar{A}B) = \frac{1}{8} - \frac{2^3}{6^3} = \frac{19}{216}$. Így $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{19}{27}$.

I.5.50. Feladat: Egy urnában b darab fekete és r darab fehér golyó van. véletlenszerűen kihúznak egy golyót. A kihúzott golyót és még ugyanolyan színűből c darabot visszatesznek az urnába. A kísérlet eredményét nem ismerve, másodszorra mi húzunk az urnából. Feltéve, hogy a második húzáskor fekete golyót húzunk, mennyi a valószínűsége annak, hogy az első húzáskor is fekete volt az eredmény?

Megoldás: A : „Az első húzás fekete volt", B: „A második golyó fekete". A Bayes tételt alkalmazva: $\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B|\bar{A})\mathbf{P}(\bar{A})}$, ahol $\mathbf{P}(B|A) = \frac{b+c}{b+r+c}$, $\mathbf{P}(\ B|\bar{A}) = \frac{b}{b+r+c}$, $\mathbf{P}(A) = \frac{b}{b+r}$ és $\mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{r}{b+r}$. Így $\mathbf{P}(A|B) = \frac{b+c}{b+r+c}$.

I.5.51. Feladat: Három szabályos kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobások között van hatos, ha mindegyik kockán különböző érték van?

Megoldás: Ha B: „Mindhárom kockán más-más eredmény van", A: „Az egyik kockán hatos van", akkor $\mathbf{P}(AB) = \frac{3\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{10}{36}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{20}{36}$, így $\mathbf{P}(A|B) = 0,5$.

I.5.52. Feladat: Egy ládában 100 darab dobókocka van, melyek közül 99 teljesen szabályos, egy pedig hamis olyan értelemben, hogy vele mindig hatos dobható csak. Ha véletlenszerűen kiveszünk egy kockát a ládából és azzal tízszer dobva mindig hatost kapunk, mennyi a valószínűsége, hogy éppen a hamis kockát vettük ki előzőleg?

Megoldás: Legyen A: „A hamis kockát választottuk ki”, B: „Tízszer dobva mindig hatost kapunk”. A Bayes tételt alkalmazva:
$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B|\bar{A})\mathbf{P}(\bar{A})}$, ahol $\mathbf{P}(A) = 0{,}01$, $\mathbf{P}(\bar{A}) = 0{,}99$,
$\mathbf{P}(B|A) = 1, \mathbf{P}(B|\bar{A}) = \frac{1}{6^{10}}$. Behelyettesítve: $\mathbf{P}(A|B) \approx 0{,}99999983$.

I.5.53. Feladat: Két bűnöző, x és y, egymástól függetlenül hazudnak, illetve mondanak igazat 2/3 illetve 1/3 valószínűséggel. Feltéve, hogy x azt állítja, hogy „y hazudik”, mennyi a valószínűsége, hogy y igazat mond?

Megoldás: A: „x azt állítja, hogy y hazudik”, B: „y igazat mond”. $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}$(„$x$ hazudik”) $= 2/3, \mathbf{P}(B) = 1/3, \mathbf{P}(A|\bar{B}) = \mathbf{P}$(„$x$ igazat mond”)$= \frac{1}{3}$, $\mathbf{P}\left(\bar{B}\right) = \frac{2}{3}$. A Bayes-tételt alkalmazva:
$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(A|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B})} = \frac{1}{2}$.

I.5.54. Feladat: Két urna közül az egyikben n fekete és m fehér, a másikban N fekete és M fehér golyó van. Az elsőből találomra átrakunk egyet a másodikba, majd onnan találomra visszaveszünk egyet. Megint az elsőből húzva, mennyi a valószínűsége a fehérnek?

Megoldás:
A_1 : „Az első urnából fehéret rakunk a másodikba, a másodikból fehéret rakunk vissza”,
A_2 : „Az első urnából fehéret rakunk a másodikba, a másodikból feketét rakunk vissza”,
A_3 : „Az első urnából feketét rakunk a másodikba, a másodikból fehéret rakunk vissza”,
A_4 : „Az első urnából feketét rakunk a másodikba, a másodikból feketét rakunk vissza”,
B: „Harmadszorra az első úrnából fehéret húzunk”.
A_1, A_2, A_3, A_4 teljes eseményrendszer. A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{4} \mathbf{P}(B|A_i)\mathbf{P}(A_i) = \ldots$.

I.5.55. Feladat: Két játékos felváltva húz egy-egy golyót visszatevés nélkül egy urnából, amiben egy fehér és három fekete golyó van. Az a játékos nyer, amelyik először húz fehéret. Mennyi a valószínűsége, hogy az elsőnek húzó játékos fog nyerni?

Megoldás: A: „Az első húzás után nyer a kezdő játékos", B: „A harmadik húzás után nyer a kezdő játékos", C: „Nyer a kezdő játékos". Nyilván: $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

I.5.56. Feladat: Egy kalapban tíz cédula van, melyekre a $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ számjegyek vannak felírva. Visszatevéssel kiveszünk két cédulát. Jelölje Y a számjegyek összegét, X pedig a számjegyek szorzatát. Adjuk meg a
$\mathbf{P}(Y = i \mid X = 0)$ valószínűségeket! ($i = 0, 1, \ldots, 18$).

Megoldás: $\mathbf{P}(X = 0) = \frac{19}{100}$, $\mathbf{P}(Y = i|X = 0) = 0$, ha$i > 9$.
$\mathbf{P}(Y = i|X = 0) = \frac{\mathbf{P}(\text{„0-át és } i\text{-t húztunk"+„}i\text{-t és 0-át húztunk"})}{\mathbf{P}(X=0)} = \frac{2}{19}$, ha $i = 1, 2, \ldots, 9$.

I.5.57. Feladat: Egy perzsa sah egyszer egy elítéltnek azt mondta, hogy tetszés szerint elhelyezhet 50 fehér és 50 fekete golyót két egyforma vázába. Az egyikből majd a sah kihúz egy golyót, és ha az fehér, megkegyelmez. Ha viszont a kihúzott golyó fekete, vagy kiderül, hogy nem mindegyik golyó volt a vázákba berakva, esetleg a kiválasztott vázában nem volt semmilyen golyó, az ítélet halál. Hogyan kell szétosztania az elítéltnek a golyókat, hogy a megkegyelmezés valószínűsége maximális legyen?

Megoldás: Az optimális stratégia az, ha az egyik vázába egy fehér golyót teszünk, a másikba az összes többit. Ekkor a teljes valószínűség tételét alkalmazva: $\mathbf{P}(\text{„A sah fehéret húz"}) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{49}{99}\right) \approx 0{,}747$. Minden más szétosztásnál csökken ez a valószínűség.

I.5.58. Feladat: A bináris szimmetrikus csatorna egy olyan bináris bemenetű és bináris kimenetű csatorna, melynek minden bemenete $p = 0{,}01$ valószínűséggel az ellenkezőjére vált a kimenetkor ($q = 1 - p$). A 0 forrásbitet 000-val, az 1 forrásbitet 111-gyel küldjük át. A dekódoló többségi döntést hoz. Ha a 0 és 1 forrásbitek előfordulásának egyaránt 0,5 a valószínűsége, akkor adja meg a dekódolás hibavalószínűségét!

Megoldás: $\mathbf{P}\,(\text{1-est veszünk} \mid \text{0-ást adnak}) = 3p^2q + p^3$,
$\mathbf{P}\,(\text{0-ást veszünk} \mid \text{1-est adnak}) = 3p^2q + p^3$.
$\mathbf{P}\,(\text{Hibázunk}) = \frac{1}{2}\,(3p^2q + p^3 + 3p^2q + p^3) = 2,98 \cdot 10^{-4}$.

I.5.1. Gyakorlat: Legyen $A, B \in \Im$. Adja meg az összes olyan $X \in \Im$ eseményt, melyre $A \cdot X \equiv A \cdot B$ teljesül!

I.5.2. Gyakorlat: Legyen $A, B \in \Im$. Adja meg az A, B-t tartalmazó legszűkebb $\sigma-$algebrát!

I.5.3. Gyakorlat: Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) \geq \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) - (n-1)$.

I.5.4. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC)| \leq \mathbf{P}(B \vartriangle C)$, $B \vartriangle C \stackrel{\circ}{=} B\bar{C} + C\bar{B}$!

I.5.5. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $-\frac{1}{4} \leq \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \leq \frac{1}{4}$!

I.5.6. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(AB)\mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) \leq \frac{1}{4}$!

I.5.7. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(A \vartriangle B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB)$!

I.5.8. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(AC) - \mathbf{P}(BC) \leq \mathbf{P}(A)$!

I.5.9. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(A + B + C) - \mathbf{P}(ABC) \geq \mathbf{P}(B \vartriangle C)$!

I.5.10. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(A \vartriangle B) \leq \mathbf{P}(A \vartriangle C) + \mathbf{P}(B \vartriangle C)$!

I.5.11. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogyha $\mathbf{P}(A) = 0,9$ és $\mathbf{P}(B) = 0,8$, akkor $\mathbf{P}(AB) \geq 0,7$!

I.5.12. Gyakorlat: A $\mathfrak{K}$ kísérlet abban áll, hogy véletlenszerűen kiválasztunk egy n elemű permutációt. Jelentse A_{ij} azt az eseményt, amikor a kiválasztott permutációban az i-edik elem a j-edik helyen áll. Fejezze ki A_{ij}-k segítségével az alábbi eseményeket:
A: „az első elem a másodiktól balra áll”,
B: „az első elem sorszáma legfeljebb j”.

I.5.13. Gyakorlat: Legyen $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Im$ és $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Állítsuk elő A-t egymást kizáró események összegeként!

I.5.14. Gyakorlat: Egy egyetemi évfolyamon a lányok közül 60-nak a haja barna, 40-nek a haja és a szeme is barna, 110 lánynak a haja és a szeme közül legalább az egyik barna. Hány barnaszemű lány van az évfolyamon?

I.5.15. Gyakorlat: Egy kávéautomata 20 Ft-os érmékkel működik. Egy tetszőleges 20 Ft-os érmét 0.98 valószínűséggel fogad el. Az automata kijelzője mutatja, hogy még 4 adag kávé van benne. Négyen állnak az automata előtt 1-1 20 Ft-os érmével a kezükben, amikor odaérkezem. Mekkora a valószínűsége, hogy jut nekem a kávéból? Mekkora annak a valószínűsége, hogy én iszom a 4 adag közül az elsőt?

I.5.16. Gyakorlat: Melyik lottószám lesz a legnagyobb valószínűséggel a második legnagyobb kihúzott szám?

I.5.17. Gyakorlat: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő heti lottószámok legnagyobbika kisebb lesz, mint a rákövetkező hét kihúzott számainak legkisebbike?

I.5.18. Gyakorlat: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottón a kihúzott öt szám közül nagyság szerint a középső 50-nél kisebb?

I.5.19. Gyakorlat: Egy sakktáblán találomra elhelyezünk 8 bástyát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a bástyák nem ütik egymást?

I.5.20. Gyakorlat: Egy kalapban az angol ABC 26 betűje van. Visszatevéssel 8-szor kihúzunk egy betűt és leírjuk azt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb két betűcsere után a leírt szóból megkapjuk a DEBRECEN szót?

I.5.21. Gyakorlat: Egyszerre n szabályos dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a. az összes kockával ugyanazt az értéket kapjuk?

b. legalább egy hatost dobunk?

c. pontosan egy hatost dobunk?

I.5.22. Gyakorlat: Egy urnában a darab fehér és b darab fekete golyó van. $(a, b \geq 2)$. Visszatevés nélkül kiveszünk két golyót az urnából. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

a. a két golyó azonos színű?

b. a két golyó különböző színű?

I.5.23. Gyakorlat: Harminc számozott golyót rakunk szét nyolc különböző ládába. Az elhelyezéskor bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel tehetünk bármelyik ládába. Keressük meg annak az elhelyezésnek a valószínűségét, amelynél három láda üres, kettőben három golyó van, kettőben hat és egyben 12 db golyó kerül!

I.5.24. Gyakorlat: Tekintsük az összes olyan n hosszúságú sorozatot, amelyek a $0, 1, 2$ számokból állnak. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenül választott ilyen sorozat:

a. 0-val kezdődik;

b. pontosan $m+2$ db 0-át tartalmaz, melyek közül kettő a sorozat végén van;

c. pontosan m db 1-est tartalmaz;

d. pontosan m_0 db 0-át, m_1 db 1-est és m_2 db 2-est tartalmaz.

I.5.25. Gyakorlat: Ketten pénzfeldobással játszanak. András nyer, ha egy szabályos érme dobási sorozatában három fej hamarabb következik, mint a fej-írás-fej sorozat. Viszont Béla a nyerő, ha mindez fordítva történik, azaz a fej-írás-fej sorozat előbb jön, mint a fej-fej-fej. Egyenlőek a játék nyerési esélyei? Milyen legyen a fej dobásának p valószínűsége, hogy a játék „fair" legyen?

I.5.26. Gyakorlat: Legyen A az az esemény, hogy lottóhúzásnál egyik kihúzott szám sem nagyobb mint 50, és B pedig az az esemény, hogy mindegyik kihúzott szám páros. Számoljuk ki a $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B), \mathbf{P}(AB), \mathbf{P}(A+B)$ valószínűségeket!

I.5.27. Gyakorlat: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottóhúzásnál kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen k? $(4 \leq k \leq 89)$.

I.5.28. Gyakorlat: Egy üres téglalap alakú szobában, melynek falai 10 és 5 méter hosszúak, leejtünk egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a golyó egy olyan pontban fog megállni, amely közelebb van a szoba egy sarkához, mint a szoba középpontjához?

I.5.29. Gyakorlat: Egy 10cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk egy 3cm átmérőjű köralakú pénzdarabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pénzdarab lefedi egy négyzet csúcsát?

I.5.30. Gyakorlat: Egy 20 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos padlózatra ledobunk egy 2 cm élhosszúságú játékkockát. Mennyi a valószínűsége, hogy a kocka teljes terjedelmével a padlózat egy négyzetében lesz?

I.5.31. Gyakorlat: Mennyi a valószínűsége, hogy egy egységnyi szakaszt véletlenszerűen három részre törünk, a keletkező szakaszokból hegyesszögű háromszög szerkeszthető?

I.5.32. Gyakorlat: Az $ABCD$ négyzetben találomra választunk egy P pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy P közelebb lesz az AB oldalhoz, mint a négyzet középpontjához?

I.5.33. Gyakorlat: Egy d szélességű lécekből álló padlózatra ledobunk egy $s = 2d$ hosszúságú tűt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű két padlórést fog egyszerre metszeni?

I.5.34. Gyakorlat: Az egységkör kerületén véletlenszerűen kiválasztunk három pontot: A, B és C-t. Mennyi a valószínűsége, hogy a BAC szög nagyobb lesz $60°$-nál?

I.5.35. Gyakorlat: Legyen $P = (a, b)$ az egységnégyzet egy véletlenül kiválasztott pontja és $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x + b$ egy harmadfokú polinom. Mennyi a valószínűsége, hogy $p(x)$-nek pontosan egy, illetve pontosan három valós gyöke van?

I.5.36. Gyakorlat: Találomra kiválasztunk egy P pontot az egységkör kerületén, majd egy Q pontot a körlapon. Mennyi a valószínűsége, hogy a QP szakasz hossza nagyobb mint 1?

I.5.37. Gyakorlat: A $(0, 2)$ és $(0, 3)$ szakaszokon választunk találomra egy-egy pontot, legyenek ezek x és y. Mennyi a valószínűsége, hogy az x, y és 1 hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög?

I.5.38. Gyakorlat: A $[0, 1]$ intervallumon találomra kiválasztunk két számot. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik szám több, mint kétszerese lesz a másiknak?

I.5.39. Gyakorlat: Válasszunk ki egy Xés Y pontot az egységintervallumban! Tekintsük azt a téglalapot, melynek oldalhosszai Xés Y. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkező téglalap kerülete nagyobb, mint 2és területe kisebb, mint 0,25?

I.5.40. Gyakorlat: Vegyünk egy véletlen $P = (a, b)$ pontot az egységnégyzetből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinomnak nincs valós gyöke?

I.5.41. Gyakorlat: Egy urnában b darab fekete és r darab fehér golyó van. véletlenszerűen kihúznak egy golyót. A kihúzott golyót és még ugyanolyan színűből c darabot visszatesznek az urnába. Ezt megteszik egymás után n-szer. Igazolja, hogy ezek után, a fekete golyó kihúzásának valószínűsége $\frac{b}{b+r}$!

I.5.42. Gyakorlat: Magyar kártyával huszonegyezünk. A kártya értékei: alsó=2, felső=3, király=4, hetes=7, nyolcas=8, kilences=9, tizes=10, ász=11. Mennyi a valószínűsége, hogy 21-et húzunk, ha a 19-et elértük az ötödik húzás után?

I.5.43. Gyakorlat: Egy kalapban tíz cédula van, melyekre a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számjegyek vannak felírva. Visszatevéssel kiveszünk két cédulát. Jelölje Y a számjegyek összegét, X pedig a számjegyek szorzatát. Adjuk meg a
$\mathbf{P}(Y = i \mid X > 0)$ valószínűségeket! $(i = 0, 1, \ldots, 18)$.

I.5.44. Gyakorlat: Először feldobunk egy szabályos érmét. Ha fej, egyszer, ha írás kétszer dobunk egy szabályos dobókockával. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz hatos?

I.5.45. Gyakorlat: Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom kivételhez 1 új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?

I.5.46. Gyakorlat: Egy szövegszerkesztő a karaktereket 7 bitbe kódolja, és ezt egy paritásbittel egészíti ki úgy, hogy az 1-esek száma páros legyen.

Teszi ezt azért, hogy páratlan paritással észlelni tudja a hibázást. Tegyük fel, hogy nyolc bitet egy olyan csatornán küldi át, amely egy bitet $0,1$ valószínűséggel ront el. Milyen valószínűséggel kapunk a kimeneten úgy nyolc bitet, hogy az hibás, de mégsem tudjuk azt észlelni?

I.5.47. Gyakorlat: A vizsgázók 75%-a A szakos, 15%-a B szakos és 10%-a C szakos. Annak az eseménynek a valószínűsége, hogy egy hallgató ötöst kap, az A szakosok esetében $0,4$, a B szakosoknál $0,7$ és a C szakosoknál $0,6$. Ha egy személyről tudjuk, hogy ötösre vizsgázott, akkor milyen valószínűséggel lehet A, B illetve C szakos?

I.5.48. Gyakorlat: Három egyforma doboz közül kettőben 2 piros, egyben 1 piros és 1 fehér golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból egy golyót. Ha ez piros, mennyi a valószínűsége, hogy a dobozban maradó golyó színe fehér?

I.5.49. Gyakorlat: Egy szabályos kockával addig dobunk újra és újra, amíg először hatost nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy eközben pontosan 1 egyest dobunk?

I.5.50. Gyakorlat: Egyetlen szelvénnyel lottózok. Számaim között a 40-es a középső. Az alábbi három esemény esetleges bekövetkezése közül melyik növeli jobban az ötös találatom feltételes valószínűségét? A : „az első kihúzott szám a 40-es”, B : „kihúzták a 40-es számot”, C : „a 40-es szám a kihúzott számok között a harmadik”.

I.5.51. Gyakorlat: Egy szabályos dobókockával addig dobunk, amíg ötöst nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy ezalatt nem dobunk hatost?

I.5.52. Gyakorlat: Három szabályos dobókockával dobunk! A: „az összeg 7”, B: „mindegyik páros”, C: „van közöttük hármas”. Számolja ki a $\mathbf{P}(A \cdot (B + \bar{C}))$és a $\mathbf{P}((A + C)\bar{B})$ valószínűségeket!

I.5.53. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy a Boole egyenlőtlenség végtelen sok esemény esetén is fennáll.(A folytonossági tételt használja!)

II. fejezet

A valószínűségi változó

II.1. A valószínűségi változó fogalma

A valós számok részhalmazai közül, csak azokkal fogunk a továbbiakban foglalkozni, amelyek intervallumok rendszeréből egyesítéssel, metszéssel és komplemens-képzéssel előállíthatók. Ezek az ú.n. *Borel*-mérhető halmazok, melynek fogalmát a II.1.2 definícióban adjuk meg. A gyakorlatban minden „épeszű" halmaz, így a nyílt, zárt, félig nyílt, félig zárt intervallumok, az egyelemű halmazok, a félegyenesek és a nyílt és zárt valós részhalmazok, valamint az egész számegyenes maga is Borel-mérhetőek. A következő tételben felhasználjuk a σ-algebra fogalmát, ami az $\Im$ eseményalgebra axiómáinál már szerepelt.

II.1.1. Tétel: Ha $\Re_1, \Re_2, \Re_3, \ldots$ a V halmaz részhalmazainak σ-algebrái, akkor $\bigcap\limits_{\forall i} \Re_i$ szintén σ-algebra.

Bizonyítás:

a.) Azért igaz, mert V mindegyik tényező σ-algebrában benne van, akkor a közös részben is benne kell, hogy legyen.

b.) Ha egy $A \subseteq V$ részhalmaz benne van a metszetben, az csak úgy lehet, ha mindegyik komponens σ-algebrában is benne van. De mivel a komponensek σ-algebrák, bennük a komplemens halmaz is benne van, de akkor a metszetükben is benne van a $V \backslash A$.

c.) Ha részhalmazok egy rendszere benne van a metszetben, akkor minden komponensben benne van, de akkor az egyesítésük is benne van minden komponensben, így a metszetükben is. ■

II.1.1. Definíció: Az $A, B, C, \ldots \subseteq V$ halmazrendszert tartalmazó összes σ-algebra metszetét — ami az előző tétel szerint maga is σ-algebra — a halmazrendszer által generált σ-algebrának nevezzük, és $\sigma(A, B, C \ldots)$-val jelöljük.

II.1.2. Definíció: A balról zárt, jobbról nyílt valós intervallumok által generált σ-algebrát, *Borel-féle* σ-algebrának nevezzük, és $\mathfrak{B}$-vel jelöljük:
$\mathfrak{B} = \sigma\left(\{[a, b), a, b \in \mathbb{R}\}\right)$.

II.1.3. Definíció: Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Az $X : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt *valószínűségi változó*nak nevezzük, ha minden $B \in \mathfrak{B}$ esetén $A = \{\omega; X(\omega) \in B\} \in \Im$, azaz a Borel-halmazok képe az X leképezésnél megfigyelhető esemény lesz.

Megjegyzés: Mértékelméleti terminológiával, X mérhető függvény. Látható, hogy az X valószínűségi változó minden ω elemi eseményhez egy valós számot rendel.

II.1.2. Tétel: Az $\{A;\ A = \{\omega;\ X(\omega) \in B\},\ B \in \mathfrak{B}\}$ eseményrendszer σ-algebra, melyet az X által generált σ-algebrának nevezünk, és $\sigma(X)$-el jelölünk.

Bizonyítás:
1^o $\{\omega; X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega$, mert $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}$.
2^o Ha $A = \{\omega; X(\omega) \in B\} \in \sigma(X)$, akkor $\bar{A} = \{\omega; X(\omega) \in \mathbb{R} \setminus B\}$ is, hiszen $\mathbb{R} \setminus B \in \mathfrak{B}$.
3^o $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega; X(\omega) \in B_i\} = \left\{\omega; X(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right\} \in \sigma(X)$, hiszen $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathfrak{B}$. ■

II.1.1. Példa:

a.) Ha X az $A \in \Im$ esemény indikátor függvénye, azaz
$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A \end{cases}, \quad \text{akkor } \sigma(X) = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}.$$

b.) Ha $X(\omega) \equiv c$, azaz a valószínűségi változó konstansfüggvény, akkor $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$.

II.2. Az eloszlásfüggvény fogalma

II.2.1. Definíció: Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, X valószínűségi változó. Ekkor a $Q_X : \mathfrak{B} \to [\,0\,,\,1\,]$ halmazfüggvény, melynek definíciója $Q_X(B) \doteq \mathbf{P}(\{\omega; X(\omega) \in B\}) \overset{jel}{=} \mathbf{P}\,(X \in B)\,,\ (B \in \mathfrak{B})$, az X valószínűségi változó *eloszlása.*

II.2.1. Tétel: A Q_X halmazfüggvény tulajdonságai:

a.) $Q_X(\mathbb{R}) = 1$.

b.) Ha $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ diszjunkt Borel-halmazok, akkor $Q_X(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} Q_X(B_i)$.

Megjegyzés: A Q_X kielégíti a $\mathbf{P}$ valószínűség axiómáit.

Bizonyítás:

a.) $Q_X(\mathbb{R}) = \mathbf{P}(\{\omega;\ X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

b.) $$Q_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathbf{P}\left(\omega; X\,(\omega) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \{\omega; X\,(\omega) \in B_i\}\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\,(\{\omega; X\,(\omega) \in B_i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_X\,(B_i)\,.$$

Megjegyzés: Amikor egy $\mathfrak{K}$ véletlen kísérlethez hozzárendelünk egy X valószínűségi változót, akkor egyúttal egy leképezést hajtunk végre az absztrakt $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ és az $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, Q_X)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezők között. A matematikailag nehezen kezelhető $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ struktúra helyett egy jobban kidolgozott és kiismert $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, Q_X)$ struktúrára térünk át, ahol az eseményeket a Borel-halmazok segítségével fogjuk megfogalmazni, az események valószínűségeit pedig az eloszlással kalkuláljuk a továbbiakban. A valószínűségi változó tehát a véletlen kísérlet egy matematikai modellje.

A valószínűségi változók definiálása az esetek többségében természetes módon adódik. Gondoljunk csak például a kockadobás kísérletre, a rulett-tárcsa megforgatására, a Duna pillanatnyi vízmagasságára, vagy a legközelebb születendő csecsemő testsúlyára stb. Sokszor, bár az elemi események nem számok, de valószínűségi változóval egy-egy értelmű megfeleltetés létesíthető köztük és a valós számok egy részhalmaza között, és így a valószínűségi változó segítségével ugyanúgy tárgyalható a jelenség. Pl. a kártyahúzásnál a kártyákat sorszámozzuk, minden addigi esemény ekvivalens módon átfogalmazható.

Felhasználhatók a valószínűségi változók az eredeti kísérlet egyszerűsítésére is. Pl. később látni fogjuk, hogy egy n-szeres hosszúságú kísérletsorozat helyett egyetlen valószínűségi változó megfigyelése is lehetséges.

II.2.2. Definíció: Az $F_X(x) = Q_X(\ (-\infty\ ,\ x)\ ), x \in \mathbb{R}$ függvényt az X valószínűségi változó *eloszlásfüggvény*ének nevezzük.

Megjegyzés: $F_X(x) = Q_X(\ (-\infty\ ,\ x)\ ) = \mathbf{P}(\{\omega;\ X(\omega) < x\}) \mathrel{\mathring{=}}$
$\mathrel{\mathring{=}} \mathbf{P}(X < x), x \in \mathbb{R}$,vagyis $F_X\ :\ \mathbb{R}\ \to\ [\ 0\ ,\ 1\ ]$ valós függvény.

II.2.2. Tétel: A valószínűségi változó eloszlása és eloszlásfüggvénye kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Megjegyzés: A II.2.2 tételt nem bizonyítjuk, csak annyit jegyzünk meg, hogy a bizonyítás azon múlik, hogy a félegyenesek által generált σ-algebra maga a Borel-féle σ-algebra. A tételnek az a fontos üzenete van a számunkra, hogy az eloszlásfüggvény segítségével is kiszámíthatók az események valószínűségei.

II.2.3. Tétel: *(Az F_X eloszlásfüggvény tulajdonságai)*

a.) F_X monoton nemcsökkenő, azaz $F_X(x) \leq F_X(y)$, ha $x < y$.

b.) F_X balról folytonos, azaz $\lim\limits_{x\to y-} F_X(x) = F_X(y)$ minden $y \in \mathbb{R}$-re.

c.) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ és $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Bizonyítás:

a.) Legyen $x < y$, akkor $A_x = \{\omega;\ X(\omega) < x\} \subseteq A_y = \{\omega;\ X(\omega) < y\}$, és így az I.1.3. tétel d.) pontja szerint $F_X(x) = \mathbf{P}(A_x) \leq \mathbf{P}(A_y) = F_X(y)$, ami az állítás volt.

b.) Legyen h_n tetszőleges monoton fogyó nullsorozat. (pl. $h_n = \frac{1}{n}$ ilyen.) Legyen $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges rögzített valós szám.
$B_n \triangleq A_{y-h_n} = \{\omega;\ X(\omega) < y - h_n\}$. Ekkor nyilván
$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots \sum_{i=1}^{\infty} B_i$. Másrészt $\sum_{i=1}^{\infty} B_i = \{\omega;\ X(\omega) < y\}$ is fennáll, ugyanis, ha $\omega \in \sum_{i=1}^{\infty} B_i \ \Rightarrow\ \exists\, n\ :\ X(\omega) < y - h_n \ \Rightarrow\ X(\omega) < y$ is.
Fordítva: ha $X(\omega) < y \ \Rightarrow\ \exists\, n\ :\ X(\omega) < y - h_n \ \Rightarrow\ \omega \in \sum_{i=1}^{\infty} B_i$.
A valószínűség folytonossági tulajdonságából (I.1.6. tétel):
$F_X(y) = \mathbf{P}(X < y) = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X < y - h_n) = \lim_{x\to y-} F_X(x)$.

c.) A $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$ bizonyítása:
Legyen $x_n \to \infty$ szigorúan növekedő tetszőleges számsorozat (pl. $x_n = n$ ilyen):
$B_n \triangleq A_{x_n}$, ekkor
$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots \subseteq B_n \subseteq \cdots \sum_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.
A $\sum_{i=1}^{\infty} B_i \subseteq \Omega$ tartalmazás triviálisan igaz, a másik irányú tartalmazás igazolása:
Legyen $\omega \in \Omega$ tetszőleges, ekkor
$X(\omega) \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \exists\, K \in \mathbb{R}\ :\ X(\omega) < K \ \Rightarrow\ \exists\, n\ :\ X(\omega) < K < x_n \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ \omega \in B_n \ \Rightarrow\ \omega \in \sum_{i=1}^{\infty} B_i$.
Így a folytonossági tételből:
$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = \lim_{x\to\infty} F_X(x)$.
A $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ bizonyítása:
$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(-X > -x) =$
$1 - \mathbf{P}(-X \le -x) = 1 - \mathbf{P}(Y \le -x)$, ahol $Y = -X$.
$\mathbf{P}(Y < -x) \le \mathbf{P}(Y \le -x) \le 1$ és $\lim_{-x\to+\infty} \mathbf{P}(Y < -x) = \lim_{y\to+\infty} F_Y(y) = 1$, mint ahogy az előbb láttuk.
Így $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 1 - \lim_{y\to+\infty} \mathbf{P}(Y \le y) = 1 - 1 = 0$. ■

II.2.4. Tétel: Tetszőleges $x < y$ esetén

a.) $\mathbf{P}(x \leq X < y) = F_X(y) - F_X(x)$,

b.) $\mathbf{P}(x < X < y) = F_X(y) - F_X(x+0)$,

c.) $\mathbf{P}(x \leq X \leq y) = F_X(y+0) - F_X(x)$,

d.) $\mathbf{P}(x < X \leq y) = F_X(y+0) - F_X(x+0)$,

e.) $\mathbf{P}(X = x) = F_X(x+0) - F_X(x)$.

Bizonyítás: Mindegyik állítás bizonyítása hasonló módon történik, ezért csak a c.) állítás igazolását részletezzük.
$\{\omega;\ x \leq X(\omega) \leq y\} = \{\omega;\ x \leq X(\omega)\} \cap \{\omega;\ X(\omega) \leq y\}$
Mivel $x < y$ $\{\omega;\ y < X(\omega)\} \subseteq \{\omega;\ x \leq X(\omega)\}$ és $\Omega = \{\omega;\ x \leq X(\omega)\} \cup \{\omega;\ X(\omega) \leq y\}$.
A Poincare-tételből:
$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\{\omega;\ x \leq X(\omega)\} + \{\omega;\ X(\omega) \leq y\}) =$
$= \mathbf{P}(X \leq y) + \mathbf{P}(x \leq X) - \mathbf{P}(x \leq X \leq y) =$
$= \mathbf{P}(X \leq y) + 1 - \mathbf{P}(X < x) - \mathbf{P}(x \leq X \leq y)$.
Innen: (*) $\mathbf{P}(x \leq X \leq y) = \mathbf{P}(X \leq y) - \mathbf{P}(X < x)$.
Ha most $0 \leq h_n$ szigorúan csökkenő nullsorozat, akkor megmutatható, hogy
$$\{\omega;\ X(\omega) \leq y\} = \prod_{n=1}^{\infty} \{\omega;\ X(\omega) < y + h_n\}.$$
Ugyanis, ha $\omega \in \{\omega;\ X(\omega) \leq y\}$, akkor
$\omega \in \{\omega;\ X(\omega) < y + h_n\}$ minden n indexre, tehát
$\omega \in \prod_{n=1}^{\infty} \{\omega;\ X(\omega) < y + h_n\}$ is.

Másrészt, ha $\omega \in \prod_{n=1}^{\infty} \{\omega;\ X(\omega) < y + h_n\}$, akkor minden n-re
$\omega \in \{\omega;\ X(\omega) < y + h_n\}$, tehát
$\omega \in \{\omega;\ X(\omega) \leq y\}$ is. A folytonossági törvényből:
$$\mathbf{P}(X \leq y) = \mathbf{P}(\prod_{n=1}^{\infty} \{\omega;\ X(\omega) < y + h_n\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X < y+h_n) = F_X(y+0).$$
Ez utóbbit (*)-ba behelyettesítve kapjuk az állítást. ■

Következmény: Ha F_X folytonos az x helyen, akkor $\mathbf{P}(X = x) = 0$.

Bizonyítás: Ha F_X folytonos az x helyen, akkor $F_X(x) = F_X(x + 0)$ és az e.) állítás igazolja a következményt. ■

Megjegyzés: Eloszlásfüggvényekre példákat a következő szakaszokban bőségesen adunk majd.

II.3. Diszkrét valószínűségi változók

II.3.1. Definíció: Az X valószínűségi változót *diszkrét*nek nevezzük, ha értékkészlete megszámlálható (sorozatba rendezhető), vagyis $\forall\, \omega \in \Omega$-ra $X(\omega) \in E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

II.3.2. Definíció: A $p_i = \mathbf{P}(\{\omega;\ X(\omega) = x_i\}) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(X = x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ valószínűségek összességét az X diszkrét valószínűségi változó *eloszlásának* nevezzük.

II.3.1. Tétel: Az X diszkrét valószínűségi változó $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ eloszlására teljesül, hogy

a.) $0 \leq p_i \leq 1$

b.) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Bizonyítás:

a.) Triviális, mivel az $A_i = \{\omega;\ X(\omega) = x_i\}$ esemény valószínűségéről van szó.

b.) Mivel az $A_i = \{\omega;\ X(\omega) = x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ események teljes eseményrendszert alkotnak, így az I.1.3 tétel c.) része miatt igaz az állítás. ■

II.3.2. Tétel: Az X diszkrét valószínűségi változó F_X eloszlásfüggvényére: $F_X(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, másrészt: $p_i = F_X(x_i + 0) - F(x_i)$.

Azaz a diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, melynek az ugróhelyei az $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ helyeken vannak, és az ugrás nagysága rendre $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.

Bizonyítás: Mivel $A_x = \{\omega;\ X(\omega) < x\} = \sum\limits_{x_i<x} A_i = \sum\limits_{x_i<x} \{\omega;\ X(\omega) = x_i\}$ és az A_i események egymást páronként kizárják, következik az állítás első része. Másrészt $p_i = \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}(x_i \leq X \leq x_i) = F_X(x_i + 0) - F_X(x_i)$. ■

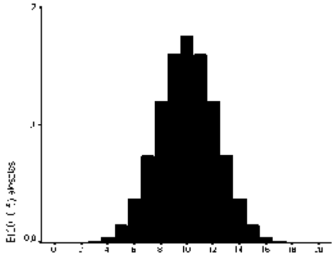
II.3.1. Példa: *Indikátor valószínűségi változó*

Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \Im$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Az $X\ :\ \Omega\ \to\ \mathbb{R}$ függvény definíciója a következő: $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$. Ekkor X diszkrét valószínűségi változó, melyet *indikátor* valószínűségi változónak nevezünk. *Jelölés*: $X \in I(A)$.
Az X eloszlása : $p_0 = \mathbf{P}(X = 0) = p$, $p_1 = \mathbf{P}(X = 1) = 1 - p$.

II.3.2. Példa: *Binomiális eloszlású valószínűségi változó*

Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \Im$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Hajtsunk végre egy n-szeres kísérletsorozatot. Vegye fel X azt az értéket, ahányszor A bekövetkezett a kísérletsorozatban. X lehetséges értékei tehát $0, 1, 2, \ldots, n$. Az egyes értékek felvételének valószínűségei, azaz X eloszlása:
$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}\quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$
Ugyanis
$\{\omega; X(\omega) = k\} = \underbrace{AA\cdots A}_{k\text{-szor}} \cdot \underbrace{\bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}}_{(n-k)\text{-szor}} + \underbrace{AA\cdots A}_{(k-1)\text{-szer}} \cdot \bar{A}A\cdot \underbrace{\bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}}_{(n-k-1)\text{-szer}} + \cdots$
$\cdots + \underbrace{\bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}}_{(n-k)-szor} \cdot \underbrace{AA\cdots A}_{k-szor}.$

A jobb oldalon álló események egymást kizárják, és mindegyikük valószínűsége a függetlenség miatt $p^k \cdot q^{n-k}$. A tagok száma $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \binom{n}{k}$, mert n elem olyan ismétléses permutációiról van szó, ahol k, illetve $n - k$ elem megegyezik.
A p_k valószínűségek eloszlást alkotnak, hiszen a binominális tétel szerint:
$\sum\limits_{k=0}^{n} p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$
X-et n és p paraméterű *binomiális eloszlású* valószínűségi változónak nevezzük.
Jelölés: $X \in B(n, p)$.
Nyilván $B(1, p) = I(A)$, tehát a binomiális eloszlás az indikátor eloszlás kiterjesztése.



II.3.1. ábra A binomiális eloszlás $n = 20, p = 0.5$ paraméterekkel

II.3.3. Tétel: A binomiális eloszlás p_k elemeire teljesül, hogy

a.) $p_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{q} \cdot p_{k-1}$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, $p_0 = q^n$.

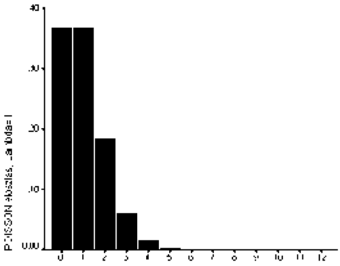
b.) Ha $\alpha = [(n+1) \cdot p]$, ahol $[x]$ az egészrészt jelöli, akkor $p_\alpha \geq p_k$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Bizonyítás:

a.) $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} = \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{q}$.

b.) A fenti azonosságból adódik, hogy $p_k \geq p_{k-1} \iff \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{1-p} \geq 1 \iff (n+1)p \geq k$, illetve $p_k \leq p_{k-1} \iff \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{1-p} \leq 1 \iff (n+1)p \leq k$. Innen már látható, hogy ha az α indexre $\alpha = [(n+1)p]$, akkor a hozzátartozó eloszlásérték nagyobb a többinél. Az is megmutatható, hogy ha $(n+1)p$ maga is egész szám, akkor az $\alpha = (n+1)p$, $\alpha - 1$ indexekhez tartozó valószínűségek egyenlőek, és a többinél nagyobbak lesznek. ■

II.3.3. Példa: *Poisson-eloszlású valószínűségi változó*
Ha egy X valószínűségi változó értékkészlete a természetes számok halmaza: $E = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, eloszlása pedig $p_k = \mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ahol $\lambda > 0$ akkor X-et λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változónak nevezzük. *Jelölés*: $X \in Po(\lambda)$.



II.3.2. ábra A Poisson-eloszlás $\lambda = 1$ paraméterrel paraméterekkel

A fenti valószínűségek valóban eloszlást alkotnak, mert
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = 1.$

II.3.4. Tétel: $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0 \\ np=\lambda}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, azaz a Poisson-eloszlás a binomiális eloszlás határesete, amikor a kísérletek száma (n) minden határon túl nő, az A esemény p valószínűsége pedig 0-hoz tart, miközben az np szorzat állandó.

Bizonyítás: Jelölje most $b(k,n,p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. A II.3.3 tételben láttuk, hogy $\frac{b(k,n,p)}{b(k-1,n,p)} = \frac{n-k+1}{k}\frac{p}{q} = \frac{np+(1-k)p}{k(1-p)} \to \frac{\lambda}{k}$, hiszen $np = \lambda$, $(1-k)p \to 0$, $k(1-p) \to k$ a feltételek miatt. Másrészt $b(0,n,p) = (1-p)^n = (1-\frac{\lambda}{n})^n \to \mathrm{e}^{-\lambda}$ is. Így $\frac{b(1,n,p)}{b(0,n,p)} \to \lambda$ miatt $b(1,n,p) \to \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$. Hasonlóan : $\frac{b(2,n,p)}{b(1,n,p)} \to \frac{\lambda}{2}$ miatt $b(2,n,p) \to \frac{\lambda^2}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$. Folytatva az eljárást, a tétel állítását kapjuk. ■

Megjegyzés: A Poisson-eloszlás jól alkalmazható olyan n-szeres kísérletsorozat modellezéséhez, ahol a kísérletek száma nagyon nagy, viszont a megfigyelt esemény valószínűsége 0-hoz közeli.

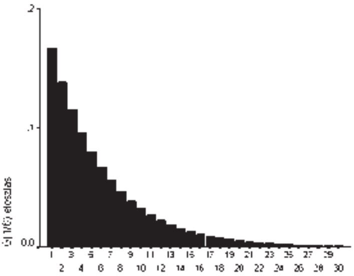
Például:

- egy adott térfogatban időegység alatt elbomló atomi részecskék száma;
- a mikroszkóp látóterébe bekerült egysejtűek száma;

- időegység alatt a telefonközpontba beérkező hívások száma;
- időegység alatt bekövetkező rádióaktív bomlások száma;
- egy süteményszeletben található mazsolák száma;
- egy könyvoldalon található sajtóhibák száma; stb.

Az említett esetekben binomiális eloszlás alkalmazása körülményes lenne, mert a binomiális együtthatók számolása a nagy n miatt túlcsorduláshoz, illetve számolási pontatlanságokhoz vezethet.

II.3.4. Példa: *Geometriai eloszlású valószínűségi változó*
Legyen $\mathfrak{K}$ egy véletlen kísérlet, és $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ a hozzátartozó Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \Im$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. A $\mathfrak{K}$ kísérlethez tartozó kísérletsorozatot addig hajtsuk végre, amíg az A esemény be nem következik. Az X valószínűségi változót értelmezzük úgy, mint az A esemény bekövetkezéséhez szükséges ismétlések számát. X-et p paraméterű *geometriai* eloszlású valószínűségi változónak nevezzük. *Jelölés*: $X \in G(p)$.



II.3.3. ábra A geometriai eloszlás $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel

X lehetséges értékei : $1, 2, 3.4, \ldots$, azaz a pozitív egész számok. X eloszlása: $p_k = \mathbf{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p = q^{k-1}p$, hiszen $\{\omega;\ X(\omega) = k\} = \underbrace{=\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \cdots \cdot \bar{A}}_{(k-1)\text{-szer}} \cdot A$, és a független végrehajtás miatt az esemény valószínűsége: $q \cdot q \cdot \cdots \cdot q \cdot p = q^{k-1}p$. A geometriai sor összegzőképletét felhasználva láthatjuk be, hogy ezek a valószínűségek valóban eloszlást alkotnak: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p = p \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1$.

Megjegyzés: A geometriai eloszlás örökifjú tulajdonságát a következőképp lehet interpretálni: attól, hogy egy esemény az ismételt végrehajtás során régen fordult elő, még nem fog a bekövetkezési valószínűség megnőni!

II.3.5. Tétel: *(A geometriai eloszlás örökifjú tulajdonsága)*
$\mathbf{P}(X = m + k \,|X > m) = \mathbf{P}(X = k)$, $\forall m, k$-ra, azaz annak feltételes valószínűsége, hogy a következő k végrehajtás végén bekövetkezik az A esemény, amennyiben az előző m megfigyelés alatt nem következett be ugyanannyi, mint annak valószínűsége, hogy éppen a k-adik végrehajtás után következik be az A esemény.

Bizonyítás:
$$\mathbf{P}\left(X = m + k \mid X > m\right) = \frac{\mathbf{P}(X=m+k, X>m)}{\mathbf{P}(X>m)} = \frac{\mathbf{P}(X=m+k)}{\mathbf{P}(X>m)} = \frac{q^{m+k-1}p}{\sum\limits_{\alpha=m+1}^{\infty} q^{\alpha-1}p} =$$
$$= \frac{q^{m+k-1}p}{q^m p \sum\limits_{\alpha=0}^{\infty} q^{\alpha}} = \frac{q^{m+k-1}p}{q^m} = q^{k-1}p = \mathbf{P}\left(X = k\right). \blacksquare$$

II.4. Folytonos valószínűségi változók

II.4.1. Definíció: Legyen X az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$-n értelmezett valószínűségi változó, melynek értékkészlete kontimuum számosságú. Jelölje F_X az eloszlásfüggvényt. X-et folytonos valószínűségi változónak nevezzük, ha F_X abszolút folytonos, azaz létezik olyan Riemann integrálható $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyre fennáll az $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad (x \in \mathbb{R})$ összefüggés. Az f_X függvényt az X valószínűségi változó (vagy az F_X eloszlásfüggvény) *sűrűségfüggvényének* nevezzük. Ha F_X abszolút folytonos, akkor folytonos is és majdnem mindenütt differenciálható, azaz pl. véges sok helyen lehet csak töréspontja. $\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = f_X(x)$, ha x folytonossági pontja f_X-nek.

Megjegyzés:

a.) A diszkrét valószínűségi változók nem folytonosak, már csak azért sem, mert eloszlásfüggvényük nem folytonos.

b.) Léteznek olyan valószínűségi változók, melyek se nem diszkrétek, se nem folytonosak. Ezek az általános valószínűségi változók, melyekkel a továbbiakban mi nem foglalkozunk; a gyakorlatban ritkán fordulnak elő. Pl.

az az X általános valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}} dt, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

II.4.1. Tétel: *(A sűrűségfüggvény tulajdonságai)*
Legyen X az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$-n értelmezett folytonos valószínűségi változó. Akkor az $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sűrűségfüggvényre teljesül, hogy

a.) $f_X(x) \geq 0$,

b.) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1$.

Bizonyítás:

a.) Mivel F_X monoton nem csökkenő, és $\frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x} = f_X(x)$, ha x folytonossági pontja f_X-nek, következik az állítás.

b.) $1 = \lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt.$ ■

Megjegyzés:

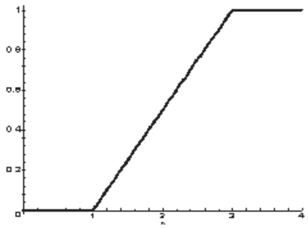
a.) A sűrűségfüggvény a folytonos valószínűségi változóknál ugyanazt a szerepet tölti be, mint diszkrét valószínűségi változóknál az eloszlás. Ugyanis tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ és $\Delta x > 0$ -ra $\mathbf{P}(a \leq X < a + \Delta x) =$
$F_X(a+\Delta x) - F_X(a) = \int\limits_{a}^{a+\Delta x} f_X(t)\, dt = f_X(a^*)\Delta x$, ahol $a \leq a^* < a + \Delta x$.
Ha Δx kicsi, akkor $f_X(a) \approx f_X(a^*)$, így $\mathbf{P}(a \leq X < a+\Delta x) \approx f_X(a)\Delta x$. Tehát az X valószínűségi változó az a környezetében az $f_X(a)$ értékkel arányos valószínűséggel tartózkodik. (Az $f_X(a)$ érték lehet 1-nél nagyobb is!)

b.) $f_X(x) \stackrel{\circ}{=} 0$, ha $\nexists\ \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$.

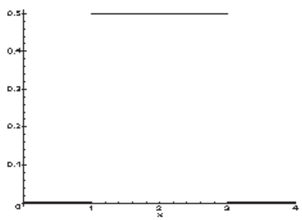
II.4.1. Példa: *(Az egyenletes eloszlású valószínűségi változó)*
Az X az $[a,\ b]$ intervallumon egyenletes eloszlású, ha eloszlásfüggvénye:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b. \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Jelölés: $X \in U([a\ ,\ b])$. Ekkor a sűrűségfüggvény: $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in (a,b) \\ 0, x \notin (a,b) \end{cases}$.



II.4.1. ábra Az $[1, 3]$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye



II.4.2. ábra Az $[1, 3]$ intervallumon egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye

Megjegyzés: Az $X \in U([a\ ,\ b])$ valószínűségi változóra jellemző, hogy bármely Δ hosszúságú szakaszon azonos valószínűséggel veszi fel értékeit. Tehát, ha $c, c + \Delta \in [a, b]$, akkor
$\mathbf{P}\left(c \leq X < c + \Delta\right) = F_X\left(c + \Delta\right) - F_X\left(c\right) = \frac{c+\Delta-a}{b-a} - \frac{c-a}{b} = \frac{\Delta}{b-a}$.

A valószínűség egyrészt nem függ a részintervallum c kezdőpontjától, másrészt éppen a részintervallum és a teljes intervallum hosszainak arányával egyenlő.

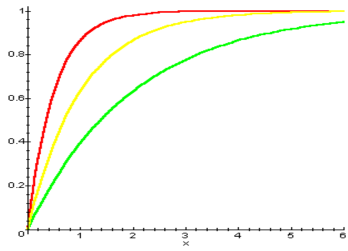
II.4.2. Példa: *(Az exponenciális eloszlású valószínűségi változó)*
Az X valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} .$$

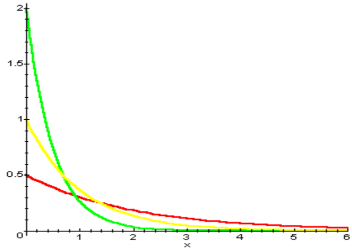
Jelölés: $X \in E(\lambda)$.

A sűrűségfüggvény $F_X'(x) = f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$.

Megjegyzés: Exponenciális eloszlással a gyakorlatban berendezések élettartamát szokás modellezni. De exponenciális eloszlásúnak tekinthető tömegkiszolgálási modellekben a kiszolgálási idő és az új igények rendszerbe való beérkezési ideje is, vagy a rádioaktív atomok elbomlási ideje is.



II.4.3. ábra A $\lambda = 1, 2, 0{,}5$ paraméterű exponenciális eloszlások eloszlásfüggvényei



II.4.4. ábra A $\lambda = 1, 2, 0{,}5$ paraméterű exponenciális eloszlások sűrűségfüggvényei

II.4.2. Tétel: *(Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága)*
Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó $\mathbf{P}(X < x) = F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Akkor $\mathbf{P}(X < x+t \,|X \geq x) = \mathbf{P}(X < t)$ $\forall\, 0 < x, t$-re $\iff$ $\exists \lambda > 0 :\ F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, x > 0$, vagyis $X \in E(\lambda)$.

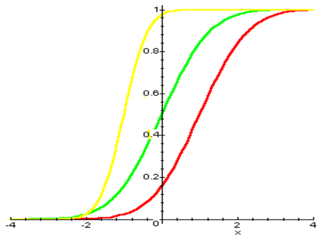
Megjegyzés: X azért „örökifjú", mert annak feltételes valószínűsége, hogy X legfeljebb $x+t$-ig él, ha már x-et megélt egyenlő annak valószínűségével, hogy X legfeljebb t ideig él, azaz a túlélési kondíciók az idő múlásával nem csökkennek, hiszen 0 és t között ugyanaz a túlélési esély mint x és $x+t$ között. A tétel azt állítja, hogy az exponenciális eloszlás az egyetlen „örökifjú" a folytonos eloszlások között.

Bizonyítás: $\Leftarrow$
Legyenek $0 < x, t$ tetszőlegesek, ekkor
$\mathbf{P}(X < x+t \,|X \geq x) = \frac{\mathbf{P}(x \leq X < x+t)}{\mathbf{P}(X \geq x)} = \frac{F_X(x+t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda(x+t)} - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - 1 + \mathrm{e}^{-\lambda x}} =$
$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathbf{P}(X < t)$.
$\Rightarrow$
Legyen $G(x) = 1 - F(x) = \mathbf{P}(X \geq x)$. Ekkor $\forall\, 0 < x, t$-ra
$\mathbf{P}(X < x+t \,|X \geq x) = \mathbf{P}(X < t) = \frac{G(x) - G(x+t)}{G(x)} = 1 - G(t)$,
azaz $G(x+t) = G(x)G(t)$.
Tehát $G(2t) = (G(t))^2, G(3t) = G(2t)G(t) = (G(t))^3, \cdots, G(nt) = (G(t))^n$.
Másrészt $nt = s$-re: $G(s) = \left(G(\frac{s}{n})\right)^n$, azaz $G(\frac{s}{n}) = (G(s))^{\frac{1}{n}}$.
Így $G\left(m\frac{s}{n}\right) = \left(G\left(\frac{s}{n}\right)\right)^m = (G(s))^{\frac{m}{n}}$, azaz $s = 1$-gyel $G(\frac{m}{n}) = (G(1))^{\frac{m}{n}}$. Tehát tetszőleges $0 < r \in \mathbb{Q}$ racionális számra fennáll $G(r) = (G(1))^r$. Mivel G is és az exponenciális függvények folytonosak, így $\forall x > 0$ valós számra is fenn kell állnia $G(x) = (G(1))^x$-nek. De $G(1) = 1 - F(1) < 1$ miatt $\exists \lambda > 0$, hogy $G(1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$ legyen. Behelyettesítés után $G(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}, \forall x > 0$, azaz $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $X \in E(\lambda)$. ■

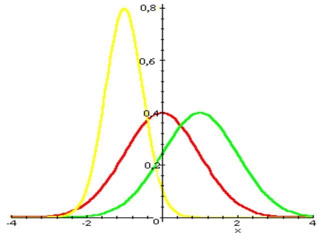
II.4.3. Példa: *(A normális eloszlású valószínűségi változó)*
Az X valószínűségi változó $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű *normális eloszlású*, ha eloszlásfüggvénye $F_X(x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt,\ x \in \mathbb{R}$.

Jelölés: $X \in N(\mu, \sigma)$.

Az X sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$. Ha $X \in N(0,1)$, akkor *standard* normális eloszlásról beszélünk. Ilyenkor
$\varphi_{0,1}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ és $\Phi_{0,1}(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$.



II.4.5. ábra Az $\mathbf{N}(-1, 0{,}5)$, $\mathbf{N}(0, 1)$ és $\mathbf{N}(1, 1)$normális eloszlások eloszlásfüggvényei



II.4.6. ábra Az $\mathbf{N}(-1, 0{,}5)$, $\mathbf{N}(0, 1)$ és $\mathbf{N}(1, 1)$normális eloszlások sűrűségfüggvényei

II.4.3. Tétel: *(A φ Gauss-függvény tulajdonságai)*

a.) $\varphi(-x) = \varphi(x)$, vagyis φ páros függvény.

b.) $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$.

c.) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \varphi(0) \geq \varphi(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

d.) φ inflexiós helyei a $+1$ és -1, azaz $\varphi''(-1) = \varphi''(+1) = 0$.

e.) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Bizonyítás: Az a.) és b.) állítások nyilvánvalóak.

c.) és d.) $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -x\varphi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$\varphi''(x) = -\varphi(x) - x\varphi'(x) = \varphi(x)(x^2-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$

$\Rightarrow$ $+1$, -1 inflexiós pontok.

$\varphi''(0) = -\varphi(0) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ a 0 helyen maximum van.

e.) $\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(t^2+u^2)}{2}}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u$ áttérve a $t = r\cdot\cos\alpha$, $u = r\cdot\sin\alpha$ polárkoordinátákra:

$t^2+u^2 = r^2$, $J(r,\alpha) = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha \\ \sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix} = r$

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(t^2+u^2)}{2}}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{2\pi} r\cdot\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\,d\alpha dr = 2\pi\cdot\left[-\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{\infty} = 2\pi$, ahonnan már következik az állítás. ■

II.4.4. Tétel: *(A Φ eloszlásfüggvény tulajdonságai)*

a.) $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, $\forall x > 0$, azaz Φ grafikonja szimmetrikus a $(0, \frac{1}{2})$-ra,

b.) Φ szigorúan monoton növekedő,

c.) $\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{1!2\cdot 3} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!2^k\cdot(2k+1)} + \cdots\right)$, $\forall x > 0$,

d.) $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\Phi(x) = 0$.

Bizonyítás:

a.) $\Phi(-x) = \int\limits_{-\infty}^{-x}\varphi(t)\,dt = 1 - \int\limits_{-x}^{\infty}\varphi(t)\,dt = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(-t)\,dt = 1 - \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,dt = 1 - \Phi(x)$.

b.) Igaz, mert $\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$ (II.4.3 tétel c.) része).

c.) $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2^k k!}$ és ahonnan már következik az állítás.

d.) Nyilvánvaló következménye a II.4.3 tétel e.) részének. ■

II.5. Valószínűségi változók transzformációi

II.5.1. Tétel: Legyen X diszkrét valószínűségi változó $A = \{x_k; k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ értékkészlettel és $p_k = \mathbf{P}(X = x_k)$ eloszlással. Legyen $t : A \to B$ tetszőleges függvény, $B = \{y_j; j = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$. Akkor az $Y = t(X)$ diszkrét valószínűségi változó értékkészlete B, eloszlása $\mathbf{P}(Y = y_j) = \sum\limits_{\forall x_k : t(x_k) = y_j} p_k$ lesz.

Bizonyítás: Mivel az $\{\omega; X(\omega) = x_k\}$ nívóesemények különböző k indexek esetén egymást kizárják, és $\{\omega;\ Y(\omega) = y_j\} = \sum\limits_{\forall x_k : t(x_k) = y_j} \{\omega; X(\omega) = x_k\}$, a valószínűség σ-additivitásából már következik az állítás. ■

II.5.1. Példa: Ha $X \in B(n, p)$ és $t(x) = n - x$, akkor $Y = t(X) \in B(n, 1 - p)$, hiszen $\mathbf{P}(Y = k) = \mathbf{P}(X = n - k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1 - p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k} (1 - p)^k p^{n-k}$.

II.5.2. Példa: Ha $X \in Po(\lambda)$ és $t(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \le 10 \\ 11, & \text{ha } x > 10 \end{cases}$, akkor az $Y = t(X)$ értékkészlete $B = \{0, 1, \dots, 11\}$ és eloszlása

$$\mathbf{P}(Y = k) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}, & \text{ha } k \le 10 \\ 1 - \sum\limits_{i=0}^{10} \frac{\lambda^i}{i!} \mathrm{e}^{-\lambda}, & \text{ha } k = 11 \end{cases}.$$

II.5.2. Tétel: Ha X olyan folytonos valószínűségi változó, hogy $\mathbf{P}(X \in A) = 1$ valamely $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazra, és $t : A \to B$ szigorúan monoton függvény, akkor az $Y = t(X)$ is folytonos valószínűségi változó lesz, és $F_Y(y) = \begin{cases} F_X(t^{-1}(y)), & \text{ha } t \text{ sz.m.} \uparrow \\ 1 - F_X(t^{-1}(y)), & \text{ha } t \text{ sz.m.} \downarrow \end{cases}$, illetve $f_Y(y) = f_X(t^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\mathrm{d}t^{-1}(y)}{\mathrm{d}y} \right|$.

Bizonyítás: Mivel t szigorúan monoton, ezért invertálható is. Ha t növekedő (csökkenő), akkor az inverze is növekedő (csökkenő). Ha t szigorúan monoton növekedő, az $\{\omega; t(X(\omega)) < y\}$ és az $\{\omega; X(\omega) < t^{-1}(y)\}$ nívóesemények ekvivalensek, a t leképezés invertálhatósága miatt.
Így $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(t(X) < y) = \mathbf{P}(X < t^{-1}(y)) = F_X(t^{-1}(y))$.

Ha t szigorúan monoton csökkenő, akkor az $\{\omega;\ t(X(\omega)) < y\}$ és az $\{\omega;\ X(\omega) > t^{-1}(y)\}$ nívóesemények ekvivalensek, és $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y < y) =$

$\mathbf{P}(t(X) < y) = \mathbf{P}(X > t^{-1}(y)) = 1 - F_X(t^{-1}(y))$. Deriválás után adódik a sűrűségfüggvényekre a képlet. ■

II.5.3. Példa: Ha az X standard normális eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye az $Y = X^2$ valószínűségi változónak?

Ha $x > 0$: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(X^2 < x) = \mathbf{P}(|X| < \sqrt{x}) =$
$= \mathbf{P}(-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 \Rightarrow$ deriválás után kapjuk a sűrűségfüggvényt: $f_Y(x) = 2\varphi(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, ha $x > 0$.

II.5.4. Példa: Ha az X μ, σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye az $Y = \mathrm{e}^X$ valószínűségi változónak? (Y az ú.n. *lognormális eloszlású* valószínűségi változó).

$\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}\left(\mathrm{e}^X < x\right) = \mathbf{P}(X < \ln x) = F_X(\ln x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$, így $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$.

A II.5.2 tétel speciális esete az alábbi, mely véletlenszám generálásoknál hasznos.

II.5.3. Tétel: Ha U a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású és $F(y)$ egy szigorúan monoton növekvő eloszlásfüggvény azon az intervallumon, ahol $0 < F(y) < 1$, akkor az $Y = F^{-1}(U)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye éppen $F(y)$ lesz.

Bizonyítás:
Először is megjegyezzük, hogy egy szigorúan monoton növekvő függvénynek létezik az inverze. $\mathbf{P}(Y < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(U) < y) = \mathbf{P}(F(F^{-1}(U)) < F(y)) =$ $\mathbf{P}(U < F(y)) = F(y)$, mert $F(y) \in [0,1]$. ■

Megjegyzés: A II.5.3 tétel lehetőséget ad arra, hogy a számítógépek egyenletes eloszlású véletlen számokat generáló rutinja segítségével tetszőleges invertálható $F(y)$ eloszlásfüggvényhez tartozó véletlen számokat előállítsunk és azokat szimulációs programokhoz felhasználjuk.

A következő tétel az előző megfordítása:

II.5.4. Tétel: Ha X eloszlásfüggvénye $F(y)$ egy szigorúan monoton növekvő eloszlásfüggvény azon az intervallumon, ahol $0 < F(y) < 1$, akkor az $U = F(X)$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású lesz $[0,1]$-en.

Bizonyítás:
Először is megjegyezzük, hogy egy szigorúan monoton növekvő függvénynek létezik az inverze. Legyen $y \in [0,1]$ tetszőleges!
$\mathbf{P}(U < y) = \mathbf{P}(F(X) < y) = \mathbf{P}(F^{-1}(F(X)) < F^{-1}(y)) =$
$= \mathbf{P}(X < F^{-1}(y)) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y$, ezért $U \in U\left([0,1]\right)$. ■

II.5.5. Tétel: *(Lineáris transzformáció)*
Ha X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = ax + b, a \neq 0$, akkor az $Y = t(X) = aX + b$ lineáris transzformált valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{ha } a < 0 \end{cases}$, sűrűségfüggvénye pedig
$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

Bizonyítás: A II.5.2 tétel egyszerű következménye. ■

A következő tétel azt mondja ki, hogy a normális eloszláscsalád a lineáris transzformációra nézve zárt:

II.5.6. Tétel: *(A normális eloszlás transzformációs tulajdonságai)*

a.) $\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$,

b.) $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$, vagyis a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényével és eloszlásfüggvényével teszőleges $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterű normális eloszlású sűrűségfüggvény és eloszlásfüggvény előállítható.

Bizonyítás:

a.) $\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma}\, \mathrm{d}u = \Phi_{\mu,\sigma}(x)$
$t = \frac{u-\mu}{\sigma}, \quad \sigma t + \mu = u, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\sigma}$

b.) az a.) mindkét oldalát deriváljuk. ■

II.5.7. Tétel: *(Folytonos valószínűségi változó diszkretizálása)*
Legyen X folytonos valószínűségi változó, és $t(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} y_k I\left(x \in [r_{k-1}, r_k)\right)$,

ahol $0 \le r_k \le 1$ szigorúan növekedő sorozat,
$I\left(x \in [r_{k-1}, r_k)\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin [r_{k-1}, r_k) \\ 1, & \text{ha } x \in [r_{k-1}, r_k) \end{cases}$.

Ekkor $Y = t(X)$ diszkrét valószínűségi változó lesz $\{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\}$ értékkészlettel és $\mathbf{P}\left(Y = y_k\right) = \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} f_X(u)\,du$ eloszlással.

Bizonyítás: $\mathbf{P}\left(Y = y_k\right) = \mathbf{P}\left(r_{k-1} \le X < r_k\right) = \int\limits_{r_{k-1}}^{r_k} f_X(u)\,\mathrm{d}u$. ■

II.5.5. Példa: Legyen $X \in E(\lambda), t(x) = [x] + 1$. Ekkor
$Y = t(X) \in G\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)$. Hiszen $\mathbf{P}\left(Y = k\right) = \int\limits_{k-1}^{k} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{k-1}^{k} =$
$\left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)\right)^{k-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)$. Ha feladatunk valamely $\{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\}$ értékkészletű, $p_k = \mathbf{P}\left(Y = y_k\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ eloszlású diszkrét valószínűségi változó számítógépes szimulálása, akkor a II.5.7 tétel azon speciális esetét kell alkalmazni, amikor $X \in U(0,1)$ és $r_k = \sum\limits_{j=-\infty}^{k} p_j$.

II.5.6. Példa: *(Binomiális eloszlású véletlen számok generálása számítógéppel)*

Legyen $X \in U(0,1)$ véletlen szám. Legyen $Y = k$, ha
$\sum\limits_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \le X < \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$, $k = 0, \dots, n$. Látható, hogy $Y \in B(n,p)$ véletlen szám lesz.

II.6. A várható érték

II.6.1. Definíció:

a.) Az X diszkrét valószínűségi változónak akkor létezzék *várható értéke*, ha a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$ sor konvergens. Ekkor az X várható értékén az $\mathbf{E}X = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{P}(X = x_i)$ sorösszeget értjük.

b.) Az X folytonos valószínűségi változónak akkor létezzék *várható értéke*, ha az $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens. Ekkor az X várható értékén az $\mathbf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$ számot értjük.

Megjegyzés:

a.) Egy valószínűségi változónak nem feltétlenül létezik a várható értéke. Később látni fogunk ellenpéldákat.

b.) Az ú.n. *Stieltjes*-integrál segítségével a várható érték mind a diszkrét, mind a folytonos esetben azonos módon definiálható. Legyen $F(x)$ egy eloszlásfüggvény, és legyen $g(x)$ folytonos és korlátos $\mathbb{R}$-en. Legyen továbbá $\delta = \{[x_k, x_{k+1})\,;\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \lim\limits_{k\to-\infty} x_k = -\infty, \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \infty\}$ a számegyenes egy végtelen felosztása, melynek a finomságát $\Delta(\delta) = \sup\limits_{-\infty<k<\infty} (x_{k+1} - x_k)$ jelöli. Képezzük a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} g(x_k^*)\left(F(x_{k+1}) - F(x_k)\right)$ összegeket, ahol x_k^* az $[x_k, x_{k+1})$ intervallum egy pontja. A Riemann-integrál létezésének bizonyítása szinte szószerint átvihető erre az esetre is, és így kimutatható, hogy ha a $(-\infty, \infty)$ intervallum δ felosztását minden határon túl sűrítjük, azaz, ha $\Delta(\delta) \to 0$, akkor az integrálközelítő összegek konvergálnak egy határértékhez, amelyet $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x)$-szel jelölünk, és a $g(x)$ függvénynek az $F(x)$ súlyfüggvényre vonatkozó Stieltjes-integráljának nevezzük. A Stieltjes-integrál definíciójából következik, hogy ha $F(x)$ egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, vagyis $F(x)$ lépcsős függvény, mégpedig $F(x)$ ugráshelyei $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ és az x_n helyen $F(x)$ ugrása $p_n = F(x_n + 0) - F(x_n)$, akkor $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g(x_n)p_n$. Könnyen belátható továbbá, hogy ha $F(x)$ szakaszonként sima eloszlásfüggvény, és $F'(x) = f(x)$, akkor $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$. Ugyanis, ha $F(x)$ az (a, b) intervallumban mindenütt differenciálható, akkor a Lagrange-középértéktétel szerint $F(x_{k+1}) - F(x_k) = f(x_k')(x_{k+1} - x_k)$, ahol $x_k < x_k' < x_{k+1}$, és így ha

$x_k^* = x_k'$, akkor a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} g\left(x_k^*\right)\left(F(x_{k+1}) - F(x_k)\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} g\left(x_k'\right) f(x_k')\left(x_{k+1} - x_k\right)$ összeg éppen a $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ Riemann-integrál integrál közelítő összege! Tehát, ha most $g(x) = x$, mind a diszkrét, mind a folytonos esetben a várható érték Stieltjes-integrállal írható fel: $\mathbf{E}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF_X(x)$.

II.6.1. Tétel: Legyen $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges valós függvény. Ekkor, ha az $Y = g(X)$ valószínűségi változó, és létezik a várható értéke, akkor

a.) ha X diszkrét : $\mathbf{E}Y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} g(x_i) \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$,

b.) ha X folytonos: $\mathbf{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

Bizonyítás:

Diszkrét eset:

Legyen az X diszkrét valószínűségi változó értékkészlete a V megszámlálható számhalmaz, az $Y = g\left(X\right)$ diszkrét valószínűségi változóé pedig $W = \{y;\ y = g\left(x\right), x \in V\}$. Ekkor definíció szerint:

$$\mathbf{E}Y = \sum_{y\in W} y\mathbf{P}\left(Y = y\right) = \sum_{y\in W} y \sum_{x\in V: g(x)=y} \mathbf{P}\left(X = x\right) =$$

$$= \sum_{y\in W} \sum_{x\in V: g(x)=y} g\left(x\right)\mathbf{P}\left(X = x\right) = \sum_{x\in V} g\left(x\right)\mathbf{P}\left(X = x\right).$$

Folytonos eset:

Tegyük fel, hogy g differenciálható. Ekkor a II.5.1. tételt alkalmazva:

$$\mathbf{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_Y\left(y\right)\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_X\left(g^{-1}\left(y\right)\right)\left|\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}\right|\mathrm{d}y =$$

végrehajtva az $y = g(x)$ változócserét:

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X\left(x\right)\mathrm{d}x. \blacksquare$$

II.6.2. Tétel: Legyen az X valószínűségi változónak várható értéke $\mathbf{E}X$. Ekkor az $Y = a \cdot X + b$ valószínűségi változónak is létezik várható értéke, és $\mathbf{E}Y = a\mathbf{E}X + b$.

Bizonyítás:

Alkalmazzuk a II.6.1. tételt a $g(x) = ax + b$ lineáris függvényre!

a.) diszkrét eset:
$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty}(a \cdot x_i + b)p_i = a \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i + b \cdot \sum_{i=1}^{\infty} p_i = a \cdot \mathbf{E}X + b \cdot 1.$

b.) folytonos eset:
$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f_X(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x + b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x =$
$a \cdot \mathbf{E}X + b \cdot 1.$ ■

Következmény: A konstans valószínűségi változó várható értéke önmaga.

II.6.1. Példa: *(Az indikátor eloszlás várható értéke)*
Az eloszlás : $\mathbf{P}(X=1) = p$, $\mathbf{P}(X=0) = 1-p = q$. $\mathbf{E}X = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$.

II.6.2. Példa: *(A binomiális eloszlás várható értéke)*
Az eloszlás : $p_k = \mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,
$k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \cdot p_k = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$
$$= np \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = np \sum_{\alpha=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\alpha!(n-1-\alpha)!} p^{k-1} q^{n-1-\alpha} =$$
$= np \sum_{\alpha=0}^{n-1} \binom{n-1}{\alpha} p^{k-1} q^{n-1-\alpha} = np \cdot (p+q)^{n-1} = np$, azaz $\mathbf{E}X = np$.

II.6.3. Példa: *(A Poisson-eloszlás várható értéke)*
Az eloszlás : $p_k = \mathbf{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$
$$= \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda.$$

II.6.4. Példa: *(A geometriai eloszlás várható értéke)*
Az eloszlás : $p_k = \mathbf{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} \cdot p = \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \cdot q^{k-1} p + \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = q \cdot \mathbf{E}X + 1,$$
ahonnan $\mathbf{E}X$-et kifejezve $\mathbf{E}X = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$ adódik.

II.6.5. Példa: *(Az egyenletes eloszlás várható értéke)*
$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

II.6.6. Példa: *(Az exponenciális eloszlás várható értéke)*
$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

II.6.7. Példa: *(A normális eloszlás várható értéke)*

a.) Standard normális eloszlás
$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

b.) Az általános eset, $X \in N(\mu, \sigma)$.
$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \cdot \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \mu \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \sigma \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu.$$
Tehát a normális eloszlás μ paramétere a várható értéket jelenti.

II.7. Magasabb momentumok, szórásnégyzet

II.7.1. Definíció: Az X valószínűségi változó *n-edik momentumán* az X^n valószínűségi változó várható értékét értjük, ha az létezik. *Jelölés*: $\mu_n = \mathbf{E}X^n$.

Megjegyzés:

a.) diszkrét esetben: $\mu_n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n \mathbf{P}(X = x_i)$.

b.) folytonos esetben : $\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

II.7.2. Definíció: Az X valószínűségi változó *szórásnégyzet*én vagy *varianciáján* az $Y = (X - \mathbf{E}X)^2$ valószínűségi változó várható értékét értjük (amennyiben az létezik). *Jelölés*: $\sigma^2 X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$.

Az X valószínűségi változó *szórása* a szórásnégyzet pozitív négyzetgyöke: $\sigma X = +\sqrt{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2}$.

Megjegyzés:

a.) diszkrét esetben: $\sigma^2 X = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_i - \mathbf{E}X)^2 \cdot \mathbf{P}(X = x_i)$.

b.) folytonos esetben :$\sigma^2 X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{E}X)^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

II.7.1. Tétel: Legyen X olyan valószínűségi változó, melynek létezik szórásnégyzete. Ekkor minden valós x esetén:
$\sigma^2 X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \leq \mathbf{E}(X - x)^2$.

Bizonyítás: A bizonyításban felhasználjuk a várható érték additív tulajdonságát, melyet majd a III.4.6. tételben bizonyítunk.

Legyen $g(x) = \mathbf{E}(X - x)^2 = \mathbf{E}(X^2 - 2X \cdot x + x^2) = \mathbf{E}X^2 - 2x\cdot \mathbf{E}X + x^2$. Mivel $g'(x) = 2x - 2\ \mathbf{E}X = 0$, akkor ha $x = \mathbf{E}X$ és $g''(x) = 2 > 0$, ezért az $x = \mathbf{E}X$ hely minimumhely, ami már igazolja az állítást. ■

Megjegyzés: Az X valószínűségi változó értékei a várható érték körül ingadoznak a legkisebb mértékben az összes valós szám közül, és ezt a minimális ingadozást, bizonytalanságot jellemzi a szórásnégyzet. Ha tehát egy valószínűségi változónak nagy a szórása, értékeit bizonytalanul tudjuk csak megbecsülni. Ha a szórásnégyzet kicsi, a bizonytalanságunk a változó értékeit illetően csökken. Ad abszurdum, a konstans szórásnégyzete 0.

II.7.2. Tétel: $\sigma^2 X = 0 \iff \mathbf{P}(X = \mathbf{E}X) = 1$.

Bizonyítás: Ha X diszkrét, akkor

$$0 = \sigma^2 X =$$
$$\sum_{\forall i}(x_i - \mathbf{E}X)^2 \cdot \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{\forall i: x_i \neq \mathbf{E}X} (x_i - \mathbf{E}X)^2 \cdot \mathbf{P}(X = x_i) \iff$$
$$\iff \forall i\ :\ x_i \neq \mathbf{E}X \Rightarrow \mathbf{P}(X = x_i) = 0 \iff$$
$$\iff \sum_{\forall i: x_i \neq \mathbf{E}X} \mathbf{P}(X = x_i) = \mathbf{P}(X \neq \mathbf{E}X) = 0 \iff$$
$$\iff \mathbf{P}(X = \mathbf{E}X) = 1.$$ ■

II.7.3. Tétel: *(Steiner formula)*
$\sigma^2 X = \mathbf{E}(X-a)^2 - [\mathbf{E}(X-a)]^2$, minden $a \in \mathbb{R}$-re. Speciálisan $a = 0$-ra $\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2$.

Bizonyítás: Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges !
$\mathbf{E}(X-a)^2 = \mathbf{E}(X^2 - 2aX + a^2) = \mathbf{E}X^2 - 2a \cdot \mathbf{E}X + a^2$,
$[\mathbf{E}(X-a)]^2 = [\mathbf{E}X - a]^2 = [\mathbf{E}X]^2 - 2a \cdot \mathbf{E}X + a^2$.
Így $\mathbf{E}(X-a)^2 - [\mathbf{E}(X-a)]^2 = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2$.
Viszont $\sigma^2 X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X^2 - 2X \cdot \mathbf{E}X + [\mathbf{E}X]^2) =$
$= \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}X + [\mathbf{E}X]^2 = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2$, amiből már következik az állítás. ■

II.7.1. Következmény: Mivel $\sigma^2 X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}X^2 \geq [\mathbf{E}X]^2$, tehát, ha X második momentuma (így a szórásnégyzete is) létezik, akkor a várható értéknek is léteznie kell!

II.7.4. Tétel: $\sigma^2(aX+b) = a^2 \cdot \sigma^2 X$, minden $a, b \in \mathbb{R}$-re. Azaz a szórásnégyzet eltolás invariáns.

Bizonyítás:
$\sigma^2(aX+b) = \mathbf{E}(aX+b)^2 - [\mathbf{E}(aX+b)]^2 =$
$= a^2 \cdot \mathbf{E}X^2 + 2ab\,\mathbf{E}X + b^2 - a^2 \cdot [\mathbf{E}X]^2 - 2ab \cdot \mathbf{E}X - b^2 =$
$= a^2 \cdot (\mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2) = a^2 \cdot \sigma^2 X$. ■

II.7.3. Definíció: Egy X valószínűségi változó *standardizáltján* az $\tilde{X} = \frac{X - \mathbf{E}X}{\sigma X}$ lineáris transzformált valószínűségi változót értjük.

Megjegyzés: $\mathbf{E}\tilde{X} = 0, \ \ \sigma^2 \tilde{X} = 1$.

II.7.1. Példa: *(Az indikátor eloszlás szórásnégyzete)*
$\sigma^2 X = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q = q^2 \cdot p + p^2 \cdot q = p \cdot q(q+p) = pq = p(1-p)$.

II.7.2. Példa: *(A binomiális eloszlás szórásnégyzete)*
$\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2$,
$\mathbf{E}X^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \cdot p_k = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$
$= \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$
$= \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k q^{n-k} + \mathbf{E}X =$

$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} \cdot p^{k-2} \cdot q^{n-2-(k-2)} + np =$
$= n \cdot (n-1)p^2 \sum\limits_{\alpha=0}^{n-2} \binom{n-2}{\alpha} \cdot p^{\alpha} \cdot q^{n-2-\alpha} + np =$
$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (p+q)^{n-2} + np = n^2p^2 - np^2 + np.$
Így $\sigma^2 X = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq.$

II.7.3. Példa: *(A Poisson-eloszlás szórásnégyzete)*
$\mathbf{E}X^2 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot p_k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} \mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda =$
$= \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$
Így $\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

II.7.4. Példa: *(A geometriai eloszlás szórásnégyzete)*
$\mathbf{E}X^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1}p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left((k-1)^2 + 2k - 1\right) \cdot q^{k-1}p = q \cdot \mathbf{E}X^2 + 2\mathbf{E}X - 1 =$
$= q \cdot \mathbf{E}X^2 + 2\frac{1}{p} - 1$. Innen $\mathbf{E}X^2$-et kifejezve: $\mathbf{E}X^2 = \frac{2-p}{p^2}$.
Így $\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$

II.7.5. Példa: *(Az egyenletes eloszlás szórásnégyzete)*
$\mathbf{E}X^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b} x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+a \cdot b+b^2}{3},$
$\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2 = \frac{a^2+a \cdot b+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$

II.7.6. Példa: *(Az exponenciális eloszlás szórásnégyzete)*
$\mathbf{E}X^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\infty} x^2 \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2 \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} + \int\limits_{0}^{\infty} 2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$
$= 0 + \frac{2}{\lambda} \int\limits_{0}^{\infty} x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}$, így $\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$

II.7.7. Példa: *(A normális eloszlás szórásnégyzete)* a.) Standard normális eloszlás

$$\mathbf{E}X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[x \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

Így $\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2 = 1 - 0 = 1$.

b.) Az általános eset, $X \in N(\mu, \sigma)$.

$$\mathbf{E}X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \varphi_{\mu,\sigma}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2 \cdot \varphi(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\varphi(y)\,\mathrm{d}y + 2\mu \cdot \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \mu^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \sigma^2 \cdot 1 + 2\mu \cdot \sigma \cdot 0 + \mu^2 \cdot 1 = \sigma^2 + \mu^2.$$

Innen $\sigma^2 X = \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$. Tehát a normális eloszlás σ paramétere a szórást jelenti.

II.8. Kidolgozott feladatok és gyakorlatok

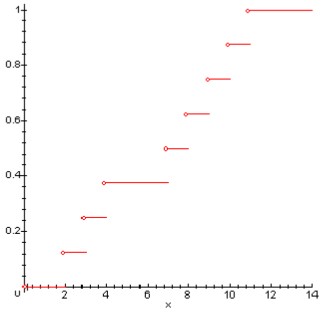
II.8.1. Feladat: Mutassuk meg, hogy az $F(X) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{1+2x}{x-0{,}8}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$ függvény nem lehet eloszlásfüggvény!

Megoldás: Mivel $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 2$, ezért a c.) tulajdonság sérül.

II.8.2. Feladat: Egy csomag magyar kártyából találomra kihúzunk egy lapot. Vegye fel X a kártya pontértékét! (alsó:2, felső:3, király:4, ász:11, hetes:7, nyolcas:8, kilences:9, tizes:10). Adjuk meg és ábrázoljuk a eloszlásfüggvényét!

Megoldás: X értékkészlete a $\{2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11\}$ számhalmaz. Mindegyik i értéket $\mathbf{P}(X = i) = 1/8$ valószínűséggel veheti fel. Így az eloszlásfüggvény:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \le 2 \\ 1/8, & \text{ha} \quad 2 < x \le 3 \\ 2/8, & \text{ha} \quad 3 < x \le 4 \\ 3/8, & \text{ha} \quad 4 < x \le 7 \\ 4/8, & \text{ha} \quad 7 < x \le 8 \\ 5/8, & \text{ha} \quad 8 < x \le 9 \\ 6/8, & \text{ha} \quad 9 < x \le 10 \\ 7/8, & \text{ha} \quad 10 < x \le 11 \\ 1, & \text{ha} \quad 11 < x \end{cases}$$



II.8.3. Feladat: A véletlen kísérlet az, hogy n darab dobozba véletlenszerűen golyókat helyezünk el úgy, hogy minden elhelyezésnél bármelyik doboz kiválasztása egyformán valószínű. Akkor állunk meg, ha észrevesszük, hogy az egyes számú dobozba bekerült az első golyó. Jelölje X a kísérlet befejeződésekor az elhelyezett golyók számát. Adjuk meg az X eloszlását!

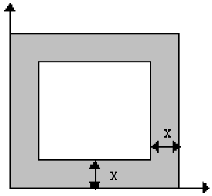
Megoldás: Annak a valószínűsége, hogy az egyes számú dobozba ejtünk egy golyót $p = \frac{1}{n}$, annak, hogy nem ebbe kerül a golyó $q = \frac{n-1}{n}$. Ha A-val jelöljük azt az eseményt, hogy „az egyes dobozba kerül a golyó", akkor a golyók elhelyezését addig kell folytatnunk, amíg A először be nem következik, tehát X geometriai eloszlású lesz. Az eloszlása: $\mathbf{P}(X = k) = q^{k-1}p = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \frac{1}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

II.8.4. Feladat: Mennyi a valószínűsége, hogy a hagyományos $90/5$ lottóhúzás során valamennyi kihúzott szám páros lesz?

Megoldás: Az X eloszlása, $\mathbf{P}(X=k)=\frac{\binom{45}{k}\binom{45}{5-k}}{\binom{90}{k}}$, $k=0,1,2,3,4,5$. A kérdés arra vonatkozik, amikor $k=5$, azaz a keresett valószínűség: $\mathbf{P}(X=5)=\frac{\binom{45}{5}\binom{45}{0}}{\binom{90}{5}}\approx 0{,}0278$.

II.8.5. Feladat: Az egységnégyzeten kiválasztunk véletlenszerűen egy pontot. Jelölje X a pontnak a legközelebbi oldaltól vett távolságát. Adjuk meg az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

Megoldás: Geometriai módszerrel lehet meghatározni az eloszlásfüggvényt. Az alábbi ábrán sötétítve mutatjuk az $X<x$ eseménynek megfelelő tartományt:



A terület nagysága $1-(1-2x)^2$, így $F_X(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\le 0\\ 1-(1-2x)^2, & \text{ha } 0<x\le 0{,}5\\ 1, & \text{ha } x>0{,}5\end{cases}$.

Deriválás után kapjuk a sűrűségfüggvényt: $f_X(x)=\begin{cases} 4-8x, & \text{ha } 0<x\le 0{,}5\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$

II.8.6. Feladat: Egy egységnyi hosszúságú szakaszt találomra választott pontjával két részre osztunk. Mi a keletkezett szakaszok közül a kisebbik hosszának sűrűségfüggvénye?

Megoldás: Jelöljük Y-nal a kiválasztott pont origótól vett távolságát! Ekkor nyilván $Y\in U[0,1]$, és eloszlásfüggvénye $F_Y(x)=\begin{cases} 0, & \text{ha } x\le 0\\ x, & \text{ha } 0<x<1\\ 1, & \text{ha } x\ge 1\end{cases}$.

A keletkező szakaszok közül a rövidebb hosszát jelöljük X-el! A két változó között az alábbi kapcsolat áll fenn: $X=\begin{cases} Y, & \text{ha } Y\le 0{,}5\\ 1-Y, & \text{ha } Y>0{,}5\end{cases}$. Így X eloszlásfüggvénye kifejezhető Y eloszlásfüggvényével:

$F_X(x) = \mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(X < x, Y \leq 0{,}5) + \mathbf{P}(X < x, Y > 0{,}5) =$
$= \mathbf{P}(Y < x, Y \leq 0{,}5) + \mathbf{P}(1 - Y < x, Y > 0{,}5) =$
$$= \mathbf{P}\left(Y < x\right) + \mathbf{P}\left(1 - x < Y\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ x + (1 - (1 - x)) = 2x, & \text{ha } x \in (0,\ 0{,}5) \\ 1, & \text{ha } x \geq 0{,}5 \end{cases},$$
azaz $X \in U\left[0,\ 0{,}5\right]$.

II.8.7. Feladat: Egy szobában öt telefon működik, melyek közül bármelyik megszólalhat a többiektől teljesen függetlenül X időn belül, ahol $X\lambda = 1$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Mennyi az esélye annak, hogy egységnyi időn belül pontosan két telefonkészülék fog csörögni?

Megoldás: Az A: „egy telefon megcsörren egységnyi időn belül" esemény valószínűsége: $p = \mathbf{P}\left(X < 1\right) = F_X(1) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. Mivel öt függetlenül üzemelő készülékünk van, a feladat átfogalmazható úgy, mintha az A eseményre vonatkozó ötszörös kísérletsorozatról volna szó. Így a binomiális eloszlást figyelembevéve, annak valószínűsége, hogy az A esemény pontosan kétszer következik be: $\binom{5}{2}p^2\left(1 - p\right)^3 = 10\left(1 - 1/e\right)^2\left(1/e\right)^3 \approx 0{,}1989$.

II.8.8. Feladat: Egy automata zacskókba cukorkát adagol. A zacskók X súlyát $\mu = 100$ (gramm), $\sigma = 2$ (gramm) paraméterű normális eloszlásúnak tekinthetjük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három véletlenszerűen kiválasztott zacskó között legalább egy olyan van, amelynek a súlya 99 és 101 gramm közé esik?

Megoldás: Legyen A : „a zacskó súlya 99 és 101 gramm közé esik esemény". Az A bekövetkezésének valószínűségét az eloszlásfüggvénye segítségével határozhatjuk meg: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(99 \leq X < 101) =$
$= F_X(101) - F_X(99) = \Phi\left(\frac{101-100}{2}\right) - \Phi\left(\frac{99-100}{2}\right) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-0{,}5) =$
$= 2\Phi(0{,}5) - 1 \approx 0{,}383$. A három zacskó kiválasztása $n = 3$ és $\mathbf{P}(A)$ paraméterű binomiális eloszlással modellezhető, ami alapján a keresett valószínűség: $1 - \binom{3}{0}\left(\mathbf{P}(A)\right)^0\left(1 - \mathbf{P}(A)\right)^3 \approx 0{,}765114887$.

II.8.9. Feladat: Legyen az X valószínűségi változó folytonos eloszlásfüggvénye olyan, hogy $1 > F(x) > 0$ esetben szigorúan monoton növekedő is. Bizonyítsa be, hogy ekkor az $Y = 3F(X) + 4$ valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[4, 7]$ intervallumon!

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(3F(X) + 4 < x) = \mathbf{P}(X < F^{-1}(\frac{x-4}{3})) = F(F^{-1}(\frac{x-4}{3})) = \frac{x-4}{3}$.

II.8.10. Feladat: Legyen az X valószínűségi változó folytonos eloszlásfüggvénye olyan, hogy $1 > F(x) > 0$ esetben szigorúan monoton növekedő is. Bizonyítsa be, hogy ekkor az $Y = \ln \frac{1}{F(X)}$ eloszlása $\lambda = 1$ paraméterű exponenciális!

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(\ln \frac{1}{F(X)} < x) = \mathbf{P}(F(X) > \mathrm{e}^{-x}) =$
$= 1 - \mathbf{P}(F(X) \leq \mathrm{e}^{-x}) = 1 - \mathbf{P}(X < F^{-1}(\mathrm{e}^{-x})) =$
$= 1 - \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow Y \in E(1)$.

II.8.11. Feladat: Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = |X|$ valószínűségi változónak?

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(|X| < x) = \mathbf{P}(-x < X < x) = F(x) - F(-x)$, deriválás után kapjuk a sűrűségfüggvényt: $f_Y(x) = f(x) + f(-x)$, $x > 0$.

II.8.12. Feladat: Ha X λ-paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, akkor mi az eloszlása az $Y = 2X + 1$ valószínűségi változónak?

Megoldás: Mivel $X \in \{0, 1, 2, \ldots\} \Rightarrow Y \in \{1, 3, 5, \ldots, 2n+1, \ldots\}$ és $\mathbf{P}\left(X = k\right) = \mathbf{P}\left(Y = 2k+1\right) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

II.8.13. Feladat: Ha az X a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, mi a sűrűségfüggvénye az $Y = \frac{1}{X}$ és a $Z = \frac{X}{1+X}$ valószínűségi változóknak?

Megoldás: Ha $x \leq 0$, akkor $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(\frac{1}{X} < x) = 0$, mert ez lehetetlen. Ha $x > 0$, akkor $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(\frac{1}{X} < x) = \mathbf{P}\left(X > \frac{1}{x}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(X \leq \frac{1}{x}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right) 1 - \frac{1}{x}$, ha még az is fennáll, hogy $\frac{1}{x} \leq 1$, azaz $x \geq 1$. Így $F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x}, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$. A sűrűségfüggvényt deriválással határozhatjuk meg: $f_Y(x) = x^{-2}$, ha $x > 1$ (különben $= 0$). Másrészt $\mathbf{P}(Z < x) = \mathbf{P}\left(\frac{X}{1+X} < x\right) = \mathbf{P}\left(X < \frac{x}{1-x}\right) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & \text{ha } x \leq 0{,}5 \\ 1, & \text{ha } x > 0{,}5 \end{cases}$. (Az $\frac{x}{1-x} \leq 0$ sohasem teljesül.) Deriválás után: $f_Z(x) = (1-x)^{-2}$, ha $x < 0{,}5$ (különben $= 0$).

II.8.14. Feladat: Ha X a $[0{,}2]$ intervallumon egyenletes eloszlású, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = |X - 1|$ valószínűségi változónak?

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(|X-1| < x) = \mathbf{P}(1-x < X < 1+x) =$
$= F_X(1+x) - F_X(1-x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} = x, & \text{ha } x \in [0,1] \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$,
vagyis $Y \in U[0,1]$.

II.8.15. Feladat: Ha X λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = 3X + 3$ valószínűségi változónak?

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(X < \frac{x-3}{3}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\frac{x-3}{3}}$, ha $x \geq 3$.
$f_Y(x) = \frac{\lambda}{3}\mathrm{e}^{-\lambda\frac{x-3}{3}}$, $x > 3$.

II.8.16. Feladat: Ha $X \lambda$-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = \sqrt{X}$ valószínűségi változónak?

Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}\left(X < x^2\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2}, x > 0$. $f_Y(x) = 2\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x^2}$, $x > 0$.

II.8.17. Feladat: Ha $X \lambda$-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor mi a sűrűségfüggvénye az $Y = \frac{1}{X^2}$ valószínűségi változónak?

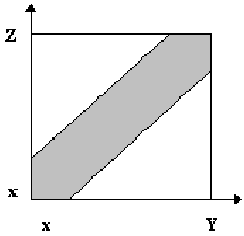
Megoldás: $\mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(0 < \frac{1}{X^2} < x) = \mathbf{P}\left(X^2 > \frac{1}{x}\right) = \mathbf{P}\left(X > \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 - \mathbf{P}\left(X \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 - F_X(\frac{1}{\sqrt{x}})$. Deriválás után $f_Y(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x^3}}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{\sqrt{x}}}$, $x > 0$.

II.8.18. Feladat: Egy szabályos pénzdarabbal végzünk dobásokat. A pénzfeldobást addig folytatjuk, amíg a dobások sorozatában mind a fej, mind az írások száma eléri a k számot. Jelölje X az ehhez szükséges dobások számát. Adja meg az X eloszlását!

Megoldás: Jelölje Y a fejek számát, Z az írások számát az n dobás között. Így $\mathbf{P}(X = n) = \mathbf{P}(Y = k, Z = n-k) + \mathbf{P}(Y = n-k, Z = k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^n} + \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^n} = \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{2^{n-1}}$.

II.8.19. Feladat: A $[0,1]$ szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Legyen a két pont távolsága X. Adja meg X sűrűségfüggvényét!

Megoldás: Jelölje Y, illetve Z a két pont origótól vett távolságát! Ekkor $X = |Y - Z|$, $\mathbf{P}(X < x) = \mathbf{P}(Y - x < Z < Y + x)$. Geometriai valószínűségszámítási módszerrel: (Y, Z) egy véletlen pont az egységnégyzetben, így az $(Y - x) < Z < (Y + x)$ feltételnek megfelelő tartomány:



A keresett eloszlásfüggvény: $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1 - (1 - x)^2, & \text{ha } x \in (0, 1) \\ 1, & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$.

II.8.20. Feladat: Az A paraméter milyen értékénél lesz az $f(x) = A\mathrm{e}^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ függvény sűrűségfüggvény? Mennyi ekkor a várható érték és a szórásnégyzet?

Megoldás: $A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\frac{1}{2}}} \sim \mathbf{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

II.8.21. Feladat: Az egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Jelöljük X-el a két pont távolságát! Adja meg az $F_X(x) \doteq \mathbf{P}(X < x)$ eloszlásfüggvényt!

Megoldás: $X = \sqrt{(x - y)^2 + 1}$, $\qquad t \in \left(1, \sqrt{2}\right)$-re
$F_X(t) = \mathbf{P}(X < t) = \mathbf{P}\left((x - y)^2 + 1 < t^2\right) =$
$= \mathbf{P}\left(x - \sqrt{t^2 - 1} < y < x + \sqrt{t^2 - 1}\right) =$
$= 1 - \left(1 - \sqrt{t^2 - 1}\right)^2 = 2\sqrt{t^2 - 1} - (t^2 - 1)$.

II.8.22. Feladat: Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan, hány olyan nap lesz, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?

Megoldás: Jelölje X az egy nap alatt meghibásodott telefonkészülékek számát! X nyilván Poisson-eloszlású. Mivel $\mathbf{P}(X=0)=\mathrm{e}^{-\lambda}\approx\frac{12}{360}=\frac{1}{30}\Rightarrow$ $\lambda\approx\ln 30$. Ezért $\mathbf{P}(X\geq 2)=1-\mathbf{P}(X=1)-\mathbf{P}(X=0)=1-\frac{1}{30}(1+\ln 30)$. Az $X\geq 2$ napok várható száma: $360\cdot\left(1-\frac{1}{30}(1+\ln 30)\right)\approx 307$.

II.8.23. Feladat: Az $X\in U(0,1)$ valószínűségi változó segítségével generáljunk $Y\in G(0,25)$ eloszlású valószínűségi változót!

Megoldás: Legyen $q_i=\sum\limits_{j=0}^{i}\frac{3^{j-1}}{4^j}, q_0=1$. Ekkor $Y=i$, ha $q_i<X\leq q_{i+1}$, $i=0,1,2,\ldots$.

II.8.24. Feladat: Egy képzeletbeli diktatúrában a „Nagy Testvér” az alábbi rendeleteket hozta:

1§ A hadsereg utánpótlásának biztosítása végett minden család köteles fiúgyermeket szülni.

2§ A demográfiai robbanás elkerülése végett minden családban, ha már született fiú, több gyermek nem születhet.

Hogyan változtatja meg a „Nagy Testvér” ezen két rendelete a fiú-lány arányt?

Megoldás: A „Nagy Testvér” végtelen bölcsessége következtében, nem változik meg a fiú lány arány! Hiszen, ha N család van az országban, a fiúk száma nyilván N lesz. A lányoké pedig: $\frac{N}{4}+\frac{N}{8}2+\frac{N}{16}3+\cdots+\frac{N}{2^{k+1}}k+\cdots=\frac{N}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\frac{1}{2^{k-1}}=N$.

II.8.25. Feladat: Legyen X Poisson-eloszlású $\lambda>0$ paraméterrel, $Y=2X+1$. Adjuk meg Y várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás: $\mathbf{E}Y=2\mathbf{E}X+1=2\lambda+1$, $\sigma^2Y=4\sigma^2X=4\lambda$.

II.8.26. Feladat: Legyen X n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, $Y=\frac{1}{1+X}$. Adjuk meg Y várható értékét és szórását!

Megoldás: $\mathbf{E}Y=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\ldots$,
$\sigma^2Y=\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1+k}\right)^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}-(\mathbf{E}Y)^2=\ldots$ stb.

II.8.27. Feladat: Ha az X sűrűségfüggvénye $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $(x \in \mathbb{R})$, akkor létezik-e várható értéke?

Megoldás: Nem létezik, mert $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\pi(1+x^2)} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2\pi} \ln\left(1+x^2\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$ divergens.

II.8.28. Feladat: Legyen $X \in N(\mu, \sigma)$, azaz μ,σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó! Adjunk képletet $\mathbf{E}X^n$-re!

Megoldás: Ha $\tilde{X} = \frac{X-\mu}{\sigma}$ jelöli a standardizáltat, akkor $\tilde{X} \in N(0,1)$. $\mathbf{E}\tilde{X}^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \varphi(x) \, \mathrm{d}x = (n-1) \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{n-2} \varphi(x) \, \mathrm{d}x = (n-1)\,\mathbf{E}\tilde{X}^{n-2}$. Mivel $\mathbf{E}\tilde{X} = 0$, így a standardizált minden páratlan hatványának várható értéke 0. $\mathbf{E}\tilde{X}^{2n} = (n-1)(n-3)\cdots 1 = (n-1)!$, mivel $\mathbf{E}\tilde{X}^2 = 1$. Másrészt $\mathbf{E}X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma^k \mu^{n-k} \mathbf{E}\tilde{X}^k$ is fennáll. Behelyettesítve kaphatjuk a végeredményt.

II.8.29. Feladat: Egy játékos 1023 zseton induló tőkével rulettezik. Az a stratégiája, hogy addig folytatja a játékot, amíg vagy nyer, vagy pedig elfogy az összes zsetonja. Minden forgatás előtt a piros mezőre rak megduplázva az előző tétet. Mennyi a nyereményének a várható értéke? (Az egyszerűség kedvéért tekintsük a *piros* és *fekete* forgatások valószínűségeit $\frac{1}{2}$-nek!)

Megoldás: X a piros forgatáshoz szükséges kísérletszám: $X \in G\left(\frac{1}{2}\right)$.

Y a játékos nyeresége. A nyereség, ha nyer a játékos mindig 1 zseton. A játékos a 10-dik játék után mindegyik zsetonját elveszti: $1+2+4+\cdots+2^{10} = 1023$. $\mathbf{P}(X > 10) = \sum\limits_{k=11}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^{10}} \Rightarrow \mathbf{P}(X \leq 10) = 1 - \frac{1}{2^{10}}$.
$\mathbf{E}Y = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) - \left(2^{10} - 1\right) \cdot \frac{1}{2^{10}} = 0$. A várható nyereség tehát 0 zseton!

II.8.30. Feladat: Egy réten három szarvas legelészik gyanútlanul. Egymásról nem tudva három vadász lopakodik a tisztáshoz, és egyszerre tüzelnek a vadakra. Mindegyik lövés talál, és halálos.

Mennyi a lövések után a rétről elszaladó szarvasok számának várható értéke és szórása? (Elvileg több vadász is lőhet ugyanarra a szarvasra...)

Megoldás: X az elfutó szarvasok száma: $X \in \{0,1,2\}$.
$\mathbf{P}(X=2) = \mathbf{P}$ („Mindegyik vadász ugyanazt a szarvast lövi le”) $= \frac{3}{27}$,
$\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}$ („Mindegyik vadász más-más a szarvasra lő”) $= \frac{6}{27}$,
$\mathbf{P}(X=1) = 1 - \mathbf{P}(X=0) - (X=2) = \frac{18}{27}$,
$\mathbf{E}X = \frac{8}{9}, \mathbf{E}X^2 = \frac{10}{9}, \sigma^2 X = \frac{26}{81}$.

II.8.1. Gyakorlat: Az egységnényzeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P és a hozzá legközelebb álló csúcs távolságát. Adja meg X eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

II.8.2. Gyakorlat: Legyen $X \in E(\lambda)$ és $Y = X^2$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

II.8.3. Gyakorlat: Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$. Legyen $Y = \max\{0, X\}, Z = \min\{0, -X\}, V = |X|$,és $W = -X$. Fejezze ki Y, Z, V és W eloszlásfüggvényét $F(x)$-szel!

II.8.4. Gyakorlat: A $(0, 1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Határozzuk meg a középső pont $0-$tól való távolságának eloszlásfüggvényét!

II.8.5. Gyakorlat: Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk egy lapot. Legyen X a kihúzott lap értéke. Adja meg és ábrázolja X eloszlásfüggvényét! Számolja ki a $7,5 < X < 10,2$ esemény valószínűségét!

II.8.6. Gyakorlat: Legyen $X \in U(0, 1)$ és $Y = \sqrt{2X}$. Adja meg Y sűrűségfüggvényét!

II.8.7. Gyakorlat: Egy háztartási gép gyári önköltsége 10 000 Ft. A termékre a gyár 1 év garanciát ad, ami szerint a hibás gépet ingyen kicseréli, amennyiben az 1 éven belül meghibásodik. A gyár szakemberei szerint a gép élettartama 30 év várható értékű exponenciális eloszlású. A termelői ár a gép önköltsége plussz a garanciális cserék önköltségének várható értéke. Mekkora legyen a termelői ár?

II.8.8. Gyakorlat: $X \in E(2)$ segítségével generáljon egy $Y \in G\left(\frac{1}{3}\right)$ valószínűségi változót!

II.8.9. Gyakorlat: Egy gyártmánynak az egy százaléka selejtes. A darabokat ezresével dobozokba csomagolják. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott dobozban nincs háromnál több hibás?

II.8.10. Gyakorlat: Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, míg meg nem kapjuk a második *fej*et is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első *fej* után a második *fej*ig ugyanannyi dobásra van szükség, mint ahány dobás kellett az első *fej*ig?

II.8.11. Gyakorlat: Tekintsük az $f(x) = \frac{3x^2}{7}, x \in [1,2]$ sűrűségfüggvényt! Az $X \in U(0,1)$ segítségével állítsunk elő olyan Y valószínűségi változót, amelynek sűrűségfüggvénye éppen $f(x)$!

II.8.12. Gyakorlat: Milyen b értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2}, x \in (2,3)$ függvény sűrűségfüggvény?

II.8.13. Gyakorlat: Egy normális eloszlású valószínűségi változó $0,1$ valószínűséggel vesz fel $10,2$-nél kisebb értéket, és $0,25$ valószínűséggel $13,6$-nál nagyobb értéket. Mennyi a várható értéke és szórása?

II.8.14. Gyakorlat: Egy számítógépes szervízben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson-eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon három, vagy háromnál több reklamáció érkezik?

II.8.15. Gyakorlat: Legyen $X \in U(a,b)$ és $Y = X^n$. Adja meg Y eloszlásfüggvényét!

II.8.16. Gyakorlat: Egy üteg addig tüzel egy célpontra, amíg el nem találja. A találat valószínűsége minden lövésnél p. Mennyi az egy találathoz szükséges átlagos lőszerkészlet, a *muníció*?

II.8.17. Gyakorlat: Az A könyvben az egy oldalon található sajtóhibák száma $X \in Po(1)$, míg a B könyvben ugyanez $Y \in Po(2)$. Igaz-e a következő két állítás egyszerre: (i) Az A könyvben háromszor annyi sajtóhiba van mint a B könyvben. (ii) A B könyvben ötször akkora egy hibamentes oldalnak a valószínűsége, mint az A könyvben?

II.8.18. Gyakorlat: A boltban árult izzók 1%-a hibás. Ha veszünk 100 darabot, akkor hány darab lesz benne rossz a legnagyobb valószínűséggel, és mekkora ez a valószínűség?

II.8.19. Gyakorlat: Egy 1 MFt önköltségű számítógép termelői árát kell meghatározni. A számítógép élettartama *exponenciális* eloszlású 10 év várható értékkel. Garanciát vállalunk úgy, hogy ha az első évben a gép elromlik, akkor kicseréljük, ha a második is elromlik egy éven belül, akkor visszaadjuk a gép árát. A termelői ár legyen az az érték, mely mellett a kiadás és a bevétel várható értéke megegyezik. (A visszavett gépek értéktelenek.)

II.8.20. Gyakorlat: Egy mérés elvégzéséhez két lehetőségünk van. Vagy egy drága készülékkel mérünk egyet, ahol a mérés hibája $N(0,1)$ eloszlású, vagy egy olcsó készülékkel mérünk háromszor, és a méréseredményeket átlagoljuk, ahol viszont a mérés hibája már $N(0,1,6)$ eloszlású. Melyik mérési technika adja a pontosabb mérést?

II.8.21. Gyakorlat: Egy dobozban a szivárvány hét színével egyező színű golyók vannak. Addig húzzuk ki a golyókat visszatevéssel a dobozból, amíg valamennyi színű golyót ki nem húztunk egyszer. Mi az ehhez szükséges X húzásszám eloszlása?

II.8.22. Gyakorlat: Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, sűrűségfüggvénye pedig $f(x)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{E}F(X) = \frac{1}{2}$.

II.8.23. Gyakorlat: Legyen X logisztikus eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye: $f_X(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}, x \in \mathbb{R}$. Számolja ki az X mediánját, vagyis azt az M_X számot, amelyre $\mathbf{P}(X < M_X) = \mathbf{P}(X \geq M_X) = \frac{1}{2}$ teljesül.

II.8.24. Gyakorlat: Legyen $X \in \{0,1,2,\ldots\}$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{E}X = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq i)$.

II.8.25. Gyakorlat: Legyen az X valószínűségi változó olyan, hogy $\mathbf{P}(0 < X < 1) = 1$. Bizonyítsa be, hogy $\sigma^2 X < \mathbf{E}X$!

II.8.26. Gyakorlat: Egy baromfiudvarban a gondozó gyűrűjéről leeső értékes követ az egyik liba lenyelte. A gondozó kénytelen a libák levágásával megpróbálni visszaszerezni a követ. Addig vágja le a véletlenszerűen elkapott libákat, amíg valamelyik begyében meg nem találja a követ. Ha összesen 50 liba van a farmon, mennyi a kényszerűségből levágott libák számának várható értéke?

II.8.27. Gyakorlat: Legyen $P = (a,b)$ az egységnégyzet egy véletlenül kiválasztott pontja. Jelölje Xa Ppont origótól vett euklideszi távolságát. Mennyi X várható értéke?

II.8.28. Gyakorlat: Legyen $X \in B\left(3, \frac{1}{4}\right)$ és $Y = X^3$. Mi Y eloszlása, és mennyi a várható értéke?

II.8.29. Gyakorlat: Az origóból kiindulva egy bolha ugrál a számegyenesen. Minden ugrása egységnyi hosszú és a többitől függetlenül p valószínűséggel jobbra, $1-p$ valószínűséggel balra történik. Az ötödik ugrás után megfigyeljük a bolha helyét. Adja meg ennek az eloszlását!

II.8.30. Gyakorlat: Az X normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke -5 és tudjuk, hogy $\mathbf{P}(-5 \leq X < 0) = 0,3$. Mennyi $\mathbf{P}(-5 < X < 4)$?

II.8.31. Gyakorlat: Létezik-e az $F(x) = x \ln x - x + 1, x \in [1, e]$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változónak második momentuma?

II.8.32. Gyakorlat: Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f_X(x) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2x}, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{2x}{3\mathrm{e}^2}, & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$
. Mennyi $\mathbf{E}X$?

II.8.33. Gyakorlat: Egy szabályos pénzérmét addig dobok fel ismételten, amíg két fejet, vagy két írást nem kapok. Mennyi a dobások számának várható értéke és szórása?

II.8.34. Gyakorlat: Legyen $X \in E(\lambda)$, ahol $\lambda = 0,1$és $Y = [X]$, azaz X egészrésze. Mennyi az Y diszkrét valószínűségi változó várható értéke?

II.8.35. Gyakorlat: Egy játékos rulettezik. Három tétet tesz meg: egy-egy 100 Ft-os zsetont tesz a fekete 13 számra, a fekete mezőre és a páratlan mezőre. Ötször megismételve ezt a stratégiát, mennyi a játékos nyereségének (veszteségének) várható értéke? (A rulettárcsán 0-tól 36-ig állnak a számok, 18 fekete, 18 piros, a 0-ás zöld színű.A fekete számok között 9 db páros és 9 db páratlan van. Ha valaki számra tesz, a tétet és még annak 36-szorosát sepri be. A fekete vagy páratlan mezőkön a nyereség kétszeres. A 0-ra nem lehet fogadni. Ha 0-ás pörög ki, minden megrakott tétet a bank viszi el.)

III. fejezet

Valószínűségi vektorváltozók

III.1. Valószínűségi vektorváltozók, valószínűségi változók együttes eloszlása

Nagyon gyakran nem lehet a véletlen jelenséget egyetlen számadattal jellemezni. Pl. amikor az időjárási helyzetet próbálják előrejelezni, megadják a várható hőmérséklet, csapadékmennyiség, légnyomás, szélerősség stb. adatokat, azaz a prognosztizált helyzetet egy vektorral jellemzik. A vektor komponensei valószínűségi változók, értékeik a véletlentől függnek. Felmerülhet az egyes komponensek között fennálló kapcsolatok kérdése is.

III.1.1. Definíció: Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Tekintsük az $\underline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ függvényt! Az $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó, ha minden $B \in \mathfrak{B}^p$ p-dimenziós Borel-halmazra $\{\omega;\ \underline{X}(\omega) \in B\} \in \Im$ teljesül.

Megjegyzés: $\mathfrak{B}^p$ a $B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_p$ alakú halmazok által generált σ-algebra, ahol $B_i \in \mathfrak{B}$ tetszőleges egydimenziós Borel-halmaz.

III.1.2. Definíció: A $Q_{\underline{X}}(B) = \mathbf{P}(\{\omega;\ \underline{X}(\omega) \in B\})$, $B \in \mathfrak{B}^p$ az $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó *eloszlás*a.

III.1.3. Definíció: Legyen $(x_1, x_2, \ldots, x_p)^T = \underline{x} \in \mathbb{R}^p$, és a hozzátartozó p-dimenziós Borel-halmaz $B_{\underline{x}} = (-\infty\,,\, x_1\,) \times (-\infty\,,\, x_2\,) \times \cdots \times (-\infty\,,\, x_p\,)$. Ekkor az $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = F_{X_1,X_2,\ldots,X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = Q_X(B_{\underline{x}}) =$

$= \mathbf{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_p < x_p)$ függvényt az $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó *eloszlásfüggvényének*, illetve az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ komponens valószínűségi változók *együttes eloszlásfüggvényének* nevezzük.

III.1.1. Tétel: Az $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó eloszlása és eloszlásfüggvénye kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

Megjegyzés: A tételt nem bizonyítjuk.

III.1.2. Tétel: *(Az együttes eloszlásfüggvény tulajdonságai)*

a.) $F_{\underline{X}}$ minden változójában monoton nem csökkenő függvény, azaz $\forall\ i$ -re, ha $x_i^* < x_i^{**}$, akkor $F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i^*, \ldots, x_p) \leq F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i^{**}, \ldots, x_p)$.

b.) $F_{\underline{X}}$ minden változójában balról folytonos függvény, azaz $\lim\limits_{y \to x_i^0 - 0} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, y, \ldots, x_p) = F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i^0, \ldots, x_p)$.

c.) $\lim\limits_{\forall x_i \to +\infty} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 1$ és $\lim\limits_{\exists x_i \to -\infty} F_{\underline{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = 0$.

d.) Az egyszerűség kedvéért csak p=2 esetben modjuk ki ezt a tulajdonságot. (Az általános eset tárgyalását lásd a III.7.1. feladatban.)
Legyen $T = [a, b) \times [c, d)$ tetszőleges $p = 2$ dimenziós tégla. Ekkor
$F_{\underline{X}}(a, c) + F_{\underline{X}}(b, d) - F_{\underline{X}}(a, d) - F_{\underline{X}}(b, c) \geq 0$.

Bizonyítás: Az a.), b.) és c.) állítások az egydimenziós esethez, hasonlóan bizonyíthatóak részletezésüktől itt eltekintünk. A d.) állítás nem szerepelt az egydimenziós esetben, ott a neki megfelelő alak a tetszőleges $[a, b)$ intervallum esetén $F_X(b) - F_X(a) \geq 0$, ami a monotonitási tulajdonsággal esik egybe. Többdimenziós esetben szükség van d.)-re, mert pl $p = 2$ esetben az

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_1 + x_2 \leq 0 \\ 1, & \text{ha } x_1 + x_2 > 0 \end{cases}$$

függvény kielégíti a.), b.) és c.)-t, de d.) nem teljesül rá. A bizonyítás azon múlik, hogy megmutatjuk, hogy d.) baloldalán a $\mathbf{P}(\underline{X} \in T)$ valószínűség áll, ami nyilvánvalóan nemnegatív. Definiáljuk az alábbi eseményeket:
$A = \{\omega; X_1(\omega) < a\}$,
$B = \{\omega; X_1(\omega) < b\}$,
$C = \{\omega; X_2(\omega) < c\}$,

$D = \{\omega; X_2(\omega) < d\}$.
Ekkor
$0 \leq \mathbf{P}(\underline{X} \in T) = \mathbf{P}(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 < d) =$
$= \mathbf{P}\left(\bar{A}B\bar{C}D\right) = \mathbf{P}\left(BD\overline{(A+C)}\right) = \mathbf{P}(BD) - \mathbf{P}(BD(A+C)) =$
$= \mathbf{P}(BD) - \mathbf{P}(ABD + BCD) = \mathbf{P}(BD) - \mathbf{P}(ABD) - \mathbf{P}(BCD) + \mathbf{P}(ABCD) \stackrel{*}{=}$
Mivel $A \subseteq B$ és $C \subseteq D$, így az elnyelődés miatt:
$\stackrel{*}{=} \mathbf{P}(BD) - \mathbf{P}(AD) - \mathbf{P}(BC) + \mathbf{P}(AB)$,
ami éppen az állítás. ■

III.1.4. Definíció: Ha $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$ és $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq p$ egy tetszőleges k elemű indexkombináció, akkor az indexekhez tartozó $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k}$ komponens valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye az $F_{\underline{X}}$ egy k-dimenziós *perem-* vagy *vetületi eloszlásfüggvénye*.

III.1.3. Tétel: Ha a $X_1, X_2, \ldots, X_p$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye $F_{\underline{X}}$ ismert, akkor bármely vetületi eloszlásfüggvénye meghatározható. Fordítva általában nem igaz: ha ismerjük az összes alacsonyabb dimenziós vetületi eloszlásfüggvényt, az együttes eloszlásfüggvény nem állítható elő.

Bizonyítás: A részletes bizonyítást a valószínűség folytonossági tulajdonságával lehetne elvégezni. Ekkor az látható be, hogy
$$F_{X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \lim_{\substack{\forall x_j \to \infty \\ j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}}} F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Arra, hogy a fordított állítás nem igaz, $p = 2$ esetben adunk ellenpéldát: Legyenek X_1 és X_2 olyan valószínűségi változók, melyek csak a $-1, 0$ és $+1$ értékeket vehetik fel az alábbi eloszlástáblázat szerint

$X_1 \setminus X_2$	-1	0	$+1$	X_1 perem
-1	$0{,}125 + \varepsilon$	0	$0{,}125 - \varepsilon$	0,25
0	0	0,5	0	0,5
$+1$	$0{,}125 - \varepsilon$	0	$0{,}125 + \varepsilon$	0,25
X_2 perem	0,25	0,5	0,25	1

ahol $0 < \varepsilon < 0{,}125$ tetszőleges.

Ekkor $F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \leq -1 \\ 0{,}25, & \text{ha} \quad -1 < x \leq 0 \\ 0{,}75, & \text{ha} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$

a két vetületi eloszlásfüggvény, ami nyilván nem határozza meg az együttes eloszlásfüggvényt, mely az ε paramétert is tartalmazza.

III.1.5. Definíció: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_p$ valószínűségi változók az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn.

a.) $X_1, X_2, \ldots, X_p$ *páronként függetlenek*, ha $\forall\ 1 \leq i < j \leq n$ -re $F_{X_i,X_j}(x,y) = F_{X_i}(x) \cdot F_{X_j}(y)$ teljesül $\forall\ \ x, y \in \mathbb{R}$-re.

b.) $X_1, X_2, \ldots, X_p$ *teljesen függetlenek*, ha $\forall\ 2 \leq k \leq p$ és $\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq p$ indexkombinációra

$$F_{X_{i_1},X_{i_2},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} F_{X_{i_j}}(x_{i_j}), \forall x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in \mathbb{R} \text{ -re.}$$

III.1.4. Tétel: Ha $X_1, X_2, \ldots, X_p$ teljesen függetlenek, akkor páronként is függetlenek. A megfordítás általában nem igaz.

Bizonyítás: A tétel első fele nyilvánvaló, hiszen a teljes függetlenség feltételrendszere a páronkénti függetlenség feltételrendszerét is tartalmazza. Az ellenpélda ugyanazon a példán alapulhat, mint amikor megmutattuk, hogy a páronként független események rendszere nem feltétlenül alkot teljesen független eseményrendszert. (lásd I.4.4 tételt). ■

III.2. Diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása

III.2.1. Definíció:

a.) Ha X és Y diszkrét valószínűségi változók $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ illetve $D = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ értékkészletekkel, akkor az $r_{ij} = \mathbf{P}(\{\omega;\ X(\omega) = x_i\} \cap \{\omega;\ Y(\omega) = y_j\}) \doteq \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$ valószínűségek összességét a két diszkrét valószínűségi változó *együttes eloszlás*ának nevezzük.

b.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ diszkrét valószínűségi változók értékkészleteit jelölje rendre $\mathrm{e}^{(i)} = \left\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, \ldots\right\}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Ekkor az $r_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, X_2 = x_{i_2}^{(2)}, \ldots, X_p = x_{i_p}^{(p)})$ valószínűségek összessége az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ diszkrét valószínűségi változók *együttes eloszlása.*

III.2.2. Definíció: Ha adott az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ diszkrét valószínűségi változók $\left\{r_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, X_2 = x_{i_2}^{(2)}, \ldots, X_p = x_{i_p}^{(p)}) \ , \ \forall i_k\right\}$ együttes eloszlása, és $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq p$, akkor az $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_k}$ diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlását *k-dimenziós vetületi-* vagy *perem-eloszlás*nak nevezzük.

III.2.1. Tétel: A diszkrét valószínűségi változók együttes eloszlása kielégíti az alábbi tulajdonságokat:

a.) $0 \leq r_{i_1,i_2,\ldots,i_p} \leq 1$

b.) $\sum\limits_{\forall i_1,i_2,\ldots,i_p} r_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = 1$

c.) $\mathbf{P}\left(X_{j_1} = x_{j_1}, X_{j_2} = x_{j_2}, \ldots, X_{j_k} = x_{j_k}\right) = \sum\limits_{\forall i_l \notin \{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} r_{i_1,i_2,\ldots,i_p}.$

Bizonyítás:

a.) Nyilvánvaló, hiszen az $A_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \left\{\omega;\ X_1(\omega) = x_{i_1}^{(1)}\right\} \cdot \left\{\omega;\ X_2(\omega) = x_{i_2}^{(2)}\right\} \cdot \cdots \cdot \left\{\omega;\ X_p(\omega) = x_{i_p}^{(p)}\right\}$ esemény valószínűségéről van szó.

b.) Mivel az $A_{i_1,i_2,\ldots,i_p}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, igaz az állítás.

c.) A folytonossági tétel következménye ez a tulajdonság, melynek részletezésétől eltekintünk. Speciálisan, az állítás $p = 2$ esetben:
$\mathbf{P}(X = x_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$ és $\mathbf{P}(Y = y_j) =$
$= \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j).$ ■

III.2.2. Tétel:

a.) Az X és Y diszkrét valószínűségi változók függetlenek, ha $\forall\, i, j$-re $\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbf{P}(X = x_i) \cdot \mathbf{P}(Y = y_j).$

b.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ diszkrét valószínűségi változók teljesen függetlenek, ha $\forall\, 2 \leq k \leq p$-re és $\forall\, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq p$ esetén
$$\mathbf{P}\left(X_{j_1} = x_{j_1}, X_{j_2} = x_{j_2}, \ldots, X_{j_k} = x_{j_k}\right) = \prod_{\alpha=1}^{k} \mathbf{P}\left(X_{j_\alpha} = x_{j_\alpha}\right).$$

Bizonyítás: A bizonyítást nem részletezzük, csak annyit jegyzünk meg, hogy az X_i valószínűségi változók teljes függetlensége ekvivalens a kapcsolatos $A_i = \{\omega;\ X_i(\omega) = x_i\}$ nívóesemények teljes függetlenségével.

III.2.1. Példa: *(Polinomiális eloszlás)*
Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A_1, A_2, \ldots, A_r \in \Im$ egy r eseményből álló teljes eseményrendszer, azaz $A_i \cdot A_j = \emptyset$, $\sum\limits_{i=1}^{r} A_i = \Omega$. Ekkor, ha $0 < \mathbf{P}(A_i) = p_i$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$. Hajtsunk végre egy n-szeres kísérletsorozatot. Vegye fel X_i azt az értéket, ahányszor A_i bekövetkezett a kísérletsorozatban. Az $X_1, X_2, \ldots, X_r$ valószínűségi változók együttes eloszlását $n, p_1, p_2, \ldots, p_r$ paraméterű polinomiális eloszlásnak nevezzük. Az X_i valószínűségi változók értékei a $0, 1, 2, \ldots, n$ számok közé esnek. Az $X_1, X_2, \ldots, X_r$ valószínűségi változók értékei között szoros összefüggés van: $\sum\limits_{i=1}^{r} X_i = n$. Az $X_1, X_2, \ldots, X_r$ valószínűségi változók együttes eloszlása:
$\mathbf{P}(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$. A fenti valószínűségek valóban eloszlást alkotnak, hiszen:
$$\sum_{\substack{\forall k_i = 0 \\ k_1+k_2+\cdots+k_r = n}}^{n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r} = (p_1 + p_2 + \cdots + p_r)^n = 1.$$

Megjegyzés: A binomiális eloszlás speciális polinomiális eloszlás, amikor $r = 2$. A teljes eseményrendszer ilyenkor A és az ellentettje. Tehát a polinomiális eloszlás a binomiális eloszlás többdimenziós kiterjesztése. A polinomiális eloszlás X_i komponensei egyenként $B(n, p_i)$ eloszlásúak, azaz a polinomiális eloszlás egydimenziós peremeloszlásai binomiálisak.

III.3. Folytonos valószínűségi változók együttes eloszlása

III.3.1. Definíció: Az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ folytonos valószínűségi változók *együttes sűrűségfüggvény*én azt az $f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ Riemann-integ-

rálható függvényt értjük, melyre:
$F_{X_1,X_2,\dots,X_p}(x_1,x_2,\dots,x_p)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\cdots\int\limits_{-\infty}^{x_p} f_{X_1,X_2,\dots,X_p}(t_1,t_2,\dots,t_p)dt_p dt_{p-1}\cdots dt_1$,
azaz $\frac{\partial^p F_{X_1,X_2,\dots,X_p}(x_1,x_2,\dots,x_p)}{\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_p}=f_{X_1,X_2,\dots,X_p}(x_1,x_2,\dots,x_p)$, ha $\underline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_p)^T$ folytonossági pontja $f_{X_1,X_2,\dots,X_p}(x_1,x_2,\dots,x_p)$-nek.

III.3.2. Definíció: Az $f_{X_1,X_2,\dots,X_p}(x_1,x_2,\dots,x_p)$ együttes sűrűségfüggvény egy *k-dimenziós vetületi sűrűségfüggvényén* $(2\le k\le p-1)$ valamely $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le p$ indexkombinációra az $X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k}$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét értjük.

III.3.1. Tétel: $f_{X_{i_1},X_{i_2},\dots,X_{i_k}}(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k})=$
$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\dots,X_p}(t_1,t_2,\dots,t_p)dt_{j_1}dt_{j_2}\cdots dt_{j_{p-k}}$ azaz az együttes sűrűségfüggvényt az összes többi — a kiválasztott index kombinációban nem szereplő — indexhez tartozó változóra kell kiintegrálni a teljes számegyenesen, hogy előállítsuk a k-dimenziós vetületi sűrűségfüggvényt
$\{j_1,j_2,\dots,j_{p-k}\notin\{i_1,i_2,\dots,i_k\}$.

Bizonyítás: A III.1.3 tétel egyszerű következménye. ■

III.3.1. Példa: *(A kétdimenziós normális eloszlás)*
Ha X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$
$x,y\in\mathbb{R}$ alakú, akkor a két valószínűségi változó együttes eloszlása kétdimenziós normális, ahol a peremeloszlásokra $X\in N(\mu_1,\sigma_1),Y\in N(\mu_2,\sigma_2)$ teljesül. Ugyanis megmutatható, hogy

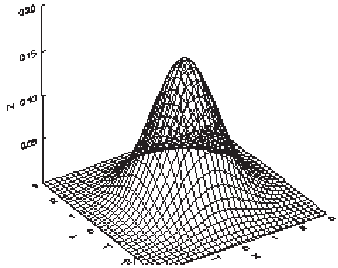
$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_1\cdot\sqrt{1-\varrho^2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\cdot\sigma_1^2(1-\varrho^2)}\cdot\left[x-\left(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho(y-\mu_2)\right)\right]^2}.$$

Így pl. $f_Y(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x=$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_1\cdot\sqrt{1-\varrho^2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\cdot\sigma_1^2(1-\varrho^2)}\cdot\left[x-\left(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho(y-\mu_2)\right)\right]^2}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Az integrál mögött az $N\left(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho(y-\mu_2),\sigma_1\cdot\sqrt{1-\varrho^2}\right)$ eloszlás sűrűségfüggvénye áll, így az integrál értéke 1.



III.3.1 ábra A kétdimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye. A szimmetria tengelyt tartalmazó síkmetszetei haranggörbék, a szimmetriatengelyre merőleges síkmetszetek pedig ellipszisek.

III.3.2. Tétel: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_p$ folytonos valószínűségi változók az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn.

a.) $X_1, X_2, \ldots, X_p$ páronként függetlenek $\Longleftrightarrow \forall\ 1 \le i < j \le n$ -re $f_{X_i,X_j}(x,y) = f_{X_i}(x) \cdot f_{X_j}(y)$ teljesül $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ -re.

b.) $X_1, X_2, \ldots, X_p$ teljesen függetlenek $\Longleftrightarrow \forall\ 2 \le k \le p$ és $\forall\, 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le p$ indexkombinációra

$$f_{X_{i_1},X_{i_2},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} f_{X_{i_j}}(x_{i_j}),\ \forall x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k} \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás: Az III.1.5 definícióból egyszerűen deriválással következik az állítás. ■

Megjegyzés: $p = 2$ esetben az előző tételek speciális alakjai:
$\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x,y)$, $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$, $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$,
ha X és Y függetlenek $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})$. ■

III.3.3. Tétel: *(Az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai)*

a.) $f_{X_1,X_2,\ldots,X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) \ge 0$, b.) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1,X_2,\dots,X_p}(t_1,t_2,\dots,t_p)\,dt_p\dots dt_2\,dt_1 = 1.$

Bizonyítás: A III.1.2 tétel a.) és c.) pontjából, valamint az együttes sűrűségfüggvény III.3.1 definíciójából közvetlenül következik. ■

III.4. Valószínűségi vektorváltozók transzformációi

A II.5.2 transzformációs tétel többdimenziós általánosítása az alábbi:

III.4.1. Tétel: Jelölje az $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényét $f_{\underline{X}}(\underline{x})$, amely eltűnik a $D \subseteq \mathbb{R}^p$ tartományon kívül.

Legyen $\underline{u}: D \to H(\subseteq \mathbb{R}^p)$ bijektív (kölcsönösen egy-egyértelmű) transzformáció. Ekkor az $\underline{Y} = \underline{u}(\underline{X})$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvényét az alábbi módon számíthatjuk:

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \begin{cases} f_{\underline{X}}(\underline{u}^{-1}(\underline{y})) \cdot \left|\det(\underline{\underline{J}}(\underline{y}))\right|, & \underline{y} \in H \\ 0, & \underline{y} \notin H \end{cases},$$

ahol $\underline{\underline{J}}(\underline{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^{-1}(\underline{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial u_1^{-1}(\underline{y})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_1^{-1}(\underline{y})}{\partial y_p} \\ \frac{\partial u_2^{-1}(\underline{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial u_2^{-1}(\underline{y})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_2^{-1}(\underline{y})}{\partial y_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_p^{-1}(\underline{y})}{\partial y_1} & \frac{\partial u_p^{-1}(\underline{y})}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial u_p^{-1}(\underline{y})}{\partial y_p} \end{pmatrix}$ a leképezés Jacobi-mátrixa.

Bizonyítás: Legyen D egy tetszőleges p-dimenziós Borel-halmaz, $\underline{u}^{-1}(D) = B$ pedig az ősképe, vagyis az a p-dimenziós Borel-halmaz, melyet $\underline{u}$ D-re képez. Ekkor nyilván $\mathbf{P}(\underline{Y} \in D) = \mathbf{P}(\underline{X} \in \underline{u}^{-1}(D)) = \mathbf{P}(\underline{X} \in B)$. A sűrűségfüggvények segítségével: $\mathbf{P}(\underline{Y} \in D) = \int\limits_D f_{\underline{Y}}(\underline{y})\,d\underline{y}$, másrészt

$$\mathbf{P}(\underline{X} \in \underline{u}^{-1}(D)) = \int\limits_{\underline{u}^{-1}(D)} f_{\underline{X}}(\underline{x})\,d\underline{x} = \int\limits_D f_{\underline{X}}(\underline{u}^{-1}(\underline{y})) \cdot \left|\det(\underline{\underline{J}}(\underline{y})\right|\,d\underline{y}.$$

A két integrál összehasonlításából már következik az állítás. ■

III.4.2. Tétel: *(Két folytonos valószínűségi változó összegének eloszlása)*

Legyen X és Y valószínűségi változó az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Jelölje $f_{X,Y}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvényüket. Ekkor a

$Z = X + Y$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:
$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, x-t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x-t, t)\, dt.$
Ha X és Y függetlenek is, akkor
$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(x-t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) \cdot f_Y(t) dt.$
Ez utóbbi esetben f_Z az f_X és f_Y sűrűségfüggvények *konvolúciója.*

Bizonyítás: Alkalmazzuk a III.4.1 tételt az

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = u_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2 \\ y_2 = u_2(x_1,x_2) = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 - y_2 = u_1^{-1}(y_1,y_2) = x_1 \\ y_2 = u_2^{-1}(y_1,y_2) = x_2 \end{array}\right.$$

szereposztással. Ilyenkor $\underline{\underline{J}}(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, így $\left|\det(\underline{\underline{J}}(y_1,y_2))\right| = 1.$
A $Z = X + Y$ és Y együttes sűrűségfüggvénye:
$f_{Z,Y}(y_1,y_2) = f_{X,Y}(y_1 - y_2, y_2) \cdot 1.$

Innen Z sűrűségfüggvényét a III.3.1 tételt felhasználva számolhatjuk:
$f_Z(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,Y}(y_1,y_2)\,\mathrm{d}y_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(y_1-y_2,y_2)\,\mathrm{d}y_2.$

Az utóbbi integrálban az $y_1 - y_2 = t$ változótranszformációval kapjuk az $f_Z(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, y_1 - t)\ dt$ képletet. Ha X és Y függetlenek, akkor a III.3.2 tételből kapjuk, hogy $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, így
$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(x-t) dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t) \cdot f_Y(t) dt.$ ■

Megjegyzés:

a.) Az előző tétel egy másik bizonyítása az alábbi:
$F_Z(z) = \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(X + Y < z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$ Mindkét oldalt z szerint deriválva kapjuk meg a sűrűségfüggvényt:
$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d}{dz}\int\limits_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x)\,\mathrm{d}x.$

b.) Mivel független esetben az összeg sűrűségfüggvényére a két komponens sűrűségfüggvényeinek konvolúcióját kaptuk, független valószínűségi változók esetén az összeg valószínűségi változót a komponens változók *konvolúciójának* is nevezzük.

III.4.1. Példa: Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = X + Y$! Számoljuk ki Z sűrűségfüggvényét!

$Z \in (0,2)$ lehet csak. Legyen $z \in (0,2)$ tetszőleges. A konvolúciós képletből:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x) f_Y(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\max\{0,z-1\}}^{\min\{1,z\}} 1 \cdot 1\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int\limits_0^z 1\,\mathrm{d}x = z, & \text{ha } z \in (0,1) \\ \int\limits_{z-1}^1 1\,\mathrm{d}x = z, & \text{ha } z \in (1,2) \\ 0, & \text{ha } z \notin (0,2) \end{cases}.$$

III.4.3. Tétel: *(Két folytonos valószínűségi változó különbségének eloszlása)*

Legyen X és Y valószínűségi változó az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Jelölje $f_{X,Y}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvényüket. Ekkor a $Z = X - Y$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, x+t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x+t, t)\,dt.$$

Ha Xés Y függetlenek is, akkor

$$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(x+t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x+t) \cdot f_Y(t) dt.$$

Bizonyítás: A III.4.2 tételhez hasonlóan, az $y_1 = u_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ módosítással. ■

III.4.4. Tétel: *(Diszkrét valószínűségi változók összegének eloszlása)* Ha X és Y diszkrét nemnegatív egészértékű valószínűségi változók, akkor $Z = X + Y$ szintén diszkrét nemnegatív egészértékű valószínűségi változó, melynek eloszlása: $\mathbf{P}(Z = k) = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} \mathbf{P}(X = \alpha, Y = k - \alpha) =$

$= \sum\limits_{\alpha=0}^{k} \mathbf{P}(X = k - \alpha, Y = \alpha), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

Ha még az is igaz, hogy X és Y függetlenek, akkor

$$\mathbf{P}(Z = k) = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} \mathbf{P}(X = \alpha)\mathbf{P}(Y = k - \alpha) = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} \mathbf{P}(X = k - \alpha)\mathbf{P}(Y = \alpha),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots.$

Bizonyítás: $\{\omega;\ Z(\omega) = k\} = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} \{\omega;\ X(\omega) = \alpha, Y(\omega) = k - \alpha\}$, és a komponensesemények egymást páronként kizárják. Így a valószínűség σ-

additív tulajdonságából (ld. I.1.2 axiómák, 2^o tulajdonság) már következik az állítás.

III.4.2. Példa: Legyenek $X \in Po(\lambda)$, $Y \in Po(\mu)$ függetlenek (ld. II.3.3. példát!). Akkor

$$\mathbf{P}(X+Y=k) = \sum_{\alpha=0}^{k} \mathbf{P}(X=\alpha)\mathbf{P}(Y=k-\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{\lambda^\alpha}{\alpha!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\mu^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\mathrm{e}^{-\mu} =$$
$$= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \cdot \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{k!}{\alpha!\cdot(k-\alpha)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-\alpha} =$$
$$= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k =$$
$$= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \cdot 1, \quad k=0,1,2,\ldots, \text{ azaz } X+Y \in Po(\lambda+\mu).$$

III.4.5. Tétel:

a.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ diszkrét valószínűségi változók értékkészleteit jelölje rendre $R^{(i)} = \left\{x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, \ldots\right\}$ $(i=1,2,\ldots,p)$, együttes eloszlásukat pedig $\{r_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, X_2 = x_{i_2}^{(2)}, \ldots, X_p = x_{i_p}^{(p)})\}$.
Legyen $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tetszőleges p-változós valós függvény. Ekkor az $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ valószínűségi változó, és létezik a várható értéke:
$\mathbf{E}Y = \sum\limits_{\forall(i_1,i_2,\ldots,i_p)} g\left(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}\right)\mathbf{P}(X_1 = x_{i_1}^{(1)}, X_2 = x_{i_2}^{(2)}, \ldots, X_p = x_{i_p}^{(p)})$.

b.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_p$ folytonos valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét jelölje $f_{X_1,X_2,\ldots,X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Legyen $g: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ tetszőleges p-változós valós függvény. Ekkor az $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ valószínűségi változó, és létezik a várható értéke:
$$\mathbf{E}Y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_p)\cdot f_{X_1,X_2,\ldots,X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,\mathrm{d}x_p \cdots \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1.$$

Bizonyítás:
Diszkrét eset:
Legyen a diszkrét $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ vektorértékű valószínűségi változó értékkészlete a V megszámlálható vektorhalmaz, az $Y = g(\underline{X})$ diszkrét valószínűségi változóé pedig $W = \{y;\ y = g(\underline{x}), \underline{x} \in V\}$.
Ekkor definíció szerint:

$$\mathbf{E}Y = \sum_{y \in W} y\mathbf{P}(Y = y) = \sum_{y \in W} y \sum_{\underline{x} \in V : g(\underline{x}) = y} \mathbf{P}(\underline{X} = \underline{x}) =$$
$$= \sum_{y \in W} \sum_{\underline{x} \in V : g(\underline{x}) = y} g(\underline{x})\, \mathbf{P}(\underline{X} = \underline{x}) = \sum_{\underline{x} \in V} g(\underline{x})\, \mathbf{P}(\underline{X} = \underline{x}).$$

Folytonos eset:

A III.4.1. tételt alkalmazzuk, arra az $\underline{u} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ transzformációra, ahol

$$\begin{array}{lll} Y & = u_1(X_1, X_2, \ldots, X_p) & = g(X_1, X_2, \ldots, X_p) \\ X_2 & = u_2(X_1, X_2, \ldots, X_p) & = X_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_p & = u_p(X_1, X_2, \ldots, X_p) & = X_p \end{array}.$$

Az inverztranszformáció Jacobi determinánsának abszolútértéke most $\left|\frac{\partial g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p)}{\partial y}\right|$ lesz, így $f_{Y, X_2, \ldots, X_p}(y, x_2, \ldots, x_p) =$

$$= \begin{cases} f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}\left(g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p\right) \left|\frac{\partial g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p)}{\partial y}\right|, & \text{ha } y = g(x_1, x_2, \ldots, x_p \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

amiből a III.3.1. tételt felhasználva integrálással kapjuk:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}\left(g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p\right) \left|\frac{\partial g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p)}{\partial y}\right| \mathrm{d}x_p \cdots \mathrm{d}x_2.$$

Így

$$\mathbf{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\, \mathrm{d}y =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}\left(g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p\right) \left|\frac{\partial g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p)}{\partial y}\right| \mathrm{d}x_p \cdots \mathrm{d}x_2 \right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}\left(g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p), x_2, \ldots, x_p\right) \left|\frac{\partial g^{-1}(y, x_2, \ldots, x_p)}{\partial y}\right| \mathrm{d}x_p \cdots \mathrm{d}x_2 dy =$$

végrehajtva az $y = g(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ változótranszformációt az integrálban, máris igazoltuk az állítást:

$$y = g(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, \mathrm{d}x_p \cdots \mathrm{d}x_1$$

III.4.6. Tétel: Az $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_p$ valószínűségi változó várható értéke létezik, amennyiben a X_i tagok várható értéke létezik, és $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_2 + \cdots + \mathbf{E}X_p$.

Bizonyítás: Az előző tétel következménye, amikor $g(x_1, x_2, \ldots, x_p) = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$. ■

III.4.7. Tétel: Legyenek az X és Y valószínűségi változók függetlenek, és létezzék a várható értékük. Ekkor a $Z = XY$ valószínűségi változónak is létezik a várható értéke, és $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a III.4.5 tételt $g(x,y) = x \cdot y$ -ra!

a.) diszkrét eset:

$$\mathbf{E}Z = \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} x_i y_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{\forall x_i} \sum_{\forall y_j} x_i y_j \mathbf{P}(X = x_i)\mathbf{P}(Y = y_j) =$$
$$= \left(\sum_{\forall x_i} x_i \mathbf{P}(X = x_i) \right) \cdot \left(\sum_{\forall y_j} y_j \mathbf{P}(Y = y_j) \right) = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y.$$

b.) folytonos eset:

$$\mathbf{E}Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_X(x) f_Y(y)\, \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, \mathrm{d}x \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, \mathrm{d}y \right) = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y. \blacksquare$$

III.4.8. Tétel: Legyenek az X és Y valószínűségi változók függetlenek, és létezzék a szórásnégyzetük. Ekkor $\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y$.

Bizonyítás: $\sigma^2(X \pm Y) = \mathbf{E}(X \pm Y)^2 - [\mathbf{E}(X \pm Y)]^2 =$
$= \mathbf{E}\left[X^2 \pm 2X \cdot Y + Y^2\right] - [(\mathbf{E}X)^2 \pm 2\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y + (\mathbf{E}Y)^2] =$
$= \mathbf{E}X^2 \pm 2\mathbf{E}(X \cdot Y) + \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}X)^2 \mp 2\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y - (\mathbf{E}Y)^2 =$
$= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 + \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2 = \sigma^2 X + \sigma^2 Y.$

Felhasználtuk a III.4.7 tétel állítását, miszerint függetlenség esetén $\mathbf{E}(X \cdot Y) = (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y)$. $\blacksquare$

III.5. A kovariancia és a korrelációs együttható

III.5.1. Definíció: Legyenek X és Y valószínűségi változók az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Tegyük fel, hogy létezik a szórásnégyzetük. Ekkor az X és Y *kovarianciáján* a $Z = (X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y)$ valószínűségi változó várható értékét értjük.

Jelölés: $\mathbf{cov}(X,Y) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y)\right]$.

Megjegyzés: $\mathbf{cov}(X,X) = \sigma^2 X$.

III.5.2. Definíció: Az X és Y valószínűségi változók *korrelációs együtthatóján* standardizáltjaik kovarianciáját értjük.

Jelölés: $\mathbf{R}(X,Y) = \mathbf{cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sigma X \cdot \sigma Y}$.

III.5.1. Tétel: $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y)$.

Bizonyítás: $\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y)) =$
$= \mathbf{E}(X \cdot Y - X \cdot \mathbf{E}Y - Y \cdot \mathbf{E}X + (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y)) =$
$= \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y) - (\mathbf{E}Y) \cdot (\mathbf{E}X) + (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y) =$
$= \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y)$. ∎

III.5.2. Tétel: Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{cov}(X, Y) = 0$ és $\mathbf{R}(X, Y) = 0$. A tétel megfordítása általában nem igaz.

Bizonyítás: A tétel a III.4.7 és a III.5.1 tételek egyszerű következménye. A megfordításra két ellenpélda:

Legyen X és Y diszkrét valószínűségi változó, $-1, 0, 1$ értékkészletekkel. Együttes eloszlásukat az alábbi táblázatban láthatjuk:

$Y \setminus X$	-1	0	$+1$	Y perem
-1	0	0,25	0	0,25
0	0,25	0	0,25	0,5
$+1$	0	0,25	0	0,25
X perem	0,25	0,5	0,25	1

$\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$,
$\mathbf{E}(X \cdot Y) = (-1) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$,
$\mathbf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y) = 0$. X és Y nem függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{4} \neq \mathbf{P}(X = 0) \cdot \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

Folytonos esetre ellenpélda:
$X \in U(0, 2\pi)$, azaz a $(0, 2\pi)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. $Y = \sin X$ és $Z = \cos X$. Határozzuk meg $\mathbf{cov}(Y, Z)$-t!

$\mathbf{E}Y = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \cos 2\pi}{2\pi} = 0, \mathbf{E}Z = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 2\pi}{2\pi} = 0,$

$\mathbf{E}(YZ) = \mathbf{E}(\sin X \cos X) = 0,5\mathbf{E}(\sin 2X) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin 2x \, \mathrm{d}x = \frac{1 - \cos 4\pi}{8\pi} = 0.$

Így $\mathbf{cov}(Y, Z) = 0$, de nem függetlenek, hiszen $\mathbf{P}(Y^2 + Z^2 = 1) = 1$. Ha Y és Z függetlenek lennének, akkor az $Y^2 + Z^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét az $f_{Y^2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(f_Y\left(\sqrt{y}\right) + f_Y\left(-\sqrt{y}\right) \right)$, $y \in (0, 1)$ sűrűségfüggvény önmagával való konvolválásával lehetne kiszámítani, ahol $f_Y(y) = f_Z(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$, $y \in (-1, 1)$ a két komponens azonos sűrűségfüggvénye. Ekkor viszont $\mathbf{P}(Y^2 + Z^2 = 1) = 0$-nak kellene fennállnia! (Ld. a II.2.1 következményt!) ∎

III.5.3. Definíció: Az X és Y valószínűségi változók *korrelálatlanok*, ha $\mathbf{R}(X,Y) = \mathbf{cov}(X,Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X) \cdot (\mathbf{E}Y) = 0$.

Megjegyzés:

a.) A korrelálatlanság a függetlenség szükséges, de nem feltétlenül elégséges feltétele.

b.) Diszkrét esetben a kovariancia számítása:
$\mathbf{cov}(X,Y) = \sum\limits_{\forall i}\sum\limits_{\forall j} x_i y_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) -$
$-(\sum\limits_{\forall i} x_i \mathbf{P}(X = x_i)) \cdot (\sum\limits_{\forall j} y_j \mathbf{P}(Y = y_j))$.
Folytonos esetben a kovariancia számítása:
$\mathbf{cov}(X,Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y\right)$.

III.5.3. Tétel: Ha az X és Y valószínűségi változók szórásnégyzetei léteznek, úgy $\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y \pm 2\mathbf{cov}(X,Y)$.

Bizonyítás:
$\sigma^2(X \pm Y) = \mathbf{E}\left[(X \pm Y)^2\right] - \left[\mathbf{E}(X \pm Y)\right]^2 =$
$= \mathbf{E}\left[X^2 \pm 2XY + Y^2\right] - \left[(\mathbf{E}X)^2 \pm 2(\mathbf{E}X)(\mathbf{E}Y) + (\mathbf{E}Y)^2\right] =$
$= \mathbf{E}X^2 \pm 2\mathbf{E}XY + \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}X)^2 \mp 2(\mathbf{E}X)(\mathbf{E}Y) - (\mathbf{E}Y)^2 =$
$= \sigma^2 X + \sigma^2 Y \pm 2\mathbf{cov}(X,Y)$. ■

III.5.4. Tétel: $\sigma^2(\sum\limits_{i=1}^{p} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{p} \sigma^2 X_i + 2\sum\limits_{i<j} \mathbf{cov}(X_i, X_j)$.

Bizonyítás: $p = 2$-re éppen a III.5.3 tételt kapjuk. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $p \geq 2$ -re! Ekkor
$\sigma^2(\sum\limits_{i=1}^{p+1} X_i) = \sigma^2(\sum\limits_{i=1}^{p} X_i) + \sigma^2 X_{p+1} + 2\mathbf{cov}(\sum\limits_{i=1}^{p} X_i, X_{p+1}) =$
$= \sum\limits_{i=1}^{p+1} \sigma^2 X_i + 2 \sum\limits_{i<j\%i,j=1,2,\ldots,p} \mathbf{cov}(X_i, X_j) + 2\sum\limits_{i=1}^{p} \mathrm{cov}(X_i, X_{p+1}) \Rightarrow$ állítás. ■

III.5.5. Tétel: Tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $\mathbf{cov}(aX + bY, Z) = a\mathbf{cov}\,(X,Z) + b\mathbf{cov}\,(Y,Z)$.

Bizonyítás: $\mathbf{E}\left((aX + bY)Z\right) = a\mathbf{E}(XZ) + b\mathbf{E}(YZ)$ és $\mathbf{E}\,(aX + bY) \cdot \mathbf{E}Z = a\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Z + b\mathbf{E}Y \cdot \mathbf{E}Z$ miatt, a III.5.1. tételre hivatkozva bizonyíthatjuk az állítást. ■

III.5.6. Tétel: Ha az X és Y valószínűségi változók szórásnégyzetei léteznek, akkor $-1 \leq \mathbf{R}(X,Y) \leq 1$.

Bizonyítás: Legyen $\tilde{X} = \frac{X-\mathbf{E}X}{\sigma X}$ és $\tilde{Y} = \frac{Y-\mathbf{E}Y}{\sigma Y}$ a két standardizált valószínűségi változó. $\mathbf{cov}(\tilde{X},\tilde{Y}) = \mathbf{E}\left(\frac{X-\mathbf{E}X}{\sigma X} \cdot \frac{Y-\mathbf{E}Y}{\sigma Y}\right) = \frac{\mathbf{cov}(X,Y)}{\sigma X \cdot \sigma Y} = \mathbf{R}(X,Y)$.
A III.5.3 tételt felhasználva:
$0 \leq \sigma^2(\tilde{X} \pm \tilde{Y}) = \sigma^2\tilde{X} + \sigma^2\tilde{Y} \pm 2\mathbf{cov}(\tilde{X},\tilde{Y}) = 1 + 1 \pm 2R(X,Y) \iff$
$-1 \leq R(X,Y) \leq 1$. ■

Következmény: $|\mathbf{cov}(X,Y)| \leq \sigma X \cdot \sigma Y$.

III.5.7. Tétel: Ha az X és Y valószínűségi változók szórásnégyzetei léteznek, úgy $\mathbf{R}(X,Y) = \pm 1 \quad \iff \exists\, a, b \in \mathbb{R}: \ \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1$.

Bizonyítás:
Legyen $\tilde{X} = \frac{X-\mathbf{E}X}{\sigma X}$ és $\tilde{Y} = \frac{Y-\mathbf{E}Y}{\sigma Y}$ a standardizált valószínűségi változó.
$\exists\, a, b \in \mathbb{R}: \ \mathbf{P}(X = a \cdot Y + b) = 1 \ \Leftrightarrow \ \mathbf{P}(\tilde{X} = \pm\tilde{Y}) = 1 \ \Leftrightarrow$
$0 = \sigma^2(\tilde{X} \mp \tilde{Y}) = 2(1 \mp \mathbf{R}(X,Y)) \ \Leftrightarrow$
$\mathbf{R}(X,Y) = \pm 1$, ráadásul $\mathbf{R}(X,Y) = \mathrm{sgn}(a)$.
A levezetésben felhasználtuk a II.7.2 és III.5.6 tétel eredményeit. ■

III.5.4. Definíció: Az $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó *várható érték vektor*án a komponens valószínűségi változók várható értékeiből álló vektort értjük: $\mathbf{E}\underline{X} = (\mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2, \ldots, \mathbf{E}X_p)^T$.

III.5.5. Definíció: Az $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó *kovarianciamátrix*án a $\underline{\underline{\Sigma}} = (\mathbf{cov}(X_i, X_j))_{\substack{i=1,2,\ldots,p \\ j=1,2,\ldots,p}}$ $p \times p$-s mátrixot értjük.

III.5.8. Tétel: $\underline{\underline{\Sigma}}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, azaz $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^T$ és $\forall\, \underline{a} \in \mathbb{R}^p$-re $\underline{a}^T \underline{\underline{\Sigma}}\, \underline{a} \geq 0$.

Bizonyítás: Legyen $\underline{a} \in \mathbb{R}^p$ tetszőleges!
$\underline{a}^T \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{a} = \mathbf{E}(\underline{a}^T \cdot (\underline{X} - \mathbf{E}\underline{X}) \cdot (\underline{X} - \mathbf{E}\underline{X})^T \cdot \underline{a}) = \mathbf{E}Y^2 \geq 0$, ahol
$Y = \underline{a}^T \cdot (\underline{X} - \mathbf{E}X) = \sum_{i=1}^{p} a_i(X_i - \mathbf{E}X_i)$. ■

III.5.1. Példa: *(A polinomiális eloszlás várhatóérték-vektora és kovarianciamátrix*

A polinomiális eloszlást a III.2.1 példában adtuk meg.
Az $X_1, X_2, \dots, X_r$ valószínűségi változók mindegyikére igaz, hogy $X_i \in B(n, p_i)$, azaz binomiális eloszlásúak. Ezért
$\mathbf{E}\underline{X} = (np_1, np_2, \dots, np_r)^T = n \cdot (p_1, p_2, \dots, p_r)^T = n \cdot \underline{p}$.

A kovarianciamátrixhoz ki kell számolnunk a $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$ kovarianciákat.

$$\mathbf{E}(X_i \cdot X_j) = = \sum_{\substack{\forall k_\alpha \\ k_1+k_2+\dots+k_r=n}} k_i \cdot k_j \cdot \mathbf{P}(X_1 = k_1, \dots, X_i = k_i, \dots, X_j = k_j, \dots, X_r = k_r) =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot p_i \cdot p_j \cdot \sum_{\substack{\forall k_\alpha \\ k_1+\dots+k_r=n}} \frac{(n-2)!}{k_1! \cdots (k_i-1)! \cdots (k_j-1)! \cdots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdots p_i^{k_1-1} \cdots p_j^{k_j-1} \cdots p_r^{k_r} =$$

$= n \cdot (n-1) \cdot p_i \cdot p_j$, mert a szumma mögött az $n-2, p_1, p_2, \dots, p_r$ paraméterű polinomiális eloszlás valószínűségei állnak, melyek összege 1.
Így $\mathbf{cov}(X_i, X_j) = \mathbf{E}(X_i \cdot X_j) - (\mathbf{E}X_i)(\mathbf{E}X_j) = n \cdot (n-1) \cdot p_i \cdot p_j - n \cdot p_i \cdot n \cdot p_j = = -n \cdot p_i \cdot p_j$, ha $i \neq j$. A kovarianciamátrix diagonálisában a biomiális komponensek szórásnégyzetei, tehát $\mathbf{cov}(X_i, X_i) = \sigma^2 X_i = n \cdot p_i \cdot (1 - p_i) = n \cdot p_i \cdot q_i$ állnak. Tehát:

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} np_1q_1 & -np_1p_{2r} & \cdots & -np_1p_{2r} \\ -np_1p_2 & np_2q_2 & \cdots & -np_2p_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -np_1p_r & -np_2p_r & \cdots & np_rq_r \end{pmatrix}.$$

III.5.2. Példa: *(A komponensek korrelációja kétdimenziós normális esetben.)*

Ha X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right)$
$x, y \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbf{E}(XY) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_1 \cdot \sqrt{1-\varrho^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma_1^2 (1-\varrho^2)} \cdot \left[x - \left(\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho(y-\mu_2)\right)\right]^2} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_2} \mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \left(\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho(y - \mu_2)\right) \mathrm{d}y =$$

$= \mu_1\mu_2 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho\left(\sigma_2^2 + \mu_2^2\right) - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho\mu_2^2 = \mu_1\mu_2 + \sigma_2\sigma_2\varrho$. Tehát $\mathbf{cov}(X, Y) = \sigma_2\sigma_2\varrho$, $\mathbf{R}(X, Y) = \rho$. A sűrűségfüggvény a $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\varrho \\ \sigma_1\sigma_2\varrho & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrix és a $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$ várhatóérték-vektor segítségével mátrixos felírásban is megadható: $f_{\underline{\mu},\underline{\underline{\Sigma}}}(\underline{x}) = \frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{\det\underline{\underline{\Sigma}}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\underline{x}-\underline{\mu})^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}(\underline{x}-\underline{\mu})}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$.

III.5.9. Tétel: Ha X és Y együttes eloszlása *normális*, akkor X és Y akkor és csak akkor függetlenek, ha korrelálatlanok.

Bizonyítás: A függetlenségből mindig következik a korrelálatlanság. Ha $\mathbf{R}(X,Y) = \rho = 0$, akkor az együttes sűrűségfüggvényre: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$ teljesül, ami már igazolja a függetlenséget. ∎

III.6. A feltételes várható érték

Diszkrét eset:

III.6.1. Definíció:

a.) Legyen $A \in \Im, \mathbf{P}(A) > 0$ tetszőleges esemény, $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ pedig egy tetszőleges diszkrét valószínűségi változó. Ekkor $\mathbf{P}(X = x_i \mid A) = \frac{\mathbf{P}(X=x_i,A)}{\mathbf{P}(A)}, i = 1,2,\ldots$ az X *feltételes eloszlása* A-ra nézve.

b.) Legyen $A_1, A_2, \ldots \in \Im$ teljes eseményrendszer, $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ pedig egy tetszőleges diszkrét valószínűségi változó. Ekkor a $\{\{\mathbf{P}(X = x_i \mid A_j), i = 1,2,\ldots\}, j = 1,2,\ldots\}$ eloszlásokat az X-nek az $\{A_j, j = 1,2,\ldots\}$ rendszerre vonatkozó *feltételes eloszlásának* nevezzük.

c.) Legyen $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ és $Y \in \{y_1, y_2, \ldots\}$ diszkrét valószínűségi változó $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$-n. Ekkor a $\{\{\mathbf{P}(X = x_i \mid Y = y_j), i = 1,2,\ldots\}, j = 1,2,\ldots\}$ eloszlásokat az X-nek az Y-ra vonatkozó *feltételes eloszlásának* nevezzük.

III.6.2. Definíció:

a.) $\mathbf{E}(X \mid Y = y_j) \mathrel{\hat{=}} \sum\limits_{\forall x_i} x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i \mid Y = y_j) \mathrel{\hat{=}} r(y_j)$, az X *feltételes várható értéke az* $Y = y_j$ *feltétel mellett.*

b.) Az *X-nek az Y-ra vonatkozó regresszióján*, vagy *feltételes várható értékén* azt az $\mathbf{E}(X \mid Y)$-vel jelölt diszkrét valószínűségi változót értjük, melynek értékkészlete $K = \{r(y_j) \mathrel{\hat{=}} \mathbf{E}(X \mid Y = y_j), j = 1,2,\ldots\}$, eloszlása pedig $\mathbf{P}(\mathbf{E}(X \mid Y) = r(y_j)) = \mathbf{P}(Y = y_j), j = 1,2,\ldots$.

Folytonos eset:

Legyen X és Y folytonos valószínűségi változó $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$-n $F_{X,Y}(x,y)$ és $f_{X,Y}(x,y)$együttes eloszlás-, illetve együttes sűrűségfüggvénnyel. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$\mathbf{P}(X < x \,|\, y \leq Y < y+\Delta y) = \frac{\mathbf{P}(X<x, y \leq Y < y+\Delta y)}{\mathbf{P}(y \leq Y < y+\Delta y)} = \frac{F_{X,Y}(x,y+\Delta y) - F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y+\Delta y) - F_Y(y)} =$$

$$= \frac{\frac{F_{X,Y}(x,y+\Delta y) - F_{X,Y}(x,y)}{\Delta y}}{\frac{F_Y(y+\Delta y) - F_Y(y)}{\Delta y}} \to \frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}}{f_Y(y)} \quad (\Delta y \to 0).$$

III.6.3. Definíció: Az $F_{X|Y}(x\,|y) \stackrel{\circ}{=} \frac{\frac{\partial F_{X,Y}(x,y)}{\partial y}}{f_Y(y)}$ kétváltozós függvényt az X-nek az Y-ra vonatkozó *feltételes eloszlásfüggvényének* nevezzük.

III.6.4. Definíció: A feltételes eloszlásfüggvény x-szerinti parciális derivált-függvényét az X-nek az Y-ra vonatkozó *feltételes sűrűségfüggvényének* nevezzük: $f_{X|Y}(x\,|y) \stackrel{\circ}{=} \frac{\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial y \partial x}}{f_Y(y)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$.

III.6.1. Tétel: *(Bayes-formula)*

$$f_{X|Y}(x\,|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|u) \cdot f_X(u)\,\mathrm{d}u}.$$

Bizonyítás:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y\,|x) \cdot f_X(x),\ f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y\,|x) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \ \Rightarrow \text{állítás.} \ \blacksquare$$

III.6.5. Definíció: Az X-nek Y-ra vonatkozó *feltételes várható értékén* vagy *regresszióján* az $\mathbf{E}(X\,|Y) = r(Y)$ valószínűségi változót értjük, ahol

$$r(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}(x\,|y)\ \mathrm{d}x = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x}{f_Y(y)}$$ a *regressziós görbe.*

III.6.2. Tétel: *(A regresszió tulajdonságai)*

a.) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X\,|Y)) = \mathbf{E}X.$

b.) $\mathbf{E}(h(Y) \cdot X\,|Y) = h(Y) \cdot \mathbf{E}(X\,|Y).$

c.) Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X\,|Y) = \mathbf{E}X$.

Bizonyítás:

a.) *Diszkrét eset:*

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X \mid Y\right)\right) = \sum_{\forall y_j} \mathbf{E}\left(X \mid Y = y_j\right) \mathbf{P}\left(Y = y_j\right) =$$

$$= \sum_{\forall y_j} \sum_{\forall x_i} x_i \mathbf{P}\left(X = x_i \mid Y = y_j\right) \mathbf{P}\left(Y = y_j\right) =$$

$$= \sum_{\forall y_j} \sum_{\forall x_i} x_i \mathbf{P}\left(X = x_i, Y = y_j\right) = \sum_{\forall x_i} x_i \mathbf{P}\left(X = x_i\right) = \mathbf{E}X.$$

Folytonos eset:

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}(X\,|Y)\right) = \mathbf{E}\left(r\left(Y\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} r\left(y\right) \cdot f_Y\left(y\right)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} f_Y\left(y\right)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x,y\right)\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X\left(x\right)\, \mathrm{d}x = \mathbf{E}X.$$

b.) *Diszkrét eset:*

$$\mathbf{E}\left(h(Y) \cdot X \mid Y = y_j\right) = \sum_{\forall x_i} x_i h(y_j) \mathbf{P}\left(X = x_i \mid Y = y_j\right) = h(y_j) \cdot \mathbf{E}\left(X \mid Y = y_j\right).$$

Folytonos eset:

Legyen $y \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\mathbf{E}\left(h\left(Y\right) \cdot X \mid Y = y\right) = \int_{-\infty}^{\infty} h\left(y\right) x \cdot f_{X|Y}\left(x\,|y\right)\, \mathrm{d}x =$$

$$= h\left(y\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}\left(x\,|y\right)\, \mathrm{d}x = h\left(y\right) \cdot \mathbf{E}(X\,|Y = y).$$

c.) *Diszkrét eset:*

$$\mathbf{P}\left(X = x_i \mid Y = y_j\right) = \mathbf{P}\left(X = x_i\right) \Rightarrow \mathbf{E}\left(X \mid Y = y_j\right) =$$

$$= \sum_{\forall x_i} x_i \mathbf{P}\left(X = x_i \mid Y = y_j\right) = \sum_{\forall x_i} x_i \mathbf{P}\left(X = x_i\right) = \mathbf{E}X \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{E}\left(X \mid Y\right) = \mathbf{E}(X).$$

Folytonos eset:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \;\Rightarrow\; f_{X|Y}\left(x\,|y\right) = f_X(x),$$

$$r(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y}\left(x\,|y\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x)\, \mathrm{d}x = \mathbf{E}X \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{E}\left(X\,|Y\right) = \mathbf{E}X. \quad \blacksquare$$

III.6.3. Tétel: Legyen $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor $\mathbf{E}\left(X - r(Y)\right)^2 \le \mathbf{E}\left(X - d(Y)\right)^2$, ahol $r(Y) = \mathbf{E}(X\,|Y)$. Speciálisan, ha $d(y) \equiv \mathbf{E}X$, akkor $\mathbf{E}\left(X - \mathbf{E}\left(X\,|Y\right)\right)^2 \le \mathbf{E}\left(X - \mathbf{E}X\right)^2 = \sigma^2 X$.

Bizonyítás:
$\mathbf{E}\left(X-d(Y)\right)^2=\mathbf{E}\left(X-r(Y)+r(Y)-d(Y)\right)^2=$
$=\mathbf{E}\left(X-r(Y)\right)^2+\mathbf{E}\left(r(Y)-d(Y)\right)^2+2\cdot\mathbf{E}\left(\left(X-r(Y)\right)\cdot\left(r(Y)-d(Y)\right)\right).$
Mivel $\mathbf{E}\left(\left(X-r(Y)\right)\cdot\left(r(Y)-d(Y)\right)\right)=\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left(\left(X-r(Y)\right)\cdot\left(r(Y)-d(Y)\right)\right)|Y\right]=$
$=\mathbf{E}\left[\left(r(Y)-d(Y)\right)\cdot\mathbf{E}\left(\left(X-r(Y)\right)|Y\right)\right]=$
$=\mathbf{E}\left[\left(r(Y)-d(Y)\right)\cdot\left(\mathbf{E}\left(X\,|Y\right)-r(Y)\right)\right]=$
$=\mathbf{E}\left[\left(r(Y)-d(Y)\right)\cdot 0\right]=0$, így
$\mathbf{E}\left(X-d(Y)\right)^2=\mathbf{E}\left(X-r(Y)\right)^2+\mathbf{E}\left(r(Y)-d(Y)\right)^2\geq\mathbf{E}\left(X-r(Y)\right)^2\Rightarrow$ állítás. ■

III.6.1. Példa: *(Regresszió normális eloszlás esetén)*
Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$f_{X,Y}\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\varrho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-\varrho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\varrho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2^2}\right]\right)$
$x,y\in\mathbb{R}$ alakú, azaz a két valószínűségi változó együttes eloszlása kétdimenziós normális. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{E}(X\,|Y)=a\cdot Y+b$, ahol $a=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho$ és $b=\mu_1-a\cdot\mu_2$.

Az $f_{X|Y}\left(x\,|y\right)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ definícióból, a formulák behelyettesítése után kapjuk, hogy: $f_{X|Y}\left(x\,|y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma_1\cdot\sqrt{1-\varrho^2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\cdot\sigma_2^2(1-\varrho^2)}\cdot\left[x-\left(\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho(y-\mu_2)\right)\right]^2}.$

Így $\mathbf{E}(X\,|Y=y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_{X|Y}\left(x\,|y\right)\,\mathrm{d}x=\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho\left(y-\mu_2\right)$, hiszen — amint látható — a feltételes sűrűségfüggvény rögzített y mellett a $\mu_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\varrho(y-\mu_2)$ várható értékű és $\sigma_1\cdot\sqrt{1-\varrho^2}$ szórásnégyzetű normális eloszlás sűrűségfüggvénye.

III.6.6. Definíció: Legyen X és Y két adott valószínűségi változó. Az a^*X+b^* valószínűségi változó az Y-nak a X-re vonatkozó *lineáris regresszió*ja, ha $\mathbf{E}(Y-a^*X-b^*)^2=\min\limits_{\forall a,b\in\mathbb{R}}\mathbf{E}(Y-aX-b))^2$.

III.6.4. Tétel: $a^*=\mathbf{R}(X,Y)\frac{\sigma Y}{\sigma X},\ b^*=\mathbf{E}Y-\mathbf{R}(X,Y)\frac{\sigma Y}{\sigma X}\mathbf{E}X.$

Bizonyítás: Legyen $h(a,b)\doteq\mathbf{E}(Y-aX-b))^2$. A lineáris regresszió meghatározásához ezt a kétváltozós függvényt kell minimalizálni. A minimumhely létezésének szükséges feltétele, hogy:
$\frac{\partial h}{\partial a}=-2\mathbf{E}\left[(Y-aX-b)X\right]=0,\ \frac{\partial h}{\partial b}=-2\mathbf{E}\left[Y-aX-b\right]=0$. Innen:
$a\mathbf{E}X^2+b\mathbf{E}X=\mathbf{E}(XY),\ a\mathbf{E}X+b=\mathbf{E}Y\ \Rightarrow\ b=\mathbf{E}Y-a\mathbf{E}X\ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ a\mathbf{E}X^2+(\mathbf{E}Y-a\mathbf{E}X)\mathbf{E}X=\mathbf{E}(XY)\Rightarrow$

$a = \mathbf{R}(X,Y)\frac{\sigma Y}{\sigma X}$, $b = \mathbf{E}Y - \mathbf{R}(X,Y)\frac{\sigma Y}{\sigma X}\mathbf{E}X$, $\begin{pmatrix} \mathbf{E}X^2 & \mathbf{E}X \\ \mathbf{E}X & 1 \end{pmatrix}$ pozitív definit, és ez volt az állítás. ■

Megjegyzés: Normális esetben — mint ahogy az a III.6.1 példánál látható volt — a lineáris regressziós és a regressziós összefüggések egybeesnek.

III.7. Kidolgozott feladatok és gyakorlatok

III.7.1. Feladat: Legyen $T = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_p, b_p)$ tetszőleges p-dimenziós tégla, és $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p \in \{0,1\}$ tetszőlegesek (0 vagy 1 – diadikus számok). Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\sum_{\forall(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_p)} (-1)^j F_{\underline{X}}(\varepsilon_1 a_1 + (1-\varepsilon_1)b_1, \varepsilon_2 a_2 + (1-\varepsilon_2)b_2, \ldots, \varepsilon_p a_p + (1-\varepsilon_p)b_p) \geq 0,$$

ahol $j = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$.

Megoldás: A bizonyítás azon múlik, hogy megmutatjuk, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán a $\mathbf{P}(\underline{X} \in T)$ valószínűség áll, ami nyilvánvalóan nemnegatív.

Definiáljuk az alábbi eseményeket: $A_i = \{\omega;\ X_i(\omega) < a_i\}$, $B_i = \{\omega;\ X_i(\omega) < b_i\}$.

Ekkor $\mathbf{P}(\underline{X} \in T) = \mathbf{P}(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2, \ldots, a_p \leq X_p < b_p) = \mathbf{P}(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdot \cdots \cdot \bar{A}_p \cdot B_1 B_2 \cdot \cdots \cdot B_p) =$

$= \mathbf{P}(\bar{A} \cdot B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B)$, ahol $A = \sum_{i=1}^{p} A_i \quad \Rightarrow \quad \bar{A} = \prod_{i=1}^{p} \bar{A}_i$ és $B = \prod_{i=1}^{p} B_i$. Tehát a Poincare-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 \leq \mathbf{P}(\underline{X} \in T) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{p} (A_i \cdot B)\Big) =$$

$$= \mathbf{P}(B) - \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_i \leq p} \mathbf{P}(A_{j_1} A_{j_2} \cdot \cdots \cdot A_{j_i} B).$$

Mivel $A_{j_k} \subseteq B_{j_k} \quad \Rightarrow \quad A_{j_k} \cdot B_{j_k} = A_{j_k}$. Így $\mathbf{P}(A_{j_1} A_{j_2} \cdot \cdots \cdot A_{j_i} B) = F_{\underline{X}}(\varepsilon_1 \cdot a_1 + (1-\varepsilon_1) \cdot b_1, \ldots, \varepsilon_p \cdot a_p + (1-\varepsilon_p) \cdot b_p)$, ahol $\varepsilon_{j_1} = \varepsilon_{j_2} = \cdots = \varepsilon_{j_i} = 1$, a többi $\varepsilon_j = 0$. Másrészt $\mathbf{P}(B) = F_{\underline{X}}(b_1, b_2, \ldots, b_p)$, tehát az az eset, amikor mindegyik $\varepsilon_j = 0$. Visszahelyettesítve éppen az állítást kapjuk.

III.7.2. Feladat: Legyen X és Y két azonos eloszlású valószínűségi változó. Igaz-e, hogy $\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} = \mathbf{E}\frac{Y}{Y+X}$?

Megoldás: Általában nem. Egy ellenpélda: alkosson A, B, C olyan teljes eseményrendszert, ahol $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{3}$. $X = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \in A \\ 1, & \text{ha } \omega \in B \\ 2, & \text{ha } \omega \in C \end{cases}$ és $Y = \begin{cases} 0, & \text{ha } \omega \in A \\ 1, & \text{ha } \omega \in C \\ 2, & \text{ha } \omega \in B \end{cases}$. Ekkor $\mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=2) = \frac{1}{3}$ és $\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(Y=2) = \frac{1}{3}$, azaz X és Y azonos eloszlásúak.

Viszont $Z = \frac{X-Y}{X+Y} = \begin{cases} -1, & \text{ha } \omega \in A \\ -\frac{1}{3}, & \text{ha } \omega \in B \\ 1, & \text{ha } \omega \in C \end{cases}$, és $\mathbf{E}Z = 1 \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} + (-1)\frac{1}{3} = -\frac{1}{9} \neq 0$, vagyis $\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} - \mathbf{E}\frac{Y}{Y+X} = -\frac{1}{9}$.

III.7.3. Feladat: Egy szabályos kockával dobunk ismételten. X az első dobás, Y a második dobás eredménye. Számoljuk ki $\mathbf{R}(X, X+Y)$-t!

Megoldás: Egyrészt, a függetlenség miatt $\mathbf{cov}(X, X+Y) = \mathbf{cov}(X, X) + \mathbf{cov}(X, Y) = \sigma^2 X$, másrészt $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2 X + \sigma^2 Y = 2\sigma^2 X$. Így $\mathbf{R}(X, X+Y) = \frac{\mathbf{cov}(X,X+Y)}{\sigma X \sigma(X+Y)} = \frac{\sigma^2 X}{\sqrt{2}\sigma X \sigma X} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III.7.4. Feladat: Legyen X és Y két $p = 0{,}5$ paraméterű független indikátor valószínűségű változó. Mutassuk meg, hogy $X+Y$ és $|X-Y|$ bár korrelálatlanok, de nem függetlenek!

Megoldás: $\mathbf{P}(X=1) = \mathbf{P}(X=0) = \mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(Y=0) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(X+Y=0) = \mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=0) = 0{,}25$, $\mathbf{P}(X+Y=1) = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=0) + \mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(X+Y=2) = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=1) = 0{,}25$. $\mathbf{P}(|X-Y|=0) = \mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=0) + \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=1) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(|X-Y|=1) = \mathbf{P}(X=1)\mathbf{P}(Y=0) + \mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1) = 0{,}5$. $\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y = 1$, $\mathbf{E}(|X-Y|) = 0{,}5$, $\mathbf{E}((X+Y)|X-Y|) = \mathbf{E}(|X^2-Y^2|) = 0{,}5$. Így $\mathbf{cov}(X+Y, |X-Y|) = 0{,}5 - 1 \cdot 0{,}5 = 0$. $X+Y$ és $|X-Y|$ nem lehetnek függetlenek, mert pl. $\mathbf{P}(X+Y=0, |X-Y|=1) = 0$, de $\mathbf{P}(X+Y=0)\,\mathbf{P}(|X-Y|=1) = 0{,}25 \cdot 0{,}5 \neq 0$.

III.7.5. Feladat: Két azonos képességű atléta versenyt fut. Mindkettejük eredményét $m = 10,1$ és $\sigma = 0,1$ paraméterű normális eloszlással jellemezhetjük másodpercekben. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyik versenyző legalább $0,2$ másodperccel legyőzi a másikat?

Megoldás: $X, Y \in N(10{,}1, 0{,}1) \Rightarrow X - Y \in N\left(0, \sqrt{0{,}02}\right)$
$\mathbf{P}(|X - Y| \geq 0{,}2) = 1 - \mathbf{P}(|X - Y| < 0{,}2) = 1 - \mathbf{P}(-0{,}2 < X - Y < 0{,}2) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}02}}\right) + \Phi\left(\frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}02}}\right)\right).$

III.7.6. Feladat: Ha X és Y független valószínűségi változók, határozzuk meg $V = \min\{X, Y\}$ és $W = \max\{X, Y\}$ eloszlásfüggvényét!

Megoldás: $\mathbf{P}(V < x) = 1 - \mathbf{P}(V \geq x) = 1 - \mathbf{P}(X \geq x, Y \geq x) = 1 - \mathbf{P}(X \geq x) \cdot \mathbf{P}(Y \geq x) = 1 - (1 - F_X(x)) \cdot (1 - F_Y(x))$.
$\mathbf{P}(W < x) = \mathbf{P}(X < x, Y < x) = \mathbf{P}(X < x) \cdot \mathbf{P}(Y < x) = F_X(x) \cdot F_Y(x)$.

III.7.7. Feladat: Két szabályos kockával dobunk. Jelentse X a hatos dobások számát, Y pedig a dobott számok összegét. Adjuk meg X és Y együttes eloszlását!

Megoldás: Az alábbi táblázatban az oszlopok tetején szerepelnek az X lehetséges értékei, a sorok elején pedig az Y értékkészletének megfelelő számok állnak. Az (i, j) koordinátáknak megfelelő cellában a $\mathbf{P}(X = i, Y = j)$ valószínűségek találhatók.

X / Y	0	1	2	Y peremeloszlása
2	1/36	0	0	1/36
3	2/36	0	0	2/36
4	3/36	0	0	3/36
5	4/36	0	0	4/36
6	5/36	0	0	5/36
7	4/36	2/36	0	6/36
8	3/36	2/36	0	5/36
9	2/36	2/36	0	4/36
10	1/36	2/36	0	3/36
11	0	2/36	0	2/36
12	0	0	1/36	1/36
X peremeloszlása	25/36	10/36	1/36	1

Például a táblázat nyolcadik sorának és második oszlopának kereszteződésében azért áll $\frac{2}{36}$, mert a 36 dobási lehetőségből csak kettő felel meg az $X = 1$, $Y = 8$ feltételeknek: a $(6, 2)$ és a $(2, 6)$. Az Y eloszlását a sorokban álló valószínűségek összeadásával, az X eloszlását pedig az oszlopokban álló valószínűségek összeadásával kapjuk meg. Látható az is, hogy X nem független Y-tól, hiszen pl. $\mathbf{P}(X = 2, Y = 2) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 2) \cdot \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{36^2}$.

III.7.8. Feladat: Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

Y \ X	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

Mekkora a p paraméter értéke? Független-e X és Y?

Megoldás: Mivel az együttes eloszlás elemeinek összege 1, így $60p = 1$, azaz p=$\frac{1}{60}$. X és Y függetlenek, mert minden lehetséges értékpárnál teljesül a függetlenség feltétele, pl. $\mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{6}, \mathbf{P}(Y = -1) = \frac{1}{10}$ és $\mathbf{P}(X = -1, Y = -1) \frac{1}{60}$ stb.

III.7.9. Feladat: Először egy szabályos kockával dobunk, majd a dobott értéknek megfelelően kihúzunk lapokat egy 32 lapos kártyacsomagból. Jelölje X a kihúzott lapok között található figurás lapok számát, Y pedig legyen a kihúzott királyok száma. Adja meg a $\mathbf{P}(X = 4, Y = 2)$ valószínűséget!

Megoldás: Ha a kockával $1, 2, 3$-t dobunk, $\mathbf{P}(X = 4, Y = 2) = 0$ nyilván, mert négynél kevesebb lapból nem lehet négy figurást kihúzni. Ha a kockával 4-et dobunk akkor a keresett esemény : „2 király és 2 figurás nem király".
$p_1 = \mathbf{P}(X = 4, Y = 2 \mid \text{„4-et dobunk a kockával"}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{2}}{\binom{32}{4}}$. Ha a kockán ötöst kapunk, az esemény: „2 király és 2 figurás nem király és 1 egyéb".
$p_2 = \mathbf{P}(X = 4, Y = 2 \mid \text{„ötöt dobtunk a kockával"}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{20}{1}}{\binom{32}{5}}$. Végül, ha a dobás hatos volt, a keresett esemény: „2 király, 2 figurás nem király és 2 egyéb".
$p_3 = \mathbf{P}(X = 4, Y = 2 \mid \text{„hatot dobtunk a kockával"}) = \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{20}{2}}{\binom{32}{6}}$. A teljes valószínűség tételéből: $\mathbf{P}(X = 4, Y = 2) = \frac{1}{6}(p_1 + p_2 + p_3)$.

III.7.10. Feladat: Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = 2\mathrm{e}^{-2x-y}$, $0 < x, y < \infty$ (egyébként $f(x,y) = 0$). Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

Megoldás: $f_X(x) = \int\limits_0^\infty 2\mathrm{e}^{-2x-y}\,\mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^{-2x}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 2\mathrm{e}^{-2x}, x > 0$. $f_Y(y) = \int\limits_0^\infty 2\mathrm{e}^{-2x-y}\,\mathrm{d}x = 2\mathrm{e}^{-y}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-y},\ y > 0$. Mivel $f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$, így X és Y függetlenek!

III.7.11. Feladat: Legyen az X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+y+xy), & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$
Határozza meg a peremsűrűségfüggvényeket! Független-e X és Y?

Megoldás: $f_X(x) = \int\limits_0^1 0{,}8(x+xy+y)\,\mathrm{d}y = 0{,}8\left[xy + x\frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1{,}2x + 0{,}4$, $f_Y(y) = 1{,}2y + 0{,}4$ teljesen hasonlóan. Látható, hogy nem függetlenek, mert $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$.

III.7.12. Feladat: Ultizásnál a 32 lapos magyar kártyából kettőt talonba osztanak. Jelölje X a talonba került piros színű lapok, Y pedig az ászok számát! Adja meg X és Y együttes eloszlását! Független-e X és Y ?

Megoldás:
$\mathbf{P}(X=0, Y=0) = \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{210}{16\cdot 31}$, $\mathbf{P}(X=0, Y=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{21}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{63}{16\cdot 31}$,
$\mathbf{P}(X=0, Y=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{3}{16\cdot 31}$, $\mathbf{P}(X=1, Y=0) = \frac{\binom{7}{1}\binom{21}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{147}{16\cdot 31}$,
$\mathbf{P}(X=1, Y=1) = \frac{\binom{21}{1}+\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{42}{16\cdot 31}$, $\mathbf{P}(X=1, Y=2) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{3}{16\cdot 31}$,
$\mathbf{P}(X=2, Y=0) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{21}{16\cdot 31}$, $\mathbf{P}(X=2, Y=1) = \frac{\binom{7}{1}}{\binom{32}{2}} = \frac{7}{16\cdot 31}$,
$\mathbf{P}(X=2, Y=2) = 0$.
$(\mathbf{E}(XY) = 1\cdot\frac{42}{16\cdot 31} + 2\cdot\frac{3}{16\cdot 31} + 2\cdot\frac{7}{16\cdot 31} = \frac{1}{8}, \mathbf{E}X = 1\cdot\frac{192}{16\cdot 31} + 2\cdot\frac{28}{16\cdot 31} = \frac{1}{2}$,
$\mathbf{E}Y = 1\cdot\frac{112}{16\cdot 31} + 2\cdot\frac{6}{16\cdot 31} = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbf{cov}(X,Y) = 0$, de nem függetlenek!)

III.7.13. Feladat: Legyen a $(X,Y)^T$ valószínűségi változópár együttes sűrűségfüggvénye: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} + \frac{xy}{2\pi e}, & x, y \in [-1,1] \\ \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, & \text{egyébként} \end{cases}$.

a.) Adja meg a peremsűrűségfüggvényeket!

b.) Kétdimenziós normális eloszlású-e $(X,Y)^T$?

Megoldás:

a.) $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_{-1}^{1} \frac{xy}{2\pi e}\,\mathrm{d}y = \varphi(x)$, hasonlóan: $f_Y(y) = \varphi(y) \Rightarrow$ $X, Y \in N(0,1)$.

b.) Nem kétdimenziós normális eloszlás, mert más a sűrűségfüggvénye. $\varphi(x)\varphi(y)$ kellene.

III.7.14. Feladat: Legyen az $X \in U(0,1)$ valószínűségi változó kettes számrendszerben felírva: $X = 0, X_1X_2\ldots$. Függetlenek-e az X_1 és X_2 digitek?

Megoldás: $X_1 = \begin{cases} 1, & \text{ha } X \geq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha } 0 \leq X < \frac{1}{2} \end{cases}$,
$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{ha } X \geq \frac{3}{4} \text{ vagy } \frac{1}{4} \leq X < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq X < \frac{3}{4} \text{ vagy } X < \frac{1}{4} \end{cases}$. Együttes eloszlásukat az alábbi táblázat tartalmazza:

X_2 \ X_1	1	0	X_1 perem
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
X_1 perem	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

ahonnan már leolvasható, a függetlenség ténye.

III.7.15. Feladat: Legyen X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, $Y \doteq \sin(2\pi X)$ és $Z \doteq \cos(2\pi X)$. Számolja ki a $(Y,Z)^T$ pár kovarianciamátrixát!

Megoldás: $\mathbf{E}Y = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0, \mathbf{E}Z = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0,$

$\sigma^2 Y = \mathbf{E}Y^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = 0{,}5,$

$\sigma^2 Z = \mathbf{E}Z^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = 0{,}5, \quad \mathbf{E}(YZ) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} 0,5\sin 2x \,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \underline{\underline{\sum}} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$

III.7.16. Feladat: Egy szabályos pénzérmét addig dobálok, amíg *másodszorra* nem kapok *fejet*. Jelölje X a szükséges dobások számát. Adja meg X várható értékét és szórását!

Megoldás: $X = Y_1 + Y_2, Y_1, Y_2 \in G\,(0{,}5)$ függetlenek $\Rightarrow \mathbf{E}X = \mathbf{E}Y_1 + \mathbf{E}Y_2 = 2 + 2 = 4$. $\mathbf{P}\,(X = k) = \mathbf{P}\,(Y_1 + Y_2 = k) = \sum\limits_{l=1}^{k-1} \mathbf{P}\,(Y_1 = l)\,\mathbf{P}\,(Y_2 = k - l) = 0{,}5^k \sum\limits_{l=1}^{k-1} 1 = (k-1)0{,}5^k$.

III.7.17. Feladat: Legyenek X és Y független, azonos $f(x)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változók. Számoljuk ki a $\mathbf{P}\,(X < Y)$ valószínűséget!

Megoldás: $\mathbf{P}\,(X < Y) = \mathbf{P}\,(X - Y < 0) = F_{X-Y}\,(0)$. Mivel $f_{-Y}(x) = f(-x)$, így a konvolúciós képletből $f_{X-Y}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\,f\,(x+t)\,dt$ adódik.

Így $F_{X-Y}\,(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} f_{X-Y}(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(t)\,f\,(x+t)\;\mathrm{d}t\mathrm{d}x =$
$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(z)\left[\int\limits_{-\infty}^{0} f\,(z+x)\;\mathrm{d}x\right] dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(z)\left[\int\limits_{-\infty}^{z} f\,(y)\;\mathrm{d}y\right] dz =$
$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(z)\,F\,(z)\,dz = \left[\frac{F(z)^2}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}.$
Tehát $\mathbf{P}\,(X < Y) = \frac{1}{2}$.

III.7.18. Feladat: Legyenek $X, Y \in E\,(\lambda)$ függetlenek. Mennyi a $\mathbf{P}\left(X - \frac{1}{X} < Y - \frac{1}{Y}\right)$ valószínűség?

Megoldás: Mivel $X - \frac{1}{X}$ és $Y - \frac{1}{Y}$ szintén azonos eloszlásúak és függetlenek, az előző feladat eredményét felhasználva, a keresett valószínűség $\frac{1}{2}$.

III.7.19. Feladat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású, folytonos valószínűségű változók. Mennyi a $\mathbf{P}\,(\max\{X_2, \ldots, X_n\} < X_1)$ valószínűség?

Megoldás: Jelölje $f(x)$, $F(x)$ a közös sűrűségfüggvényt, illetve eloszlásfüggvényt, és legyen $Y = \max\{X_2, \ldots, X_n\}$! Ekkor
$f_Y(x) = (n-1)(F(x))^{n-2} f(x)$. (a III.7.6. feladat megoldását n-re általánosítva és deriválva)

$\mathbf{P}(Y < X_1) = \mathbf{P}(Y - X_1 < 0) = F_{Y-X_1}(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} f_{Y-X_1}(t)dt$, ahol

$f_{Y-X_1}(t)$ a konvolúciós képletből számolható:

$f_{Y-X_1}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(t+z)f(z)dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (n-1)(F(t+z))^{n-2} f(t+z)f(z)dz.$

Így $F_{Y-X_1}(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (n-1)(F(t+z))^{n-2} f(t+z)f(z)dzdt =$

$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) \int\limits_{-\infty}^{0} (n-1)(F(t+z))^{n-2} f(t+z)dtdz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)(F(z))^{n-1} dz =$
$\left[\frac{(F(z))^n}{n}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{n}.$

III.7.20. Feladat: *(Két valószínűségi változó szorzatának eloszlása)* Legyen X és Y valószínűségi változó az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Jelölje $f_{X,Y}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvényüket. Bizonyítsuk be, hogy a $Z = X \cdot Y$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, \frac{x}{t}) \cdot \left|\frac{1}{t}\right|\ dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(\frac{x}{t}, t) \cdot \left|\frac{1}{t}\right|\ dt.$

Ha X és Y függetlenek is, akkor

$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(\frac{x}{t}) \cdot \left|\frac{1}{t}\right| dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(\frac{x}{t}) \cdot f_Y(t) \cdot \left|\frac{1}{t}\right| dt.$

Megoldás: Legyen most

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = u_1(x_1,x_2) = x_1 \cdot x_2 \\ y_2 = u_2(x_1,x_2) = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{y_1}{y_2} = u_1^{-1}(y_1,y_2) = x_1 \\ y_2 = u_2^{-1}(y_1,y_2) = x_2 \end{array}\right. ,$$

$D = \mathbb{R}^2, H = \{(y_1,y_2) \mid y_2 \neq 0\},$

$$\underline{\underline{J}}(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_2} & -\frac{y_1}{y_2^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\det(\underline{\underline{J}}(y_1,y_2))\right| = \left|\frac{1}{y_2}\right|.$$

Alkalmazva a transzformációs tételt, a $Z = X \cdot Y$ és Y együttes sűrűségfüggvénye: $f_{Z,Y}(y_1,y_2) = f_{X,Y}(\frac{y_1}{y_2}, y_2) \cdot \left|\frac{1}{y_2}\right|$. Innen Z sűrűségfüggvényét kiintegrálással számolhatjuk:

$f_Z(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,Y}(y_1,y_2)\, \mathrm{d}y_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(\frac{y_1}{y_2}, y_2) \cdot \left|\frac{1}{y_2}\right|\ \mathrm{d}y_2.$

Az utóbbi integrálban az $\frac{y_1}{y_2} = t$, $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{y_1}{t^2}$ változó transzformációval kapjuk az $f_Z(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(y_2, \frac{y_1}{y_2}) \cdot \left|\frac{1}{y_2}\right| \mathrm{d}y_2$ képletet. Ha X és Y függetlenek, akkor $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, így

$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(\frac{x}{t}) \cdot \left|\frac{1}{t}\right| \, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(\frac{x}{t}) \cdot f_Y(t) \cdot \left|\frac{1}{t}\right| \, dt.$

III.7.21. Feladat: *(Két valószínűségi változó hányadosának eloszlása)* Legyen X és Y valószínűségi változó az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Jelölje $f_{X,Y}(x,y)$ az együttes sűrűségfüggvényüket. Bizonyítsuk be, hogy a $Z = \frac{X}{Y}$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x \cdot t, t) \cdot |t| \, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(t, \frac{t}{x}) \cdot \frac{|t|}{x^2} dt.$

Ha X és Y függetlenek is, akkor

$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(\frac{t}{x}) \cdot \frac{|t|}{x^2} \, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x \cdot t) \cdot f_Y(t) \cdot |t| \, dt.$

Megoldás: Legyen most

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = u_1(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2} \\ y_2 = u_2(x_1,x_2) = x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1 \cdot y_2 = u_1^{-1}(y_1,y_2) = x_1 \\ y_2 = u_2^{-1}(y_1,y_2) = x_2 \end{array}\right. ,$$

$D = \{(x_1,x_2) \mid x_2 \neq 0\}$, $H = \mathbb{R}^2$,

$$\underline{\underline{J}}(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\det(\underline{\underline{J}}(y_1,y_2))\right| = |y_1| \, .$$

A transzformációs tételt alkalmazva, a $Z = \frac{X}{Y}$ és Y együttes sűrűségfüggvénye: $f_{Z,Y}(y_1,y_2) = f_{X,Y}(y_1 \cdot y_2, y_2) \cdot |y_2|$. Innen Z sűrűségfüggvényét kiintegrálással számolhatjuk:

$f_Z(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,Y}(y_1,y_2) \, \mathrm{d}y_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(y_1 \cdot y_2, y_2) \cdot |y_2| \, \mathrm{d}y_2.$

Az utóbbi integrálban az $y_1 \cdot y_2 = t$, $\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{y_1}$ változó transzformációval kapjuk az $f_Z(y_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(y_2, \frac{y_2}{y_1}) \cdot \frac{|y_2|}{y_1^2} \mathrm{d}y_2$ képletet. Ha X és Y függetlenek, akkor $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, így

$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) \cdot f_Y(\frac{t}{x}) \cdot \left|\frac{t}{x^2}\right| \, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x \cdot t) \cdot f_Y(t) \cdot |t| \, dt.$

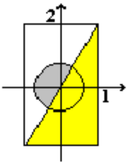
III.7.22. Feladat: Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek. Határozzuk meg a $Z = \frac{X}{Y}$ sűrűségfüggvényét!

Megoldás: $f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|\,\varphi(xy)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|}{2\pi} \exp\left(-\frac{y^2(x^2+1)}{2}\right)\,\mathrm{d}y.$
Végrehajtva az $y\sqrt{x^2+1} = z$ változócserét:
$f_Z(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|z|}{2\pi\sqrt{x^2+1}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dz = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{z}{\pi\sqrt{x^2+1}} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dz =$
$= \frac{1}{2\pi(x^2+1)} \left[-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\pi(x^2+1)}.$

Megjegyzés: Z eloszlását Cauchy- vagy t_1 (1 szabadságfokú Student) eloszlásnak nevezzük.

III.7.23. Feladat: Tekintsük a $T = [-2, 2] \times [-1, 1]$ téglalapon véletlenszerűen kiválasztott P pontot! Igaz-e, hogy P polárkoordinátái függetlenek lesznek?

Megoldás: Jelölje R és α a polár, X, Y pedig a descartes-i koordinátákat. Ekkor $R^2 = X^2 + Y^2$, és $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}$. R és α együttes eloszlásfüggvénye: $\mathbf{P}(R^2 < t^2, \alpha < u) = \mathbf{P}(X^2 + Y^2 < t^2, Y < X \operatorname{tg} u)$. Az origón átmenő $\operatorname{tg} u$ meredekségű egyenes mindig felezi az origó középpontú, t sugarú kör területét, így $\mathbf{P}(R^2 < t^2, \alpha < u) = \frac{1}{2}\mathbf{P}(R^2 < t^2) = \mathbf{P}(\alpha < u)\,\mathbf{P}(R^2 < t^2) \Rightarrow$ függetlenek.



III.7.24. Feladat: A férfiak testmagasságát $X \in N(175, 10)$, a nőkét $Y \in N(165, 8)$ valószínűségi változókkal modellezve, mekkora annak a valószínűsége, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott férfi 10 (cm)-rel alacsonyabb, mint egy tetszőlegesen kiválasztott nő?

III.7.25. Feladat: Egy autó X (km)-t tud defekt nélkül megtenni, ahol $X \in E(\lambda)$, azaz $\mathbf{P}(X < x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, x > 0$. Egy 12000 (km) hosszúságú úton mennyi annak a valószínűsége, hogy az autó legfeljebb egy defektet kap? $(\lambda = 10^{-4})$.

Megoldás: X_1, X_2 az első illetve második defektig megtett út, Y a defektek száma. $\mathbf{P}(Y=0) = \mathbf{P}(X_1 \geq 12000) = \mathrm{e}^{-1,2}$,
$\mathbf{P}(Y=1) = \mathbf{P}(X_1 < 12000, X_1 + X_2 \geq 12000) =$
$= \mathbf{P}(X_1 < 12000) - \mathbf{P}(X_1 + X_2 < 12000) = 1,2\mathrm{e}^{-1,2}$, mert a $X_1 + X_2$ konvolúció sűrűségfüggvénye: $\int\limits_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(x-t)} dt = \lambda^2 x \mathrm{e}^{-\lambda x} \Rightarrow$
$\mathbf{P}(X_1 + X_2 < x) = \int\limits_0^x \lambda^2 t \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}[1 + \lambda x]$. A keresett valószínűség:
$\mathbf{P}(Y=0) + \mathbf{P}(Y=1) = 2,2\mathrm{e}^{-1,2}$.

III.7.26. Feladat: Az $(X,Y)^T$ valószínűségi változó pár együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4y}$, ha $1 < x < 9$ és $y > 0$ (egyébként $f(x,y) = 0$).

a.) Független-e X és Y?

b.) $\mathbf{E}(X+Y) = ?, \sigma^2(X+Y) = ?$

c.) $\mathbf{P}(0 \leq X < 7, Y \geq 1) = ?$

Megoldás: $f_X(x) = \frac{1}{8}, x \in [1,9]$, $f_Y(y) = 4\mathrm{e}^{-4y}, y > 0$.

a.) Függetlenek!

b.) $\mathbf{E}X + \mathbf{E}Y = 5 + \frac{1}{4}, \sigma^2 X + \sigma^2 Y = \frac{64}{12} + \frac{1}{4}$

c.) $\mathbf{P}(0 \leq X < 7, Y \geq 1) = \int\limits_1^7 \int\limits_1^\infty \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4y}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-4}}{56}$.

III.7.27. Feladat: Két biatlon versenyző X, illetve Y óra alatt futja a 10 km-es távot, ahol X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda = 2$, illetve $\mu = 2,1$ paraméterekkel. Ha a két versenyzőből csapatot szervezünk akik 5 km-nél váltják egymást, mennyi a valószínűsége, hogy 20 perc alatt teljesítik a 10 km-es távot?

Megoldás: A 10 km-t $\frac{X+Y}{2}$ idő alatt teljesítik. A konvolúciós sűrűségfüggvény: $f_{X+Y}(x) = \int\limits_0^x \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mu \mathrm{e}^{-\mu(x-t)} dt = 4,2\left(\mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-2,1x}\right) \Rightarrow$
$\mathbf{P}\left(\frac{X+Y}{2} < \frac{1}{5}\right) = \int\limits_0^{0,4} f_{X+Y}(t)\, dt = 4,2\left[\frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,8}\right) + \frac{1}{2,1}\left(\mathrm{e}^{-0,84} - 1\right)\right]$.

III.7.28. Feladat: Legyenek $X, Y \in G(p)$ függetlenek. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}(X = k \mid X + Y = n) = \frac{1}{n-1}, (k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Megoldás: $\mathbf{P}(X = k \mid X + Y = n) = \frac{\mathbf{P}(X=k, X+Y=n)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} = \frac{\mathbf{P}(X=k)\mathbf{P}(Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} =$
$= \frac{q^{k-1}pq^{n-k-1}p}{\sum\limits_{i=1}^{n-1} q^{i-1}pq^{n-i-1}p} = \frac{q^{n-2}p^2}{q^{n-2}p^2 \sum\limits_{i=1}^{n-1} 1} = \frac{1}{n-1}.$

III.7.29. Feladat: Legyenek $X \in Po(\lambda)$ és $Y \in Po(\mu)$ függetlenek. Mutassuk meg, hogy X-nek az $X + Y = n$ feltételre vonatkozó feltételes eloszlása binomiális!

Megoldás: $\mathbf{P}(X + Y = l) = \sum\limits_{j=0}^{l} \mathbf{P}(X = j)\mathbf{P}(Y = l - j) =$
$= \sum\limits_{j=0}^{l} \frac{\lambda^l}{l!}\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\mu^{l-j}}{(l-j)!}\mathrm{e}^{-\mu} = \frac{1}{l!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)} \sum\limits_{j=0}^{l} \frac{l!}{j!(l-j)!}\lambda^j \mu^{l-j} = \frac{(\lambda+\mu)^l}{l!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}.$
Azaz $X + Y \in Po(\lambda + \mu)$. $\mathbf{P}(X = k \mid X + Y = n) = \frac{\mathbf{P}(X=k, X+Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} =$
$\frac{\mathbf{P}(X=k, Y=n-k)}{\mathbf{P}(X+Y=n)} = \frac{\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{n-k}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-\mu}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k},$
ez pedig a $B\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$ eloszlás!

III.7.30. Feladat: Egy tyúk $X \in Po(\lambda)$ tojást tojik. Minden tojásból egymástól függetlenül p valószínűséggel kel ki kiscsirke. Mennyi a kiscsirkék számának várható értéke?

Megoldás: Jelölje Y a kikelt kiscsirkék számát!
$\mathbf{P}(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \Rightarrow \mathbf{E}(Y \mid X = n) =$
$= np\,(\Rightarrow \mathbf{E}(Y \mid X) = Xp)$. Így $\mathbf{E}Y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(np)\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda} = p \cdot \mathbf{E}X = p \cdot \lambda.$

III.7.31. Feladat: Az előző feladat jelöléseivel adjuk meg $\mathbf{E}(X \mid Y = k)$ regressziós sorozatot, illetve az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ regressziót!

Megoldás: Legyen $n \geq k$.
$\mathbf{P}(X = n \mid Y = k) = \frac{\mathbf{P}(Y=k \mid X=n)\mathbf{P}(X=n)}{\mathbf{P}(Y=k)} = \frac{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}}{\sum\limits_{m=k}^{\infty}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}\frac{\lambda^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda}} =$
$= \frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda}$. Így $\mathbf{E}(X \mid Y = k) = \sum\limits_{n \geq k} n\mathbf{P}(X = n \mid Y = k) =$
$= \sum\limits_{n \geq k} n\frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda} = (1-p)\lambda + k \cdot \sum\limits_{n \geq k}\frac{((1-p)\lambda)^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda} =$
$= (1-p)\lambda + k$. Ebből már látható, hogy $\mathbf{E}(X \mid Y) = Y + (1-p)\lambda$.

III.7.32. Feladat: Dobjunk n-szer egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok számát, Y pedig a páros dobások számát! Számoljuk ki az $\mathbf{E}(X \mid Y)$ regressziót!

Megoldás: Ha $k \le l$, akkor $\mathbf{P}(X = k \mid Y = l) = \frac{\mathbf{P}(X=k, Y=l)}{\mathbf{P}(Y=l)} =$
$= \frac{\frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{l-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-l}}{\binom{n}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \binom{l}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{l-k}.$
Így $\mathbf{E}(X \mid Y = l) = \sum\limits_{k=0}^{l} k\binom{l}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{l-k} = \frac{l}{3}$, azaz $\mathbf{E}(X \mid Y) = \frac{Y}{3}$.

III.7.33. Feladat: Legyen $\binom{X}{Y} \in N_2\left(\binom{0}{0}, \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}\right)$. Határozzuk meg a $\mathbf{P}(X \ge 0, Y \ge 0)$ valószínűséget!

Megoldás:
$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}(x^2 - 2rxy + y^2)\right) =$
$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2\right)$ az együttes sűrűségfüggvény.
$\mathbf{P}(X \ge 0, Y \ge 0) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty f_{X,Y}(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$
$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}} \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cdots$
végrehajtva az $\frac{x-ry}{\sqrt{1-r^2}} = u, y = v \Rightarrow J(u,v) = \begin{vmatrix} \sqrt{1-r^2} & r \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{1-r^2}$
változócserét: $\cdots = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\left(\frac{-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2+v^2}{2}\right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \cdots$
polárkoordinátákra áttérve:
$u = R\cos\alpha,\ v = R\sin\alpha,\ J(R,\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -R\sin\alpha \\ \sin\alpha & R\cos\alpha \end{vmatrix} = R$
kapjuk, hogy $\cdots = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\arcsin r}^{\pi/2} R\exp\left(-\frac{R^2}{2}\right) d\alpha dR = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\arcsin r.$

III.7.34. Feladat: Legyenek $V, W \in U(0,1)$ függetlenek. Ha $X = \sqrt{-2\ln V}\cos 2\pi W$ és $Y = \sqrt{-2\ln V}\sin 2\pi W$, akkor bizonyítsuk be, hogy $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek!

(*Megjegyzés*: Ezen az eredményen alapszik a standard normális eloszlású véletlen számok generálásának Box-Müller módszere.)

Megoldás: Először felhasználjuk, hogy $U = -2\ln V \in E\left(\frac{1}{2}\right)$ és $Z = 2\pi W \in U\left(0, 2\pi\right)$ függetlenek. Ezért $f_{U,Z}(u,z) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{u}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}$, $u > 0, z \in (0, 2\pi)$. Végrehajtva a $T = \sqrt{U}, Z = Z$ transzformációt: $f_{T,Z}(t,z) = f_{U,Z}\left(t^2, z\right) = t\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{2\pi}$. Most az $X = T\cos Z, Y = T\sin Z$ $\Rightarrow T = \sqrt{X^2+Y^2}, Z = \operatorname{arctg}\frac{Y}{X}, J(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ transzformációt végrehajtva $f_{X,Y}(x,y) = f_{T,Z}(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x})\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}\right)$, ami már igazolja az állítást.

III.7.35. Feladat: Mutassuk meg, hogy ha $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, akkor $\begin{pmatrix} m_1 + d_1 X \\ m_2 + \varrho d_2 X + \sqrt{1-\varrho^2}d_2 Y \end{pmatrix} \in N_2\left(\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_1^2 & \varrho d_1 d_2 \\ \varrho d_1 d_2 & d_2^2 \end{pmatrix}\right)$!

(*Megjegyzés*: Ezen az eredményen alapulva lehet előírt várhatóérték-vektorú, és kovarianciamátrixú síkbeli normális véletlen vektorokat generálni.)

Megoldás: Legyenek $V = m_1 + d_1 X, W = m_2 + \varrho d_2 X + \sqrt{1-\varrho^2}d_2 Y, \underline{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}, \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ \varrho d_2 & \sqrt{1-\varrho^2}d_2 \end{pmatrix}$. Ekkor $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \underline{m} + \underline{\underline{A}}\cdot\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. A normális eloszlás transzformációs törvényéből: $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \in N_2\left(\underline{m}, \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^T\right)$, ami már igazolja az eljárást.

III.7.36. Feladat: Ha $\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in N_2\left(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}}\right)$, akkor számoljuk ki a $\mathbf{P}\left(\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right) < \varepsilon\right)$ valószínűséget, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges!

(*Megjegyzés*: A keresett mennyiség azt adja meg, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy az $\underline{X}$ kétdimenziós normális vektor értékei az $\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right)^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}\left(\underline{x}-\underline{\mu}\right) = \varepsilon$ egyenletű ellipszis belsejébe essenek. Az ú.n. *szórásellipszis* centrumpontja a $\underline{\mu}$ várhatóérték-vektor, tengelyei pedig a $\underline{\underline{\Sigma}}$ kovarianciamátrix sajátvektorainak irányába mutatnak. A szimmetriatengelyek hosszainak aránya a $\underline{\underline{\Sigma}}$ sajátértékeinek arányát adja, míg a tengelyek hosszai függnek ε-tól.)

Megoldás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges! Ekkor $\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right)^T\underline{\underline{\Sigma}}^{-1}\left(\underline{X}-\underline{\mu}\right) < \varepsilon \iff \underline{Y}^T\underline{Y} < \varepsilon$, ahol

$\underline{Y} = \underline{\underline{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} \left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) \in N_2\left(\underline{0}, \underline{\underline{E}}\right)$. Mivel $\underline{Y}^T \underline{Y} \in E\left(\frac{1}{2}\right)$, ezért
$\mathbf{P}\left(\left(\underline{X} - \underline{\mu}\right)^T \underline{\underline{\Sigma}}^{-1} \left(\underline{X} - \underline{\mu}\right) < \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(E\left(\frac{1}{2}\right) < \varepsilon\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\varepsilon}$.

III.7.1. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in G(p)$ függetlenek. Adja meg a $\mathbf{P}(X = Y)$ valószínűséget!

III.7.2. Gyakorlat: Egy autószerelő műhelybe érkezve két autó van előttünk, az egyiket éppen szerelik. Feltételezve, hogy a szerelési idők egymástól független $E(2)$ eloszlású valószínűségi változók, mennyi a valószínűsége, hogy autónkat 1 (órán) belül megjavítják?

III.7.3. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in E(1)$ függetlenek. Bizonyítsa be, hogy $\min\{X, Y\} \in E(2)$ és, hogy $\max\{X, Y\}$ eloszlása megegyezik $X + \frac{1}{2}Y$ eloszlásával!

III.7.4. Gyakorlat: A karácsonyfánkon 15 db egymással sorosan összekapcsolt színes égő világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke 30 óra. Amikor elalszik a fény, azonnal kicserélem a kiégett izzót. Adja meg az izzócserék közötti időtartam eloszlását!

III.7.5. Gyakorlat: A karácsonyfánkon 15 db egymással sorosan összekapcsolt színes égő világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Milyen kellene, hogy legyen az izzók élettartamának várható értéke ahhoz, hogy 100 órás üzemelés alatt 95%-os valószínűséggel ne kelljen izzót cserélnem?

III.7.6. Gyakorlat: Két kiváló Forma 1-es versenyző köridеje az időmérő edzésen egyaránt egyenletes eloszlású az $\left[1{:}21', 1{:}22'\right]$ időintervallumban. (Az óra ezredmásodperc pontossággal tud mérni.) Mennyi a valószínűsége, hogy azonos időt fognak menni egy adott körben? Kisebb vagy nagyobb annak a valószínűsége, hogy ha mindegyiküknek két kísérlete van, akkor a két-két eredmény minimuma azonos?

III.7.7. Gyakorlat: Tegyük fel, hogy minden héten tízmillió szelvénnyel fogadnak. Mennyi annak a valószínűsége, hogy tíz héten keresztül nem lesz ötös találat?

III.7.8. Gyakorlat: Pincénkben 2 db párhuzamosan kapcsolt izzó világít. Az izzók élettartamai egymástól független, külön-külön exponenciális eloszlású valószínűségi változók, melyek várható értéke 6 hónap. Csak akkor szoktam izzót cserélni, ha már mindkettő kiégett. Vezesse le az izzócserék közti időtartam eloszlásfüggvényét!

III.7.9. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek, és $Z = |X + Y|$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét!

III.7.10. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, és $Z = |X - Y|$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét!

III.7.11. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek, és $Z = X + \frac{1}{2}Y$. Határozza meg Z sűrűségfüggvényét! Mennyi a Z várható értéke és szórása?

III.7.12. Gyakorlat: Egy csomag 32 lapos magyar kártyából kihúzunk visszatevés nélkül 10 lapot. Legyen X_p, X_z, X_t, X_m rendre a kihúzott piros, zöld, tök és makk színű lapok száma! Adja meg $(X_p, X_z, X_t, X_m)^T$ eloszlását! Mennyi a $\mathbf{P}(X_p < X_z)$ valószínűség?

III.7.13. Gyakorlat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in E(\lambda)$ teljesen függetlenek. Határozza meg a
$p_k = \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \leq 1 < X_1 + X_2 + \ldots + X_k + X_{k+1})$
valószínűséget! $(1 \leq k \leq n-1)$.

III.7.14. Gyakorlat: Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a\left(x^2 + xy + y^2\right), & \text{ha } 0 < x, y < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}.$$
Mennyi az a értéke? Független-e X és Y ?

III.7.15. Gyakorlat: Háromszor dobunk egy szabályos dobókockával. X a kapott hatosok száma, Y a kapott páros értékek száma. Adja meg X és Y együttes eloszlását, kovariancia mátrixukat. Független-e X és Y?

III.7.16. Gyakorlat: Írja fel két független valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvényét, ha az első standard normális, a második pedig 0,2 paraméterű exponenciális eloszlású!

III.7.17. Gyakorlat: Az $[-1,1] \times [-1,1]$ négyzeten egymás után sorsolunk ki véletlen pontokat. Akkor állunk meg, amikor a kisorsolt pont először esik bele az origó középpontú egységkörbe. Mi a pontok számának eloszlása?

III.7.18. Gyakorlat: Ha a $\underline{v} = (X,Y)^T$ vektor egyenletes eloszlású az origó középpontú, egységnyi sugarú körlemezen, mi a sűrűségfüggvénye a vektor hosszának, $\|\underline{v}\| = \sqrt{X^2+Y^2}$−nek?

III.7.19. Gyakorlat: Ha $X, Y \in U(0,1)$, akkor mi az $(X+Y, X-Y)^T$ kétdimenziós valószínűségi változó várhatóérték-vektora és kovarianciamátrixa?

III.7.20. Gyakorlat: Legyen az X és Y együttes eloszlásfüggvénye: $F_{X,Y}(x,y) = x^3 y, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$. Mennyi a $\mathbf{P}(0{,}25 \le X \le 0{,}75,\ 0{,}25 \le Y \le 0{,}5)$ valószínűség?

III.7.21. Gyakorlat: Határozza meg az origó középpontú 1 sugarú körlapon vett egyenletes eloszlás kovarianciamátrixát!

III.7.22. Gyakorlat: Legyen az $(X,Y)^T$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{7}\left[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18\right], x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$. Függetlenek a komponensek?

III.7.23. Gyakorlat: Két ember mindegyike addig dob fel egy-egy szabályos pénzérmét, amíg az első fej ki nem jön. Mennyi a valószínűsége, hogy ehhez mindkettőnek ugyanannyi dobásra van szüksége?

III.7.24. Gyakorlat: Egy jól megkevert csomag 32 lapos magyar kártyából leosztunk 8-at. Legyen $X = 1$, ha a leosztott lapok között van piros, és $X = 0$, ha nincs. Legyen továbbá $Y = 1$, ha van a nyolc lap között ász, és $Y = 0$ különben. Adja meg X és Y együttes eloszlását!

III.7.25. Gyakorlat: Két busz egymástól függetlenül X, illetve Y idő alatt éri el a megállót, ahol én várakozom. Bármelyik busszal tudom az utamat folytatni. Mennyi a valószínűsége, hogy $x > 0$ időn belül befut valamelyik, ha $X, Y \in E(\lambda)$ függetlenek?

III.7.26. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = \frac{X}{X+Y}$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

III.7.27. Gyakorlat: Legyen $X \in U(0,1)$. X segítségvel generáljon az origó középpontú egységkör kerületén egyenletes eloszlású kétdimenziós véletlen pontot! (Segítség: $Z = \cos 2\pi X, Y = \sin 2\pi X$).

III.7.28. Gyakorlat: Egy műszerben egy bizonyos főegység átlagos élettartama 2 év, a beépített ellenőrző rendszeré pedig 3 év. A használat során egyik sem öregszik és egyikük tönkremenetele sem függ a másiktól. Mennyi a valószínűsége, hogy az ellenőrző rendszer előbb romlik el, mint a főegység? (Segítség: $X \in E\left(\frac{1}{2}\right)$ a főegység, $Y \in E\left(\frac{1}{3}\right)$ az ellenőrző egység élettartama, függetlenek. Mennyi $\mathbf{P}(Y < X)$?)

III.7.29. Gyakorlat: Legyenek $X \in Po(0,5)$ és $Y \in Po(0,1)$ függetlenek! Mennyi $\mathbf{P}(X + Y = 2)$?

III.7.30. Gyakorlat: Legyenek $X \in G(0,5)$ és $Y \in G(1,5)$ függetlenek! Mennyi $\mathbf{P}(X + Y = k), (k = 2, 3, 4, \ldots)$?

III.7.31. Gyakorlat: Számolja ki az $f_X(x) = 1, x \in [0,1]$ és az $f_Y(y) = \frac{2y}{5}, y \in [2,3]$ sűrűségfüggvények konvolúciós sűrűségfüggvényét, $f_{X+Y}(t)$-t!

III.7.32. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = 2X - Y$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét!

III.7.33. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in U(0,1)$ függetlenek, $Z = X - Y$. Számolja ki Z eloszlásfüggvényét!

III.7.34. Gyakorlat: Bináris, ± 1 értékű egyformán valószínű szimbólumot küldünk át zajos csatornán, ahol a szimbólumhoz tőle független $f(x) = 0{,}5(1 - 0{,}5|x|)$, $x \in (-2, 2)$ sűrűségfüggvényű zaj adódik. Ha a csatorna kimenete pozitív, akkor 1 mellett, egyébként -1 mellett döntünk. Mennyi a hibás döntés valószínűsége?

III.7.35. Gyakorlat: Egy fogorvosi rendelőbe érkezve, ketten vannak előttünk, az egyiknek éppen most kezdték el a kezelését. A fogorvos egy pácienssel 0,5 paraméterű exponenciális idő alatt végez. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egységnyi időn belül sorra kerülünk? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha párhuzamosan két orvos fogad egyszerre!

III.7.36. Gyakorlat: Egy berendezés X ideig működik hibamentesen, és Y idő kell a javításához, ahol $X \in E(\lambda)$ és $Y \in E(\mu)$ egymástól függetlenek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a gépet a $T > 0$ időtartam alatt legalább kétszer kellett javítani?

III.7.37. Gyakorlat: Legyenek $X \in N(5, 2)$ és $Y \in N(4, 3)$ függetlenek. Adja meg a $\mathbf{P}(X < Y)$ valószínűséget!

III.7.38. Gyakorlat: Az emberek testsúlyát $N(75, 12)$ eloszlással modellezzük. Ha egy négyszemélyes lift 320 (kg)-os összteherbírású, akkor menynyi a valószínűsége, hogy egy négy fős csoport túlsúlyos lesz?

III.7.39. Gyakorlat: Egy üzemben két gép üzemel egymástól független X_1 és X_2 ideig, ahol X_1, $X_2 \in E(0, 2)$. A folyamatos gyártáshoz az egyik gép üzemeltetése is elegendő, a másik gép tartalék. Ha az éppen műszakban álló gép meghibásodik, azonnal a tartalékot állítják üzembe. *Melegtartalék* esetén a tartalék gép is állandóan be van kapcsolva, azaz ilyenkor a folyamatos működési idő $\max\{X_1, X_2\}$. A *hidegtartalékolás* esetén a tartalék gépet csak az üzembeállítás pillanatában kapcsolják be. Tehát ilyenkor a folyamatos üzemeltetési idő $X_1 + X_2$ lesz. Határozza meg a folyamatos üzemeltetés idejének várható értékét meleg-és hidegtartalékolás esetén!

III.7.40. Gyakorlat: Legyen $X \in E(2)$. Határozza meg a $\mathbf{cov}(X, X^2)$ számot!

III.7.41. Gyakorlat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}(X_i > 0) = 1$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_k}{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right) = \frac{k}{n}$!

III.7.42. Gyakorlat: Legyen az X valószínűségi változó olyan, hogy $\mathbf{P}(X > 0) = \alpha, \mathbf{P}(X < 0) = \beta, \mathbf{E}X = a, \mathbf{E}|X| = b$. Számolja ki a $\mathbf{cov}\left(X, \frac{|X|}{X}\right)$-t!

III.7.43. Gyakorlat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók.
$\mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{4}, \mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{1}{2}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Számítsa ki az $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ valószínűségi változó várható értékét és szórását!

III.7.44. Gyakorlat: Legyenek X és Y független valószínűségi változók. Bizonyítsa be, hogy $\sigma^2(XY) = \sigma^2 X \sigma^2 Y + (\mathbf{E}X)^2 \sigma^2 Y + (\mathbf{E}Y)^2 \sigma^2 X$.

III.7.45. Gyakorlat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in U(0,1)$ teljesen függetlenek. Ezek kijelölnek $n+1$ db részintervallumot $(0,1)$ −en. Jelölje Y_k a k-adik részintervallum hosszát $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$. Mutassa meg, hogy $\mathbf{E}Y_k = \frac{1}{n+1}$!

III.7.46. Gyakorlat: Fodrásznál sorunkra várunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az átlagosnál tovább várakozunk, ha a várakozási idő $E(2)$?

III.7.47. Gyakorlat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek létezik a várható értékük és szórásuk: $\mathbf{E}X_i = \mu, \sigma^2 X_i = d^2$. Fejezze ki μ és d függvényében a $\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i\right)$ és $\mathbf{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ mennyiségeket!

III.7.48. Gyakorlat: Három szabályos kockával dobunk. Jelölje Y a dobott értékek összegét. Adja meg $\mathbf{E}Y$-t és $\sigma^2 Y$-t!

III.7.49. Gyakorlat: Legyen $X \in N(0,1)$. Számolja ki $\mathbf{R}(X, X^3)$-t!

III.7.50. Gyakorlat: Egy kalapban egy-egy cédulára fel vannak írva az $1, 2, 3$ számjegyek. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két cédulát. X az első, Y a második húzás eredménye. Adja meg $\mathbf{R}(X, Y)$-t! Független-e X és Y?

III.7.51. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy ha X és Y azonos szórású valószínűségi változók, akkor $X + Y$ és $X - Y$ korrelálatlanok!

III.7.52. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ függetlenek! $V = X + Y$ és $W = X - Y + 1$. Adja meg a $(V, W)^T$ vektor kovarianciamátrixát!

III.7.53. Gyakorlat: Legyenek X, Y független valószínűségi változók, ahol $\mathbf{E}X = 4, \mathbf{E}Y = 0, \sigma^2 X = 1, \sigma^2 Y = 2$. Határozza meg az alábbi mennyiségeket: $\mathbf{E}(5X - 6Y), \mathbf{E}XY, \sigma^2(5X - 6Y + 8), \mathbf{cov}(5X, 6Y)$!

III.7.54. Gyakorlat: Ultizásnál a 32 lapos magyar kártyából kettőt talonba osztanak. Jelölje X a talonba került piros színű lapok, Y pedig az ászok számát! Számolja ki X és Y kovarianciáját!

III.7.55. Gyakorlat: Bizonyítsa be, hogy ha $\mathbf{E}X = \mathbf{E}X^3 = 0$, akkor X és Y korrelálatlanok!

III.7.56. Gyakorlat: Az X és Y együttes sűrűségfüggvénye: $f_{X,Y}(x,y) = 10x^2y$, $0 \le y \le x \le 1$. Határozza meg adott $X = x$ feltétel esetén az Y feltételes sűrűségfüggvényét!

III.7.57. Gyakorlat: Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \frac{12}{5}\left(x^2 - xy + y^2\right)$, ha $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, egyébként $f_{X,Y}(x,y) = 0$. Számolja ki az $f_{X|Y}(x \mid y)$ feltételes sűrűségfüggvényt! Számolja ki a kovarianciamátrixot! Számolja ki az $\mathbf{E}(X \mid Y = y)$ regressziós függvényt!

III.7.58. Gyakorlat: Egy kétdimenziós valószínűségi változó első koordinátájának sűrűségfüggvénye $f_X(x) = 2x, (0 < x < 1)$. Ha az első koordináta x, akkor ilyen feltétel mellett a második koordináta (Y) $1 + x$ paraméterű exponenciális eloszlást követ. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két koordináta összege kisebb mint 1!

III.7.59. Gyakorlat: Dobjunk n-szer egy szabályos dobókockával. Jelölje X a hatosok számát, Y pedig a páros dobások számát! Számolja ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót!

III.7.60. Gyakorlat: Legyen az X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi d^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{sd^2}\right)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Határozza meg $Z = \max\{|X|, |Y|\}$ sűrűségfüggvényét!

III.7.61. Gyakorlat: Legyenek $X, Y \in N(0,1)$ független valószínűségi változók egy síkbeli vektor komponensei: $\underline{V} = (X,Y)^T$. Adja meg a vektor hosszának az eloszlásfüggvényét!

III.7.62. Gyakorlat: Legyen $(X,Y)^T \in N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Adja meg azt a lineáris transzformációt, melynek eredményeképp a komponensek független standard normális eloszlásúak lesznek!

III.7.63. Gyakorlat: X és Y együttes eloszlása kétdimenziós normális, $\underline{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^T$ várhatóérték-vektorral és $\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Fejezze ki az $\mathbf{E}(Y \mid X)$ regressziót $\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}}$ komponensei és X segítségével!

IV. fejezet

Valószínűségi törvények

IV.1. Nevezetes egyenlőtlenségek

IV.1.1. Tétel: *(A Markov-egyenlőtlenség)*
Legyen $Y \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke: $\mathbf{E}Y \geq 0$. Ekkor $\forall\, \delta > 0$ esetén $\mathbf{P}(Y > \delta) \leq \frac{\mathbf{E}Y}{\delta}$.

Bizonyítás:

Diszkrét valószínűségi változó esetében:
$\mathbf{E}Y = \sum\limits_{\forall i} y_i \mathbf{P}(Y = y_i) \geq \sum\limits_{y_i > \delta} y_i \mathbf{P}(Y = y_i) \geq \delta \cdot \sum\limits_{y_i > \delta} \mathbf{P}(Y = y_i) =$
$= \delta \cdot \mathbf{P}(Y > \delta) \ \Rightarrow$ állítás.

Folytonos valószínűségi változó esetében:
$\mathbf{E}Y = \int\limits_0^\infty x \cdot f_Y(x)\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_\delta^\infty x \cdot f_Y(x)\,\mathrm{d}x \geq \delta \cdot \int\limits_\delta^\infty f_Y(x)\,\mathrm{d}x = \delta \cdot (1 - F_Y(\delta)) =$
$= \delta \cdot \mathbf{P}(Y > \delta) \ \Rightarrow$ állítás. ∎

Megjegyzés:

a.) Az egyenlőtlenségben most akkor kapunk nem semmitmondó állítást, ha $\delta \geq \mathbf{E}Y$. Különben a Markov-egyenlőtlenség csak annyit jelentene, hogy egy valószínűség nem nagyobb, mint egy 1-nél nagyobb szám... Tehát most $\delta > 0$ nem azt sugallja — mint általában a matematikai tételekben —, hogy δ tetszőlegesen kicsi pozitív szám, hanem éppen ellenkezőleg, δ most nagy.

b.) A Markov-egyenlőtlenséget a következő módon fogalmazhatjuk át, ha végrehajtjuk a $\delta = \lambda \cdot \mathbf{E}X$ helyettesítést: $\forall\lambda > 0$ esetén $\mathbf{P}(Y > \lambda \cdot \mathbf{E}Y) \leq \frac{1}{\lambda}$. Innen viszont az olvasható le, hogy Y kicsi valószínűséggel vehet csak fel a saját várható értékénél sokkal nagyobb értékeket, vagyis Y „hajlamos" a várható értéke közelében felvenni értékét. Pl. annak valószínűsége, hogy egy nemnegatív valószínűségi változó a várható értékének ötszörösénél nagyobb értéket felvegyen, 0,2-nál kisebb.

IV.1.2. Tétel: *(A Csebisev-egyenlőtlenség)*
Legyen X olyan valószínűségi változó, amelynek véges a szórásnégyzete: $\sigma^2 X < \infty$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2 X}{\varepsilon^2}$.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget $Y = (X - \mathbf{E}X)^2$, $\delta = \varepsilon^2$ helyettesítéssel:
$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}((X - \mathbf{E}X)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2 X}{\varepsilon^2}$. ■

Megjegyzés:

a.) ε-ról ugyanaz elmondható, mint a Markov-egyenlőtlenség esetén δ-ról: $\varepsilon \geq \sigma X$ esetben lesz csak nem-triviális az egyenlőtlenség.

b.) A Csebisev-egyenlőtlenség is átfogalmazható, ha $\varepsilon = \delta \cdot \sigma X$:
Minden $\delta > 0$ esetén $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \delta \cdot \sigma X) \leq \frac{1}{\delta^2}$. Vagyis a valószínűségi változó a várható értéke körül ingadozik, és annál kisebb mértékben, minél kisebb a szórása. Pl. egy valószínűségi változó nem térhet el jobban a várható értékétől, mint a szórása háromszorosa, csak legfeljebb $\frac{1}{9} \approx 0{,}11$ valószínűséggel.

IV.2. Valószínűségi változók sorozatainak konvergenciái

IV.2.1. Definíció: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ és X valószínűségi változók az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy

a.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változó-sorozat *egy valószínűséggel* konvergál X-hez, ha az $A = \left\{\omega;\ \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}$ esemény egy valószínűségű: $\mathbf{P}(A) = 1$.
Jelölés: $X_n \xrightarrow{1v} X$.

b.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségiváltozó-sorozat L_r-ben (vagy *r-edik momentumban)* tart X-hez, ha $\mathbf{E}\left(|X_n - X|^r\right) \to 0 \ \ (n \to \infty)$.
Jelölés: $X_n \overset{L_r}{\to} X$.

c.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségiváltozó-sorozat *sztochasztikusan* konvergál X-hez, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}\left(\{\omega;\ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \to 0 \ \ (n \to \infty)$.
Jelölés: $X_n \overset{st}{\to} X$.

d.) Az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségiváltozó-sorozat *eloszlásban* konvergál X-hez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ minden olyan $x \in \mathbb{R}$ -ben, ahol $F_X(x)$ folytonos.
Jelölés: $X_n \overset{e}{\to} X$.

IV.2.1. Tétel: Az eloszlásban való konvergenciából nem következik sem az egy valószínűséggel való, sem az L_r-ben való, sem a sztochasztikus konvergencia.

Bizonyítás: Lásd a IV.6.5. feladatot! ■

IV.2.2. Tétel: Ha $X_n \overset{st}{\to} X$, akkor $X_n \overset{e}{\to} X$ is, azaz a sztochasztikus konvergenciából következik az eloszlásban való konvergencia.

Bizonyítás: Lásd a IV.6.6. feladatot! ■

IV.2.3. Tétel: Ha $X_n \overset{L_1}{\to} X$, akkor $X_n \overset{st}{\to} X$ is, azaz az L_1-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia, így az eloszlásban való konvergencia is. Az állítás megfordítása általában nem igaz !

Bizonyítás: Lásd a IV.6.7. feladatot! ■

IV.2.4. Tétel: Ha $X_n \overset{1v}{\to} X$, akkor $X_n \overset{st}{\to} X$ is, de a megfordítás általában nem igaz.

Bizonyítás: Lásd Rényi [1] 327. oldal!

IV.2.1. Példa: *(Gyengén igen, erősen nem konvergens valószínűségiváltozó-sorozat*

Legyen $U \in U(0,1)$ és $f_{n,k}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \notin \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \\ 1, & \text{ha } x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right) \end{cases}$, ahol $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, $k = 1, 2, \ldots, n$. A valószínűségiváltozó-sorozat definíciója: $X_m = f_{n,k}(U)$, ahol $m = n + k$. Ekkor $X_m \overset{st}{\to} X$, ahol $X \equiv 0$, hiszen tetszőleges $\varepsilon \in (0,1)$ esetén $\mathbf{P}(|X_m - X| > \varepsilon) = \mathbf{P}\left(U < \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Az egy valószínűséggel való konvergencia viszont nem teljesül, mert az $X_m \to 0$ egyetlen $U \in (0,1)$ realizációra sem igaz! Ugyanis tetszőleges $x \in (0,1)$ esetén és minden $n \in \mathbb{N}$-re létezik k, hogy $f_{n,k}(x) = 1$ legyen.)

IV.2.5. Tétel: Az egy valószínűséggel való konvergencia és az L_r-beli konvergencia közül egyik sem következik a másikból általános esetben.

Bizonyítás: Lásd a IV.6.8. feladatot! ■

Megjegyzés: összegezve a fejezetben kimondott tételeket, a konvergenciák közötti erősorrend:

$$\left.\begin{array}{l} X_n \overset{1v}{\to} X \\ \\ X_n \overset{L_r}{\to} X \end{array}\right] \Rightarrow X_n \overset{st}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{e}{\to} X.$$

IV.3. A nagy számok törvényei

A nagy számok törvényei azt a megfigyelést támasztják alá elméletileg is, hogy egy valószínűségi változót sokszor megfigyelve, az átlagérték mindig közel van az elméleti várható értékhez. Az is igaz, hogy a megfigyelések növekedtével az eltérés csökken, azaz az átlagértékek konvergálnak is a várható értékhez. A különböző nagy számok tételei a megfigyelés-sorozat körülményeiben és a konvergencia tipusában térnek el egymástól. Ha a konvergencia sztochasztikus, gyenge törvényről, ha egy valószínűségű, akkor erős alakról beszélünk.

IV.3.1. Tétel: *(A nagy számok tételének Csebisev-féle gyenge alakja)* Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók páronként függetlenek és azonos eloszlásúak (azonos eloszlásfüggvénnyel rendelkezők) az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Létezzék a közös $\mu = \mathbf{E}X_i$ várható értékük és a közös $d^2 = \sigma^2 X_i$ szórásnégyzetük.

Ekkor a $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ valószínűségiváltozó-sorozatra $Z_n \xrightarrow{st} \mu$, vagyis $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Bizonyítás:
$\mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mu = \mu.$
A páronkénti függetlenség miatt:
$\sigma^2 Z_n = \sigma^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 X_i = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot d^2 = \frac{d^2}{n}.$
Látható tehát, hogy Z_n minden indexre teljesíti a Csebisev-egyenlőtlenség feltételét, így: $\mathbf{P}(|Z_n - \mathbf{E}Z_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(|Z_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2 Z_n}{\varepsilon^2} =$
$= \frac{d^2}{n \cdot \varepsilon^2} \to 0 \quad (n \to \infty)$, ami már igazolja az állítást. ■

IV.3.2. Tétel: *(A nagy számok tételének Bernoulli-féle gyenge alakja)*
Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \Im$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Hajtsunk végre egy végtelen kísérletsorozatot, vagyis figyeljük meg az A bekövetkezéseit az $1, 2, \ldots, n, \ldots$ -edik végrehajtáskor! Legyen $X_i \in I(A)$, vagyis az i-edik végrehajtáskor a megfigyelt A esemény indikátor valószínűségi változója. X_i-k teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak: $p_0 = \mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(\bar{A}) = q, \quad p_1 = \mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(A) = p, \quad \mathbf{E}X_i = p, \quad \sigma^2 X_i = pq$. Legyen $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} = r_n(A)$ a relatív gyakoriság. Ekkor $r_n(A) \xrightarrow{st} p$, azaz $\forall \varepsilon > 0$ esetén
$\mathbf{P}(|r_n(A) - p| \geq \varepsilon) \to 0 \;\; (n \to \infty)$.

Bizonyítás: A tétel speciális esete a IV.3.1 tételnek.
Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenségnek a
$\mathbf{P}(|Z_n - \mathbf{E}Z_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(|r_n(A) - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2 Z_n}{\varepsilon^2} = \frac{pq}{n \cdot \varepsilon^2} \leq$
$\leq \frac{1}{4 \cdot n \cdot \varepsilon^2} \to 0, \;\; (n \to \infty)$ felel meg, mert $p \cdot q \leq \frac{1}{4}$ mindig teljesül.

Megjegyzés: A tétel azt mondja ki, hogy a relatív gyakoriság jól közelíti az esemény elméleti valószínűségét, ahogyan azt már a I.1.2 axiómák után tett megjegyzésünkben előre jeleztük.

IV.3.3. Tétel: *(A nagy számok tételének Kolmogorov-féle erős alakja)*
Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók teljesen függetlenek az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Létezzék a közös $\mu = \mathbf{E}X_i$ várható értékük és a szórásnégyzetükre teljesüljék a $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2 X_i \cdot \frac{1}{i^2} < \infty$ feltétel.

Ekkor a $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ valószínűségiváltozó-sorozatra $Z_n \xrightarrow{1v} \mu$, vagyis $\mathbf{P}(\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = \mu) = 1$.

Megjegyzés: A feltételrendszerben erősebb függetlenséget tételeztünk fel, de az azonos eloszlást nem tettük fel, csupán annak egy szükséges feltételét, hiszen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma^2 X_i \cdot \frac{1}{i^2} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{d^2}{i^2} < \infty$. Az állítás viszont a IV.2.4 tétel szerint erősebb, mint a IV.3.1 tételé volt.

Bizonyítás: Lásd Rényi [1] 328–333. oldal.

IV.4. A karakterisztikus függvény

IV.4.1. Definíció: A $Z = X + i \cdot Y$ komplex értékű valószínűségi változó *várható értékén* az $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}X + i \cdot \mathbf{E}Y$ komplex számot értjük.

IV.4.2. Definíció: Az X valószínűségi változó *karakterisztikus függvényén* a $\varphi_X(t) = \mathbf{E}e^{i \cdot Xt}$ $(t \in \mathbb{R})$ függvényt értjük.

Megjegyzés: Mivel $e^{i \cdot Xt} = \cos(Xt) + i \cdot \sin(Xt) \Rightarrow$
$\varphi_X(t) = \mathbf{E}\cos(Xt) + i \cdot \mathbf{E}\sin(Xt)$.
Diszkrét esetben: $\varphi_X(t) = \sum\limits_{\forall j} \cos(x_j t) \cdot \mathbf{P}(X = x_j) + i \cdot \sum\limits_{\forall j} \sin(x_j t) \cdot \mathbf{P}(X = x_j)$,
folytonos esetben: $\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x + i \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$.
Látható, hogy a karakterisztikus függvény a sűrűségfüggvény *Fourier*-transzformáltja.

IV.4.1. Tétel: *(A karakterisztikus függvény tulajdonságai)*

a.) $|\varphi_X(t)| \le 1$ és $\varphi_X(0) = 1$.

b.) φ_X egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en.

c.) φ_X pozitív szemidefinit függvény, azaz $\forall n$, $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ és $\forall z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex számokra $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n} \varphi_X(t_k - t_l) \cdot z_k \cdot \bar{z}_l \ge 0$.

d.) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.

e.) Ha $X_1, X_2, \ldots, X_p$ teljesen függetlenek, akkor $\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_p}(t) = \prod_{j=1}^{p} \varphi_{X_j}(t)$.

f.) Ha X első n momentuma létezik, akkor φ_X n-szer differenciálható és $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_k \cdot (i \cdot t)^k}{k!} + o(t^n)$, valamint $\mu_k = \mathbf{E}X^k = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$.

g.) Minden eloszlást egyértelműen meghatároz a karakterisztikus függvénye. Ha X folytonos, akkor $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) \cdot \mathrm{e}^{-i \cdot tx} \, \mathrm{d}x \quad (x \in \mathbb{R})$. (Inverziós formula).

Bizonyítás:

a.) $|\varphi_X(t)| \leq \mathbf{E}(\left|\mathrm{e}^{i \cdot Xt}\right|) = \mathbf{E}(1) = 1, \;\; \varphi_X(0) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^0) = \mathbf{E}\ (1) = 1.$

b.) Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \, \mathrm{d}x = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists A_\varepsilon :$

$\int_{|x|>A_\varepsilon} f_X(x) \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}$. Fel fogjuk használni, hogy

$|\mathrm{e}^{i \cdot xt_1} - \mathrm{e}^{i \cdot xt_2}| < |x \cdot t_1 - x \cdot t_2|$ és $|\mathrm{e}^{i \cdot xt_1} - \mathrm{e}^{i \cdot xt_2}| < 2$.

$$|\varphi_X(t_1) - \varphi_X(t_2)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{e}^{i \cdot xt_1} - \mathrm{e}^{i \cdot xt_2}) \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{e}^{i \cdot xt_1} - \mathrm{e}^{i \cdot xt_2}| \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-A_\varepsilon}^{+A_\varepsilon} |\mathrm{e}^{i \cdot xt_1} - \mathrm{e}^{i \cdot xt_2}| \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x +$$

$$\int_{|x|>A_\varepsilon} |\mathrm{e}^{i \cdot xt_1} - \mathrm{e}^{i \cdot xt_2}| \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq \int_{-A_\varepsilon}^{+A_\varepsilon} |\mathrm{e}^{i \cdot xt_1} - \mathrm{e}^{i \cdot xt_2}| \cdot f_X(x) \, \mathrm{d}x + 2 \int_{|x|>A_\varepsilon} f_X(x) \, \mathrm{d}x \leq A_\varepsilon \cdot |t_1 - t_2| + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,$$

ha $|t_1 - t_2| < \frac{\varepsilon}{2A_\varepsilon}$.

c.) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \varphi_X(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l = \mathbf{E} \left(\left| \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i \cdot t_k X} \cdot z_k \right|^2 \right) \geq 0.$

d.) $\varphi_X(-t) = \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{i \cdot X(-t)}\right) = \mathbf{E}\left(\cos(-Xt)\right) + i \cdot \mathbf{E}\left(\sin(-Xt)\right) =$
$= \mathbf{E}\ (\cos(Xt)) - i \cdot \mathbf{E}\left(\sin(Xt)\right) = \overline{\varphi_X(t)}.$

e.) Felhasználjuk, hogy ha $X_1, X_2, \ldots, X_p$ teljesen függetlenek, akkor
$\mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{p} X_i\right) = \prod_{i=1}^{p} \mathbf{E}X_i$.

$$\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_p}(t) = \mathbf{E}\left(e^{i\cdot(X_1+X_2+\cdots+X_p)\cdot t}\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{p} e^{i\cdot X_k t}\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{p} \mathbf{E}\left(e^{i\cdot X_k t}\right) = \prod_{j=1}^{p} \varphi_{X_j}(t).$$

f.) $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \cdot f_X(x)\,dx, \varphi'_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{ixt} \cdot f_X(x)\,dx, \ldots$

$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^k e^{ixt} \cdot f_X(x)\,dx$.

Így $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_X(x)\,dx = i^k \cdot \mu_k$.

A Taylor-formulából a $t_0 = 0$ helyen: $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{k!} t^k + o\left(t^n\right) =$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_k \cdot (i\cdot t)^k}{k!} + o(t^n)$.

g.) Az állítást nem bizonyítjuk. ■

IV.4.1. Példa: *(A standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye)*

Ha $X \in N(0,1)$, akkor $f_X(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, és így a Fourier-transzformáltra:
$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) \cdot \varphi(x)\,dx + i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) \cdot \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) \cdot \varphi(x)\,dx.$$

A második integrál azért 0, mert az integrandus páratlan függvény. t-szerint deriválva midkét oldalt:
$$\varphi'_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} -x\sin(xt) \cdot \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(xt) \cdot (-x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx =$$
$= \left[\sin(xt) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} - t \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0 - t \cdot \varphi_X(t)$, mivel a IV.1.1 tétel a.) pontja szerint $\varphi_X(0) = 1$, a karakterisztikusfüggvény kielégíti az $y' = -t \cdot y, \quad y(0) = 1$ kezdetiérték-feladatot!

A differenciálegyenlet megoldásából a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényére: $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (t \in \mathbb{R})$.

IV.4.2. Példa: *(A karakterisztikus függvény általános normális esetben)*

Legyen most $X \in N(\mu, \sigma)$. Ekkor a standardizáltra $\tilde{X} = \frac{X-\mu}{\sigma} \in N(0,1)$ igaz, hiszen $P(\tilde{X} < x) = P(X < \sigma \cdot x + \mu) = \Phi_{\mu,\sigma}(\sigma \cdot x + \mu) = \Phi(x)$ (ld. a II.5.6 tételt.) Így $\varphi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{i \cdot Xt}\right) = \mathbf{E}\left(e^{i \cdot (\sigma \cdot \overline{X} + \mu)t}\right) = e^{i \cdot \mu t} \cdot \mathbf{E}\left(e^{i \cdot \overline{X}(\sigma t)}\right) = = e^{\left(i \cdot \mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$, felhasználva a IV.4.1 példa eredményét.

IV.4.3. Példa: *(A konvolúció számítása normális esetben)*
Ha $X_1, X_2, \ldots, X_p$ teljesen független, normális eloszlású valószínűségi változók, $X_i \in N(\mu_i, \sigma_i)$, akkor a IV.4.1 tétel e.) pontja szerint:

$$\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_p}(t) = \prod_{j=1}^{p} \varphi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{p} \exp\left(i\mu_j t - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(it \sum_{j=1}^{p} \mu_j - \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{p} \sigma_j^2\right).$$

Azaz teljesen független normális eloszlások konvolúciója is normális:
$\sum_{j=1}^{p} X_j \in N(\sum_{j=1}^{p} \mu_j, \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \sigma_j^2})$.

IV.4.4. Példa: *(Az exponenciális eloszlás karakterisztikus függvénye)*
Legyen most $X \in E(\lambda)$.

$$\varphi_X(t) = \int_0^\infty e^{i \cdot tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \int_0^\infty e^{(i \cdot t - \lambda)x} \, dx = \frac{\lambda}{i \cdot t - \lambda} \left[e^{(i \cdot t - \lambda)x}\right]_0^\infty = \frac{\lambda}{i \cdot t - \lambda}.$$

IV.4.5. Példa: *(Az egyenletes eloszlás karakterisztikus függvénye)*
Ha $X \in U([a,b])$, akkor $\varphi_X(t) = \int_a^b e^{i \cdot tx} \cdot \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{b-a} \left[e^{i \cdot tx}\right]_a^b = \frac{e^{i \cdot tb} - e^{i \cdot ta}}{(b-a) \cdot i \cdot t}$.
Ha speciálisan $a = -b$ $\varphi_X(t) = \frac{e^{i \cdot tb} - e^{-i \cdot tb}}{2b \cdot i \cdot t} = \frac{\sin(bt)}{b}$.

IV.4.2. Tétel: *(Helly-tétel)*
Legyen X és $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változó az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Ekkor $X_n \xrightarrow{e} X \iff \varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ egyenletesen.

Bizonyítás: A tétel bizonyítása megtalálható Rényi [1] 272. oldalán.

IV.5. Centrális határeloszlás tételek

IV.5.1. Tétel: *(A centrális határeloszlás tétel)*
Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók páronként függetlenek

és azonos eloszlásúak (azonos eloszlásfüggvénnyel rendelkezők) az $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőn. Létezzék a közös $\mu = \mathbf{E}X_i$ várható értékük és a közös $\sigma^2 = \sigma^2 X_i$ szórásnégyzetük.

Ekkor a $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}$ valószínűségiváltozó-sorozathoz létezik olyan $Z \in N(0,1)$, hogy $Z_n \xrightarrow{e} Z$, vagyis $F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n < x) =$
$= \mathbf{P}(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} < x) \to \Phi(x)$, $(n \to \infty)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás: A *Helly-tétel* alapján (ld. IV.4.2 tételt) azt fogjuk bizonyítani, hogy Z_n φ_{Z_n} karakterisztikus függvényeinek sorozata egyenletesen konvergál $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ -höz, a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez.

Mivel X_i-k azonos eloszlásúak, így közös karakterisztikus függvényük van, melyet jelöljünk $\varphi_{X_i}(t) = g(t)$ -vel. Ekkor az $X_i - \mu$ valószínűségi változók közös karakterisztikus függvénye:
$\psi(t) \overset{\circ}{=} \varphi_{X_j-\mu}(t) = e^{-i\cdot\mu t} \cdot \varphi_{X_j}(t) = e^{-i\cdot\mu t} \cdot g(t)$.
A függetlenség miatt: $\varphi_{X_i+X_2+\cdots+X_n-n\mu}(t) = [\psi(t)]^n$.
Így $\varphi_{Z_n}(t) = \varphi_{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}}(t) = \left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)\right]^n$.

Mivel $\mathbf{E}(X_i-\mu) = 0$ és $\mathbf{E}\,(X_i-\mu)^2 = \sigma^2 X_i = \sigma^2$ a $\psi(t)$ első két deriváltja létezik, és a IV.4.1 tétel miatt második tagig 0 körül Taylor-sorba fejthető:
$\psi(t) = 1 + \frac{i\cdot\mathbf{E}(X_i-\mu)}{1!}\cdot t + \frac{(i)^2\cdot\mathbf{E}(X_i-\mu)^2}{2!}\cdot t^2 + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2\cdot t^2}{2} + o(t^2)$.
Így $\varphi_{Z_n}(t) = \left[\psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{\frac{t^2}{2}}{n} + o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right]^n$.

A t változó rögzítése után:
$o\left(\frac{t^2}{n\cdot\sigma^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot o(1)$ vagyis
$\varphi_{Z_n}(t) = \left[1 - \frac{1}{n}\cdot(\frac{t^2}{2} + o(1))\right]^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (n \to \infty)$.

Felhasználtuk, hogy $y_n = \frac{t^2}{2} + o(1) \to \frac{t^2}{2} \quad (n \to \infty)$ és, hogy
$\left[1 - \frac{y_n}{n}\right]^n \to e^y$, ha $y_n \to y$ $(n \to \infty)$.
Vagyis $\varphi_{Z_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ egyenletesen, azaz $F_{Z_n}(x) \to \Phi(x)$ $(n \to \infty)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Megjegyzés: Az előző tétel rámutat a normális eloszlásnak az elméletben játszott fontos szerepének okára: tetszőleges eloszlású valószínűségi változók átlaga normális eloszlást követ. Tehát, ha egy véletlen jelenséget sok egyenként nem jelentős, független hatás összegeként kapunk, akkor az jól közelíthető a normális eloszlással. Tipikusan ilyenek a mérésekből származó adatok: a Duna közepes vízállása, a napi középhőmérséklet stb. Az elektromos elosztó központban is normális eloszlásúnak tekinthető a lakossági fogyasztás, hiszen nagyon sok kisfogyasztó eredőjeként áll elő. Lehet, hogy az egyes fogyasztók külön-külön nem a normális eloszlás szerint fogyasztanak, de az átlagos fogyasztást a nagy számok törvénye értelmében biztosan tekinthetjük normálisnak modelljeinkben.

IV.5.2. Tétel: *(A Moivre–Laplace-tétel, 1733.)*
Legyen $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező, $A \in \Im$ egy pozitív valószínűségű esemény: $p = \mathbf{P}(A) > 0$. Hajtsunk végre egy végtelen kísérletsorozatot, vagyis figyeljük meg az A bekövetkezéseit az $1, 2, \ldots, n, \ldots$-edik kísérletnél! Legyen $X_i = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$, vagyis az i-edik végrehajtáskor az esemény indikátor valószínűségi változója. Az X_i-k teljesen függetlenek és azonos eloszlásúak:
$p_0 = \mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(\bar{A}) = q$, $p_1 = \mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(A) = p, \mathbf{E}X_i = p$, $\sigma^2 X_i = pq$.

Ekkor a $Z_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}$ valószínűségiváltozó-sorozathoz létezik olyan $Z \in N(0,1)$, hogy $Z_n \xrightarrow{e} Z$, vagyis
$F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n < x) \to \Phi(x) \ \ (n \to \infty) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás: A IV.5.1 tétel speciális esete, amikor az $X_i \in I(A)$, azaz indikátor eloszlásúak. Ráadásul
$F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n < x) = \mathbf{P}(n \cdot S_n < \sqrt{n \cdot p \cdot q} \cdot x + n \cdot p)$, mivel
$r_n(A) = S_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ a relatív gyakoriság és $n \cdot S_n \in B(n,p)$, így
$\mathbf{P}(n \cdot S_n = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$, amiből az eloszlásfüggvényre:
$$\mathbf{P}(n \cdot S_n < \sqrt{npq}\cdot x + np) = \sum_{k<\sqrt{npq}\cdot x+np} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \sum_{\frac{k-np}{\sqrt{npq}}<x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}.$$

Tehát a tétel azt állítja, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\frac{k-np}{\sqrt{npq}}<x} \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \ (\forall x \in \mathbb{R}).$$

IV.6. Kidolgozott feladatok és gyakorlatok

IV.6.1. Feladat: Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0,4. Milyen határok közé fog esni 90%-os valószínűséggel a találatok száma?

Megoldás: Jelöljük X-szel a találatok számát! A lövéssorozat felfogható egy $n = 200$ hosszúságú kísérletsorozatnak, ahol a megfigyelt esemény a célpont eltalálása. Ezért binomiális eloszlású $n = 200$ és $p = 0{,}4$ paraméterekkel. Így $\mathbf{E}X = np = 200 \cdot 0{,}4 = 80, \sigma^2 X = npq = 200 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 48$. A Csebisev-egyenlőtlenséget alkalmazzuk erre az esetre $\varepsilon = \sqrt{10}\sigma X$ választással:
$\mathbf{P}\left(|X - \mathbf{E}X| > \sqrt{10}\sigma X\right) = \mathbf{P}\left(|X - 80| > \sqrt{480}\right) \leq 0{,}1$, ahonnan
$\mathbf{P}\left(|X - 80| \leq \sqrt{480}\right) = \mathbf{P}\left(80 - \sqrt{480} \leq X \leq 80 + \sqrt{480}\right) =$
$= \mathbf{P}\left(58 \leq X \leq 102\right) \geq 0{,}9$ adódik, azaz a lövések 58 és 101 közé fognak esni legalább 90%-os valószínűséggel.

IV.6.2. Feladat: Egy automata minőségvizsgáló $n = 100000$ elemű mintát ellenőriz le egy gyártósoron előállított számítógépes alkatrésztömegből. A vizsgálat után milyen valószínűséggel állíthatjuk, hogy a mintából meghatározott selejtarány a készlet elméleti p selejtvalószínűségétől legfeljebb 0,01-dal tér el?

Megoldás: X most a selejtes termékek számát jelölje a mintában! Ekkor a selejtarány a mintában $\frac{X}{10^5}$ lesz. Nyilván $X \in B(100000, p)$, ahol a p ismeretlen. $\mathbf{E}X = np = 10^5 p$, $\sigma^2 X = npq = 10^5 \cdot pq$. A Csebisev-egyenlőséget most $\varepsilon = 1000$-rel alkalmazzuk: $\mathbf{P}\left(|X - 10^5 p| \leq 1000\right) =$
$= \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{10^5} - p\right| \leq 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{10^5 pq}{10^6} \geq \frac{39}{40} \approx 0{,}975$. A levezetésben felhasználtuk, hogy $pq = p - p^2 \leq 0{,}25$.

IV.6.3. Feladat: Egy üzemben csavarokat csomagolnak. Egy-egy dobozba átlagosan 5000 csavar kerül. A csavarok számának szórása a tapasztalat szerint 20 darab. Mit mondhatunk annak valószínűségéről, hogy egy dobozban a csavarok száma 4900 és 5100 közé esik, ha az eloszlást nem ismerjük?

Megoldás: Jelölje X a csavarok számát! Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenségből: $\mathbf{P}\left(4900 \leq X \leq 5100\right) = \mathbf{P}\left(|X - 5000| \leq 100\right) \geq 1 - \frac{400}{10000} \approx 0{,}96$.

IV.6.4. Feladat: Legyen X standard normális eloszlású valószínűségi változó! A standard normális eloszlás táblázatának használata nélkül bizonyítsa be, hogy ekkor fennáll a $\mathbf{P}(-3 < X < 3) \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{18\pi}}$ egyenlőtlenség!

Megoldás: A Markov-egyenlőtlenségből: $\mathbf{P}\left(|X| > 3\right) \leq \frac{\mathbf{E}|X|}{3} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, amiből már következik $\mathbf{P}\left(-3 < X < 3\right) \geq 1 - \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

IV.6.5. Feladat: Bizonyítsuk be a IV.2.1. tételt!

Megoldás: Egy ellenpéldát fogunk adni, amely eloszlásban konvergáló valószínűségiváltozó-sorozat lesz, de a másik három értelemben nem konvergál.

Legyen $A \in \Im$ tetszőleges $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$ esemény, legyen $X \in I(A)$ és $Y \in I(\bar{A})$ indikátor valószínűségi változó. Az X, Y azonos eloszlású, hiszen
$p_0 = \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, $q_0 = \mathbf{P}(Y = 0) = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$,
$p_1 = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, $q_1 = \mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(\bar{A}) = \frac{1}{2}$.

Definiáljuk a sorozatot úgy, hogy $X_n \equiv X$, $\forall n$-re. Ekkor nyilván:

$$F_{X_n}(x) = F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 1, x > 1 \\ \frac{1}{2}, 0 < x \leq 1 \\ 0, x \leq 0 \end{cases}.$$

Mivel $F_{X_n}(x) \equiv F_Y(x)$, ezért $X_n \xrightarrow{e} Y$, de $|X_n - Y| \equiv 1$ miatt a másik három értelemben nem konvergálhat X_n az Y-hoz.

IV.6.6. Feladat: Bizonyítsa be a IV.2.2. tételt!

Megoldás: Konvergáljon az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségiváltozó-sorozat sztochasztikusan X-hez, azaz $\forall \varepsilon > 0$ esetén
$\mathbf{P}\left(\{\omega;\ \ |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}\right) \to 0\ \ (n \to \infty)$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges!
$F_{X_n}(x) = \mathbf{P}(X_n < x) = \mathbf{P}(X_n < x, X < x + \varepsilon) + \mathbf{P}(X_n < x, X \geq x + \varepsilon) \leq$
$\leq \mathbf{P}(X < x + \varepsilon) + \mathbf{P}(X > X_n + \varepsilon) \leq \mathbf{P}(X < x + \varepsilon) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) =$
$F_X(x + \varepsilon) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$. Másrészt:
$F_X(x-\varepsilon) = \mathbf{P}(X < x-\varepsilon) = \mathbf{P}(X_n < x, X < x-\varepsilon) + \mathbf{P}(X_n \geq x, X < x-\varepsilon) \leq$
$\leq \mathbf{P}(X_n < x) + \mathbf{P}(X < X_n - \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$.
A két egyenlőtlenségből:
$F_X(x - \varepsilon) - \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon) + \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$.
A fenti egyenlőtlenségben $n \to \infty$ határátmenetet képezve:
$F_X(x - \varepsilon) \leq \liminf F_{X_n}(x) \leq \limsup F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$.
Ha x folytonossági ponja $F_X(x)$ -nek, akkor $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_X(x - \varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_X(x + \varepsilon) = F_X(x)$. Így $\exists \lim\limits_{n \to \infty} F_{X_n}(x)$ és $= F_X(x)$.

IV.6.7. Feladat: Bizonyítsa be a IV.2.3. tételt!

Megoldás: Ehhez az állításhoz a *Markov*-egyenlőtlenséget fogjuk felhasználni. Legyen $X \geq 0$ olyan valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke: $\mathbf{E}X \geq 0$. Ekkor $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{P}(X > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}X}{\varepsilon}$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}|X_n - X|}{\varepsilon} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Ellenpélda arra, hogy a tétel nem megfordítható:
Legyenek $A_n \in \Im$ olyan események, melyek valószínűségei $\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{n^2}$. A sorozat elemeinek definíciója: $X_n(\omega) = \begin{cases} n^3, & \omega \in A_n \\ 0, & \omega \notin A_n \end{cases}$. Megmutatjuk, hogy a sorozat bár sztochasztikusan konvergál az $X \equiv 0$-hoz, de már első momentumban nem.

Látható, hogy $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbf{P}(X_n > \varepsilon) = \frac{1}{n^2}$, ha $n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$, azaz $X_n \xrightarrow{st} X$. De $\mathbf{E}(|X_n - X|) = \mathbf{E}X_n = n^3 \cdot \frac{1}{n^2} = n \to \infty$ a momentumban való konvergencia nem igaz.

IV.6.8. Feladat: Bizonyítsa be a IV.2.5. tételt!

Megoldás: Ellenpélda arra, hogy $X_n \xrightarrow{L_1} X$, de $X_n \not\xrightarrow{1v} X$. A IV.2.1 példa itt is jó, mert ha $m = n + k$:
$\mathbf{E}(|X_m - X|) = \mathbf{E}X_m = \frac{1}{n} \to 0 \;\; \Rightarrow X_n \xrightarrow{L_1} X$, de amint láttuk, $X_n \not\xrightarrow{1v} X$.

Ellenpélda arra, hogy $X_n \xrightarrow{1v} X$, de $X_n \not\xrightarrow{L_1} X$. Legyenek A_n-ek olyan teljesen független események, ahol $\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{n^2}$. Legyen a sorozat elemeinek definíciója: $X_n(\omega) = \begin{cases} n^3, & \omega \in A_n \\ 0, & \omega \notin A_n \end{cases}$, a határ valószínűségi változó pedig $X \equiv 0$. Mivel $\mathbf{E}(|X_n - X|) = \mathbf{E}X_n = n \to \infty \;\; \Rightarrow X_n \not\xrightarrow{L_1} X$. Viszont megmutatható, hogy $X_n \xrightarrow{1v} X$.

IV.6.9. Feladat: Igazolja, hogy ha $X_n \xrightarrow{st} X$ és $Y_n \xrightarrow{st} Y$, akkor $X_n + Y_n \xrightarrow{st} X + Y$!

Megoldás: $\mathbf{P}(|X_n + Y_n - (Y + X)| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon + |Y_n - Y| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) + \mathbf{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) \to 0$.

IV.6.10. Feladat: Igazolja, hogy ha $X_n \xrightarrow{st} X$ és $Y_n \xrightarrow{st} Y$, akkor $X_n \cdot Y_n \xrightarrow{st} X \cdot Y$!

Megoldás: $|X_nY_n - XY| = |X_nY_n - X_nY + X_nY - XY| \leq$
$|X_n - X + X|\,|Y_n - Y| + |Y|\,|X_n - X| \leq |X_n - X|\,|Y_n - Y| + |X|\,|Y_n - Y| +$

$|Y|\,|X_n - X|$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges! $\mathbf{P}(|X_nY_n - XY| > \varepsilon) \le$
$\mathbf{P}\left(|X_n - X|\,|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3}\right) + \mathbf{P}\left(|X|\,|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3}\right) + \mathbf{P}\left(|Y|\,|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{3}\right)$.
Továbbá: $\mathbf{P}\left(|X_n - X|\,|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3}\right) \le \mathbf{P}\left(|X_n - X| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\right) +$
$\mathbf{P}\left(|Y_n - Y| > \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\right) \to 0$. Másrészt, ha $y > 0$ tetszőleges,
$\mathbf{P}\left(|X|\,|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3}\right) \le \mathbf{P}\left(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{3y}\right) + \mathbf{P}(|X| > y) \to 0$, ha $n, y \to 0$.
Ebből már következik, hogy $\mathbf{P}(|X_nY_n - XY| > \varepsilon) \to 0$.

IV.6.11. Feladat: Igazolja, hogy ha $X_n \xrightarrow{st} a$ valamely $a > 0$ számra, akkor $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{st} \frac{1}{a}$ is!

Megoldás: $\mathbf{P}\left(|X_n - a| \ge \frac{a}{2}\right) > 1 - \mathbf{P}\left(\frac{a}{2} < X_n\right)$. $\forall\delta > 0$-hoz $\exists n_0 : n > n_0$ esetén $1 - \delta < \mathbf{P}\left(|X_n - a| < \frac{a}{2}\right) < \mathbf{P}\left(\frac{a}{2} < X_n\right)$.
$A \mathrel{\hat{=}} \prod\limits_{n>n_0} \left\{\omega \mid X_n(\omega) > \frac{a}{2}\right\}$, és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges!
$\mathbf{P}\left(A \cdot \left\{\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{a}\right| > \varepsilon\right\}\right) = \mathbf{P}(A \cdot \{|X_n - a| > |X_na|\,\varepsilon\}) \le$
$\mathbf{P}\left(|X_n - a| > \frac{a^2}{2}\varepsilon\right) \to 0, (n \to \infty)$. Mivel $\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{a}\right| > \varepsilon\right) =$
$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{a}\right| > \varepsilon \cdot A\right) + \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{a}\right| > \varepsilon \cdot \bar{A}\right) \le \mathbf{P}\left(|X_n - a| > \frac{a^2}{2}\varepsilon\right) + \mathbf{P}(\bar{A}) =$
$\mathbf{P}\left(|X_n - a| > \frac{a^2}{2}\varepsilon\right) + \delta$. Így $\limsup \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{X_n} - \frac{1}{a}\right| > \varepsilon\right) \le \delta$, és mivel δ tetszőleges volt, már következik az állítás.

IV.6.12. Feladat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók, $\mathbf{E}X_i = m, \sigma^2 X_i = d^2$. Igazolja, hogy $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \xrightarrow{st} \frac{m}{m^2+d^2}$!

Megoldás: A nagy számok tételéből következik, hogy $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{st} m$ és $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{st} m^2 + d^2$. Felhasználva az előző két feladat eredményét, már következik az állítás.

IV.6.13. Feladat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségű változók, $\mathbf{E}X_i = m > 0$. Tekintsük a $Z_n = \sqrt[n]{Y_1Y_2\ldots Y_n}$ valószínűségi változót, ahol $Y_k = \frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. Igazoljuk, hogy $Z_n \xrightarrow{1v} m$!

Megoldás: A nagy számok erős tételéből következik, hogy $Y_n \xrightarrow{1v} m$. Másrészt $\min\{s_1, s_2, \cdots, s_n\} \le \sqrt[n]{s_1 s_2 \cdots s_n} \le \max\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, így ha $s_n \to a$, akkor $a \le \liminf s_n \le \sqrt[n]{s_1 s_2 \cdots s_n} \le \sqrt[n]{s_1 s_2 \cdots s_n} \le \limsup s_n \le a$, azaz $\sqrt[n]{s_1 s_2 \cdots s_n} \to a$. Ebből már következik az állítás.

IV.6.14. Feladat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független, azonos $U(a,b)$ eloszlású valószínűségű változók. Legyen $Y_n = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ és $Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Igazoljuk, hogy $Y_n \xrightarrow{e} a$ és $Z_n \xrightarrow{e} b$!

Megoldás: Az $U(a,b)$ eloszlásfüggvénye: $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } x \in (a,b) \\ 1, & \text{ha } x \ge a \end{cases}$.

$$F_{Z_n}(x) = \mathbf{P}(Z_n < x) = (F(x))^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a \\ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n, & \text{ha } x \in (a,b) \\ 1, & \text{ha } x \ge b \end{cases} \to \begin{cases} 0, & \text{ha } x < b \\ 1, & \text{ha } x \ge b \end{cases}$$

$\Rightarrow Z_n \xrightarrow{e} b$.

$F_{Y_n}(x) = \mathbf{P}(Y_n < x) = 1 - (1 - F(x))^n =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a \\ 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n, & \text{ha } x \in (a,b) \\ 1, & \text{ha } x \ge b \end{cases} \to \begin{cases} 0, & \text{ha } x < a \\ 1, & \text{ha } x \ge a \end{cases} \Rightarrow Y_n \xrightarrow{e} a.$$

IV.6.15. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $X_n \xrightarrow{e} c$, akkor $X_n \xrightarrow{st} c$ is!

Megoldás: A c konstans, mint valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:
$F(x) = \mathbf{P}(c < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < c \\ 1, & \text{ha } x \ge c \end{cases}$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - c| \ge \varepsilon) =$
$= 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(c - \varepsilon \le X_n \le c + \varepsilon) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} (F_{X_n}(c+\varepsilon) - F_{X_n}(c-\varepsilon)) =$
$= 1 - F(c+\varepsilon) + F(c-\varepsilon) = 0 \Rightarrow X_n \xrightarrow{st} c$.

IV.6.16. Feladat: Mutassunk példát olyan X_n, Y_n sorozatokra, hogy $X_n \xrightarrow{e} X$ és $Y_n \xrightarrow{e} Y$, de $X_n + Y_n \not\xrightarrow{e} X + Y$!

Megoldás: Legyen $A \in \Im$ olyan esemény, hogy $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$. Legyen $X_n = Y_n = I(A)$, vagyis az A esemény indikátor változói. Közös eloszlásfüggvényük:

$$F(x) = \mathbf{P}\left(X_n < x\right) = \mathbf{P}\left(Y_n < x\right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{ha } x > 1 \end{cases}.$$

Legyen továbbá $X = I(A)$ és $Y = I(\bar{A})$. Ekkor $X + Y \equiv 1$, azaz eloszlásfüggvénye

$G(x) = \mathbf{P}\left(X + Y < x\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 1 \\ 0, & \text{ha x} \leq 1 \end{cases}$, és $X_n + Y_n = 2I(A)$, aminek eloszlásfüggvénye:

$$F_n(x) = \mathbf{P}\left(X_n + Y_n < x\right) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 0 < x \leq 2 \\ 0, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases}.$$

Látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \neq G(x)$, azaz $X_n + Y_n \overset{e}{\not\to} X + Y$.

IV.6.17. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $X_n \overset{st}{\to} X$ és $\mathbf{P}\left(|X_n| < K\right) = 1$, minden n-re, akkor $X_n \overset{L_r}{\to} X$ is fennáll!

Megoldás: $\mathbf{E}\left|X_n - X\right|^r \leq 2K^r \mathbf{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) + \varepsilon$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén, amiből már következik az állítás.

IV.6.18. Feladat: Legyen $p_n \in (0,1)$ tetszőleges nullsorozat, és $X_n \in G\left(p_n\right)$. Mutassuk meg, hogy $Y_n = \frac{X_n}{\mathbf{E}X_n} \overset{e}{\to} Y$, ahol $Y \in E\left(1\right)$!

Megoldás: $\mathbf{P}\left(Y_n < x\right) = \mathbf{P}\left(p_n X_n < x\right) = \sum\limits_{k \leq \left[\frac{x}{p_n}\right]} \left(1 - p_n\right)^{k-1} p_n =$

$= 1 - \left(1 - p_n\right)^{\left[\frac{x}{p_n}\right]} \overset{n\to\infty}{\to} 1 - \mathrm{e}^{-x}.$

IV.6.19. Feladat: Közelítőleg határozzuk meg az $A = \sum\limits_{k=220}^{260} \binom{500}{k}$ összeget!

Megoldás: Legyen $X \in B(500, 0,5)$! Ekkor a kiszámítandó A összeget felírhatjuk: $A = 2^{500} \sum\limits_{k=200}^{260} \mathbf{P}(X = k)$ alakban. A Moivre–Laplace-tétel szerint: $\sum\limits_{y \leq \frac{k-250}{\sqrt{125}} < x} \mathbf{P}(X = k) \approx \Phi(x) - \Phi(y)$. Most úgy kell x-et és y-t megválasztani, hogy $220 = 250 + \sqrt{125}y$ és $261 = 250 + \sqrt{125}x$ legyen. Tehát $y = -2{,}683281573$ és $x = 0{,}9838699100999$, amivel $2^{-500}A = 0{,}8328$, azaz $A \approx 2{,}726079698256e{+}150$. A függvény értékeit a standard normális eloszlás táblázatából olvastuk ki.(Ld. A függelékben!)

Megjegyzés: Az előbbi összeg kiszámítása még számítógépre írt program segítségével sem triviális a binomiális együtthatókban szereplő nagy faktoriálisok miatt.

IV.6.20. Feladat: Egy szövőgép 500 szállal dolgozik. Annak a valószínűsége, hogy egy szál időegység alatt elszakad 0,008 minden szálra. Határozzuk meg, hogy 0,95 valószínűséggel milyen határok között várható a szálszakadások száma egy időegység alatt?

Megoldás: Jelölje X a szálszakadások számát! Ekkor a Moivre–Laplace-törvényből: $\mathbf{P}\left(\frac{X-500\cdot 0{,}008}{\sqrt{500\cdot 0{,}008\cdot 0{,}992}} < x\right) = \mathbf{P}(X < 1{,}99 \cdot x + 4) \approx \Phi(x)$. Másrészt $\Phi(1{,}65) = 0{,}95$, azaz $x = 1{,}65$-nél: $\mathbf{P}(X < 1{,}99 \cdot 1{,}65 + 4) = \mathbf{P}(X < 7{,}28)$, vagyis a szálszakadások száma 8-nál kisebb lesz legalább 95%-os valószínűséggel.

IV.6.21. Feladat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók véges szórással. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges x valós szám esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < x) \in \{0, 1, 1/2\}$, vagyis a határérték csak 0 vagy 0,5 vagy 1 lehet!

Megoldás: A centrális határeloszlás tételt használva:
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-nm}{\sqrt{n}\sigma} < x^*\right) =$$
$$= \Phi\left(\lim_{n\to\infty} x^*\right),$$ ahol $m = \mathbf{E}X_i$, $\sigma = \sigma^2 X_i$, $x^* = \frac{x-nm}{\sqrt{n}\sigma}$.

De $$\lim_{n\to\infty} \frac{x-nm}{\sqrt{n}\sigma} = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } m > 0 \\ 0, & \text{ha } m = 0 \\ \infty, & \text{ha } m < 0 \end{cases}$$, amiből már következik az állítás.

IV.6.22. Feladat: Ha egy gyár egyforma energiaigényű gépei közül átlagosan 70% működik és 30% vár javításra, vagy éppen javítják, akkor átlagosan 210 gép energiaigényét kell kielégíteni. Mennyi energiát kell biztosítani akkor, ha 99,9%-os biztonsággal szeretnénk elérni azt, hogy minden működőképes gép valóban működni tudjon? (Feltesszük, hogy a gépek meghibásodása egymástól független.)

Megoldás: Jelölje X a működő gépek számát! Nyilván $X \in B(300, 0{,}7)$. A Moivre–Laplace-tételből $\mathbf{P}\left(X < np + x\sqrt{npq}\right) = \mathbf{P}\left(X < 210 + 7{,}93 \cdot x\right) \approx \Phi(x)$. Mivel $\Phi(3) \approx 0{,}999$, így $\mathbf{P}(X < 234) \approx 0{,}999$, vagyis az üzemelő gépek száma kevesebb, mint 23499,9%-kal.

IV.6.23. Feladat: Egy tanfolyamra 100 hallgató iratkozik be. Más elfoglaltsága miatt minden hallgató 0,6 valószínűséggel megy el az egyes órákra. Feltételezzük, hogy egymástól függetlenül látogatják az órákat. Hány fős terem kell ahhoz, hogy az órára érkező hallgatók 90%-os biztonsággal elférjenek a teremben?

Megoldás: Hallgatók száma, $X \in B(100,\ 0{,}6)$, $\mathbf{P}\left(X < 60 + 10\sqrt{0{,}24}x\right) \approx \Phi(x) = 0{,}9 \Rightarrow x = 1{,}29 \Rightarrow 60 + 10\sqrt{0{,}24} \cdot 1{,}29$ a keresett teremkapacitás.

IV.6.24. Feladat: Adottak az $X_1, X_2, \ldots, X_n \in U(0,1)$ teljesen független véletlen számok. Ezek segítségével generáljunk normális eloszlású véletlen számot!

Megoldás: $Y = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i, \mathbf{E}Y = 50,\ \sigma^2 Y = \frac{100}{12}$. A centrális határeloszlás tételből következik, hogy Y standardizáltja közel standard normális. Tehát $\frac{Y-50}{10}\sqrt{12} \sim N(0,1)$.

IV.6.25. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y független, azonos eloszlású és véges szórású valószínűségű változók, akkor $X+Y$ és $X-Y$ akkor és csak akkor lesznek függetlenek, ha X és Y normális eloszlásúak.

Megoldás: $\Leftarrow$ Ha X és Y normális eloszlásúak, akkor $\mathbf{cov}(X+Y, X-Y) = \mathbf{E}\left(X^2 - Y^2\right) - \mathbf{E}(X+X)\,\mathbf{E}(X-Y) = 0$ miatt X és Y függetlenek is, hiszen normális eloszlásnál a korrelálatlanság ekvivalens a függetlenséggel.

$\Rightarrow$ Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 0$ és $\sigma^2 X = \sigma^2 Y = 1$ különben a standardizáltjaikkal számolnánk tovább. Jelölje $f(t)$ a közös karakterisztikus függvényüket. Ekkor $\varphi_{X+Y}(t) = f^2(t)$ és $\varphi_{X-Y}(t) = f(t)\,f(-t)$, és $2X = (X+Y) + (X-Y)$ miatt $\varphi_{2X}(t) = \varphi_{X+Y}(t)\,\varphi_{X-Y}(t) = f^3(t)\,f(-t)$ is. Legyen $\psi(t) = \ln f(t)$. Ekkor $\psi(2t) = 3\psi(t) + \psi(-t)$. Bevezetve a $\delta(t) = \psi(t) - \psi(-t)$ jelölést, $\delta(2t) = \psi(2t) - \psi(-2t) = 3\psi(t) + \psi(-t) - 3\psi(-t) + \psi(t) = 2\psi(t) - 2\psi(-t) = 2\delta(t)$. Tehát $\delta(u) = 2\delta\left(\frac{u}{2}\right) = 2^2\delta\left(\frac{u}{2^2}\right) = \cdots = 2^n\delta\left(\frac{u}{2^n}\right) = \cdots$. Ebből már következik, hogy $\frac{\delta(u)}{u} = \frac{\delta\left(\frac{u}{2^n}\right)}{\frac{u}{2^n}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\delta(t)-\delta(0)}{t} =$

$\delta'(0) = 2\psi'(0) = 2\frac{f'(0)}{f(0)} = 0$, hiszen $\mathbf{E}X = 0$. Vagyis $\delta(u) \equiv 0$! Ebből következik, hogy $\psi(t) = \psi(-t)$, azaz $\psi(2t) = 4\psi(t)$. Tehát $\psi(u) = \cdots = 2^{2n}\psi\left(\frac{u}{2^n}\right)$. $\frac{\psi(u)}{u^2} = \frac{\psi\left(\frac{u}{2^n}\right)}{\left(\frac{u}{2^n}\right)^2} \to_{n\to\infty} -\frac{1}{2}$, hiszen $\psi(u) = \psi(0)+u\psi'(0)+\frac{u^2}{2}\psi''(0)+o(u^2)$, és $\psi(0) = \psi'(0) = 0, \psi''(0) = -1$. Innen $\psi(u) = -\frac{u^2}{2}$ következik, azaz $f(u) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$, ami a standard normális eloszlás karakterisztikus függvénye. Ha X, Y standardizáltjainak karakterisztikus függvénye standard normális, akkor X, Y is normális!

IV.6.26. Feladat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in E(\lambda)$ teljesen függetlenek, és $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Adjuk meg Y sűrűségfüggvényét!

Megoldás: X_k-k közös karakterisztikus függvénye: $\varphi_{X_k}(t) = \frac{\lambda}{-\lambda+it}$, így $\varphi_Y(t) = \left(\varphi_{X_k}(t)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{-\lambda+it}\right)^n$. Mivel $\int_0^\infty \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda z} \mathrm{e}^{izt} dz = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^\infty z^{n-1} \mathrm{e}^{z(it-\lambda)} dz = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\left[\frac{1}{it-\lambda} z^{n-1} \mathrm{e}^{z(it-\lambda)} - \frac{n-1}{(it-\lambda)^2} z^{n-1} \mathrm{e}^{z(it-\lambda)} + - \cdots + (-1)^{2n+1} \frac{(n-1)!}{(it-\lambda)^n} \mathrm{e}^{z(it-\lambda)}\right]_0^\infty = \frac{\lambda^n}{(it-\lambda)^n}$, és keresett sűrűségfüggvény: $f_Y(z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} z^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda z}$, $z > 0$.

(*Megjegyzés*: $Y \in \Gamma(n, \lambda)$, azaz n, λ paraméterű gamma eloszlás.)

IV.6.27. Feladat: Jelölje az X valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $f(t)$. Fejezzük ki az $Y = aX + b$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $f(t)$-vel!

Megoldás: $\varphi_Y(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{i(aX+b)t} = \mathrm{e}^{ibt}\mathbf{E}\mathrm{e}^{iX(at)} = \mathrm{e}^{ibt} f(at)$.

IV.6.1. Gyakorlat: Egy pártra a szavazók p valószínűséggel szavaznak, ami általában ismeretlen. A közvéleménykutatók a pártot választók pozitív válaszának és a megkérdezettek számának arányával becsülik meg p-t. Mekkora legyen a megkérdezettek n számú mintája, ha azt akarják elérni, hogy a kapott relatív gyakoriság p-től legfeljebb 0,001-del térjen el 99,9%-os valószínűséggel?

IV.6.2. Gyakorlat: Legalább hány megfigyelés szükséges ahhoz, hogy egy 5-nél nem nagyobb szórású valószínűségi változó értékeinek átlaga 95%-os valószínűséggel a várható érték 0,01 sugarú környezetébe essen?

IV.6.3. Gyakorlat: Egy szerencsejátékos megfigyeli, hogy átlagosan 63 kísérlet után nyer. Hányszor kell kísérleteznie, hogy 0,99 valószínűséggel nyerjen legalább egyszer?

IV.6.4. Gyakorlat: Egy mérés elvégzéséhez egy pontatlan eszközünk van, ahol a mérés hibája standard normális eloszlású. A mérést n-szer végezzük el, majd átlagolunk. Mekkora legyen az n, hogy legfeljebb 10^{-4} valószínűséggel térjen el az átlag a mérendő értéktől 0,1-del?

IV.6.5. Gyakorlat: 99%-os valószínűséggel szeretnénk garantálni, hogy 1000 pénzfeldobásból legalább n-szer fejet kapjunk. Hogyan válasszuk meg n-et, ha a fejdobás valószínűsége p?

IV.6.6. Gyakorlat: Adottak az $X_1, X_2, \ldots, X_n \in U(0,1)$ teljesen független véletlen számok. Ezek segítségével generáljunk $N(5,2)$ normális eloszlású véletlen számot!

IV.6.7. Gyakorlat: Jelölje az X valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $f(t)$. Fejezzük ki az $Y = -X$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét $f(t)$-vel!

IV.6.8. Gyakorlat: Jelölje az X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók közös karakterisztikus függvényét $f(t)$. Fejezzük ki az $X - Y$ és $\frac{X+Y}{2}$ valószínűségi változók karakterisztikus függvényét $f(t)$-vel!

IV.6.9. Gyakorlat: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n \in N(0,1)$ teljesen függetlenek, és $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. Adjuk meg Y karakterisztikus függvényét!

IV.6.10. Gyakorlat: Adja meg a $Po(\lambda)$ diszkrét eloszlás karakterisztikus függvényét! Ezt felhasználva számolja ki a negyedik momentumot!

Jelölések

$\exists$ a „létezik” kvantor
$\forall$ a „minden egyes” kvantor
$\Rightarrow$ „akkor”, illetve „következik”
$\Leftrightarrow$ „akkor és csak akkor”, illetve az ekvivalencia reláció
$\not\Rightarrow$ „nem következik”
$\stackrel{\circ}{=}$ „definíció szerint”
$\equiv$ azonosan egyenlő
$\neq$ nem egyenlő
$f : A \to B$ az A halmazt a B-be leképező függvény
$\{x, y, z, \ldots\}$ az $x, y, z, \ldots$ elemekből álló halmaz
$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a+0)$ az f függvény jobboldali határértéke az a pontban
$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a-0)$ az f függvény baloldali határértéke az a pontban
$\exp(x) \stackrel{\circ}{=} \mathrm{e}^x$ az exponenciális függvény
$\ln x$ a természetes alapú logaritmus függvény
$\Gamma(x) \stackrel{\circ}{=} \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} dt$ a gammafüggvény
$o(f(t))$ „kis ordó $f(t)$” maradéktag, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{o(f(t))}{f(t)} = 0$.
$O(f(t))$ „nagy ordó $f(t)$” maradéktag, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{O(f(t))}{f(t)} < \infty$.
$f(\underline{x}) \to \min\limits_{\forall \underline{x}}$ az $f(\underline{x})$ függvény minimalizálása
$f_i(\underline{x}) \to \min\limits_{\forall i}$ adott $\underline{x}$-nél az „i” indexben minimalizálás
$f_i(\underline{x}) = \min\limits_{\forall j} f_j(\underline{x})$ az $f_i(\underline{x}) \to \min\limits_{\forall i}$ probléma az „i” indexnél veszi fel a minimumát
$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = grad(f(\underline{x}))$ az f gradiens vektora
$\frac{\partial^2 f(\underline{x})}{\partial \underline{x} \partial \underline{x}^T}$ a Hesse mátrix

$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \circeq x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ n-tagú összeg
$\sum\limits_{\underline{x} \in C} \underline{x}$ azon $\underline{x}$ vektorok összege, amelyek a C halmazhoz tartoznak
$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \circeq x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ n tényezős szorzat
$\binom{n}{k} \circeq \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n alatt a k, binomiális együttható
$\binom{x}{k} \circeq \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \cdots \cdot (x-k+1)}{k!}$, $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ az általánosított binomiális együttható
$\mathbb{R}$ a valós számok teste
$\mathbb{R}^p$ a valós szám p-esek vektortere
$\mathbb{R}^{n \times m}$ a valós komponensű $n \times m$-es mátrixok halmaza
$\mathbb{C}$ a komplex számok teste
$i \in \mathbb{C}$ az imaginárius egység
$\underline{x} \in \mathbf{R}^p$ p-dimenziós oszlopvektor
$\underline{\underline{A}} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ $n \times m$-es mátrix
$\underline{x}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ p-dimenziós sorvektor, „T" a transzponálás jele
$\underline{\underline{A}}^T$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix transzponáltja
$\underline{\underline{A}}^{-1}$ az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix inverze
$\det \underline{\underline{A}}$ az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix determinánsa
$adj \underline{\underline{A}}$ az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix adjungált mátrixa, $\frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} \left(adj\ \underline{\underline{A}}\right)^T = \underline{\underline{A}}^{-1}$
$diag\ \underline{\underline{A}} \circeq (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})^T$ az $\underline{\underline{A}}$ mátrix diagonálisában lévő elemekből álló oszlopvektor
$diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ egy olyan $n \times n$-es diagonális mátrix, melynek diagonálisában $a_1, a_2, \ldots, a_n$ áll
$trace\ \underline{\underline{A}} \circeq \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ az $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix nyoma
$\underline{\underline{E}}_n, \underline{\underline{E}}$ az $n \times n$-es egységmátrix
$\mathfrak{K}$ véletlen kísérlet
Ω a $\mathfrak{K}$-val kapcsolatos elemi események halmaza, a biztos esemény, illetve eseménytér
$\emptyset$ lehetetlen esemény
$\omega, \omega_i \in \Omega$ elemi esemény
$A, B, \ldots, A_i, B_i, \ldots \subseteq \Omega$ események
$\bar{A}$ az A esemény ellentett eseménye
$\Im$ $\mathfrak{K}$-val kapcsolatos események halmaza, az eseményalgebra
$\mathbf{P} : \Im \to [0, 1]$ valószínűség,

$\mathbf{P}(A)$ az A esemény valószínűsége
$\mathbf{P}(A\,|B)$ az A eseménynek a B eseményre vonatkoztatott feltételes valószínűsége
$X, Y, Z, \ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók
$F_X(x)$ a X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, $F_X(x) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(X < x)$
$p_i \stackrel{\circ}{=} \mathbf{P}(X = x_i)$ az X diszkrét valószínűségi változó eloszlása
$f_X(x)$ az X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$f_{X|Y}(x\,|y)$ az X valószínűségi változónak az Y-ra vonatkoztatott feltételes sűrűségfüggvénye
$\varphi_X(t) \stackrel{\circ}{=} \mathbf{E}e^{itX}$ az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye
$\mathbf{E}X$ az X valószínűségi változó várható értéke
$\sigma^2 X = \mathbf{V}X$ a X valószínűségi változó szórásnégyzete vagy varianciája
$\sigma X \stackrel{\circ}{=} +\sqrt{\sigma^2 X}$ az X valószínűségi változó szórása
$\mathbf{R}(X, Y)$ az X és Y valószínűségi változók korrelációs együtthatója
$\mathbf{cov}(X, Y)$ az X és Y valószínűségi változók kovariancia
$F_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = F_{\underline{X}}(\underline{x})$ az $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvénye, illetve a komponensek együttes eloszlásfüggvénye
$f_{X_1, X_2, \ldots, X_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_{\underline{X}}(\underline{x})$ az $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_p)^T$ valószínűségi vektorváltozó sűrűségfüggvénye, illetve a komponensek együttes sűrűségfüggvénye
$\mathbf{E}\underline{X} \stackrel{\circ}{=} (\mathbf{E}X_1, \mathbf{E}X_2, \ldots, \mathbf{E}X_p)^T$ az $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó várhatóérték-vektora
$\underline{\underline{\Sigma}}\underline{X} = (\mathbf{cov}(X_i, X_j))_{\substack{i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, p}}$ az $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó kovarianciamátrixa
$X \in I(A)$ vagy $X \in I(p)$ az X valószínűségi változó az A esemény indikátora, $p = \mathbf{P}(A)$
$X \in B(n, p)$ az X valószínűségi változó n, p paraméterű binomiális eloszlású
$X \in Po(\lambda)$ az X valószínűségi változó λ paraméterű Poisson-eloszlású
$X \in G(p)$ a X valószínűségi változó p paraméterű geometriai eloszlású
$\underline{X} \in Pol(n, p_1, p_2, \ldots, p_r)$ az $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó együttes eloszlása polinomiális
$X \in U(a, b)$ az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon
$X \in E(\lambda)$ az X valószínűségi változó λ paraméterű exponenciális eloszlású
$X \in N(\mu, \sigma)$ az X valószínűségi változó μ, σ paraméterű normális eloszlású

$X \in N(0,1)$ az X valószínűségi változó standard normális eloszlású
$X \in \Gamma(n,\lambda)$ az X valószínűségi változó n,λ paraméterű gamma-eloszlású
$\underline{X} \in N_p(\underline{\mu}, \underline{\underline{\Sigma}})$ az $\underline{X}$ valószínűségi vektorváltozó p-dimenziós normális vektor, $\underline{\mu}$ várhatóérték-vektorral és $\underline{\underline{\Sigma}}$ kovarianciamátrixszal
$\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ az μ, σ paraméterű normális eloszlás eloszlásfüggvénye
$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ az μ, σ paraméterű normális eloszlás sűrűségfüggvénye
$\Phi(x)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye
$\varphi(x)$ standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye
$X_n \stackrel{1v}{\to} X$ az X_n valószínűségi változó sorozat 1 valószínűséggel konvergál X-hez
$X_n \stackrel{L_r}{\to} X$ az X_n valószínűségiváltozó-sorozat r-edik momentumban konvergál X-hez
$X_n \stackrel{st}{\to} X$ az X_n valószínűségiváltozó-sorozat sztochasztikusan konvergál X-hez
$X_n \stackrel{e}{\to} X$ az X_n valószínűségiváltozó-sorozat eloszlásban konvergál X-hez

Ajánlott irodalom

[1] Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás
Tankönyvkiadó, Budapest, 1973

[2] Prékopa András: Valószínűségelmélet
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972

[3] Vetier András: Szemléletes mérték- és valószínűségelmélet
Tankönyvkiadó, Budapest, 1991

[4] W.Feller: Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978

[5] A.N. Kolmogorov: A valószínűségszámítás alapfogalmai
Gondolat, Budapest, 1982

[6] Paul R. Halmos: Mértékelmélet
Gondolat, Budapest, 1984

[7] Bognárné–Mogyoródi–Prékopa–Rényi–Szász:
Valószínűségszámítás feladatgyűjtemény
Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

[8] Solt György: Valószínűségszámítás (példatár)
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973

[9] Denkinger Géza: Valószínűségszámítási gyakorlatok
Tankönyvkiadó, Budapest, 1977

[10] B.A Szevasztyanov–V.P. Csisztyakov–A.M. Zubkov:
Valószínűségszámítási feladatok
Tankönyvkiadó, Budapest, 1987

FÜGGELÉK

A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének táblázata

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

1. Ha $X \in \mathbf{N}(m, d)$, akkor $\mathbf{P}(X < x) = \Phi\left(\frac{x-m}{d}\right)$ (Ezen tulajdonság miatt elég csak a standard normális eloszlás táblázatát megadni.)

2. Ha $x > 0$, akkor $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. (Ezen tulajdonság miatt van a táblázatban csak nemnegatív x argumentum)

3. Ha $\varepsilon \in (0,1)$, akkor $\mathbf{P}\left(-u_\varepsilon < \frac{X-m}{d} < u_\varepsilon\right) = 2\Phi(u_\varepsilon) - 1 = 1 - \varepsilon$, azaz $\Phi(u_\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. $\left(u_\varepsilon = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
,00	,50000000	3,00	,99865010	3,60	,99984089
,10	,53982784	3,05	,99885579	3,61	,99984690
,20	,57925971	3,10	,99903240	3,62	,99985270
,30	,61791142	3,15	,99918365	3,63	,99985829
,40	,65542174	3,20	,99931286	3,64	,99986368
,50	,69146246	3,25	,99942297	3,65	,99986888
,60	,72574688	3,26	,99944294	3,66	,99987389
,70	,75803635	3,27	,99946226	3,67	,99987872
,80	,78814460	3,28	,99948096	3,68	,99988338
,90	,81593987	3,29	,99949906	3,69	,99988787
1,00	,84134475	3,30	,99951658	3,70	,99989220
1,10	,86433394	3,31	,99953352	3,71	,99989637
1,20	,88493033	3,32	,99954991	3,72	,99990039
1,30	,90319952	3,33	,99956577	3,73	,99990426
1,40	,91924334	3,34	,99958111	3,74	,99990799
1,50	,93319280	3,35	,99959594	3,75	,99991158
1,60	,94520071	3,36	,99961029	3,76	,99991504
1,70	,95543454	3,37	,99962416	3,77	,99991838
1,80	,96406968	3,38	,99963757	3,78	,99992159
1,90	,97128344	3,39	,99965054	3,79	,99992468
2,00	,97724987	3,40	,99966307	3,80	,99992765
2,05	,97981778	3,41	,99967519	3,81	,99993052
2,10	,98213558	3,42	,99968689	3,82	,99993327
2,15	,98422239	3,43	,99969821	3,83	,99993593
2,20	,98609655	3,44	,99970914	3,84	,99993848
2,25	,98777553	3,45	,99971971	3,85	,99994094
2,30	,98927589	3,46	,99972991	3,86	,99994331
2,35	,99061329	3,47	,99973977	3,87	,99994558
2,40	,99180246	3,48	,99974929	3,88	,99994777
2,45	,99285719	3,49	,99975849	3,89	,99994988
2,50	,99379033	3,50	,99976737	3,90	,99995190
2,55	,99461385	3,51	,99977595	3,91	,99995385
2,60	,99533881	3,52	,99978423	3,92	,99995573
2,65	,99597541	3,53	,99979222	3,93	,99995753
2,70	,99653303	3,54	,99979994	3,94	,99995926
2,75	,99702024	3,55	,99980738	3,95	,99996092
2,80	,99744487	3,56	,99981457	3,96	,99996253
2,85	,99781404	3,57	,99982151	3,97	,99996406
2,90	,99813419	3,58	,99982820	3,98	,99996554
2,95	,99841113	3,59	,99983466	3,99	,99996696