Kalkukus

Szerző: Dr. Rontó Miklós
Lengyelné Dr. Szilágyi Szilvia

Lektor: Dr. Mátyás Ferenc

Korszerű anyag-, nano- és gépészeti technológiákhoz kapcsolódó műszaki képzési területeken kompetencia alapú, komplex digitális tananyag modulok létrehozása és on-line hozzáférésük megvalósítása
(TÁMOP-4.1.2-08/1/A-2009-0001)

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Tartalomjegyzék

Előszó

Az analízis szó görög eredetű, jelentése "elemzés". A matematikában ez a szó mintegy háromszáz éve egy nagy és fontos tudományág megjelölésére használatos, de ennek tárgyát és feladatát a szó eredeti jelentése nem juttatja kifejezésre. Az analízis feladata olyan eljárások keresése, amelyek révén valamely keresett mennyiség számára tetszőlegesen kicsiny hibájú közelítő értékeket lehet megadni.

A matematikai analízis a matematikának azokat a fejezeteit öleli fel, amelyek szorosan kapcsolódnak a függvény és a határérték fogalmához, a differenciál- és az integrálszámításhoz, a végtelen sorozatok, sorok fogalmához, a differenciálegyenletek elméletéhez, stb.

A matematikai analízis kialakítása a XVII. században kezdődött el, amikor szükségessé vált a mozgással kapcsolatos folyamatok tanulmányozása az asztronómiában, fizikában. Szükségessé vált továbbá a változó mennyiségek vizsgálata is, amely a függvények bevezetéséhez vezetett. Több neves tudós (Kepler, Ferma, Barrow) részeredményei vezettek oda, hogy a XVII. században egymástól függetlenül I. Newton (1643-1707) és Leibniz (német, 1646-1716) más-más megközelítéssel megalapozták a differenciál- és integrálszámítást. E számítások tárgyának: a függvénynek a fogalma együtt fejlődött az elmélettel. Descartes a század első felében még minden olyan görbét távol kívánt tartani, amely nem definiálható algebrai műveletekkel. A differenciál- és integrálszámításból megszülető matematikai analízisben azonban rendre polgárjogot nyertek az algebraiakon kívül más egyszerű függvények is, mint a logaritmus-, exponenciális, trigonometrikus és arcusfüggvények. Ekkor a matematikusok még meg voltak győződve arról, hogy bármilyen kis szakaszon ismerve a függvényt, le lehet abból vezetni azt a törvényszerűséget, amelynek a függvény teljes menetében eleget tesz. Ez a felfogás gyökeresen megdőlt a XVIII. század végén és a XIX. század elején a trigonometrikus sorok vizsgálatának kapcsán.

Az analízis alapfogalmainak precíz és elvontabb megalkotása a fejlődés jelentős mérföldköveit jelentette. Newton (aki egyben az egyetemes tömegvonzás feltalálója) elsőként vezette be a derivált fogalmát "fluxus" elnevezéssel. Leibniz használta elsőként azt a jelölést, amelyet a derivált és az integrál megjelölésére a jelenlegi modern matematika is alkalmaz.

Azonban Newton és Leibniz dolgazataiban hiányzott egy alapvető fogalom és eszköz - a határátmenet fogalma. A határátmenet modern értelmezését a matematikában Euler (svájci, 1707-1783), Jean D'Alembert (francia, 1717-1783) és mások dolgozatainak köszönhetően Cauchy-nak (francia, 1789-1857) sikerült bevezetni és segítségével egzakt módon definiálni a matematikai analízis alapvető műveleteit a differenciál- és integrálszámításban. Bolzano prágai matematikus, aki Cauchy-val egyidőben a határérték és folytonosság tekintetében hasonló elvekhez jutott el, volt az első, aki példát szerkesztett folytonos, de sehol sem differenciálható függvényre, ezt a példát azonban nem közölhette. Weierstrass 1861-től kezdve előadásaiban, 1872-ban pedig egy dolgozatában nyilvánosan taglalta a kérdést, s egy nevezetes példát is közölt sehol sem differenciálható folytonos függvényre. Később ezek a példák megsokszorozódtak, mind egyszerűbbeket fedeztek fel. A valós függvények elméletének modern fejezete ezektől a példáktól számítható. A Riemann-féle integrál, Jordan és Peano mértékelmélete az analízis új irányának előfutárai. R. Baire, E. Borel és H. Lebesgue munkái révén születik meg végül a modern valós függvénytan. Lebesgue alkotta meg a mérték és integrál új és általánosabb fogalmát, és az új integrálelmélettel párhuzamosan a deriválás elméletét is kiépítette.

Vegyük észre, hogy igazából két évszázadra volt szükség a matematikai analízis elméletének egzakt megfogalmazására.

Korszerű elektronikus tankönyvünk tizenkét fejezetében nagy hangsúlyt fektetünk az analízis alapjainak tárgyalására, amely a logisztikai folyamatok tanulmányozásához és a sztochasztikus modellezéshez szükséges fogalmak pontos bevezetését jelenti. Meggyőződésünk, hogy szilárd alapokra nemcsak azoknak van szükségük, akik az analízis magasabb fejezeteit kívánják elsajátítani, hanem azoknak is, akik alkalmazzák. A tananyag összeállítása a matematikai kézikönyvek szokásos felépítését követi, egységes és komplex. A Kalkulus elektronikus jegyzet célja a határérték, a folytonosság és a differenciálhányados fogalmának fokozatos, a szemléletre is támaszkodó kialakítása és a rájuk épülő elmélet tárgyalása, továbbá az elmélethez szorosan kapcsolódó fontosabb alkalmazások áttekintése. E nehéz anyag megértésének elősegítésére számos megoldott feladatot és szemléltető ábrát illesztettünk be az elektronikus tananyagba. A feladatok között néhány nehezebb, invenciót igénylő példával is találkozhatnak a hallgatók. Az önálló tanulásra is alkalmas tankönyv az alapképzések matematikai anyagánál helyenként részletesebb, így a Kalkulus tananyagot a hallgatók későbbi tanulmányaik során is kiválóan használhatják.

Miskolc, 2010. április 12.

A Szerzők

1 Halmazelméleti alapfogalmak

1.1 Jelölések, elnevezések

A mindennapi életben, különböző tudományágakban, így a matematikában is, sokszor beszélünk bizonyos, a valóságban létező, vagy a gondolatunkban kialakított objektumok, dolgok, fogalmak összességéről. Így például mindenki tudja miről van szó, amikor említjük a bolygók sokaságát, az elsőéves főiskolai hallgatókat, az egyetemi oktatókat, a trigonometrikus függvények osztályát, a természetes számokat. A matematikában az összesség, a sokaság és más hasonló értelmű szavak helyett a halmaz elnevezést használják. A halmazt nem definiáljuk, hanem alapfogalomnak tekintjük. Középiskolás tanulmányainkból ismeretes, hogy ugyancsak definíció nélkül, alapfogalomként használjuk például a pont, a sík fogalmát is. A halmaz és a halmaz eleme fogalmát matematikai absztrakciónak tekintjük.
A halmazokat általában nagybetűkkel

$$A, B, C, ..., X, Y, Z, ...; A_1,\ A_2,\ A_3, ...,$$

elemeiket kisbetűkkel jelöljük:

$$a, b, c, ..., x, y, z, ...; a_1,\ a_2,\ a_3, ...$$

Azt a tényt, hogy x az X halmaz eleme, így jelöljük:

$$x \in X,$$

míg azt, hogy a nem eleme az A halmaznak az

$$a \notin A$$

szimbólummal jelöljük. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha ismerjük az összes elemét, vagy azokat a tulajdonságokat melyek segítségével egyértelműen el tudjuk dönteni bármely elemről, dologról, hogy hozzátartozik-e a halmazhoz vagy sem. A halmazokat kétféleképpen tudjuk megadni. Elemeinek felsorolásával, kapcsos zárójelbe téve ezt a felsorolást. Például így:

$$A = \{2, 4, 6, 8\},\ B = \{a, b, c, d\},\ X = \{1, 5, 10, 15\},$$

$$F = \{\text{Duna, Tisza}\},\ H = \{\text{hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek}\}.$$

Ez a megadási mód véges számú elemből álló halmazokra alkalmas. Számos esetben ez a megadási mód kényelmetlen, esetleg lehetetlen. Ilyenkor a halmazt elemeinek tulajdonságaival írjuk le.

Emlékeztetőül megadjuk néhány nevezetes számhalmaz jelölését:

$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, a pozitív természetes számok halmaza;
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$, a természetes számok halmaza a nullával bővítve;
$\mathbb{Z} =\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, az egész számok halmaza;
$\mathbb{Z}^+=\{1, 2, 3, ...\}$, a pozitív egész számok halmaza;
$\mathbb{Z}^-=\{..., -3, -2, -1\}$, a negatív egész számok halmaza;
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \{\mathbb{Z}\backslash\{0\}\},\ (p, q) = 1 \right\}$, a racionális számok halmaza;
$\mathbb{R} = \{$racionális és irracionális számok$\}$, a valós számok halmaza.

Azt a tényt, hogy a C halmaz a T tulajdonsággal rendelkező x elemekből áll, így fejezzük ki:

$$C = \{x : T(x)\} \quad \text{vagy} \quad C = \{x \mid T(x)\}.$$

Például

$$A = \{x : |x| < 2, x \in \mathbb{R}\}$$

jelenti a 2-nél kisebb abszolút értékű valós számok halmazát,

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

pedig az origó középpontú 3-sugarú kör kerületi pontjainak halmazát. Legyen az A halmaz a -2-nél nagyobb és 10-nél kisebb egész számok halmaza:

$$A = \{a : -2 < a < 10,\ a \in \mathbb{Z}\}.$$

Ezt a halmazt elemei felsorolásával is megadhattuk volna:

$$A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Egy elem csak egyszer fordulhat elő egy halmazban.

1.1.1. Definíció (üres halmaz)
Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, üres halmaznak nevezzük. Jelölése: $\emptyset$.

Például az

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4 = 0\}$$

halmaz üres, mivel $x^2 + 4 = 0$ semmilyen valós számra nem teljesül, azaz $A = \emptyset$.

1.1.2. Definíció (egyenlő halmazok)
Az A és B halmazok egyenlőek, ha elemeik ugyanazok, azaz

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B.$$

Jelölése: $A = B$. Tagadását $A \neq B$ módon jelöljük.

Az 1.1.2. Definícióból következik, hogy csak egy üres halmaz létezik, illetve a halmaz elemek megadási sorrendje tetszőleges. Például:

$$A = \{2,4,6\} = B = \{4,2,6\} = C = \{6,2,4\} = D = \{6,4,2\} = E = \{4,6,2\} = F = \{2,6,4\}.$$

1.1.3. Definíció (részhalmaz)
Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$ is teljesül, azaz

$$x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

Jelölése: $A \subset B$ vagy $B \supset A$.

Az 1.1.3. Definíció szerint minden halmaz részhalmaza önmagának és az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza. Például:

$$A \subset A, \ \emptyset \subset B, \ \emptyset \subset X.$$

1.1.4. Definíció (valódi részhalmaz)
Az A halmaz valódi részhalmaza a B halmaznak, ha $A \subset B$, de $A \neq B$.

Ez azt jelenti, hogy van B-nek A-ba nem tartozó eleme is. Az üres halmaz valódi részhalmaza bármelyik nemüres halmaznak.

1.1.5. Megjegyzés
Két halmaz egyenlőségét így is megfogalmazhatjuk: Az A és B halmazok akkor és csak akkor egyenlők, ha

$$A \subset B \qquad \text{és} \qquad B \subset A.$$

1.1.6. Példa
Egyenlő-e az $\emptyset$ és a $\{0\}$ halmaz?

Megoldás:
Az üres halmaznak nincs eleme. A második halmaz egy-elemű. Így a két halmaz nem egyenlő.

1.1.7. Megjegyzés
Az $\in$ és a $\subseteq$ jelek különböző jelentésűek. Az első egy elemet és egy halmazt köt össze, a második egy halmazt kapcsol egy másik halmazhoz. Nézzük meg konkrét példákon keresztül, a halmaz eleme ($\in$) és a részhalmaz ($\subseteq$ ill. $\supseteq$) fogalmak és a nekik megfelelő jelek közötti különbséget!

$$2 \in \{1,2,3\}, \qquad \text{de} \qquad 2 \nsubseteq \{1,2,3\};$$

$$\{2\} \notin \{1,2,3\}, \qquad \text{de} \qquad \{2\} \subseteq \{1,2,3\}.$$

1.1.8. Definíció (véges halmaz)
Egy halmazt végesnek nevezünk, ha elemeinek száma véges. Ellenkező esetben végtelennek mondjuk. Véges halmaz számosságán elemeinek számát értjük.

1.1.9. Példa
Az $A = \{2, -4, 6, 7, 10, 14, 100, 2006\}$ halmaz számossága 8, azaz $|A| = 8$ és a $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 = 0\}$ számossága 2, mert

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 = 0\} = \{-2, -3\}.$$

1.1.10. Megjegyzés
A természetes számok $\mathbb{N}$ halmazának számosságát megszámlálhatóan végtelennek mondjuk. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazának számossága kontinuum.

1.1.11. Definíció (halmazrendszer)
Egy olyan nemüres halmazt, amelynek elemei maguk is halmazok, halmazrendszernek vagy halmazcsaládnak nevezünk.

1.1.12. Definíció (indexelt halmazrendszer)
Ha $I \neq \emptyset$ egy (úgynevezett) indexhalmaz és bármely $i \in I$ esetén adott egy A_i halmaz, akkor az

$$\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$$

halmazt I-vel indexelt halmazrendszernek nevezzük.

1.1.13. Definíció (hatványhalmaz)
Egy A halmaz összes részhalmazából álló halmazt az A halmaz hatványhalmazának nevezzük és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük.

1.1.14. Példa
Határozzuk meg az $A = \{a, b, c\}$ halmaz hatványhalmazát!

Megoldás:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\big\}$$

1.1.15. Megjegyzés
A három elemű halmaznak, mint láttuk $2^3 = 8$ részhalmaza van. Bizonyítható, hogy egy n elemű véges halmaznak összesen 2^n részhalmaza van.

1.2 Műveletek halmazokkal

Három műveletet értelmezünk:

1. a halmazok egyesítését (unióját);

2. a halmazok közös részét (metszetét);

3. a halmazok különbségét.

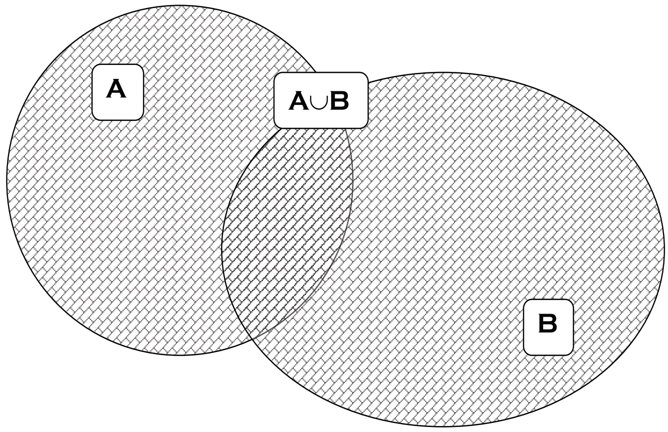
1.2.1. Megjegyzés
A halmazok számos esetben jól szemléltethetők zárt görbével határolt síkidomokkal (körlap, téglalap, ellipszis), a halmazokhoz tartozó elemek pedig a halmazt ábrázoló síkidom belsejében lévő pontokkal. Az ilyen jellegű ábrát Venn-diagramnak nevezzük.

1.2.2. Megjegyzés
John *Venn* (1834 - 1923), angol matematikus. Venn édesanyja korán meghalt, mikor gyermeke még egészen kicsi volt. Apja a drypool-i egyházközség vezetője volt és nagyapja is lelkész volt. Mindketten fontos szerepet töltöttek be az evangélikus egyházban. Nem volt tehát kérdéses, hogy az ifjú John Venn-nek is a papi hivatást kell választania. 1853-ban kezdte egyetemi tanulmányait Cambridge-ben. A második évben derült ki matematikai tehetsége, mikor hatodik lett a matematikai díjazottak közt. 1859-ben, diplomája megszerzése után két évvel pappá szentelték. S ezután Cheshunt-ban, Hertfordshire-ben majd Mortlake-ben teljesített szolgálatot. 1862-ben visszatért Camebridge-be, ahol egyetemi tanári állást kapott, s többek közt logikát tanított. Venn kiterjesztette Boole logikáját, és leginkább grafikus ábrázolási módjáról ismert. 1883-ban Venn-t a híres Royal Society tagjává választották.

1.2.3. Definíció (halmazok egyesítése)
Az A és B halmazok egyesítésén vagy unióján azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek legalább az egyik halmazban benne vannak. Jelölése: $A \cup B$. Azaz

$$A \cup B := \{x \,:\, x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

Az 1.1. Ábrán az A és B halmaz uniója látható:

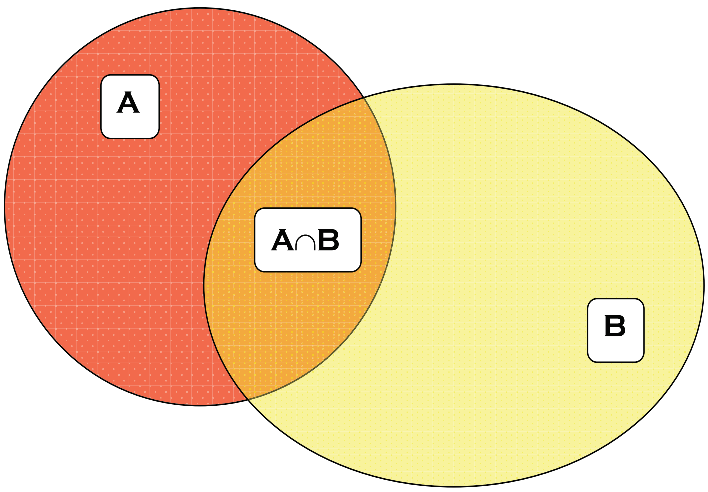


1.1. ábra

1.2.4. Definíció (halmazok metszete)
Az A és B halmazok metszetén vagy közös részén azoknak az elemeknek a halmazát értjük, amelyek mindkét halmaznak elemei. Jelölése: $A \cap B$. Azaz

$$A \cap B := \{x : x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

Az 1.2. ábrán az A és B halmazok metszete van ábrázolva:

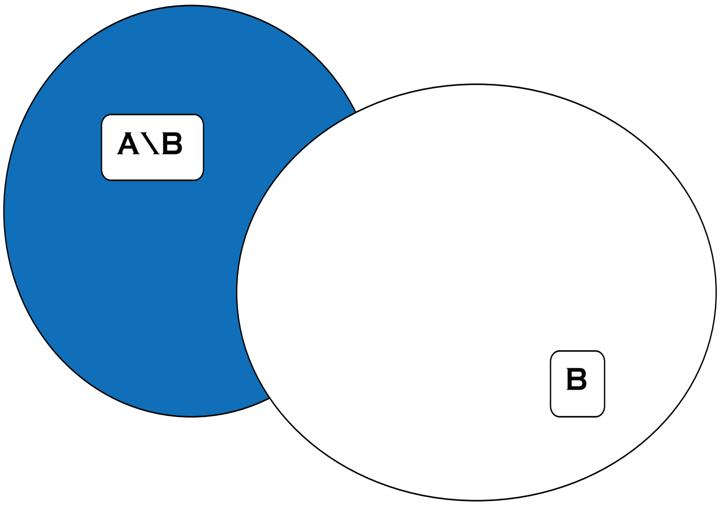


1.2. ábra

1.2.5. Definíció (halmazok különbsége)
Az A és B halmaz különbségén azt a halmazt értjük, amelynek elemei A-hoz

tartoznak, de nincsenek benne B-ben.
Jelölése: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

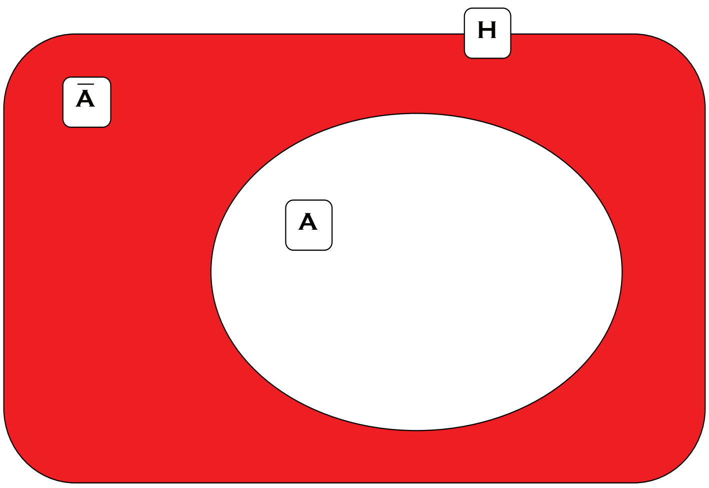


1.3. ábra

1.2.6. Definíció (komplementer halmaz)
Legyen A a H halmaz részhalmaza: $A \subset H$. Ekkor a

$$H \setminus A := \{x : x \in H \text{ és } x \notin A\}$$

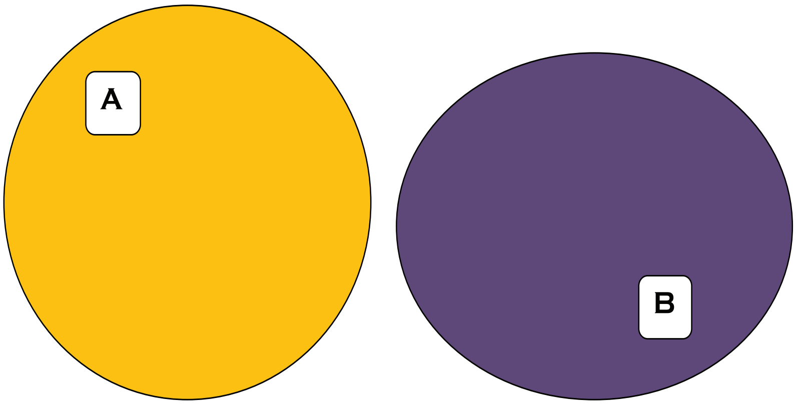
halmazt az A halmaz H-ra vonatkozó komplementerének nevezzük (kiegészítő halmazának nevezzük). (Lásd az 1.4. ábrát.)
Jelölése: $\overline{A}$ vagy $\overline{A}_H$.



1.4. ábra

1.2.7. Definíció (diszjunkt halmazok)
Az A és B halmazok diszjunktak, ha metszetük üres halmaz:

$$A \cap B = \emptyset.$$



1.5. ábra

1.2.8. Példa
Legyen $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ és $B = \{n \in \mathbb{N}_0 : n < 7\}$. Ekkor:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}.$$

1.2.9. Példa
Legyen $A = \{\text{pozitív páros számok}\}$, $B = \{\text{pozitív páratlan számok}\}$ és $C = \{0\}$. Ekkor:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\} = \mathbb{N}; \qquad A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}_0.$$

1.2.10. Példa
Legyen $A = \{\text{pozitív páros számok}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$ és
$B = \{\text{az 5-tel osztható természetes számok}\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, ...\}$.
Ekkor:

$$A \cap B = \{10, 20, 30, 40, ...\} = \{\text{a 10-el osztható természetes számok}\}.$$

1.3 Az unió és a metszet tulajdonságai

1.3.1. Tétel (műveleti szabályok)
Legyenek A, B és C tetszőleges halmazok. Ekkor érvényesek az alábbi tulajdonságok:

1. *Kommutativitás: $A \cup B = B \cup A$, illetve $A \cap B = B \cap A$;*

2. *Asszociativitás:* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, *illetve* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3. *Idempotens tulajdonság:* $A \cup A = A$, *illetve* $A \cap A = A$;

4. *Elnyelési tulajdonság:* $A \cup (A \cap B) = A$, *illetve* $A \cap (A \cup B) = A$;

5. *Disztributivitás:* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, *illetve* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

6. *Üres halmazzal való művelet:* $A \cup \emptyset = A$, *illetve* $A \cap \emptyset = \emptyset$.

A tétel bizonyítása a műveletek definíciójából következik. □

1.3.2. Megjegyzés
Könnyen belátható, hogy a komplementer felhasználásával a H alaphalmaz A és B részhalmazaira az $A \setminus B$ különbséget a következőképpen fejezhetjük ki:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}_H.$$

Valamely H alaphalmaz A és B részhalmazaira teljesülnek az alábbi állításban kimondott tulajdonságok.

1.3.3. Tétel (részhalmazok és komplementerek tulajdonságai)
Ha $A \subset H$ és $B \subset H$, akkor:

1. $\overline{\overline{A}}_H = A$

2. $A \cap \overline{A}_H = \emptyset$ *illetve* $A \cup \overline{A}_H = H$

3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *illetve* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, *ahol minden komplementer a H halmazra vonatkozik.*

Bizonyítás:
Bizonyítsuk a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ De-Morgan féle képletet!
Legyen $x \in H$ tetszőleges eleme H-nak. Ekkor $x \in \overline{A \cap B}$ akkor és csak akkor, ha $x \notin (A \cap B)$. Az $x \notin (A \cap B)$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha $x \notin A$ vagy $x \notin B$. Ezért $x \notin A$ vagy $x \notin B$ akkor és csak akkor, ha $x \in \overline{A}$ vagy $x \in \overline{B}$. Tehát igaz, hogy $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
A második De Morgan képletet bizonyítása analóg. □

1.3.4. Megjegyzés
Augustus *de Morgan* (1806 - 1871), angol matematikus. Bevezette a teljes indukció használatát és a De Morgan-azonosságnak nevezett szabályokat. Indiában született, családja ötödik gyermekeként. Nem sokkal születése után elvesztette szeme világát, s amikor 7 hónapos volt, visszatértek Angliába. 1823-ban, 16 évesen a Cambridge-i Trinity College diákja lett, ahol többek között George Peacock is tanította. 1827-ben az újjáalapított Londoni University College-ben megpályázott egy állást a Matematika Tanszéken, s annak ellenére, hogy addig nem jelent meg matematikai publikációja, meg is kapta az állást. 1828-ban az University College első matematika professzora lett. 1831-ben lemondott a posztjáról egy elvi vita miatt, azonban 1836-ban újra megkapta ugyanazt a tisztséget, amelyet aztán 1866-ig meg is tartott, amikor egy újabb elvi vita miatt ismét lemondott. *Az Aritmetika elemei* című könyve 1830-ban érte meg a második kiadást, amelyet még számos másik követett az idők folyamán. 1838-ban definiálta és bevezette az úgynevezett matematikai indukciót, ez a kifejezés először *Induction (Mathematics)* című művében jelenik meg, amit a Penny Cyclopedia-ba írt. Az évek során további 712 cikket írt ebbe az enciklopédiába, melyet a Society for the Diffusion of Useful Knowledge jelentetett meg, ugyanaz a társaság ami a későbbiek folyamán London University-t alapították, s akik de Morgan másik híres művét, *A differenciál- és integrálszámítás*-t is kiadta. 1849-ben publikált még egy művet a komplex számok geometriai értelmezéséről, majd bevezette a ma De Morgan-azonosságként ismert szabályokat, melyekkel nagyban hozzájárult a matematikai logika megreformálásához. De Morgan-t mindig érdekelték a furcsa számtani tények, és 1864-es írásában megjegyezte, hogy éppen x éves, és éppen az x^2-edik évet írják, ugyanis 43 éves volt 1849-ben.

1.3.5. Példa
Legyen $A = \{x : x \in \mathbb{R}, |x| < 3\}$ és $B = \{x : x \in \mathbb{R}, x > 0\}$. Írjuk fel az $\overline{A}_{\mathbb{R}}$, $\overline{B}_{\mathbb{R}}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ halmazokat!

Megoldás:

$$\overline{A}_{\mathbb{R}} = \{x : x \in \mathbb{R}, |x| \geq 3\};$$

$$\overline{B}_{\mathbb{R}} = \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}.$$

Mivel az A és B halmaz közös elemei a háromnál kisebb pozitív valós számok, ezért

$$A \cap B = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 3\}.$$

Az A és B halmaz uniója mindkét halmaz valamennyi elemét tartalmazza, ezért

$$A \cup B = \{x : x \in \mathbb{R}, x > -3\}.$$

Az $A \backslash B$ halmaz A-nak azokat az elemeit tartalmazza, amelyek nem tartoznak B-hez, így

$$A \setminus B = \{x : x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 0\}.$$

1.3.6. Példa

Legyen $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$ és $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = cx + d\}$. Mit mondhatunk az a, b, c, d paraméterekről, ha tudjuk, hogy

a) $A \backslash B = A$;

b) $A \backslash B = \emptyset$;

c) $A \cap B = \{(0, 0)\}$;

d) $\{(1, 0), (0, 1)\} \subset (A \cap B)$.

Megoldás:

Az A és B halmazok elemei az $\mathbb{R}^2$ sík egy-egy egyenesének pontjai.

a) Ha $A \backslash B = A$, akkor a két egyenesnek nincs közös pontja, azaz párhuzamosak, de nem esnek egybe. Ekkor $a = c$ és $b \neq d$.

b) Ha $A \backslash B = \emptyset$, akkor minden pont közös, vagyis $a = c$, és $b = d$.

c) Ha $A \cap B = \{(0, 0)\}$, akkor a két egyenes az origóban metszi egymást és ez az egy közös pontjuk van. Tehát $a \neq c$ és $b = d = 0$.

d) Ekkor az egyenesek a két adott pontot biztosan tartalmazzák, így egyértelműen meghatározottak. Vagyis $a = c = -1$ és $b = d = 1$. A két egyenes egybe esik.

1.3.7. Példa

Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

a) $A \backslash (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$;

b) $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$;

c) $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$;

d) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Megoldás:

a) $A\backslash(B\cup C) = A\cap\overline{(B\cup C)} = A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) = A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$

b) $A\backslash(A\cap B) = A\cap\overline{(A\cap B)} = A\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) = (A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}) = \emptyset\cup(A\cap\overline{B}) = (A\cap\overline{B}) = A\backslash B$

c) $(A\backslash B)\cap(A\backslash C) = (A\cap\overline{B})\cap(A\cap\overline{C}) = A\cap A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A\cap(\overline{B}\cap\overline{C}) = A\cap\overline{(B\cup C)} = A\backslash(B\cup C)$

d) $A\backslash(B\cap C) = A\cap\overline{(B\cap C)} = A\cap(\overline{B}\cup\overline{C}) = (A\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{C}) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$

1.3.8. Definíció (halmazok szimmetrikus különbsége)
Az A és B halmaz szimmetrikus különbségén (szimmetrikus differenciáján) az

$$(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

halmazt értjük. Jelölése: $A\triangle B$.

1.3.9. Megjegyzés
Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$A\triangle B = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

Az 1.3.8. Definícióból világosan kitűnik, hogy a $\triangle$ művelet kommutatív:

$$A\triangle B = B\triangle A,$$

továbbá

$$A\triangle B\subseteq A\cup B,$$

és

$$A\triangle A = \emptyset,\qquad \emptyset\triangle A = A.$$

2 Relációk, Függvények

2.1 Rendezett elempárok, Descartes-szorzat

2.1.1. Definíció (rendezett elempárok)
Két tetszőleges a és b elemből rendezett elempárt, amelyet alapfogalomnak tekintünk, úgy alkotunk, hogy a két elemet meghatározott sorrendben tekintjük és az (a, b) szimbólummal jelöljük; a-t az (a, b) rendezett elempár első, b-t pedig a második komponensének nevezzük.

2.1.2. Megjegyzés
A rendezett elempárra igaz, hogy

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \quad \text{és} \quad b = d.$$

2.1.3. Példa
Rendezett elempárok:

$$(Budapest, Duna), (Szeged, Tisza);$$

$$(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16).$$

2.1.4. Definíció (halmazok direkt (Descartes-) szorzata)
Az A és B halmaz direkt szorzatán (Descartes-szorzatán) pontosan azoknak a rendezett $a, b)$ elempároknak a halmazát értjük, mely elempárok első komponense A-beli, második pedig B-beli elem. Jelölése:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

2.1.5. Megjegyzés
René du Peron *Descartes* (1596 - 1650), francia matematikus, fizikus és filozófus. Az analitikus geometria megalapozásával új korszakot nyitott a matematika történetében. Gazdag nemesi családból származott. Nyolc évesen a jezsuiták egyik iskolájába került. Onnan 1612-ben Párizsba ment és Mersenne-től matematikát tanult. 1617-ben katonának állt be a holland Orániai Móricz herceg hadseregébe. Innen a bajor hadsereghez szegődött. Sok csatában vett részt és számos országban megfordult, köztük hazánkban is. Érsekújvár ostromakor szemtanúja volt vezére halálának, ezért egy időre elment a kedve a katonáskodástól és visszatért Párizsba. 1629-ben Hollandiában telepedett le és ott élt 20 évig. Nem nősült meg, idejét egy általános megismerési módszer keresésének szentelte. A skolasztika ellenfeleként hitt az értelmi megismerésben. 1637-ben jelent meg az *Értekezések a módszerről* című műve, amelyben a természetkutatás általános módszereit

dolgozta ki. A koordinátamódszert a mű *Geometria* című függeléke tartalmazza. 1649-ben Krisztina királynő meghívására Svédországba ment az akadémia megszervezésére. Gyenge szervezete azonban nem bírta az északi klímát és 1650 elején tüdőgyulladásban meghalt.

2.1.6. Példa
Legyen $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4\}$. Írjuk fel az $A \times B$ és a $B \times B = B^2$ halmaz elemeit!

Megoldás:

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\};$$

$$B \times B = B^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}.$$

2.1.7. Megjegyzés
A direkt szorzás általában nem kommutatív művelet. Ezt az alábbi példa igazolja.

2.1.8. Példa
Ha $A = \{2, 4\}$ és $B = \{1, 3\}$, akkor

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$$
$$B \times A = \{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}.$$

Tehát $A \times B \neq B \times A$.

Ismertetjük a direkt szorzat egyes tulajdonságait.

2.1.9. Tétel (direkt szorzat tulajdonságai)
Ha A, B és C tetszőleges halmazok, akkor:

1. $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ *vagy* $B = \emptyset$*;*
2. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$*;*
3. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$*;*
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$*;*
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$*;*
6. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$*;*
7. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$*;*

8. $B \subset C \Longrightarrow (A \times B) \subset (A \times C)$.

Ezek a tulajdonságok közvetlenül a definícióból adódnak. □

2.1.10. Megjegyzés
A rendezett párokhoz hasonlóan értelmezhető a rendezett elem hármasok, sőt a rendezett elem n-esek fogalma is.
Az $A_1 \times A_2 \times ...A_n$ direkt szorzat elemei azok a rendezett $(a_1, a_2, ..., a_n)$ elem n-esek, melyekre $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$.

2.1.11. Példa
Legyen $A_1 = \{a, 5\}$; $A_2 = \{1, 2\}$; $A_3 = \{4, 6\}$. Írjuk fel az $A_1 \times A_2 \times A_3$ halmaz elemeit!

Megoldás:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a,1,4),(a,1,6),(a,2,4),(a,2,6),(5,1,4),(5,1,6),(5,2,4),(5,2,6)\}.$$

2.2 Relációk

2.2.1. Definíció (bináris (kétváltozós) reláció)
Bináris (kétváltozós) relációnak nevezünk minden olyan halmazt, amelynek elemei rendezett párok.
Legyen F bináris reláció és (a, b) F valamely eleme. Az $(a, b) \in F$ hozzátartozást a következőképpen is jelölhetjük: aFb. Olvasva: a az F relációban van b-vel, vagy F a-hoz a b-t rendeli.

2.2.2. Példa
$F = \{(1, 2), (a, g), (4, 6)\}$ - bináris reláció.

2.2.3. Definíció (bináris reláció értelmezési tartománya és értékkészlete)
Valamely bináris reláció elemeinek az első komponenseiből alkotott halmazt a reláció értelmezési tartományának, a második komponeneseiből származtatott halmazt pedig a bináris reláció értékkészletének nevezzük. Jelöljük az F bináris reláció értelmezési tartományát $\mathcal{D}_F$-el, értékkészletét pedig $\mathcal{R}_F$-el.

2.2.4. Példa
Ha $F = \{(1, 2), (a, g), (4, 6)\}$, akkor

$$\mathcal{D}_F = \{1, a, 4\};$$
$$\mathcal{R}_F = \{2, g, 6\}.$$

2.2.5. Definíció (az A és B halmaz közötti reláció)
Az $A \times B$ direkt szorzat egy $F \subset A \times B$ részhalmazát A és B közötti (bináris kétváltozós) relációnak, vagy A-ból B-be átvivő relációnak nevezzük.
Ha $A = B$ akkor azt mondjuk, hogy F reláció A-n.

2.2.6. Példa
Ha $A = \{1, 2\}$ és $B = \{2, 3, 4, 5\}$, akkor

$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$$

és

$$F = \{(1, 2), (1, 4), (2, 2)\} \subset A \times B$$

egy A-ból B-be átvivő reláció.

2.2.7. Megjegyzés
Nem szabad összekeverni a bináris reláció (lásd: 2.2.1. Definíció) és a két adott halmaz közötti reláció (lásd: 2.2.5. Definíció) fogalmát.

2.2.8. Definíció (reláció inverze)
Az $F \subset A \times B$ reláció F^{-1} inverze alatt a $B \times A$ halmaz alábbi részhalmazát értjük:

$$F^{-1} := \{(b, a) \,:\, (a, b) \in F \subset A \times B\}.$$

2.2.9. Megjegyzés
$(a, b) \in F$ akkor és csak akkor, ha $(b, a) \in F^{-1}$. Ezért azonnal adódik, hogy $(F^{-1})^{-1} = F$. Az is látható, hogy $\mathcal{R}_{F^{-1}} = \mathcal{D}_F$ és $\mathcal{D}_{F^{-1}} = \mathcal{R}_F$.

2.2.10. Definíció (relációk kompozíciója)
Legyenek $F \subset (A \times B)$ és $G \subset (B \times C)$ adott relációk. Ezen relációk kompozíciója a következő reláció:

$$G \circ F := \{(a, c) \,:\, \exists b \in B \text{ úgy, hogy } (a, b) \in F,\ (b, c) \in G\}$$

A fenti definíció szerint $G \circ F$ egy A és C közötti reláció.

2.2.11. Példa
Adottak az $F = \{(1; 2), (2; 3), (3; 1), (4; 5), (5; 1)\}$ és a $G = \{(1; 5), (5; 4), (2; 4), (3; 1), (4; 1)\}$ relációk az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazon. Határozzuk meg a $(F \circ G) \cap (G \circ F)$ relációt!

Megoldás:

$$F \circ G = \{(1; 1), (2; 5), (3; 2), (4; 2), (5; 5)\}$$
$$G \circ F = \{(1; 4), (2; 1), (3; 5), (4; 4), (5; 5)\}$$

Tehát:

$$(F \circ G) \cap (G \circ F) = \{(5; 5)\}.$$

2.2.12. Példa
Adott az $F = \{(1;2),(2;3),(3;1),(4;5),(5;3)\}$ bináris reláció az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmazon. Számítsuk ki az F^2 és az F^3 relációkat!

Megoldás:

$$F \circ F = F^2 = \{(1;3),(2;1),(3;2),(4;3),(5;1)\},$$

$$F \circ F^2 = F^3 = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;1),(5;2)\}.$$

2.2.13. Tétel (relációk kompozíciójának inverze)
Legyenek $F \subset A \times B$ és $G \subset B \times C$ tetszőleges relációk. Ekkor

$$(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}.$$

Bizonyítás:
Mivel a $G \circ F$ reláció elemei $A \times C$-beli elempárok, ezért $(G \circ F)^{-1} \subset C \times A$. Egy (c,a) elempár pontosan akkor tartozik $(G \circ F)^{-1}$-hez, ha $(a,c) \in G \circ F$. Ez a tartalmazás akkor és csak akkor lehet érvényes, ha létezik $b \in B$ úgy hogy $(a,b) \in F$ és $(b,c) \in G$. Ez a két tartalmazás egyenértékű azzal, hogy $(c,b) \in G^{-1}$ és $(b,a) \in F^{-1}$ valamilyen $b \in B$-vel, tehát ha $(c,a) \in F^{-1} \circ G^{-1}$. Ezzel megmutattuk, hogy a $(c,a) \in (G \circ F)^{-1}$ és a $(c,a) \in F^{-1} \circ G^{-1}$ összefüggések ekvivalensek. Így a tétel állítását beláttuk. $\square$

2.2.14. Tétel (relációk kompozíciójának asszociativitása)
Legyen adott az A, B, C és D halmaz. Legyen $F \subset A \times B$, $G \subset B \times C$ és $H \subset C \times D$ tetszőleges relációk. Ekkor

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

Bizonyítás:
A bizonyítást a szokott módon végezzük. Legyen $(a,d) \in H \circ (G \circ F)$. Ekkor létezik olyan $c \in C$, hogy $(c,d) \in H$ és $(a,c) \in (G \circ F)$. Ez utóbbi miatt létezik olyan $b \in B$, hogy $(a,b) \in F$ és $(b,c) \in G$. Viszont $(c,d) \in H$ és $(b,c) \in G$ miatt $(b,d) \in (H \circ G)$, így $(a,d) \in (H \circ G) \circ F$.
Megfordítva: Ha $(a,d) \in (H \circ G) \circ F$, akkor létezik $b \in B$, hogy $(a,b) \in F$ és $(b,d) \in (H \circ G)$. Emiatt létezik olyan $c \in C$, hogy $(b,c) \in G$ és $(c,d) \in H$. Így $(a,c) \in (G \circ F)$, ahonnan adódik, hogy $(a,d) \in H \circ (G \circ F)$. $\square$

2.3 Relációk az A halmazon

2.3.1. Definíció (parciális rendezés)
Legyen adott az A nemüres halmaz. Egy $R \subset A \times A$ relációt parciális rendezésnek (részben rendezésnek) nevezünk az A halmazon, ha teljesülnek a következő feltételek:

- *az A halmaz minden x elemére $(x, x) \in R$, azaz a reláció reflexív;*
- *az A halmaz minden x, y elemére ha $(x, y) \in R$ és $(y, x) \in R$, akkor $x = y$, azaz a reláció antiszimmetrikus;*
- *az A halmaz minden x, y, z elemére ha $(x, y) \in R$ és $(y, z) \in R$, akkor $(x, z) \in R$, vagyis a reláció tranzitív.*

Ha R parciális rendezés A-n, akkor az A halmazt részben rendezett halmaznak nevezzük.

2.3.2. Definíció (rendezési reláció)
Legyen adott az A nemüres halmaz. Egy $R \subset A \times A$ relációt rendezési relációnak nevezünk az A halmazon, ha teljesülnek a következő feltételek:

- *az A halmaz minden x elemére $(x, x) \in R$, azaz a reláció reflexív;*
- *az A halmaz minden x, y elemére ha $(x, y) \in R$ és $(y, x) \in R$, akkor $x = y$, azaz a reláció antiszimmetrikus;*
- *az A halmaz minden x, y, z elemére ha $(x, y) \in R$ és $(y, z) \in R$, akkor $(x, z) \in R$, vagyis a reláció tranzitív;*
- *az A halmaz minden x, y elemére vagy $(x, y) \in R$ vagy $(y, x) \in R$, azaz a reláció lineáris.*

Ha R rendezési reláció A-n, akkor az A halmazt rendezett halmaznak nevezzük.

2.3.3. Példa
Legyenek x, y, z különböző elemek és $A = \{x, y, z\}$. Adjuk meg az összes parciális rendezést az A halmazon, majd válasszuk ki ezek közül a rendezési relációkat!

Megoldás:

$$\begin{aligned}
R_1 &:= A \times A;\\
R_2 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y)\big\};\\
R_3 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(y,x)\big\};\\
R_4 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,z)\big\};\\
R_5 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(z,x)\big\};\\
R_6 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(y,z)\big\};\\
R_7 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(z,y)\big\};\\
R_8 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(x,z)\big\};\\
R_9 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(y,x),(y,z)\big\};\\
R_{10} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(z,x),(z,y)\big\};\\
R_{11} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(z,y)\big\};\\
R_{12} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(y,x),(z,x)\big\};\\
R_{13} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,z),(y,z)\big\};\\
R_{14} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,z),(x,z)\big\};\\
R_{15} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(y,x),(x,z),(y,z)\big\};\\
R_{16} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(z,y),(x,z),(x,y)\big\};\\
R_{17} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(z,x),(z,y)\big\};\\
R_{18} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(y,x),(z,x),(z,y)\big\};\\
R_{19} &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(z,x),(y,z),(y,x)\big\}.
\end{aligned}$$

Az utolsó hat reláció rendezési reláció is.

2.3.4. Definíció (ekvivalencia-reláció)
Legyen adott az A nemüres halmaz. Egy $R \subset A \times A$ relációt ekvivalencia-relációnak nevezünk az A halmazon, ha teljesülnek a következő feltételek:

- *az A halmaz minden x elemére $(x,x) \in R$, azaz a reláció reflexív;*
- *az A halmaz minden x,y elemére ha $(x,y) \in R$, akkor $(y,x) \in R$, azaz a reláció szimmetrikus;*
- *az A halmaz minden x,y,z elemére ha $(x,y) \in R$ és $(y,z) \in R$, akkor $(x,z) \in R$, vagyis a reláció tranzitív.*

2.3.5. Példa
Legyenek x, y, z különböző elemek és $A = \{x, y, z\}$. Adjuk meg az összes ekvivalencia-relációt az A halmazon!

Megoldás:

$$
\begin{aligned}
R_1 &:= A \times A;\\
R_2 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z)\big\};\\
R_3 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x)\big\};\\
R_4 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,z),(z,x)\big\};\\
R_5 &:= \big\{(x,x),(y,y),(z,z),(z,y),(y,z)\big\}.
\end{aligned}
$$

2.3.6. Definíció (osztályozás)
Legyen H egy nemüres halmaz. Az $\mathcal{R}$ halmazrendszert H egy osztályozásának nevezzük, ha

- *$\mathcal{R}$ elemei páronként diszjunktak;*
- *minden $A \in \mathcal{R}$ esetén igaz, hogy $A \neq \emptyset$ és $A \subset H$;*
- *$\cup\mathcal{R} = H$.*

2.3.7. Példa
Legyenek x, y, z különböző elemek és $H = \{x, y, z\}$. Adjuk meg a H halmaz összes osztályozását!

Megoldás:
A H halmaz osztályozásai az alábbi halmazrendszerek:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &:= \big\{\{x\},\{y\},\{z\}\big\};\\
\mathcal{R}_2 &:= \big\{\{x\},\{y,z\}\big\};\\
\mathcal{R}_3 &:= \big\{\{y\},\{x,z\}\big\};\\
\mathcal{R}_4 &:= \big\{\{z\},\{x,y\}\big\};\\
\mathcal{R}_5 &:= \big\{\{x,y,z\}\big\}.
\end{aligned}
$$

2.3.8. Tétel (osztályozás és ekvivalencia-reláció kapcsolata)
Ha $\mathcal{R}$ egy osztályozása H-nak, akkor megadható H-n egy ekvivalencia-reláció. Fordítva: ha adott egy ekvivalencia-reláció H-n, úgy megadható H-nak egy osztályozása.

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy $\mathcal{R}$ egy osztályozása H-nak. Vezessük be a ϱ relációt a H halmazon úgy, hogy $(x, y) \in \varrho$, ha létezik olyan $A \in \mathcal{R}$, hogy $x \in A$ és $y \in A$. Ellenőrizzük, hogy az így bevezetett ϱ reláció ekvivalencia-reláció!
ϱ reflexív, mert bármely $a \in H$ esetén $\cup\mathcal{R} = H$ miatt van olyan $A \in \mathcal{R}$ halmaz, hogy $a \in A$; tehát $a\varrho a$. Ha $a\varrho b$, akkor van olyan $A \in \mathcal{R}$, hogy $a, b \in A$; azaz $b\varrho a$ ugyancsak teljesül, így ϱ szimmetrikus is. Ha $a\varrho b$ és $b\varrho c$, akkor van olyan $A \in \mathcal{R}$ és $B \in \mathcal{R}$, hogy $a, b \in A$ és $b, c \in B$. Ekkor $b \in (A \cap B)$, az $\mathcal{R}$ osztályozás azonban diszjunkt halmazokból áll, amiből $A = B$ következik. Vagyis $a, c \in A$, tehát $a\varrho c$ is teljesül, ami ϱ tranzitivitását jelenti. Megmutattuk tehát, hogy ϱ ekvivalencia-reláció.

Megfordítva: Legyen ϱ ekvivalencia-reláció a H halmazon. Legyen x tetszőleges eleme H-nak és jelölje A_x azt a halmazt, amelynek elemei ϱ relációban állnak x-szel. Így megadtuk H egy osztályozását, hiszen ha $A_x \neq A_y$, akkor a az osztályozáshoz tartozó halmazok páronként diszjunktak, mert ha lenne közös elemük, z, akkor $x\varrho z$ és $y\varrho z$ miatt a tranzitivitásból $x\varrho y$ adódna, amiből $A_x = A_y$ következne. Az osztályozás második tulajdonsága is fennáll, mert a reflexivitás miatt $x \in A_x$, így $A_x \neq \emptyset$ és $A_x \subset H$, hiszen A_x-be csak H-beli elemek kerülhetnek. Továbbá $\cup\mathcal{R} = H$ is igaz, hiszen minden $x \in H$ esetén a reflexivitás miatt $x\varrho x$, azaz $x \in A_x$. □

2.4 Függvények

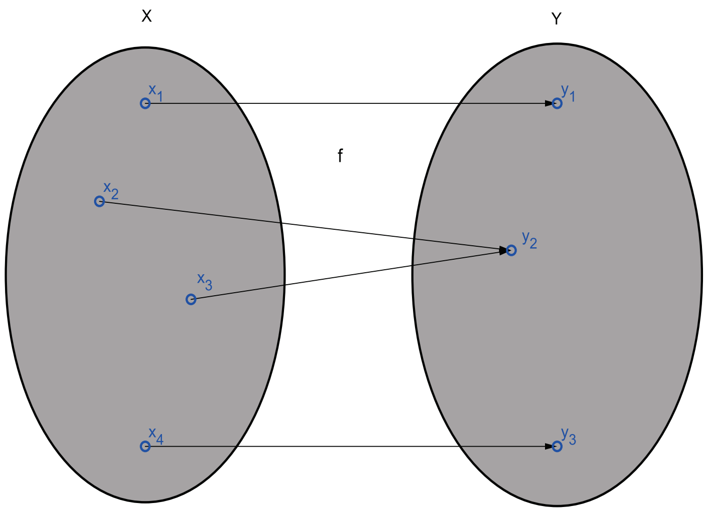
Két adott halmaz elemei között értelmezett hozzárendelés segítségével bevezethető a függvényfogalom általánosságban.

2.4.1. Definíció (adott halmazt adott halmazba leképező egyértelmű függvény megadása)
Ha egy nem üres X halmaz minden egyes eleméhez hozzárendeljük a nem üres Y halmaznak pontosan egy elemét, akkor X-ből Y-ba vivő egyértelmű leképezést, vagy függvényt adunk meg. Ha erre a függvényre, mint az f függvényre hivatkozunk, akkor az $f : X \to Y$ jelölést használjuk.

A jelenkor matematikájában a leképezés a függvény szó szinonimája. Megjegyezzük, hogy a matematikában a "hozzárendelésnek" önmagában nincs értelme. A hozzárendelés mindig halmazokhoz van kötve, tehát feltételezi mind az értelmezési tartomány, mind a képhalmaz megadását.

2.4.2. Megjegyzés
A 2.4.1. Definícióban szereplő egymáshoz rendelésnél csak az egyik irányban

kívánjuk meg az egyértelműséget, azaz X egy eleméhez Y-nak csak egy eleme tartozik, de fordítva Y-nak valamelyik eleme tartozhat X-nek több eleméhez.



2.1. ábra

2.4.3. Definíció (értelmezési tartomány, értékkészlet)
Az $f : X \to Y$ függvény értelmezési tartományán azoknak az X-beli elemeknek a halmazát értjük, melyekhez f valóban hozzárendeli az Y halmaz valamely elemét. Az f függvény értékkészlete azon Y-beli elemek halmaza, melyeket f az X halmaz legalább egy eleméhez hozzárendel. Az f függvény értelmezési tartományának jelölése: $Domf$ vagy $\mathcal{D}_f$, értékkészletének jelölése: $Ranf$ vagy $\mathcal{R}_f$. Ha $f : X \to Y$, akkor $\mathcal{D}_f \subseteq X$, $\mathcal{R}_f \subseteq Y$ és $f(\mathcal{D}_f) = \mathcal{R}_f$.

2.4.4. Megjegyzés
A matematikában a hozzárendelés szinonimái: megfeleltetés, utasítás, előírás, szabály, törvény és mindez annak körülírására szolgálhat, hogy hogyan adunk meg valamely adott halmazt adott halmazba leképző függvényt.

Az adott halmazt adott halmazba leképző egyértelmű függvény bevezethető a két halmaz közötti reláció segítségével is (lásd: 2.2.5. Definíció).

2.4.5. Definíció (egyértelmű függvény, mint két adott halmaz közötti reláció)
Legyen X és Y adott nem üres halmaz. Az $f \subset X \times Y$ két halmaz közötti relációt (azaz az $X \times Y$ direkt szorzat egy részhalmazát) X-ből Y-ba vivő egyértelmű függvénynek vagy leképezésnek nevezzük, ha $(x, y) \in f$ és $(x, z) \in f$ esetén $y = z$ teljesül, azaz $\forall\ x \in X$ esetén legfeljebb egy olyan $y \in Y$ létezik, melyre $(x, y) \in f$.

2.4.6. Megjegyzés
Az adott halmazt adott halmazba leképző egyértelmű függvény definíciója a következőképpen is megfogalmazható.
Az X és Y halmazok közötti $f \subset X \times Y$ reláció függvény, ha $\forall x \in \mathcal{D}_f$ esetén pontosan egy $y \in Y$ létezik, melyre $(x, y) \in f$. Azaz az f halmazban nincs olyan két elempár, amelyeknek az első eleme egyenlő.

2.4.7. Definíció (függvény helyettesítési értéke)
Az $x \in X$ elemhez hozzárendelt $y \in Y$ elemet az f függvény x helyen felvett értékének vagy helyettesítési értékének nevezzük. Jelölése: $y = f(x)$.

2.4.8. Megjegyzés
A 2.4.7. Definícióban szereplő "érték" szót szimbolikusan használják, hiszen az X és Y halmaz elemei tetszőleges objektumok (dolgok) lehetnek.

2.4.9. Példa
Legyen $X = \{$*elsőéves hallgatók*$\}$, $Y = \{$*a hét napjai: hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap*$\}$. Legyen f az a függvény, amely minden hallgatóhoz hozzárendeli a hét napjai közül azt a napot, amelyiken született (lásd a 2. ábrát). Ez esetben a "függvényértékek" a hét napjai.

2.4.10. Definíció (függvény grafikonja)
Legyen adott az $f : X \to Y$ függvény. Az f függvény grafikonjának az $X \times Y$ direkt szorzat alábbi rendezett elempárjaiból álló részhalmazt nevezzük:

$$G(f) := \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y = f(x) \in Y\}.$$

2.4.11. Példa
Legyen $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ és az $f : X \to Y$ függvény értékkészlete:

$$f(a) = y_4, \quad f(b) = y_2, \quad f(c) = y_2.$$

Ekkor az f függvény grafikonja az alábbi halmaz:

$$G(f) = \{(a, y_4), (b, y_2), (c, y_2)\}.$$

2.4.12. Megjegyzés
Az $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}$-be átvivő relációt grafikusan is ábrázolhatjuk. Minden rendezett $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ elempárhoz hozzárendeljük a derékszögű koordinátarendszerben az (x, y) koordinátákkal rendelkező pontot.

2.4.13. Definíció (szürjektív függvény)
Az $f : X \to Y$ függvény szürjektív, ha $f(X) = Y$.

2.4.14. Definíció (injektív függvény)
Az $f : X \to Y$ függvény injektív, ha bármely $x_1, x_2 \in Dom f$-re $x_1 \neq x_2$ esetén következik, hogy $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2.4.15. Definíció (bijektív függvény, kölcsönösen egyértelmű függvény)
Az $f : X \to Y$ függvény bijektív, ha injektív és szürjektív, azaz kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít az X és Y halmazok elemei között.

2.4.16. Megjegyzés
Egy $f : X \to Y$ függvény akkor tekinthető adottnak, ha ismerjük a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartományát, az Y halmazt és azt a szabályt, ahogyan az értelmezési tartomány elemeihez az Y-beli elemeket hozzárendeljük. Az f függvény megadásánál szokásosak még az alábbi jelölések:

1. $x \longmapsto f(x), \quad x \in X, \quad (x \in \mathcal{D}_f)$
2. $y = f(x), \quad x \in X, \quad (x \in \mathcal{D}_f)$

Természetesen az X és Y halmazok nem feltétlenül különbözőek, ezek meg is egyezhetnek.

2.4.17. Definíció (összetett függvény)
Legyen $g : X \to Y$ és $f : Y \to Z$ két adott függvény. A $h : X \to Z$ függvényt, amelyet a

$$h(x) := f(g(x)), \quad x \in X$$

képlet határoz meg, összetett függvénynek nevezzük. Jelölése:

$$h = f(g) \quad \textit{vagy} \quad h = f \circ g,$$

illetve

$$h(x) = f(g(x)) \quad \textit{vagy} \quad h(x) = (f \circ g)(x).$$

2.4.18. Példa
Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$ és $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$. Ekkor

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x) = \sin(x^2 + 2); \quad \mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}; \quad f \circ g : \mathbb{R} \to [-1, 1];$$
$$g(f(x)) = (g \circ f)(x) = \sin^2 x + 2; \quad \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}; \quad g \circ f : \mathbb{R} \to [2, 3].$$

2.4.19. Definíció (inverz függvény)
Legyen $f : X \to Y$ egy bijektív függvény. Ekkor $\forall\ y \in Y$-ra létezik egyetlen egy $x \in X$, melyre $f(x) = y$. Jelölése: $f^{-1}(y) := x$.
Az $f^{-1} : Y \to X$ függvényt az f függvény inverzének nevezzük.

2.4.20. Megjegyzés
Az inverz függvény megadható két adott halmaz közötti reláció segítségével is. Az $f \subset X \times Y$ két halmaz közötti relációval meghatározott bijektív függvény inverzén az $f^{-1} \subset Y \times X$, azaz az Y és X közötti relációval adott függvényt értjük, ahol az f^{-1} részhalmaz elemei:

$$f^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in f\}$$

2.4.21. Példa
Legyen $f : X \to Y$, $y = f(x) = 2x + 10$. Ekkor

$$f^{-1} : Y \to X, \quad x = f^{-1}(y) = \frac{y-10}{2}.$$

2.4.22. Megjegyzés
Az $f : X \to Y$ függvény megadásánál az X, Y halmazok igen változatosak lehetnek. Az X, Y halmazok konkrét megválasztásával olyan speciális típusú függvényeket kapunk, amelyeket külön elnevezéssel illetünk. Például, ha X és Y is a valós számok halmaza, akkor azt mondjuk, hogy f egyváltozós valós függvény. Ha $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ és $Y = \mathbb{R}$, akkor $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Ha $X = \mathcal{C}[a,b]$, azaz az $[a,b]$ intervallumon értelmezett egyváltozós valós folytonos függvények halmaza és $Y = \mathbb{R}$, akkor az $f : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ leképezést funkcionálnak mondjuk.

2.4.23. Példa
Határozzuk meg az

$$x \longmapsto f(x) = x^4 + 4, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad x > 0$$

függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás:

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ \quad \text{(a pozitív valós számok halmaza)}$$

$$\mathcal{R}_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 4\} \quad \text{(a négynél nagyobb valós számok halmaza)}$$

2.5 Megszámlálható halmazok

2.5.1. Definíció (ekvivalens halmazok)
Két halmaz ekvivalens, ha létezik közöttük egy bijektív leképezés, vagyis az A és B halmazok ekvivalensek, ha létezik

$$f : A \to B$$

bijekció. Ha A és B ekvivalens halmazok, akkor azt így jelöljük: $A \sim B$.
Az ekvivalens halmazokról azt is mondhatjuk, hogy egyenlő számosságúak.

2.5.2. Definíció (megszámlálható halmaz)
Azt mondjuk, hogy egy halmaz megszámlálható, ha az elemeit kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetjük a természetes számok halmazának, azaz olyan halmazok,amelyek végtelen sorozatba rendezhetők: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$*, ami azt jelenti, hogy bijekció létesíthető közte és a természetes számok halmaza között.*

2.5.3. Példa
Tekintsük az egész számok halmazát és a létesíthető bijekciót a természetes számok halmazával:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{ & 0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & ... & \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & ... & \}. \end{array}$$

2.5.4. Példa
Bizonyítsuk be, hogy a racionális számok halmaza szintén megszámlálható!

Megoldás:
Minden racionális szám egyértelműen írható fel olyan $r = \frac{p}{q}$, $(q > 0)$ törtként, amelyik már nem egyszerűsíthető. Nevezzük a $|p| + q$ összeget az r racionális szám "magasságának". Nyilvánvaló, hogy az adott n magasságú törtek száma véges. Például 1 magasságú szám csak a $\frac{0}{1}$; 2 magasságúak: $\frac{1}{1}$, $\frac{-1}{1}$; 3 magasságúak: $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{-2}{1}$, $\frac{-1}{2}$. Ezek után a racionális számokat növekvő magasságuk szerint rendezzük sorozatba, azaz először az 1 magasságú számot, azután a 2 magasságú számot írjuk le, és így tovább. Ezáltal minden racionális szám sorszámot kap, azaz bijektív megfeleltetést létesítettünk a természetes számok és a racionális számok halmaza között.

2.5.5. Megjegyzés
A valós számok halmaza nem megszámlálható. Így a $[0, 1]$ intervallum sem megszámlálható halmaz.

3 A valós számok halmaza

3.1 A valós számok halmaza, egyes tulajdonságai.

A valós számok halmaza, melyet $\mathbb{R}$-rel jelöltünk középiskolai tanulmányaink során, kiemelt fontosságú a matematikai analízisben. A valós számok fogalmának kialakítása a matematikában egy elég hosszú folyamat eredménye. Ismeretes, hogy a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza tartalmazza:

1. A természetes számok halmazát:

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}, \qquad \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}.$$

   A természetes számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra, azaz két természetes szám összege és szorzata is természetes szám. A természetes számok halmazában van legkisebb szám, de nincs legnagyobb, elemeinek száma végtelen.

2. Az egész számok halmazát:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

   Az egész számok halmazán az összeadás, szorzás és kivonás mindig elvégezhető. A $\mathbb{Z}$ halmazban nincs legkisebb és legnagyobb elem, ez a halmaz megszámlálhatóan végtelen, mint az $\mathbb{N}$ halmaz.

3. A racionális számok halmazát:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \{\mathbb{Z} \backslash \{0\}\} \right\}.$$

Az értelmezésből következik, hogy minden racionális szám egyértelműen felírható véges tizedes vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakban, melyet periódikus törtnek is neveznek. Fennáll a fordítottja is, azaz minden ilyen tizedes tört racionális szám. Ha a racionális szám nevezője $q = 2^k \cdot 5^s$, ahol k és s pozitív egész számok, akkor a $\frac{p}{q}$ racionális számnak létezik véges tizedes tört alakú kifejtése:

$$\frac{p}{q} = a_0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n, \tag{3.1}$$

ahol $a_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_n$ pedig a $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ jegyek közül valók. A (3.1) véges tizedes tört előállítására egyszerű osztási eljárás szolgál (p-ben a q megvan a_0-szor és marad s_0, $10s_0$-ban a q megvan α_1-szer és marad s_1,...).

3.1.1. Példa

$$\frac{1}{2} = 0.5; \qquad -\frac{106}{50} = -2.12$$

Minthogy az osztási eljárás során az $s_0, s_1, ..., s_n, ...$ maradékok mindegyike az $1, 2, ..., q-1$ számok közül való, ezért legfeljebb q lépés után újra egy előbbi maradék áll elő. Ebből következik, hogy a tizedes törtben a jegyek bizonyos helytől kezdve szakaszonként ismétlődnek, és a $\frac{p}{q}$ számot vagy a

$$\frac{p}{q} = a_0.\underbrace{b_1b_2...b_n}\underbrace{b_1b_2...b_n}\underbrace{b_1b_2...b_n}..., \tag{3.2}$$

$a_0 \in \mathbb{Z}, b_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ún. tiszta szakaszos végtelen tizedes tört, vagy a

$$\frac{p}{q} = a_0.a_1a_2...a_m\underbrace{b_1b_2...b_n}\underbrace{b_1b_2...b_n}\underbrace{b_1b_2...b_n}..., \tag{3.3}$$

$a_0 \in \mathbb{Z}, a_j, b_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ún. vegyes alakú szakaszos végtelen tizedes tört ábrázolja.

Fordítva, minden (3.2) vagy (3.3) szakaszos végtelen tizedes tört ábrázol valamely $\frac{p}{q}$ racionális számot, nevezetesen:

(3.4)

$$a_0.\underbrace{b_1b_2...b_n}\underbrace{b_1b_2...b_n}... = \pm\left[a_0 + \frac{b_1\cdot 10^{n-1} + b_2\cdot 10^{n-2} + ... + b_{n-1}\cdot 10 + b_n}{10^n - 1}\right];$$

(3.5)

$$a_0.a_1...a_m\underbrace{b_1b_2...b_n}\underbrace{b_1b_2...b_n}... = \pm\left[a_0.a_1...a_m + \frac{b_1\cdot 10^{n-1} + ... + b_{n-1}\cdot 10 + b_n}{10^n - 1}\right].,$$

$a_0 > 0$ esetén.

3.1.2. Példa

$$\frac{1}{6} = 0.166... = 0.1(6)...;$$

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857... = 0.(142857)...;$$

$$\frac{2}{9} = 0.222... = 0.(2)...;$$

$$\frac{7}{99} = 0.070707... = 0.(07)...;$$

$$-\frac{103}{330} = -0.3121212... = -0.3(12)...$$

3.1.3. Példa
Írjuk fel a 0.3121212... = 0.3(12)... vegyes szakaszos végtelen tizedes törtet racionális törtalakban!

Megoldás:

$$\frac{p}{q} = x = 0.3(12)...$$
$$10x = 3.(12)...$$
$$1000x = 312.(12)...$$
$$1000x - 10x = 312 - 3$$
$$990x = 309$$
$$x = \frac{309}{990} = \frac{103}{330} = \frac{p}{q}.$$

A racionális számok halmazán az összeadás, szorzás, kivonás és osztás (kivéve a nullával való osztást) mindig elvégezhető, azaz ezeknek a műveleteknek az eredménye ismét racionális szám. A racionális számokat a számegyenesen ábrázolhatjuk egy megfelelő ponttal.

3.1.4. Megjegyzés
Bármely két racionális $r_1 < r_2$ szám között mindig van végtelen sok racionális szám. Ugyanis
$$r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2,$$
ahol $\frac{r_1 + r_2}{2}$ racionális szám, hiszen az összeadás és osztás eredménye racionális szám. Ezt folytatva kapjuk, hogy végtelen sok racionális számot tudunk elhelyezni r_1 és r_2 közé. Ezt másképpen úgy mondjuk, hogy a racionális számok halmaza mindenütt sűrű. Ennek ellenére meglepő talán, hogy a racionális számok halmazának számossága megegyezik az $\mathbb{N}$ halmaz számosságával, azaz az $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ halmazok ekvivalensek.

A tizedes törtek között vannak olyanok, amelyek nem végesek és nem szakaszosak (periódikusak). Felmerül a kérdés, hogy vajon milyen számokat határoznak meg az

$$a_0.a_1a_2...a_n..., \quad a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, \quad a_0 \in \mathbb{Z} \tag{3.6}$$

alakú nemszakaszos tizedes törtek?

3.1.5. Definíció (irracionális számok)
Az $a_0.a_1a_2...a_n...$ végtelen nem szakaszos tizedes törteket irracionális számoknak nevezzük.

3.1.6. Példa
Igazoljuk, hogy $\sqrt{2}$ nem racionális szám!

Megoldás:
Tételezzük fel az ellenkezőjét, hogy $\sqrt{2}$ racionális, azaz

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

ahol a p-nek és a q-nak az 1 számon kívül nincs más pozitív osztója. Négyzetre emelés után:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2q^2.$$

Látszik, hogy p^2 páros szám, ennek következtében p is páros. Legyen $p = 2s$. Ekkor

$$p^2 = 4s^2 = 2q^2 \quad \Longrightarrow \quad 2s^2 = q^2.$$

Innen látható, hogy q^2 páros szám, így q is páros. Ha p és q páros, akkor a 2 szám közös osztójuk. Ez viszont ellentmondáshoz vezet.

3.1.7. Definíció (valós számok halmaza)
A racionális és irracionális számok alkotják a valós számok halmazát, amelyet $\mathbb{R}$-rel jelölnek.

A valós számok halmazán az összeadás, szorzás, kivonás, osztás (kivéve a nullával való osztást) eredménye ismét valós szám. A valós számok is ábrázolhatók a számegyenesen. Ugyanis, annak ellenére, hogy a racionális számoknak megfelelő pontok sűrűn helyezkednek el a számegyenesen mégsem töltik ki egészen. Így a számegyenes bizonyos értelemben "hézagos". Az irracionális számok ezen hézagoknak megfelelő pontokkal ábrázolhatók a számegyenesen, tehát ezeket a hézagokat töltik ki.

3.1.8. Megjegyzés
Az irracionális számok halmaza is mindenütt sűrű és nagyobb számosságú, mint a racionális számoké, ún. kontinuum számosságú. Tehát, a valós számok halmaza is kontinuum számosságú.

3.1.9. Lemma (valós szám végtelen tizedes tört alakja)
Bármely a valós számnak van végtelen tizedes tört alakú kifejtése:

$$a = a_0.a_1a_2...a_n, ...\mathit{ahol} \quad a_0 \in \mathbb{Z}, \quad a_k \in \{0, 1, ..., 9\}.$$

3.1.10. Megjegyzés
A véges $a_0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ tizedes tört felírható vegyes szakaszos végtelen tizedes tört alakjában a következőképpen:

$$a = a_0.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n = a.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n00...0... = a.\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0) \tag{3.7}$$

Néha (3.7) helyett az alábbi vegyes szakaszos végtelen tizedes törtet írják fel:

$$a = a_0.\alpha_1...\alpha_n = a_0.\alpha_1...\alpha_{n-1}(\alpha_n - 1)999...9... = a_0.\alpha_1...\alpha_{n-1}(\alpha_n - 1)(9), \tag{3.8}$$

annak ellenére, hogy az egyszerű osztási eljárás során ilyen alak nem keletkezik.

3.1.11. Definíció (nemnegatív valós szám)
A végtelen tizedestört alakú

$$a = a_0.a_1a_2...a_n...$$

valós szám nemnegatív, ha

- $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *és*
- $n \geq 1$ *esetén* $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

3.1.12. Definíció (pozitív valós szám)
A nemnegatív valós számot pozitívnak nevezzük, ha már $a_0 > 0$ *vagy pedig létezik* $n \geq 0$ *úgy, hogy* $a_n > 0$.

3.1.13. Definíció (negatív valós szám)
A "$-$" (mínusz) előjellel vett pozitív valós szám negatív valós számot határoz meg.

3.1.14. Megjegyzés
A " $-$ " előjelre vonatkozó műveleti szabályok ugyanazok, mint a $\mathbb{Q}$ halmaz esetén. Ezért a továbbiakban főleg csak a pozitív valós számok tulajdonságait tárgyaljuk.

A 3.1.9. Lemmából kapjuk a következő tulajdonságot.

3.1.15. Következmény
Bármely $a \in \mathbb{R}$ *valós számot alulról illetve felülről* r_1, r_2 *racionális számmal közelíthetjük:*

$$r_1 = a_0.a_1a_2...a_n < a < a_0.a_1a_2...a_n + \frac{1}{10^n} = r_2,$$

mégpedig úgy, hogy az $r_2 - r_1 = \dfrac{1}{10^n}$ *különbség tetszőlegesen kicsivé tehető* n *növelésével.*

3.1.16. Példa
Számítsuk ki a $\sqrt{\pi}+\pi$ összeg racionális közelítését!

Megoldás:

$$3.141592 < \pi < 3.141592 + \frac{1}{10^6}$$
$$1.772453 < \sqrt{\pi} < 1.772453 + \frac{1}{10^6}.$$

Tehát:

$$4.914046 < \sqrt{\pi}+\pi < 4.914046 + \frac{2}{10^6}.$$

A valós számok egzakt bevezetése a matematikában különböző módon történhet:

1. Egy megfelelő axiómarendszer által. Ennek az axiomatikus megközelítésnek az alapját az ún. axiómák, más szóval bizonyos kézenfekvő fogalmak és ezek nyilvánvaló tulajdonságai adják. Az axiómákat bizonyítás nélkül, alapvetésként fogadjuk el. A valós számok elméletébe tartozó minden további fogalmat, állítást pedig már az axiómák felhasználásával pontosan definiálunk illetve bizonyítunk.

2. A valós számok definiálhatók a racionális számok ún. Dedekind-szeleteinek segítségével is. [Richard Dedekind, német, 1831-1913]. Ezekkel a témakörökkel mi nem foglalkozunk.

A továbbiakban szükség lesz az alábbi fogalmakra.

3.1.17. Definíció (nagyobb ill. kisebb fogalom a pozitív valós számok körében)
Azt mondjuk, hogy

$$a = a_0.a_1a_2a_3...a_n...$$

kisebb, mint

$$b = b_0.b_1b_2b_3...b_n...,$$

azaz $a < b$, *ha már* $a_0 < b_0$, *vagy* $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$,...,$a_{n-1} = b_{n-1}$ *esetén* $a_n < b_n$.

3.1.18. Definíció (felülről korlátos számhalmaz)
Az $X \subset \mathbb{R}$ *számhalmazt felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan* K *valós szám, hogy minden* $x \in X$*-re*

$$x \leq K$$

teljesül. Ekkor a K *szám az* X *halmaz egy felső korlátja.*

3.1.19. Példa
Legyen $X = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$. Ez a halmaz felülről korlátos, például $K = 3$, $K = 4$.

3.1.20. Definíció (alulról korlátos számhalmaz)
Az $X \subset \mathbb{R}$ számhalmazt alulról korlátosnak mondjuk, ha létezik olyan k valós szám, hogy minden $x \in X$-re

$$x \geq k$$

fennáll. Ekkor a k szám az X halmaz egy alsó korlátja.

3.1.21. Példa
Legyen $X = \{x \in \mathbb{R} : x > 43\}$. Ez a halmaz alulról korlátos, például $k = 42$, $k = 40$.

3.1.22. Definíció (legkisebb felső korlát, supremum, pontos felső korlát)
Legyen $X \subset \mathbb{R}$ nem üres, felülről korlátos halmaz. Az M számot az X halmaz legkisebb felső korlátjának (supremumnak) nevezzük, ha M felső korlátja X-nek és nincs olyan $M^* < M$ szám, mely az X-nek szintén felső korlátja.
Jelölése: $M = \sup X$.

3.1.23. Példa
Legyen $X = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$. Ekkor $\sup X = 2$.

3.1.24. Definíció (legnagyobb alsó korlát, infimum, pontos alsó korlát)
Legyen $X \subset \mathbb{R}$ nem üres, alulról korlátos számhalmaz. Az m számot az X halmaz legnagyobb alsó korlátjának (infimumnak) nevezzük, ha m alsó korlátja X-nek és nincs olyan $m^* > m$ szám, mely az X-nek szintén alsó korlátja.
Jelölése: $m = \inf X$.

3.1.25. Példa
Legyen $X = \{x \in \mathbb{R} : x > -4\}$. Ekkor $\inf X = -4$.

3.1.26. Definíció (korlátos halmaz)
Egy nem üres $X \subset \mathbb{R}$ számhalmaz korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.

3.1.27. Példa
Legyen $X = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 11\}$. Ekkor

$$\inf X = -1; \qquad \sup X = 11.$$

3.2 A valós számok axiómarendszeres bevezetése

Ennek az axiomatikus megközelítésnek az alapját az ún. axiómák, azaz bizonyos kézenfekvő fogalmak és ezek nyilvánvaló tulajdonságai adják. Az axiómákat bizonyítás nélkül, alapvetésként fogadjuk el. A valós számok elméletébe tartozó minden további fogalmat, állítást az axiómák felhasználásával definiálunk illetve bizonyítunk.

3.2.1. Definíció (művelet)
Legyen A tetszőleges halmaz. Minden $f : A \times A \to A$ függvényt műveletnek nevezünk A-ban.

3.2.2. Definíció (a valós számok axiómarendszeres bevezetése)
Az $\mathbb{R}$ halmazt a valós számok halmazának nevezzük, ha elemeire érvényesek az alábbi axiómák:

1. *Egyértelműen értelmezve van két művelet - az összeadás és a szorzás, azaz bármely $a, b \in \mathbb{R}$ számpárhoz hozzárendelhető az*

$$a + b \in \mathbb{R} \quad \text{összeg} \quad \text{és az} \quad a \cdot b \in \mathbb{R} \quad \text{szorzat.}$$

2. *Érvényesek a műveleti axiómák:*

   (a) *Az összeadás kommutatív, azaz*

   $$x + y = y + x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.;$$

   (b) *Az összeadás asszociatív, azaz*

   $$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.;$$

   (c) *A szorzás kommutatív, azaz*

   $$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.;$$

   (d) *A szorzás asszociatív, azaz*

   $$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.;$$

   (e) *A szorzás az összeadásra nézve disztributív, azaz*

   $$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.;$$

(f) *Létezik zéruselem (nullelem) illetve egységelem, azaz két olyan - 0-val és 1-el jelölt - elem úgy, hogy*

$$0 + x = x + 0 = x \quad \textit{illetve} \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.;$$

(g) *Létezik additív inverz elem úgy, hogy*

$$x + (-x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(a $-x$ elem az x elem ellentetje) és létezik multiplikatív inverz elem, melyre

$$x \cdot x^{-1} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(x^{-1} az $x \neq 0$ elem reciproka).

3. *Fennállnak a rendezési axiómák:*

(a) *Értelmezett az $x \leq y$ rendezési reláció minden $x, y \in \mathbb{R}$-re úgy, hogy az $x = y$, $x < y$, $x > y$ reláció közül pontosan egy érvényes.*

(b) *Érvényes a tranzitivitás:*

$$\textit{Ha} \quad x < y \quad \textit{és} \quad y < z, \quad \textit{akkor} \quad x < z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

(c) *Teljesül az összeadás és a szorzás monotonitása:*

- *Ha $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$;*
- *Ha $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x$ és $0 \leq y$, akkor $0 \leq x \cdot y$.*

4. *Dedekind-féle teljességi axióma:*
A valós számok minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának van supremuma (legkisebb felső korlátja).

3.2.3. Megjegyzés
Ha egy halmaz rendelkezik a megfogalmazott axiómákban feltüntetett tulajdonságokkal, akkor ez a halmaz nem más, mint a valós számok $\mathbb{R}$ halmaza.

3.2.4. Megjegyzés
A Dedekind-féle teljességi axiómából már következik az alulról korlátos nemüres számhalmazok infimumának létezése.

3.2.5. Megjegyzés
Richard *Dedekind*(1831-1916), német matematikus. Munkássága nagy hatással volt a modern matematika fejlődésére. A gimnáziumot és a főiskolát szülővárosában, Braunschweigben végezte. Jó eredményei alapján Gauss mellé kerülhetett Göttingenbe. Két évi munka után magántanárrá habilitálta

magát. Szorgalmasan látogatta Dirichlet óráit is. Ekkor fogalmazódott meg benne a valós számok megalapozásának szükségessége a határérték-fogalom nélkül, pusztán aritmetikai tulajdonságaik alapján. 1858-tól a zürichi, 1862-től pedig a braunschweigi műszaki főiskola tanára. 1872-ben adta ki a "szeleteit" és a halmazelmélet sok alapfogalmát tartalmazó művét Folytonosság és irracionális számok címmel. 1874-es svájci vakációja során megismerkedett Cantorral. Barátsággá mélyült közöttük az a sorsközösség, hogy egyikük munkásságát sem értékelték a kortársak. Dedekind vezette be 1879-ben az ideál és a háló fogalmát és ő alapozta meg a gyűrűelméletet.

3.2.6. Megjegyzés
A valós számok axiomatikus felépítéséből következik, hogy a természetes számok halmaza ($\mathbb{N}$), az egész számok halmaza ($\mathbb{Z}$), a racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$) és az irracionális számok halmaza ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) az $\mathbb{R}$ részhalmazai.

3.2.7. Megjegyzés
Hasonlóképpen, mint a racionális számok, úgy az irracionális számok halmaza is sűrű $\mathbb{R}$-ben.

3.2.8. Definíció (bővített valós számok halmaza)
Az $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ *halmazt a bővített valós számok halmazának nevezzük.*

3.3 A teljes indukció elve és néhány alkalmazása

A matematika egyik fontos, gyakran használt bizonyítási módszere az ún. teljes indukció alkalmazása. Ez a bizonyítási eljárás három lépésből áll, és akkor alkalmazható, ha tudjuk, hogy minden természetes n számhoz tartozik egy-egy állítás vagy meghatározott tulajdonság és azt szeretnénk igazolni, hogy a szóban forgó állítás igaz minden n-re.

1. lépés:
   Először belátjuk, hogy a kérdéses állítás vagy tulajdonság teljesül valamilyen n_0 természetes számra. Általában $n_0 = 0$ vagy $n_0 = 1$.

2. lépés:
   Feltételezzük, hogy az állítás igaz tetszőleges rögzített $k \in \mathbb{N}$ természetes számra.

3. lépés:
   Az előbbi feltételezést felhasználva igazoljuk, hogy az állítás a természetes $(k + 1)$ számra is igaz.

3.3.1. Példa
Igazoljuk teljes indukcióval, hogy

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

Megoldás:

1. Belátjuk, hogy $n_0 = 1$ esetén az állítás igaz.
   Valóban:
   $$1 = 1^2 = 1.$$

2. Feltételezzük, hogy az állítás k-ra igaz:
   $$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2.$$

3. Bebizonyítjuk, hogy $(k + 1)$-re is igaz:
   $$\underbrace{1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1)}_{k^2} + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$
   Ezzel igazoltuk, hogy az állítás minden $n \in \mathbb{N}$-re igaz.

3.3.2. Tétel (Bernoulli-féle egyenlőtlenség)
Ha $x \geq -1$, $x \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$, *akkor*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a teljes indukció módszerét.

1. Ha $n = 1$, akkor
   $$(1 + x) \geq 1 + x$$
   nyilván igaz.

2. Tegyük fel, hogy tetszőleges $n = k \in \mathbb{N}$-re teljesül:
   $$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

3. Igazoljuk, hogy $n = k + 1$-re is igaz.
   Az indukciós feltevés mindkét oldalát a pozitív $(1+x)$-szel megszorozva:
   $$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 > 1 + (k + 1)x.$$
   tehát az állítás igaz $k + 1$-re is, így minden természetes n-re.

□

3.4 Kombinatorikai ismeretek

Határozzuk meg, hogy egy véges halmaz elemeit hogyan és hányféleképpen lehet csoportosítani.

3.4.1. Definíció (faktoriális)
Az első n pozitív egész szám szorzatát n faktoriálisnak nevezzük.
Jelölése: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1; \quad 0! := 1.$

3.4.2. Definíció (permutáció)
Tekintsünk egy n elemű $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ halmazt (az elemek mind különbözők). Az adott n elem permutációinak az olyan, mind az n elemet tartalmazó

$$(x_1, x_2, ..., x_n), \quad (x_2, x_1, ..., x_n), \quad (x_i, x_j, ..., x_k), \quad (i, j, k \in \{1, 2, ..., n\})$$

sorbarendelését nevezzük, amelyek csak az elemek sorrendjében különböznek egymástól.

3.4.3. Tétel (a permutációk száma)
Az n elemű halmaz permutációinak száma: $P_n = n!$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a teljes indukció módszerét!

1. Ha $n = 1$, akkor $X = \{x_1\}$ és így $P_1 = 1 = 1!$

2. Tegyük fel, hogy tetszőleges $n = k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $X = \{x_1, x_2, ...x_k\}$, akkor teljesül $P_k = k!$.

3. Legyen X egy $(k+1)$ elemű halmaz: $X = \{x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}\}$ és $(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1})$ a permutációk egyike. Minden $j \in \{1, 2, ..., k+1\}$ esetén az $X \setminus \{x_j\}$ halmaz permutációinak száma: $P_k = k!$. Ezeket a k elemű permutációkat $(k+1)$ eleművé tehetjük, ha a $(k+1)$-edik elemet x_j-nek vesszük. Nyilvánvaló, hogy így megkapjuk az $X = \{x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}\}$ $(k+1)$ elemű halmaz összes permutációit, melyeknek száma:
$$k! \cdot (k+1) = (k+1)!,$$
mivel az x_j elemet $(k+1)$-féleképpen tudjuk kiválasztani. Ezzel igazoltuk, hogy $P_{k+1} = (k+1)!$, így $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $P_n = n!$.

□

3.4.4. Példa
Legyen $A = \{a, b, c\}$. Adjuk meg az A halmaz elemeinek permutációit!

Megoldás:
A permutációk a következők:

$$\begin{array}{ccc} (a,b,c) & (b,c,a) & (c,a,b) \\ (c,b,a) & (b,a,c) & (a,c,b) \end{array}$$

A permutációk száma: $3! = 6$.

3.4.5. Definíció (ismétléses permutáció)
Ha az adott elemek között egyformák is vannak, például az a_1 elem k_1-szer fordul elő, az a_2 elem k_2-ször,..., az a_r elem pedig k_r-szer, továbbá $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, akkor a permutációk száma:

$$P_n^{k_1 k_2 \ldots k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

3.4.6. Példa
Hány permutáció alkotható az ANALÍZIS szó betűiből?

Megoldás:
Az A betű kétszer szerepel a szóban, $k_1 = 2$. Ezért:

$$P_8^{2,1,1,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 20160$$

3.4.7. Definíció (kombináció)
Az adott n elem m-ed osztályú kombinációinak az olyan n adott elemből kiválasztott m elemet tartalmazó együtteseket nevezzük, amelyek a kiválasztott elemekben különböznek egymástól.
A kombinációk száma:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}; \quad C_n^1 = n; \quad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

A C_n^m számot így is jelölik:

$$C_n^m = \binom{n}{m}$$

(olvasva: n alatt m) és gyakran binomiális együtthatónak nevezik.

3.4.8. Példa
Legyen $A = \{a, b, c\}$. Ekkor $C_3^2 = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$ és

$$\{a,b\}, \quad \{a,c\}, \quad \{b,c\}.$$

3.4.9. Tétel (binomiális együtthatók tulajdonságai)
A binomiális együtthatókra érvényesek a következők:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$;

c) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + ... + \binom{k}{k}$.

Bizonyítás:

a) $$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

b) $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} =$$

$$\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

c) Az előző állítás ismételt alkalmazásával bizonyítható:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} =$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k+1} = ... =$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + ... + \binom{k+1}{k} + \binom{k+1}{k+1},$$

az utolsó tag 1-gyel egyenlő, így helyettesíthető $\binom{k}{k}$- val.

□

3.4.10. Tétel (Newton-féle binomiális tétel)
Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

azaz

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Bizonyítás:
A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk.

1. lépés:

   $n = 0$ esetén $(a+b)^0 = 1$ miatt az állítás igaz.

2. lépés:

   Tegyük fel, hogy $(n-1)$ -re is igaz az állítás, azaz

   $$(a+b)^{n-1} = \tbinom{n-1}{0} a^{n-1} + \tbinom{n-1}{1} a^{n-2} b + ... + \tbinom{n-1}{n-2} a b^{n-2} + \tbinom{n-1}{n-1} b^{n-1}$$

3. lépés:

   Bizonyítsunk n -re:

   $(a+b)^n = (a+b)^{n-1} \cdot (a+b) =$

   $\left[\tbinom{n-1}{0} a^{n-1} + ... + \tbinom{n-1}{n-2} a b^{n-2} + \tbinom{n-1}{n-1} b^{n-1}\right] \cdot (a+b) =$

   $\tbinom{n-1}{0} a^n + \tbinom{n-1}{1} a^{n-1} b + ... + \tbinom{n-1}{n-2} a^2 b^{n-2} + \tbinom{n-1}{n-1} a b^{n-1} +$

   $\tbinom{n-1}{0} a^{n-1} b + \tbinom{n-1}{1} a^{n-2} b^2 + ... + \tbinom{n-1}{n-2} a b^{n-1} + \tbinom{n-1}{n-1} b^n =$

   $\tbinom{n-1}{0} a^n + \left[\tbinom{n-1}{1} + \tbinom{n-1}{0}\right] a^{n-1} b + ... + \left[\tbinom{n-1}{n-1} + \tbinom{n-1}{n-2}\right] a b^{n-1} + \tbinom{n}{n} b^n =$

   $\tbinom{n}{0} a^n + \tbinom{n}{1} a^{n-1} b + \tbinom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \tbinom{n}{n-1} a b^{n-1} + \tbinom{n}{n} b^n,$

   mert $\tbinom{n}{k} + \tbinom{n}{k-1} = \tbinom{n+1}{k}$. Az állítás tehát igaz. □

3.4.11. Példa
Fejtsük ki a binomiális tétel alapján az $(x^2 - 2y^3)^4$ hatványt!

Megoldás:
$(x^2 - 2y^3)^4 =$

$\binom{4}{0}(x^2)^4 + \binom{4}{1}(x^2)^3(-2y^3) + \binom{4}{2}(x^2)^2(-2y^3)^2 + \binom{4}{3}(x^2)(-2y^3)^3 + \binom{4}{4}(-2y^3)^4 =$

$x^8 + 16y^{12} - 8x^6y^3 + 24x^4y^6 - 32x^2y^9.$

3.4.12. Példa
Az $(1+\sqrt{2})^n$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének harmadik tagja 110. Mekkora a kifejtés utolsó előtti tagja?

Megoldás:
3. tag:

$$\binom{n}{2}(\sqrt{2})^2 = \binom{n}{2}2 = 110$$

Alkalmazzuk a binomiális együtthatóra adott definíciót és határozzuk meg n értékét!

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}2 = 110.$$

$$n(n-1) = 110$$

Azaz:

$$n^2 - n - 110 = 0$$

Így:

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+440}}{2} = \frac{1 \pm 21}{2} \Longrightarrow n = 11.$$

A másik gyök nem ad megoldást, mert negatív.
Az utolsó előtti tag tehét a 11. tag:

$$\binom{n}{n-1}(\sqrt{2})^{n-1} = \binom{11}{10}(\sqrt{2})^{10} = 11 \cdot 2^5 = 352$$

3.4.13. Példa
Számítsuk ki az $E(x) = \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{12}$ kifejezés binomiális tétel szerinti kifejtésének azon tagját, amely nem tartalmazza x-et!

Megoldás:
Írjuk fel a kifejtés $(k+1)$-edik tagját általánosan:

$$\binom{12}{k}\left(x^2\right)^{12-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k = \binom{12}{k}x^{24-2k}(-2)^k x^{-k} = \binom{12}{k}(-2)^k x^{24-3k}$$

A keresett tagban x nem szerepel, azaz hatványkitevője 0. Így:

$$\begin{aligned} 24-3k &= 0 \\ k &= 8 \end{aligned}$$

Tehát a 9. tag nem tartalmazza x-et, értéke:

$$\binom{12}{8}(-2)^8 = 495 \cdot 256 = 126\,720$$

3.5 Abszolút érték

3.5.1. Definíció (valós szám abszolút értéke)
Az $x \in \mathbb{R}$ valós szám abszolút értéke az alábbi képlettel adódó pozitív (nem-negatív) szám:

$$|x| = \begin{cases} x, & ha\ x \geq 0 \\ -x, & ha\ x < 0. \end{cases}$$

3.5.2. Tétel (az abszolút érték tulajdonságai)

1. $|-x| = |x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|, \quad -|x| \leq x \leq |x|$;
2. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$, *ha* $a \geq 0$;
3. $|x| \geq a \iff x \leq -a$ *vagy* $x \geq a$, *ha* $a \geq 0$;
4. $|xy| = |x| \cdot |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$*-re;*
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$*-re,* $y \neq 0$;
6. *Háromszög egyenlőtlenség:*

$$|x+y| \leq |x| + |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - re;$$

Bizonyítás:
Az abszolútérték definíciója alapján:

$$-|x| \leq x \leq |x|, \qquad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Összeadva a felírt egyenlőtlenségeket:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

melyből következik, hogy $|x+y| \leq |x| + |y|$.

A háromszög egyenlőtlenség n-tagú összegekre is érvényes:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,, \quad \forall x_k \in \mathbb{R} - re. \quad \square$$

7. $||x| - |y|| \leq |x+y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$*-re.*

Bizonyítás:

Nyilvánvaló, hogy

$$x = (x+y) - y; \qquad y = (x+y) - x$$

$$|x| \leq |x+y| + |y|; \qquad |y| \leq |x+y| + |x|$$

$$-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$$

Tehát:

$$||x| - |y|| \leq |x+y|. \quad \square$$

8. $||x| - |y|| \leq |x-y|$, *azaz* $\quad |x-y| \geq ||x| - |y||$.

3.6 Intervallumok

A valós számok halmazának igen fontos részhalmazai az ún. intervallumok.

3.6.1. Definíció (intervallumok)
Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ és $a \leq b$ két adott valós szám. Az alábbi részhalmazokat a következőképpen nevezzük:

$$\begin{array}{rcll} (a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \textit{nyílt intervallum,} \\ [a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \textit{zárt intervallum,} \\ (a,b] & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \textit{balról nyílt és jobbról zárt intervallum,} \\ [a,b) & := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \textit{balról zárt és jobbról nyílt intervallum.} \end{array}$$

A felsorolt négy intervallum mind korlátos (mindegyik hossza véges).

Az alábbi intervallumok nem korlátosak:

$$\begin{array}{rcl} (a,+\infty) & := & \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \\ [a,+\infty[& := & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, \\ (-\infty,a) & := & \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \\ (-\infty,a] & := & \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \\ (-\infty,+\infty) & := & \mathbb{R}. \end{array}$$

3.7 Lineáris tér, skaláris szorzat

3.7.1. Definíció (lineáris tér)
Egy adott V halmazt, melynek elemeit vektoroknak nevezzük, valós lineáris térnek mondjuk, ha értelmezve van V-n két művelet:

- *a vektorok összeadása:* $\forall\ x, y \in V, \quad x + y \in V$
- *a vektorok skalárral való szorzása:* $\forall\ x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda x \in V,$

melyekre fennállnak az alábbi tulajdonságok (axiómák):

1. $x + y = y + x \qquad \forall x, y \in V$ *(kommutativitás),*
2. $x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \forall x, y, z \in V$ *(asszociativitás),*
3. $\exists \boldsymbol{0} \in V, \quad x + \boldsymbol{0} = x \qquad \forall x \in V$ *(nullelem létezése),*
4. $\forall x \in V, \quad \exists - x \in V, \quad x + (-x) = \boldsymbol{0}$ *(inverz elem létezése),*
5. $1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = \boldsymbol{0}, \quad 0 \in \mathbb{R};$
6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad x \in V; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad x \in V; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

3.7.2. Példa

- A 3-dimenziós $\mathbb{R}^3$ tér vektorai lineáris teret alkotnak.
- $\mathbb{R}^n$ - lineáris tér
- Az $x(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_k t^k; \quad a_0, a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ k-nál nem magasabb fokú polinomok lineáris teret alkotnak.
- $\mathcal{C}[a, b]$-az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények halmaza lineáris tér.
- $\mathcal{C}^k[a, b]$-az $[a, b]$ intervallumon k-szor folytonosan differenciálható függvények halmaza lineáris tér.
- Az $n \times m$ valós számokból alkotott $x \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrixok lineáris teret alkotnak.

3.7.3. Definíció (skaláris szorzat vektortérben)
Ha V egy lineáris vektortér, akkor egy

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

szimbólummal jelölt függvényt (leképezést) skaláris szorzatnak nevezzük, ha $\forall x, y, z \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén ez a függvény kielégíti az alábbi feltételeket:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

2. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;

4. $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

3.7.4. Példa
Legyen $V = \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2.$$

3.7.5. Definíció (Euklideszi tér)
A skaláris szorzattal ellátott lineáris teret Euklideszi térnek nevezzük.

3.7.6. Példa

- Legyen $x \in \mathbb{R}^n$, a skaláris szorzat: $\langle x, y\rangle = x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n$. Ez Euklideszi tér.
- Legyen $x, y \in \mathcal{C}[a, b]$, a skaláris szorzat: $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t) \cdot y(t)dt$. Ez Euklideszi tér.

3.7.7. Definíció (normált tér)
Egy lineáris V vektorteret normált térnek nevezünk, ha $\forall\ x \in V$-hez hozzá van rendelve egy nemnegatív $\|x\|$ valós szám (az x vektor normája), melyre teljesül az alábbi három axióma:

1. $\|x\| > 0, \qquad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = \boldsymbol{0}, \quad x, \boldsymbol{0} \in V$;

2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad x \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad x, y \in V.$

Tehát a vektor normája egy nemnegatív értékű függvény.

3.7.8. Példa

- Legyen $V = \mathbb{R}^n$, ekkor a norma:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

- Ha $V = \mathbb{R}$, akkor a norma:

$$\|x\| = |x|.$$

3.7.9. Definíció (távolság $\mathbb{R}$-ben)
Az $a, b \in \mathbb{R}$ elemek távolságán a számegyenesen a és b pontjának távolságát értjük, azaz az $|a-b|$ számot.
Jelölése: $\varrho(a,b) := |a-b|$.

3.7.10. Megjegyzés
Könnyű észrevenni, hogy a ϱ távolság egy kétváltozós függvény:

$$\varrho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

3.7.11. Megjegyzés
A 3.7.9. Definíció és az abszolút érték tulajdonságai alapján a távolságra teljesülnek az alábbiak:

a) $\varrho(a,b) \geq 0 \quad$ és $\quad \varrho(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$

b) $\varrho(a,b) = \varrho(b,a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$

c) $\varrho(a,b) \leq \varrho(a,c) + \varrho(b,c), \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$

3.7.12. Definíció (ε-sugarú környezet $\mathbb{R}$-ben)
Bármely valós $x_0 \in \mathbb{R}$ ε-sugarú környezetén ($\varepsilon > 0$) azon $x \in \mathbb{R}$ pontok halmazát értjük, amelyeknek x_0-tól való távolsága kisebb ε-nál, azaz

$$B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : \varrho(x, x_0) < \varepsilon\},$$

vagy

$$B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

3.7.13. Megjegyzés
Tehát az x_0 pont ε-sugarú környezete az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ nyílt intervallum.

A távolság fogalma általánosítható általános halmazokra.

3.7.14. Definíció (metrika nemüres halmazon, metrikus tér)
Legyen X egy nemüres halmaz. Ha értelmezve van egy $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény az alábbi tulajdonságokkal:

a) $\varrho(x,y) \geq 0 \quad$ *és* $\quad \varrho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X;$

b) $\varrho(x,y) = \varrho(y,x), \quad \forall x, y \in X;$

c) $\varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z), \quad \forall x, y, z \in X,$

akkor azt mondjuk, hogy ϱ metrika X-en és X-et metrikus térnek nevezzük.
Jelölése: (X, ϱ).

3.7.15. Megjegyzés
Egy normált V tér mindig egyben metrikus tér is, ha a $\varrho : V \times V \to \mathbb{R}$ metrikát (távolságot) a

$$\varrho(x, y) = \|x - y\|$$

formulával definiáljuk. Könnyen kimutatható, hogy a bevezetett metrika teljesíti a metrikára előírt mind a három tulajdonságot. Így, a metrikus terek a normált terek általánosításának tekinthetők.

3.7.16. Példa
Tekintsük újra a valós szám n-esek $\mathbb{R}^n$ halmazát. Adjuk meg a normát az alábbi formulával:

$$\|x\|_{\mathbb{R}_1^n} := \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

a metrikát pedig a következőképpen:

$$\varrho(x, y) := \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|\,.$$

Ekkor az $\mathbb{R}^n$ lineáris teret $\mathbb{R}_1^n$ szimbólummal jelöljük.
Legyen $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|\,,$$

és

$$\varrho_\infty(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|\,.$$

Ezzel a metrikával az $\mathbb{R}^n$ teret $\mathbb{R}_\infty^n$ szimbólummal jelöljük.

Kimutatható, hogy a fentebb bevezetett normák illetve metrikák az $\mathbb{R}$ lineáris térben mind teljesítik a 3.7.7. Definícióban és a 3.7.14. Definícióban szereplő axiómákat.

3.7.17. Definíció (halmaz belső pontja, határpontja, külső pontja)
Legyen $X \subset \mathbb{R}$.

a) $x_0 \in \mathbb{R}$ *belső pontja X-nek, ha van olyan környezete, amelyik X-nek részhalmaza. Az X belső pontjainak halmazát az X belsejének nevezik. Jelölése: X°.*

b) $x_0 \in \mathbb{R}$ *határpontja X-nek, ha minden környezetében van eleme X-nek és $\mathbb{R} \setminus X$-nek. Az X halmaz határpontjainak halmazát X határának nevezik. Jelölése: ∂X.*

c) $x_0 \in \mathbb{R}$ *külső pontja* X*-nek, ha van olyan környezete, amelyben* X*-nek nincs eleme. Az* X *halmaz külső pontjainak halmazát* X^K *jelöli.*

3.7.18. Definíció (halmaz torlódási pontja, izolált pontja)
Legyen $X \subset \mathbb{R}$.

a) $x_0 \in \mathbb{R}$ *torlódási pontja* X*-nek, ha minden környezetében van* X*-nek* x_0*-tól különböző eleme. Az* X *torlódási pontjainak halmazát* X^**-gal jelöljük.*

b) $x_0 \in X$ *izolált pontja* X*-nek, ha nem torlódási pontja.*

3.7.19. Példa
A racionális számok halmazának minden valós szám torlódási pontja, mivel minden $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ esetén van olyan r racionális szám, hogy

$$x < r < y.$$

3.7.20. Példa
Határozzuk meg a $H = [1,3] \cup (5,8]$ halmaz belső pontjainak, határpontjainak, külső pontjainak és torlódási pontjainak halmazát!

Megoldás:

$$\begin{array}{ll} \sup H = 8 & \inf H = 1 \\ H^\circ = (1,3) \cup (5,8) & H^K = (-\infty, 1) \cup (3,5) \cup (8, +\infty) \\ H^* = [1,3] \cup [5,8] & \partial H = \{1,3,5,8\} \end{array}$$

3.7.21. Példa
Határozzuk meg az irracionális számok halmazának belső pontjait, külső pontjait, torlódási pontjait és határpontjait!

Megoldás:

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^K = \emptyset$$

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^* = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

3.7.22. Példa
Legyen $X \subset \mathbb{R}$, $X = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.
Itt X-nek egyetlen egy torlódási pontja van az $x_0 = 0$ és X minden eleme izolált pont.

3.7.23. Megjegyzés
Véges halmaznak nem létezik torlódási pontja.

3.8 Műveletek a valós számok halmazán

Az

$$a = a_0.a_1a_2...a_n...$$

végtelen tizedes tört alakú valós szám esetén vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$a' = a_0.a_1a_2...a_n$$

és

$$a'' = a_0.a_1a_2...a_{n+1},$$

jelöléseket. (a' és a'' véges tizedes törtek)

3.8.1. Definíció (műveletek valós számokkal)
Ha $a = a_0.a_1a_2...a_n...$ és $b = b_0.b_1b_2...b_n...$ két pozitív valós szám, akkor:

- $a + b := \sup\limits_{n\geq 0}(a_n' + b_n');$
- $a \cdot b := \sup\limits_{n\geq 0}\left(a_n' \cdot b_n'\right);$
- $\dfrac{a}{b} := \sup\limits_{n\geq 0}\dfrac{a_n'}{b_n''};$
- $a - b := \sup\limits_{n\geq 0}(a_n' - b_n'')$, *ha* $a > b$;
- $a^0 := 1$;
- $a^n = a \cdot a \cdot ...a, \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$

Most áttekintjük, felelevenítjük a középiskolából jól ismert egyes műveleteket a valós számok halmazán.

1. Pozitív egész kitevő esetén a hatványozás ismételt szorzással végezhető el:

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{k}, \quad k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad a^0 = 1.$$

   A hatványozás azonosságai:

   (a) A hatványozást lehet természetes, negatív, racionális kitevőkre értelmezni. Irracionális kitevő esetén határátmenettel értelmezzük.

   (b) $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a, \quad a_0 = 1, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\};$$

(c) $-n \in \mathbb{Z}^-$ esetén:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$$

Példa: $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

(d) $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ esetén:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p};$$

(e) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

(f) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$;

(g) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;

(h) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;

(i) $n = \alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ esetén:

$$a^\alpha = \lim_{k \to \infty} a^{r_k},$$

ahol $r_1, r_2, ...$ racionális számok egy α-hoz tartó sorozata.

2. A gyökvonás a hatványozás egyik fordított (inverz) művelete, mégpedig az alap meghatározása a hatvány és a kitevő ismeretében:

$$x^n = a \quad \rightarrow \quad x = ? \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$$

(olvasva: n-edik gyök a).
$\sqrt[n]{a}$ egy olyan valós számot jelent, melynek n-edik hatványa a:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Megállapodunk abban, hogy pozitív a esetén $\sqrt[n]{a}$ pozitív.
Például $\sqrt{25} = +5$ és nem ± 5. $\sqrt{-16}$ nincs értelmezve $\mathbb{R}$-ben.
Ha az n gyökkitevő páros és a hatvány $a < 0$, akkor a gyökvonás $\mathbb{R}$-ben nincs értelmezve.
Például:

$$\sqrt[3]{-64} = -4; \qquad \sqrt[4]{-16} \text{ - nincs értelmezve}$$

Példa: $\sqrt{a^2} = |a|$.

A gyökvonás azonosságai:

(a) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

(b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

(c) $\sqrt[n]{a^{n+k} \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{a^k \cdot b}$;

(d) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

3. Logartimus keresés (logaritmálás)
Ez a művelet a hatványozás egy másik inverz művelete, amikor az

$$a^x = b, \quad a \neq 1, \quad b > 0$$

összefüggésben adottnak tekintjük az a alapot és a b hatványt. Ekkor az x kitevő meghatározását logaritmus keresésnek nevezzük.
Jelölése:

$$x = \log_a b$$

(olvasva: x a b szám a alapú logaritmusa).
Példa: $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, mivel $2^{-4} = \frac{1}{16}$.

Tetszőleges $a \neq 1$ és $x, y > 0$ esetén fennállnak a következő azonosságok:

(a) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;

(b) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

(c) $\log_a 1 = 0$;

(d) $\log_a a = 1$;

(e) $a^{log_a x} = x$;

(f) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$;

(g) $\log_a x^{\frac{1}{n}} = \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \log_a x$;

(h) Logaritmus átalakítása egy másik alapra:

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \frac{1}{\log_b a};$$

(i) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

Tehát az $y = \log_a x$ összefüggés úgy értelmezhető, hogy minden $x > 0$ számhoz megkeressük azt a kitevőt, amelyre az a alapot fel kell emelnünk, hogy a hatványozás eredményeként x-et kapjuk.

4 Numerikus sorozatok, Konvergencia

4.1 Valós számsorozatok

A sorozatok és ennek következtében a határérték a matematikai analízis egyik alapvető fogalma. Korábban általánosságban már megadtuk egy adott X halmazból adott Y halmazba leképező egyértelmű

$$f : X \to Y$$

függvény definícióját. Ha a 2.4.1. Definícióban $X = \mathbb{N}$ - a természetes számok halmaza, Y pedig a való számok $\mathbb{R}$ halmaza, akkor ún. numerikus sorozatokhoz jutunk.

4.1.1. Definíció (végtelen számsorozatok)
Ha minden természetes $n \in \mathbb{N}$ számhoz (esetleg elhagyva belőle valamely rögzített n_0 számnál kisebb számokat), tehát ha minden

$$1, 2, 3, ..., n, ...$$

vagy

$$n_0 + 1, n_0 + 2, ..., n_0 + n, ...$$

számokhoz egyértelműen hozzárendelünk egy valós a_n számot, akkor végtelen számsorozatot (numerikus sorozatot) adunk meg:

$$n \longmapsto a_n, \quad a_n \in \mathbb{R}.$$

Jelölése: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vagy $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$; $(k \in \mathbb{N})$, vagy röviden $\{a_n\}$, illetve

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \quad a_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{N}.$$

Az $a_n \in \mathbb{R}$ elemet a sorozat n-edik elemének nevezzük.

A sorozatot többféleképpen adhatjuk meg.

- Rendszerint úgy adjuk meg, hogy felírjuk általános a_n elemét az n index függvényeként.

  Példa: Legyen $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Írjuk fel a sorozat néhány elemét!

  Megoldás: A sorozat első, második, ..., k-adik elemét úgy kapjuk, hogy az n^2 kifejezésbe n helyére rendre az

  $$1, 2, 3, ..., k, ...$$

számot helyettesítjük. Így

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 9, \quad ... \quad a_k = k^2, ...$$

Példa: Legyen $a_n = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=0}^{\infty}$ adott. Írjuk fel a sorozat néhány elemét!

Megoldás: A számsorozat elemei:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ..., \frac{1}{3^n}, ...$$

- Megadható a számsorozat ún. rekurziós formulával, ekkor az a_n n-edik elemet az előző elemek segítségével határozzuk meg.
  Például az a_{n-2} és a_{n-3} elemek segítségével $a_n = a_{n-2} + 2 \cdot a_{n-3}$.

  Példa: Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, ha $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Adjuk meg a sorozat első hét elemét!

  Megoldás:

  $$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...$$

  Ezt a sorozatot Fibonacci-féle sorozatnak nevezzük.

- Megkaphatjuk a sorozat elemeit szöveges utasításból is.

  Példa: Legyen az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat n-edik eleme az n-edik prímszám kétszerese. Határozzuk meg a sorozat első hét elemét!

  Megoldás: A prímszámok:

  $$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...$$

  Tehát a sorozat elemei:

  $$4, 6, 10, 14, 22, 26, 34, ...$$

4.2 Korlátos és monoton sorozatok

4.2.1. Definíció (korlátos sorozat)
Egy $\{a_n\}$ számsorozatot felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan K valós szám, amelynél a sorozatnak nincs nagyobb eleme, azaz

$$a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Az $\{a_n\}$ számsorozat alulról korlátos, ha megadható olyan k valós szám, amelynél a sorozatnak nincs kisebb eleme, azaz

$$a_n \geq k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Az $\{a_n\}$ sorozat korlátos, ha alulról és felülről is korlátos:

$$k \leq a_n \leq K.$$

A korlátosság szemléletesen azt jelenti, hogy a sorozatnak minden eleme egy véges hosszúságú intervallumban van:

$$|a_n| \leq H, \quad H \in \mathbb{R}.$$

4.2.2. Megjegyzés

Könnyen látható, hogy ha létezik egy alsó k, illetve felső K korlát, akkor végtelen sok alsó, illetve felső korlát van. A legnagyobb alsó korlát a sorozat infimuma, a legkisebb felső korlát pedig a sorozat supremuma. Jelölése: $\inf\{a_n\}$, $\sup\{a_n\}$.

4.2.3. Példa

Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$, azaz

$$1, 4, 9, ..., n^2, ...$$

Vizsgáljuk a megadott sorozatot korlátosság szempontjából!

Megoldás:

A sorozat minden eleme pozitív, ezért a sorozatnak 0 az egyik alsó korlátja. Ennél nagyobb alsó korlátja 1, amely egyben a sorozat legkisebb eleme, és ugyanakkor a sorozat infimuma:

$$\inf\{a_n\} = 1.$$

A sorozatnak nem létezik felső korlátja.

4.2.4. Példa

Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Vizsgáljuk meg a sorozatot korlátosság szempontjából!

Megoldás:

Ez a sorozat alulról korlátos, mert minden eleme pozitív. Így a 0 egy alsó korlát. A sorozat legkisebb eleme $\dfrac{1}{2}$, mivel

$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{n+1} &\geq \frac{1}{2} \\ 2n-1 &\geq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}n &\geq \frac{3}{2} \\ n &\geq 1 \end{aligned}$$

így
$$a_n \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
ezért a sorozat infimuma $\frac{1}{2}$.
A sorozat felülről is korlátos, mert például a $K = 2.1$ szám egy felső korlát, vagyis a sorozat minden eleme kisebb, mint 2.1.
Valóban
$$\begin{aligned} \frac{2n-1}{n+1} &< 2.1 \\ 2n-1 &< 2.1n + 2.1 \\ -3.1 &< 0.1n \\ -31 &< n. \end{aligned}$$
Ez pedig nyilvánvaló, mivel n csak természetes szám lehet.
A sorozat tehát korlátos:
$$\frac{1}{2} \leq a_n < 2.1,$$
azaz minden eleme az
$$\left[\frac{1}{2}, 2.1\right)$$
intervallumban van.

Bizonyos sorozatokra az a jellemző, hogy az n index növekedésével az elemek is növekednek vagy csökkennek.

4.2.5. Definíció (monoton növekvő, csökkenő sorozatok)
Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat monoton növekvő, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$a_{n+1} \geq a_n,$$
és monoton csökkenő, ha bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén
$$a_{n+1} \leq a_n.$$
Ha
$$a_{n+1} > a_n,$$
illetve
$$a_{n+1} < a_n,$$
akkor azt mondjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő, illetve szigorúan monoton csökkenő.

Jelölések:

$$\begin{array}{rcl} \textit{monoton növekvő sorozat} & : & \{a_n\} \nearrow \\ \textit{szigorúan monoton növekvő sorozat} & : & \{a_n\} \uparrow \\ \textit{monoton csökkenő sorozat} & : & \{a_n\} \searrow \\ \textit{szigorúan monoton csökkenő sorozat} & : & \{a_n\} \downarrow \end{array}$$

4.2.6. Példa

Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2n-1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton növekvő!

Bizonyítás:

A sorozat elemei:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{5}{4}, \quad a_4 = \frac{7}{5}, \quad a_5 = \frac{9}{6}, \quad \ldots \quad a_n = \frac{2n-1}{n+1}, \quad \ldots$$

Azt kell igazolni, hogy

$$a_{n+1} > a_n,$$

azaz

$$\frac{2n+1}{n+2} > \frac{2n-1}{n+1}.$$

Ekkor

$$\begin{array}{rcl} (2n+1)(n+1) & > & (2n-1)(n+2) \\ 2n^2+3n+1 & > & 2n^2+3n-2 \\ 1 & > & -2, \end{array}$$

ami már nyilvánvaló, vagyis a sorozat szigorúan monoton növekvő.

4.2.7. Példa

Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az $\left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot!

Megoldás:

Mivel

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{3^n} = \frac{1-3}{3^{n+1}} = -\frac{2}{3^{n+1}} < 0,$$

ezért

$$a_{n+1} < a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

azaz a sorozat szigorúan monoton csökkenő. Ebből az következik, hogy a sorozat legkisebb felső korlátja - supremuma - megegyezik a sorozat első elemével, tehát

$$\sup \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=0}^{\infty} = a_0 = 1.$$

Mivel a sorozat pozitív számokból áll, ezért

$$\frac{1}{3^n} > 0 = k,$$

tehát a sorozat alulról is korlátos. Vagyis

$$0 < a_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Így a sorozat korlátos.

4.2.8. Példa

Vizsgáljuk monotonitás és korlátosság szempontjából a $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot!

Megoldás:

A sorozat elemei:

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, ...$$

Ez esetben

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^{n+2} - (-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} + (-1)^{n+2} = 2 \cdot (-1)^{n+2}$$

Azaz

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -2, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases},$$

vagyis a különbség váltakozó, ezért a sorozat nem monoton.
Ez a sorozat korlátos, mivel elemei csak a -1 és 1 értéket veszik fel. Ezért

$$k = -1 \leq a_n \leq 1 = K.$$

4.2.9. Példa

Vizsgáljuk az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot monotonitás szempontjából!

Megoldás:

Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty} \nearrow$ és egyben $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty} \searrow$.

4.2.10. Példa

Vizsgáljuk meg az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából!

Megoldás:

Megmutatjuk, hogy a sorozat szigorúan monoton csökkenő:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Tehát

$$a_{n+1} < a_n.$$

Azaz

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\} \downarrow .$$

A sorozat tehát szigorúan monoton csökkenő, vagyis az első eleme a felső korlátok közül a legkisebb, így:

$$\sup\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 1.$$

A sorozat minden eleme pozitív, tehát a 0 alsó korlátja a sorozatnak. Az $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat tehát korlátos és

$$0 < a_n \leq 1.$$

4.3 Számsorozatok konvergenciája és divergenciája

4.3.1. Definíció (részsorozat)

A $\{b_n\}$ sorozatot az $\{a_n\}$ sorozat részsorozatának nevezzük, ha az $\{a_n\}$ sorozatból bizonyos véges vagy végtelen számú elemek törlésével állítható elő úgy, hogy a megtartott elemek $\{a_n\}$-beli sorrendje változatlan.

4.3.2. Példa

Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, ...\}$.
A részsorozatok:

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 1, 1, 1, ...\}, \quad \text{vagy} \quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, -1, -1, -1, ...\}.$$

A numerikus végtelen sorozatok között megkülönböztetjük a konvergens illetve divergens sorozatokat.

4.3.3. Definíció (határérték, konvergencia, divergencia)
Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat határértéke, vagy limesze, ha* $n \to \infty$*, az* A *valós szám, ha bármely* $\varepsilon > 0$ *számhoz megadható olyan* ε*-tól függő* $n_0(\varepsilon)$ *természetes szám, hogy minden* $n \geq n_0(\varepsilon)$*-ra*

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

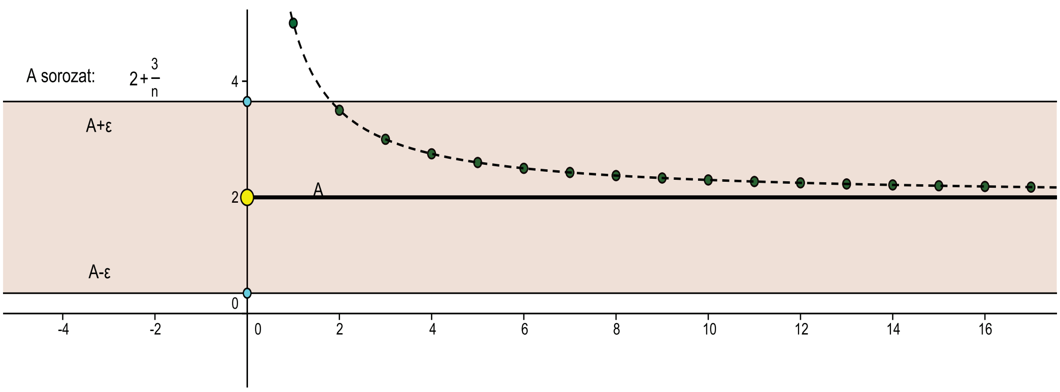
teljesül.
Jelölése:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \textit{vagy} \qquad a_n \to A,\ n \to \infty.$$

Egy $\{a_n\}$ *sorozatot konvergensnek nevezünk, ha létezik olyan* $A \in \mathbb{R}$*, amelyhez* $\{a_n\}$ *konvergál; ellenkező esetben a sorozatot divergensnek nevezzük.*

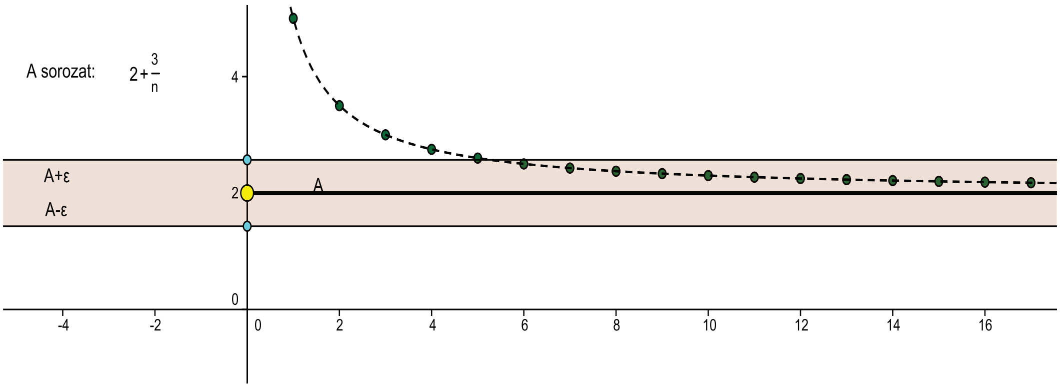
4.3.4. Megjegyzés
A 4.3.3. Definíció azt jelenti, hogy konvergens sorozat esetén elég nagy küszöbindextől kezdve a sorozat összes eleme az A határérték ε-sugarú környezetébe esik, azaz az A határérték ε-sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges számú eleme helyezkedik el.

4.3.5. Példa
Tekintsük a $\left\{2 + \frac{3}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$. Legyen $\varepsilon = 1,65$. Az alábbi ábráról könnyen leolvasható, hogy $n_0 = 1$, azaz a sorozat elemei a második tagtól a határérték $\varepsilon = 1,65$ sugarú környezetében találhatóak meg.



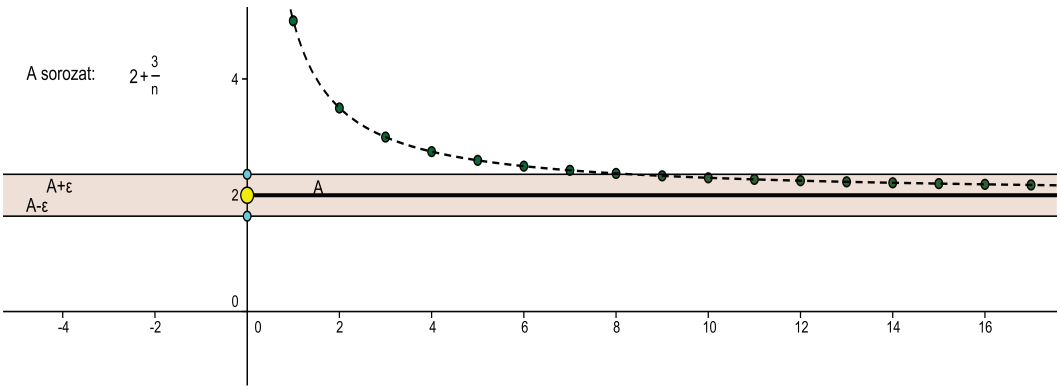
4.1. ábra

Ha $\varepsilon = 0,57$ (4.2. ábra), akkor $n_0 = 5$, tehát a sorozat elemei a hatodik tagtól vannak a határérték $\varepsilon = 0,57$ sugarú környezetében.



4.2. ábra

Ha pedig $\varepsilon = 0,36$ (4.3. ábra), akkor $n_0 = 8$, vagyis a sorozat elemei a kilencedik tagtól nem lépnek ki a határérték $\varepsilon = 0,36$ sugarú környezetéből.



4.3. ábra

4.3.6. Példa

Igazoljuk, hogy az $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Megoldás:

A definíció szerint az

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesülését kell vizsgálnunk tetszőlegesen kicsiny ε érték mellett egy bizonyos n_0 küszöbszámtól kezdve, azaz amikor $n \geq n_0$.

Átalakításokkal:

$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{n+1}-1\right| &= \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}-1 &< n \\ n &\geq \frac{1}{\varepsilon}-1 = n_0\end{aligned}$$

tehát, ha $n \geq n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ (ε kis pozitív értéke miatt $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0$), akkor

$$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_0 = \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Így a sorozat határértéke

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

és a sorozat konvergens.

4.3.7. Példa

Mutassuk meg, hogy az $\{a_n\}_{n=3}^{\infty} = \left\{\frac{n+2}{n^2-4}\right\}_{n=3}^{\infty}$ sorozat határértéke 0, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2-4} = 0.$$

Keressük meg azt a küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a határérték 10^{-4}-sugarú környezetébe esnek!

Megoldás:

A definíció szerint teljesülnie kell az

$$\left|\frac{n+2}{n^2-4} - 0\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenségnek, melyből

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n+2}{(n-2)(n+2)}-0\right| &< \varepsilon \\
\left|\frac{1}{n-2}\right| &< \varepsilon \\
\frac{1}{n-2} &< \varepsilon \\
\frac{1}{\varepsilon} &< n-2 \\
\frac{1}{\varepsilon}+2 &< n \\
n_0(\varepsilon) &= 2+\frac{1}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Tehát bármely kicsiny $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0 = 2 + \frac{1}{\varepsilon}$ küszöbszám, melynél nagyobb indexű elemei a sorozatnak az origó ε-sugarú környezetébe esnek, tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2-4} = 0.$$

Az $\varepsilon = 10^{-4}$ értékhez tartozó küszöbszámot az előző számításainkat felhasználva kapjuk:

$$\begin{aligned}
n_0(10^{-4}) &= 2+\frac{1}{10^{-4}} \\
n_0(10^{-4}) &= 2+10000 = 10002.
\end{aligned}$$

Tehát a sorozat 10002 indextől kezdődő elemei mind az origótól $\varepsilon = 0.0001$-től nem nagyobb távolságra vannak.
Felvetődhet a kérdés, hogy vajon hány határértéke van egy konvergens sorozatnak? Erre ad választ az alábbi tétel.

4.3.8. Tétel (a határérték unicitása)
Minden konvergens $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak csak egy határértéke van.

Bizonyítás:

Az állítást indirekt úton bizonyítjuk. Tételezzük fel, hogy az adott konvergens sorozatnak két különböző határértéke van:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = B.$$

Továbbá
$$A \neq B.$$
Mivel a sorozat konvergens, ezért létezik n_A küszöbszám, melyre fennáll, hogy
$$|a_n - A| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_A \text{ esetén.}$$
Hasonlóan, létezik n_B küszöbszám, melyre
$$|a_n - B| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_B \text{ esetén.}$$
Legyen $n_0 = max(n_A, n_B)$, ekkor $\forall n \geq n_0$ esetén
$$|a_n - A| < \varepsilon \qquad \text{és} \qquad |a_n - B| < \varepsilon.$$
Válasszuk meg ε-t a következőképpen:
$$\varepsilon = \frac{|A - B|}{4} > 0.$$
Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával
$$4\varepsilon = |A - B| = |(a_n - B) - (a_n - A)| \leq |a_n - B| + |a_n - A| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$
$$4\varepsilon \leq 2\varepsilon$$
$$2\varepsilon \leq \varepsilon.$$
Ellentmondásra jutottunk. Tehát a tétel állítása igaz. □

4.4 Sorozatok torlódási pontja

A sorozatnak egy másik, a határértékhez közel álló, de azzal nem azonos jellemzője az ún. torlódási pont.

4.4.1. Definíció (torlódási pont)
A t számot az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat torlódási pontjának nevezzük, ha t bármely környezete a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza.*

4.4.2. Definíció (torlódási pont)
Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat torlódási pontjának nevezünk minden olyan t számot, mely az adott sorozat valamely részsorozatának határértéke.*

4.4.3. Megjegyzés
Igazolható, hogy a két definíció ekvivalens.

4.4.4. Megjegyzés
Nyilvánvaló, hogy a határérték mindig torlódási pont, de ez a fordított állítás általában nem igaz.

4.4.5. Példa
Határozzuk meg az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási pontjait!

Megoldás:

Az adott

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, ...$$

sorozatból először a páratlan indexű elemekből alkossuk a

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-1\}_{n=1}^{\infty}$$

részsorozatot. Nyilvánvaló, hogy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = -1.$$

Hasonlóan, a páros indexű elemekből alkotott

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1\}_{n=1}^{\infty}$$

részsorozat szintén konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

Tehát az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak két torlódási pontja van, határértéke viszont nem létezik, mert a határérték létezésének feltétele nem teljesül.

4.4.6. Megjegyzés
Mivel a konvergens sorozatnak csak egy határértéke van megállapíthatjuk, hogy több torlódási ponttal rendelkező sorozatok szükségképpen divergensek. Azonban az egyetlen torlódási ponttal rendelkező sorozatok sem feltétlenül konvergensek.

Ezt az alábbi példa is igazolja.

4.4.7. Példa
Vizsgáljuk az alábbi sorozat torlódási pontjait!

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \begin{array}{ll} 2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{array} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Megoldás:

A páros indexű elemek a

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2\}_{n=1}^{\infty}$$

részsorozatot alkotják, amely konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 2.$$

Tehát $t = 2$ a sorozat torlódási pontja.
Viszont a sorozat páratlan indexű elemeiből képzett részsorozat

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$$

divergens.

4.4.8. Megjegyzés

Minden konvergens sorozatnak pontosan egy torlódási pontja van (ez a határérték), de az egyetlen torlódási ponttal rendelkező sorozatok nem feltétlenül konvergensek.

5 Sorozatok konvergenciájával kapcsolatos állítások

5.1 Korlátos és monoton sorozatok konvergenciája

5.1.1. Tétel (konvergens sorozatok korlátossága)
Minden konvergens $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat korlátos.

Bizonyítás: Legyen a sorozat határértéke

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Tekintsük az A határérték $\varepsilon = 1$-sugarú környezetét. Mivel a sorozat konvergens, ezért csak véges sok m eleme marad ki a sorozatnak az $(A-1, A+1)$ környezetből. Vegyük ezen kimaradó véges számú elemek A-tól mért távolságának a legnagyobb értékét, amit jelöljünk K-val. Ekkor nyilvánvaló, hogy

$$|a_n - A| \le K$$

teljesül a sorozat minden elemére, azaz

$$A - K \le a_n \le A + K, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

tehát a konvergens sorozat valóban korlátos. □

5.1.2. Tétel (monoton korlátos sorozatok konvergenciája)
Ha az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat monoton növekvő $a_{n+1} \ge a_n$ és felülről korlátos, akkor konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}.$$

Ha az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat monoton csökkenő $a_{n+1} \le a_n$ és alulról korlátos, akkor konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}.$$

Bizonyítás:
Tekintsük a monoton növekvő és felülről korlátos sorozatot. Legyen

$$S = \sup\{a_n\}.$$

Ha a supremumot bármilyen kis $\varepsilon > 0$ értékkel csökkentjük, akkor $S - \varepsilon$ már nem lesz a sorozat felső korlátja. Ezért létezik olyan n_0 index, hogy

$$S - \varepsilon < a_{n_0} \le S.$$

A sorozat monoton növekvő, ezért

$$a_n \geq a_{n_0}, \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{esetén.}$$

A felülről korlátosság miatt

$$a_n \leq S, \quad n \in \mathbb{N},$$

így

$$S - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq S < S + \varepsilon, \quad n \geq n_0 \quad \text{esetén.}$$

Tehát az utóbbi egyenlőtlenségek miatt a sorozat minden n_0-nál nagyobb indexű eleme benne van az S supremum ε-sugarú környezetében, tehát a sorozat konvergens és határértéke S.
Monoton csökkenő sorozatokra a bizonyítás hasonló módon történik. □

5.1.3. Példa
Konvergens-e az

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

sorozat?

Megoldás:
Vizsgáljuk a sorozat monotonitását!

$$a_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)},$$

tehát

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1,$$

azaz

$$a_{n+1} < a_n,$$

vagyis a sorozat szigorúan monoton csökkenő. A sorozat alulról korlátos (alsó korlátja a 0), tehát az 5.1.2. Tétel értelmében a vizsgált sorozat konvergens.

5.1.4. Példa
Már igazoltuk (4.2.4. Példa), hogy az

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{2n-1}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, mégpedig egyik felső korlátja 2.1, ezért a sorozatnak létezik határértéke. Meggyőződünk arról, hogy a sorozat határértéke 2. Vizsgáljuk az

$$\left|\frac{2n-1}{n+1}-2\right|<\varepsilon$$

egyenlőtlenséget, melyből

$$\begin{aligned} |2n-1-2n-2| &< (n+1)\varepsilon \\ 3 &< (n+1)\varepsilon \\ \frac{3}{\varepsilon} &< n+1 \\ \frac{3}{\varepsilon}-1 &< n \\ n_0(\varepsilon) &\geq \frac{3}{\varepsilon}-1>0 \end{aligned}$$

Tehát, bármilyen kis ε-hoz található olyan

$$n_0(\varepsilon)=\frac{3}{\varepsilon}-1$$

küszöbszám, melynél nagyobb indexű elemei a sorozatnak a határérték ε-sugarú környezetébe esnek.

5.1.5. Tétel (konvergens sorozat részsorozatának határértékéről)
Ha az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

akkor minden $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozata is konvergens. Továbbá minden részsorozat határértéke megegyezik a sorozat határértékével:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Bizonyítás:
A sorozat konvergenciája miatt az A határérték bármely ε-sugarú környezetéből az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak legfeljebb véges számú eleme marad ki. Nyilvánvalóan ugyanez igaz $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bármely $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozatára is. □

5.1.6. Megjegyzés
Ez a tétel hasznos egyes sorozatok divergenciájának bizonyítására. Ugyanis, ha sikerül kiválasztani a sorozatnak két különböző határértékű konvergens részsorozatát, akkor a sorozat biztosan divergens. Tehát, ha a sorozatnak két torlódási pontja van, akkor a sorozat biztosan divergens.

5.1.7. Tétel (a konvergencia "rendőr-elve")
Feltételezzük, hogy az $\{a_n\}$ *és* $\{c_n\}$ *olyan konvergens sorozatok, amelyek határértékei megegyeznek:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = H.$$

Legyen továbbá

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \geq n_0 \quad \textit{esetén.}$$

Ekkor a $\{b_n\}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = H.$$

Bizonyítás:
A közös határérték miatt H ε-sugarú környezetéből az $\{a_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozat csak véges számú eleme marad ki. Mivel a $\{b_n\}$ sorozat elemei egy véges n_0 indextől kezdve mind az $\{a_n\}$ és $\{c_n\}$ sorozat elemei közé esnek, ezért a $\{b_n\}$ sorozat elemei az n_0 indextől kezdve mind a H valós szám ε-sugarú környezetéhez tartoznak (csak véges sok elem eshet a környezeten kívülre). Tehát igaz, hogy

$$\lim_{n\to\infty} b_n = H.$$

□

5.1.8. Tétel (Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel)
Minden végtelen korlátos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozatból kiválasztható legalább egy konvergens részsorozat.*
Vagy más megfogalmazásban:
Minden végtelen korlátos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozatnak van legalább egy torlódási pontja.*

Bizonyítás:
Mivel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ korlátos, ezért

$$k \leq a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

azaz a sorozat minden eleme a $[k, K]$ intervallumban van. Felezzük meg a $[k, K]$ intervallumot. A két keletkező intervallum közül legalább az egyik az adott sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. A kapott két intervallum közül jelölje $[\alpha_1, \beta_1]$ azt, amelybe a sorozatnak végtelen sok eleme esik (ha mindkettőben végtelen sok elem van, akkor legyen $[\alpha_1, \beta_1]$ a bal oldali). Felezzük most az $[\alpha_1, \beta_1]$ intervallumot és válasszuk azt az $[\alpha_2, \beta_2]$ felét, amely a sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Folytatva ezt az eljárást olyan, ún. egymásba skatulyázott zárt intervallumokból álló

$$[k, K] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset ... \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset ...$$

zárt intervallumsorozatot kapunk, ahol minden $[\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1, 2, ...$ intervallumban az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak végtelen sok eleme megtalálható. Nyilvánvaló, hogy az $[\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1, 2, ...$ intervallumok hossza a felezés miatt nullához tart. Kimutatható, hogy létezik egy és csak egy olyan A valós szám, amelyik az intervallumsorozat mindegyik intervallumának eleme:

$$\exists! \quad A \in \mathbb{R}: \quad A \in [\alpha_n, \beta_n], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ha ugyanis A-n kívül $B \neq A$ közös eleme lenne az $[\alpha_n, \beta_n]$, $n = 1, 2, ...$ intervallumoknak, akkor az intervallumok egyike sem lehetne a

$$|A - B| > 0$$

számnál rövidebb. Ez viszont ellentmond annak, hogy az intervallumok hossza a felezés következtében nullához tart.
Igazoljuk, hogy ez a közös A valós szám a végtelen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási helye. Tekintsük A-nak az ε-sugarú környezetét, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges kicsiny valós szám, azaz vizsgáljuk az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumot. Válasszunk az egymásba skatulyázott intervallumokból egy olyan

$$[\alpha_k, \beta_k], \quad k \in \mathbb{N}$$

intervallumot, amelyiknek hossza ε-nál kisebb. Ilyen létezik, mivel az intervallumok hossza 0-hoz tart. Ekkor nyilvánvaló, hogy

$$(A - \varepsilon, A + \varepsilon) \supset [\alpha_k, \beta_k],$$

melyből azt kapjuk, hogy A-nak az ε-sugarú környezete az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat végtelen sok elemét tartalmazza, mivel az $[\alpha_k, \beta_k]$ intervallum az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat végtelen sok elemét tartalmazza. Ez azt jelenti, hogy A valóban az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási pontja. □

5.2 Cauchy-sorozatok

Ismertek bizonyos kritériumok, amelyek alapján a határérték ismerete nélkül el tudjuk dönteni, hogy konvergens-e egy adott sorozat.

5.2.1. Definíció (Cauchy-féle sorozat)
Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}$ sorozatot Cauchy-féle sorozatnak nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $\forall p, q > n_0(\varepsilon)$, $p, q \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varrho(a_p, a_q) = |a_p - a_q| < \varepsilon.$$

5.2.2. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium)
Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-féle sorozat.

Bizonyítás:

- **Szükségesség:**
Először azt látjuk be, hogy ha a sorozat konvergens, akkor $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-féle sorozat, azaz $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, hogy $\forall p, q > n_0(\varepsilon)$, $p, q \in \mathbb{N}$ esetén
$$|a_p - a_q| < \varepsilon$$
teljesül. Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergens sorozat és
$$\lim_{n \to \infty} a_n = A,$$
továbbá $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A konvergencia miatt található olyan n_0 természetes szám, hogy
$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha} \quad n \geq n_0.$$
Ekkor $p, q > n_0$ esetén a háromszög-egyenlőtlenséget felhasználva:
$$|a_p - a_q| = |(a_p - A) - (a_q - A)| \leq |a_p - A| + |a_q - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
tehát $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-féle sorozat.

- **Elégségesség:**
Adott, hogy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-féle sorozat. Igazoljuk, hogy ebből az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergenciája következik. Legyen $\varepsilon = 1$. A feltétel miatt létezik olyan n_0, hogy rögzített $p > n_0$ és bármely $q > p > n_0$ esetén
$$|a_p - a_q| < \varepsilon = 1,$$

vagy

$$a_p - 1 < a_q < a_p + 1.$$

Bevezetve a

$$k = \min\{a_1, a_2, ..., a_p, a_p - 1\} \qquad \text{és} \qquad K = \max\{a_1, a_2, ..., a_p, a_p + 1\}$$

jelöléseket, felírhatjuk, hogy

$$k \leq a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A sorozat tehát korlátos és a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján létezik legalább egy konvergens $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozata $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$-nek. Jelölje a B valós szám a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértékét:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Azt kell még belátni, hogy B az eredeti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak is határértéke. A $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ részsorozat konvergenciája illetve a tétel feltétele miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_1 és n_2 szám, hogy

$$|b_m - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha} \quad m > n_1$$

és

$$|a_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha} \quad m > n_2 \qquad \text{és} \qquad n > n_2.$$

Legyen $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Ekkor minden $m > n_3$ és $n > n_3$ esetén igaz a fenti két egyenlőtlenség és $\forall n > n_3$ esetén

$$|a_n - B| = |(a_n - b_m) + (b_m - B)| \leq |a_n - b_m| + |b_m - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergens és határértéke B. □

5.2.3. Megjegyzés

Az a tény, hogy minden valós számokból álló Cauchy-féle $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak van határértéke, fontos szerepet játszik az analízisben.

5.2.4. Megjegyzés

Augustin-Louis *Cauchy* (1789-1857), francia matematikus és mérnök. A határérték fogalmára építve elvégezte az analízis szabatos megalapozását. Egyik megteremtője volt a komplex függvénytannak. Párizsban született. 1805-ben kezdte tanulmányait az École Polytechniqueben, ahol kivívta Lagrange és Laplace elismerését. Két évvel később átment egy mérnökképző főiskolára. 1813-ig mérnökként dolgozott. 1816-ban lett az akadémia tagja, és feladva mérnöki munkáját, az École Polytechnique tanára. Lelkes királypártiként a Bourbon ház híve volt. Ezért az 1830 - as forradalom után 18 évre eltiltották a közszolgálattól. Nyolc évig Torinóban és Prágában élt. 1838-ban tért haza és egyházi iskolában tanított. Az 1848-as forradalom után visszavették állásába. Legitimista meggyőződését tisztelve nem követelték meg tőle a köztársaság alkotmányára való felesküdést. Cauchy zsenije megérdemelte ezt a kivételezést, a franciák példájából pedig sok más ország is tanulhatna. Munkabírása Eulerével vetekedett. Összesen 789 cikket és számos nagy terjedelmű könyvet írt. A francia akadémia folyóirata nem győzte közölni írásait. Végül terjedelmi korlátozást vezettek be: egyetlen cikk sem lehet hosszabb 4 oldalnál. Ez a szabály ma is érvényben van. Az analízisben különösen a sorelmélet köszönhet neki sokat. A komplex függvénytan sarkkövei közé tartoznak a Cauchy - féle integrálformula és tétel, valamint a Cauchy - Riemann differenciálegyenletek. Az analízisen kívül a csoportelméletben, a determinánselméletben, a matematikai fizikában és a valószínűségszámításban ért el figyelemre méltó eredményeket.

5.2.5. Megjegyzés
Minden valós vektorokból álló Cauchy-féle $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{R}^n$ sorozatnak szintén mindig van határértéke.

5.2.6. Megjegyzés
Általános (X, ϱ) metrikus terekben nem igaz az, hogy minden Cauchy-féle sorozat konvergens, azaz olyan sorozat, melyre $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, hogy $\forall p, q \in \mathbb{N}$ esetén

$$\varrho(a_p, a_q) < \varepsilon.$$

Az azonban igaz, hogy egy metrikus térben minden konvergens sorozat Cauchy-féle sorozat.

5.2.7. Definíció (teljes metrikus tér)
Az (X, ϱ) metrikus teret teljesnek nevezzük, ha benne minden Cauchy-féle sorozat konvergens.

5.2.8. Megjegyzés Az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}^n$ halmazok teljes metrikus terek, bennük minden Cauchy-féle sorozat konvergens.

5.2.9. Definíció (Banach-tér)
Azt mondjuk, hogy egy normált tér - azaz egy vektortér, amelyben norma van értelmezve - Banach-tér, ha a tér - mint metrikus tér - teljes.

5.2.10. Definíció ($+\infty$-hez divergáló sorozat)
Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a $+\infty$-hez divergálónak mondjuk, ha bármely $K > 0$ valós számhoz létezik olyan n_0 küszöbszám, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$a_n > K.$$

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

5.2.11. Definíció ($-\infty$-hez divergáló sorozat)
Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot a $-\infty$-hez divergálónak mondjuk, ha bármely $K < 0$ valós számhoz létezik olyan n_0 küszöbszám, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$a_n < K.$$

Jelölése: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

5.2.12. Példa
Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

5.3 Konvergencia és műveletek

Sorozatokon műveleteket is értelmezhetünk. Az elemek közötti műveletek bizonyos feltételek mellett a sorozatok határértékére is érvényesek.

5.3.1. Definíció (sorozatok összege, különbsége, szorzata, hányadosa)
Legyen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ két adott, azonos indexhalmazú sorozat. E két sorozat összegén az

$$\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty},$$

különbségén az

$$\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty},$$

szorzatán az

$$\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

és hányadosán az

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad \textit{ha} \quad b_n \neq 0$$

sorozatokat értjük.

5.3.2. Tétel (sorozatok összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának határértéke)
Ha az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok konvergensek, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B,$$

akkor a $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $c \in \mathbb{R}$, $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *és az* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $(b_n \neq 0,\ B \neq 0)$ *sorozatok is konvergensek, mégpedig úgy, hogy:*

$$\begin{array}{lrcll}
\textit{1.} & \lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n & = & c \cdot A & c \in \mathbb{R}; \\
\textit{2.} & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B; & \\
\textit{3.} & \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \cdot B; & \\
\textit{4.} & \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} & = & \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{A}{B}, & B \neq 0.
\end{array}$$

Bizonyítás:

1. Ha $c = 0$, akkor $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$, melynek minden eleme 0. Ez a sorozat nyilvánvalóan konvergens és határértéke is $0 = 0 \cdot A$.
   Ha $c \neq 0$, akkor az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergenciája biztosítja, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy
   $$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \qquad \text{ha} \quad n \geq n_0.$$
   Ekkor
   $$|c \cdot a_n - c \cdot A| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$
   Tehát
   $$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot A.$$

2. Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok konvergenciája miatt van olyan $n_a \in \mathbb{N}$ és $n_b \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy
   $$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha} \quad n \geq n_a$$
   és
   $$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha} \quad n \geq n_b.$$
   Ha $n > n_0 = \max(n_a, n_b)$, akkor a fenti két egyenlőtlenség egyszerre teljesül. Továbbá a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával
   $$|(a_n \pm b_n) - (A \pm B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
   Így a konvergens sorozatok összegére és különbségére felírt állítás igaz.

3. Az 5.1.1. Tételből adódik, hogy a konvergens $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat korlátos is. Jelölje $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy korlátját K. Ekkor megválasztható n_a és n_b úgy, hogy
$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad (n > n_a),$$
illetve
$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} \quad (n > n_b).$$
Ekkor $n > \max\{n_a, n_b\}$ esetén
$$|a_nb_n - AB| \leq |a_nb_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| \leq |a_n - A|K + (|A|+1)|b_n - B| <$$
$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
azaz
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B.$$

4. Az előző állításokhoz hasonlóan igazolható.

□

5.4 Nevezetes sorozatok

Kiszámítjuk néhány nevezetes sorozat határértékét.

5.4.1. Tétel (az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Bizonyítás:
Megmutatjuk, hogy bármely pozitív ε-hoz van olyan n_0 küszöbindex, hogy $n > n_0$ esetén az
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
egyenlőtlenség teljesül. Mivel
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$
és
$$\frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Így az $\dfrac{1}{\varepsilon}$-nál nagyobb indexű tagokra az

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül. $\square$

5.4.2. Példa

Adjuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

1. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\dfrac{n^3 - 14n + 2}{n^4 - 2n - 18}\right\}_{n=0}^{\infty};$

2. $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\dfrac{\sqrt{n^2+6}+7}{4n+3}\right\}_{n=0}^{\infty};$

3. $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\sqrt{n^2+1} - n\right\}_{n=0}^{\infty}.$

Megoldás:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 14n + 2}{n^4 - 2n - 18} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{14}{n^3} + \dfrac{2}{n^4}}{1 - \dfrac{2}{n^3} - \dfrac{18}{n^4}} = 0;$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+6}+7}{4n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{6}{n^2}} + \dfrac{7}{n}}{4 + \dfrac{3}{n}} = \dfrac{1}{4};$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} - n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) \cdot \dfrac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1} = 0.$

5.4.3. Tétel (mértani sorozat határértéke)
Legyen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}=\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$, *ahol* $q \in \mathbb{R}$ *az ún. mértani sorozat. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \textit{ha } |q| < 1 \\ 1, & \textit{ha } q = 1 \\ \textit{divergens}, & \textit{ha } |q| > 1 \textit{ vagy } q = -1 \end{cases}$$

Bizonyítás:
Először legyen $|q| < 1$. Igazoljuk, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz található olyan n_0 küszöbszám, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$|q^n - 0| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Az utóbbi egyenlőtlenség ekvivalens az alábbiakkal:

$$|q^n| < \varepsilon \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.3}$$

Alkalmazzuk az (5.3) egyenlőtlenséghez a Bernoulli-egyenlőtlenséget (3.3.2. Tétel):

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \qquad x \geq -1,$$

ha

$$x = \frac{1}{|q|} - 1.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{1}{|q|} - 1\right)\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(\frac{1}{|q|} - 1\right).$$

Ha

$$1 + n \cdot \left(\frac{1}{|q|} - 1\right) > \frac{1}{\varepsilon}, \tag{5.4}$$

akkor biztosan fennáll az (5.3) egyenlőtlenség és így az (5.1) egyenlőtlenség is. Az (5.4) egyenlőtlenségből kapjuk, hogy az mindig teljesül, ha

$$n = n_0 > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\left(\frac{1}{|q|} - 1\right)}.$$

Tehát $|q| < 1$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$
Ha $q = 1$, akkor $q^n = 1$, $\forall n$-re, így egy egyesekből álló állandó elemű sorozatunk van, amely konvergens és határértéke 1. Vizsgáljuk végezetül a $q = -1$ és $|q| > 1$ eseteket. Ha $q = -1$, akkor
$$q^{2n} = 1 \qquad \text{és} \qquad q^{2n-1} = -1.$$
Ebből az következik, hogy a sorozatnak két torlódási helye van:
$$1 \qquad \text{és} \qquad -1,$$
ezért a sorozat divergens. Legyen végül $|q| > 1$. Alkalmazzuk újra a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget, ha $x = q^2 - 1$. Ekkor
$$q^{2n} = (q^2)^n = \left(1 + \left(q^2 - 1\right)\right)^n \geq 1 + n(q^2 - 1),$$
vagyis a sorozat páros indexű elemeiből álló részsorozat $|q| > 1$ esetén minden határon túl nő, ha $n \to \infty$. Így a sorozat nem lehet korlátos és nem lehet konvergens sem. □

5.4.4. Példa

Adjuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\dfrac{7^n - 9^n}{8^n}\right\}_{n=0}^{\infty};$

b) $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\dfrac{7^n - 8^n}{9^n}\right\}_{n=0}^{\infty};$

c) $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\dfrac{2^{2n-1} + 3^{n+2}}{5^{n+1} - 2^{3n+3}}\right\}_{n=0}^{\infty}.$

Megoldás:

Az 5.4.3. Tétel alkalmazásával:

a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n - 9^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{7}{8}\right)^n - \left(\dfrac{9}{8}\right)^n}{1} = -\infty;$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n - 8^n}{9^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{7}{9}\right)^n - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n}{1} = 0;$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot 4^n + 9\cdot 3^n}{5\cdot 5^n - 8\cdot 8^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 9\cdot\left(\dfrac{3}{8}\right)^n}{5\cdot\left(\dfrac{5}{8}\right)^n - 8} = 0.$

5.4.5. Tétel

Legyen $q \in \mathbb{R}$ és

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n.$$

Ekkor $-1 < q < 1$ esetén $s_n \to \dfrac{1}{1-q}$, a $|q| \geq 1$ esetben pedig (s_n) divergens sorozat.

Bizonyítás:

Ha $q = 1$, akkor $s_n = n \to \infty$. Ha $q \neq 1$, akkor

$$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

tehát s_n pontosan akkor konvergens, ha q^n konvergens. Ez utóbbi $|q| < 1$ esetén teljesül, és ekkor $q^{n+1} \to 0$, ahonnan az állítás adódik. □

5.4.6. Példa

Igazoljuk, hogy a $0,771212...$ szakaszos végtelen tizedes tört racionális számot állít elő!

Megoldás:

A $0,771212...$ szakaszos végtelen tizedes tört alakban megadott valós szám a következő határértékkel egyezik meg:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{77}{100} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^4\cdot 10^2} + ... + \frac{12}{10^4\cdot 10^{2n-2}}\right) =$$

$$= \frac{77}{100} + \frac{12}{10^4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{(10^2)^{n-1}}\right) = \frac{77}{100} + \frac{12}{10^4}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{1}{10^2}} =$$

$$= \frac{77}{100} + \frac{12}{9900} = \frac{509}{660}.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

5.4.7. Lemma (a geometriai és számtani középértékekre vonatkozó egyenlőtlenség)
Ha $d_1, d_2, ..., d_n$ nem mind egyenlő pozitív számok, akkor

$$\sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n} < \frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{n}, \tag{5.5}$$

illetve

$$d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n < \left(\frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{n}\right)^n. \tag{5.6}$$

Bizonyítás:
Ha $n = 2$, akkor

$$\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 - d_1 d_2 = \left(\frac{d_1 - d_2}{2}\right)^2 \geq 0, \tag{5.7}$$

ahol egyenlőség csak $d_1 = d_2$ mellett áll fenn, azaz (5.6) igaz.
Az (5.7) összefüggést alkalmazva $n = 2^2 = 4$ esetén:

$$d_1 d_2 d_3 d_4 \leq \left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{d_3 + d_4}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{4}\right)^4,$$

tehát

$$d_1 d_2 d_3 d_4 \leq \left(\frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4}{4}\right)^4, \tag{5.8}$$

ahol egyenlőség csak akkor van, ha $d_1 = d_2$ és $d_3 = d_4$, továbbá

$$\frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_3 + d_4}{2},$$

tehát

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4$$

esetén. Hasonlóképpen, $n = 2^3 = 8$ esetén kapjuk, hogy

$$d_1 d_2 ... d_8 \leq \left(\frac{d_1 + d_2 + ... + d_8}{8}\right)^8, \tag{5.9}$$

egyenlőség pedig csak $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7 = d_8$ esetén lehet. Matematikai indukcióval igazolható, hogy (5.6) igaz mindazokban az esetekben, amikor $n = 2^m$ (2 hatványa).

Most megmutatjuk, hogy (5.6) tetszőleges n-re is fennáll. Válasszunk ki egy pozitív $k > 0$ számot, amelyre

$$2^k > n.$$

(Például, ha $n = 11$, akkor $2^k = 2^4 = 16$.)
A $d_1, d_2, ..., d_n$ számokhoz csatoljuk hozzá még a $2^k - n$ számot, amelyek mindegyike egyenlő a

$$\frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{n} = S$$

számtani középpel:

$$\underbrace{d_1, d_2, ..., d_n}_{n}, \underbrace{S, S, ..., S}_{2^k - n}.$$

Az így kapott számokra az előbbiek szerint érvényes az állítás, azaz

$$d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n \cdot S^{2^k - n} < \left(\frac{d_1 + d_2 + ... + d_n + (2^k - n)S}{2^k} \right)^{2^k}.$$

Mivel

$$d_1 + d_2 + ... + d_n = S \cdot n,$$

ezért

$$d_1 + d_2 + ... + d_n + (2^k - n)S = 2^k \cdot S.$$

Tehát

$$d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n \cdot S^{2^k - n} < \left(\frac{2^k S}{2^k} \right)^{2^k} = S^{2^k},$$

amelyből

$$d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n < S^n,$$

azaz az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. □

5.4.8. Tétel (az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke)

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad ha \quad a > 0.$$

Bizonyítás:
Ha $a = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $a \neq 1$, akkor meg kell mutatnunk, hogy van olyan n_0 index, amelynél nagyobb n-ekre

$$\left| \sqrt[n]{a} - 1 \right| < \varepsilon$$

tetszőleges pozitív ε esetén. Ha $a > 1$, akkor

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \sqrt[n]{a} - 1 \qquad \text{és} \qquad \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$$

ahonnan

$$a < (1 + \varepsilon)^n.$$

A Bernoulli-féle egyenlőtlenséget alkalmazva

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > n\varepsilon.$$

Így, ha $n\varepsilon > a$ teljesül, akkor $(1 + \varepsilon)^n > a$ is fennáll. Tehát $n > \dfrac{a}{\varepsilon} = n_0$ esetén teljesül a konvergencia feltétele.
A másik eset, ha $0 < a < 1$. Ekkor

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = 1 - \sqrt[n]{a} \qquad \text{és} \qquad 1 - \sqrt[n]{a} < \varepsilon,$$

azaz

$$a > (1 - \varepsilon)^n.$$

Ha $\varepsilon \geq 1$ az egyenlőtlenség nyilvánvaló. Ha $\varepsilon < 1$, akkor $(1 - \varepsilon)^n \to 0$. Így van olyan n, amelyre $a > (1 - \varepsilon)^n$ teljesül bármely pozitív ε-ra. □

5.4.9. Tétel (az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sqrt[n]{n}\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat határértéke)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti összefüggést úgy, hogy az n számot (ha $n > 2$) szorzat alakban írjuk fel:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-2}} \leq \frac{2\sqrt{n} + (n-2)}{n} = 1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right).$$

Nyilván $\sqrt[n]{n} \geq 1$, és a zárójelben lévő kifejezés nem negatív. Tehát van kétoldali becslés, mert $n = 1, 2$ esetén is teljesül,hogy

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right).$$

Az egyenlőtlenség két szélén álló

$$\{1\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{és} \qquad \left\{1 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

sorozat konvergens és mindkettő határértéke 1. A rendőr-elv (5.1.7. Tétel) szerint akkor az $\{\sqrt[n]{n}\}$ sorozat is konvergens és határértéke 1. □

5.4.10. Példa
Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt[n]{\frac{13}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sqrt[n]{\frac{16}{5n^3}}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Megoldás:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{13}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{13}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{16}{5n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{16}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{16}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^3} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$

5.4.11. Tétel (Euler-féle szám)
Az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat konvergens és határértéke e, azaz*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Ez a határérték a nevezetes Euler-féle szám, amely irracionális és

$$e \approx 2.718281828.$$

Bizonyítás:
Megmutatjuk, hogy az adott sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, amelyből következik, hogy konvergens. Először belátjuk, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

fennáll minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ismert, hogy a nem mind egyenlő pozitív $d_1, d_2, ..., d_n$ számok

$$\frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{n}$$

számtani középértéke és

$$\sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n}$$

mértani középértéke között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sqrt[n]{d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_n} < \frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{n}. \tag{5.10}$$

Felhasználva ezt az egyenlőtlenséget az alábbi $(n+1)$ számra

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n}, 1$$

kapjuk, hogy

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right) + ... + \left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} =$$

$$\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{n+1+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

azaz

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Az utóbbi egyenlőtlenségben mindkét oldal pozitív, ezért $(n+1)$-edik hatványra emelve kapjuk a sorozat monotonitását:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Megmutatjuk, hogy a sorozat felülről korlátos, azaz $\exists K > 0$, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Felhasználva ismét a mértani és számtani középértékre vonatkozó egyenlőtlenséget az alábbi $(n+2)$ szám esetén:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right), \left(1+\frac{1}{n}\right), ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)}_{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

kapjuk, hogy

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} < \frac{n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2} = \frac{n+2}{n+2} = 1,$$

azaz

$$\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} < 1.$$

Mindkét oldalt $(n+2)$-edik hatványra emelve kapjuk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ezek szerint a sorozat felülről korlátos és $K = 4$. Tehát a sorozat konvergens. □

5.4.12. Megjegyzés
Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}.$$

5.4.13. Példa
Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

c) $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

d) $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

e) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

f) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{5n-7}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

g) $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{5n+10}{5n-15}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

h) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(4+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

i) $\{j_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(\dfrac{\sqrt[n]{e}}{\dfrac{n+1}{n}} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Megoldás:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^{2n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n\right)^2 = e^2$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{e^2}{e} = e$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{1}{e}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{5}{n}\right)\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{5}{n}\right)^n = 0 \cdot e^5 = 0$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^{5n}}{\left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^7} = \dfrac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n\right)^5}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^7} = \dfrac{e^{-5}}{1} = e^{-5}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n+10}{5n-15}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n}{\left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n} = \dfrac{e^2}{e^{-3}} = e^5$;

h) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(4\left(1 + \dfrac{\frac{1}{4}}{n}\right)\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} (4)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\frac{1}{4}}{n}\right)^n = +\infty$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty} j_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{e}}{\dfrac{n+1}{n}} \right)^n = \dfrac{e}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{e}{e} = 1.$

6 Egyváltozós valós függvények

A függvény az egyik legfontosabb matematikai fogalom. A 2. fejezetben már bevezettük általánosságban a függvény fogalmát, mint két adott X, Y halmaz elemei közötti egyértelmű leképezést (hozzárendelést):

$$f : X \to Y.$$

Megjegyeztük, ha az X és Y a valós számok halmazának egy-egy részhalmaza, akkor f-et valós függvénynek nevezzük.

6.1 Alapfogalmak

6.1.1. Definíció (egyváltozós valós függvény)
Egyváltozós valós f függvényen olyan függvényt értünk, melynek $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartománya és $\mathcal{R}_f$ értékkészlete a valós számok valamely részhalmaza.
Jelölése:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \textit{ahol} \quad \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}.$$

6.1.2. Definíció (helyettesítési érték)
Az egyváltozós f függvény adott $x_0 \in \mathcal{D}_f$ helyhez rendelt

$$y_0 = f(x_0) \in \mathcal{R}_f$$

függvényértéket a függvény x_0-beli helyettesítési értékének nevezzük.

6.1.3. Példa
Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := x^2 + 1.$$

Határozzuk meg a függvény helyettesítési értékét az $x_0 = 0$, az $x_1 = 2$ és az $x_2 = 3$ helyen!

Megoldás:

$$f(x_0) = f(0) = 1; \quad f(x_1) = f(2) = 5; \quad f(x_2) = f(3) = 10.$$

6.1.4. Megjegyzés
Egy f függvény egyértelműen meghatározott, ha adott a $\mathcal{D}_f$ értelmezési tartomány illetve az a hozzárendelési szabály, amely egyértelműen meghatározza, hogy az értelmezési tartomány minden egyes $x \in \mathcal{D}_f$ eleméhez az $\mathcal{R}_f$ értékkészlet mely $y = f(x)$ eleme tartozik. Ez a hozzárendelési (leképzési)

szabály megadható képlettel, ekkor felírjuk azt a formulát, amellyel ki lehet számítani az $f(x)$ helyettesítési értéket.
Például:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{x^2}{x^3+2};$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(t) := \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ennek a megadásnak az a hátránya, hogy $f(x)$, $g(t)$ az x illetve t helyen vett helyettesítési értéket és a függvényt is jelöli. Általában ez nem okoz félreértést. Jól ismert az

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^3+2}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$t \mapsto g(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

alakú felírás is. Megadhatunk hozzárendelést táblázat, illetve grafikon segítségével is, továbbá paraméteres alakban is lehetséges a függvények megadása.

6.1.5. Definíció (a függvény grafikonja)
A Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben az $(x, y) = (x, f(x))$ *pontok halmazát, ha* $x \in \mathcal{D}_f$ *az* f *függvény grafikonjának nevezzük, ha* $(x, f(x))$ *ábrázolható. Ekkor az* $y = f(x)$, $x \in \mathcal{D}_f$ *egyenlet a függvény görbéjének egyenlete.*

6.1.6. Példa
A Dirichlet-féle függvény:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

nem ábrázolható függvény.

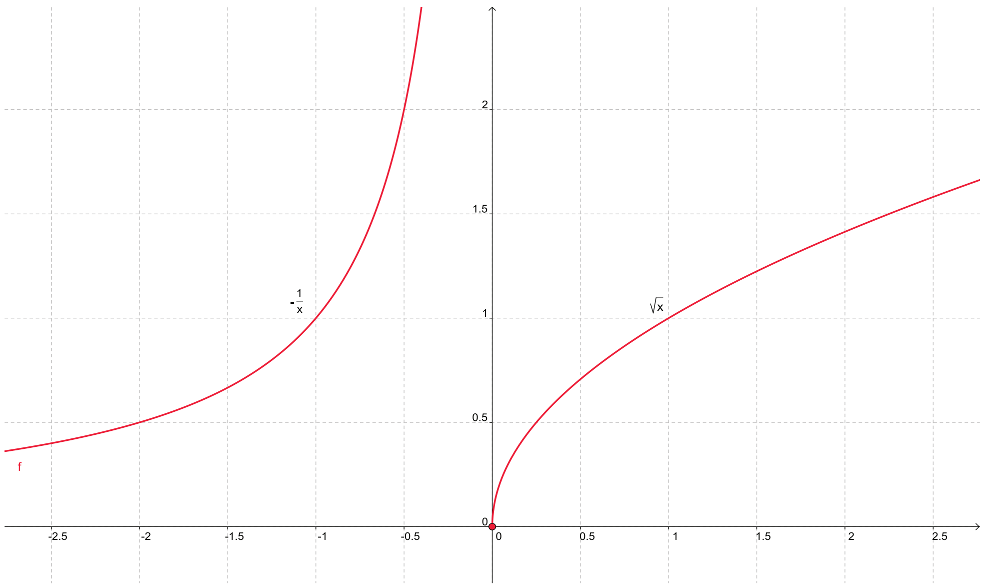
6.1.7. Megjegyzés
Peter Gustave Lejune *Dirichlet* (1805-1859), német matematikus és fizikus. A modern függvényfogalom kialakítója. A számelmélet továbbfejlesztője és a Fourier-sorok elméletének megalapozója. Franciaországból menekült hugenotta családból származott. Tehetsége hamar megmutatkozott. Göttingenben Gauss tanítványa volt. Harminckét évesen már professzor volt a breslaui (ma Wrocław) egyetemen. Innen Berlinbe került és Gauss halála után egykori mestere helyét foglalta el. Kapcsolatot tartott fenn korának minden jelentős matematikusával.

6.1.8. Példa
Vázoljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{ha } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény görbéjét!

Megoldás:
A függvény tulajdonságai alapján:



6.1. ábra

6.1.9. Példa
Az

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t \in [a, b]$$

t-paraméteres egyenletrendszer az (x, y)-sík valamely görbéjének ún. paraméteres egyenlete. Ha a φ leképezés kölcsönösen egyértelmű és $D_\varphi = D_\psi$, akkor a fenti egyenletrendszer ún. paraméteres megadású függvényt határoz meg.
Legyen

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Mivel

$$x^2 + y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

így

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

6.1.10. Definíció (explicit és implicit alakban megadott függvények)
Az $y = f(x)$ alakban megadott függvényt explicit alakúnak mondjuk, míg az $F(x, y) = 0$ egyenlettel meghatározott függvényt implicit alakúnak nevezzük.

Bizonyos feltételek mellett az implicit alakból felírható a függvény explicit alakja.

6.1.11. Példa
Legyen az $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ implicit alakú függvény adott. Ha $y > 0$, akkor az $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ explicit felírás adódik, illetve, amennyiben $y < 0$, akkor az $y = f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ explicit alakhoz jutunk.

6.1.12. Definíció (függvények egyenlősége)
Legyen adott az f és g függvény, megfelelően a D_f és D_g értelmezési tartománnyal. Az f és g függvények egyenlőek, ha megegyezik az értelmezési tartományuk és értékkészletük, azaz ha $D_f = D_g = D$ és $f(x) = g(x)$, $\forall x \in D$ esetén.

Ismert függvényekből - értelmezési tartományuk közös részén - az alapműveletek felhasználásával új függvényeket állíthatunk elő.

6.1.13. Definíció (műveletek függvényekkel)
Legyen adott az f és g függvény a D_f és D_g értelmezési tartománnyal.
Az f és g függvény:

- *összege az*

$$F_1(x) = (f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \textit{függvény}, \quad \forall x \in (D_f \cap D_g);$$

- *különbsége az*

$$F_2(x) = (f - g)(x) := f(x) - g(x) \quad \textit{függvény}, \quad \forall x \in (D_f \cap D_g);$$

- *szorzata az*

$$F_3(x) = (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \textit{függvény}, \quad \forall x \in (D_f \cap D_g);$$

- *hányadosa az*

$$F_4(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \textit{függvény}, \quad \forall x \in D_f \cap \{x : g(x) \neq 0, x \in D_g\}.$$

6.1.14. Definíció (összetett függvény, függvények kompozíciója)
Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ két egyváltozós valós függvény. Ekkor a D_f értelmezési tartományú f külső és D_g értelmezési tartományú g belső függvényekből álló $f \circ g$ összetett függvényt a következőképpen értelmezzük:

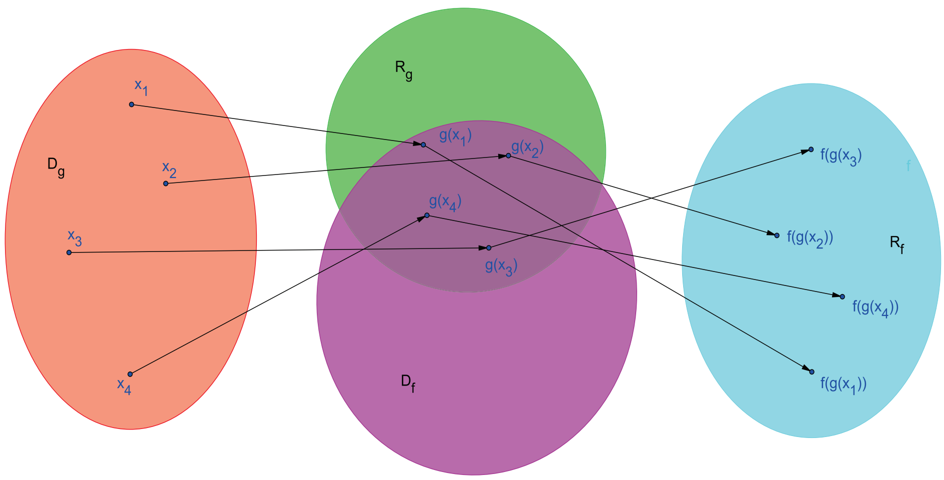
$$h = f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) := f(g(x)),$$

ahol a h függvény értelmezési tartománya a D_g azon x_0 pontjaiból áll, melyekhez tartozó $g(x_0)$ értékek beletartoznak D_f-be:

$$D_{f \circ g} = D_h := D_g \cap \{x : g(x) \in D_f, x \in D_g\}.$$

Az összetett $h = f \circ g$ függvény x_0 pontbeli helyettesítési értéke:

$$h(x_0) = (f \circ g)(x_0) = f(g(x_0)), \quad x_0 \in D_h.$$



6.2. ábra

6.1.15. Példa
Legyen

$$f(x) = \cos x, \qquad g(x) = 3^x, \qquad z(x) = \sqrt{1-x},$$

ahol

$$D_f = D_g = \mathbb{R},$$

illetve

$$D_z = \{x : 1 - x \geq 0, x \in \mathbb{R}\} = \{x : x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}.$$

Ekkor

- $F_1(x) = f(x) + g(x) = \cos x + 3^x, \quad \forall x \in (D_f \cap D_g) = \mathbb{R};$
- $F_2(x) = g(x) - z(x) = 3^x - \sqrt{1-x}, \quad \forall x \in (D_g \cap D_z) = D_z;$
- $F_3(x) = f(x) \cdot z(x) = (\cos x) \cdot \sqrt{1-x}, \quad \forall x \in (D_f \cap D_z) = D_z;$
- $F_4(x) = \dfrac{g(x)}{z(x)} = \dfrac{3^x}{\sqrt{1-x}},$

  $\forall x \in D_g \cap (D_z \setminus \{1\}) = D_z \setminus \{1\} = \{x : x < 1, x \in \mathbb{R}\};$
- $F_5(x) = f \circ z = \cos\sqrt{1-x}, \quad \forall x \in D_z;$
- $F_6(x) = z \circ g = \sqrt{1-3^x},$

  $\forall x \in \{x : 1 - 3^x \geq 0, x \in \mathbb{R}\} = \{x : x \leq 0, x \in \mathbb{R}\}.$

6.1.16. Megjegyzés
Már ismert, hogy ha az $f : X \to Y$ függvény bijektív (azaz injektív és szürjektív, más néven kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít az X és Y halmazok között), akkor létezik

$$f^{-1} : Y \to X$$

inverz függvény. Az invertálás művelete során az $f : X \to Y$ és $f^{-1} : Y \to X$ függvények értelmezési tartománya és értékkészlete szerepet cserél. Mindez igaz egyváltozós valós függvényekre is.

6.1.17. Példa
Mutassuk meg, hogy az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 2, \quad x \in D_f = \mathbb{R}, \quad R_f = \mathbb{R}$$

függvény invertálható az egész $D_f = \mathbb{R}$ értelmezési tartományban és

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = x - 2, \quad x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}.$$

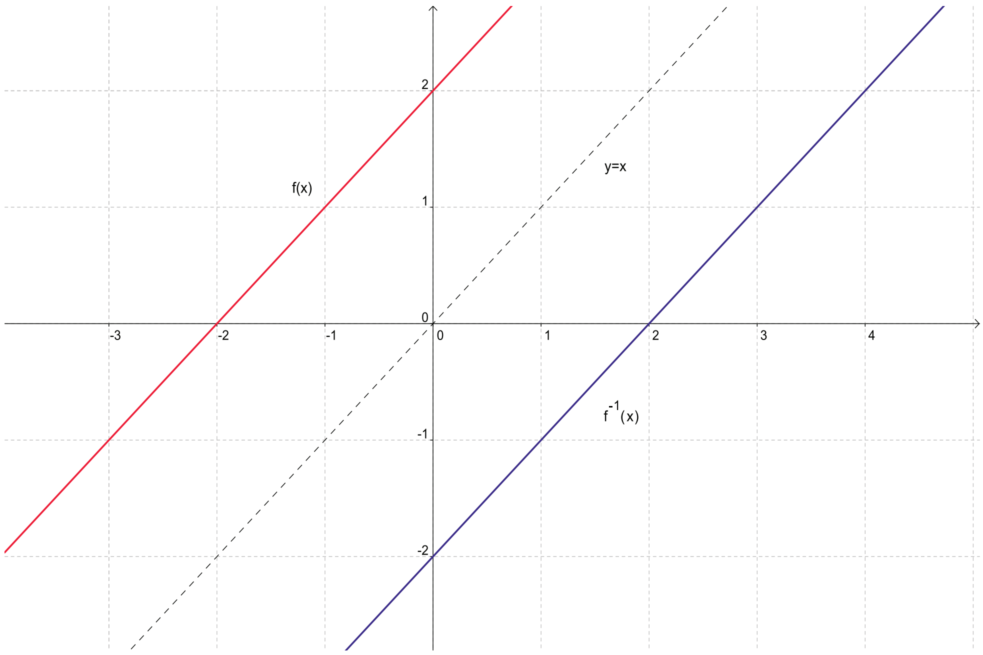
Megoldás:
Az adott $f(x) = x + 2$ függvény esetén $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$ és f minden valós értéket egyszer vesz fel. Ezért létezik

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

inverz függvény. Az f függvény görbéjének egyenlete $y = x + 2$. Felcserélve a függő és független változók szerepét kapjuk, hogy

$$x = y + 2,$$

amelyből adódik, hogy
$$y = x - 2,$$
vagyis az inverz függvény:
$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(x) = x - 2.$$



6.3. ábra

6.1.18. Példa
Mutassuk meg, hogy az
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2, \quad D_f \subseteq \mathbb{R},$$
a teljes értelmezési tartományában nem invertálható! Adjunk meg egy olyan intervallumot, ahol létezik az f^{-1} inverz függvény!

Megoldás:
Mivel a függvény minden pozitív valós értéket két helyen vesz fel:
$$f(x_0) = x_0^2 = (-x_0)^2 = f(-x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
ezért a teljes értelmezési tartományában nem invertálható. Azonban, ha a $D_f = \mathbb{R}$ értelmezési tartományt leszűkítjük a pozitív valós számok halmazára:
$$D_f = \mathbb{R}^+,$$

azaz ha

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,$$

akkor

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

miatt bármely $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq b$ esetén

$$f(a) - f(b) \neq 0,$$

azaz

$$f(a) \neq f(b).$$

Tehát fennáll az invertálhatóság feltétele. A változók szerepét felcserélve az $y = x^2$ egyenletben kapjuk, hogy

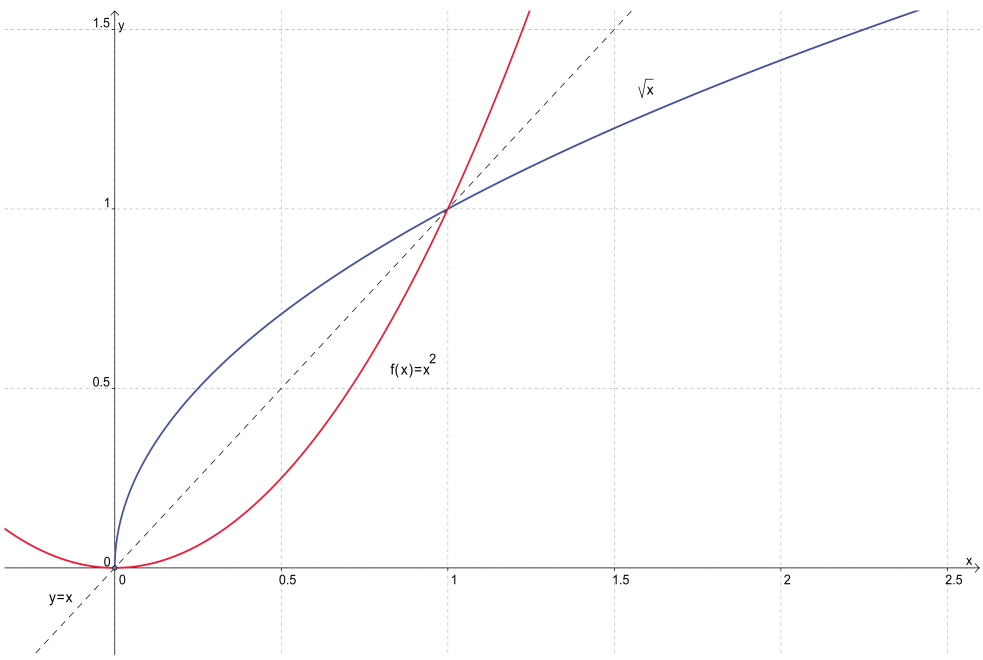
$$x = y^2,$$

ahonnan

$$y = \sqrt{x},$$

így az inverz függvény:

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$



6.4. ábra

6.2 Függvénytranszformáció

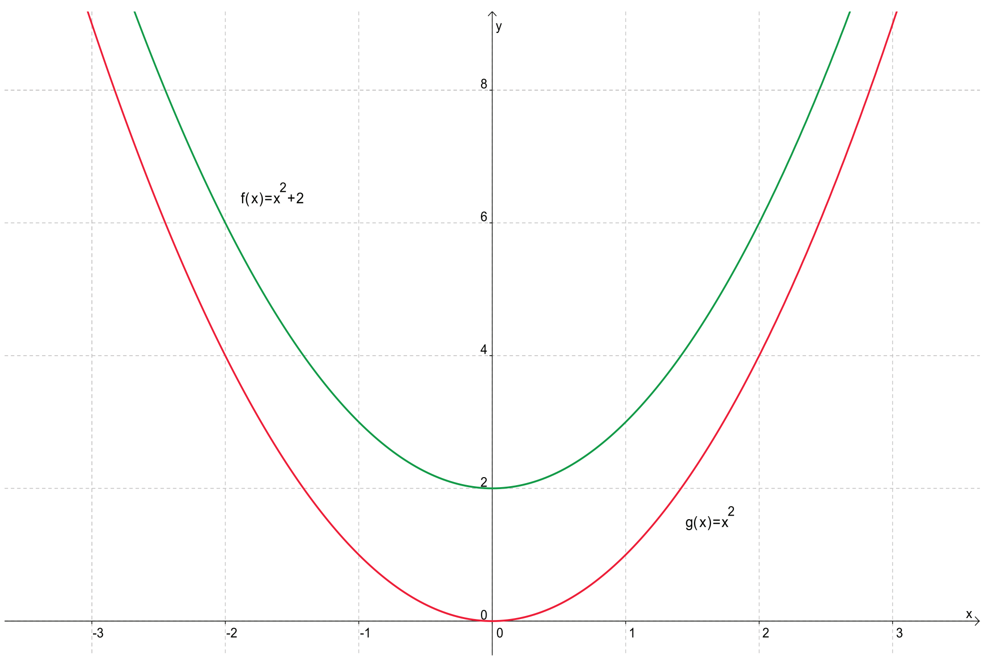
Egy függvény görbéjének megrajzolását a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben megkönnyíti, ha valamely ismert grafikonú függvény megfelelő geometriai transzformációjának segítségével jutunk el a keresett görbéhez. Az alábbi függvénytranszformációkat emeljük ki:

Eltolás az y-tengely mentén

Az $y = f(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$ függvény $(x, f(x) + a)$ grafikonja az f függvény $(x, f(x))$ grafikonjának az y-tengely mentén $|a|$ egységű eltolással kapható meg. Ha $a > 0$, akkor az y-tengely pozitív irányába, ha pedig $a < 0$ akkor az y-tengely negatív irányába történik az eltolás.

6.2.1. Példa
Legyen $f(x) = x^2 + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Rajzoljuk meg a függvény grafikonját!

Megoldás:
A függvény grafikonját a $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ függvény görbéjének 2 egységű "felfelé" való eltolásával kapjuk.



6.5. ábra

Eltolás az x-tengely mentén

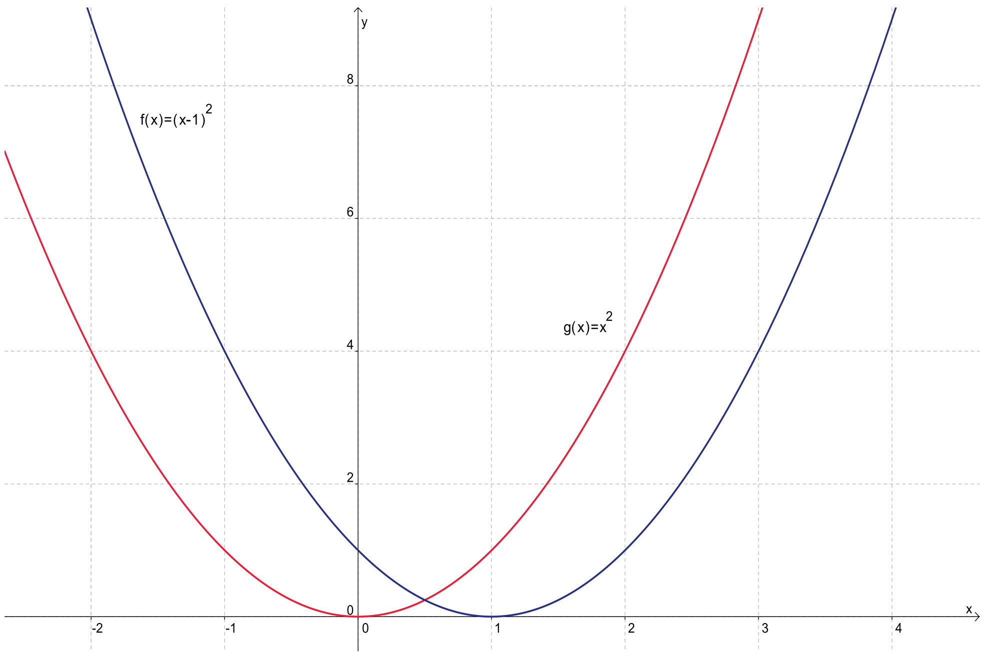
Az $y = f(x-b)$, $b \in \mathbb{R}$ függvény $(x, f(x-b))$ grafikonja az f függvény $(x, f(x))$ grafikonjának az x-tengely mentén $|b|$ nagyságú eltolással származtatható. Ha $b > 0$, akkor az x-tengely pozitív irányába, ha pedig $b < 0$ akkor az x-tengely negatív irányába valósítjuk meg az eltolást.

6.2.2. Példa

Legyen $g(x) = x^2$. Rajzoljuk fel az $f(x) = (x-1)^2$ függvény grafikonját!

Megoldás:

A 6.6. ábrán piros színnel a $g(x) = x^2$ függvényt, kék színnel pedig az $f(x) = (x-1)^2$ függvényt ábrázoltuk.



6.6. ábra

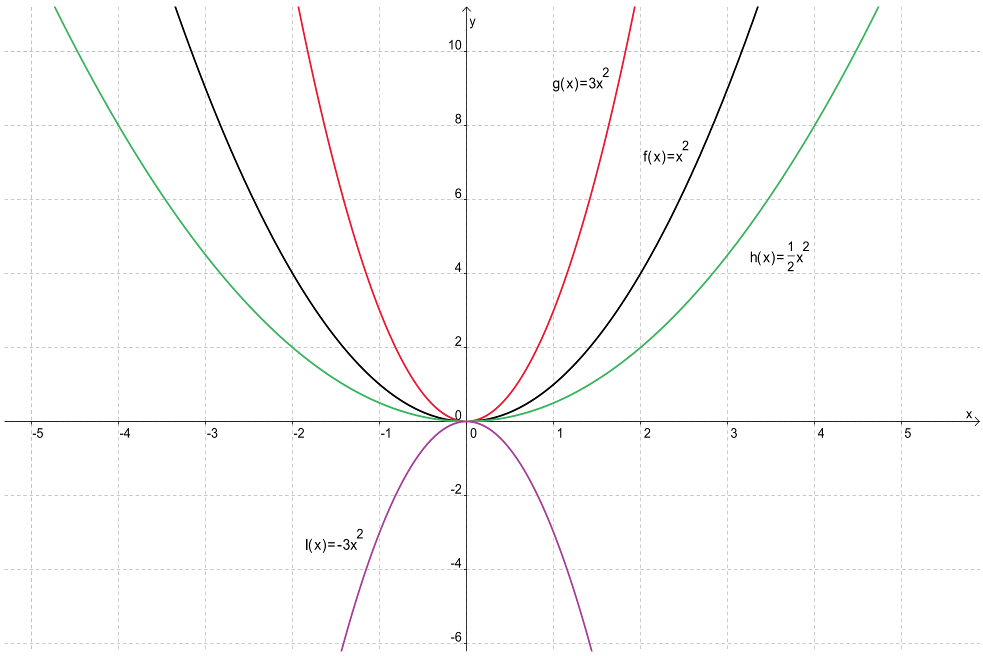
Nyújtás (vagy zsugorítás) az y-tengely mentén

Az $y = c \cdot f(x)$, $c \in \mathbb{R}$ függvény $(x, c \cdot f(x))$ grafikonja az f függvény $(x, f(x))$ görbéjéből az y-tengely menti $|c|$-szeres nyújtással (zsugorítással) származtatható. Ha $c < 0$, akkor $c \cdot f(x)$ grafikonját a $|c| \cdot f(x)$ függvény görbéjének az x-tengelyre vett tükrözésével kapjuk meg. Ha $|c| > 1$ akkor nyújtunk, ha $|c| < 1$ akkor zsugorítunk.

6.2.3. Példa

Legyen $f(x) = x^2$. Rajzoljuk fel az $g(x) = 3x^2$ és a $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ illetve az $l(x) = -3x^2$ függvények görbéjét!

Megoldás:
A 6.7. ábrán fekete színnel az $f(x) = x^2$ függvényt, piros színnel a $g(x) = 3x^2$ függvényt, zöld színnel a $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ függvényt és lila színnel az $l(x) = -3x^2$ függvényt ábrázoltuk.



6.7. ábra

Nyújtás (vagy zsugorítás) az x-tengely mentén

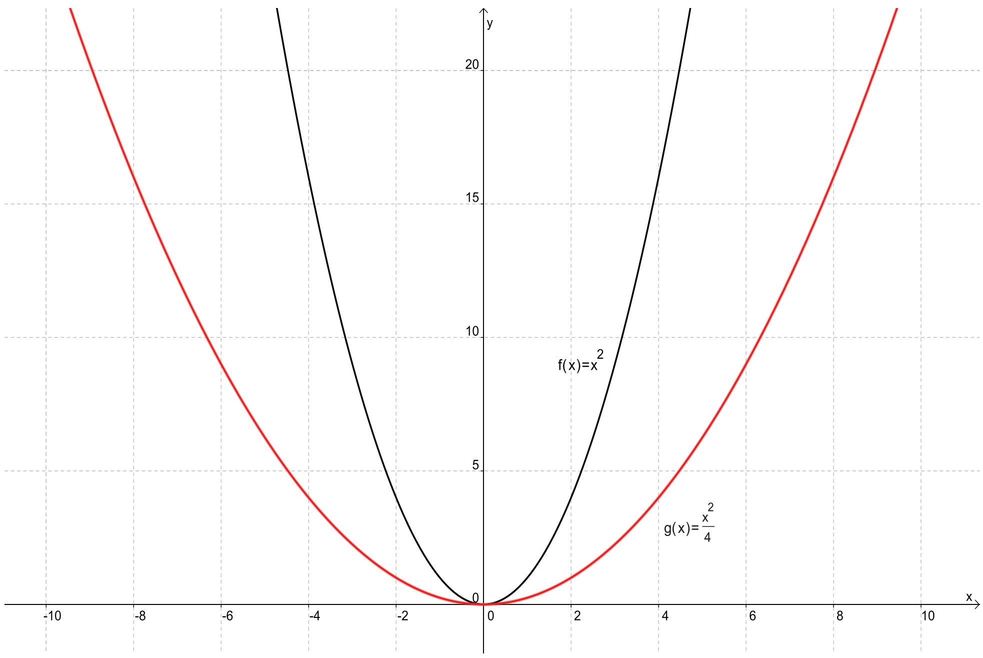
Az $y = f\left(\frac{x}{d}\right)$, $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\left(\frac{x}{d}\right) \in D_f$ függvény $\left(x,\ f\left(\frac{x}{d}\right)\right)$ görbéje az f függvény $(x, f(x))$ grafikonjának x-tengely menti $|d|$-szeres nyújtással ($|d| > 1$) vagy zsugorításával ($|d| < 1$) származtatható. Ha $d < 0$, akkor az $\left(x,\ f\left(\frac{x}{d}\right)\right)$ görbét az $\left(x,\ f\left(\frac{x}{|d|}\right)\right)$ grafikonból kapjuk az y-tengelyre vett tükrözéssel.

6.2.4. Példa

Legyen $f(x) = x^2$. Rajzoljuk fel a $g(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ függvény grafikonját!

Megoldás:

Fekete színnel az $f(x) = x^2$ függvényt, piros színnel a $g(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ függvényt ábrázoltuk a 6.8. ábrán.



6.8. ábra

Tükrözés az x-tengelyre

Az $y = -f(x)$ függvény görbéjét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját tükrözzük az x-tengelyre.

Tükrözés az y-tengelyre

Az $y = f(-x)$ függvény görbéjét megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény grafikonját tükrözzük az y-tengelyre.

6.3 Egyváltozós függvények egyes intervallumbeli tulajdonságai

A 3.6 alfejezetben megkülönböztettük a számegyenes különböző típusú intervallumait. Most ismertetjük az egyváltozós f függvény egyes tulajdonságait, amelyek teljesülhetnek vagy az egész D_f értelmezési tartományban, vagy annak egy bizonyos $I \subset D_f$ részintervallumán.

6.3.1. Definíció (függvény monotonitása)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós egyváltozós függvényt értelmezési tartományának valamely $I \subseteq D_f$ részintervallumán monoton növekvőnek illetve monoton csökkenőnek nevezzük, ha $\forall x_1, x_2 \in I, \quad x_1 < x_2$ esetén

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

illetve $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

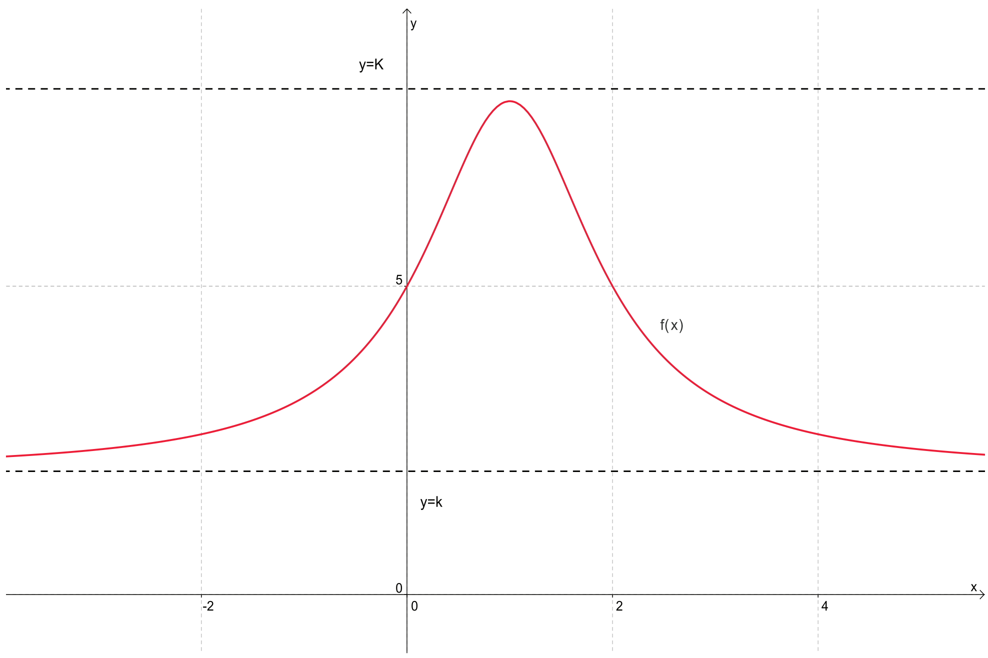
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvényt szigorúan monoton növekvőnek illetve szigorúan monoton csökkenőnek mondjuk az I intervallumon, ha $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$ illetve $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.

6.3.2. Definíció (függvény korlátossága)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvényt az $I \subseteq D_f$ részintervallumon alulról illetve felülről korlátosnak nevezzük, ha létezik olyan k illetve K valós szám, hogy $\forall x \in I$ esetén

$$k \leq f(x) \quad \textit{illetve} \quad f(x) \leq K.$$

Ha az f függvény alulról és felülről korlátos függvény, akkor korlátosnak nevezzük.

Nyilvánvalóan a korlátosság azt fejezi ki, hogy a függvény görbéje az $I \subseteq D_f$ intervallumon az $y = k$ és $y = K$ egyenesek által határolt sávban található.



6.9. ábra

6.3.3. Példa

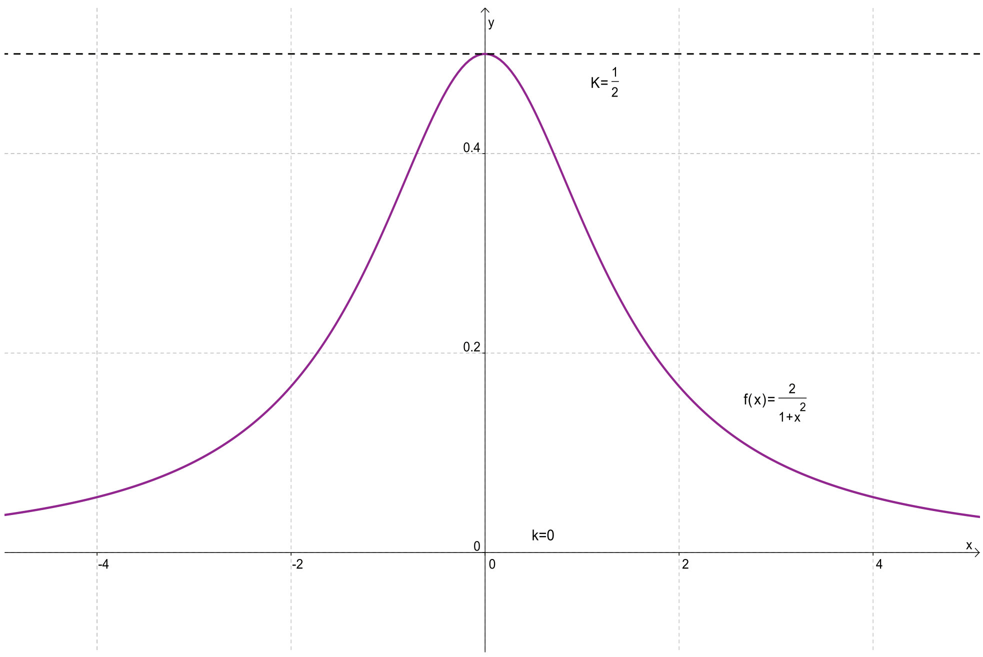
Korlátos-e az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{2+x^2}$ függvény az $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ intervallumon?

Megoldás:

Mivel $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért f alulról korlátos és $k = 0$. Továbbá

$$f(x) = \frac{1}{2+x^2} \le \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

Ezért $f(x) \le \dfrac{1}{2} = K$. Tehát a függvény korlátos.



6.10. ábra

Legyen $I = [a, b]$ az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának egy zárt intervalluma. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény görbéjének az $[a, b]$ intervallumhoz tartozó darabját.

6.3.4. Definíció (konvex, konkáv függvény)

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex (felülről domború) az $[a, b]$ intervallumon, ha $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ és $0 \le \alpha \le 1$ esetén az

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \le \alpha \cdot f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

egyenlőtlenség teljesül. Ha az

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha \cdot f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

egyenlőtlenség áll fenn, akkor az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konkáv (alulról homorú) az (a, b) intervallumon.

6.3.5. Megjegyzés

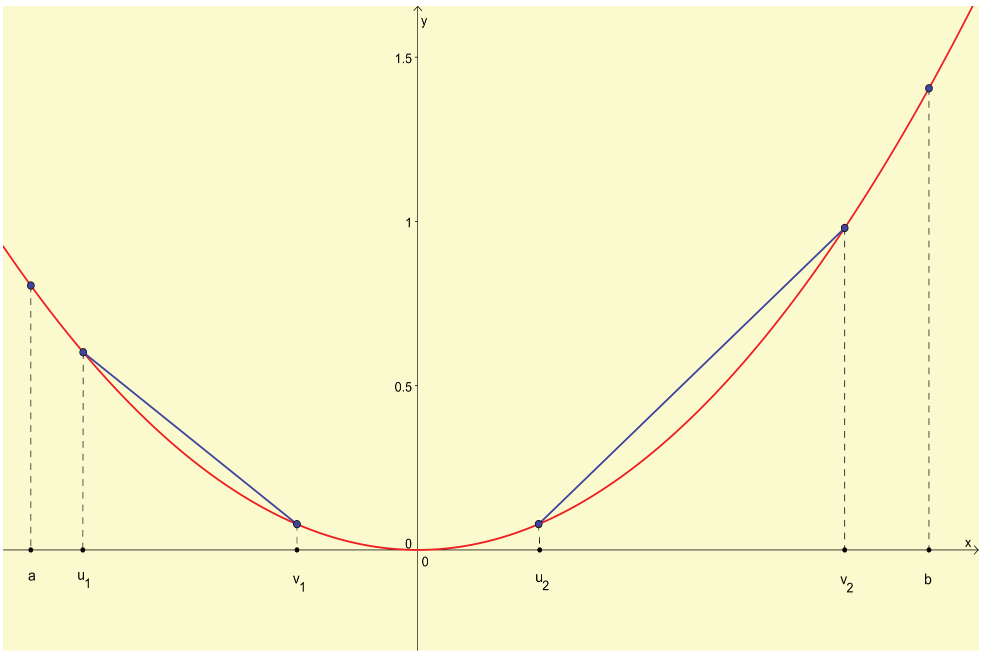
A konvex illetve konkáv tulajdonságnak az alábbi egyszerű geometriai szemléltetés felel meg. Ismeretes, hogy bármely $u, v \in [a, b]$, $u < v$ esetén a görbe $(u, f(u))$ és $(v, f(v))$ pontjait összekötő egyenes (húr) egyenlete a következőképpen írható fel:

$$y = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u), \qquad x \in (u, v).$$

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $[a, b]$ intervallumon konvex (felülről domború), ha bármely $(u, v) \in [a, b]$, $u < v$ esetén minden $x \in (u, v)$-re teljesül az

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) \tag{6.1}$$

egyenlőtlenség, azaz a függvény görbéjének bármely íve az ív végpontjait összekötő húr alatt helyezkedik el.

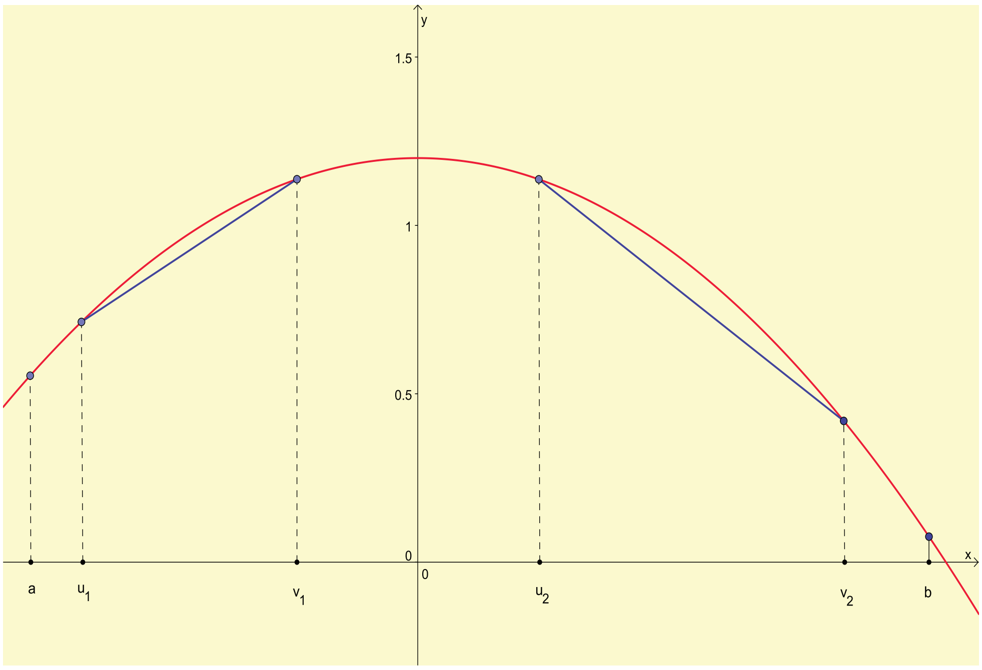


6.11. ábra

Ha bármely $(u, v) \in [a, b]$, $u < v$ esetén minden $x \in (u, v)$-re

$$f(x) \geq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u) \tag{6.2}$$

teljesül, akkor a függvény konkáv (alulról domború) az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor bármely íve a görbének a húr felett van.



6.12. ábra

6.3.6. Példa

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ lineáris függvény az $[a, b]$ intervallumon egyszerre konvex és konkáv is, mivel a (6.1) és a (6.2) relációk egyszerre teljesülnek egyenlőség esetén.

6.3.7. Definíció (páros és páratlan függvény)

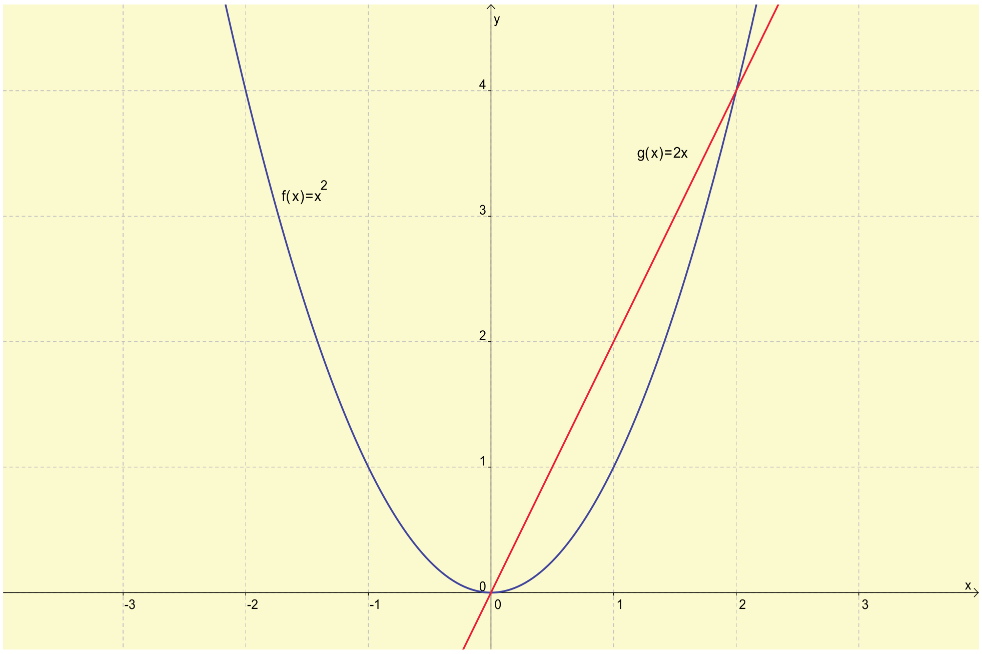
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvényt párosnak illetve páratlannak nevezzük, ha

- *$\forall x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ is teljesül és*
- *$f(x) = f(-x)$ illetve $f(-x) = -f(x)$.*

6.3.8. Megjegyzés

A páros függvény grafikonja az y-tengelyre, míg a páratlan függvény görbéje az origóra szimmetrikus.

6.3.9. Példa
Az $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ páros függvény, a $g(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$ páratlan függvény.



6.13. ábra

Ismeretes a trigonometrikus függvények periodicitása.

6.3.10. Definíció (periodikus függvény)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt periodikusnak nevezzük, ha létezik olyan pozitív T szám, hogy minden $x \in D_f$-re és $(x + kT)$-re, ahol $k \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = f(x + kT)$$

teljesül, ha $(x+kT) \in D_f$. Azt a legkisebb T számot, melyre fennáll az utóbbi egyenlőség, a függvény periódusának mondjuk.

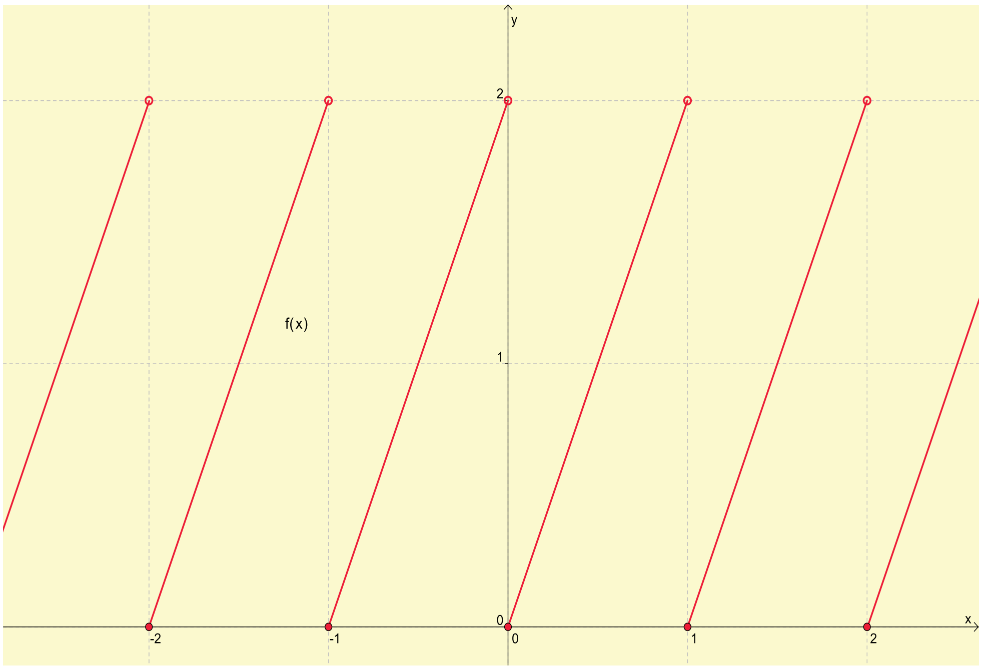
A periodikus függvény képe a T periódusonként ismétlődik.

6.3.11. Példa
Vázoljuk az

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ f(x+1), & \text{egyébként, } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

függvény grafikonját!

Megoldás:
A függvény periódusa: $T = 1$.



6.14. ábra

6.3.12. Példa
Bizonyítsuk be, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

ún. Dirichlet-féle függvénynek minden 0-tól különböző racionális szám periódusa! Létezik-e olyan irracionális szám, amelyik periódusa f-nek?

Megoldás:
Legyen $r \in \mathbb{Q}$, $r \neq 0$. Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $x + r \in \mathbb{Q}$, míg $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ esetén $x + r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Ezért $f(x + r) = f(x)$ minden x valós számra, azaz minden r periódusa f-nek.
Irracionális szám nem lehet periódusa f-nek: ha $p \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ periódusa lenne f-nek, akkor

$$0 = f(-p) = f(-p + p) = f(0) = 1$$

teljesülne. Ez ellentmondáshoz vezet.

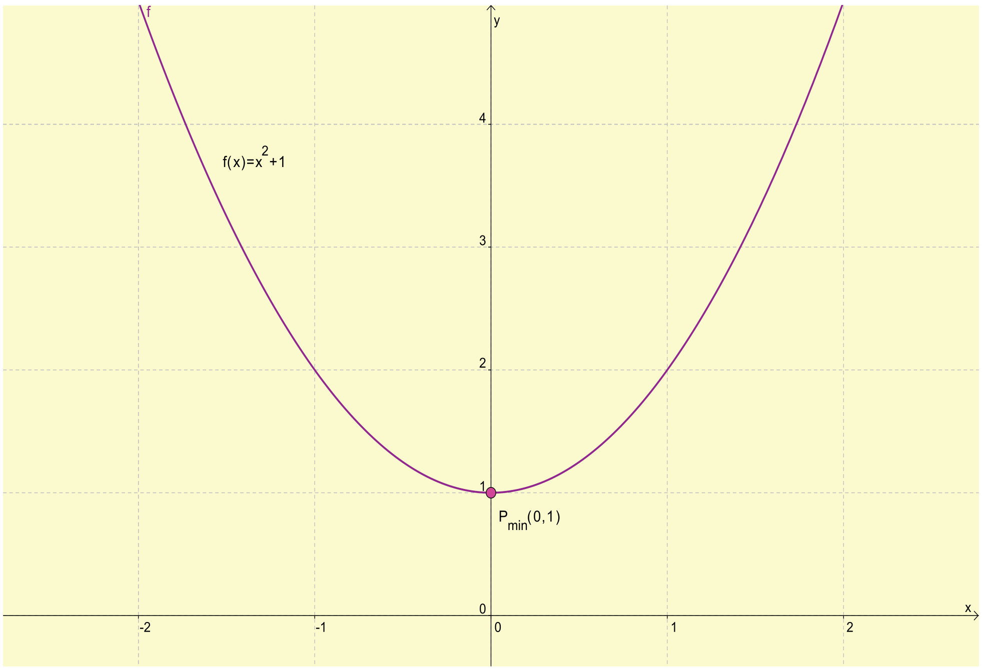
6.3.13. Definíció (globális maximum, minimum)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek az értelmezési tartomány valamelyik $a \in D_f$ pontjában globális maximuma illetve globális minimuma van, ha

$$f(x) < f(a) \quad \textit{illetve} \quad f(x) > f(a), \quad \forall x \in D_f \setminus \{a\}.$$

6.3.14. Definíció (lokális maximum, minimum)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in D_f$ helyen lokális maximuma illetve lokális minimuma van, ha létezik a-nak olyan $K_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\}$ δ-sugarú környezete amelyre teljesül, hogy

$$f(x) \leq f(a) \quad \textit{illetve} \quad f(x) \geq f(a), \quad \forall x \in K_\delta(a) \cap D_f.$$

6.3.15. Példa
Legyen $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Az adott függvénynek az $x = 0$ helyen globális minimuma van.



6.15. ábra

6.4 EGYVÁLTOZÓS FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

A 4.3 alfejezetben bevezettük a határérték fogalmát numerikus sorozatok esetén. Most egyváltozós függvényre vonatkozóan tárgyaljuk a határérték fogalmát.

6.4.1. Definíció (δ-sugarú környezet)
Az $x_0 \in \mathbb{R}$ δ-sugarú környezetén a

$$K_\delta(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

halmazt értjük.

6.4.2. Definíció (δ-sugarú bal oldali környezet)
Az $x_0 \in \mathbb{R}$ δ-sugarú bal oldali környezetén a

$$K_{\delta-}(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0\} = (x_0 - \delta, x_0)$$

halmazt értjük.

6.4.3. Definíció (δ-sugarú jobb oldali környezet)
Az $x_0 \in \mathbb{R}$ δ-sugarú jobb oldali környezetén a

$$K_{\delta+}(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_0 + \delta\} = (x_0, x_0 + \delta)$$

halmazt értjük.

6.4.4. Definíció (a határérték Cauchy-féle megfogalmazása)
Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezett az x_0 véges pont valamely γ-sugarú $K_\gamma(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. (Az x_0 pont a D_f értelmezési tartomány torlódási pontja, hiszen környezete végtelen számú pontot tartalmaz.) Akkor mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám az f függvény x_0 helyen vett határértéke, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ($\delta \leq \gamma$), melyre $\forall$ $x \in K_\delta(x_0)$ esetén, azaz $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{6.3}$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. *Olvasva: limesz* $f(x)$, *ha* x *tart* x_0*-hoz.*

6.4.5. Definíció (a határérték Heine-féle megfogalmazása)
Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezett az x_0 véges pont valamely δ-sugarú $K_\delta(x_0)$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot (x_0 torlódási pontja D_f-nek). Akkor mondjuk, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám az f függvény x_0 pontban vett határértéke, ha minden olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ számsorozat esetén, amelyre

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0, \qquad x_n \in K_\delta(x_0) \tag{6.4}$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A. \tag{6.5}$$

6.4.6. Megjegyzés

A Heine-féle definícióból következik, hogy a függvény határértéke egyértelműen meghatározott, hiszen számsorozat határértékeként vezettük be. Ez utóbbira pedig érvényes az unicitás.

6.4.7. Példa

Igazoljuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ 5, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

függvény határértéke az $x_0 = 1$ helyen 3, azaz:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Megoldás:

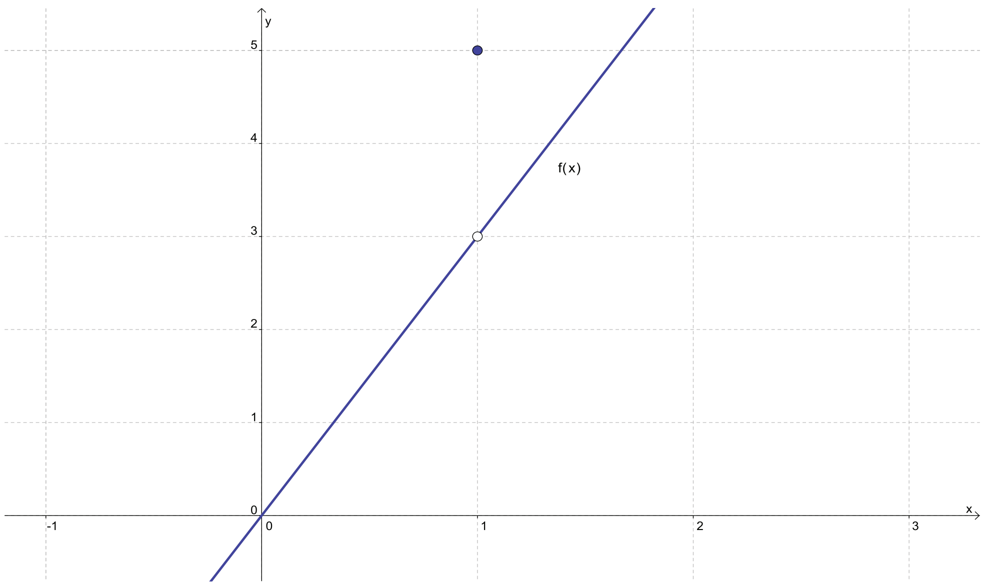
Alkalmazzuk a Cauchy-féle definíciót. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén válasszuk $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$ -nak, azaz legyen $|x - x_0| = |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Ekkor

$$|f(x) - 3| = |3x - 3| = 3|x - 1| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tehát valóban

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Vegyük észre viszont, hogy a függvény helyettesítési értéke az $x_0 = 1$ helyen 5.



6.16. ábra

6.4.8. Lemma (a Cauchy- és a Heine-féle definíciók ekvivalenciája) *A határérték Cauchy-féle és Heine-féle definíciója ekvivalensek.*

Bizonyítás:
Igazoljuk, hogy a Cauchy-féle definícióból következik a Heine-féle definíció. Mivel az x_0 pont torlódási pont, ezért ki tudunk választani az értelmezési tartomány $K_\delta(x_0)$ környezetéből egy

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad x_n \neq 0 \tag{6.6}$$

számsorozatot, amely x_0 -hoz konvergál:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0. \tag{6.7}$$

A sorozat határértékének definíciója szerint a (6.3)-ban szereplő δ számnak megfelel egy $n = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ index, amelyre $n \geq n_0(\delta)$ esetén

$$|x_n - x_0| < \delta$$

és (6.3) szerint ekkor

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon. \tag{6.8}$$

A (6.8) egyenlőtlenségből kapjuk a Heine-féle definícióban szereplő (6.5) egyenlőséget.
Most pedig indirekt úton belátjuk, hogy a Heine-féle definícióból következik a Cauchy-féle. Indirekt feltevésünk a következő: $\forall\varepsilon > 0$ -hoz mindig létezik olyan $x = \overline{x} \neq x_0$ érték, hogy $|\overline{x} - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - A| \geq \varepsilon. \tag{6.9}$$

Legyen $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy pozitív számokból álló nullához tartó sorozat, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Az indirekt feltevésünk alapján $\forall\ \delta = \delta_n$ számhoz létezik olyan $\overline{x} = \overline{x}_n$, melyre $|\overline{x}_n - x_0| < \delta_n$ esetén

$$|f(\overline{x}_n) - A| \geq \varepsilon. \tag{6.10}$$

Így előállt egy

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, ..., \overline{x}_n, ... = \{\overline{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$$

sorozat, melyre

$$|\overline{x}_n - x_0| < \delta_n, \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = x_0.$$

A Heine-féle definícióból következik, hogy az

$$f(\overline{x}_1), f(\overline{x}_2), f(\overline{x}_3), ..., f(\overline{x}_n), ... = \{f(\overline{x}_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

számsorozat A-hoz konvergál. Ez viszont ellentmond a (6.10) feltételnek, mivel ez utóbbi szerint $|f(\overline{x}_n) - A| \geq \varepsilon$. □

6.4.9. Megjegyzés

A határérték kiszámítására e két definíció nem használható, mivel alkalmazásukhoz a határérték ismerete szükséges. Az ún. Cauchy-féle kritérium segítségével a határérték ismerete nélkül tudjuk eldönteni a határérték létezését.

6.4.10. Tétel (Cauchy-féle kritérium a határérték létezésére)

Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ valós egyváltozós függvénynek az $x_0 \in D_f$ helyen vett határértéke akkor és csak akkor létezik, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén található olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - x_0| < \delta, \qquad x, y \in D_f, \quad x, y \neq x_0 \tag{6.11}$$

esetén

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{6.12}$$

Bizonyítás:

Szükségesség. Adott, hogy létezik véges határérték:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Ekkor $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, melyre

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Feltételezzük, hogy y-ra is fennáll az

$$|y - x_0| < \delta$$

egyenlőtlenség és így

$$|f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

is teljesül. Ezek alapján:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - A + (-f(y) + A)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Elégségesség. Adott, hogy fennáll (6.11) és (6.12). Belátjuk, hogy létezik határérték. Legyen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in D_f$ egy tetszőleges x_0-hoz tartó számsorozat (ilyen létezik, mivel x_0 torlódási pont):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Ekkor létezik $n = n_0(\delta)$, melyre $n > n_0$ és $m > n_0$ esetén

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |x_m - x_0| < \delta.$$

Továbbá a (6.11) és a (6.12) feltételek alapján

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \tag{6.13}$$

teljesül. A (6.13) egyenlőtlenség az 5.2.2 Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium) alapján azt jelenti, hogy az

$$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$$

számsorozat konvergens, melynek határértékét jelöljük A-val.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A. \tag{6.14}$$

Már csak azt kell igazolni, hogy A független az $\{x_n\}$ számsorozattól.
Legyen $\{\overline{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy másik x_0-hoz tartó számsorozat:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = x_0.$$

A bizonyítottak alapján az $\{f(\overline{x}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ számsorozat is konvergens, melynek határértéke legyen $\overline{A}$:

$$\lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_n) = \overline{A}. \tag{6.15}$$

Az $A = \overline{A}$ egyenlőség bizonyítása céljából feltételezzük, hogy $A \neq \overline{A}$. Ezek után kiválasztunk egy újabb számsorozatot, mely magába foglalja az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{\overline{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok elemeit:

$$x_1, \overline{x}_1, x_2, \overline{x}_2, ..., x_n, \overline{x}_n, ... \tag{6.16}$$

A (6.16) számsorozat nyilvánvalóan x_0-hoz konvergál. A (6.16) számsorozat az

$$f(x_1), f(\overline{x}_1), f(x_2), f(\overline{x}_2), ..., f(x_n), f(\overline{x}_n), ... \tag{6.17}$$

számsorozathoz vezet, amely divergens, hiszen két különböző torlódási pontja van ($A \neq \overline{A}$). Ellentmondásra jutottunk, hiszen már bizonyítottuk, hogy a (6.17) sorozatnak létezik határértéke. $\square$

Cauchy-féle megfogalmazásban megadhatjuk az ún. baloldali és jobboldali határérték fogalmát.

6.4.11. Definíció (bal oldali és jobb oldali határérték)
Akkor mondjuk, hogy az A_- szám az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény x_0 pontban vett bal oldali határértéke, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ x \in D_f \bigcap K_{\delta -}(x_0)$ esetén

$$|f(x) - A_-| < \varepsilon \tag{6.18}$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_-$.
Az A_+ szám az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény x_0 helyen vett jobb oldali határértéke, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\ x \in D_f \bigcap K_{\delta +}(x_0)$ esetén

$$|f(x) - A_+| < \varepsilon \tag{6.19}$$

Jelölése: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_+$.

6.4.12. Tétel (szükséges és elégséges feltétel a határérték létezésére)
Az egyváltozós $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen akkor és csak akkor létezik határértéke, ha létezik az x_0 pontban bal és jobb oldali határérték és a két féloldali határérték megegyezik. Ez a közös A érték az f függvény x_0-beli határértéke:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = A \tag{6.20}$$

Bizonyítás:
Szükségesség. Ha $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, akkor a Heine-féle definíció alapján bármely x_0-hoz konvergáló bal oldali $\{x_n^-\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n^- < x_0$ és jobb oldali $\{x_n^+\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n^+ > x_0$ sorozatok esetén léteznie kell az alábbi határértékeknek:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n^-) = A \quad \text{és} \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n^+) = A, \tag{6.21}$$

tehát

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A. \tag{6.22}$$

Elégségesség. Az (6.22) egyenlőségből indulunk ki. Tekintsük az x_0 szám δ-sugarú $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ környezetét és az A szám ε-sugarú $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ környezetét. Feltételeink szerint $x \in D_f \cap K_{\delta-}(x_0)$ és $x \in D_f \cap K_{\delta+}(x_0)$, így

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{6.23}$$

Tehát a határérték Cauchy-féle definíciója értelmében:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A. \tag{6.24}$$

□

Általánosítható a függvény határértékének fogalma végtelen A illetve x_0 esetén is.

6.4.13. Definíció (végtelen határérték)

Azt mondjuk, hogy az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvénynek véges x_0 pontban vett határértéke $+\infty$ illetve $-\infty$, ha $\forall\ A > 0$-hoz illetve $B < 0$-hoz $\exists\ \delta = \delta(A)$ illetve $\delta = \delta(B)$ úgy, hogy $\forall\ x \in D_f \cap K_\delta(x_0)$ esetén

$$f(x) > A \quad \textit{illetve} \quad f(x) < B \tag{6.25}$$

Jelölése: $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *illetve* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

6.4.14. Példa

Igazoljuk, hogy $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Megoldás:

Igazolnunk kell, hogy $\forall$ A-hoz $\exists\ \delta = \delta(A)$, melyre $|x - x_0| = |x - 0| < \delta$ esetén

$$\frac{1}{x^2} > A,$$

melyből

$$x^2 < \frac{1}{A}.$$

Legyen $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$. Ha $|x - 0| < \frac{1}{\sqrt{A}}$, akkor

$$x^2 < \frac{1}{A},$$

azaz

$$\frac{1}{x^2} > A.$$

6.4.15. Definíció (határérték a végtelenben)
Legyen az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartománya felülről nem korlátos. Az f függvény $+\infty$-ben vett határértéke a A szám, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ estén $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy $\forall\ x \in D_f$ és $x > \delta$ esetén

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{6.26}$$

teljesül.
Jelölése: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

6.4.16. Példa
Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Megoldás:
Valóban, $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, melyre $x > \delta(\varepsilon)$ esetén

$$\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon,$$

melyből

$$x^2 > \frac{1}{\varepsilon},$$

azaz

$$x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Tehát, ha $x > \delta = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, akkor $\left|\dfrac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$, azaz

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

A határérték kiszámítását megkönnyíti az alábbi állítás.

6.4.17. Tétel (a határérték műveleti tulajdonságai)
Ha az $f : D_f \to \mathbb{R}$ és $g : D_g \to \mathbb{R}$ függvényeknek az x_0 helyen létezik határértéke:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \textit{és} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B, \tag{6.27}$$

akkor a két függvény összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának is létezik határértéke az x_0 pontban, mégpedig:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot A$, $(c \in \mathbb{R})$;

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$*;*

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$*;*

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$*, ha* $B \neq 0$*.*

Bizonyítás:
Csak a 2. állítást bizonyítjuk. Az A és B határértékek létezése miatt:
$\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ úgy, hogy $|x - x_0| < \delta_1$ esetén

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

illetve $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ úgy, hogy $|x - x_0| < \delta_2$ esetén

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

6.4.18. Példa
Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+4}{x}$ határértéket!

Megoldás:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+4}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 1} x} = \frac{2+4}{1} = 6.$$

6.4.19. Tétel (véges határérték létezéséből következő korlátosság)
Ha létezik véges $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *határérték, akkor az* x_0 *pont valamely környezetében az* f *függvény korlátos.*

Bizonyítás:
A határérték létezéséből:
$\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $\forall\, x \in D_f \cap K_\delta(x_0)$ esetén

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Az abszolút érték tulajdonságai miatt:

$$||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < \varepsilon,$$

azaz

$$||f(x)| - |A|| < \varepsilon.$$

Tehát

$$|A| - \varepsilon < |f(x)| < |A| + \varepsilon.$$

Vagyis $f(x)$ korlátos. □

6.4.20. Tétel (a függvény abszolút értékének határértékéről)
Ha létezik a véges $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ *határérték, akkor a* $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |A|$ *határérték is létezik.*

Bizonyítás:
Az előző tétel bizonyításából következik, hogy $||f(x)| - |A|| < \varepsilon$. □

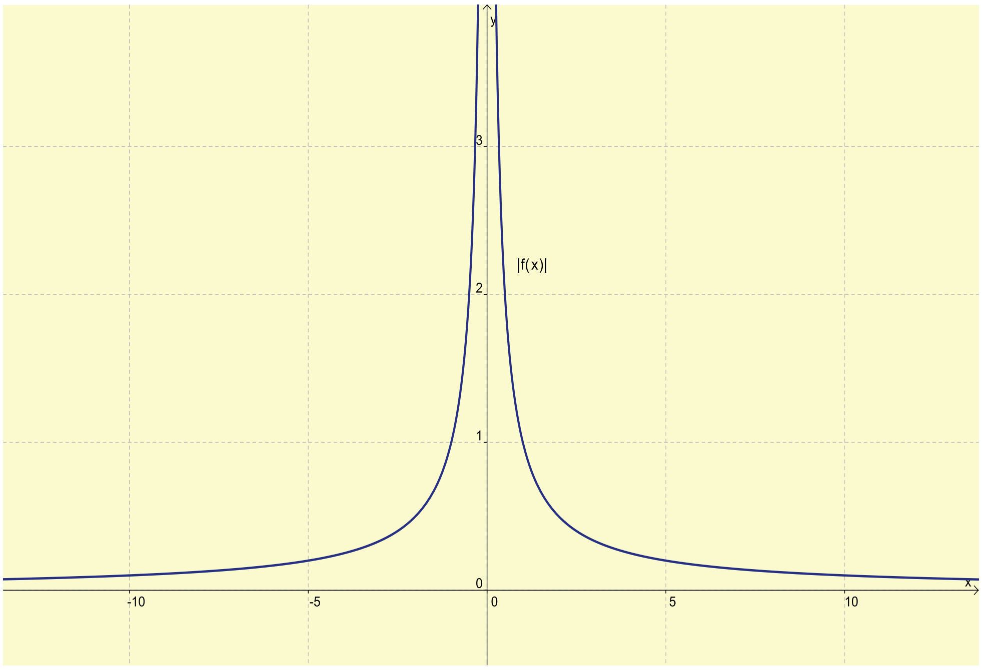
6.4.21. Megjegyzés
Az előző tétel megfordítása nem igaz.

6.4.22. Példa
Létezik-e határértéke az $x_0 = 0$ helyen az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és $|f(x)| = \dfrac{1}{|x|}$ függvényeknek?

Megoldás:
Kiszámítjuk az $x_0 = 0$-beli bal- és jobboldali határértékeket:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty \neq \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

azaz az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvénynek $x_0 = 0$-ban nincs határértéke.



6.17. ábra

Azonban,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=+\infty.$$

6.4.23. Tétel (nevezetes határértékek)

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ x\neq 0,\ x\in\mathbb{R}$

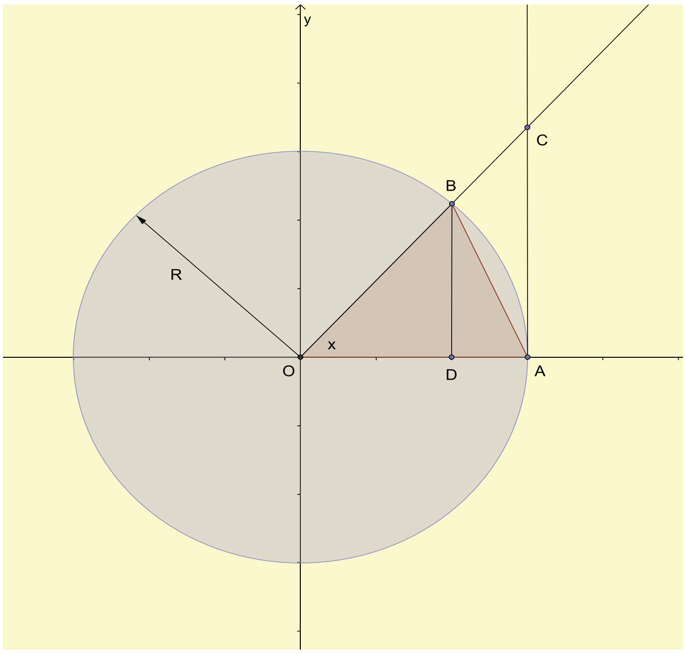
b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ x\in(-\infty,-|a|)\cup(|a|,+\infty)$

Bizonyítás:
A tétel a) részét bizonyítjuk. Először igazoljuk, hogy

$$\sin x<x<\mathrm{tg}x,\quad \text{ha}\quad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

Tekintsük az alábbi R sugarú kört.



6.18. ábra

Jelöljük ki B-t a körvonalon az első síknegyedben, majd készítsük el az AC érintőt. Ekkor:

$$S_{\triangle OAB} < S_{OABk\ddot{o}rcikk} < S_{\triangle OAC}.$$

Mivel

$$S_{\triangle DAB} = \frac{1}{2}DA \cdot BD = \frac{1}{2}R\sin x(R - R\cos x) = \frac{R^2\sin x}{2} - \frac{R^2\sin x\cos x}{2};$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{R^2\sin x\cos x}{2} + \frac{R^2\sin x}{2} - \frac{R^2\sin x\cos x}{2} = \frac{R^2\sin x}{2};$$

$$S_{OABk\ddot{o}rcikk} = \frac{R^2 \cdot x}{2} \quad \text{radiánban mért ”}x\text{” szög;}$$

és

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}OA \cdot AC = R^2 \cdot \frac{\mathrm{tg}x}{2}.$$

Tehát

$$\frac{R^2\sin x}{2} < \frac{1}{2}R^2x < \frac{1}{2}R^2\mathrm{tg}x,$$

azaz

$$\sin x < x < \mathrm{tg}x.$$

Feltéve, hogy $0 < x < \frac{\pi}{2}$ adódik, hogy $\sin x > 0$. Tehát

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Áttérve a reciprokokra:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Továbbá

$$-\frac{\sin x}{x} < -\cos x,$$

azaz

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Azonban

$$1 - \cos x < x,$$

mivel

$$1 - \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2} < x,$$

ha $x < 2$. Ezért

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x,$$

illetve

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < |x|\,.$$

A definíció szerint, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon$, $|x - 0| < \delta = \varepsilon$ esetén

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon,$$

azaz

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

6.4.24. Példa

Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$ határértéket!

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

7 Folytonos függvények. Szakadási helyek

A gyakorlatban igen fontos szerepük van a folytonos függvényeknek.

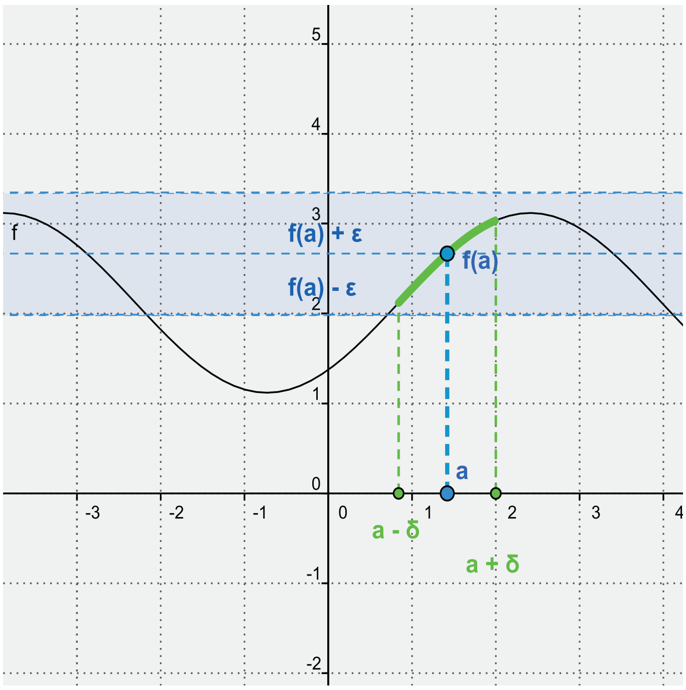
7.1 Folytonos függvények

7.1.1. Definíció (folytonos függvény)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D_f$ helyen folytonosnak nevezzük, ha az x_0 helyen létezik határértéke és helyettesítési értéke, és ezek megegyeznek:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

7.1.2. Megjegyzés

1. A határérték Cauchy-féle definíciója szerint a fenti definíció azt jelenti, hogy $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ úgy, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén
$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
teljesül.
2. Szemléletesen a folytonosság azt jelenti, hogy ha az $x_0 = a$ számot kismértékben megváltoztatjuk, akkor az $f(x_0) = f(a)$ függvényérték is csak kicsit változik.



7.1. ábra

7.1.3. Definíció (balról illetve jobbról folytonos függvény)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D_f$ helyen balról illetve jobbról folytonosnak nevezzük, ha létezik az x_0 pontban baloldali illetve jobboldali határértéke és ezek a féloldali határértékek egybeesnek az x_0-beli helyettesítési értékkel:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \quad \textit{illetve} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

7.1.4. Példa
Folytonos-e az $f(x) = x^2$ függvény az $x_0 = 3$ helyen?

Megoldás:
Az adott függvény folytonos $x_0 = 3$-ban, mivel $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén meg tudunk adni olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$-t, melyre ha $|x - 3| < \delta$, akkor

$$|f(x) - f(3)| = |f(x) - 9| = |x^2 - 9| < \varepsilon.$$

Legyen $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$. Ekkor $|x - 3| < \delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$ esetén

$$-(\sqrt{9 + \varepsilon} - 3) < x - 3 < \sqrt{9 + \varepsilon} - 3.$$

Így:

$$|f(x) - f(3)| = |x^2 - 9| = |(x-3)(x+3)| < (\sqrt{9 + \varepsilon} + 3)(\sqrt{9 + \varepsilon} - 3) = 9 + \varepsilon - 9 = \varepsilon.$$

A függvény határérték műveleti tulajdonságaira vonatkozó tétel alapján kapjuk az alábbi állítást:

7.1.5. Tétel (folytonos függvények összegéről, szorzatáról, hányadosáról)
Az x_0 helyen folytonos függvények összege, különbsége és szorzata is folytonos x_0-ban. Az adott függvények hányadosa szintén folytonos, amennyiben a nevezőben lévő függvény helyettesítési értéke nem zérus x_0-ban.

7.1.6. Tétel (összetett függvény folytonosságáról)
Feltételezzük, hogy az $f : D_f \to \mathbb{R}$ és $g : D_g \to \mathbb{R}$ függvények adottak és $R_g \subseteq D_f$. Ha a g függvény folytonos az x_0 helyen és az f függvény folytonos a $g(x_0)$ helyen, akkor az $F(x) = f(g(x))$ összetett függvény, azaz

$$f \circ g : D_g \to \mathbb{R}$$

szintén folytonos az x_0 helyen és

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a folytonosság definícióját. Mivel f folytonos a $g(x_0)$ helyen, ezért $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta > 0$, melyre $|g(x) - g(x_0)| < \delta$ esetén

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon.$$

A g függvény x_0-beli folytonosságából következik, hogy $\forall\ \varepsilon_1 > 0$ esetén $\exists$ $\delta_1 > 0$ úgy, hogy $|x - x_0| < \delta_1$ esetén:

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon_1.$$

Legyen továbbá $\varepsilon_1 \leq \delta$. Ekkor

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon. \quad \square$$

7.1.7. Tétel (folytonos függvények előjeltartásáról)
Ha az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 helyen folytonos és

$$f(x_0) > 0 \quad \textit{illetve} \quad f(x_0) < 0,$$

akkor létezik x_0-nak olyan δ-sugarú környezete, melyben

$$f(x) > 0 \quad \textit{illetve} \quad f(x) < 0.$$

Bizonyítás:
Tekintsük az $f(x_0) > 0$ esetet. Az x_0-beli folytonosság miatt $\dfrac{f(x_0)}{2} = \varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$, $x \in D_f$ esetén teljesül, hogy

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2},$$

amelyből

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2},$$

azaz

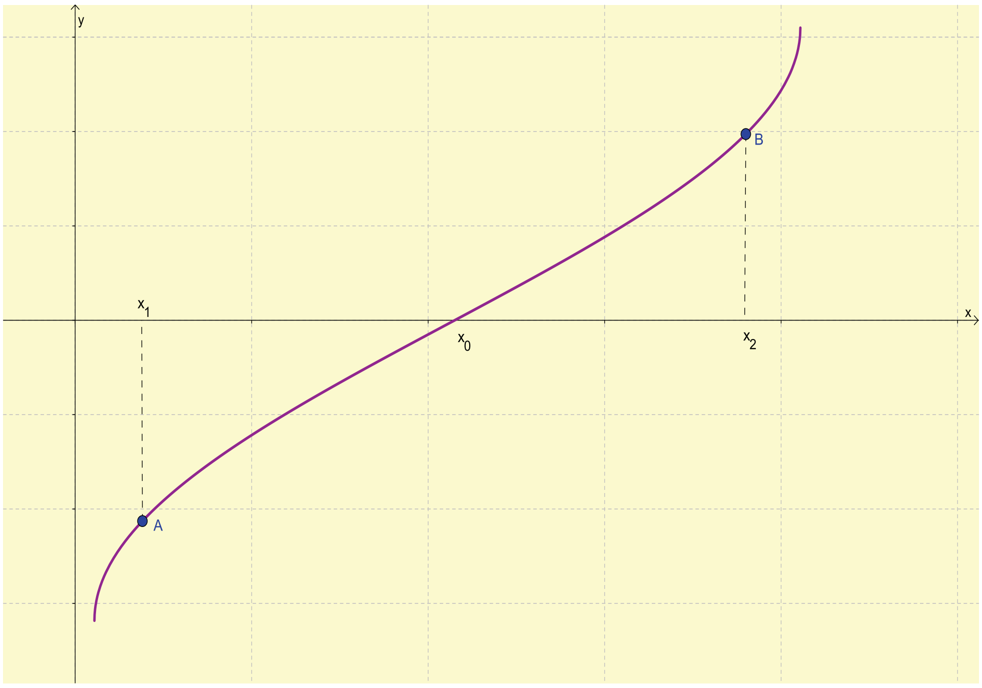
$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0. \quad \square$$

7.1.8. Következmény
Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az x_0 bármely környezetében pozitív és negatív értéket is felvesz, azaz van x_1 és x_2, hogy

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0,$$

akkor szükségképpen

$$f(x_0) = 0.$$



7.2. ábra

7.2 Szakadási helyek osztályozása

7.2.1. Definíció (szakadási hely)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény értelmezési tartományának valamely $x_0 \in D_f$ pontjában nem folytonos, akkor f-nek az x_0 helyen szakadása van.

Háromféle szakadási helyet különböztetünk meg.

7.2.2. Definíció (megszüntethető szakadás)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 szakadási helyen megszüntethető szakadása van, ha az x_0 pontban létezik véges határérték:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A < \infty.$$

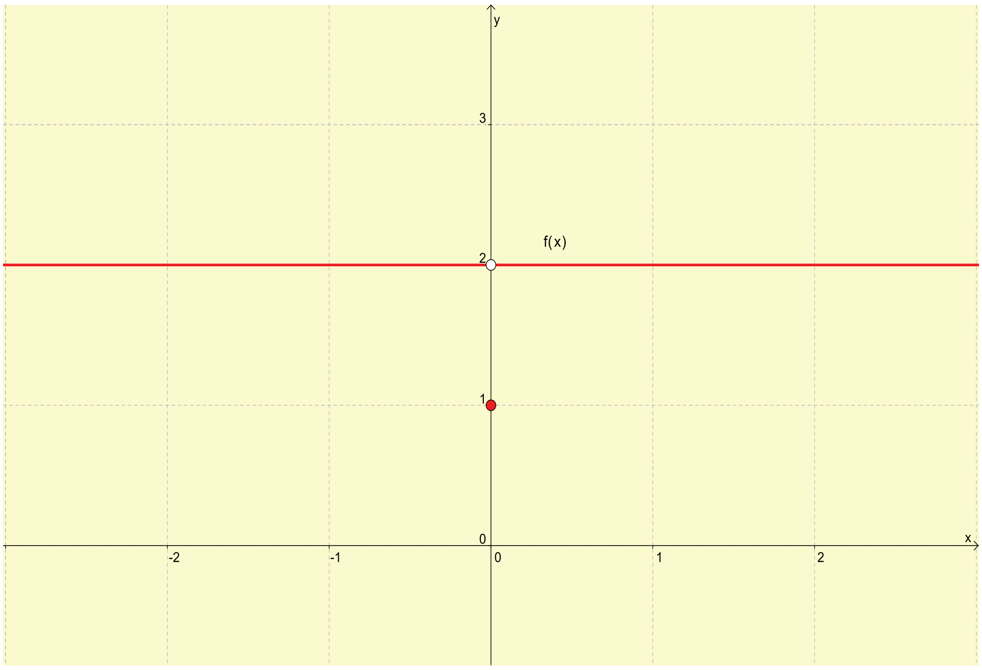
7.2.3. Példa
Tekintsük az alábbi függvényt!

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x > 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$. Valóban, $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén akármilyen $\delta > 0$, $|x| < \delta$ választásakor:

$$|f(x) - 2| = |2 - 2| < \varepsilon.$$

Az $x_0 = 0$ helyen f nem folytonos, mivel $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2 \neq 1$, azaz az x_0-beli határérték nem egyezik meg az x_0-ban felvett helyettesítési értékkel. A szakadás megszüntethető szakadás.



7.3. ábra

7.2.4. Definíció (pólus)

Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 szakadási helyét pólusnak nevezzük, ha az $|f(x)|$ függvénynek az x_0 pontbeli határértéke végtelen:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \infty.$$

7.2.5. Példa

Legyen $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Az $x_0 = 0$ pont ebben az esetben pólus.

7.2.6. Definíció (lényeges szakadási hely)

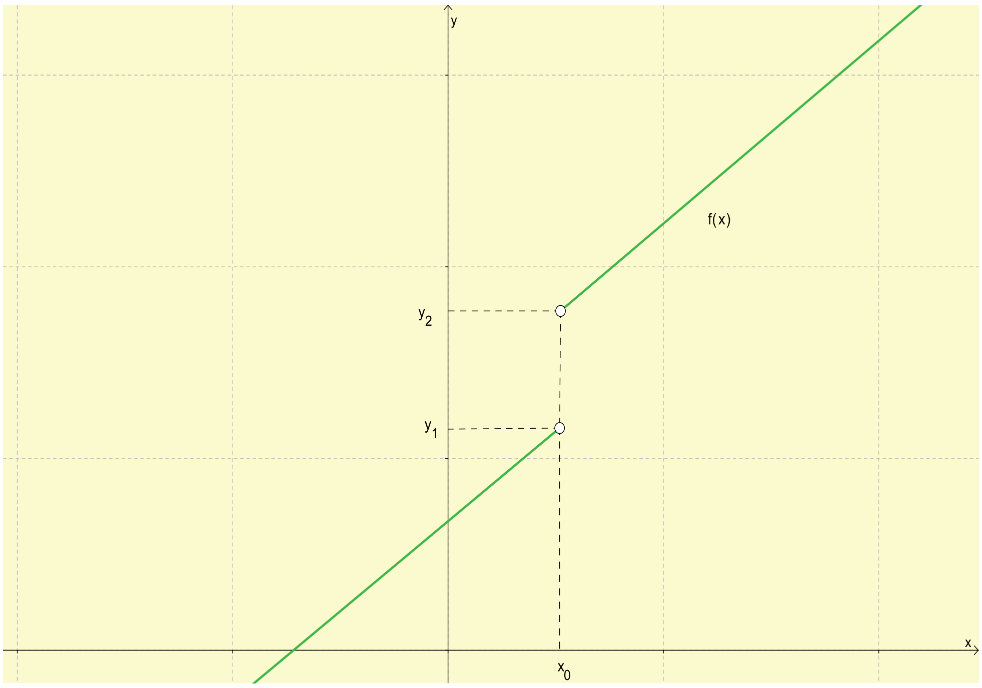
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 szakadási helyét lényeges szakadási helynek nevezzük, ha az x_0 pontban a függvénynek nem létezik sem véges sem végtelen határértéke.

7.2.7. Megjegyzés
A lényeges szakadási hellyel rendelkező függvény nem tehető folytonossá.

A szakadási helyek osztályozása a következőképpen is történhet.

7.2.8. Definíció (elsőfajú szakadási hely)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 szakadási helyét elsőfajú szakadási helynek nevezzük, ha az x_0 pontban létezik véges baloldali és jobboldali határérték, azonban ezek nem egyenlők:

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$



7.4. ábra

7.2.9. Definíció (másodfajú szakadási hely)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 szakadási helyét másodfajú szakadási helynek mondjuk, ha az x_0 pontban legfeljebb az egyik féloldali határérték végtelen (a másik véges).
(Ekkor lehetséges, hogy az x_0 pontban a függvény nincs is meghatározva.)

7.3 Egyenletesen folytonos függvények

Eddig egy függvény pontbeli folytonosságáról volt szó, annak ellenére, hogy a függvény értelmezésére szükség volt a vizsgált pont környezetében is. A folytonossági tulajdonságot most kiterjesztjük intervallumokra is.

7.3.1. Definíció (nyílt intervallumon folytonos függvény)
Az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényt a nyílt (a, b) intervallumon folytonosnak nevezzük, ha f az intervallum minden $x \in (a, b)$ pontjában folytonos.

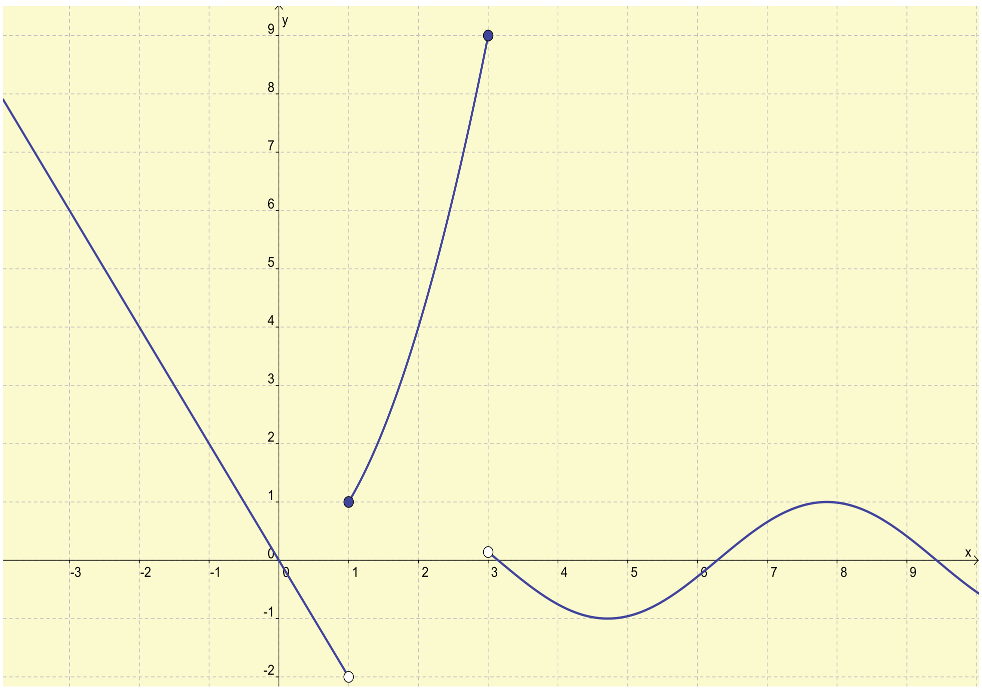
7.3.2. Definíció (zárt intervallumon folytonos függvény)
Az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényt a zárt $[a, b]$ intervallumon folytonosnak nevezzük, ha f folytonos az (a, b) nyílt intervallumon és jobbról folytonos az $x = a$ végpontban illetve balról folytonos az $x = b$ végpontban.

7.3.3. Definíció (szakaszonként folytonos függvény)
Ha az f függvény értelmezési tartománya olyan különböző intervallumok egyesítése, melyeken az adott függvény folytonos, akkor f szakaszonként folytonos függvény.

7.3.4. Példa
Tekintsük az alábbi függvényt!

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha } -\infty < x < 1 \\ x^2, & \text{ha } 1 \le x \le 3 \\ \sin x, & \text{ha } 3 < x < \infty \end{cases}$$

A megadott függvény szakaszonként folytonos.



7.5. ábra

7.3.5. Definíció (egyenletesen folytonos függvény)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvényt az $I \subset D_f$ intervallumon egyenletesen folytonosnak nevezzük, ha bármely $x_0 \in I$ és $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy minden $x \in I$-re, $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

teljesül.

Az előző definícióval ekvivalens az alábbi definíció.

7.3.6. Definíció (egyenletesen folytonos függvény)
Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvényt az $I \subset D_f$ intervallumon egyenletesen folytonosnak nevezzük, ha $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám úgy, hogy $\forall\ x_1, x_2 \in I$-re fennáll, hogy:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \quad \textit{ha} \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

7.3.7. Példa
Mutassuk meg , hogy az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény a $(0, 1)$ intervallumon nem egyenletesen folytonos, de az $(\alpha, 1)$, ahol $\alpha > 0$ intervallumon már egyenletesen folytonos!

Megoldás:
Legyen $0 < x_1 < x_2 < 1$. Az egyenletes folytonosság teljesüléséhez kell (kellene) találni egy $\delta > 0$ számot, hogy $|x_1 - x_2| < \delta$ esetén

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| < \varepsilon.$$

Átrendezve:

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 - x_1 < \varepsilon \cdot x_1 \cdot x_2.$$

Hiába rögzítjük ε-t, az $x_1 \cdot x_2$ szorzatnak nincs 0-nál nagyobb alsó korlátja. Tekintsük azon x_1, x_2 számpárokat, amelyekre $x_2 - x_1 = c > 0$. Ezen számpárok között lesznek olyanok, amelyekre

$$x_2 - x_1 \geq \varepsilon \cdot x_1 \cdot x_2,$$

ha x_1 elég kis értékű. Így nem létezik a rögzített $\varepsilon > 0$-hoz tartozó $\delta > 0$ szám. Tehát f nem egyenletesen folytonos $(0, 1)$-en.

Tekintsük az $(\alpha, 1)$, ahol $\alpha > 0$ intervallumot. Legyen $\alpha < x_1 < x_2 < 1$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ha $\delta = \varepsilon \cdot \alpha^2$, akkor $|x_1 - x_2| < \varepsilon \cdot \alpha^2$ esetén

$$\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} < \varepsilon$$

teljesül, azaz a megadott függvény egyenletesen folytonos az $(\alpha, 1)$ intervallomon, ha $0 < \alpha < 1$.

7.4 Folytonos függvények fontosabb tulajdonságai

Ismertetjük a folytonos függvények zárt intervallumokra vonatkozó tulajdonságait.

7.4.1. Tétel (Bolzano tétele a zérushely létezéséről)
Ha az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonos f függvényre teljesül, hogy:

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont, melyre

$$f(\xi) = 0.$$

Bizonyítás:
Alkalmazzuk a már korábban használt egymásba skatulyázott intervallumok tulajdonságát. Vegyük az $[a, b]$ intervallum felezőpontjában az f függvény értékét. Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, akkor a tétel állítása igaz. Ha $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, akkor a két részintervallum közül jelölje $[a_1, b_1]$ azt, melyre

$$f(a_1) \cdot f(b_1) < 0.$$

Mivel $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$, ezért

$$[a_1, b_1] \subset [a, b].$$

Folytatva ezt az intervallumfelező eljárást, olyan egymásba skatulyázott intervallum-sorozatot kapunk, melyre

$$... \subset [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset ... \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$$

és

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

A felezési eljárást minden határon túl folytatva csak egyetlen olyan $\xi \in (a,b)$ pont marad, amely eleme minden intervallumnak, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

Mivel $\xi \in (a,b)$ és f folytonos ξ-ben; továbbá bármely ε-sugarú környezetben f negatív és pozitív értéket egyaránt felvesz, ezért a folytonos függvények előjeltartása miatt (7.1.7. Tétel) :

$$f(\xi) = 0.$$

A ξ pontbeli folytonosság miatt a határérték Heine-féle definíciója alapján, az $\{a_n\}$ számsorozat esetén (legyen $\forall\ a_n$-re $f(a_n) \leq 0$):

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) \leq 0,$$

illetve a $\{b_n\}$ számsorozatra (legyen $\forall\ b_n$-re $f(b_n) \geq 0$):

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi) \geq 0.$$

Tehát, valóban

$$f(\xi) = 0. \quad \square$$

7.4.2. Tétel (Bolzano tulajdonság folytonos függvény két pont közötti értékeiről)
Ha az $[a,b]$ zárt intervallumon folytonos függvényre fennáll, hogy:

$$f(a) < f(b),$$

akkor a függvény minden olyan c értéket felvesz, amely $f(a)$ és $f(b)$ közé esik, azaz $\exists\ \xi \in (a,b)$, amelyre

$$f(\xi) = c.$$

Bizonyítás:
Tekintsük a $g(x) = f(x) - c$ függvényt. Erre a függvényre teljesül az előző tétel állítása, mivel $g(a) = f(a) - c < 0$ és $g(b) = f(b) - c > 0$. Létezik tehát $\xi \in [a,b]$, melyre $g(\xi) = 0$, és ezért

$$f(\xi) = c. \quad \square$$

7.4.3. Tétel (Weierstrass tétele folytonos függvény korlátosságáról)
Ha az $[a,b]$ intervallum minden pontjában folytonos az f függvény, akkor az $[a,b]$ intervallumon korlátos is, azaz létezik $K > 0$, hogy

$$|f(x)| \leq K, \qquad \forall x \in [a,b].$$

Bizonyítás:
A 6.4.19. Tételből következik az állítás, amely véges határérték létezése esetén garantálja a függvény korlátosságát. □

7.4.4. Tétel (folytonos függvény maximumának és minimumának létezéséről)
Egy zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos f függvény felveszi legnagyobb és legkisebb értékét.

Bizonyítás:
Az előző tétel szerint az f függvény korlátos az $[a, b]$ intervallumon, azaz létezik

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = S.$$

A tétel állításával ellentétben tételezzük fel, hogy az f függvény az S értéket nem veszi fel az $[a, b]$ intervallumon, vagyis

$$f(x) < S, \quad \forall x \in [a, b]$$

esetén. Vezessük be a

$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)}$$

segédfüggvényt, amely nyilvánvalóan folytonos az $[a, b]$ intervallumon és következésképpen korlátos is. Létezik olyan $K > 0$, amelyre

$$g(x) = \frac{1}{S - f(x)} < K.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséget átrendezve adódik, hogy

$$f(x) < S - \frac{1}{K}, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Így ellentmondáshoz jutottunk, mert feltételeink szerint az f függvény supremuma az $[a, b]$ intervallumban az S szám. Azaz létezik olyan $\xi \in [a, b]$ pont, ahol

$$f(\xi) = S = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Hasonlóan látható be a minimumra vonatkozó állítás. □

7.4.5. Tétel (folytonos függvény egyenletes folytonosságáról)
Ha az f függvény a zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos, akkor ugyanott egyenletesen is folytonos.

Bizonyítás:
Indirekt úton bizonyítunk. Ellentétben a tétel állításával feltételezzük, hogy az egyenletes folytonosság 7.3.6. Definíciójában valamilyen rögzített $\varepsilon > 0$-hoz nem található olyan $\delta > 0$, amelyre $|x - x'| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

teljesülne. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $\delta > 0$-ra az $[a, b]$ intervallumban található két olyan pont, x és x', melyekre $|x - x'| < \delta$, de ugyanakkor

$$|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Válasszunk ki egy pozitív számokból álló, nullához konvergáló számsorozatot:

$$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \delta_n > 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Az előbbiek alapján mindegyik δ_n-hez található az $[a, b]$ intervallumban két olyan pont, x_n és x'_n, amelyekre $|x_n - x'_n| < \delta_n$, de ennek ellenére:

$$|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon, \qquad n = 1, 2, ...$$

A Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel alapján a korlátos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatból kiválasztható egy $x_0 \in [a, b]$ ponthoz konvergáló részsorozat. Jelölje ezt a részsorozatot éppen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Mivel $(x_n - x'_n) \to 0$, mert $|x_n - x'_n| < \delta_n$ és $\delta_n \to 0$, így

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = x_0.$$

Az f függvény x_0-beli folytonossága alapján:

$$f(x_n) \to f(x_0), \quad \text{ha} \quad n \to \infty$$

és

$$f(x'_n) \to f(x_0), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

amelyekből adódik, hogy

$$f(x_n) - f(x'_n) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Ez viszont ellentmond annak, hogy minden n-re

$$|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Tehát az állítás igaz. $\square$

7.4.6. Tétel (monoton függvény inverzének létezéséről és annak folytonosságáról)
Ha az f függvény az (a, b) intervallumon folytonos és szigorúan monoton növekvő (illetve csökkenő), akkor a megadott intervallumon létezik az inverz $f^{-1}(x)$ függvény, amely szintén folytonos és monoton csökkenő (illetve növekvő) az $(f(a), f(b))$ (illetve $f(b), f(a))$ intervallumban.

A tételt nem bizonyítjuk. □

8 Elemi függvények, Nevezetes függvények

8.1 Szakaszonként lineáris függvények

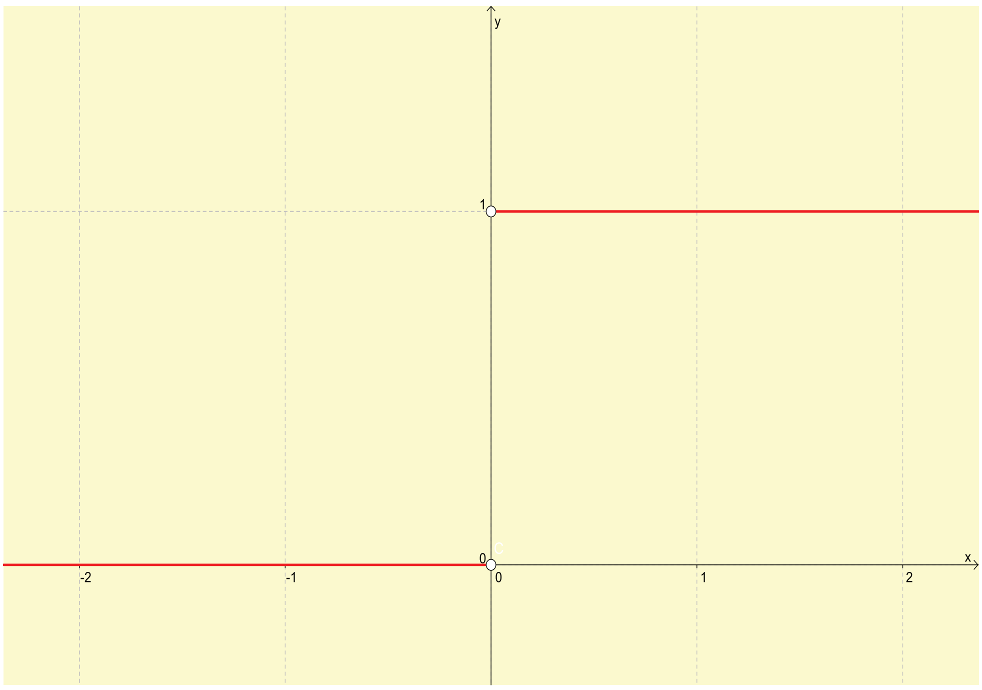
8.1.1. Definíció (elemi függvények)
Az elemi függvények olyan formulával megadható függvények, amelyek véges számú összeadással, kivonással, szorzással, osztással összetett függvény és inverz képzéssel származtathatók a konstans függvények ($f(x) = c$), *a hatványfüggvények* ($f(x) = x^n$), *az exponenciális függvénynek* ($f(x) = a^x$), *a trigonometrikus függvények* ($f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) =$*tgx*, $f(x) =$*ctgx*), *illetve a logaritmus függvények* ($f(x) = \log_a x$) *osztályából.*

Az alábbiakban nevezetes szakaszonként lineáris függvényeket mutatunk be. Ezen függvények közös jellemzője, hogy grafikonjaik egyenes szakaszokból vagy félegyenesekből állnak (és esetleg még néhány pontból).

1. **Egységugrás függvény**

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

Az origóban a függvény nincs meghatározva.
A függvény grafikonja:

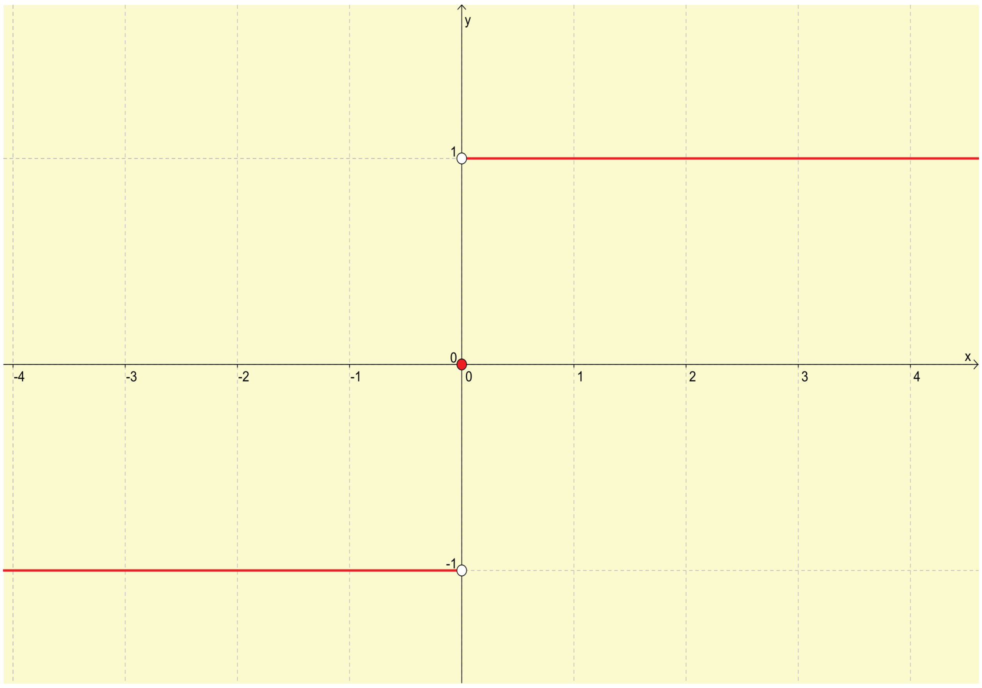


8.1. ábra

2. **Szignum függvény**
A függvény elnevezése a latin eredetű szignum - jelentése: jel - szóból származik.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \text{sgn}x := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Az origóban a függvény értéke 0. A függvény grafikonja:



8.2. ábra

3. **Abszolútérték függvény**

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

A függvény grafikonja két félegyenesből áll. Grafikonja a 8.3. ábrán látható (piros színnel ábrázolva).

8.1.2. Megjegyzés
Könnyű ellenőrizni, hogy

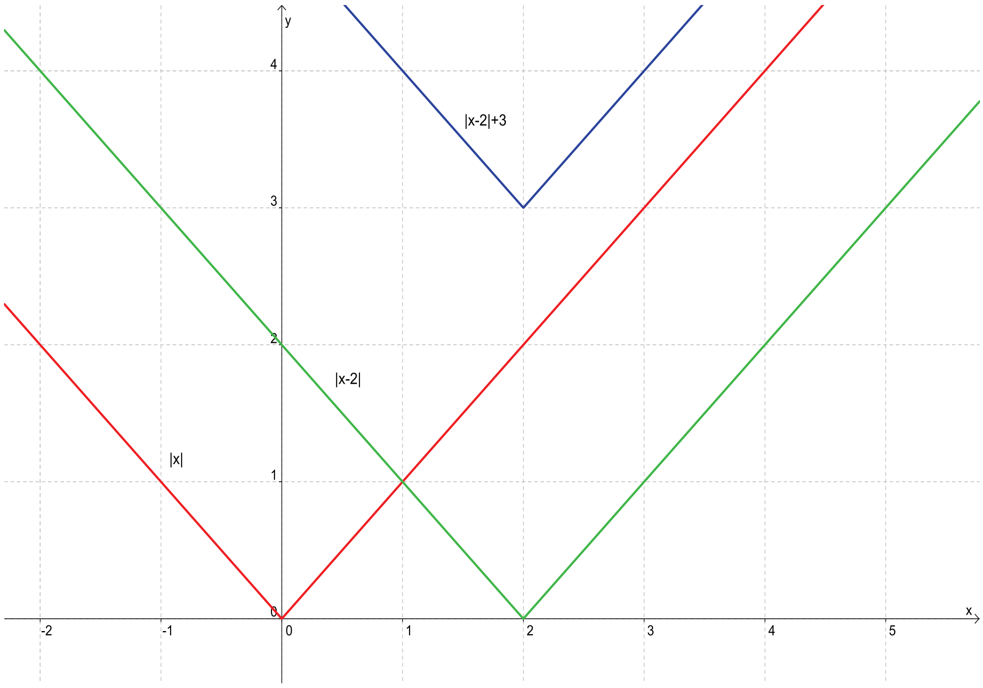
$$|x| = x \cdot \text{sgn}x.$$

8.1.3. Példa

Vázoljuk a $h(x) = |x-2|+3$ függvény grafikonját függvénytranszformáció segítségével!

Megoldás:

Először az $f(x) = |x|$ függvény grafikonját vázoltuk, ezt követően a $g(x) = |x-2|$ függvény grafikonját rajzoltuk meg (zöld színnel). Legvégül a $h(x) = |x-2|+3$ függvény grafikonját készítettük el az y tengely mentén való eltolás segítségével (kék színnel).



8.3. ábra

4. **Egészrész függvény**

8.1.4. Definíció (egészrész függvény)

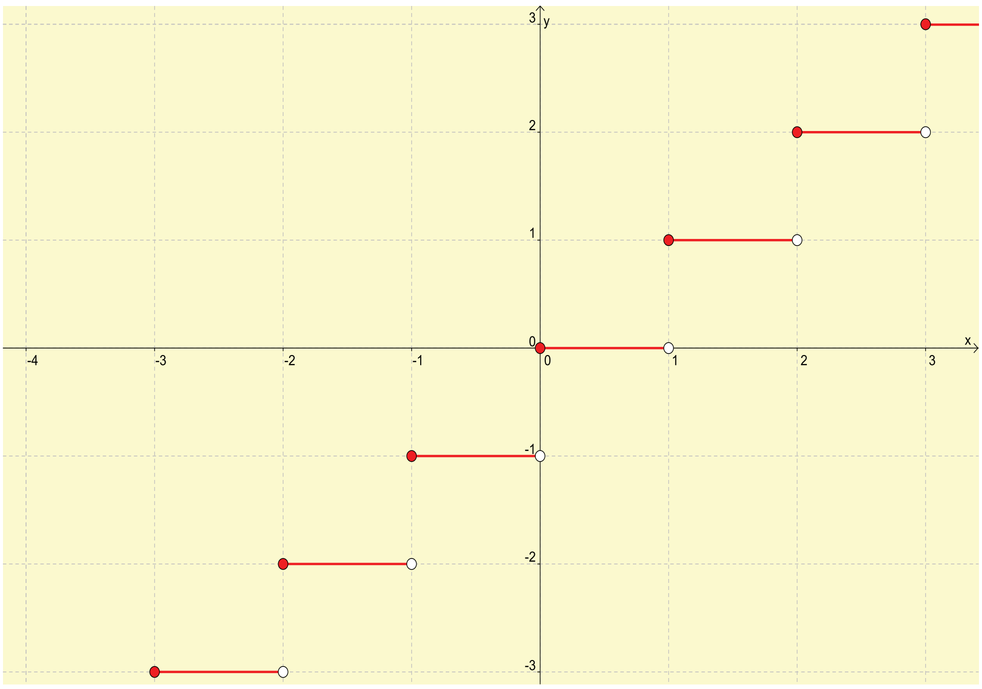
Az $x \in \mathbb{R}$ szám egészrészének azt a legnagyobb egész számot nevezzük, amely nem nagyobb x-nél.
Jelölése: $[x]$ vagy Ent$x$.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \qquad f(x) = [x]$$

Néhány példa:

$$\begin{array}{llll} [0.5] = 0; & [1.2] = 1; & [2.8] = 2; & [7.2] = 7; \\ [-2.8] = -3; & [-1.2] = -2; & [-1.0001] = -2; & [-0.2] = -1. \end{array}$$

A függvény grafikonja:



8.4. ábra

A függvény monoton növekvő, nem korlátos.

5. **Törtrész függvény**

$$f : \mathbb{R} \to [0, 1), \qquad \{x\} = \mathrm{frac}x := x - [x]$$

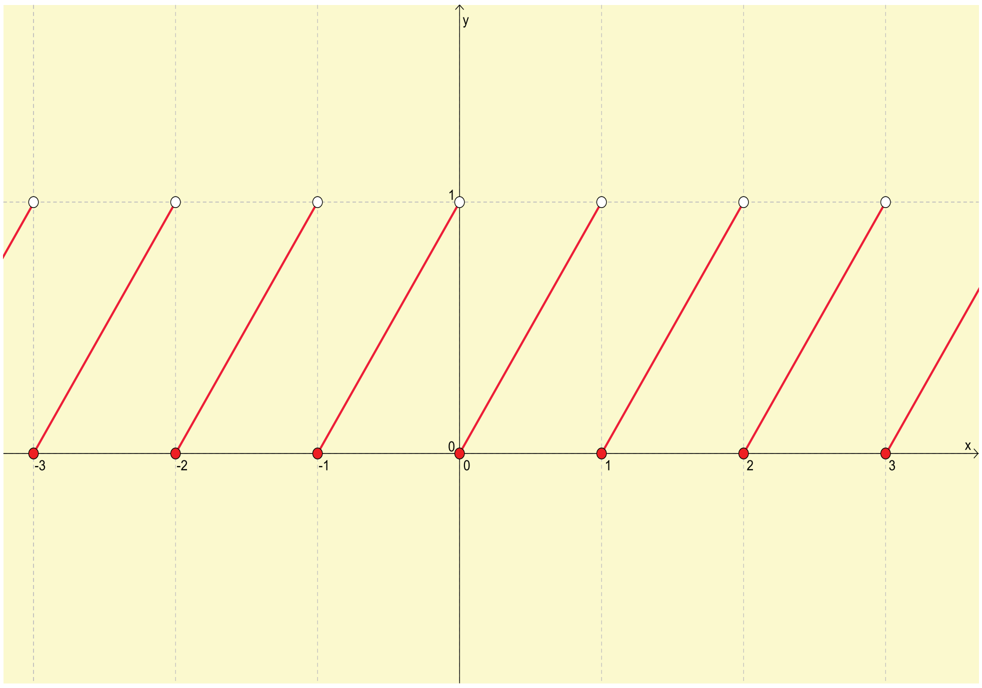
Néhány példa:

$$\begin{array}{llll} \{0.5\} = 0.5; & \{1.2\} = 0.2; & \{2.8\} = 0.8; & \{7\} = 0; \\ \{-2.8\} = 0.2; & \{-1.2\} = 0.8; & \{-1.0001\} = 0.9999; & \{-0.2\} = 0.8. \end{array}$$

A törtrész függvény korlátos, szakaszosan monoton, nem páros és nem páratlan. Ha $x \notin \mathbb{Z}$, akkor a függvény folytonos x-ben, ha $x \in \mathbb{Z}$, akkor a függvénynek elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van és ott a függvény jobbról folytonos:

$$\lim_{x \to n+0} f(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to n-0} f(x) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

A törtrész függvény periodikus, periódusa 1.
A függvény grafikonja a következő ábrán látható.



8.5. ábra

8.2 Hatványfüggvény

8.2.1. Definíció (hatványfüggvény)
Az

$$f(x) = x^n, \quad (n \in N, x \in \mathbb{R})$$

függvényt hatványfüggvénynek nevezzük.

Tekintsük át a hatványfüggvény főbb tulajdonságait.

1. A függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza $\forall\ n \in \mathbb{N}$ esetén.

2. Értékkészlete:

$$R_f = \begin{cases} [0, +\infty), & \text{ha } n = 2k,\ k \in N \\ (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in N \end{cases}$$

3. A páratlan kitevőjű ($n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$) hatványfüggvény szigorúan monoton növekvő a teljes értelmezési tartományában; míg a páros kitevőjű ($n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$) hatványfüggvény a $(-\infty, 0]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[0, +\infty)$ intervallumon szigorúan monoton növekvő.

4. A páros kitevőjű hatványfüggvény páros, a páratlan kitevőjű pedig páratlan; ennek megfelelően a páros kitevőjű hatványfüggvény grafikonja az y-tengelyre szimmetrikus, míg a páratlan kitevőjű hatványfüggvény grafikonja az origóra középpontosan tükrös. A 8.7. Ábrán az $f(x) = x^2$, a $g(x) = x^3$, a $h(x) = x^4$ és az $l(x) = x^5$ függvények grafikonjai láthatóak.

8.6. ábra

5. Vizsgáljuk a hatványfüggvény határértékét a végtelenben!

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

és

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbb{N} \\ -\infty, & \text{ha } n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

6. A páratlan kitevőjű ($n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$) hatványfüggvény invertálható a $(-\infty, +\infty)$ intervallumon, azaz

$$\exists \quad f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A páros kitevőjű hatványfüggvény esetén külön-külön vizsgálandó a $(-\infty, 0]$, illetve a $[0, +\infty)$ intervallum.

7. Az x^n hatványfüggvény a teljes értelmezési tartományában folytonos.

8.3 Racionális egész függvény

8.3.1. Definíció (polinom)
Az

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \tag{8.1}$$

alakú függvényt racionális egész függvénynek, polinomfüggvénynek vagy n-ed fokú polinomnak nevezzük, ha $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$. Az a_0-t szabad tagnak mondjuk, az $n \in \mathbb{N}$ számot pedig a polinom fokszámának.

8.3.2. Tétel (polinom osztása polinommal)
Legyen $p_n(x)$ egy n-ed fokú, $p_m(x)$ egy m-ed fokú polinom úgy, hogy $n \geq m$. Ekkor mindig létezik olyan $q_{n-m}(x)$ $(n-m)$-ed fokú polinom és egy $r_{m-1}(x)$ legfeljebb $(m-1)$-ed fokú polinom, amelyekre teljesül az alábbi összefüggés:

$$p_n(x) = q_{n-m}(x) \cdot p_m(x) + r_{m-1}(x) \tag{8.2}$$

A $q_{n-m}(x)$ polinomot hányadosnak, az $r_{m-1}(x)$ polinomot maradéknak nevezzük.

8.3.3. Példa
Tekintsük a $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ és a $q(x) = x - 1$ polinomokat. Osszuk el a $p(x)$ polinomot a $q(x)$ polinommal!

Megoldás:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1) = x^2 - 2x + 1 \\
\underline{\pm x^3 \mp x^2} \\
\qquad -2x^2 + 3x - 1 \\
\qquad \underline{\mp 2x^2 \pm 2x} \\
\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{\pm x \mp 1} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Azaz:

$$\underbrace{\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)}_{p_n(x)} = \underbrace{\left(x^2 - 2x + 1\right)}_{q_{n-m}(x)}\underbrace{(x - 1)}_{p_m(x)} + \underbrace{0}_{r(x)}$$

8.3.4. Példa

Tekintsük a $p(x) = 3x^3 - 10x + 5$ és a $q(x) = x - 2$ polinomokat. Osszuk el a $p(x)$ polinomot a $q(x)$ polinommal!

Megoldás:

$$
\begin{array}{l}
(3x^3 - 10x + 5) : (x - 2) = 3x^2 + 6x + 2 \\
\underline{\pm 3x^3 \mp 6x^2} \\
\qquad 6x^2 - 10x + 5 \\
\qquad \underline{\pm 6x^2 \mp 12x} \\
\qquad\qquad\quad 2x + 5 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 2x \mp 4} \\
\qquad\qquad\qquad 9
\end{array}
$$

Azaz:

$$\underbrace{\left(3x^3 - 10x + 5\right)}_{p_n(x)} = \underbrace{\left(3x^2 + 6x + 2\right)}_{q_{n-m}(x)}\underbrace{(x - 2)}_{p_m(x)} + \underbrace{9}_{r(x)}$$

8.3.5. Megjegyzés

Ha $m = 1$, akkor a maradék r konstans (nulladfokú polinom):

$$p_n(x) = q_{n-1}(x) \cdot (x - x_0) + r, \qquad r \in \mathbb{R}. \tag{8.3}$$

8.3.6. Definíció (polinom zérushelye)

A $p_n(x)$ polinomnak az x_0 pontban zérushelye van, ha

$$p_n(x_0) = 0.$$

8.3.7. Tétel (a polinom felírása egy zérushely ismeretében)
A $p_n(x)$ polinomnak az x_0 pont akkor és csak akkor zérushelye, ha $p_n(x)$ felírható az alábbi alakban:

$$p_n(x) = (x - x_0) \cdot q_{n-1}(x), \tag{8.4}$$

ahol $q_{n-1}(x)$ egy $(n-1)$-ed fokú polinom.

Bizonyítás:

- Elégségesség: Nyilvánvaló, hogy ha (8.4) teljesül, akkor

  $$p_n(x_0) = (x_0 - x_0)q_{n-1}(x) = 0.$$

- Szükségesség: Adott, hogy $p_n(x_0) = 0$. Igazoljuk, hogy fennáll (8.2). Végezzük el az $x = x_0$ helyettesítést (8.3)-ban. Ekkor:

  $$0 = p_n(x_0) = q_{n-1}(x_0)(x_0 - x_0) + r,$$

  azaz

  $$r = 0.$$

  Ezért

  $$p_n(x) = q_{n-1}(x) \cdot (x - x_0). \quad \square$$

8.3.8. Definíció (polinom gyöktényezős alakja)
A $p_n(x)$ polinom felírható az alábbi alakban:

$$p_n(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (x - x_j)^{m_j} \cdot q_{n-(m_1+m_2+...+m_j)}(x), \tag{8.5}$$

ahol az $x_1, x_2, ..., x_j$ különböző valós gyökök, az $m_1, m_2, ..., m_j$ pozitív egész számok rendre az $x_1, x_2, ..., x_j$ gyökök multiplicitásai ($m_1 + m_2 + ... + m_j \leq n$) és a $q_{n-(m_1+m_2+...+m_j)}(x)$ polinomnak nincs valós gyöke. A (8.5) alakot a polinom valós gyöktényezős alakjának nevezzük.

8.3.9. Példa
Írjuk fel a $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ polinom valós gyöktényezős alakját!

Megoldás:
A $g(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ polinom egyik gyöke $x_1 = 1$, mert

$$g(1) = 1 + 1 - 5 + 3 = 0.$$

Tehát a harmadfokú polinom osztható az $(x - 1)$ polinommal. Végezzük el a polinomosztást!

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 - 5x + 3) : (x - 1) = x^2 + 2x - 3 \\
\underline{-x^3 \mp x^2} \\
\qquad 2x^2 - 5x + 3 \\
\qquad \underline{-2x^2 \mp 2x} \\
\qquad\qquad -3x + 3 \\
\qquad\qquad \underline{\mp 3x \pm 3} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Az $x^2 + 2x - 3 = 0$ másodfokú egyenlet gyökeit meghatározva $x_2 = 1$ és $x_3 = -3$ adódik. Tehát a $g(x)$ polinom valós gyöktényezős alakja:

$$g(x) = (x - 1)^2 \cdot (x + 3).$$

Az $x_1 = x_2 = 1$ gyök multiplicitása 2.

8.3.10. Példa
Írjuk fel az $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$ polinom valós gyöktényezős alakját!

Megoldás:
Az $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x$ negyedfokú polinom két zérushelye: $x_1 = 0$ és $x_2 = -2$, ugyanis

$$f(0) = 0 \qquad \text{és} \qquad f(-2) = 0.$$

A két gyök segítségével, a polinomosztás elvégzése után, a valós gyöktényezős alak:

$$f(x) = x \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 1).$$

Az $x^2 + 1$ polinomnak nincs valós gyöke.

8.3.11. Megjegyzés
Két polinom összege, különbsége és szorzata is polinom, de hányadosuk általában nem.

8.3.12. Megjegyzés (Racionális egész függvények ábrázolása)
Az $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ racionális egész függvény ábrázolásához felírjuk az $f(x)$ polinom valós gyöktényezős alakját:

$$f(x) = (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (x - x_j)^{m_j} \cdot g(x),$$

ahol a $g(x)$-nek már nincs valós gyöke. Könnyen igazolható, hogy ha m_i ($i \in \{1, 2, ..., j\}$) páros, akkor a függvény az x_i zérushelyen nem vált előjelet, míg páratlan m_i esetén a függvény x_i-ben előjelet vált. Vagyis az $f(x)$ görbéje x_i kicsiny környezetében olyan jellegű, mint a megfelelő hatványfüggvény. Az $f(x)$ függvény jelleggörbéjének ábrázolásához a $+\infty$-beli ill. a $-\infty$-beli határérték kiszámítása is fontos információt ad.

8.3.13. Példa
Vázoljuk az alábbi függvények grafikonját!

a) $f_1(x) = x^3 - x$;

b) $f_2(x) = x^3 - 12x + 16$;

c) $f_3(x) = x^5 + 9x^4 + 27x^3 + 27x^2$;

d) $f_4(x) = -x^8 + 2x^6 - 2x^2 + 1$.

Megoldás:

a) Írjuk fel $f_1(x)$ valós gyöktényezős alakját!

$$f_1(x) = x \cdot (x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

A függvény zérushelyei:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1.$$

Minden zérushely egyszeres, ezeken a helyeken tehát a függvény görbéje úgy metszi az x-tengelyt, mint egy egyenes. Továbbá:

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty.$$

A függvény grafikonja:

8.7. ábra

b) Az $f_2(x)$ polinom egyik gyöke 2, mert

$$f_2(2) = 8 - 24 + 16 = 0.$$

Osszuk el $f_2(x)$-et $(x-2)$-vel!

$(x^3 - 12x + 16) : (x - 2) = x^2 + 2x - 8$

$\underline{\pm x^3 \mp 2x^2}$

$2x^2 - 12x + 16$

$\underline{\pm 2x^2 \mp 4x}$

$-8\,x + 16$

$\underline{\mp 8x \pm 16}$

0

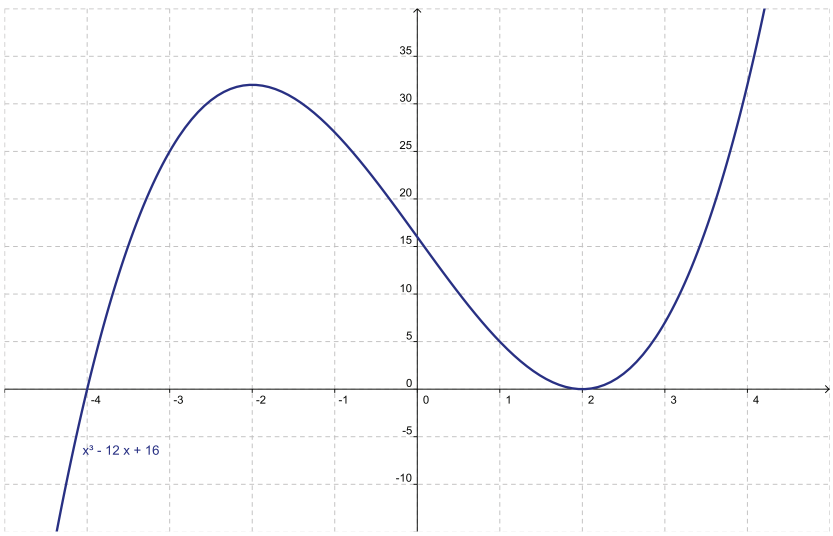
Az $x^2 + 2x - 8 =$ másodfokú egyenlet gyökei $x_2 = 2$ és $x_3 = -4$. Az $f_2(x)$ polinom gyöktényezős alakja:

$$f_2(x) = (x-2)^2 \cdot (x+4).$$

Az $x_1 = x_2 = 2$ kétszeres gyök, a függvény görbéje itt úgy érinti az x tengelyt, mint egy parabola, míg $x_3 = -4$ egyszeres. Továbbá:

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_2(x) = -\infty.$$

A függvény grafikonja:



8.8. ábra

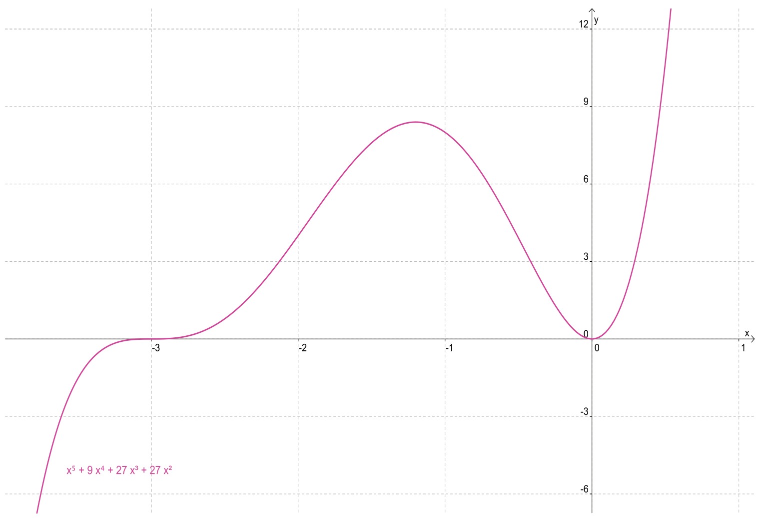
c) Alakítsuk szorzattá $f_3(x) = x^5 + 9x^4 + 27x^3 + 27x^2$-et!

$$x^5 + 9x^4 + 27x^3 + 27x^2 = x^2 \cdot (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) = x^2(x+3)^3$$

$f_3(x)$-nek $x_1 = 0$ kétszeres, míg $x_2 = -3$ háromszoros gyöke. $x_2 = -3$-ban a függvény görbéje úgy metszi az x-tengelyt, mint egy harmadfokú függvény. Számítsuk ki a $+\infty$-beli ill. a $-\infty$-beli határértéket!

$$\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty.$$

$f_3(x)$ grafikonja:



8.9. ábra

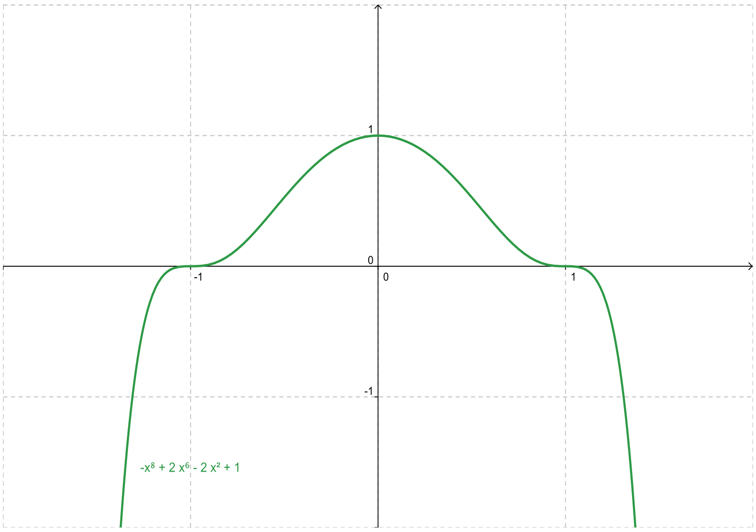
d) Mivel

$$f_4(x) = -x^8 + 2x^6 - 2x^2 + 1 = (1-x)^3 \cdot (1+x)^3 \cdot (x^2+1),$$

ezért $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$ egyaránt háromszoros zérushely. A függvény páros és

$$\lim_{x\to+\infty} f_4(x) = \lim_{x\to-\infty} f_4(x) = -\infty.$$

A függvény grafikonja:



8.10. ábra

8.4 Racionális törtfüggvény

8.4.1. Definíció (racionális törtfüggvény)
Racionális törtfüggvényen két racionális egész függvény hányadosát értjük. Általános alakja:

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \tag{8.6}$$

ahol $n \geq 0,\ m \geq 1,\ n, m \in \mathbb{N},\ a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$.
Ha $n < m$, *azaz a számláló fokszáma kisebb, mint a nevező fokszáma, akkor valódi törtfüggvényről, ha pedig* $n \geq m$, *akkor áltörtfüggvényről beszélünk.*

8.4.2. Megjegyzés
A (8.6) alakú racionális törtfüggvény értelmezési tartománya a valós számok halmazának az a részhalmaza, amelyre

$$q_m(x) \neq 0.$$

8.4.3. Megjegyzés
Az áltörtfüggvény ($n \geq m$) mindig felírható egy $(n-m)$-ed fokú racionális egészfüggvény és egy valódi racionális törtfüggvény összegeként:

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = r_{n-m}(x) + \frac{s_{m-1}(x)}{q_m(x)}, \qquad \text{ha} \quad n \geq m. \tag{8.7}$$

Az $r_{n-m}(x)$ függvényt a racionális törtfüggvény asszimptotájának nevezzük. Az áltörtfüggvény (8.7) alakját polinomosztás segítségével állítjuk elő.

8.4.4. Megjegyzés
Könnyen igazolható, hogy a racionális törtfüggvény $+\infty$-beli határértékére igaz az alábbi formula:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < m, \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{ha } n = m, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} r_{n-m}(x), & \text{ha } n > m. \end{cases}$$

8.4.5. Definíció (racionális törtfüggvény zérushelye)
Az x_0 helyet a (8.6) alakú racionális törtfüggvény zérushelyének nevezzük, ha

$$p_n(x_0) = 0, \quad de \quad q_m(x_0) \neq 0,$$

azaz az $(x - x_0)$ gyöktényező csak a számlálóban fordul elő.

8.4.6. Megjegyzés
A (8.6) alakú racionális törtfüggvény grafikonja zérushelyének környezetében olyan jellegű, mint a racionális egész függvény görbéje egy zérushelye környezetében.

8.4.7. Definíció (racionális törtfüggvény pólushelye)
Az x_0 helyet a (8.6) alakú racionális törtfüggvény pólushelyének nevezzük, ha

$$q_m(x_0) = 0, \quad de \quad f_n(x_0) \neq 0,$$

azaz az $(x - x_0)$ gyöktényező csak a nevezőben fordul elő. Pólusról beszélünk akkor is, ha a számlálóban és a nevezőben is előfordul az $(x-x_0)$ gyöktényező, de a nevezőben nagyobb kitevővel, mint a számlálóban.

8.4.8. Megjegyzés
A (8.6) alakú racionális törtfüggvény a pólushelyen nincs értelmezve. Itt a függvény görbéjének "függőleges" aszimptotája (pólusegyenese) van. Ha x_0 multiplicitása k, azaz $(x - x_0)^k$ szerepel (8.6) nevezőjében a gyöktényezős alak felírásakor (egyszerűsítés után), akkor páros k esetén a függvény görbéje jobbról és balról is a "függőleges" aszimptotához simul, anélkül, hogy előjelet váltana. Ha k értéke páratlan, akkor előjelet váltva simul a függvény görbéje a "függőleges" aszimptotához.

8.4.9. Definíció (racionális törtfüggvény hézagpontja)
Az x_0 helyet a (8.6) alakú racionális törtfüggvény hézagpontjának nevezzük, ha

$$f_n(x_0) = 0, \quad és \quad q_m(x_0) = 0,$$

azaz az $(x - x_0)$ gyöktényező számlálóban és a nevezőben is előfordul, de a számlálóban nem kisebb kitevőn, mint a nevezőben.

8.4.10. Megjegyzés
A (8.6) alakú racionális törtfüggvény hézagpontja elsőfajú megszüntethető szakadási hely, ezt úgy ábrázoljuk, hogy a függvény görbéjére nullkört rajzolunk.

8.4.11. Megjegyzés (Racionális törtfüggvények ábrázolása)
Az

$$f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}$$

racionális törtfüggvény ábrázolásához felírjuk a $p_n(x)$ és a $q_m(x)$ polinomok valós gyöktényezős alakját:

$$f(x) = \frac{(x - x_{\alpha_1})^{\gamma_1} \cdot (x - x_{\alpha_2})^{\gamma_2} \cdot ... \cdot (x - x_{\alpha_j})^{\gamma_j} \cdot g_1(x)}{(x - x_{\beta_1})^{\delta_1} \cdot (x - x_{\beta_2})^{\delta_2} \cdot ... \cdot (x - x_{\beta_k})^{\delta_k} \cdot g_2(x)} \tag{8.8}$$

ahol a $g_1(x)$-nek és $g_2(x)$-nek már nincs valós gyöke. Meghatározzuk a függvény lehetséges zérushelyeit, pólushelyeit (multiplicitásaikkal együtt) és hézagpontjait. Ha $f(x)$ áltört, akkor polinomosztás segítségével (8.7) alakra hozzuk. Az $f(x)$ függvény jelleggörbéjének ábrázolásához meghatározzuk a $+\infty$-beli ill. a $-\infty$-beli határértékeket.

8.4.12. Példa
Vázoljuk az $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
Írjuk fel az $f(x)$ függvény (8.8)-as alakját!

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

Az $f(x)$ függvénynek $x_0 = 0$-ban egyszeres zérushelye van, továbbá $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ egyszeres pólushelyek, vagyis ezeken a helyeken aszimptotája van a függvénynek. A függvénynek nincs hézagpontja. Az $f(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Továbbá:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} f(x) = +\infty$$

és

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} f(x) = -\infty.$$

Így $f(x)$ grafikonja könnyen elkészíthető:

8.11. ábra

8.4.13. Példa

Vázoljuk a $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ függvény grafikonját!

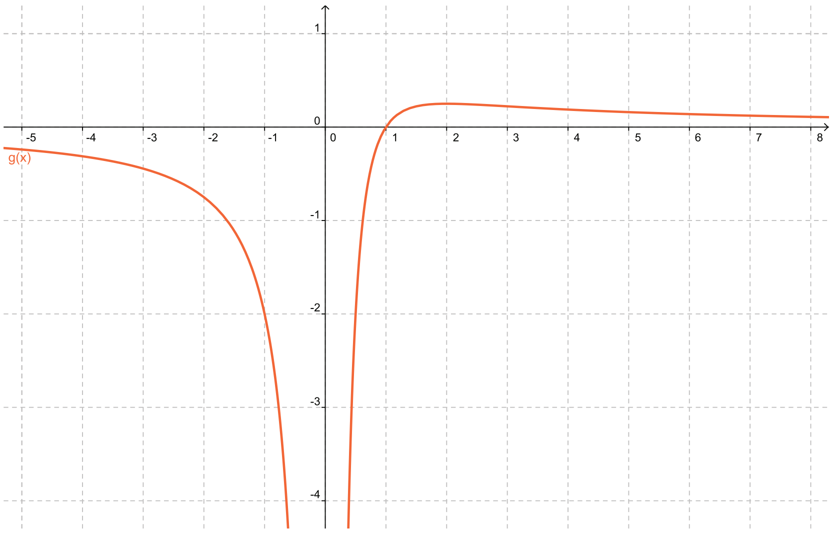
Megoldás:

A $g(x)$ függvénynek $x_0 = 1$ egyszeres zérushelye, továbbá $x_1 = 0$ kétszeres pólushelye, ezért itt $g(x)$ nem vált előjelet, és

$$\lim_{x \to 0-0} g(x) = \lim_{x \to 0+0} g(x) = -\infty.$$

A függvénynek nincs hézagpontja. A $g(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0.$$



8.12. ábra

8.4.14. Példa
Vázoljuk a $h(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2 \cdot (x-3)^2}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
A $h(x)$ függvénynek $x_0 = 1$ egyszeres zérushelye, továbbá $x_1 = -1$ és $x_2 = 3$ kétszeres pólushelyek, vagyis ezeken a helyeken aszimptotája van a függvénynek, és $g(x)$ nem vált előjelet. Továbbá:

$$\lim_{x \to -1-0} h(x) = \lim_{x \to -1+0} h(x) = -\infty$$

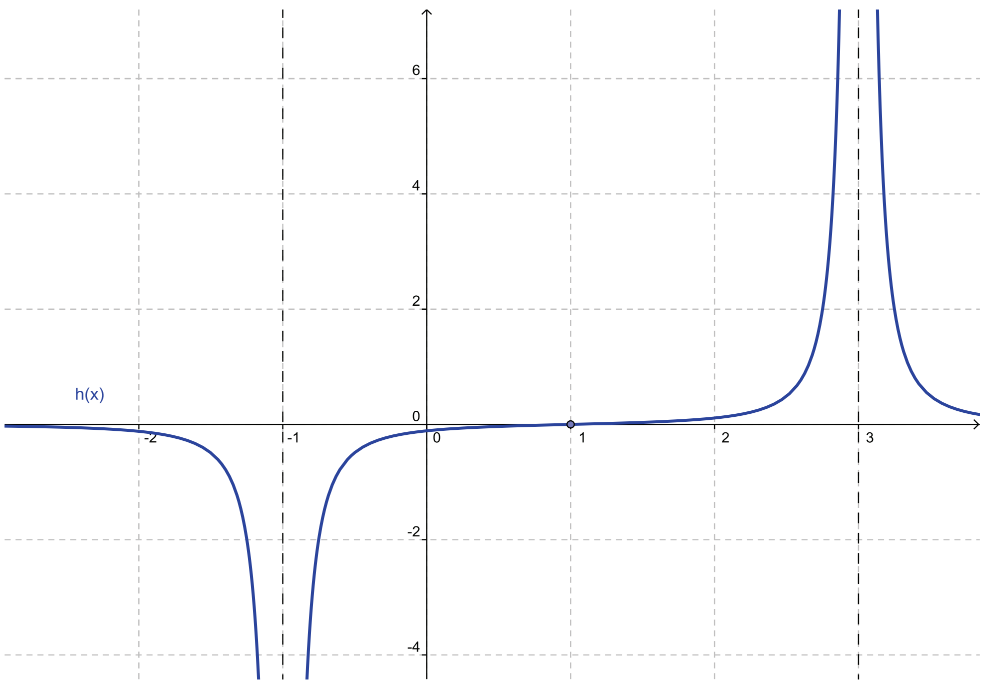
és

$$\lim_{x \to 3-0} h(x) = \lim_{x \to 3+0} h(x) = +\infty.$$

A függvénynek nincs hézagpontja. A $h(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0.$$

A $h(x)$ függvény grafikonja:



8.13. ábra

8.4.15. Példa
Vázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3-x^2-10x-8}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
Írjuk fel az $f(x)$ függvény (8.8)-as alakját!

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-x^2-10x-8} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-4)}$$

Az $f(x)$ függvénynek $x_0 = -2$ hézagpontja, mert az $(x+2)$ gyöktényező a számlálóban és a nevezőben is megtalálható egyforma hatványkitevővel. A hézagpont elsőfajú, megszüntethető szakadási hely, így $x_0 = -2$-ben $f(x)$-nek létezik határértéke:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-4)} = \lim_{x\to -2} \frac{x-2}{(x+1)(x-4)} = \frac{-2}{3}.$$

A függvénynek $x_1 = 2$ egyszeres zérushelye, $x_2 = -1$ és $x_3 = 4$ pedig egyszeres pólushelyek. Továbbá:

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0} f(x) = +\infty$$

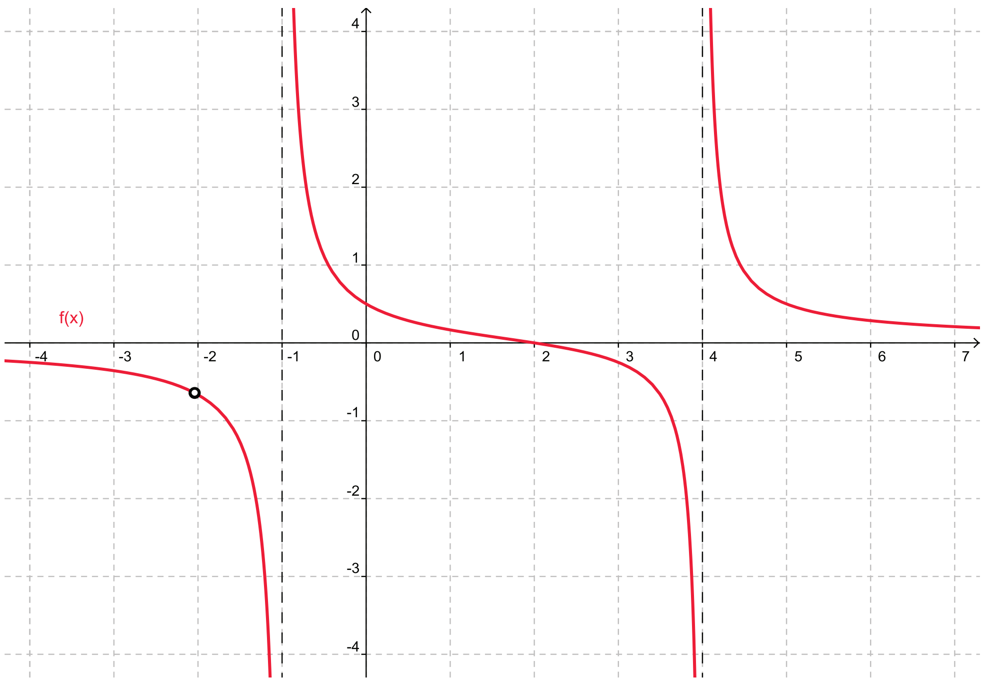
és

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0} f(x) = -\infty.$$

Az $f(x)$ valódi törtfüggvény, tehát

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Az $f(x)$ grafikonján a hézagpontot nullkör jelöli:



8.14. ábra

8.4.16. Példa
Vázoljuk a $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
A $g(x)$ olyan áltörtfüggvény, ahol megegyezik a számlálóban lévő és a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a nevezőt:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$$

Az $x_0 = 0$ kétszeres zérushely, $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$ pedig egyszeres pólushelyek, továbbá

$$\lim_{x\to-1-0} g(x) = \lim_{x\to1+0} g(x) = +\infty,$$

illetve

$$\lim_{x\to-1+0} g(x) = \lim_{x\to1-0} g(x) = -\infty.$$

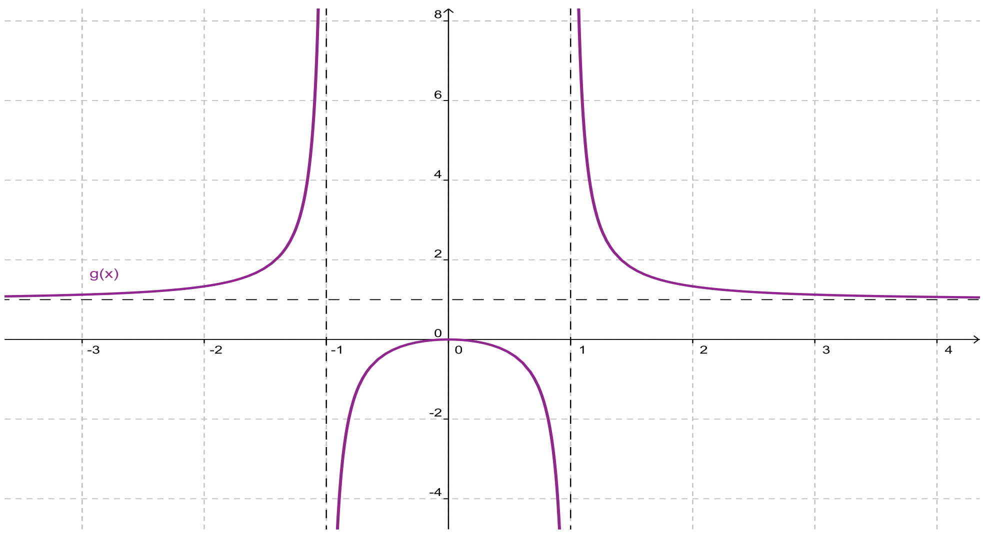
A függvénynek nincs hézagpontja. Bontsuk fel a $g(x)$ áltört függvényt (8.7)-nek megfelelően:

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1},$$

azaz

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 1.$$

Az $y = 1$ egyenes a függvény aszimptotája, amelyet a függvény görbéje nem metsz. A $g(x)$ függvény grafikonja:



8.15. ábra

8.4.17. Példa

Vázoljuk a $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ függvény grafikonját!

Megoldás:

A $h(x)$ olyan áltörtfüggvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma eggyel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a számlálót:

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x},$$

azaz $x_0 = 1$ és $x_1 = -1$ egyszeres zérushelyek, $x_2 = 0$ pedig egyszeres pólushely, továbbá

$$\lim_{x\to 0-0} h(x) = +\infty,$$

illetve

$$\lim_{x\to 0+0} h(x) = -\infty.$$

A függvénynek nincs hézagpontja. Bontsuk fel a $h(x)$ áltört függvényt (8.7)-nek megfelelően:

$$h(x) = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x},$$

azaz

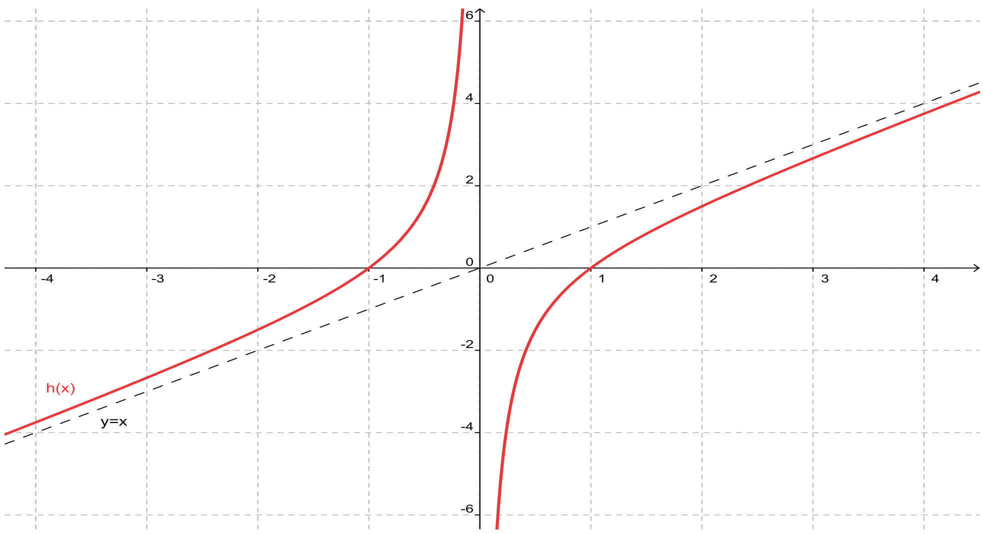
$$\lim_{x\to +\infty} h(x) = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty,$$

és

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} x = -\infty.$$

Az $y = x$ egyenes a függvény aszimptotája.

A $h(x)$ függvény grafikonja:



8.16. ábra

8.4.18. Példa
Vázoljuk a $g(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6}$ függvény grafikonját!

Megoldás:
Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt is:

$$g(x) = \frac{x^4 - x^3 - 8x^2 + 12x}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6} = \frac{x(x+3)(x-2)^2}{2(x+1)(x+3)(x-1)},$$

azaz $x_0 = -3$ hézagpont, $x_1 = 0$ egyszeres zérushely, $x_2 = 2$ kétszeres zérushely, $x_3 = -1$ és $x_4 = 1$ pedig egyszeres pólushelyek, továbbá

$$\lim_{x \to -1-0} g(x) = \lim_{x \to 1-0} g(x) = -\infty,$$

illetve

$$\lim_{x \to -1+0} g(x) = \lim_{x \to 1+0} g(x) = +\infty.$$

Bontsuk fel a $g(x)$ áltört függvényt (8.7)-nek megfelelően:

$$g(x) = \frac{1}{2}x - 2 + \frac{11x + 5x^2 - 12}{2\,(x-1)\,(x+1)\,(x+3)},$$

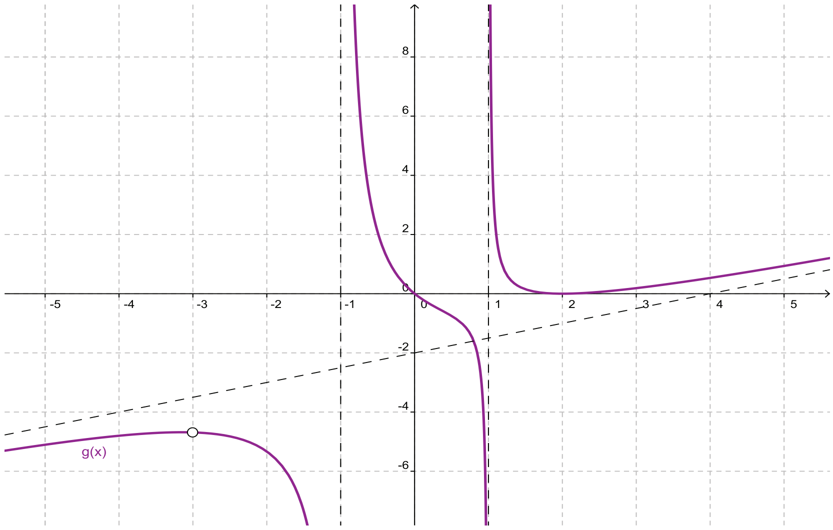
azaz

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = -\infty.$$

Az $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ egyenes a függvény aszimptotája. A hézagpontot nullkör jelöli a függvény grafikonján:



8.17. ábra

8.4.19. Példa

Vázoljuk az $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{(x+1)^2}$ függvény grafikonját!

Megoldás:

Az $f(x)$ olyan áltörtfüggvény, ahol a számlálóban lévő polinom fokszáma kettővel nagyobb, mint a nevezőben lévő polinom fokszáma. Alakítsuk szorzattá a számlálót:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x+1)^2}$$

Az $f(x)$ függvénynek $x_0 = 1$ egyszeres zérushelye, $x_1 = -1$ pedig egyszeres póIushely, mert az $(x+1)$ gyöktényező a számlálóban és a nevezőben is megtalálható, de a nevezőben eggyel nagyobb kitevőn, mint a számlálóban. Továbbá:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to -1+0} f(x) = -\infty.$$

Bontsuk fel az $f(x)$ áltört függvényt (8.7)-nek megfelelően:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{(x+1)^2} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4}{x+1},$$

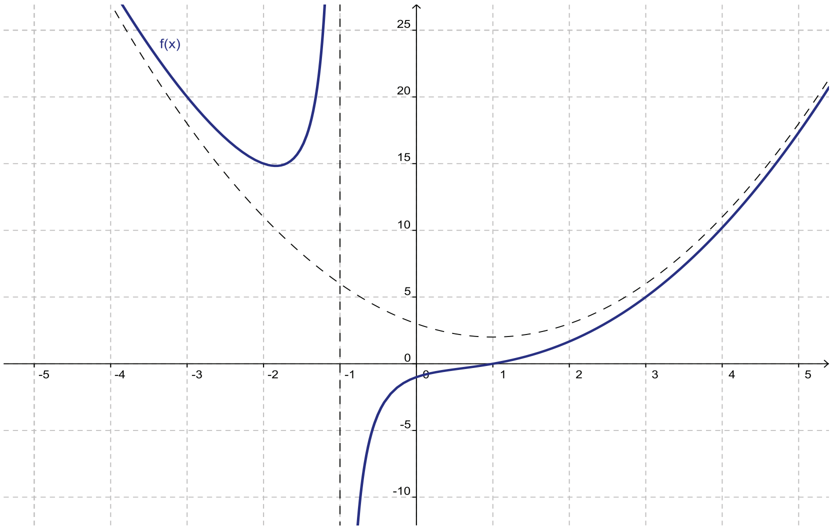
azaz

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x^2 - 2x + 3) = +\infty,$$

és

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (x^2 - 2x + 3) = +\infty.$$

Az $y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ parabola a függvény aszimptotája.



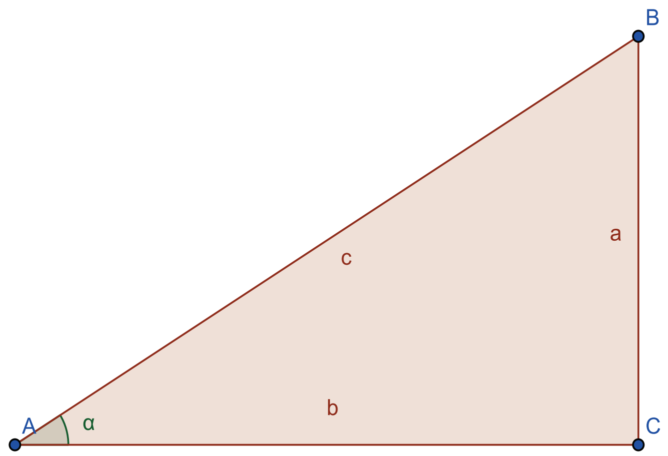
8.18. ábra

8.5 Trigonometrikus függvények

A trigonometrikus függvények (szögfüggvények) eredetileg egy derékszögű háromszög egyik szögének és két oldalának hányadosa közötti összefüggést írják le.

8.5.1. Definíció (trigonometrikus függvények)
Vegyünk fel egy tetszőleges ABC derékszögű háromszöget az euklideszi síkon, melynek A csúcspontjában mérhető az α szög. A háromszög oldalai a következők:

- *az átfogó a derékszöggel szemben található (leghosszabb) oldal (c-vel jelöltük),*
- *a szöggel szembeni oldal az α szöggel átellenes oldal (a jelöli),*
- *a szög melletti oldal pedig az α szög mellett lévő oldal (b jelöli).*



8.19. ábra

A vizsgált háromszög az euklideszi síkban fekszik, tehát a háromszög belső szögeinek összege π radián (vagy 180°) és a két nem derékszögű szöge nulla és $\frac{\pi}{2}$ radián közötti értéket vesz fel. A derékszögű háromszögek esetén a szögfüggvények csak ebben a tartományban értelmezhetők. Tekintsük a hat alapvető trigonometrikus függvényt:

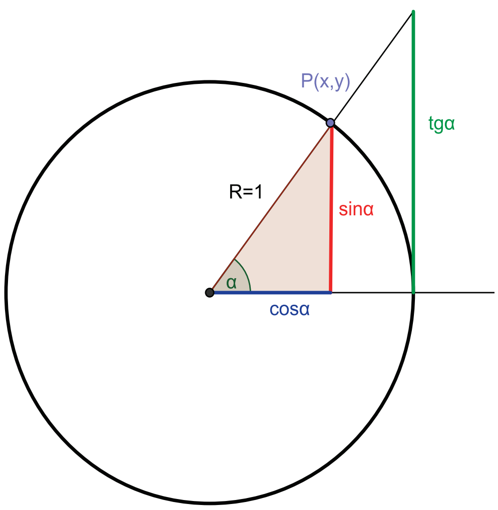
- *szinusz:*

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}$$

- *koszinusz:*
$$\cos\alpha = \frac{a}{c}$$
- *tangens:*
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$
- *kotangens:*
$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{a}{b}$$
- *szekáns:*
$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{c}{a}$$
- *koszekáns:*
$$\mathrm{csc}\alpha = \frac{c}{b}$$

A fenti hat szögfüggvény az egységsugarú kör segítségével is bevezethető. Ez a definíció lehetővé teszi, hogy a szögfüggvényeket kiterjesszük az összes pozitív és negatív szögre (valós értékre).

8.5.2. Definíció (trigonometrikus függvények)
Vegyünk fel a derékszögű koordináta-rendszerben egy origó középpontú egységsugarú kört. Az α szög csúcsa legyen az origóban, a nyugvó szögszár pedig essen egybe az x tengely pozitív felével. A mozgó szár a kört a $P(x, y)$ pontban metszi. A trigonometrikus függvényeket a $P(x, y)$ pont koordinátáival fejezzük ki:



8.20. ábra

- *szinusz:*
$$\sin\alpha = y$$
- *koszinusz:*
$$\cos\alpha = x$$
- *tangens:*
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$
- *kotangens:*
$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$
- *szekáns:*
$$\mathrm{sec}\alpha = \frac{1}{x}$$
- *koszekáns:*
$$\mathrm{csc}\alpha = \frac{1}{y}$$

8.5.3. Megjegyzés
Az új definíciók hegyesszögek esetén ugyanazt az értéket adják, mint a régiek.

8.5.4. Megjegyzés
A korszerűbb definíciók a szögfüggvényeket végtelen sorként vagy bizonyos differenciálegyenletek megoldásaként határozzák meg megengedve tetszőleges pozitív és negatív argumentumot, sőt komplex számot is. A 12. fejezetben ezzel a megadással is találkozhat az olvasó.

8.5.5. Megjegyzés
Érvényesek az alábbi összefüggések (azokra a szögekre, amelyekre értelmesek):

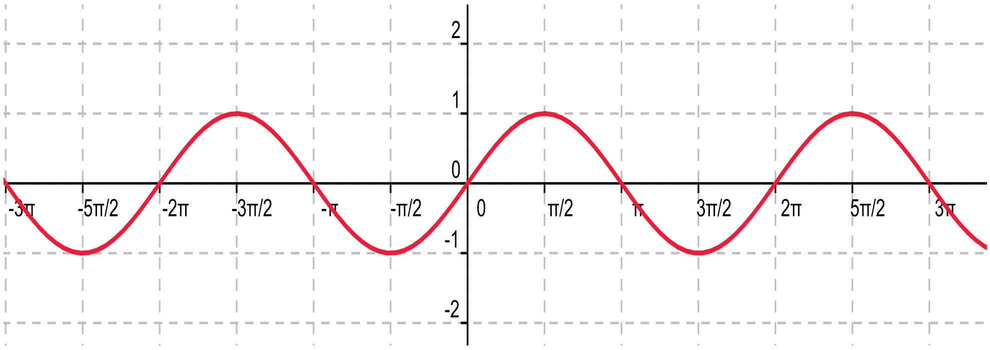
$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, & \mathrm{ctg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}, \\ \sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha}, & \csc\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha}. \end{aligned}$$

A trigonometrikus függvények grafikonja

1. A szinusz függvény ($f(x) = \sin x$)

Értelmezési tartomány:	$-\infty < x < \infty$
Értékkészlet:	$-1 \leq y \leq 1$
Periódus:	2π
Zérushelyek:	$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
A függvény páratlan:	$\sin(-x) = -\sin x$

Grafikonja:

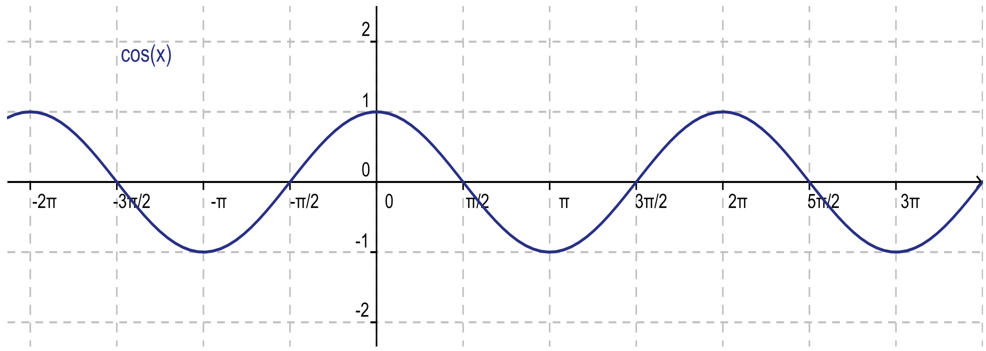


8.21. ábra

2. A koszinusz függvény ($f(x) = \cos x$)

Értelmezési tartomány:	$-\infty < x < \infty$
Értékkészlet:	$-1 \leq y \leq 1$
Periódus:	2π
Zérushelyek:	$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
A függvény páros:	$\cos(-x) = \cos x$

Grafikonja:

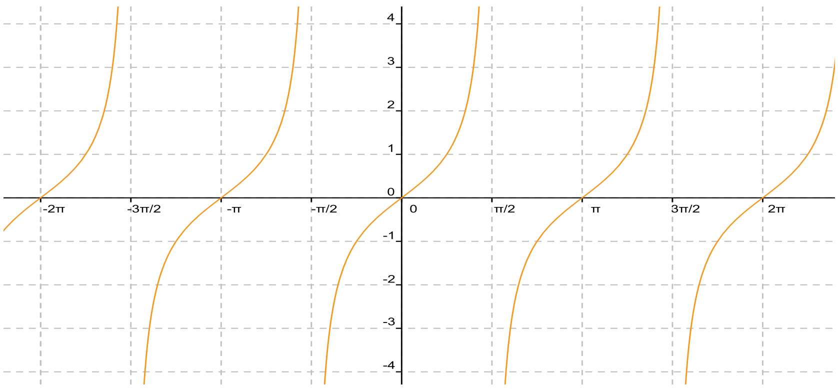


8.22. ábra

3. A tangens függvény ($f(x) =$tg$x$)

Értelmezési tartomány:	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
Értékkészlet:	$-\infty \leq y \leq \infty$
Periódus:	π
Zérushelyek:	$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
A függvény páratlan:	tg$(-x) =$-tg$x$

Grafikonja:

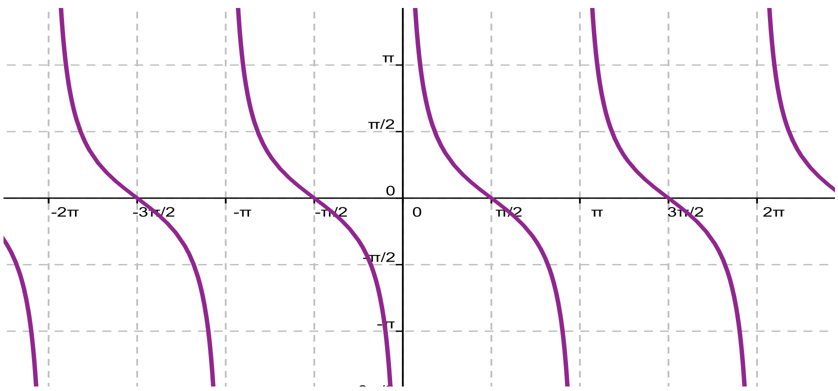


8.23. ábra

4. A kotangens függvény ($f(x) =$ ctg$x$)

Értelmezési tartomány:	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Értékkészlet:	$-\infty \leq y \leq \infty$
Periódus:	π
Zérushelyek:	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
A függvény páratlan:	ctg$(-x) =$-ctg$x$

Grafikonja:

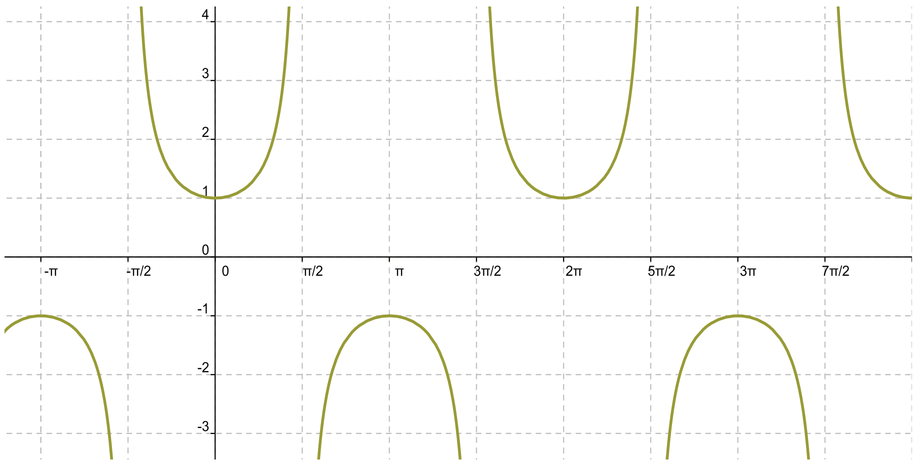


8.24. ábra

5. A szekáns függvény ($f(x) = \sec x$)

Értelmezési tartomány:	$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
Értékkészlet:	$y \leq -1 \quad \text{és} \quad y \geq 1$
Periódus:	2π
A függvény páros:	$\sec(-x) = \sec x$

Grafikonja:

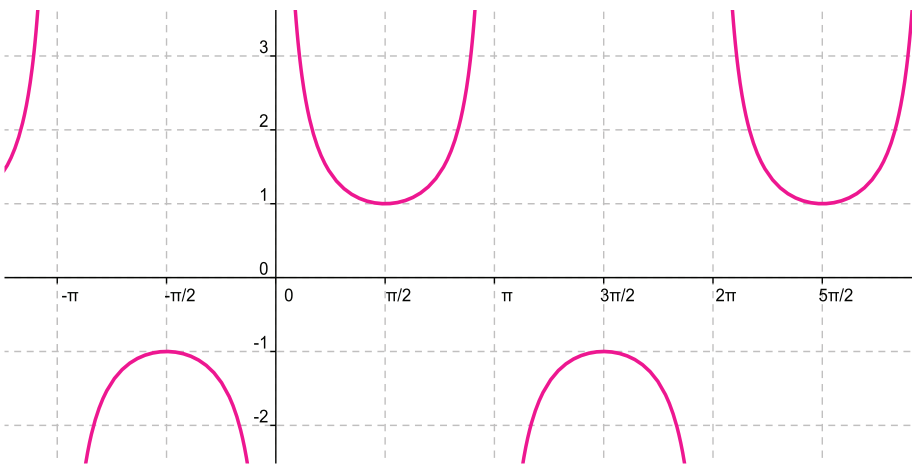


8.25. ábra

6. A koszekáns függvény

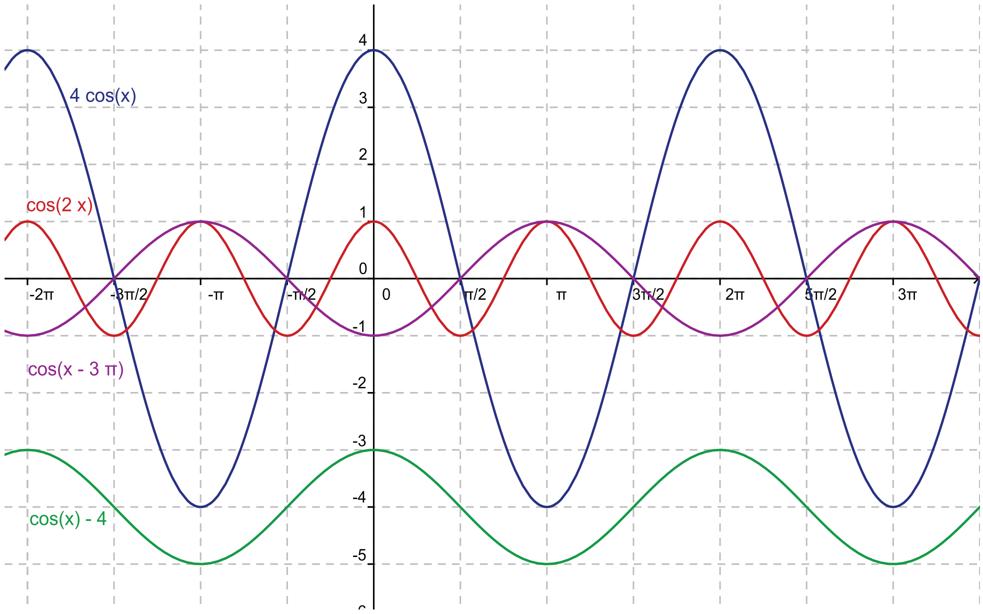
Értelmezési tartomány:	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Értékkészlet:	$y \leq -1 \quad \text{és} \quad y \geq 1$
Periódus:	2π
A függvény páratlan:	$\csc(-x) = -\csc x$

Grafikonja:



8.26. ábra

8.5.6. Példa Vázoljuk közös koordináta-rendszerben az $f(x) = 4\cos x$, $g(x) = \cos 2x$, $h(x) = \cos(x - 3\pi)$ és a $l(x) = \cos x - 4$ függvényeket!



8.27. ábra

Trigonometrikus azonosságok

Érvényesek az alábbi, leggyakrabban előforduló azonosságok és addíciós tételek:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
2. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,
3. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
4. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$,
5. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,
6. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$,
7. $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$,
8. $\sin x \sin y = \dfrac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$,

9. $\sin x \cos y = \dfrac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$,

10. $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$,

11. $\mathrm{tg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 \mp \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}$,

12. $\mathrm{ctg}(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{ctg}x \cdot \mathrm{ctg}y \mp 1}{\mathrm{ctg}y \pm \mathrm{ctg}x}$.

8.5.7. Példa
Alakítsuk egyetlen szinusz-rezgéssé, azaz $C\sin(\alpha+\varphi)$ alakúvá az

$$f(x) = A\cos\alpha + B\sin\alpha$$

alakú kifejezést!

Megoldás:
Az addíciós tétel alkalmazásával:

$$C\sin(\alpha+\varphi) = C(\sin\alpha\cdot\cos\varphi+\cos\alpha\cdot\sin\varphi) = (C\sin\varphi)\cos\alpha+(C\cos\varphi)\sin\alpha.$$

Továbbá az

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = (C\sin\varphi)\cos\alpha + (C\cos\varphi)\sin\alpha$$

egyenlőségből adódik, hogy

$$C\sin\varphi = A \qquad \text{és} \qquad C\cos\varphi = B,$$

ahonnan

$$A^2 + B^2 = C^2,$$

azaz

$$C = \sqrt{A^2+B^2}.$$

A $\varphi \in [0, 2\pi]$ fázisszög a

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$$

egyenletrendszerből határozható meg.

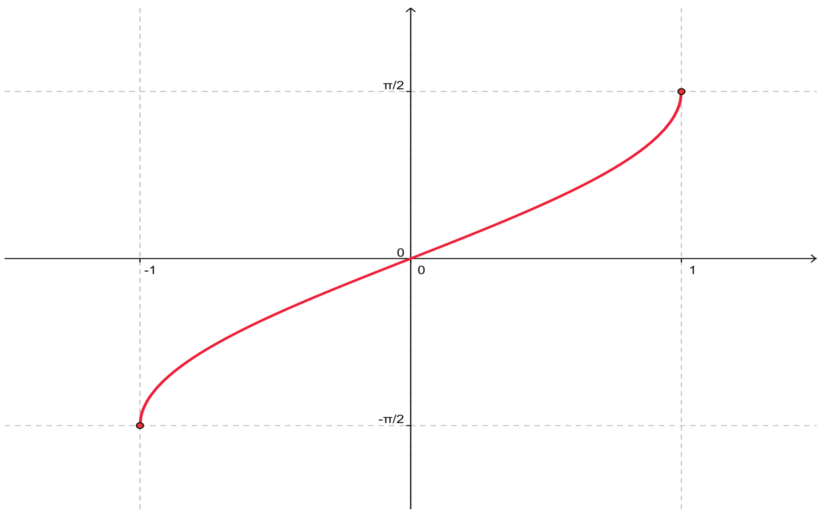
8.6 Arkuszfüggvények

Az arkuszfüggvények a trigonometrikus függvények inverzei. A trigonometrikus függvények a teljes értelmezési tartományukon nem invertálhatóak, mert nem injektívek. Azonban, az értelmezési tartomány alkalmas, megállapodás szerinti leszűkítésével már léteznek az inverz függvények.

8.6.1. Definíció ($\arcsin x$)
Az $y = \arcsin x$ *függvény a* $[-1, 1]$ *értelmezési tartomány minden pontjához a* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *intervallum egy (radiánban kifejezett) értékét rendeli, amelyre*

$$\sin y = x.$$

Grafikonja:



8.28. ábra

8.6.2. Megjegyzés
Az $f(x) = \arcsin x$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon folytonos és szigorúan monoton növekvő. A függvény páratlan, azaz:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

8.6.3. Példa
Határozzuk meg az $\arcsin \frac{1}{2}$ kifejezés pontos értékét!

Megoldás:
Az $\arcsin \frac{1}{2}$ kifejezés azt a $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ közötti szöget jelenti, amelynek szinusza

$\frac{1}{2}$, tehát

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},$$

mert

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

8.6.4. Példa

Vázoljuk függvénytranszformáció segítségével az $l(x)=\pi-2\arcsin(x-3)$ függvény grafikonját!

Megoldás:

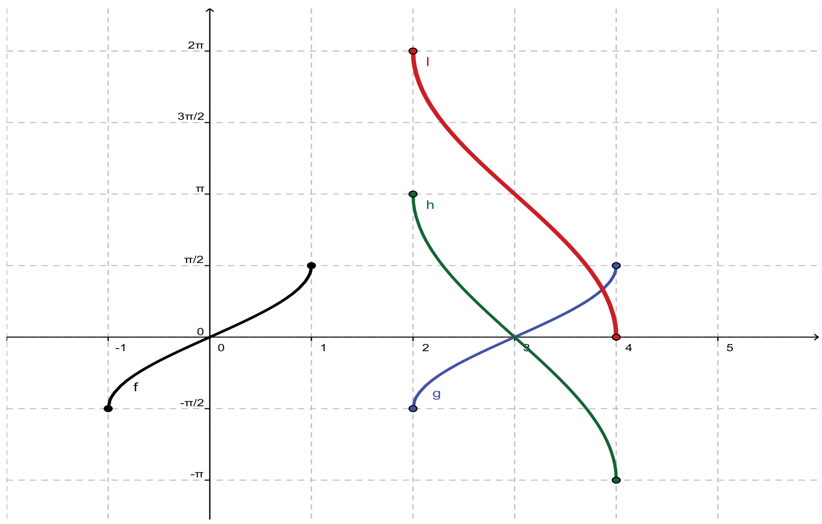
Az ábrázolás első lépésében vázoljuk az alapfüggvény, az $f(x)=\arcsin x$ függvény grafikonját! A második lépés a $g(x)=\arcsin(x-3)$ értelemzési tartományának meghatározása:

$$-1\leq x-3\leq 1,$$

azaz

$$2\leq x\leq 4,$$

ezt követően pedig a $g(x)=\arcsin(x-3)$ grafikonjának vázolása. A következő lépésben előállítjuk a $h(x)=-2\arcsin(x-3)$ függvény grafikonját. $h(x)$ úgy kapható meg $g(x)$-ből kiindulva, hogy a $g(x)$ függvény grafikonját kétszeresére nyújtjuk, majd tükrözzük az x-tengelyre. Az utolsó transzformációs lépésben $h(x)$ grafikonját π-vel eltoljuk az y-tengely mentén pozitív irányba, így megkapjuk az $l(x)$ függvény grafikonját.

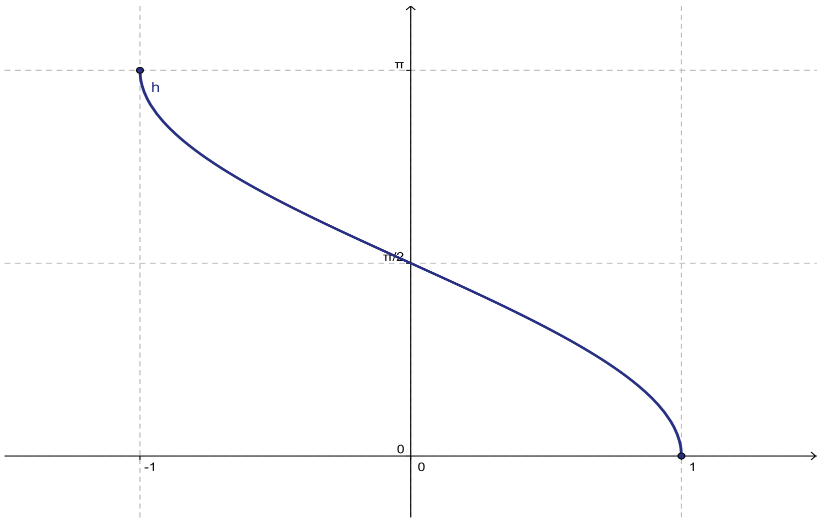


8.29. ábra

8.6.5. Definíció ($\arccos x$)
Az $y = \arccos x$ függvény a $[-1, 1]$ értelmezési tartomány minden pontjához a $[0, \pi]$ intervallum egy (radiánban kifejezett) értékét rendeli, amelyre

$$\cos y = x.$$

Grafikonja:



8.30. ábra

8.6.6. Megjegyzés
A $h(x) = \arccos x$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon folytonos és szigorúan monoton csökkenő. Nem páros és nem páratlan.

8.6.7. Példa
Határozzuk meg az $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ kifejezés pontos értékét!

Megoldás:
Az $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ kifejezés azt a 0 és π közötti szöget jelenti, amelynek koszinusza $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, tehát

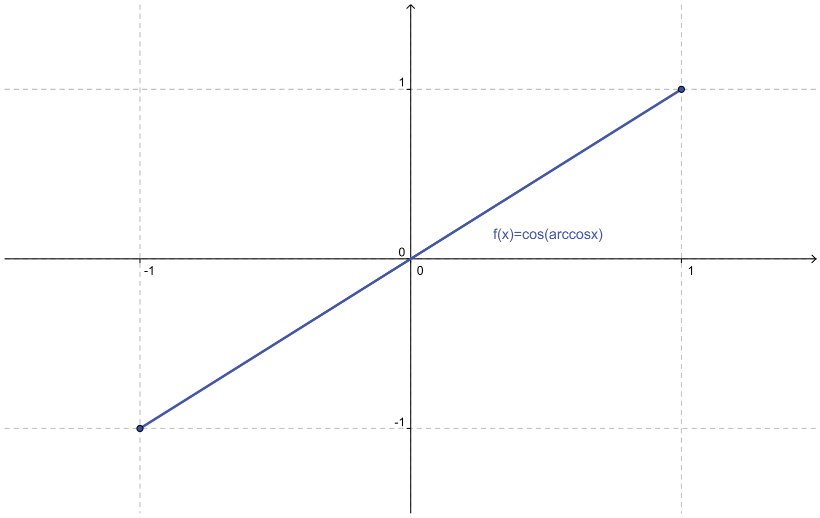
$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6},$$

mert

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

8.6.8. Példa
Írjuk fel a legegyszerűbb alakban az $f(x) = \cos(\arccos x)$ függvényt, majd vázoljuk a grafikonját!

Megoldás:
$D_f = [-1, 1]$ és $f(x) = \cos(\arccos x) = x$. A függvény grafikonja:



8.31. ábra

8.6.9. Példa
Írjuk fel a legegyszerűbb alakban az $f(x) = \arccos(\cos x)$ függvényt, majd vázoljuk a grafikonját!

Megoldás:
A vázlat elkészítéséhez vizsgáljuk meg először $f(x)$ értelmezési tartományát és értékkészletét! Könnyen látható, hogy $D_f = \mathbb{R}$. Ismert, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén

$$-1 \le \cos x \le 1,$$

így

$$0 \le \arccos(\cos x) \le \pi,$$

azaz $R_f = [0, \pi]$. Továbbá az

$$y = \arccos(\cos x)$$

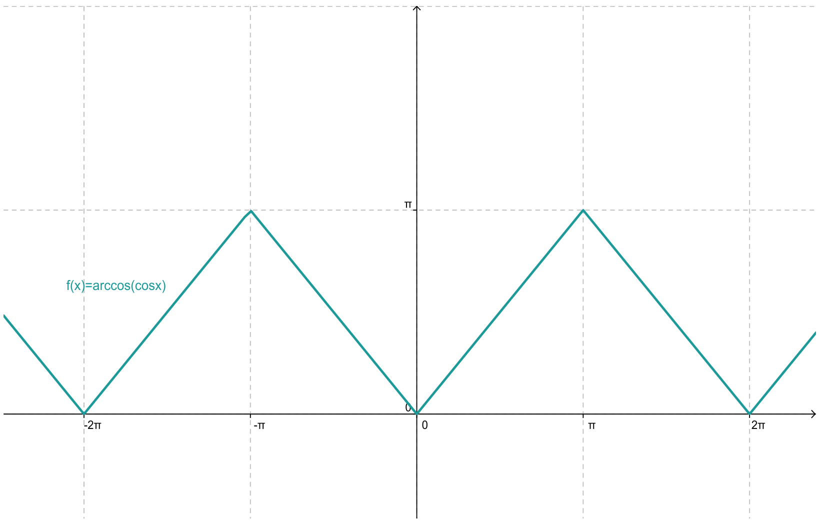
hozzárendelésből adódik, hogy

$$\cos y = \cos x,$$

tehát

$$y = \pm x + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A keresett grafikon:



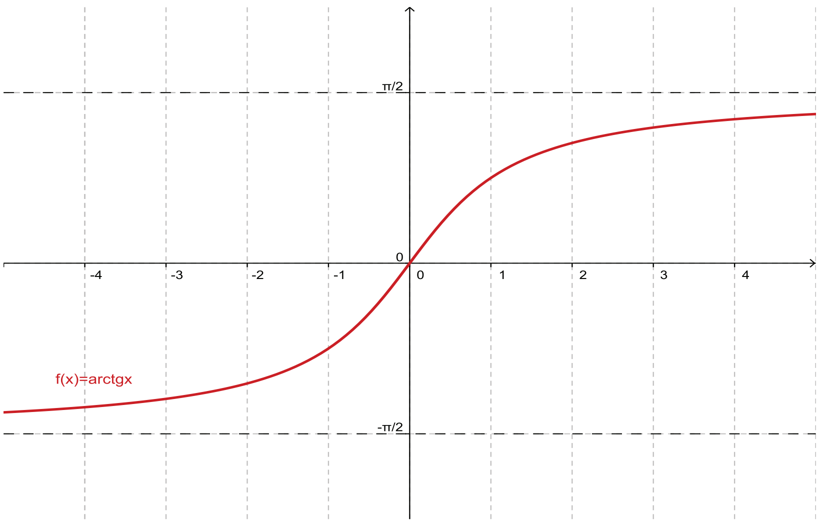
8.32. ábra

8.6.10. Definíció (arctg x)

Az $y = \operatorname{arctg} x$ *függvény a* $(-\infty, \infty)$ *értelmezési tartomány minden pontjához a* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *intervallum egy (radiánban kifejezett) értékét rendeli, amelyre*

$$\operatorname{tg} y = x.$$

Grafikonja:



8.33. ábra

8.6.11. Megjegyzés

Az $f(x) = \text{arctg}x$ függvény $\mathbb{R}$-en folytonos és szigorúan monoton növekvő. Továbbá:

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}x = \frac{\pi}{2} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} \text{arctg}x = -\frac{\pi}{2}.$$

A függvény páratlan, azaz:

$$\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}x.$$

8.6.12. Példa

Határozzuk meg az arctg(-1) kifejezés pontos értékét!

Megoldás:

$$\text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},$$

mert

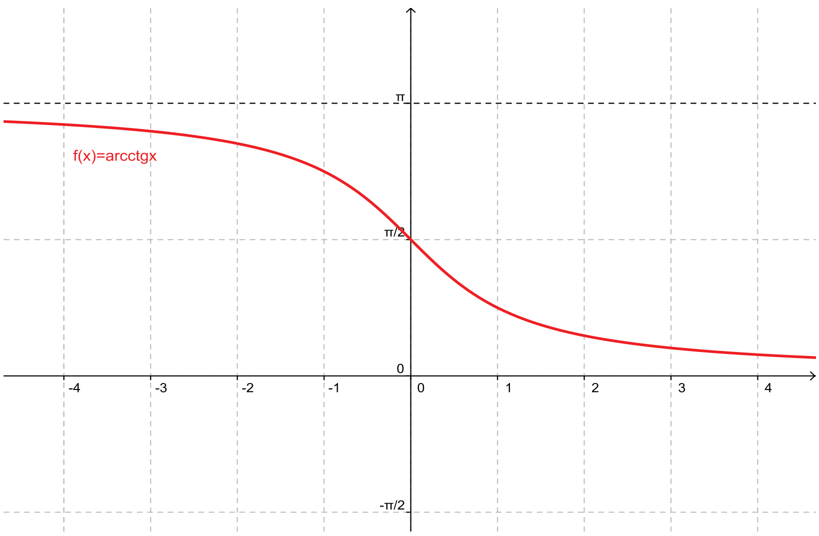
$$\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

8.6.13. Definíció (arcctg x)

Az $y = \text{arcctg}\ x$ függvény a $(-\infty, \infty)$ értelmezési tartomány minden pontjához a $(0, \pi)$ intervallum egy (radiánban kifejezett) értékét rendeli, amelyre

$$\text{ctg}y = x.$$

Grafikonja:



8.34. ábra

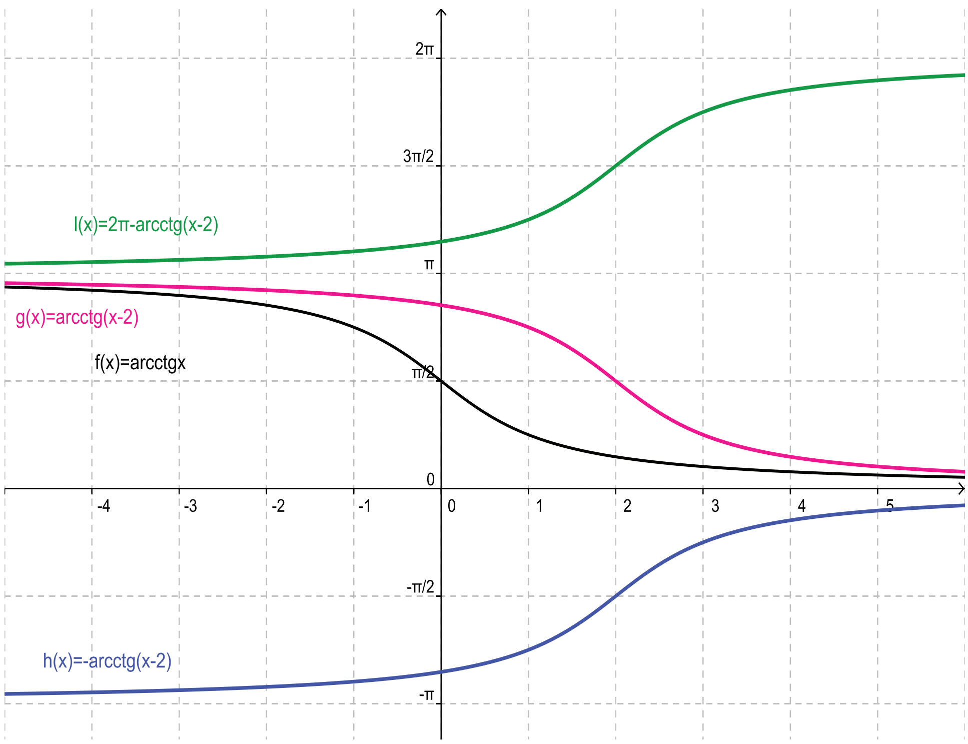
8.6.14. Megjegyzés
Az $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ függvény $\mathbb{R}$-en folytonos és szigorúan monoton csökkenő. Továbbá:
$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcctg} x = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

8.6.15. Példa
Határozzuk meg az arcctg1 kifejezés pontos értékét!

Megoldás:
$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$
mert
$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

8.6.16. Példa
Vázoljuk az $l(x) = 2\pi - \operatorname{arcctg}(x-2)$ függvény grafikonját!

Megoldás:



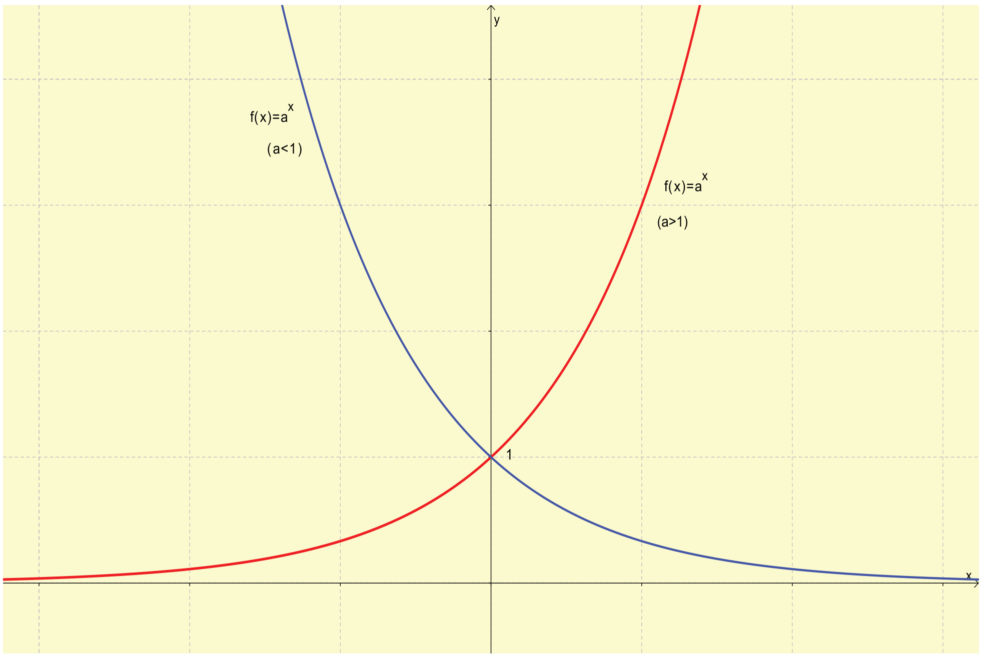
8.35. ábra

8.7 Az exponenciális függvény

8.7.1. Definíció (exponenciális függvény)

Az $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$ hozzárendeléssel adott függvényt a alapú exponenciális függvénynek nevezzük.

Grafikonja:



8.36. ábra

8.7.2. Megjegyzés

Az $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, függvény értelmezési tartománya az $\mathbb{R}$ halmaz, értékkészlete pedig $\mathbb{R}^+$. A függvény a teljes értelmezési tartományában folytonos. Ha $a > 1$, akkor $f(x)$ szigorúan monoton növekvő, míg $a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő a függvény. Ha $a > 1$, akkor

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty;$$

illetve $0 < a < 1$ esetén:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

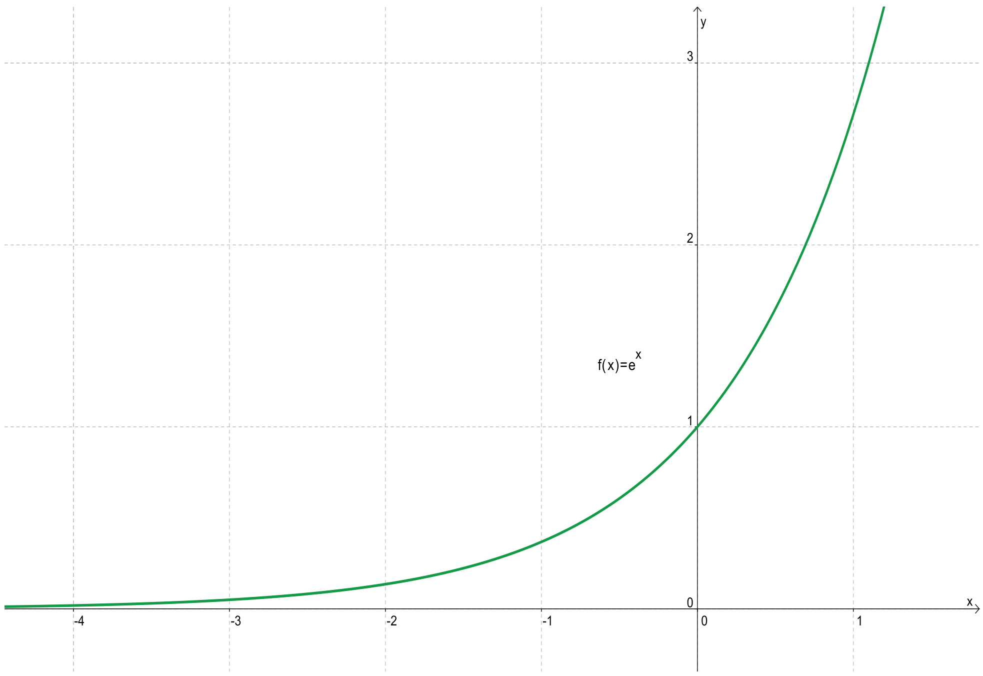
Érvényesek az alábbi, gyakran előforduló azonosságok ($a, b > 0$, $a, b \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$) :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^x \cdot b^x = (ab)^x.$$

8.7.3. Megjegyzés
Ha az exponenciális függvény alapja az e szám (5.4.11. Tétel), akkor jelölése:

$$f(x) = e^x.$$

Grafikonja:



8.37. ábra

8.8 A logaritmus függvény

Az exponenciális függvények szigorú monotonitásából következik invertálhatóságuk.

8.8.1. Definíció (logaritmus függvény)
Az $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$ *függvény*

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

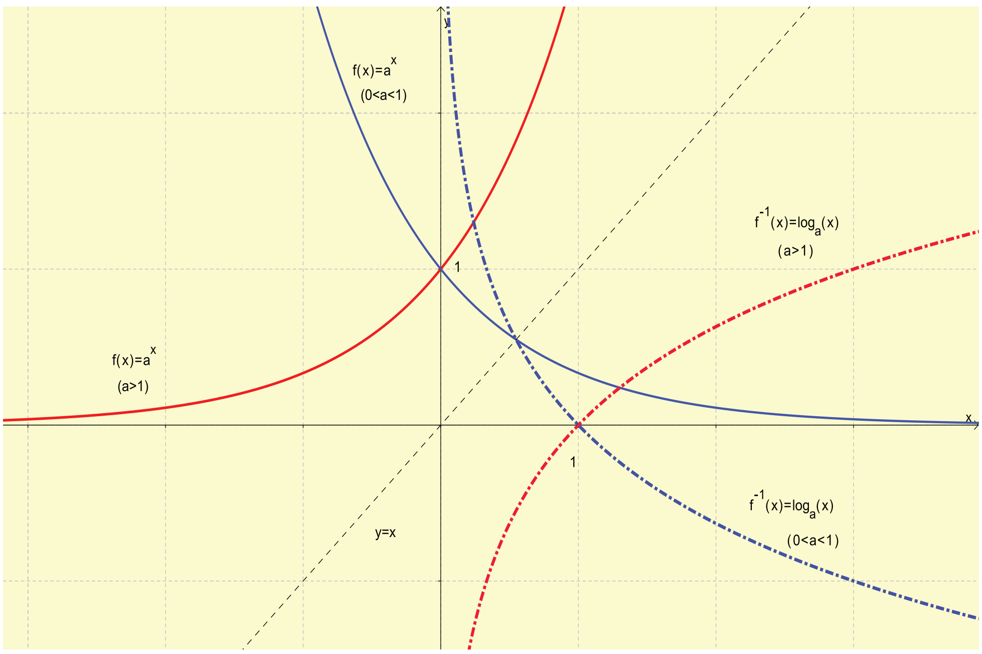
inverzét a alapú logaritmus függvénynek nevezzük. Ha $a = 10$, *akkor az* $f(x) = \lg x$, *illetve ha* $a = e$, *akkor az* $f(x) = \ln x$ *jelölést alkalmazzuk.*

8.8.2. Megjegyzés
Legyen $y = \log_a x$. A logaritmus értelmezése alapján $a^y = x$, azaz

$$x = a^{\log_a x}, \qquad x > 0.$$

Tehát az $y = f(x) = \log_a x$ függvény úgy is értelmezhető, hogy minden pozitív x-hez hozzárendeljük azt az y kitevőt, amelyre az alapot hatványozva eredményül x-et kapjuk:

$$a^y = x.$$



8.38. ábra

8.8.3. Megjegyzés

Az $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, függvény értelmezési tartománya az $\mathbb{R}^+$ halmaz, értékkészlete pedig az $\mathbb{R}$ halmaz. A függvény a teljes értelmezési tartományában folytonos és nem korlátos. Zérushelye $x = 1$-nél van. $f(x)$ szigorúan monoton növekvő, ha $a > 1$, míg $0 < a < 1$ esetén szigorúan monoton csökkenő a függvény. Ha $a > 1$, akkor

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty;$$

illetve $0 < a < 1$ esetén:

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty.$$

Érvényesek az alábbi azonosságok $(a, b > 0,\ a, b \neq 1,\ x, y \in \mathbb{R}^+)$:

a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,

b) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$,

c) $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$,

d) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

e) A különböző alapú logaritmusok között az alábbi kapcsolat áll fenn: $\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b = \log_b x \cdot \dfrac{1}{\log_b a}$.

8.9 Hiperbolikus függvények

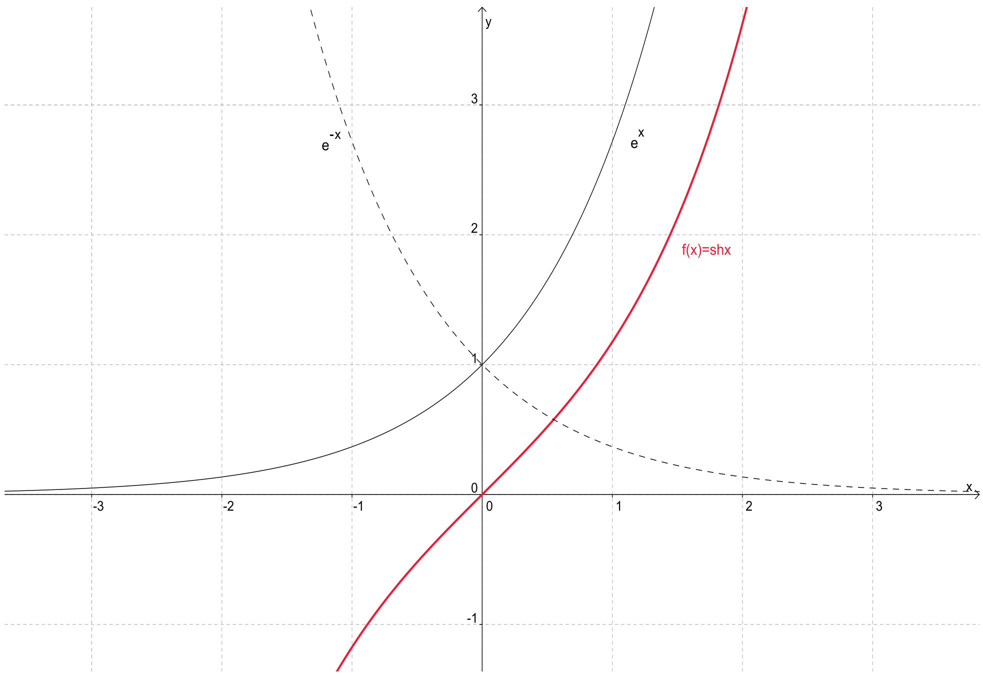
Az e^x és e^{-x} függvények segítségével származtathatók az ún. hiperbolikus függvények.

8.9.1. Definíció (szinusz-hiperbolikusz függvény)
Az

$$\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

függvényt szinusz-hiperbolikusz függvénynek nevezzük.

Grafikonja:



8.39. ábra

Értelmezési tartomány:	$-\infty < x < \infty$
Értékkészlet:	$-\infty < x < \infty$
Zérushely:	$x = 0$
A függvény páratlan:	$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$

A függvény folytonos és szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en. Továbbá:

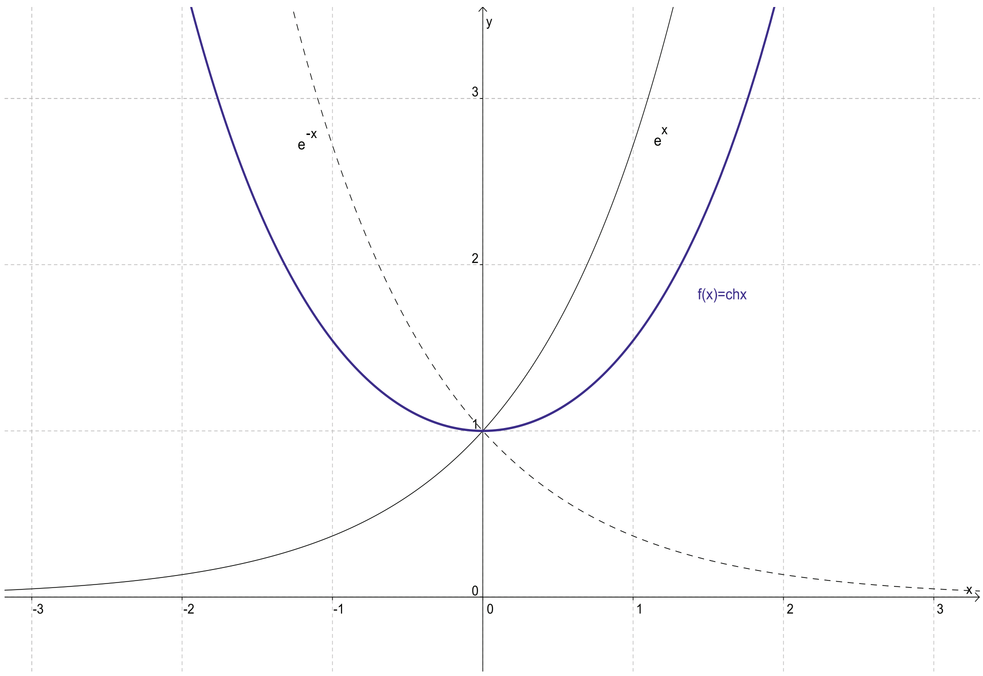
$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty.$$

8.9.2. Definíció (koszinusz-hiperbolikusz függvény)
Az

$$\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

függvényt koszinusz-hiperbolikusz függvénynek nevezzük.

Grafikonja:



8.40. ábra

Értelmezési tartomány:	$-\infty < x < +\infty$
Értékkészlet:	$1 \le x < +\infty$
Zérushelye nincs.	
Szigorúan monoton csökkenő:	$-\infty < x < 0$
Szigorúan monoton növekvő:	$0 < x < +\infty$
A függvény páros:	$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$

A függvény folytonos és alulról korlátos. Továbbá:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty.$$

8.9.3. Megjegyzés
A hiperbolikus függvények egy másik bevezetését és az alábbi azonosságok bizonyítását a 12. fejezetben találja meg a kedves olvasó.

a) $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$,

b) $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$,

c) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$,

d) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$,

e) $2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$,

f) $\operatorname{ch}^2 x = \dfrac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}$,

g) $\operatorname{sh}^2 x = \dfrac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$,

h) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$,

i) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.

8.9.4. Definíció (tangens-hiperbolikusz függvény)
Az

$$\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

függvényt tangens-hiperbolikusz függvénynek nevezzük.

A függvény grafikonja a 8.41. ábrán látható.

Értelmezési tartomány:	$-\infty < x < \infty$
Értékkészlet:	$-1 < x < 1$
Zérushely:	$x = 0$
A függvény páratlan:	$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$

A függvény folytonos, korlátos és szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en. Továbbá:

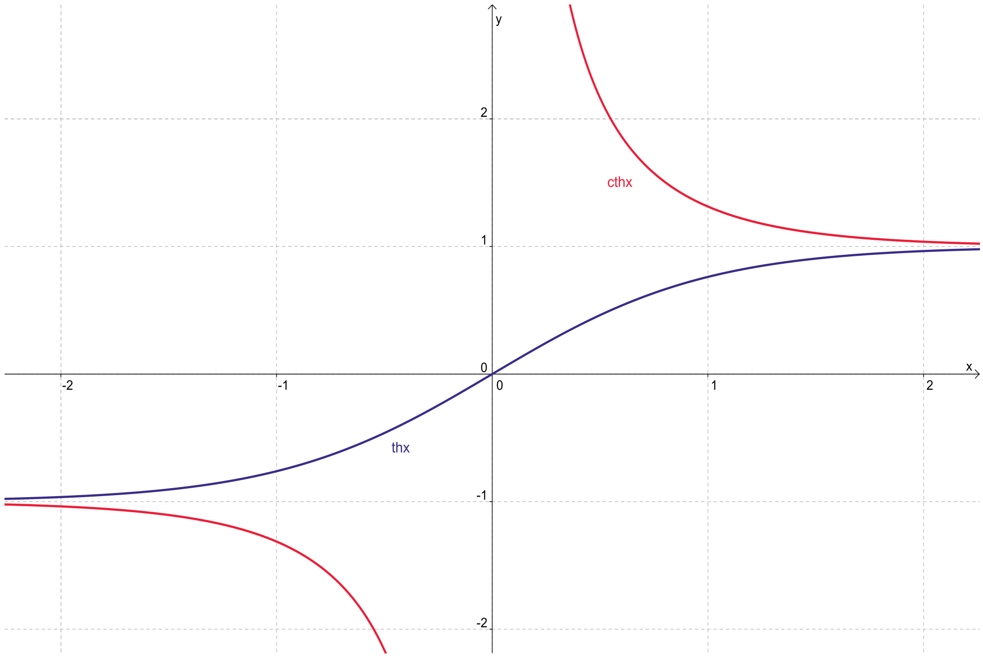
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th} x = -1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1.$$

8.9.5. Definíció (kotangens-hiperbolikusz függvény)
Az

$$\operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

függvényt kotangens-hiperbolikusz függvénynek nevezzük.

Grafikonja:



8.41. ábra

Értelmezési tartomány:	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Értékkészlet:	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
Zérushelye nincs.	
Szigorúan monoton csökkenő:	$-\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty$
A függvény páratlan:	$\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$

A függvény az értelmezési tartományában folytonos. Továbbá:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{cth} x = -1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{cth} x = 1.$$

$$\lim_{x\to 0-0} \operatorname{cth} x = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} \operatorname{cth} x = +\infty.$$

8.10 Area függvények

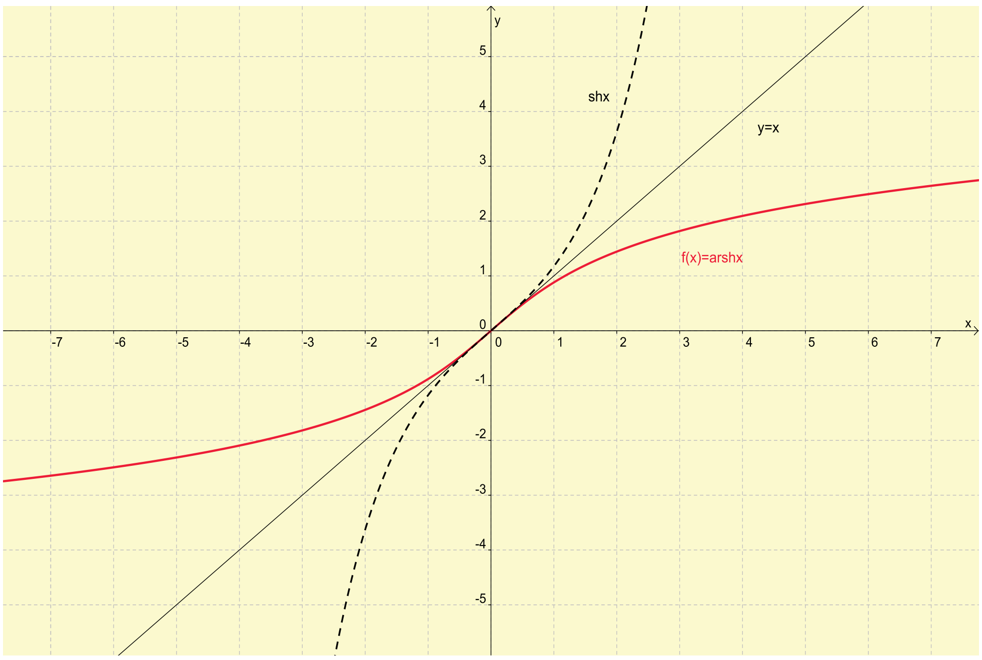
Az area függvények a hiperbolikus függvények inverzei.

8.10.1. Definíció (arsh x)
Az $y = \operatorname{arsh} x$ függvény a $(-\infty, +\infty)$ értelmezési tartomány minden pontjához a $(-\infty, +\infty)$ intervallumnak azt az egy értékét rendeli, amelyre

$$\operatorname{sh} y = x.$$

8.10.2. Megjegyzés
Az $f(x) = \operatorname{arsh} x$ függvény a $\mathbb{R}$-en folytonos és szigorúan monoton növekvő.

Grafikonja:



8.42. ábra

Értelmezési tartomány:	$-\infty < x < \infty$
Értékkészlet:	$-\infty < x < \infty$
Zérushely:	$x = 0$
A függvény páratlan:	$\operatorname{arsh}(-x) = -\operatorname{arsh} x$

Továbbá:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arsh} x = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arsh} x = +\infty.$$

8.10.3. Megjegyzés
A $\operatorname{arsh} x$ függvény definíciója alapján

$$\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = \operatorname{arsh}(\operatorname{sh} x) = x.$$

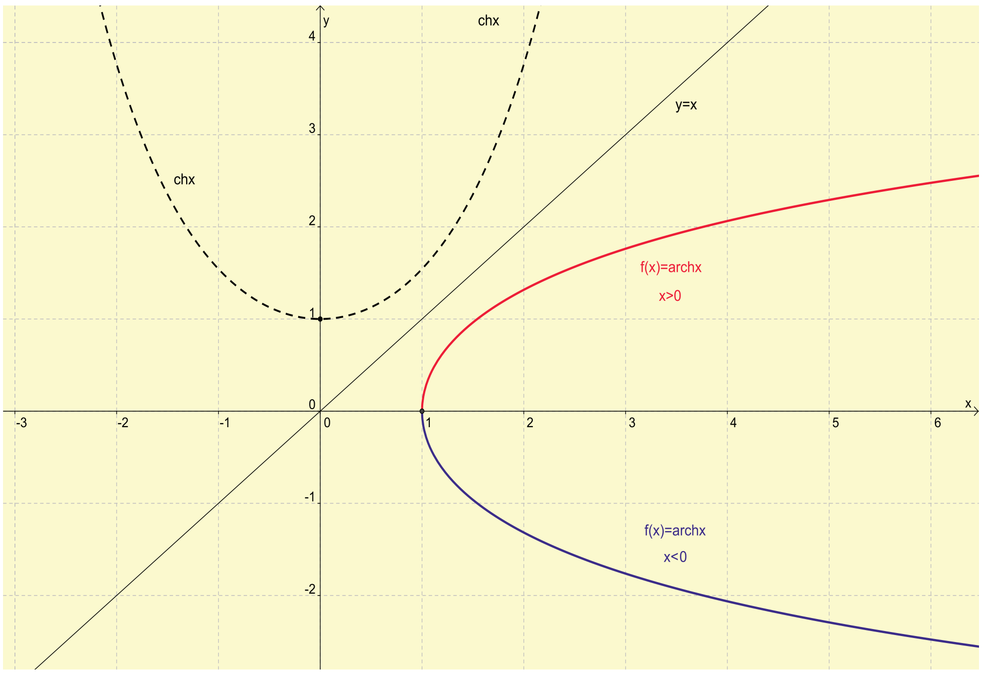
8.10.4. Megjegyzés
A $\operatorname{ch} x$ függvény a $[0, +\infty)$ ill. a $(-\infty, 0]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő ill. szigorúan monoton csökkenő, így a két függvényágnak külön-külön létezik az inverze, a két inverz neve egyaránt area koszinusz-hiperbolikusz függvény.

8.10.5. Definíció (arch x)
Az $y = \operatorname{arch} x$ függvény a $[1, +\infty)$ értelmezési tartomány minden pontjához a $[0, +\infty)$ vagy a $(-\infty, 0]$ intervallumnak azt az egy értékét rendeli, amelyre

$$\operatorname{ch} y = x.$$

8.10.6. Megjegyzés
Az $f(x) = \operatorname{arch} x$ függvény a $[1, +\infty)$ intervallumon folytonos.

Grafikonja:



8.43. ábra

Értelmezési tartomány:	$1 \leq x < +\infty$
Értékkészlet:	$0 \leq x < +\infty$ ill. $-\infty < x \leq 0$
Zérushely:	$x = 1$

Továbbá:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arch} x = +\infty, \qquad \text{ha} \quad x > 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arch} x = -\infty, \qquad \text{ha} \quad x < 0.$$

8.10.7. Megjegyzés
A arch x függvény definíciója alapján

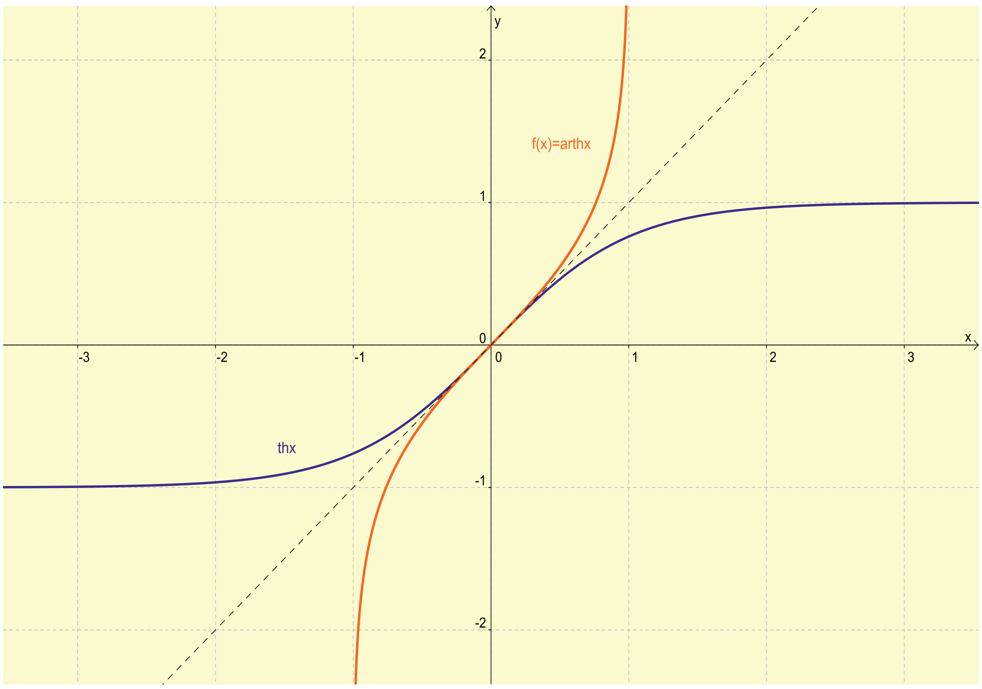
$$\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = \operatorname{arch}(\operatorname{ch} x) = x, \qquad \text{ha} \quad x \geq 1.$$

8.10.8. Definíció ($\operatorname{arth} x$)
Az $y = \operatorname{arth} x$ *függvény a* $(-1, 1)$ *értelmezési tartomány minden pontjához a* $(-\infty, +\infty)$ *intervallumnak azt az egy értékét rendeli, amelyre*

$$\operatorname{th} y = x.$$

8.10.9. Megjegyzés
Az $f(x) = \operatorname{arth} x$ függvény az értelmezési tartományában folytonos és szigorúan monoton növekvő.

Grafikonja:



8.44. ábra

Értelmezési tartomány:	$-1 < x < 1$
Értékkészlet:	$-\infty < x < \infty$
Zérushely:	$x = 0$
A függvény páratlan:	$\operatorname{arth}(-x) = -\operatorname{arth} x$

Továbbá:

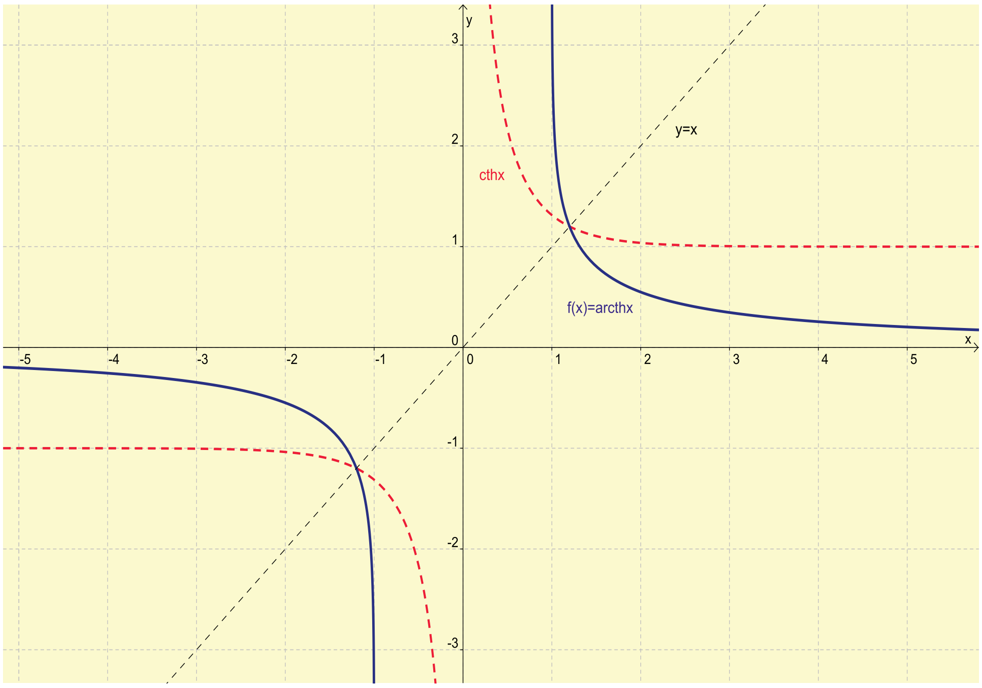
$$\lim_{x \to -1+0} \operatorname{arth} x = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to 1-0} \operatorname{arth} x = +\infty.$$

8.10.10. Definíció ($\operatorname{arcth} x$)
Az $y = \operatorname{arcth} x$ *függvény az* $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ *értelmezési tartomány minden pontjához az* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *halmaznak azt az egy értékét rendeli, amelyre*

$$\operatorname{cth} y = x.$$

8.10.11. Megjegyzés
Az $f(x) = \operatorname{arth} x$ függvény az értelmezési tartományában folytonos és szigorúan monoton csökkenő.

Grafikonja:



8.45. ábra

Értelmezési tartomány:	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
Értékkészlet:	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Zérushelye nincs.	
A függvény páratlan:	$\operatorname{arcth}(-x) = -\operatorname{arcth} x$

Továbbá:

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcth} x = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arcth} x = 0,$$

valamint

$$\lim_{x\to-1-0} \operatorname{arcth} x = -\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to1+0} \operatorname{arcth} x = +\infty.$$

8.10.12. Példa
Adjuk meg az $f(x) = \operatorname{arsh} x$ ún. logaritmikus alakját!

Megoldás:
Alkalmazzuk az $y = \operatorname{arsh} x$ jelölést. A 8.9.1. Definíció alapján

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $2e^y$-nal, így az alábbi e^y-ban másodfokú egyenlethez jutunk:

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Azaz:

$$(e^y)_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Mivel $e^y > 0$, így csak az

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

gyök megfelelő. Ahonnan

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

adódik, tehát

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

8.10.13. Megjegyzés
Könnyen megmutatható, hogy

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

ha a $\operatorname{ch} x$, $x > 0$ függvény inverzéről van szó, illetve

$$\operatorname{arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),$$

logaritmikus alak írható fel a $\operatorname{ch} x$, $x < 0$ függvény inverze esetén. Továbbá

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x},$$

és

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

az adott függvényekhez tartozó logaritmikus alakok.

9 Differenciálszámítás

Az egyváltozós valós függvények differenciálszámításának kialakítása a XVII. században kezdődött és Isaac Newton (angol, 1642-1727) valamint Gottfried Leibniz (német, 1646-1716) tudósok nevéhez és munkásságához fűződik.

9.1 A differencia- és differenciálhányados

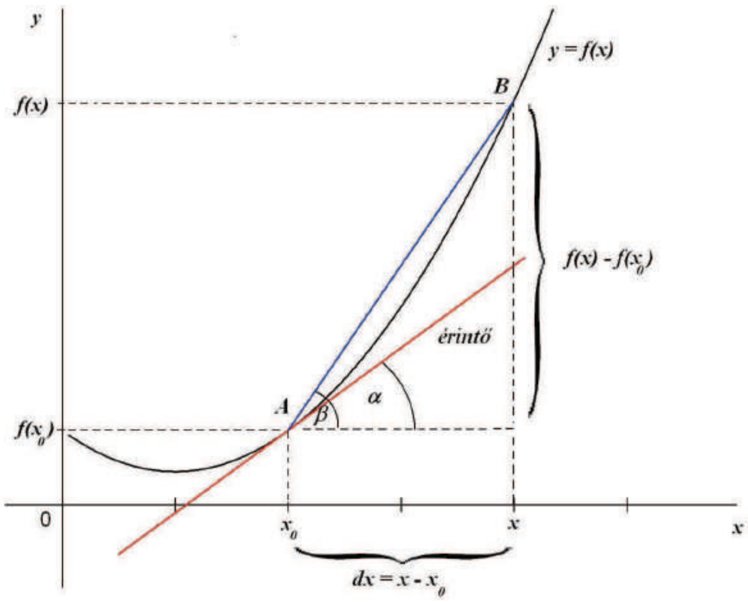
9.1.1. Definíció (differenciahányados)
Az egyváltozós valós $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in (a,b)$ helyhez tartozó differenciahányados-függvényén a

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x, x_0 \in (a,b), \quad x \neq x_0 \tag{9.1}$$

által definiált φ függvényt értjük.

9.1.2. Megjegyzés
A differenciahányados geometriai értelmezése:
Az f függvény görbéjének x_0 és x abszcisszájú pontjait összekötő szelő meredeksége:

$$\text{tg}\beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



9.1. ábra

Az $x_0 \in D_f$ ponthoz az x megválasztásával a szelők egész sokasága rendelhető. Vajon az x_0 ponthoz közelítve létezik-e határértéke az adódó szelők meredekségének? Ha az x pontot változónak tekintjük, akkor a differenciahányados x függvénye, azaz szintén függvény.

9.1.3. Definíció (a differenciálhányados határátmenetes megfogalmazása)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D_f$ helyhez tartozó

$$\varphi(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{9.2}$$

differenciahányados-függvényének létezik véges határértéke x_0-ban:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \tag{9.3}$$

akkor ezt a határértéket az f függvény differenciálhányadosának (vagy deriváltjának) nevezzük az x_0 pontban.
Jelölések:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

9.1.4. Megjegyzés
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 helyen létezik differenciálhányadosa, akkor azt mondjuk, hogy f az x_0 helyen differenciálható.

9.1.5. Megjegyzés
Ha az $f'(x_0)$ derivált egy $I \subset D_f$ intervallum minden x pontjában létezik, akkor azt mondjuk, hogy f differenciálható az I intervallumon.

9.1.6. Megjegyzés
A differenciálhányadosnak fontos geometriai jelentése van. Ha rögzítjük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ görbéjén az A pontot, azaz az x_0 helyet és a B pont a görbén haladva tart az A ponthoz, akkor a szelők, melyeknek iránytangense rendre $\operatorname{tg} \beta_1$, $\operatorname{tg} \beta_2$, ..., $\operatorname{tg} \beta_n$,..., egy határegyeneshez, az A-beli érintőhöz tartanak, amelynek iránytangense $\operatorname{tg}\alpha$. Ekkor nyilván $x \to x_0$ és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha. \tag{9.4}$$

A szelők $\operatorname{tg} \beta_n$ iránytangense tehát az $(x_0, f(x_0))$ ponton áthaladó

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{9.5}$$

egyenes iránytangenséhez tart.
Az arctg függvény folytonossága miatt

$$\beta_n \to \alpha, \qquad \text{ha} \quad x \to x_0.$$

9.1.7. Definíció (függvény pontbeli érintője)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $x_0 \in D_f$ pontban, akkor az

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{9.6}$$

egyenletű egyenest az f függvény $(x_0, f(x_0))$-beli érintőjének nevezzük. Így $f'(x_0)$ az $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintő iránytangense (meredeksége).

A differenciálhányados fogalmára megadható egy másik, úgynevezett törtmentes definíció is.

9.1.8. Megjegyzés
Legyen az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 helyen differenciálható, azaz létezzen a véges

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

határérték. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0.$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \varepsilon(x),$$

amelyből kapjuk, hogy

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$$

és

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

9.1.9. Definíció (a differenciálhányados törtmentes megfogalmazása)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $x_0 \in D_f$ helyen akkor nevezzük differenciálhatónak, ha létezik egy olyan $f'(x_0)$-lal jelölt valós szám és x_0-nak olyan, az értelmezési tartomány pontjaiból álló δ-sugarú környezete

$$K_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

hogy minden $x \in K_\delta(x_0)$ esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0), \tag{9.7}$$

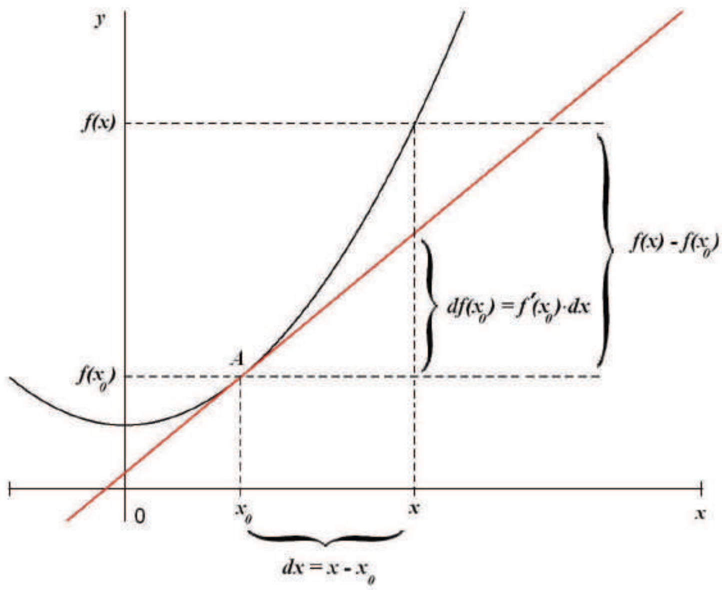
ahol $\varepsilon : K_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyre

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

9.1.10. Megjegyzés
Az
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$$
formulában, ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, a jobb oldalon álló második tag ($\varepsilon(x)(x-x_0)$) mindkét tényezője nullához tart, miközben $x \to x_0$. Ez azt jelenti, hogy $x \to x_0$ esetén $\varepsilon(x)(x - x_0)$ magasabb rendben (gyorsabban) tart zérushoz, mint $f'(x_0)(x-x_0)$. Tehát a jobb oldal meghatározó része az első tag, amelyet az $f(x) - f(x_0)$ megváltozás főrészének, a második $\varepsilon(x)(x - x_0)$ tagot pedig elenyésző részének nevezzük. Ez úgy is felfogható, hogy az $f(x)$ függvény az x_0 pont $K_\delta(x_0)$-környezetében jól közelíthető egy elsőfokú polinommal:
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$
azaz f linearizálható. Nyilvánvaló, hogy a differenciálhányados törtmentes képlete a következőképpen is felírható:
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x),$$
ahol $\varepsilon(x) \to 0$, ha $x \to x_0$.

9.1.11. Definíció (a függvény differenciálja)
Az
$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$$
összefüggésben szereplő
$$f'(x_0)(x - x_0)$$
főrészt az f függvény x_0-beli differenciáljának nevezzük.
Jelölése:
$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \textit{vagy} \quad df = f'(x_0)(x - x_0).$$

9.1.12. Megjegyzés
Vegyük észre, hogy $df(x)$ az x változó függvénye, és ha az $(x-x_0)$ különbséget $dx = \Delta x$-el jelöljük, akkor az x_0-beli
$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$
derivált valóban két differenciál hányadosa, mert
$$dx = x' \cdot (x - x_0) = 1 \cdot (x - x_0).$$



9.2. ábra

Az ábrán látható, hogy az f függvény x_0-beli $df(x_0)$ differenciálja a teljes $f(x) - f(x_0)$ különbség egyik részét adja és minél közelebb van az x pont x_0-hoz, annál jobban közelíti $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ az $f(x) - f(x_0)$ különbséget. Az $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0)$ különbség második része, mivel $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ kicsiny $(x - x_0)$ esetén, elhanyagolható. A

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot dx$$

kifejezésben Δx a független változó tetszőleges növekménye, azaz tetszőleges szám, amelyet gyakran x-től függetlennek tekintünk.

9.1.13. Tétel (a differenciálhatóság két megfogalmazásának ekvivalenciája)
A differenciálhányados határátmenetes és törtmentes definíciója ekvivalens.

Bizonyítás:
A törtmentes definíciót a határátmenetes definícióból kiindulva vezettük be. Tehát, ha a határátmenetes definíció fennáll, akkor a törtmentes is. Megfordítva, legyen f differenciálható a törtmentes definíció szerint, azaz:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0),$$

ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Ekkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x),$$

ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, amelyből

$$\lim_{x \to x_0} [f'(x_0) + \varepsilon(x)] = f'(x_0),$$

és ezért a bal oldal $x \to x_0$ esetén szintén $f'(x_0)$-hoz tart:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy f a határátmenetes definíció szerint is differenciálható az x_0 helyen. □

9.1.14. Példa
Számítsuk ki az $f(x) = x^3$ függvény differenciálhányadosát az $x_0 = \dfrac{1}{4}$ helyen!

Megoldás:
A határátmenetes definíció szerint:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} (x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

Így:

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

9.1.15. Példa
Számítsuk ki az $f(x) = x^3$ függvényre az $x_0 = 2$ pontban a

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

különbséget és a $df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ differenciált, ha $\Delta x = dx = 0.01$.

Megoldás:
A (9.1.14)-es feladatból tudjuk, hogy

$$f'(x) = (x^3)' = 3x^2.$$

Ezért a differenciál:

$$df(x) = f'(x)dx = 3x^2 dx,$$

továbbá $x = x_0 = 2$ és $dx = \Delta x = 0.01$, így

$$df(x_0) = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.01 = 0.12.$$

A $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ különbség pedig:

$$\Delta f = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 dx + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Ha $x = x_0 = 2$ és $dx = \Delta x = 0.01$, akkor

$$\Delta f = 3 \cdot 2^2 \cdot 0.01 + 3 \cdot 2 \cdot (0.01)^2 + (0.01)^3 = 0.12 + 0.00061 = 0.12061.$$

Így

$$\Delta f - df(x_0) = 0.00061.$$

9.1.16. Tétel (a differenciálható függvény folytonosságáról)
Ha az f függvény az $x_0 \in D_f$ helyen differenciálható, akkor ugyanitt folytonos is.

Bizonyítás:
Induljunk ki az alábbi nyilvánvaló egyenlőségből:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Képezzük mindkét oldal határértékét, ha $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0),$$

amelyből következik $f(x)$ folytonossága az x_0 helyen. □

9.1.17. Megjegyzés
A tétel állítása nem fordítható meg. A folytonosságból nem következik a differenciálhatóság.

9.1.18. Példa
Mutassuk meg, hogy a folytonos $f(x) = |x|$ függvény nem differenciálható az $x_0 = 0$ helyen!

Bizonyítás:
Vizsgáljuk a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$$

határérték létezését! Külön-külön kiszámítjuk a tört jobb oldali és bal oldali határértékét:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{-x-0}{x} = -1, \quad \text{illetve} \quad \lim_{x\to 0+0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

Az egyoldali határértékek különbözőek, ezért nem létezik az $x_0 = 0$-beli határérték. Tehát az $x_0 = 0$ pontban az $f(x) = |x|$ függvény nem differenciálható annak ellenére, hogy a függvény $x_0 = 0$-ban folytonos. □

Korábban már értelmeztük a bal és jobb oldali határértéket, folytonosságot. Most bevezetjük a bal és jobb oldali differenciálhatóság fogalmát.

9.1.19. Definíció (bal és jobb oldali differenciálhatóság)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az x_0 helyen balról illetve jobbról differenciálhatónak nevezzük, ha létezik véges bal oldali illetve jobb oldali határérték:

$$\lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0) \quad \textit{illetve} \quad \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0),$$

minden baloldali illetve jobboldali környezetbeli x-re.

9.1.20. Megjegyzés
Ha egy függvénynek az értelmezési tartománya valamely pontjában létezik bal oldali és jobb oldali differenciálhányadosa, amelyek megegyeznek, akkor a függvény ezen a helyen differenciálható.

9.2 Elemi függvények differenciálása

9.2.1. Tétel (elemi függvények differenciálása)
Az elemi függvények deriváltjai a következők:

1. $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R};$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+,\ x \in \mathbb{R};$
3. $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$
4. $(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R};$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R};$
6. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+;$

7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ x \in \mathbb{R}^+;$

8. $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R};$

9. $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R};$

10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\};$

11. $(\mathrm{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\};$

12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,\ x \in \mathbb{R};$

13. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1,\ x \in \mathbb{R};$

14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$

15. $(\mathrm{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$

16. $(\mathrm{sh} x)' = \mathrm{ch} x, \quad x \in \mathbb{R};$

17. $(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh} x, \quad x \in \mathbb{R};$

18. $(\mathrm{th} x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R};$

19. $(\mathrm{cth} x)' = \dfrac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$

20. $(\mathrm{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R};$

21. $(\mathrm{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1,\ x \in \mathbb{R};$

22. $(\mathrm{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1,\ x \in \mathbb{R};$

23. $(\mathrm{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1,\ x \in \mathbb{R}.$

Bizonyítás:

1. A 9.1.3. Definíció alapján bizonyítunk:

$$(c)' = \lim_{x\to x_0} \frac{c-c}{x-x_0} = 0, \quad c \in \mathbb{R};$$

6.

$$(\ln x)'_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln x - \ln x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\ln \frac{x-x_0+x_0}{x_0}}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \ln \left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x_0} \ln \left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{x-x_0}} =$$

$$\left\{u = \frac{x_0}{x-x_0}\right\} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x_0} \lim_{|u|\to\infty} \ln \left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = \frac{1}{x_0} \cdot \ln e = \frac{1}{x_0}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^+;$$

8.

$$(\sin x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{2\cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R};$$

9.

$$(\cos x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2\sin\frac{x+x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_0}{2}}{x-x_0} =$$

$$-\lim_{x\to x_0} \sin\frac{x+x_0}{2} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} = -\sin x_0 \cdot 1 = -\sin x_0, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

$\square$

9.3 Deriválási szabályok

9.3.1. Tétel (összeg, különbség, szorzat és hányados deriválása)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és a* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvények differenciálhatók az* $x_0 \in D_f \cap D_g$ *helyen,* c *pedig* $\mathbb{R}$*-beli állandó, akkor:*

1. $(c \cdot f(x))'_{x_0} = c \cdot f'(x_0)$;
2. $(f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;
3. $(f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0} = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Bizonyítás:
A 9.1.3. Definíció alapján bizonyítunk:

1. $$(c \cdot f(x))'_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot f(x) - c \cdot f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} c \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$
$$c \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = c \cdot f'(x_0);$$

2. $$(f(x) + g(x))'_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0);$$

3. $$(f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x) =$$
$$f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0);$$

4. $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} =$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left[\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}\right] =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0) - \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\cdot f(x_0)\right] =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)g(x_0)} = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

□

9.3.2. Definíció (deriváltfüggvény)
Ha az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény az $I\subset D_f$ intervallum minden pontjában differenciálható, akkor azt a leképezést, amely az I intervallum minden eleméhez az f függvény ezen pontbeli deriváltját rendeli az f függvény deriváltfüggvényének nevezzük.
Jelölése: $f'(x)$ vagy $\frac{df}{dx}$, illetve f'.

9.3.3. Példa
Végezzük el a kijelölt deriválásokat!

1. $(x^3)' = 3x^2$;
2. $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $(\sqrt[3]{x})' = (x^{1/3})' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$;
5. $\left(\frac{1}{x^3}\right) = [x^{-3}]' = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$;
6. $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = [x^{-1/4}]' = -\frac{1}{4}x^{-5/4} = \frac{-1}{4\sqrt[4]{x^5}}$;
7. $\left(\sqrt{\frac{1}{x\sqrt[5]{x}}}\right)' = \left(\sqrt{\frac{1}{x^{6/5}}}\right)' = \left(x^{-3/5}\right)' = \frac{-3}{5}x^{-8/5} = \frac{-3}{5\sqrt[5]{x^8}}$;
8. $(5^x)' = 5^x \ln 5$;
9. $(5e^x)' = 5e^x$;

10. $(\log_7 x)' = \dfrac{1}{x \ln 7}$;

11. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x \ln e} = \dfrac{1}{x}$;

12. $(6 \cos x)' = 6(\cos x)' = 6(-\sin x) = -6 \sin x$;

13. $\left(\dfrac{\sin x}{8}\right)' = \dfrac{(\sin x)'}{8} = \dfrac{\cos x}{8}$;

14. $\left(\dfrac{\sqrt[5]{x}}{8}\right)' = \dfrac{\left(x^{1/5}\right)'}{8} = \dfrac{\dfrac{1}{5}x^{-4/5}}{8} = \dfrac{1}{40\sqrt[5]{x^4}}$;

15. $(x^2 + 3^x - 5)' = (x^2)' + (3^x)' - (5)' = 2x + 3^x \ln 3$;

16. $\left(\dfrac{\sqrt{x} - 7\log_4 x}{11}\right)' = \dfrac{(\sqrt{x})' - 7(\log_4 x)'}{11} = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{7}{x \ln 4}}{11}$;

17. $(x^7 + 7^x)' = (x^7)' + (7^x)' = 7x^6 + 7^x \ln 7$;

18. $(x^5 \cos x)' = (x^5)' \cos x + x^5 (\cos x)' = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x$;

19. $(6^x \ln x)' = (6^x)' \ln x + 6^x (\ln x)' = 6^x (\ln 6) \ln x + 6^x \dfrac{1}{x}$;

20. $((x^2 - 3x)(x^3 + 7))' = (x^2 - 3x)'(x^3 + 7) + (x^2 - 3x)(x^3 + 7)' =$
$= (2x - 3)(x^3 + 7) + (x^2 - 3x)\, 3x^2$;

21. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$
$= \dfrac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

22. $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} =$
$= \dfrac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$;

23. $\left(\dfrac{\log_3 x}{x^3}\right)' = \dfrac{(\log_3 x)' x^3 - (\log_3 x)(x^3)'}{(x^3)^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{x\ln 3}x^3 - (\log_3 x)\,3x^2}{x^6} = \frac{\frac{1}{\ln 3}x^2 - (\log_3 x)\,3x^2}{x^6} = \frac{\frac{1}{\ln 3} - 3\log_3 x}{x^4};$$

24. $$\left(\frac{x+\sqrt{x}}{\cos x}\right)' = \frac{(x+\sqrt{x})'\cos x - (x+\sqrt{x})\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos x - (x+\sqrt{x})\,(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos x + (x+\sqrt{x})\sin x}{\cos^2 x};$$

25. $$\left(\frac{5e^x - 3\ln x}{x^4 - 2006}\right)' = \frac{(5e^x - 3\ln x)'\,(x^4-2006) - (5e^x - 3\ln x)\,(x^4-2006)'}{(x^4-2006)^2} =$$

$$= \frac{\left(5e^x - \frac{3}{x}\right)(x^4-2006) - (5e^x - 3\ln x)\,4x^3}{(x^4-2006)^2}.$$

9.3.4. Tétel (összetett függvény deriválási szabálya - a láncszabály)
Legyen adott az $f \circ g$ vagy más felírásban az

$$F(x) = f[g(x)] = f(u) \qquad u = g(x)$$

összetett függvény, ahol $f : u \mapsto f(u)$, $g : x \mapsto g(x)$ egyváltozós függvények. Ha a g függvény differenciálható az $x_0 \in D_g$ helyen, az f függvény pedig a $g(x_0) = u_0 \in D_f$ helyen, akkor az összetett $f \circ g$ függvény is differenciálható az x_0 helyen és

$$\left.\frac{d(f\circ g)}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=g(x_0)} \cdot \left.\frac{dg(x)}{dx}\right|_{x=x_0},$$

vagy ekvivalens felírásban:

$$\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{df(g(x))}{dx}\right|_{x=x_0} = \left. f'(g(x))\cdot g'(x)\right|_{x=x_0}.$$

Bizonyítás:
A differenciálhányados törtmentes definíciójából kiindulva:

$$u(x) - u(x_0) = g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0) + \varepsilon_1(x)(x-x_0),$$

ahol $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$, és

$$f(u) - f(u_0) = f'(u_0)(u - u_0) + \varepsilon_2(u)(u - u_0),$$

ahol $\lim\limits_{u \to u_0} \varepsilon_2(u) = 0$.
Írjuk fel az összetett függvény megváltozását:

$$(f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) = f(g(x)) - f(g(x_0)) = f(u) - f(u_0) =$$

$$= f'(u_0)(u - u_0) + \varepsilon_2(u)(u - u_0) =$$

$$= f'(u_0)[g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)] + \varepsilon_2 g(x)[g'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon_1(x)(x - x_0)] =$$

$$= f'(u_0) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + [f'(u_0)\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2 g(x) g'(x_0) + \varepsilon_2 g(x)\varepsilon_1(x)](x - x_0),$$

ahol a második tag első tényezőjének határértéke egyenlő nullával. Így a törtmentes definíció alapján igazoltuk, hogy

$$f(g(x))'_{x=x_0} = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \quad \square$$

9.3.5. Példa
Igazoljuk, hogy $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ és $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$!

Megoldás:
Az összegre és különbségre, valamint az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály szerint:

$$(\mathrm{sh}x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \mathrm{ch}x;$$

és

$$(\mathrm{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \mathrm{sh}x.$$

9.3.6. Példa
Végezzük el a kijelölt deriválásokat!

1. $(\cos(5x))' = -(\sin(5x)) \cdot 5 = -5\sin(5x)$;
2. $(\sin(x^3))' = \cos(x^3) \cdot 3x^2$;
3. $\left(\sin^3(x)\right)' = \left((\sin(x))^3\right)' = 3\sin^2 x\,(\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x$;
4. $\left((4 - x^3)^7\right)' = 7\,(4 - x^3)^6\,(4 - x^3)' = 7\,(4 - x^3)^6\,(-3x^2)$;

5. $\left(\sqrt{\cos(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}(\cos x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x) = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$;

6. $(\mathrm{tg}^7 x)' = \left((\mathrm{tg}\, x)^7\right)' = 7\mathrm{tg}^6 x\, (\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{7\mathrm{tg}^6 x}{\cos^2 x}$;

7. $\left(\sqrt{x^3+4}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^3+4}}\left(x^3+4\right)' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+4}}$;

8. $(e^{2x-1})' = e^{2x-1}(2x-1)' = e^{2x-1}\cdot 2 = 2e^{2x-1}$;

9. $\left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2}(x^2)' = e^{x^2}\cdot 2x = 2xe^{x^2}$;

10. $(3^{\cos x})' = 3^{\cos x}(\ln 3)(\cos x)' = -3^{\cos x}(\ln 3)\sin x$;

11. $(2^{\mathrm{tg}\, x})' = 2^{\mathrm{tg}\, x}(\ln 2)(\mathrm{tg}\, x)' = 2^{\mathrm{tg}\, x}(\ln 2)\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

12. $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$;

13. $(\mathrm{th}\, x)' = \left(\dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}\right)' = \dfrac{\mathrm{ch}\, x \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x \mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}^2 x} = \dfrac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

14. $(\mathrm{cth}\, x)' = \left(\dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\right)' = \dfrac{\mathrm{sh}\, x \mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x \mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{-1}{\mathrm{sh}^2 x}$;

15. $(\ln\, \mathrm{sh} \cos x)' = \dfrac{1}{\mathrm{sh} \cos x}(\mathrm{sh} \cos x)' = \dfrac{1}{\mathrm{sh} \cos x}(\mathrm{ch} \cos x)(\cos x)' =$

$= \dfrac{1}{\mathrm{sh} \cos x}(\mathrm{ch} \cos x)(-\sin x)$;

16. $(\sin \sin \sin x)' = (\cos \sin \sin x)(\cos \sin x)\cos x$;

17. $\left(\ln^5 \mathrm{th}\, x\right)' = \left((\ln \mathrm{th}\, x)^5\right)' = 5\left(\ln^4 \mathrm{th}\, x\right)\dfrac{1}{\mathrm{th}\, x}\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 5\left(\ln^4 \mathrm{th}\, x\right)\dfrac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

18. $\left(\log_2^2 \mathrm{cth}\sqrt{3-x^2}\right)' = \left(\left(\log_2 \mathrm{cth}\sqrt{3-x^2}\right)^2\right)' =$

$= 2\left(\log_2 \mathrm{cth}\sqrt{3-x^2}\right)\dfrac{1}{\mathrm{cth}\sqrt{3-x^2}\ln 2}\cdot\dfrac{(-1)}{\mathrm{sh}^2\sqrt{3-x^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{3-x^2}}(-2x)$;

19. $\left(\ln\left(x^4+3^{\sqrt{\sin x}}\right)\right)' = \dfrac{1}{x^4+3^{\sqrt{\sin x}}}\left(x^4+3^{\sqrt{\sin x}}\right)' =$

$= \dfrac{1}{x^4+3^{\sqrt{\sin x}}}\left(4x^3+3^{\sqrt{\sin x}}\ln 3\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x\right)$;

20. $\left(\operatorname{ctg}^2 e^{2+x^3}\right)' = \left(\left(\operatorname{ctg} e^{2+x^3}\right)^2\right)' = 2\operatorname{ctg} e^{2+x^3} \dfrac{(-1)}{\sin^2 e^{2+x^3}} \cdot e^{2+x^3} \cdot 3x^2.$

9.3.7. Tétel (az inverz függvény differenciálhatóságáról)
Ha az (a, b) intervallumon az $f(x)$ függvény szigorúan monoton, folytonos és az x_0 pontban differenciálható úgy hogy $f'(x_0) \neq 0$ és $f(x_0) = y_0$, akkor az f függvény $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ inverze differenciálható az y_0 helyen és

$$\varphi'(y)\Big|_{y=y_0} = \left[f^{-1}(y)\right]'\Big|_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bizonyítás:
Írjuk fel az $f^{-1}(y)$ inverz függvény differenciahányadosát az y_0 pontban, használva az $x = f^{-1}(y)$ jelölést:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

Az inverz monotonitása miatt $x - x_0 \neq 0$, ha $y \neq y_0$ és ha $y \to y_0$, akkor $f^{-1}(y)$ folytonosságából adódik, hogy $x \to x_0$. Azaz határátmenettel a tétel állítását kapjuk:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square$$

9.3.8. Példa
Igazoljuk, hogy $y = f(x) = \sin x$ esetén az inverz $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$ függvény deriváltja:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \left(\arcsin y\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Megoldás:
Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{[\sin x]'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}}$$

Azaz:

$$\left[f^{-1}(y)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

9.4 Magasabbrendű deriváltak

9.4.1. Definíció (kétszer differenciálható függvény)
Ha az f függvénynek az x_0 hely valamely környezetében létezik a deriváltfüggvénye, amely az x_0 helyen differenciálható, akkor az f függvény az x_0 helyen kétszer differenciálható.
Jelölése: $f''(x_0)$ *vagy* $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$.

9.4.2. Definíció (második deriváltfüggvény)
Ha az f függvény az I intervallum minden pontjában kétszer differenciálható, akkor az f'' függvényt f második deriváltfüggvényének nevezzük.

9.4.3. Megjegyzés
A második deriváltfüggvény kiszámítása az f' függvény deriválásával történik:

$$f'' = \big(f'\big)'.$$

9.4.4. Megjegyzés
Hasonló módon értelmezzük egy függvény magasabbrendű deriváltjait. Általánosan az n-ed rendű derivált:

$$f^{(n)} = \big(f^{(n-1)}\big)'.$$

9.4.5. Definíció (akárhányszor differenciálható függvény)
Végtelen sokszor vagy akárhányszor differenciálhatónak mondjuk azt a függvényt, melynek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik az n-edik deriváltja.

9.4.6. Példa
Számítsuk ki az $f(x) = x^5$ függvény harmadrendű deriváltját!

Megoldás:

$$f'(x) = 5x^4, \quad f''(x) = 20x^3, \quad f'''(x) = 60x^2.$$

9.4.7. Példa
Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = 2x - \frac{2}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$$

függvény eleget tesz a

$$\cos x + f''(x)(1 + x)^2 = 0$$

egyenletnek!

Megoldás:
Számítsuk ki $f'(x)$-et!

$$f'(x) = \left(2x - 2 \cdot \left(1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{-1}\right)' = 2 - 2 \cdot (-1) \cdot \left(1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2},$$

azaz

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{\left(1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + 2\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}},$$

tehát

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = 2 + \frac{1}{1 + \sin x}.$$

Számítsuk ki $f''(x)$-et is!

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(2 + \frac{1}{1 + \sin x}\right)' = -(1 + \sin x)^{-2} \cdot \cos x = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2}.$$

Vizsgáljuk a feladatban szereplő egyenlőség bal oldalát:

$$\cos x + f''(x)(1 + x)^2 = \cos x + \frac{(-\cos x)}{(1 + \sin x)^2} \cdot (1 + x)^2 = \cos x - \cos x = 0.$$

Tehát az egyenlőség teljesül.

9.4.8. Definíció (magasabbrendű differenciál)
Ha az $y(x)$ függvény kétszer differenciálható, akkor az első differenciál differenciálját a második differenciálnak nevezzük.
Jelölése: $d^2y = d(dy)$.
Hasonló módon:

$$d^n y = d(d^{n-1}y).$$

9.4.9. Megjegyzés
Emlékezve arra, hogy dx tetszőleges szám és független x-től, ezért x-szerinti deriváláskor konstans tényező, így dx hatványai jelennek meg:

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n.$$

9.5 A differenciálszámítás középértéktételei

9.5.1. Tétel (az első derivált eltűnéséről)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in D_f$ pontban differenciálható és létezik x_0-nak olyan $K_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D_f$ környezete, hogy $\forall\ x \in K_\delta(x_0)$ pontban

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \textit{vagy} \quad f(x) \leq f(x_0),$$

akkor

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás:
Foglalkozzunk az $f(x) \geq f(x_0)$ esettel! Számítsuk ki a differenciahányados x_0-beli bal- és jobboldali határértékét.
Ha $x \in K_\delta$ és $x < x_0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0,$$

azaz

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0;$$

továbbá, ha $x \in K_\delta$ és $x > x_0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

így

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Feltételünk szerint f differenciálható az x_0 helyen, tehát az egyoldali határértékeknek meg kell egyezniük egymással, és ez a közös érték egyben a derivált értéke az x_0 helyen. Az $f'(x_0) \leq 0$ és $f'(x_0) \geq 0$ egyidejűleg csak az

$$f'(x_0) = 0$$

esetben teljesül. □

9.5.2. Tétel (Rolle-féle középértéktétel)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a zárt $[a, b]$ intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon és $f(a) = f(b)$, akkor létezik az (a, b) intervallumon legalább egy olyan ξ hely, ahol

$$f'(\xi) = 0.$$

Bizonyítás:
A Weierstrass-féle tétel szerint zárt intervallumon folytonos függvény ugyanitt korlátos és felveszi maximumát és minimumát. Tehát léteznek olyan k és K valós számok, valamint $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ helyek, amelyekre:

$$k := \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1) \quad \text{és} \quad K := \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Ha mindkét értéket az intervallum a és b végpontjaiban is felveszi, akkor az $f(a) = f(b)$ feltétel miatt a maximális és minimális érték megegyezik, ami azt jelenti, hogy a függvény az intervallumon konstans. Ekkor az állítás igaz. Tegyük fel, hogy a maximum és a minimum értékek közül legalább az egyiket nem az intervallum végpontjában veszi fel a függvény. Legyen ez az infimum pont x_1. Ekkor x_1-nek van olyan környezete, melynek pontjaiban:

$$f(x_1) \leq f(x).$$

Így a 9.5.1. Tétel szerint $f'(x_1) = 0$. Hasonlóan x_2 esetén, ha $f(x_2) \geq f(x)$ az x_2 valamely környezetében, akkor $f'(x_2) = 0$. □

9.5.3. Megjegyzés (A Rolle-féle középértéktétel jelentése)
Ha teljesülnek a tétel feltételei, akkor a függvény görbéjének az (a, b) intervallumban van olyan pontja, ahol vízszintes az érintő és párhuzamos a függvénygörbe végpontjait összekötő szelővel.

9.5.4. Példa
Vizsgáljuk meg, hogy alkalmazható-e Rolle-tétele az $f(x) = x^2 - 2x - 3$ függvényre a $[-1, 3]$ intervallumon! Ha igen, határozzuk meg a tételben szereplő ξ-t!

Megoldás:
Az $f(x)$ függvény nyilvánvalóan mindenhol differenciálható és $\mathbb{R}$-en folytonos. Továbbá

$$f(-1) = f(3) = 0,$$

tehát alkalmazhatjuk Rolle-tételét.

$$f'(x) = 2x - 2,$$

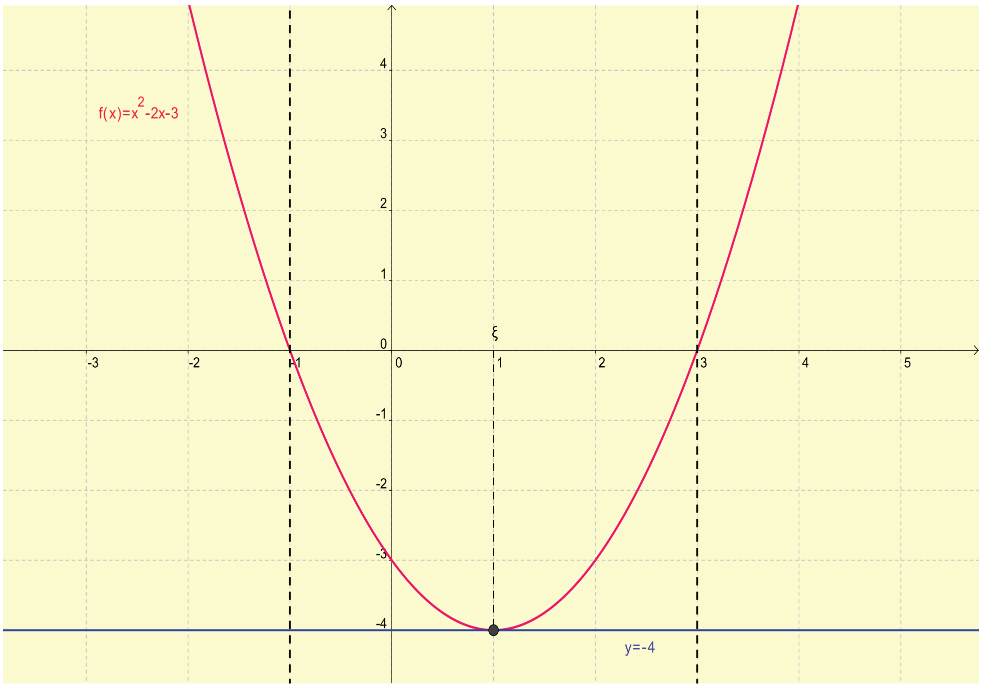
azaz

$$f'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\xi - 2 = 0,$$

tehát

$$\xi = 1,$$

és $1 \in (-1, 3)$.



9.3. ábra

9.5.5. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a zárt $[a, b]$ intervallumon, differenciálható az (a, b) nyílt intervallumon, akkor az (a, b) intervallumon létezik legalább egy olyan ξ hely, hogy

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi),$$

vagy

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Bizonyítás:
Egy alkalmasan választott segédfüggvény segítségével a tételt a 9.5.2. Tételre vezetjük vissza. Legyen

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

amely folytonos az $[a, b]$ intervallumon és differenciálható az (a, b)-n. Ezen kívül az F függvényre teljesül még, hogy

$$F(a) = f(a) \quad \text{és} \quad F(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a) = F(a).$$

Ezért a Rolle-féle középértéktétel szerint létezik olyan $\xi \in (a, b)$ hely, ahol

$$F'(\xi) = 0,$$

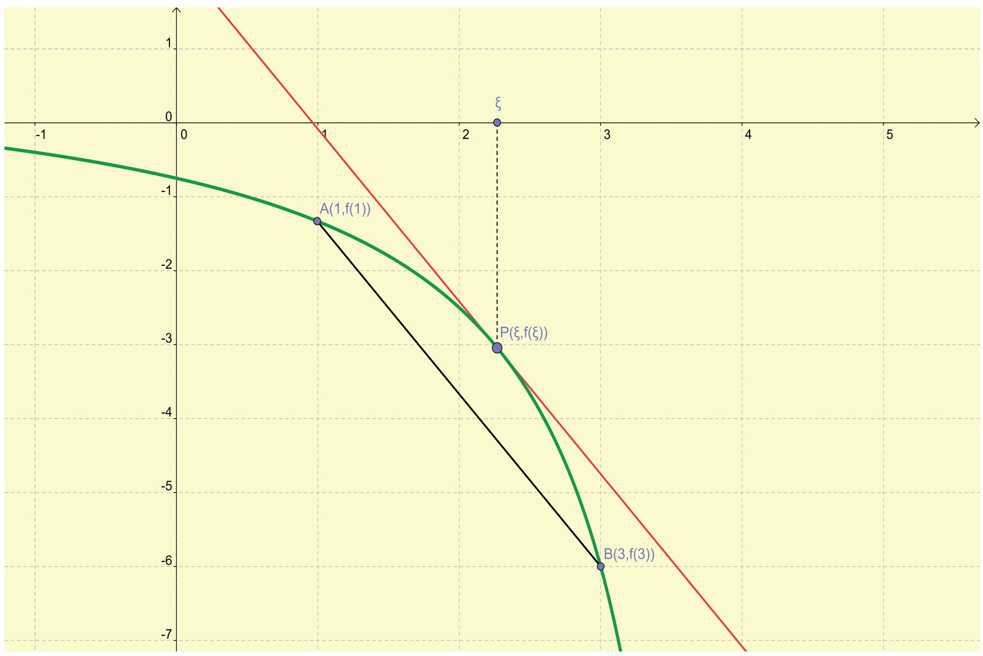
azaz

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

tehát

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

9.5.6. Megjegyzés (A Lagrange-féle középértéktétel jelentése)
A függvény görbéjének van olyan $\xi \in (a, b)$ pontja, amelyhez húzott érintő párhuzamos az $\big(a, f(a)\big)$ és $\big(b, f(b)\big)$ végpontokat összekötő húrral.



9.4. ábra

9.5.7. Példa
Vizsgáljuk meg, hogy alkalmazható-e Lagrange-tétele az $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$ függvényre az $[1, 3]$ intervallumon! Ha igen, határozzuk meg a tételben szereplő ξ-t!

Megoldás:
Könnyen látható, hogy az $f(x)$ függvény differenciálható a megadott intervallumon és

$$f'(x) = \frac{-7}{(x-4)^2}.$$

Továbbá

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-6 + \frac{4}{3}}{2} = -\frac{7}{3},$$

és

$$f'(\xi) = \frac{-7}{(\xi - 4)^2} = -\frac{7}{3} \quad \Leftrightarrow \quad (\xi - 4)^2 = 3,$$

azaz

$$\xi_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3}.$$

$\xi_1 = 4+\sqrt{3} > 3$, tehát ξ_1 nem belső pontja a vizsgált intervallumnak. Viszont

$$\xi_2 = 4 - \sqrt{3} \in [1, 3].$$

A 9.4. ábrán látható, hogy a függvény $P\big(\xi, f(\xi)\big)$ pontjához húzott érintő párhuzamos az $A\big(1, f(1)\big)$ és $B\big(3, f(3)\big)$ pontokat összekötő húrral.

9.5.8. Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak a zárt $[a, b]$ intervallumon, differenciálhatóak az (a, b) nyílt intervallumon és a g függvény deriváltja az (a, b) intervallumon sehol sem zérus, akkor az (a, b) intervallumon létezik legalább egy olyan ξ hely, ahol

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás:
Vezessük be a következő segédfüggvényt:

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a)).$$

A $g(b) - g(a) \neq 0$ összefüggés teljesül, mert $g(a) = g(b)$ esetén a g függvény eleget tenne a Rolle-tétel feltételeinek és így ellentmondásba kerülnénk a $g'(x) \neq 0$ feltétellel.
Az F függvény differenciálható (a, b)-n és

$$F(a) = f(a) \quad \text{illetve} \quad F(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a) = F(a).$$

A Rolle-tétel értelmében létezik olyan $\xi \in (a, b)$ hely, ahol

$$F'(\xi) = 0,$$

azaz

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0,$$

így

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \square$$

9.5.9. Megjegyzés
Nyilvánvaló, hogy $g(x) = x$ esetén a Cauchy-féle középértéktételből a Lagrange-féle középértéktétel adódik.

9.6 Differenciálható függvények monotonitása

9.6.1. Tétel (a monotonitás elégséges feltétele differenciálható függvényekre)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az (a, b) intervallumon differenciálható és minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) \geq 0$, akkor f az (a, b) intervallumon monoton növekvő; illetve ha minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) \leq 0$, akkor f az (a, b) intervallumon monoton csökkenő.

Bizonyítás:
Tekintsük az $f'(x) \geq 0$ esetet. A differenciálhatóságból következik az (a, b)-beli folytonosság.
Legyen $a < x_1 < x_2 < b$. Ekkor az $[x_1, x_2]$ intervallumon az f függvény teljesíti a Lagrange-tétel (9.5.5. Tétel) feltételeit, azaz létezik olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

A feltétel szerint $f'(\xi) \geq 0$ is teljesül, ezért

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0,$$

azaz

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

vagyis

$$f(x_2) \geq f(x_1).$$

Tehát f valóban növekvő az (a, b) intervallumon. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha $f'(x) \leq 0$, akkor f monoton csökken az (a, b) intervallumon. □

9.6.2. Tétel (a szigorú monotonitás elégséges feltétele differenciálható függvényekre)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az (a, b) intervallumon differenciálható és minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) > 0$, akkor f az (a, b) intervallumon szigorúan monoton növekvő; illetve ha minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f az (a, b) intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

Bizonyítás:
Hasonló, mint a 9.6.1. Tétel esetén. □

9.6.3. Példa
Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 4x + 5$$

függvényt!

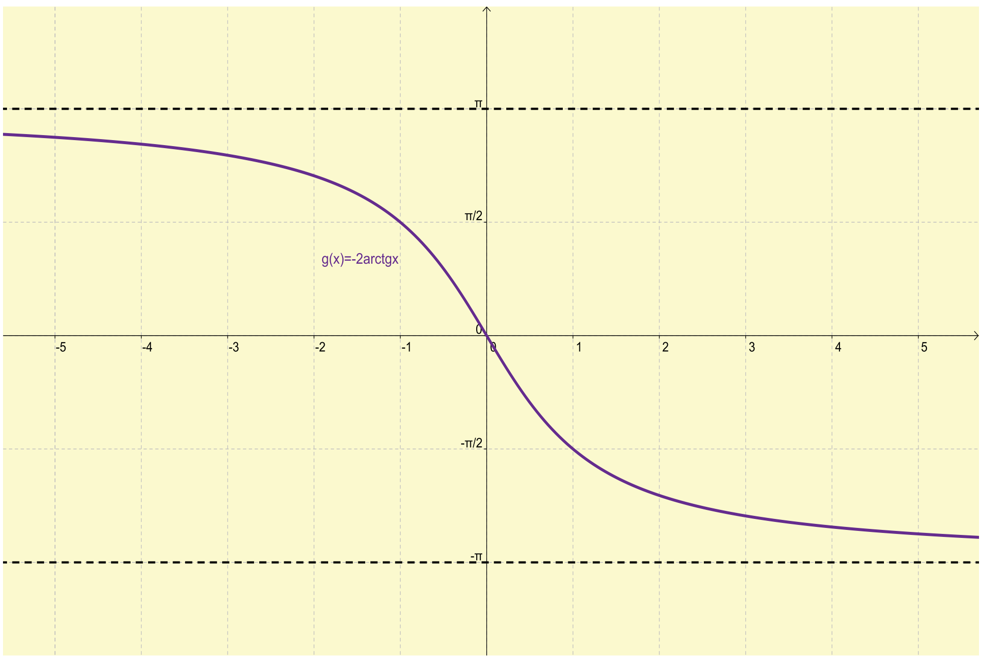
Megoldás:
$f'(x) = 4 > 0$, tehát az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en.

9.6.4. Példa
Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából a

$$g : \mathbb{R} \to [-\pi, \pi], \qquad g(x) = -2\mathrm{arctg}x$$

függvényt!

Megoldás:
$g'(x) = \dfrac{-2}{1 + x^2} < 0$, tehát a $g(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}$-en.



9.5. ábra

9.6.5. Példa

Keressük meg az $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 16x$ függvény szigorúan monoton szakaszait!

Megoldás:

Számítsuk ki $f'(x)$-et!

$$f'(x) = 2x^2 - 12x + 16$$

Keressük meg a kapott polinom zérushelyeit!

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{4} = \frac{12 \pm 4}{4}$$

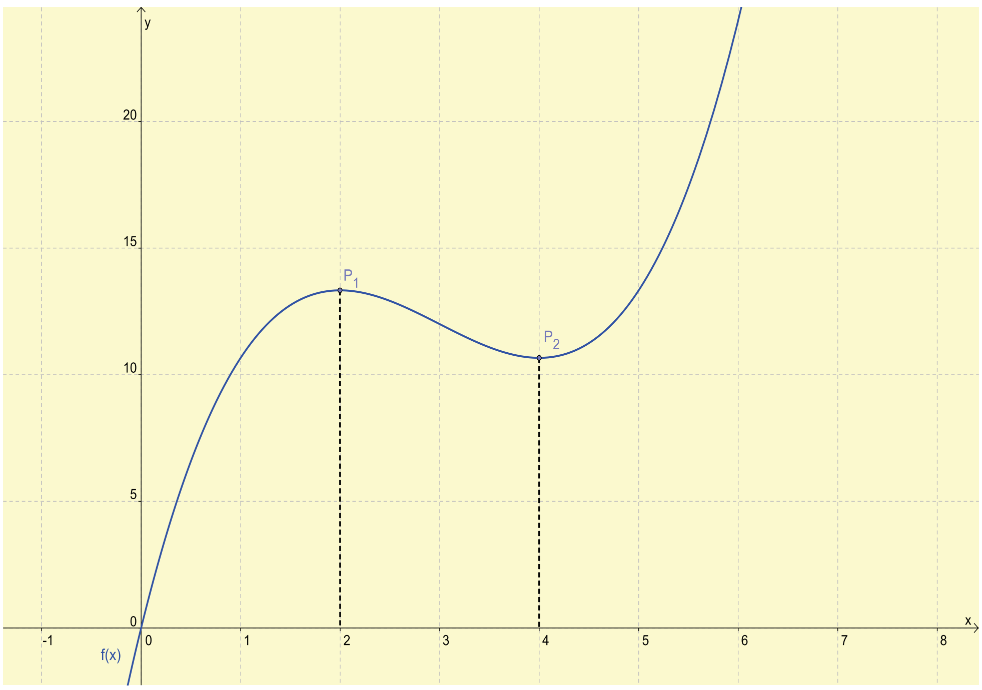
Azaz

$$x_1 = 4 \quad \text{és} \quad x_2 = 2.$$

Vizsgáljuk $f'(x)$ előjelét! Készítsünk táblázatot!

x	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	szig. mon. nő		szig. mon. csökken		szig. mon. nő

A függvény grafikonja:



9.6. ábra

9.6.6. Tétel (elégséges feltétel, hogy egy függvény konstans legyen)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az (a, b) intervallumon differenciálható és minden $x \in (a, b)$ esetén $f'(x) = 0$, akkor f az (a, b) intervallumon konstans.

Bizonyítás:
Az $f'(x) = 0$ egyenlőségből következően az (a, b) intervallumon

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{és} \quad f'(x) \leq 0$$

egyidejűleg fennáll. A monotonitást biztosító 9.6.1. Tétel szerint bármely $x_1, x_2 \in (a, b)$, $a < x_1 < x_2 < b$ pontokra

$$f(x_2) \geq f(x_1) \quad \text{és} \quad f(x_2) \leq f(x_1)$$

is fennáll. Ez csak akkor lehetséges, ha

$$f(x_1) = f(x_2) = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

10 A differenciálszámítás alkalmazásai

10.1 Az érintő és normális egyenlete

Használjuk fel azt az ismert tényt, hogy a $P_0(x_0, y_0)$ ponton átmenő m iránytangensű egyenes egyenlete:

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Mivel az érintő esetén az iránytangens $m = f'(x_0)$, ezért az $y = f(x)$ egyenletű görbe $P_0(x_0, y_0)$ pontjához tartozó érintőjének egyenlete:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

A $P_0(x_0, y_0)$ pontbeli normális egyenes merőleges az érintőre és iránytangense az érintő iránytangensének negatív reciproka, azaz $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Így a normális egyenlete:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

10.1.1. Példa

Határozza meg az $f(x) = \dfrac{36}{x}$ hiperbolához az $x_0 = 3$ abszcisszájú pontban húzott érintő és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területét!

Megoldás:

Számítsuk ki y_0-t!

$$y_0 = f(x_0) = f(3) = \frac{36}{3} = 12.$$

Az érintő tehát az $f(x) = \dfrac{36}{x}$ hiperbola $P(3, 12)$ pontjához tartozik. Számítsuk ki $f'(x)$-et!

$$f'(x) = -\frac{36}{x^2}.$$

Ekkor

$$f'(x_0) = f'(3) = -\frac{36}{9} = -4.$$

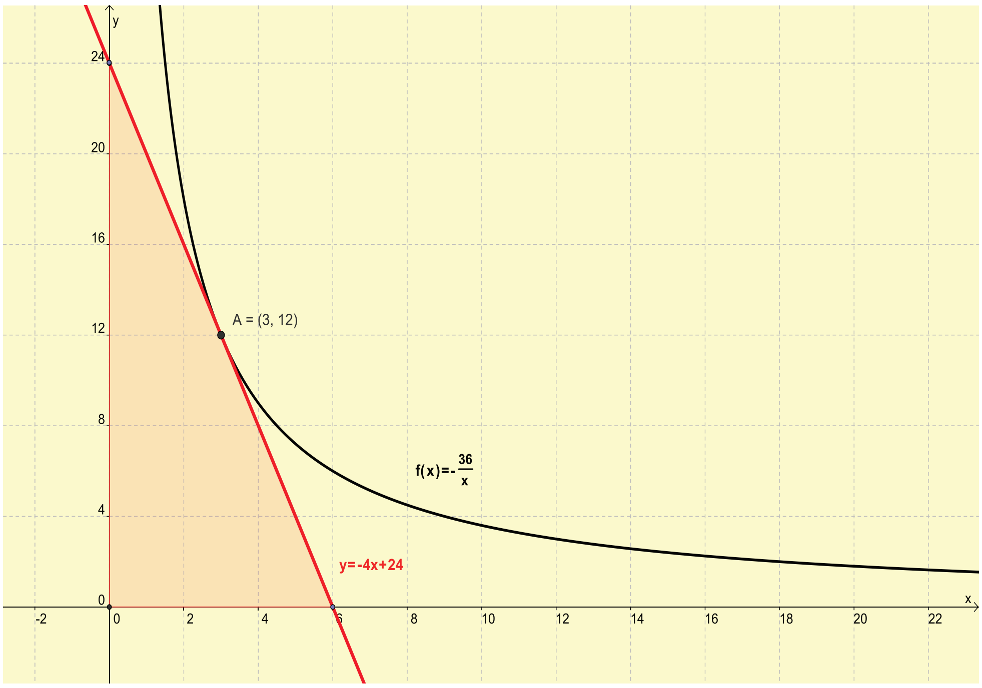
Az érintő egyenlete:

$$y = -4(x - 3) + 12,$$

azaz

$$y = -4x + 24.$$

Vázoljuk az $f(x) = \dfrac{36}{x}$ hiperbolát és a $P(3, 12)$ ponthoz tartozó érintőt!



10.1. ábra

A háromszög területe tehát:

$$T_{\triangle} = \frac{24 \cdot 6}{2} = 72.$$

10.1.2. Példa

Határozza meg, hogy mely pontokban lesz az $f(x) = \ln(x^2 + 16)$ függvény normálisa párhuzamos az $y = -5x + 1$ egyenessel!

Megoldás:

Számítsuk ki $f'(x)$-et!

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 16}.$$

Tegyük fel, hogy az x_0 abszcisszájú pont teljesíti a feltételeket. Ekkor

$$f'(x_0) = \frac{2x_0}{x_0^2 + 16}.$$

Mivel a keresett pont(ok)hoz tartozó normális párhuzamos az $y = -5x + 1$ egyenessel, így

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{x_0^2 + 16}{2x_0} = -5,$$

azaz

$$x_0^2 - 10x_0 + 16 = 0.$$

A kapott másodfokú egyenlet gyökei:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 8.$$

A keresett pontok:

$$P_1(2, \ln 20) \qquad P_2(8, \ln 80).$$

10.2 Taylor-polinom

10.2.1. Definíció (n-ed fokú Taylor-polinom)
Az x_0 helyen legalább n-szer differenciálható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0 helyhez tartozó n-ed fokú Taylor-polinomjának nevezzük a

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

n-ed fokú polinomot.

10.2.2. Megjegyzés
Ha $x_0 = 0$, akkor a Taylor-polinomot Maclaurin-polinomnak nevezzük.

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

10.2.3. Megjegyzés
Brooke *Taylor* (1685-1731) angol matematikus formulát fedezett fel a függvények hatványsorba való fejtésére. Foglalkozott a rezgő húrok elméletével is. Colin *Maclaurin* (1698-1746) a XVIII. század egyik legkiválóbb angol matematikusa. Az edinburghi egyetem matematika professzora volt. Ismerte Newtont és átvette matematikai elgondolásait. Több felfedezést tett a síkgörbéket tanulmányozva, sok tétellel gazdagította az ábrázoló geometriát is.

10.2.4. Megjegyzés
A deriválási szabályok alapján nyilvánvaló, hogy az f függvény és az f függvény n-ed fokú Taylor-polinomjának a deriváltjai az x_0 helyen rendre megegyeznek:

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'(x_0) = f'(x_0), \quad ..., \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Természetesen nem igaz, hogy tetszőleges $x \in D_f$ esetén $T_n(x) = f(x)$ teljesül. Viszont, ha $x \in D_f$ beleesik x_0 bizonyos környezetébe, azaz x "elég közel" van x_0-hoz, akkor az n-ed fokú Taylor-polinom $T_n(x)$ értéke jól közelíti az $f(x)$ függvényértéket.

10.2.5. Tétel (Taylor-formula)
Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 hely valamely $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ környezetében n-szer folytonosan differenciálható, illetve az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nyílt intervallumon $(n+1)$-szer differenciálható. Ekkor $\forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén található olyan $\xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ hely, hogy:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Az

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

kifejezést Lagrange-féle maradéktagnak nevezzük.

Bizonyítás:
Ismét alkalmazzuk a Rolle-féle középértéktételt (9.5.2. Tétel), ezért áttérünk az ott használt jelölésekre. Legyen $x_0 = a$ és $x = b$. Ha $a \neq b$, akkor egyértelműen meghatározható egy valós c szám úgy, hogy

$$f(b) - T_n(b) = c \cdot (b - a)^{n+1}.$$

Az a feladatunk, hogy igazoljuk, hogy

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Vezessük be az

$$F(x) := f(x) - T_n(x) - c \cdot (x - a)^{n+1}$$

segédfüggvényt, amelyre igazak a következők:

$$f^{(k)}(a) = T_n^{(k)}(a), \qquad k = 0, 1, ..., n$$

miatt

$$F^{(k)}(a) = 0, \qquad k = 0, 1, ..., n.$$

Továbbá a fentiek miatt

$$F(b) = 0.$$

Az $F(a) = F(b)$ egyenlőség miatt az F függvényre teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, ezért létezik olyan $\xi_1 \in (a, b)$, melyre

$$F'(\xi_1) = 0.$$

Mivel $F'(a) = F'(\xi_1) = 0$, ezért alkalmazható a Rolle-tétel az $[a, \xi_1]$ intervallumon az $F'(x)$ függvényre, azaz létezik olyan $\xi_2 \in (a, \xi_1)$ hely, melyre

$$F''(\xi_2) = 0.$$

Ezt az eljárást folytatva az n-edik lépésben azt kapjuk, hogy létezik $\xi_n \in (a, \xi_{n-1})$ hely, ahol

$$F^{(n)}(\xi_n) = 0.$$

Mivel $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(\xi_n) = 0$, így még egyszer alkalmazhatjuk a Rolle-tételt, amelynek alapján létezik $\xi \in (a, \xi_n)$, amelyre

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

Az $F(x)$ segédfüggvény definiáló egyenlőségéből és az előző eredményből kapjuk, hogy

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - c \cdot (n+1)! = 0,$$

azaz

$$c = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

amit bizonyítani akartunk. □

10.2.6. Példa

Az $f(x) = e^x$ függvény $x_0 = 0$-beli n-ed rendű Taylor- (Maclaurin-) polinomja:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}.$$

A $g(x) = \sin x$ függvény $x_0 = 0$-beli Taylor-polinomja:

$$T_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

A $h(x) = \ln x$ függvény $x_0 = 1$-beli n-ed rendű Taylor-polinomja:

$$T_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{1!} + \frac{(x-1)^3}{2!} + ... + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{(n-1)!}.$$

10.2.7. Példa

Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ ötödfokú Taylor-polinomját az $x_0 = \frac{\pi}{4}$ pont körül!

Megoldás:
Ha $f(x) = \sin x$, akkor $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Továbbá:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

valamint

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

és ez a négy érték ismétlődik a továbbiakban. Tehát a keresett Taylor-polinom:

$$T_5(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{x-\frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} + \frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5}{5!}\right).$$

10.2.8. Példa
Határozzuk meg az $f(x) = \mathrm{tg}x$ ötödfokú Maclaurin-polinomját!

Megoldás:
Most $f(x) = \mathrm{tg}x$ és $f(0) = \mathrm{tg}0 = 0$. Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}, \quad f'''(x) = 2\cdot\left(\frac{1}{\cos^4 x} + 2\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}^4 x\right),$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{8\mathrm{tg}x}{\cos^2 x}\cdot(2 + 3\mathrm{tg}^2 x),$$

és

$$f^{(5)}(x) = \frac{48\mathrm{tg}^2 x}{\cos^4 x} + 8(2 + 3\mathrm{tg}^2 x)\cdot\left(\frac{1}{\cos^4 x} + 2\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}^4 x\right).$$

Így

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = 0, \quad f^{(5)}(0) = 16.$$

Tehát:

$$M_5(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5.$$

10.2.9. Megjegyzés
A Taylor-formula lehetőséget ad arra, hogy a függvényeket első, másod, harmad, ... n-ed fokú polinomfüggvényekkel közelítsük. Tekintsük az

$$f(x) = \sin x$$

függvény $x_0 = 0$-beli n = 1, 3, 5, 7, 9 és 11-ed rendű Taylor-polinomjait:

$$T_1(x) = x,$$

$$T_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{1}{6}x^3,$$

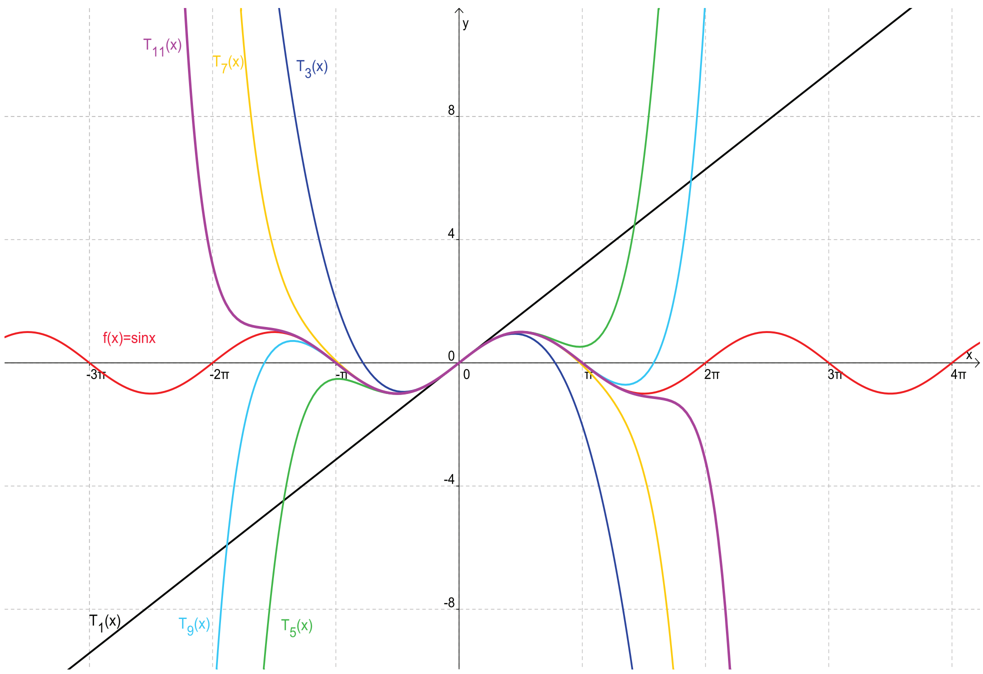
$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5,$$

$$T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7,$$

$$T_9(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362\,880}x^9,$$

$$T_{11}(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362\,880}x^9 - \frac{1}{39\,916\,800}x^{11}.$$

A 10.2 ábrán a $\sin x$ függvény $x_0 = 0$ helyhez tartozó Taylor-polinomjai láthatóak (n = 1, 3, 5, 7, 9, 11). A 11-ed fokú Taylor-polinom a szinuszfüggvénynek már több, mint egy teljes periódusát előállítja. Végtelen határátmenetben a Taylor-polinom egybeesik a szinuszfüggvénnyel.



10.2. ábra

10.3 A Bernoulli-L'Hospital szabály

Gyakran adódnak problémák, amikor két olyan függvény hányadosának a határértékét kell meghatározni, ahol a számlálóban és a nevezőben lévő függvény is nullához tart az adott pontban.

10.3.1. Tétel (Bernoulli-L'Hospital szabály)
Legyenek az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan egyváltozós függvények, amelyek értelmezve vannak az x_0 hely valamely $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot, továbbá

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

valamint

$$g(x) \neq g(x_0), \qquad ha \quad x \neq x_0.$$

Ha f és g differenciálható az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ intervallumon és $g'(x) \neq 0$ bármely $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-re, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ha a jobb oldalon álló határérték létezik.

Bizonyítás:
Az f és g differenciálható az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ intervallumon, ezért folytonos is. Megjegyezzük, hogy ha az x_0 helyen f vagy g, vagy mindkét függvény nem folytonos, akkor az

$$f(x_0) := \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{illetve} \quad g(x_0) := \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

megválasztásával x_0-ban is folytonossá tehetők.
A Cauchy-féle középértéktétel (9.5.8. Tétel) alapján:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{ahol} \quad \xi \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Mindkét oldal határértékét véve $x \to x_0$ és így $\xi \to x_0$ esetén:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ha a jobb oldalon álló határérték létezik. □

10.3.2. Megjegyzés
A fenti határértéket $\left(\frac{0}{0}\right)$ típusú határértéknek is mondják. A L'Hospital szabály akkor is érvényes, ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Ilyenkor $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ típusú határértékről beszélünk. A tétel akkor is alkalmazható, ha $x_0 = +\infty$ vagy $x_0 = -\infty$. A $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (0^0), (∞^0) és (1^∞) típusú határozatlan alakok visszavezethetők a $\left(\frac{0}{0}\right)$ vagy $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakokra.

10.3.3. Példa
Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x}$ határértéket!

Megoldás:
A számlálóban és a nevezőben lévő függvények differenciálhatók az $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ pont környezetében és $g'(x) = -1 \neq 0$ ebben a környezetben. Továbbá az $f(x) = 1-\sin x$ és $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$ helyettesítési értéke nullával egyenlő az $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ helyen. Tehát teljesülnek a L'Hospital szabály feltételei, ezért

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

10.3.4. Példa
Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x-2\cos 3x}$ és a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg} x}{x}$ határértékeket!

Megoldás:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x-2\cos 3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin x)'}{(x-2\cos 3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1+6\sin 3x} = 1;$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg} x}{3x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\mathrm{arctg} x)'}{(3x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{3} = \dfrac{1}{3}.$

10.3.5. Példa
Számítsuk ki a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln 5x}$ és a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{e^x-1}$ határértékeket!

Megoldás:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\ln 5x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x)'}{(\ln 5x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{5x}\cdot 5} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty;$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{e^x-1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2-1)'}{(e^x-1)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{e^x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

  $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(4x)'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4}{e^x} = 0.$

10.3.6. Megjegyzés

Visszavezetés $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ vagy $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ határozatlan alakokra:

a) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = (0\cdot\infty)$, akkor $f\cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}}$ átalakítással $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ típusú, illetve $f\cdot g = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$ átalakítással $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ típusú határértéket kapunk.

b) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = (\infty-\infty)$, akkor az $f+g = \dfrac{\frac{1}{f}+\frac{1}{g}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}$ azonosság szerinti átalakítás alkalmazható.

c) Ha $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = \begin{cases} 0^0 \\ \infty^0 \\ 1^\infty \end{cases}$, akkor az

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$$

azonosságot alkalmazzuk és kihasználjuk, hogy az exponenciális függvény folytonossága miatt:

$$\lim_{x\to x_0} e^{y(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} y(x)}.$$

10.3.7. Példa

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x;$

b) $\lim\limits_{x\to 0} 2x\mathrm{ctg}3x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{2}{1+10\ln x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$.

Megoldás:

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} 2x\mathrm{ctg}3x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\mathrm{tg}3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}=\dfrac{2}{3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\dfrac{1}{2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{2}{1+10\ln x}}=(0^0)=\lim\limits_{x\to 0} e^{\ln x^{\frac{2}{1+10\ln x}}}=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{2\ln x}{1+10\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln x}{1+10\ln x}}$

Vizsgáljuk a kitevőben lévő határértéket!

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x}{1+10\ln x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{10}{x}}=\dfrac{1}{5}$

Tehát:

$\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{2}{1+10\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln x}{1+10\ln x}}=e^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{e}$;

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=(\infty^0)=\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}}$

Vizsgáljuk a kitevőben lévő határértéket!

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{e^x+x}\cdot(e^x+1)}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x+x}=$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

Azaz:

$$\lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^1 = e;$$

f) $$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = (1^\infty) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

Vizsgáljuk a kitevőben lévő határértéket!

$$\lim_{x\to+\infty} 2x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{1+\frac{3}{x}} = 6.$$

Tehát:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} 2x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = e^6.$$

10.4 Teljes függvényvizsgálat

A differenciálszámítás segítségével a differenciálható függvények szélsőértékei (maximum, minimum) viszonylag egyszerűen megállapíthatók.

10.4.1. Tétel (szükséges feltétel a lokális szélsőérték létezésére)
Ha az x_0 helyen differenciálható $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvénynek az $x_0\in D_f$ helyen lokális szélsőértéke (maximuma vagy minimuma) van, akkor szükségképpen:

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás:
Tekintsük azt az esetet, amikor az x_0 pontban a függvénynek lokális maximuma van, azaz létezik x_0-nak olyan $K_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset D_f$ környezete, hogy

$$f(x) \le f(x_0)$$

teljesül bármely $x \in K_\delta(x_0)$ esetén.
Ha $x > x_0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0.$$

Ha viszont $x < x_0$, akkor

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

és

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Innen pedig az következik, hogy

$$f'(x_0) = 0.$$

Lokális minimum esetén a bizonyítás hasonló. □

10.4.2. Megjegyzés
A 10.4.1. Tételből következik, hogy szélsőértéke egy függvénynek csak ott lehet, ahol az első derivált nulla.

10.4.3. Definíció (stacionárius hely)
Az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökeit az f függvény stacionárius helyeinek nevezzük.

10.4.4. Megjegyzés
Szélsőérték csak stacionárius helyen lehet.

10.4.5. Tétel (szélsőérték meghatározása az első derivált előjelváltásának vizsgálatával)
Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, az $x_0 \in D_f$ stacionárius hely ($f'(x_0) = 0$) valamely $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezetben. Ha az $f'(x)$ deriváltfüggvény az x_0 helyen előjelet vált, akkor az f függvénynek az x_0 helyen lokális szélsőértéke van.
Ha $x < x_0$ esetén $f'(x) > 0$ és $x > x_0$ esetén $f'(x) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van x_0-ban. Fordított esetben pedig lokális minimuma.

Bizonyítás:
Az $f'(x) > 0$, $x < x_0$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az f függvény az $(x_0 - \delta, x_0)$ intervallumon szigorúan növekedő. Az $f'(x) < 0$, $x > x_0$

egyenlőtlenségből következik, hogy f az $(x_0, x_0 + \delta)$ intervallumon pedig szigorúan csökkenő. Tehát f-nek az x_0 helyen valóban lokális maximuma van. Hasonlóképpen bizonyítható a lokális minimum esete is. □

10.4.6. Tétel (a szélsőérték vizsgálata magasabbrendű deriváltakkal)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 stacionárius hely $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezetében legalább $2n$-szer $(n \geq 1)$ folytonosan differenciálható és

$$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,$$

továbbá

$$f^{(2n)}(x_0) > 0,$$

akkor az x_0 helyen lokális minimuma van az f függvénynek, ha

$$f^{(2n)}(x_0) < 0,$$

akkor az x_0 helyen lokális maximuma van.
Speciálisan $n = 1$ esetén, ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$, akkor a függvénynek lokális minimuma van az x_0 helyen. Ha pedig $f'(x) = 0$ és $f''(x_0) < 0$, akkor f-nek lokális maximuma van x_0-ban.

Bizonyítás:
Írjuk fel a függvény x_0 helyhez tartozó $(2n - 1)$-ed fokú Taylor-polinomját a Lagrange-féle maradéktaggal együtt:

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x-x_0)^{2n-1}+\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n},$$

amelyből a tétel feltételei miatt következik, hogy

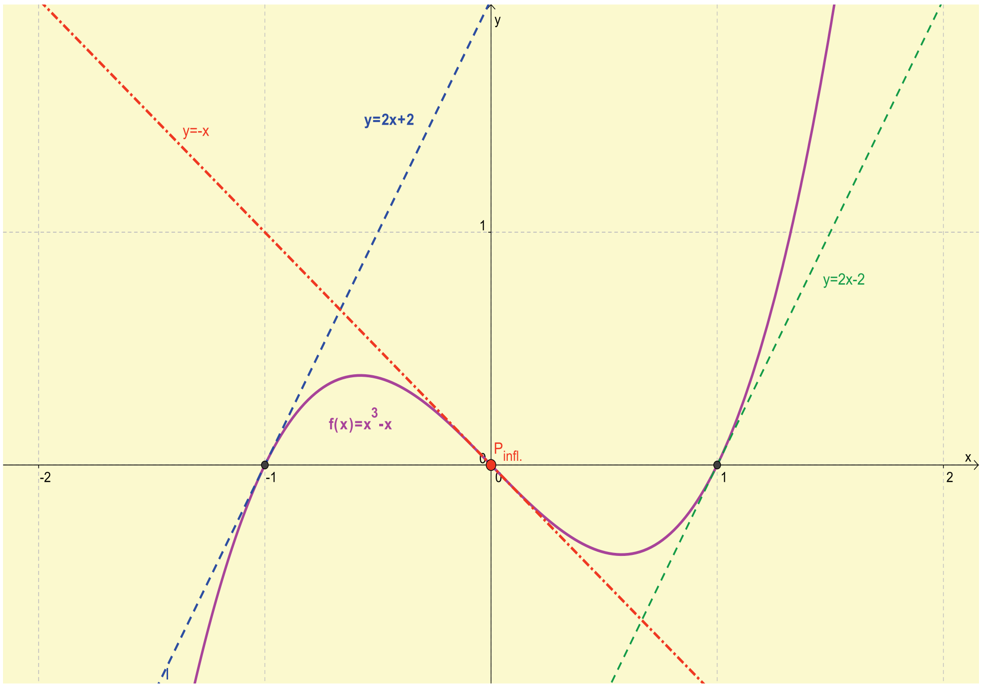
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n}.$$

Az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezet megfelelő megválasztásával biztosítható, hogy $f^{(2n)}(\xi)$ és $f^{(2n)}(x_0)$ előjele megegyezzen. Tehát az utóbbi formulában az $f^{(2n)}(x_0)$ derivált előjele dönti el, hogy az $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezetében a lokális minimumot kifejező $f(x) > f(x_0)$, illetve a lokális maximumot meghatározó $f(x) < f(x_0)$ egyenlőtlenségek közül melyik teljesül.
(Az $(x - x_0)^{2n}$ tényező a kitevő párossága miatt $x \neq x_0$ esetén pozitív.) □

10.4.7. Megjegyzés
A lokális szélsőértékek a monotonitási szakaszokat választják el egymástól.

10.4.8. Definíció (lokális konvexitás és konkavitás)
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az x_0 helyen lokálisan konvexnek, illetve lokálisan konkávnak nevezzük, ha létezik az x_0 helynek olyan $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ környezete, melyben a függvény grafikonja az x_0 helyhez tartozó érintő egyenes fölött, illetve alatta halad.

10.4.9. Példa
Az $f(x) = x^3 - x$ függvény az $x_0 = 1$ helyen lokálisan konvex. A függvény grafikonját lila színnel, az $x_0 = 1$ pontbeli érintőt pedig zöld színnel vázoltuk. Az $f(x) = x^3 - x$ függvény az $x_1 = -1$ helyen lokálisan konkáv. Az $x_1 = -1$ abszcisszájú ponthoz húzott érintőt kék színnel jelöltük.



10.3. ábra

10.4.10. Definíció (inflexiós pont)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának van az x_0 helyhez tartozó érintője, amely a $P_0(x_0, f(x_0))$ pontban át is metszi a függvény grafikonját, akkor a P_0 pontot a görbe inflexiós pontjának, az érintőt pedig inflexiós érintőnek nevezzük. (Lásd: 10.3. ábra)

10.4.11. Tétel (lokális konvexitás ill. konkavitás vizsgálat magasabbrendű deriváltakkal)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 hely $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezetében legalább $2n$-szer $(n > 1)$ folytonosan differenciálható és

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,$$

továbbá

$$f^{(2n)}(x_0) > 0,$$

akkor az x_0 helyen az f függvény lokálisan konvex, ellenben ha

$$f^{(2n)}(x_0) < 0,$$

akkor az x_0 helyen az f függvény lokálisan konkáv.

Bizonyítás:
Vizsgáljuk az f függvény x_0 helyhez tartozó $(2n-1)$-ed fokú Taylor-polinomját a Lagrange-féle maradéktaggal együtt:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x-x_0)^{2n-1} + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)^{(2n)}.$$

A tétel feltétele szerint

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,$$

így

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)^{(2n)}.$$

Ez utóbbi egyenlőség jobb oldalának első két tagja az f függvény x_0 helyhez tartozó

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

érintő egyenes jobb oldala. Így az $f^{(2n)}(x_0)$ kifejezés előjele dönti el, hogy a függvény görbéje az x_0 környezetében érintője fölött vagy alatta halad. □

10.4.12. Következmény
Speciálisan, ha

$$f''(x_0) > 0,$$

akkor az x_0 pontban az f függvény lokálisan konvex, ha pedig

$$f''(x_0) < 0,$$

akkor az x_0 pontban az f függvény lokálisan konkáv.

10.4.13. Példa
Vizsgáljuk meg konvexitás szempontjából az $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ függvényt!

Megoldás:
Határozzuk meg $f'(x)$-et és $f''(x)$-et!

$$f'(x) = 6x + 4, \qquad f''(x) = 6.$$

Mivel

$$f''(x) = 6 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

így $f(x)$ konvex $\mathbb{R}$-en.

10.4.14. Tétel (inflexiós pont meghatározása magasabbrendű deriváltakkal)
Ha az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az x_0 hely $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ környezetében legalább $(2n + 1)$-szer folytonosan differenciálható és

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0,$$

valamint

$$f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0,$$

akkor x_0 az f függvény inflexiós pontja.
Speciálisan, ha $n = 1$, akkor

$$f''(x_0) = 0 \qquad \text{és} \qquad f'''(x_0) \neq 0$$

esetén x_0 inflexiós pont.

Bizonyítás:
Induljunk ki az f függvény x_0 pontbeli $2n$-ed fokú Taylor-polinomjából:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x - x_0)^{2n} + \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{(2n+1)}.$$

A tétel feltétele szerint:

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = ... = f^{(2n)}(x_0) = 0,$$

így

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{(2n+1)}.$$

A függvény grafikonja és x_0-pontbeli érintője egymáshoz viszonyított helyzetét vizsgálva könnyű észrevenni, hogy az

$$\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}(x - x_0)^{(2n+1)}$$

kifejezés az x_0 helyen a $(2n+1)$ kitevő páratlansága miatt előjelet vált, ezért a függvény grafikonja attól függően halad az érintő fölött vagy alatt, hogy $x < x_0$ vagy $x > x_0$. □

10.4.15. Megjegyzés
Hasonlóképpen, mint a szélsőérték meghatározásánál, a második derivált előjelváltozásának vizsgálatával el tudjuk dönteni, hogy az

$$f''(x_0) = 0$$

szükséges feltétel teljesülése mellett x_0 inflexiós pont-e vagy sem. Ha f'' az x_0 helyen előjelet vált, akkor x_0 inflexiós pont.

10.4.16. Megjegyzés
Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény teljes vizsgálatát a következő lépésekben célszerű elvégezni:

1. A D_f értelmezési tartomány megállapítása, a zérushelyek meghatározása az $f(x) = 0$ egyenlet gyökeinek felírásával.
2. Az f függvény párosságának, páratlanságának és periodicitásának vizsgálata.
3. A stacionárius helyek meghatározása az $f'(x_0) = 0$ egyenlet gyökeinek kiszámításával.
4. A szélsőértékek megállapítása.
5. Monoton szakaszok keresése.
6. Inflexiós helyek keresése az $f''(x_0) = 0$ egyenlet megoldásával.
7. Konvex és konkáv szakaszok szétválasztása.
8. Az értelmezési tartomány határpontjaiban a határértékek kiszámítása.
9. Folytonosságvizsgálat.
10. A korlátosság eldöntése és az értékkészlet megállapítása.
11. A függvény grafikonjának vázolása.

10.4.17. Példa
Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ függvényen, majd vázoljuk a függvény grafikonját!

Megoldás:

$D_f = \mathbb{R}$. A függvénynek nincs zérushelye, mert $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Az f függvény páros, mert

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(-x)^2} = f(-x).$$

A függvény grafikonja tehát az y-tengelyre szimmetrikus.
Célszerű kiszámítani az első, a második és a harmadik deriváltat:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \quad f''(x) = 2 \cdot \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}; \quad f'''(x) = 24 \cdot \frac{x-x^3}{(1+x^2)^4}.$$

Vizsgáljuk az

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

egyenletet! Könnyen látható, hogy az $x = 0$ helyen lehetséges szélsőérték. Mivel

$$f''(0) = -2 < 0,$$

így az $x = 0$ helyen van szélsőérték és az maximum. Azaz

$$P_{\max} = (0, 1).$$

A monoton szakaszok megadásához vizsgáljuk az első derivált előjelét!

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

A felírt tört nevezője $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén pozitív, így az első derivált előjelét a számláló előjele határozza meg:

- Ha $x < 0$, akkor $f'(x) > 0$, azaz f monoton nő a $-\infty < x < 0$ intervallumban.
- Ha $x > 0$, akkor $f'(x) < 0$, azaz f monoton csökken a $0 < x < \infty$ intervallumban.

Az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele, hogy

$$f''(x) = 2 \cdot \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3} = 0$$

teljesüljön. Azaz

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

helyeken lehet inflexió. Mivel

$$f'''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 0,$$

így az $x_{1,2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ helyeken van inflexió.
Az inflexiós pontok koordinátái:

$$I_1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right); \qquad I_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right).$$

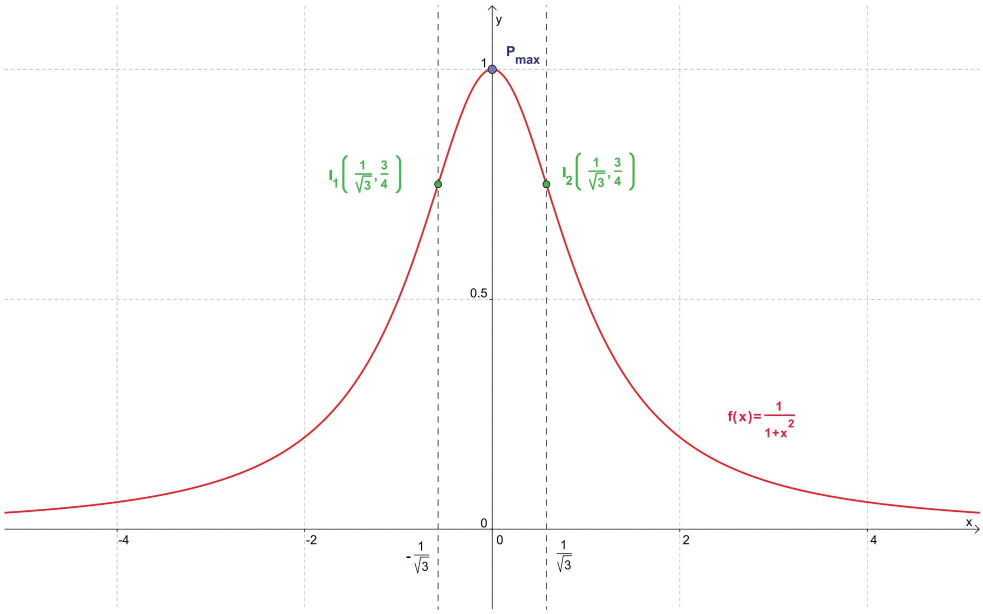
A konvex és konkáv szakaszok megtalálásához vizsgáljuk a második deriváltelőjelét! Egyszerű számításokból adódik, hogy:

- $f''(x) > 0$, azaz a függvény konvex, ha
$$-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < x < +\infty;$$
- $f''(x) < 0$, azaz a függvény konkáv, ha
$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A függvény folytonos,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0.$$

A függvény korlátos. Alsó korlátja például a 0, felső korlátja pedig 1. Értékkészlete: $R_f = (0,1]$. A függvény grafikonja:



10.4. ábra

10.4.18. Példa
Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = x^2 \cdot e^x$ függvényen, majd vázoljuk a függvény grafikonját!

Megoldás:
$D_f = \mathbb{R}$.
Keressük meg a függvény zérushelyeit:

$$f(x) = x^2 \cdot e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = 0.$$

A függvény nem páros és nem páratlan. Szakadási helye nincs. Számítsuk ki az első, a második és a harmadik deriváltat!

$$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x; \quad f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x; \quad f'''(x) = (x^2 + 6x + 6)e^x$$

Vizsgáljuk az

$$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x = 0$$

egyenletet a stacionárius helyek meghatározásához! Látható, hogy az $x_1 = 0$ és az $x_2 = -2$ helyeken lehetséges szélsőérték. Mivel

$$f''(0) = 2 > 0,$$

így az $x = 0$ helyen van szélsőérték és ez minimum. Azaz

$$P_{\text{min}} = (0, 0);$$

továbbá

$$f''(-2) = -\frac{2}{e^2} < 0,$$

így az $x_2 = -2$ helyen is van szélsőérték és ez maximum. Azaz

$$P_{\text{max}} = (-2, 4e^{-2}).$$

A monotonitás megállapításához vizsgáljuk az első derivált előjelét! Mivel $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, így az első derivált előjelét a $(x^2 + 2x)$ kifejezés határozza meg. Tehát:

- Ha $x < -2$ vagy $x > 0$, akkor $f'(x) > 0$, azaz f monoton nő.
- Ha pedig $-2 < x < 0$, akkor $f'(x) < 0$, azaz f monoton csökken.

Az inflexiós pontok megadásához tekintsük az

$$f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x = 0$$

egyenletet gyökeit:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Ezeken a helyeken lehet inflexió. Mivel

$$f'''\left(-2 \pm \sqrt{2}\right) \neq 0,$$

így az $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ helyeken van inflexió. A konvex és konkáv szakaszok meghatározásához vizsgáljuk a második derivált előjelét! Egyszerű számításokkal igazolható, hogy:

- $f''(x) > 0$, azaz a függvény konvex, ha

$$-\infty < x < -2 - \sqrt{2} \quad \text{és} \quad -2 + \sqrt{2} < x < +\infty;$$

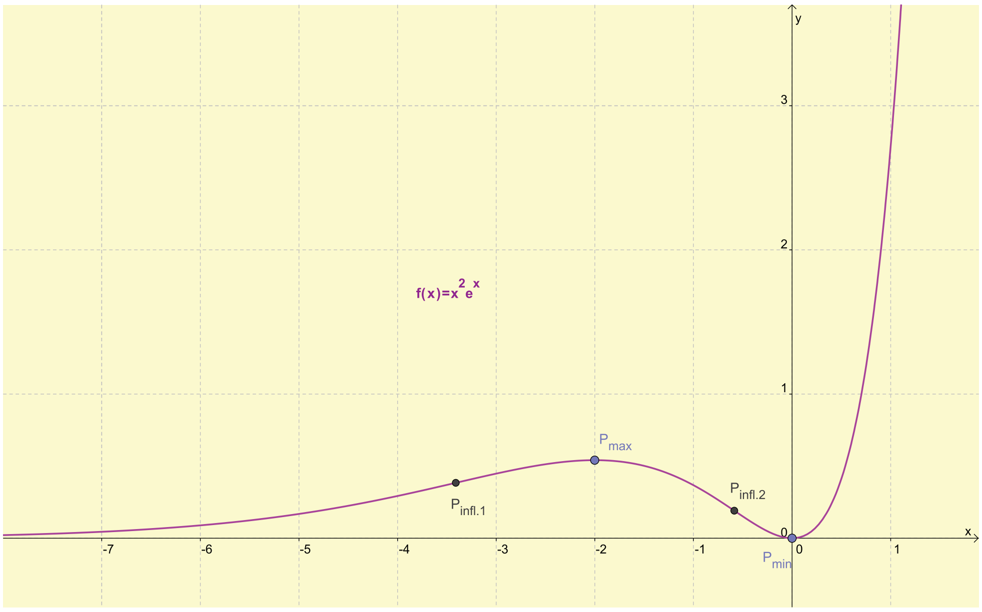
- $f''(x) < 0$, azaz a függvény konkáv, ha

$$-2 - \sqrt{2} < x < -2 + \sqrt{2}.$$

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty;$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{-e^{-x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0.$

A függvény grafikonja:



10.5. ábra

10.4.19. Példa

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ függvényen, majd vázoljuk a függvény grafikonját!

Megoldás:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = \mathbb{R}^+$. Keressük meg a függvény zérushelyét:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 0,$$

azaz a függvénynek egy zérushelye van:

$$x = 1.$$

A függvény nem páros és nem páratlan. Szakadási helye nincs. Számítsuk ki az első, a második deriváltat!

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}; \qquad f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}.$$

Vizsgáljuk az

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = 0$$

egyenletet a stacionárius helyek meghatározásához! Könnyen látható, hogy az egyetlen stacionárius hely

$$x = e^2.$$

Mivel

$$f''(e^2) = -\frac{1}{2e^4} < 0,$$

így az $x = e^2$ helyen van szélsőérték és ez maximum. Azaz

$$P_{\max} = \left(e^2, \frac{2}{e}\right).$$

A monotonitás megállapításához vizsgáljuk az első derivált előjelét! Mivel $D_f = \mathbb{R}^+$, így az első derivált előjelét a $(2 - \ln x)$ kifejezés előjele határozza meg. Tehát:

- Ha $0 < x < e^2$, akkor $f'(x) > 0$, azaz f monoton nő.
- Ha pedig $x > e^2$, akkor $f'(x) < 0$, azaz f monoton csökken.

Az inflexiós pont megadásához tekintsük az

$$f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}} = 0$$

egyenletet! Egy lehetséges inflexiós pont adódik az

$$x = \sqrt[3]{e^8}$$

helyen. A harmadik derivált segítségével ellenőrizhető, hogy itt valóban van inflexiós pont. Azaz

$$P_{infl.} = \left(\sqrt[3]{e^8}, \frac{8}{3\cdot\sqrt[3]{e^4}}\right).$$

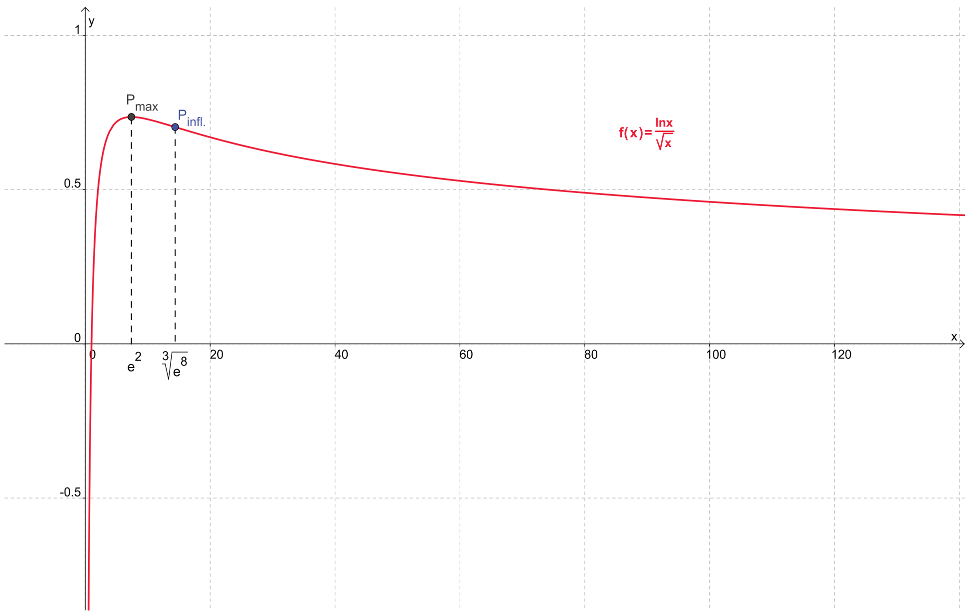
A konvex és konkáv szakaszok meghatározásához vizsgáljuk a második derivált előjelét! Könnyen látható, hogy:

- $f''(x) > 0$, azaz a függvény konvex, ha $x > \sqrt[3]{e^8}$,
- $f''(x) < 0$, azaz a függvény konkáv, ha $x < \sqrt[3]{e^8}$.

Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}} = 0;$
- $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty.$

A függvény grafikonja:



10.6. ábra

11 Valós számsorok

11.1 Konvergencia és divergencia

A végtelen numerikus sorok a matematikai analízis egy igen szép és különböző alkalmazásokban szinte nélkülözhetetlen fejezetét alkotják. A végtelen valós számsort a végtelen valós számsorozat segítségével értelmezzük.

11.1.1. Definíció (valós számsor)
Legyen adott egy végtelen valós számsorozat:

$$a_1, a_2, ..., a_n, ..., \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

A számsorozat elemeiből képzett végtelen sok tagból álló

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

formális összeget, vagy a szumma jel felhasználásával rövidebben írva, az

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11.1}$$

kifejezést végtelen valós számsornak nevezzük.
Az $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ számok a végtelen sor tagjai, ahol a_n a sor n-edik tagja.

11.1.2. Megjegyzés
A (11.1) valós számsorban az összegzés kezdő indexe nem szükségképpen 1. A

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{11.2}$$

végtelen sok tagból álló összeg, ahol k bármilyen egész szám lehet, szintén végtelen valós számsort határoz meg.

A továbbiakban a (11.1) alakú valós számsorokat vizsgáljuk. Felmerülhet a kérdés, hogy vajon mindig létezik-e a (11.1) kifejezésnek véges valós összege? Ha egyáltalán létezik, akkor hogyan lehet meghatározni ezen összeget?

11.1.3. Definíció (valós számsor n-edik részletösszege)
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen valós számsor n-edik részletösszegének az

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{11.3}$$

n-tagú összeget, azaz a sor első n tagjának összegét nevezzük.

11.1.4. Definíció (részletösszegek sorozata)
Az S_n részletösszegekből alkotott végtelen

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{11.4}$$

sorozatot a végtelen sor részletösszegei sorozatának nevezzük.

11.1.5. Megjegyzés
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen valós számsorhoz hozzárendeltük a részletösszegek végtelen $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatát. Nyilvánvaló, hogy $n \geq 2$ esetén

$$S_n - S_{n-1} = a_n.$$

Ezért, ha a részletösszegek sorozatából képezzük az

$$S_1+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+...+(S_n-S_{n-1})+... = a_1+a_2+a_3+...+a_n+... \tag{11.5}$$

végtelen sort, akkor visszakapjuk az eredeti sort, melynek n-edik részletösszege pontosan S_n:

$$S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + ... + (S_n - S_{n-1}) = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = S_n.$$

Ezzel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen számsor és az ahhoz rendelt $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ részletösszegek sorozata között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk. Ez lehetővé teszi azt, hogy a végtelen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sorok kovergenciáját az $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ részletösszegek sorozatának konvergenciájával értelmezzük.

11.1.6. Definíció (sor konvergenciája, összege)
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen valós számsor konvergens, ha az $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ részletösszegei sorozatának létezik S véges határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + ... + a_n) = S. \tag{11.6}$$

Egy konvergens sor összegén a sor részletösszegei sorozatának határértékét értjük, azaz

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + ... + a_n). \tag{11.7}$$

11.1.7. Definíció (divergens sor)
Ha az $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat divergens, akkor a sor is divergens. Divergens sor esetén azt mondjuk, hogy annak nincs összege.

11.2 Cauchy-féle konvergencia kritérium

Ha a végtelen sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergencia kritériumot (5.2.2. Tétel) alkalmazzuk az $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ részletösszegek sorozatára, akkor megkapjuk a végtelen valós számsorokra vonatkozó szükséges és elégséges feltételt biztosító Cauchy-féle konvergencia kritériumot.

11.2.1. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra)
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen számsor akkor és csak akkor konvergens, ha a részletösszegek* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *végtelen sorozata Cauchy-féle sorozat, azaz ha* $\forall \varepsilon > 0$ *esetén létezik* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *küszöbszám, hogy* $\forall p, q > n_0(\varepsilon)$*,* $p, q \in \mathbb{N}$ *esetén:*

$$|S_p - S_q| < \varepsilon. \tag{11.8}$$

11.2.2. Megjegyzés
Speciálisan, ha $q = p + 1$, akkor azt kapjuk (11.8)-ból, hogy

$$|S_p - S_{p+1}| = |a_1 + ... + a_p - (a_1 + ... + a_p + a_{p+1})| = |-a_{p+1}| < \varepsilon. \tag{11.9}$$

Ebből következik az alábbi tétel.

11.2.3. Tétel (sor konvergenciájának szükséges feltétele)
Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *végtelen sor konvergens, akkor szükségképpen a sor* n*-edik* a_n *tagja nullához tart:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{11.10}$$

Bizonyítás:
A sor n-edik tagja:

$$a_n = S_n - S_{n-1}.$$

Mivel a sor konvergens, ezért

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

□

11.2.4. Megjegyzés

A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ egyenlőség a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának csak szükséges, de nem elégséges feltétele. A 11.2.3. Tétel számos esetben jól alkalmazható valós sor divergenciájának megállapítására. Erre mutatunk be néhány példát az alábbiakban.

11.2.5. Példa

a) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n+1}$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \neq 0.$$

b) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{8n^3-5}+2n}$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{8n^3-5}+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[3]{8-\frac{5}{n^3}}+2} = \frac{3-\sqrt{1+0}}{\sqrt[3]{8-0}+2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

c) A $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \sqrt{n}$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty \neq 0.$$

d) A $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln n$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \ln n = \infty \neq 0.$$

e) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{(-2)}{n}\right)^n = e^{-2} \neq 0.$$

f) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$ sor divergens, mert

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, \text{ ha } n \text{ páros} \\ -1, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases},$$

vagyis a $\{\cos(n\pi)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat divergens.

g) A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{e}}{\dfrac{n+1}{n}} \right)^n$ sor divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{e}}{\dfrac{n+1}{n}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{e} = 1 \neq 0.$$

11.3 A harmonikus és a geometriai sor

11.3.1. Definíció (harmonikus sor)
A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... \tag{11.11}$$

végtelen sort harmonikus sornak nevezzük.

11.3.2. Állítás
A harmonikus sor divergens.

Bizonyítás:
Megmutatjuk, hogy a harmonikus sor nem tesz eleget a Cauchy-féle szükséges és elégséges feltételnek (11.2.1. Tétel).
A sor S_{2n} és S_n részletösszegeire fennáll, hogy:

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát nem teljesül a Cauchy-féle konvergencia kritérium, mivel $p = 2n$ és $q = n$ esetén

$$|S_p - S_q| = |S_{2n} - S_n| \geq \frac{1}{2},$$

tehát van olyan $\varepsilon > 0$, például $\varepsilon = \frac{1}{2}$, hogy $|S_p - S_q| < \varepsilon$ nem teljesül. □

11.3.3. Megjegyzés
A harmonikus sor esetén a 11.2.3. Tétel szükséges feltétele teljesül, hiszen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Azonban a harmonikus sor divergens (11.3.2. Állítás), mivel a 11.2.3. Tétel egy sor konvergenciájára elégséges feltételt nem ad.

11.3.4. Megjegyzés
Korábban (5.4.3. Tétel) igazoltuk, hogy az $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}=\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ mértani sorozatra teljesül a következő:

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0, & \text{ha } |q|<1\\ 1, & \text{ha } q=1\\ \text{divergens}, & \text{ha } |q|>1 \text{ vagy } q=-1\end{cases}$$

Vizsgáljuk most az ún. geometriai (mértani) sort!

11.3.5. Definíció (geometriai sor)
Az

$$a+aq+aq^2+...+aq^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}aq^n,\quad a\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\quad q\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\tag{11.12}$$

alakú sort végtelen geometriai sornak nevezzük.

11.3.6. Példa
Határozzuk meg, hogy milyen q értékekre konvergens a geometriai sor és számítsuk ki konvergencia esetén a végtelen sor összegét!

Megoldás:
A geometriai sor n-edik részletösszege:

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}aq^i=a\cdot\frac{1-q^n}{1-q},\quad q\neq 1.\tag{11.13}$$

Ez az összefüggés teljes indukcióval bizonyítható:

1. $n=1$ esetén az egyenlőség teljesül:

$$S_1=a=a\cdot\frac{1-q}{1-q}=a;$$

2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra:

$$S_k = a + aq + ... + aq^{k-1} = a \cdot \frac{1-q^k}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

3. Igazoljuk, hogy az állítás fennáll $n = k+1$-re is:

$$S_{k+1} = a+aq+...+aq^{k-1}+aq^k = a \cdot \left(\frac{1-q^k}{1-q} + q^k \right) = a \left(\frac{1-q^k+q^k-q^{k+1}}{1-q} \right) = a \left(\frac{1-q^{k+1}}{1-q} \right).$$

A mértani $\{q^n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat konvergenciájára vonatkozó (11.3.4. Megjegyzés) formula alapján ismeretes, hogy $|q| < 1$ esetén a sorozat konvergens, ezért ha:

a) $|q| < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ mértani sor is konvergens lesz, mivel (11.13) alapján:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = a \cdot \frac{1}{1-q} = S. \tag{11.14}$$

b) $q = 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + a + ... + a + ...$$

divergens, mivel a konvergencia szükséges feltétele (11.2.3. Tétel) nem teljesül, azaz:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0.$$

c) $q = -1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a - a + a - a + ...$$

szintén divergens sor, hiszen itt sem teljesül a konvergencia szükséges feltétele (11.2.3. Tétel).

d) $|q| > 1$, akkor a sor divergens, mivel nem létezik véges

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

határérték és nem teljesül a szükséges

$$\lim_{n\to\infty} aq^n = 0$$

feltétel sem.

11.3.7. Példa
Vizsgáljuk konvergencia szempontjából az alábbi sort és számítsuk ki az összegét, amennyiben lehetséges!

$$4+4\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Megoldás:
A megadott sor mértani sor, ahol $a=4$ és $q=\dfrac{1}{4}$. Ezért a sor konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=a\cdot\frac{1}{1-q}=4\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}=S.$$

11.3.8. Példa
Számítsuk ki az alábbi sorok összegét!

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{2n+1}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^{n+2}}$;

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{5}{9^k}-\frac{2}{9^{k+1}}\right)$.

Megoldás:

a) A feladatban szereplő mértani sorra $q=\dfrac{1}{25}$, azaz $|q|<1$, így (11.14) alkalmazható:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^{2n+1}}=\frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{25}\right)^n=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{25}}=\frac{5}{24}.$$

b) Ebben az esetben $q=-\dfrac{1}{4}$, azaz $|q|<1$ most is teljesül, így (11.14) alkalmazható:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)}=\frac{4}{5}.$$

c) Az előzőekhez hasonlóan (11.14) alkalmazásával oldjuk meg a feladatot:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n+2}} = \frac{5}{2^3} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{5}{8} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}.$

d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{5}{9^k} - \frac{2}{9^{k+1}} \right) = \frac{5}{9^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} - \frac{2}{9^3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \left(\frac{5}{9^2} - \frac{2}{9^3} \right) \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} =$
$= \left(\frac{5}{9^2} - \frac{2}{9^3} \right) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{43}{648}.$

11.4 Pozitív tagú végtelen valós sorok

A szükséges és elégséges Cauchy-féle konvergencia kritérium alkalmazása a gyakorlatban általában nehézkes. Azonban a végtelen sorok speciális osztályaira ismertek olyan elégséges konvergencia (illetve divergencia) feltételek, amelyek könnyen alkalmazhatóak. Egy ilyen osztályt képeznek a pozitív tagú sorok.

11.4.1. Definíció (pozitív tagú végtelen valós sor)

Ha a végtelen valós $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *sor tagjai pozitív számok, azaz* $a_i > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén, akkor a sort pozitív tagú sornak nevezzük.*

11.4.2. Tétel (felülről korlátos részletösszegű sor konvergenciája)

Ha a pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor n-edik részletösszegeinek*

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1 + ... + a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

sorozata felülről korlátos, akkor a sor konvergens.

Bizonyítás:
A pozitív tagú sor részletösszegeinek sorozata szigorúan monoton növekvő, mivel

$$S_n - S_{n-1} = a_n > 0,$$

ahonnan

$$S_n > S_{n-1}.$$

Az 5.1.2. Tétel szerint minden monoton növekvő felülről korlátos sorozat konvergens, azaz létezik véges határértéke a részletösszegek sorozatának:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

$\square$

11.4.3. Definíció (majoráns ill. minoráns sorok)
A pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sor a pozitív tagú* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor majoránsa (majoráns sora), ha van olyan* n_0 *index, amelyre* $n \geq n_0$ *esetén*

$$a_n \leq b_n.$$

Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sort a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sor minoránsának (minoráns sorának) mondjuk.*

11.4.4. Tétel (majoráns kritérium)
Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *pozitív tagú sor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *majoráns sora konvergens, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *(minoráns) sor is konvergens.*

Bizonyítás:
Ha a majoráns sor konvergens, akkor n-edik részletösszegeinek sorozata korlátos:

$$S_n^b = b_1 + ... + b_n < M, \quad M > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Az $a_n \leq b_n$ feltétel miatt:

$$S_n^a = a_1 + ... + a_n \leq b_1 + ... + b_n < M, \quad M > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

ami az $\{S_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat korlátosságát jelenti. Így a 11.4.2. Tétel szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. $\square$

11.4.5. Tétel (minoráns kritérium)
Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *pozitív tagú sor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *minoráns sora divergens, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *(majoráns) sor is divergens.*

Bizonyítás:
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegeinek sorozata felülről nem korlátos. Ekkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \geq a_n)$ majoráns sor részletösszegei sem korlátosak. Így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens. $\square$

11.4.6. Példa
Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$ sor?

Megoldás:
Tekintsük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ mértani sort. Ez a sor konvergens, mivel $-1 < q = \frac{1}{3} < 1$. Továbbá

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

így a konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ sor az adott $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ sor majoránsa. Tehát a majoráns kritérium (11.4.4. Tétel) alapján az adott sor is konvergens.

11.4.7. Példa
Konvergens-e a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor?

Megoldás:
Mivel

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, ezért a minoráns kritérium (11.4.5. Tétel) szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor is divergens.

11.4.8. Tétel (D'Alembert-féle hányados kritérium)
A pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens, ha található olyan* 1*-nél kisebb pozitív* q *valós szám, amelyre bizonyos* $n_0 \in \mathbb{N}$ *indextől kezdve teljesül, hogy:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad \forall n \geq n_0.$$

Bizonyítás:
A feltétel miatt:

$$a_{n_0+1} \leq q a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} \leq q a_{n_0+1} \leq q^2 a_{n_0}, \quad a_{n_0+3} \leq q^3 a_{n_0}, \quad ..., a_{n_0+k} \leq q^k a_{n_0}, ...$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy az

$$a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + ... + a_{n_0+k} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_0+i}$$

sor majoránsa az

$$a_{n_0} \cdot (1 + q + q^2 + ... + q^k + ...) = a_{n_0} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i$$

mértani sor. Mivel $q < 1$, ezért a geometriai sor konvergens és a majoráns kritérium értelmében a minoráns $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n_0+i}$ sor is konvergens. Ehhez hozzáadva a véges számú tagból álló

$$a_1 + a_2 + ... + a_{n_0-1}$$

összeget, az eredeti $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sort kapjuk, amely ezek szerint konvergens. $\square$

11.4.9. Megjegyzés
Jean Le Rond *D'Alembert* (1716 - 1783), francia matematikus és fizikus. A francia felvilágosodás egyik kiemelkedő egyénisége. Elhagyott gyerekként találtak rá egy templom közelében. Egy özvegyasszonynál nevelkedett. Tehetsége hamar megmutatkozott és pályája töretlenül ívelt felfelé. 1754-ben már a francia akadémia titkára volt. A differenciálegyenletek elméletének egyik kidolgozója. Az analízist igyekezett a határérték-fogalomra építeni. Sokat fáradozott az algebra alaptételének bizonyításán.

11.4.10. Példa
Vizsgáljuk meg a hányadoskritériummal a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

harmonikus sort!

Megoldás:
Alkalmazzuk a 11.4.8. Tételt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Azonban nem található olyan 1-nél kisebb $q(< 1)$ szám, amelynél az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ hányados minden $n \in \mathbb{N}$ esetén kisebb lenne. Tehát a hányados kritériummal nem lehet eldönteni a konvergenciát.
Korábban már megmutattuk (11.3.2. Állítás), hogy a harmonikus sor divergens.

11.4.11. Példa
Vizsgáljuk meg a hányadoskritériummal, hogy konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + ...$$

pozitív tagú sor!

Megoldás:
Mivel $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, ezért

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \leq q < 1.$$

Például $n_0 \geq 2$ esetén:

$$q = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4} < 1,$$

és minden $n \geq n_0 = 2$ esetén:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n} \leq \frac{3}{4} < 1,$$

mivel

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq \frac{3}{4}.$$

A sor tehát konvergens.

A gyakorlatban egyszerűbben használható a hányados kritérium speciális határátmenetes változata.

11.4.12. Tétel (speciális D'Alembert-féle hányados kritérium)
Ha a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *valós sor esetén:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} M < 1, & \textit{akkor a sor konvergens;} \\ M > 1, & \textit{akkor a sor divergens;} \\ M = 1, & \textit{akkor a hányados kritériummal nem dönthető el} \\ & \textit{a konvergencia ill. a divergencia.} \end{cases}$$

Bizonyítás:
Ha $M < 1$, akkor bizonyos $n = n_0$ indextől kezdve

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1, \quad \forall n \geq n_0,$$

így a sor a 11.4.8. Tétel szerint konvergens.
Ha $M > 1$, akkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \forall n \geq n_0,$$

azaz a sor divergens.
Ha $M = 1$, akkor a sor divergens és konvergens is lehet. Mindkét esetre mutatunk példát az alábbiakban. $\square$

11.4.13. Példa
Vizsgáljuk meg a speciális hányadoskritériummal (11.4.12. Tétel) a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

harmonikus sort!

Megoldás:
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ sor esetén:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1=M,$$

és tudjuk (11.3.2. Állítás), hogy a sor divergens.

11.4.14. Példa
Vizsgáljuk meg a speciális hányadoskritériummal (11.4.12. Tétel) a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$$

pozitív tagú sort!

Megoldás:
Ekkor

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^2+n+1}:\frac{1}{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1.$$

Azonban az adott sor konvergens, mivel részletösszegeinek $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozata konvergens. Résztörtekre bontással:

$$\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

így a sor n-edik részletösszege:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

A 11.1.6. Definíció alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}$ sor konvergens és az összege 1.

11.4.15. Megjegyzés
Vegyük észre, hogy S_n kiszámításakor (11.4.14. Példa) a valós számok asszociatív törvényét véges sok tagszám esetén alkalmaztuk. Végtelen tagszámra nem alkalmazható!

11.4.16. Példa
A D'Alambert-féle hányadoskritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^n}{3^n n!}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)}$.

Megoldás:

a) Alkalmazzuk a 11.4.12. Tételt!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)\,n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1,$$

tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ sor konvergens.

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e},$$

tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ sor konvergens a 11.4.12. Tétel szerint, mivel $\frac{1}{e} < 1$.

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{2n+7} = 1,$$

tehát a D'Alembert-féle hányados kritérium nem dönt a sor konvergenciájáról.

Mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+5} \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7n} = \frac{1}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, így a vizsgált sor is divergens, hiszen az $\dfrac{1}{7} \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sorral minorálható, amely divergens.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \dfrac{3^n n!}{2n^n} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{3} < 1$,
így a vizsgált sor konvergens.

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \dfrac{1}{4} < 1$,

tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ sor konvergens.

11.4.17. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium)
A pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *valós sor konvergens, ha létezik olyan* 1*-nél kisebb pozitív* q *szám* ($q < 1$)*, melyre bizonyos* $n_0 \in \mathbb{N}$ *indextől kezdve bármely* $n \geq n_0$ *esetén*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

teljesül.

Bizonyítás:
A feltétel szerint

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

azaz

$$a_n \leq q^n.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ sor $q < 1$ esetén konvergens, így a majoráns kritérium alapján (11.4.4. Tétel) az adott $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens. □

11.4.18. Tétel (speciális Cauchy-féle gyökkritérium)
Ha a pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *valós sor esetén:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} M < 1, & \textit{akkor a sor konvergens;} \\ M > 1, & \textit{akkor a sor divergens;} \\ M = 1, & \textit{akkor a sor lehet konvergens is, de lehet divergens is.} \end{cases}$$

Bizonyítás:
Ha $M < 1$, akkor egy bizonyos n_0 indextől kezdve

$$\sqrt[n]{a_n} \le q < 1, \quad \forall n \ge n_0$$

esetén és így a sor a 11.4.17. Tétel szerint konvergens.
Ha $M > 1$, akkor

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \forall n \ge n_0$$

esetén és így a sor divergens. □

11.4.19. Példa
Vizsgáljuk meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$ sort konvergencia szempontjából!

Megoldás:
A 11.4.18. Tétel felhasználásával:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

A sor tehát konvergens.

11.4.20. Példa
A Cauchy-féle gyökkritérium segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek!

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2-8n-5}{n^2+10n+7}\right)^n$;

Megoldás:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{3} = \dfrac{1}{3} < 1$, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$ sor konvergens.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 3 > 1$, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n^2}$ sor divergens.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{2n^2-8n-5}{n^2+10n+7}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-8n-5}{n^2+10n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-\dfrac{8}{n}-\dfrac{5}{n^2}}{1+\dfrac{10}{n}+\dfrac{7}{n^2}} = 2 > 1,$

tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2-8n-5}{n^2+10n+7}\right)^n$ sor divergens.

11.4.21. Megjegyzés

Ha a hányados kritérium alkalmazása esetén az $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak illetve a gyökkritérium alkalmazása során a $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak nincs határértéke, azaz nem létezik

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{illetve} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

de a $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat illetve a $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat torlódási helyeinek van felső határa (limesz superiorja), akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergenciájának elégséges feltétele az alábbi egyenlőtlenségek teljesülése:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \qquad \text{illetve} \qquad \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

11.5 Szabályosan váltakozó előjelű sorok

A végtelen valós sorok egy speciális osztályát alkotják azok a sorok, amelyek tagjai váltakozó előjellel követik egymást.

11.5.1. Definíció (váltakozó előjelű sor, alternáló sor)

Váltakozó előjelű sornak azokat a numerikus sorokat nevezzük, amelyekben a szomszédos tagok előjele különböző:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1} \cdot a_n + ..., \tag{11.15}$$

és $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén. A váltakozó előjelű sort alternáló sornak is nevezzük.*

11.5.2. Megjegyzés

A (11.15) sorban az első tag előjele pozitív. A

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \cdot a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^{n} \cdot a_n + ..., \tag{11.16}$$

sor is alternáló, de az első tag előjele negatív ($a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

11.5.3. Definíció (Leibniz - típusú alternáló sor)
A

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n \qquad \textit{vagy} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot a_n$$

alternáló sort Leibniz - típusúnak nevezzük, ha:

a) az a_n *pozitív számok monoton csökkenő* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozatot alkotnak, azaz* $\forall n \in \mathbb{N}$ *esetén:*

$$a_{n+1} \le a_n;$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *azaz* $\forall \varepsilon > 0$ *esetén* $\exists n = n_0(\varepsilon)$, *melyre* $a_n < \varepsilon$ *bármely* $n \ge n_0$ *esetén.*

11.5.4. Definíció (alternáló sor n-edik maradéktagja)
A

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1}\cdot a_n + (-1)^{n+2}\cdot a_{n+1} + ..., \qquad (\forall a_n > 0)$$

alternáló sor n-edik maradéktagja az

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k+1}\cdot a_{n+k} = \begin{cases} a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - ..., & \textit{ha } n \textit{ páros;} \\ -a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} + ..., & \textit{ha } n \textit{ páratlan} \end{cases}$$

végtelen sor, amely szintén alternáló.

11.5.5. Tétel (Leibniz-típusú sor n-edik maradéktagjának becslése)
Ha a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$$

sor Leibniz-típusú alternáló sor, akkor n-edik maradéktagjára fennáll az alábbi becslés:

$$|R_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{n+k+1}\cdot a_{n+k}\right| \le a_{n+1}.$$

Bizonyítás:
Ha

$$R_n = a_{n+1} - a_{n+2} + ... = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+3} - a_{n+4}) + ...,$$

azaz n páros, akkor

$$a_{k+1} \le a_k$$

miatt

$$R_n \ge 0.$$

Másrészt
$$R_n = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - ...$$
és mindegyik zárójelben pozitív szám szerepel:
$$a_{n+2} - a_{n+3} \geq 0, \quad a_{n+4} - a_{n+5} \geq 0, ...,$$
ezért
$$R_n \leq a_{n+1}.$$
Igazoltuk, hogy
$$0 \leq R_n \leq a_{n+1}.$$
Ha pedig
$$R_n = -a_{n+1} + a_{n+2} - a_{n+3} ...,$$
azaz n páratlan, akkor hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy
$$-a_{n+1} \leq R_n \leq 0.$$
Tehát
$$-a_{n+1} \leq R_n \leq a_{n+1},$$
azaz
$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$
□

11.5.6. Megjegyzés
A 11.5.5. Tételből az következik, hogy ha egy Leibniz-típusú sor összegét valamelyik n-edik részletösszegével közelítjük, akkor a hiba kisebb, mint az első figyelembe nem vett tag abszolút értéke.

11.5.7. Tétel (Leibniz-kritérium alternáló sorokra)
Minden Leibniz-típusú alternáló valós sor konvergens.

Bizonyítás:
Tekintsük a
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1} a_n + (-1)^{n+2} a_{n+1} + ...$$
sort, ahol $a_i > 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ esetén, továbbá
$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \geq a_n \geq a_{n+1} \geq ... \qquad \text{és} \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Ekkor $\forall\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0(\varepsilon)$ természetes szám, amelyre az S_{n+k} és S_n részletösszegekre tetszőleges k természetes szám esetén

$$|S_{n+k}-S_n| = |(a_1-a_2+a_3+...+(-1)^{n+k+1}a_{n+k})-(a_1-a_2+a_3+...+(-1)^{n+1}a_n)|,$$

azaz a 11.5.5. Tétel figyelembevételével

$$|S_{n+k} - S_n| = |(-1)^{n+2}a_{n+1} + (-1)^{n+3}a_{n+2} + ...| = |R_n| \leq a_{n+1} < \varepsilon.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség a Cauchy-féle konvergencia kritérium (11.2.1. Tétel) szerint az adott sor konvergenciáját jelenti. □

11.5.8. Példa
Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} + ...$$

alternáló harmonikus sor?

Megoldás:
Ez a sor Leibniz-típusú sor, hiszen

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Ezért a Leibniz-kritérium (11.5.7. Tétel) szerint a sor konvergens.

11.5.9. Példa
Konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

végtelen sor?

Megoldás:
Nem. A sor alternáló ugyan, de nem teljesül a szükséges

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

feltétel.

11.5.10. Példa
Konvergens-e az

$$\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{n} + ...$$

sor?

Megoldás:
Nem. Ugyan a sor alternáló, de tagjainak abszolút értéke nem monoton módon tart nullához.

11.6 Abszolút és feltételesen konvergens sorok

Újra a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ általános alakú sorokat tanulmányozzuk.

11.6.1. Definíció (abszolút konvergens sor)

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *valós sort abszolút konvergensnek nevezzük, ha a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...$$

sor konvergens.

11.6.2. Megjegyzés

A 11.6.1. Definíció szerint egy pozitív tagú konvergens sor egyúttal abszolút konvergens is.

11.6.3. Tétel (abszolút konvergenciából következő konvergencia)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor abszolút konvergens, akkor egyúttal konvergens is.*

Bizonyítás:

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens, ezért a Cauchy-féle konvergencia kritérium (11.2.1. Tétel) szerint bármely $\varepsilon > 0$ esetén megadható olyan $n_0(\varepsilon)$, hogy $n \geq n_0$ és $k \in \mathbb{N}$ esetén:

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Ekkor azonban

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}| < \varepsilon$$

is fennáll, mivel

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tehát konvergens. □

11.6.4. Definíció (feltételesen konvergens sor)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens, de a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *sor divergens, akkor a* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sort feltételesen konvergens sornak nevezzük.*

11.6.5. Példa
Abszolút konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+...$$

alternáló harmonikus sor?

Megoldás:
A 11.5.8. Példában igazoltuk, hogy az alternáló harmonikus sor konvergens. Viszont nem abszolút konvergens, mivel a harmonikus sor divergens (11.3.2. Állítás). Ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$ sor feltételesen konvergens.

11.7 Végtelen sorok átrendezése

11.7.1. Definíció (végtelen sor átrendezése)
Ha egy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *végtelen sorban végtelen sok tag sorrendjét megváltoztatjuk, akkor a sor egy átrendezését kapjuk.*

11.7.2. Tétel (abszolút konvergens sor összegének függetlensége az átrendezéstől)
Bármely abszolút konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *sor átrendezett* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ *sora is abszolút konvergens és összege megegyezik az eredeti sor összegével:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

Bizonyítás:
Legyen S_n^a az abszolút konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sor n-edik részletösszege és S_n^b pedig az átrendezett $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ sor n-edik részletösszege. A feltételek szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ sor konvergenciája miatt bármely $\varepsilon>0$ esetén megadható olyan $n_0(\varepsilon)$, hogy $n\geq n_0$ és $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+k}|<\varepsilon$$

teljesül. Válasszuk meg az $n_1>n_0$ értéket úgy, hogy az

$$a_1,a_2,...,a_{n_0}$$

tagok előforduljanak a

$$b_1, b_2, ..., b_{n_1}$$

tagok között.
Legyen most már $n \geq n_1$. Ekkor az

$$S_n^a - S_n^b$$

különbségből kiesnek az

$$a_1, a_2, ..., a_{n_0}$$

tagok, a megmaradt tagok pedig olyanok, hogy azok indexei az eredeti sorban n_0-tól nagyobbak, amelyekre pedig

$$\left|S_n^a - S_n^b\right| < \varepsilon.$$

teljesül. Ezért

$$\lim_{n\to\infty} S_n^a = \lim_{n\to\infty} S_n^b = S.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor átrendezése a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ sor, ezért hasonló gondolatmenettel látható, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ is konvergens, tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ abszolút konvergens. □

A feltételesen konvergens sorok az átrendezést nem jól viselik el. Ismert az alábbi tétel, amelyet bizonyítás nélkül közlünk.

11.7.3. Tétel (Riemann-féle átrendezési tétel)
Bármely feltételesen konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor átrendezhető úgy, hogy az átrendezett $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sor összege tetszőleges, előre adott S legyen. (S lehet $+\infty$ vagy $-\infty$ is).

11.7.4. Megjegyzés
Georg Friedrich Bernhard *Riemann* (1826 - 1866), német matematikus. Alapvető eredményeket ért el a geometriában, a komplex függvénytanban és az analitikus számelméletben. Egy Hannover melletti kis faluban született, ahol édesapja evangélikus lelkész volt. A tehetséges, de gyenge egészségű és félénk fiának apja a legjobb oktatást igyekezett biztosítani szerény anyagi körülményei ellenére. A berlini és a göttingeni egyetemen tanult. 1851 - ben doktorált Göttingenben komplex függvénytanból. Disszertációjában szerepelnek az ún. Cauchy - Riemann differenciálegyenletek, valamint a Riemann - felületek és a Riemann - integrál definíciói. 1854-ben a göttingeni egyetem

magántanára lett. Habilitációs dolgozata *A geometriai alapjait képező hipotézisekről* címet viselte és új fejezetet nyitott a geometria történetében. A Riemann - terek és a Riemann - geometriák átfogó elméletében minden létező geometriai rendszert el lehetett helyezni és újak bevezetésére is lehetőséget adott. Riemann megtalálta elméletének fizikai alkalmazásait is, amire Einstein épített. Nevéhez fűződik a matematika egyik legnevezetesebb megoldatlan sejtése, az analitikus számelméletben fontos Riemann-féle zéta-függvénnyel kapcsolatos Riemann - hipotézis. 1859 - ben, 33 évesen professzor lett azon a tanszéken, amit előtte Dirichlet és Gauss vezetett.

11.7.5. Példa

Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$ alternáló harmonikus sort. A 11.5.8. Példában igazoltuk, hogy ez a sor konvergens. Megmutatható, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...=\ln 2=S.$$

Rendezzük át a sort a következőképpen:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{1}{8}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}-\frac{1}{12}+...+\underbrace{\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}}-\frac{1}{4n}+...$$

Ekkor az összevonásokat elvégezve az alábbi átrendezett sort kapjuk:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{4n}+...=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

Azonban:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+...\right)=\frac{S}{2}=\frac{\ln 2}{2}.$$

Látható tehát, hogy az átrendezett sor összege megváltozott, a felére csökkent.

11.8 Műveletek konvergens sorokkal

Vajon az algebrában megismert műveletek milyen módon és milyen feltételek mellett alkalmazhatók a végtelen sorokra?

11.8.1. Tétel (tagonkénti konstanssal való szorzással nyert sor konvergenciája)
Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ *sor konvergens, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n, \qquad c \in \mathbb{R}$$

sor is konvergens és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot S.$$

Bizonyítás:
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ sor n-edik részletösszege:

$$S_n = c \cdot a_1 + ... + c \cdot a_n = c \cdot (a_1 + ... + a_n).$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} (a_1 + ... + a_n) = c \cdot S. \quad \square$$

11.8.2. Példa
Számítsuk ki a

$$4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7^2} + ... + \frac{4}{7^n} + ...$$

sor összegét!

Megoldás:
A geometriai

$$1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{7^n} + ...$$

sor konvergens és összege:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{7}} = \frac{7}{6}.$$

Mivel

$$4 + \frac{4}{7} + \frac{4}{7^2} + ... + \frac{4}{7^n} + ... = 4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n,$$

így a sor összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{7^n} = 4 \cdot S = 4 \cdot \frac{7}{6} = \frac{14}{3}.$$

11.8.3. Tétel (konvergens sorok összege)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sorok konvergensek, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

összegük is konvergens, melynek összege a két sor összegének összege.

Bizonyítás:

Legyen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^a \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^b.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} \Big[(a_1+b_1)+...+(a_n+b_n)\Big] = \lim_{n\to\infty} (a_1+...a_n) + \lim_{n\to\infty} (b_1+...b_n) = S^a + S^b.$$

□

11.8.4. Tétel (abszolút konvergens sorok összege)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sorok abszolút konvergensek, akkor a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

összegük is abszolút konvergens.

Bizonyítás:

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ sorok konvergensek, ezért a 11.8.3. Tétel szerint a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(|a_n| + |b_n| \Big)$$

sor is konvergens. Mivel

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \,,$$

ezért a konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(|a_n|+|b_n|\Big)$ sor a pozitív tagú $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|$ sor majoránsa. A majoráns kritérium (11.4.4. Tétel) alapján tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|$ sor is konvergens. □

A következő állítás során azt vizsgáljuk meg, hogy a konvergens sorok rendelkeznek-e a véges sok összeadandóból álló összeg asszociatív tulajdonságával.

11.8.5. Tétel (konvergens sorok zárójelezése)

Ha a konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *sor tagjait a tagok sorrendjének megváltoztatása nélkül tetszőleges véges számú tagokat tartalmazó csoportokba zárójelezzük, akkor az így kapott*

$$\underbrace{(a_1+a_2+a_{n_1})}_{b_1}+\underbrace{(a_{n_1+1}+...+a_{n_2})}_{b_2}+...+\underbrace{(a_{n_k-1}+...+a_{n_k})}_{b_k}+...=\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

zárójelezett sor, ahol

$$n_1<n_2<...<n_k<...,$$

is konvergens és összege megegyezik az eredeti sor összegével:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

Bizonyítás:

Legyen $\{S_n^a\}$ és $\{S_n^b\}$ rendre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ és a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ sorok részletösszegeinek sorozata. Nyilvánvaló, hogy az $\{S_n^a\}$ sorozat az $\{S_n^b\}$ sorozatot részsorozataként tartalmazza. Az 5.1.5. Tétel szerint konvergens sorozat minden részsorozata konvergens és minden részsorozat határértéke megegyezik a sorozat határértékével. □

11.8.6. Megjegyzés

A 11.8.5. Tétel megfordítása nem igaz, azaz zárójeleket általában nem szabad elhagyni a végtelen sorokban.

11.8.7. Példa

Az

$$(1-1)+(1-1)+...=0+0+...=0$$

végtelen sor konvergens és összege 0. Azonban a zárójelek elhagyásával kapott

$$1 - 1 + 1 - 1 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$$

végtelen sor divergens (11.5.9. Példa).

12 Függvénysorozatok és függvénysorok

12.1 Függvénysorozatok

A 4.1.1. Definícióban bevezettük a végtelen számsorozatok fogalmát. Most megadjuk a függvénysorozat fogalmát.

12.1.1. Definíció (végtelen függvénysorozat)
Ha minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz (esetleg elhagyva belőle valamely rögzített n_0 számnál kisebb számokat) egyértelműen hozzárendelünk egy-egy ugyanazon az I intervallumon értelmezett valós függvényt, akkor végtelen függvénysorozatot adunk meg:

$$n \to f_n : I \to \mathbb{R},$$

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ..., \qquad x \in I.$$

Jelölése:

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Az $f_n(x)$ függvényt a függvénysorozat n-edik elemének nevezzük.

12.1.2. Példa
Az

$$1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ... \qquad x \in I$$

egy függvénysorozat, a

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, ... \sin nx, ..., \qquad x \in \mathbb{R}$$

egy másik függvénysorozat.

12.1.3. Megjegyzés
Ha az

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ..., \qquad x \in I$$

függvénysorozat esetén rögzítünk egy $x = x_0 \in I$ helyet, akkor az

$$f_1(x_0), f_2(x_0), ..., f_n(x_0), ...$$

numerikus sorozathoz jutunk, amely lehet konvergens, lehet divergens is. Ha konvergens, akkor létezik a véges

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f_0$$

határérték, ami azt jelenti, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ esetén

$$|f_n(x_0) - f_0| < \varepsilon$$

teljesül.

12.1.4. Definíció (pontonként konvergens függvénysorozat)
Azt mondjuk, hogy az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat $x_0 \in I$-ben konvergens, ha az $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ számsorozat konvergens. Ha a konvergencia az I intervallum egy nemüres H részintervallumának minden $x \in H$ eleme esetén fennáll, akkor az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozatot pontonként konvergensnek nevezzük H-n.
Azt mondjuk, hogy az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat pontonként konvergál egy $f : H \to \mathbb{R}$ határfüggvényhez a $H \subset I$ részintervallumon, ha bármely $x \in H$ esetén $f_n(x) \to f(x)$, ha $n \to \infty$.

12.1.5. Megjegyzés
Azonnal látható, hogy egy $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat egy nemüres $H \subset I$ részhalmazon akkor és csak akkor pontonként konvergens, ha létezik egy olyan $f : H \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ pontonként konvergál az $f(x)$-hez H-n.

A pontonkénti konvergencia mellett egy másik konvergencia típus az egyenletes konvergencia.

12.1.6. Definíció (egyenletesen konvergens függvénysorozat)
Azt mondjuk, hogy az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényhez az $I \subset R$ intervallumon, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy $n > n_0(\varepsilon)$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $x \in I$.
Ha egy $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozathoz létezik olyan $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, amelyhez f_n egyenletesen konvergál I-n, akkor az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot az I halmazon egyenletesen konvergensnek nevezzük.

12.1.7. Megjegyzés
Minden egyenletesen konvergens függvénysorozat egyúttal pontonként konvergens függvénysorozat.

12.1.8. Példa
Legyen $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in (-1, 1]$. Hol konvergens ez a függvénysorozat?

Megoldás:
Mivel $x \in (-1, 1)$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$
és
$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1,$$
ezért a határfüggvény:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}.$$

A konvergencitartomány tehát:

$$I = (-1, 1].$$

A függvénysorozat konvergenciáját a határfüggvénytől függetlenül is megadhatjuk a Cauchy-sorozat és konvergencia kritérium felhasználásával.

12.1.9. Definíció (függvénysorozat konvergenciájának határfüggvény mentes értelmezése)
Az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozatot az I intervallumon pontonként konvergensnek mondjuk, ha $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in I$ esetén $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ természetes szám, hogy $p > n_0(\varepsilon, x)$ és $q > n_0(\varepsilon, x)$ esetén

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

12.1.10. Megjegyzés
A pontonkénti konvergenciánál vegyük észre, hogy az $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ küszöbszám függ ε-tól és x-től. Fontos az az eset. amikor az n_0 küszöbszám független x-től, azaz $n_0(\varepsilon)$ minden $x \in I$ esetén megfelelő küszöbszám. Ekkor a függvénysor konvergenciája egyenletes.

12.1.11. Definíció (függvénysorozat egyenletes konvergenciája)
Az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozatot az I intervallumon egyenletesen konvergensnek nevezzük, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy $p, q > n_0(\varepsilon)$ esetén

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

teljesül minden $x \in I$ esetén.

12.1.12. Példa
Legyen $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{nx}{nx+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, +\infty)$. Mutassuk meg, hogy a $[0, +\infty)$ intervallumon a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.

Megoldás:
A pontonkénti konvergencia szerint:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{nx+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x + \frac{1}{n}} = f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

A küszöbszám meghatározásához megoldjuk az

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{nx+1} - 1\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenséget:

$$|nx - nx - 1| < (nx+1) \cdot \varepsilon,$$

azaz

$$1 < (nx+1) \cdot \varepsilon,$$

átrendezve:

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < nx,$$

tehát

$$n > \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Ezek szerint, ha $\varepsilon = 0,1$, akkor $x = 10$ esetén $n_0(\varepsilon, x) = 1$ és $x = 1$ esetén $n_0(\varepsilon, x) = 9$. Tehát nincs x-től független küszöbszám, így a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.

12.1.13. Tétel (műveletek függvénysorozatokkal)
Ha az $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ és $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozatok az I intervallumon egyenletesen konvergensek, és

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x),$$

akkor e függvénysorozatok konstansszorosa, összege, különbsége, szorzata és hányadosa is egyenletesen konvergál az I intervallumon a megfelelő határfüggvényhez, azaz:

a) $\lim_{n\to\infty} c \cdot f_n(x) = c \cdot \lim_{n\to\infty} f_n(x) = c \cdot f(x);$

b) $\lim_{n\to\infty} (f_n(x) \pm g_n(x)) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \pm \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) \pm g(x);$

c) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) \cdot g(x);$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f_n(x)}{g_n(x)} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}{\lim_{n\to\infty} g_n(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, *ha* $|g(x)| > 0$.

12.1.14. Tétel (egyenletesen konvergens függvénysorozat határfüggvényének folytonossága)
Ha az I intervallumon egyenletesen konvergens $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ függvénysorozat függvényei folytonosak az I intervallumon, akkor az

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

határfüggvény is folytonos az I intervallumon.

Bizonyítás:
Az egyenletes konvergencia miatt $\forall\ \varepsilon > 0$ esetén $\exists\ n_0(\varepsilon)$ természetes szám, hogy $\forall x \in I$ és $n \geq n_0(\varepsilon)$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Az $f_{n_0}(x)$ függvény bármely $x_0 \in I$ helyen folytonos, így van x_0-nak olyan I-beli környezete, hogy e környezetben lévő minden x esetén:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ekkor viszont:

$$|f(x) - f(x_0) = |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)) + (f_{n_0}(x_0) - f(x_0))| \leq$$

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0))| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $f(x)$ folytonos az $x_0 \in I$ helyen. Mivel $x_0 \in I$ tetszőleges, ezért $f(x)$ folytonos I-n. $\square$

12.1.15. Megjegyzés
A 12.1.8. Példában és a 12.1.12. Példában a függvénysorozat függvényei folytonosak a konvergenciaintervallumon, azonban a határfüggvény nem folytonos. Ez azért van, mert a szóban forgó példákban csak pontbeli konvergencia létezett és nem egyenletes konvergencia.

12.2 Függvénysorok

A végtelen valós számsorok esetén a sor tagjai valós számok (11.1.1. Definíció). Ha a sor tagjai függvények, akkor függvénysorokról beszélünk.

12.2.1. Definíció (függvénysor)
Legyen adott egy végtelen valós $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in I$ függvénysorozat:

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ..., \qquad x \in I.$$

A függvénysorozat elemeiből képzett végtelen sok tagból álló

$$f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{12.1}$$

formális összeget végtelen valós függvénysornak nevezzük.

12.2.2. Megjegyzés
Ha a (12.1) függvénysorban rögzítünk egy $x_0 \in I$ helyet, akkor az

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + ... + f_n(x_0) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \tag{12.2}$$

numerikus sorhoz jutunk. A kapott sor konvergenciájának vizsgálatára alkalmazhatjuk az előző fejezetben megismert tételeket.
Bizonyos $x_0 \in I$ értékekre a (12.2) numerikus sor lehet konvergens, más érték helyettesítése esetén viszont a számsor lehet divergens.

12.2.3. Megjegyzés
A függvénysor összege függvény. Ennek meghatározásához, mint a numerikus sorok esetén, képezzük a (12.1) függvénysor részletösszeg függvényeinek sorozatát:

$$\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}. \tag{12.3}$$

12.2.4. Definíció (függvénysor pontonkénti ill. egyenletes konvergencia)
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor pontonként konvergens az I intervallumon, ha az $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ részletösszeg függvénysorozat pontonként konvergens az I intervallumon:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Ekkor az $S(x)$ függvényt a függvénysor összegfüggvényének nevezzük. Jelölése:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x).$$

Ha az $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ részletösszeg függvénysorozat egyenletesen konvergens az I intervallumon, akkor a (12.1) függvénysor egyenletesen konvergens I-n.

A numerikus soroknál megismert szükséges és elégséges Cauchy-féle konvergencia kritérium a függvénysorokra a már megismert definíciók alapján a következőképpen általánosítható:

12.2.5. Következmény (Cauchy-féle kritérium a pontonkénti konvergenciára)
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor az I intervallumon akkor és csak akkor pontonként konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in I$ ponthoz $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ küszöbszám, hogy tetszőleges $m > n > n_0(\varepsilon, x)$, $(n, m \in \mathbb{N})$ esetén

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

azaz

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

12.2.6. Következmény (Cauchy-kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára)
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor az I intervallumon akkor és csak akkor egyenletesen konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ és $\forall x \in I$ ponthoz $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbszám, hogy tetszőleges $m > n > n_0(\varepsilon)$, $(n, m \in \mathbb{N})$ esetén

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon,$$

azaz

$$|f_{n+1}(x) + ... + f_m(x)| < \varepsilon$$

teljesül.

E kritériumok alapján adódik a függvénysor egyenletes konvergenciájára vonatkozó Weierstrass-féle elégséges feltétel.

12.2.7. Tétel (Weierstrass elegendő feltétele függvénysorok egyenletes konvergenciájára)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *pozitív tagú végtelen valós numerikus sor konvergens és minden* $n \in N$*-re bármely* $x \in I$ *esetén*

$$|f_n(x)| \leq a_n,$$

akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *függvénysor az* I *intervallumon egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás:
Az egyenletes konvergencia Cauchy-féle kritériumának igazolásához legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciája miatt létezik olyan $n_0(\varepsilon)$, hogy $m > n > n_0(\varepsilon)$ esetén

$$|S_m - S_n| < \varepsilon,$$

azaz

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Alkalmazva a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat majoráns tulajdonságát, kapjuk, hogy

$$|S_m(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k < \varepsilon, \qquad \text{ha} \quad x \in I.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor teljesíti a Cauchy-kritérium feltételeit (12.2.6. Következmény), így egyenletesen konvergens. □

12.2.8. Példa
Legyen adott a

$$\frac{\sin^2 x}{1!} + \frac{\sin^2 2x}{2!} + ... + \frac{\sin^2 nx}{n!} + ..., \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

függvénysor. Vizsgáljuk meg, hogy egyenletesen konvergens-e az adott függvénysor!

Megoldás:
Bármely $x \in (-\infty, +\infty)$ esetén

$$\frac{\sin^2 nx}{n!} \leq \frac{1}{n!}.$$

Tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

számsor az adott függvénysor majoránsa. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sor konvergens, mivel a D'Alembert-féle hányados kritérium (11.4.8. Tétel) szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Ezért a Weierstrass-féle elegendő feltétel (12.2.7. Tétel) szerint az adott függvénysor egyenletesen konvergens.

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon öröklődik-e egy konvergens függvénysor tagjainak folytonossági tulajdonsága az összegfüggvényre? Erre ad választ az alábbi tétel.

12.2.9. Tétel (egyenletesen konvergens függvénysor összegfüggvényének folytonossága)
Ha az I intervallumon egyenletesen konvergens

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$$

függvénysor tagjai folytonosak az I intervallumon, akkor az $S(x)$ összegfüggvény is folytonos az I intervallumon.

Bizonyítás:
Legyen $x_0 \in I$ tetszőleges rögzített pont. Azt kell igazolni, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$, $x \in I$ esetén

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

Írjuk fel a vizsgált különbséget a következő alakban:

$$S(x) - S(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) - \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x_0)\right] =$$

$$= \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}_{S_n(x)} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f_k(x_0)}_{S_n(x_0)}\right] + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x_0)\right].$$

Az egyenletes konvergencia miatt az I intervallum bármely x, x_0 pontjaiban az n indexet megválaszthatjuk olyan nagyra, hogy teljesüljön:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

és

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Rögzített n esetén az $S_n(x)$ n-edik részletösszeg folytonos az x_0 helyen, mivel véges számú folytonos függvény összege. Ezért bármely $\varepsilon > 0$-hoz, így $\frac{\varepsilon}{3} > 0$-hoz is található olyan $\delta > 0$, hogy az I intervallum minden x helyén, ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

$$|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mindezt figyelembe véve kapjuk, hogy

$$|S(x)-S(x_0)| = |S_n(x)-S_n(x_0)| + \left[\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x_0)\right] < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Tehát $S(x)$ folytonos az x_0 helyen, amely tetszőlegesen választott pontja az I intervallumnak, így $S(x)$ folytonos az I intervallumon. □

12.2.10. Definíció (abszolút konvergens függvénysor)

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *végtelen függvénysort abszolút konvergensnek nevezzük az* I *intervallumon, ha a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

függvénysor konvergens az I *intervallumon.*

12.2.11. Megjegyzés

A 12.2.10. Definícióból az következik, hogy azok a függvénysorok, amelyekre teljesül a Weierstrass féle elégséges konvergencia kritérium (12.2.7. Tétel) nemcsak egyenletesen konvergensek, hanem abszolút konvergensek is.

12.3 Hatványsorok

12.3.1. Definíció (hatványsor)
Az

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k \tag{12.4}$$

alakú függvénysort origó középpontú hatványsornak nevezzük, ahol az a_k *valós számok a sor együtthatói* $(k = 0, 1, ...)$.

12.3.2. Megjegyzés
A hatványsor általánosabb alakja az ún. a középpontú hatványsor ($a \in \mathbb{R}$):

$$a_0 + a_1 \cdot (x-a) + a_2 \cdot (x-a)^2 + ... + a_n \cdot (x-a)^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-a)^k. \tag{12.5}$$

Ez a hatványsor $(x - a) = y$ helyettesítéssel az y hatványai szerint haladó (12.4) alakú origó középpontú hatványsorba megy át. Így elegendő csak a (12.4) alakú hatványsorral foglalkozni.

12.3.3. Megjegyzés
Nyilvánvaló, hogy az $x = 0$ pontban a (12.4) hatványsor konvergens és összege:

$$S = a_0.$$

A függvénysorokra vonatkozó tulajdonságok, megállapítások nyilván a hatványsorokra is érvényesek. A hatványsorok egyszerűbb szerkezete miatt célszerű néhány tulajdonságukat külön is megvizsgálni.

12.3.4. Tétel (pontbeli konvergenciából illetve divergenciából adódó tulajdonságok)
Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *hatványsor az* $x = x_0$ *helyen konvergens, akkor a hatványsor a* $(-x_0, x_0)$ *intervallumon, azaz, ha* $|x| < |x_0|$ *abszolút konvergens.*
Ha a sor az $x = x_0$ *helyen divergens, akkor divergens minden olyan* x *helyen is, amelyre* $|x| > |x_0|$*, azaz a* $(-\infty, -x_0)$ *illetve* $(x_0, +\infty)$ *intervallumokon.*

Bizonyítás:
Mivel a hatványsor az x_0 pontban konvergens, ezért szükségképpen tagjai 0-hoz tartanak:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot x_0^n = 0,$$

így korlátosak is, azaz $\exists\ K > 0$, amelyre bármely $n \in \mathbb{N}$-re:

$$a_n \cdot x_0^n \leq K.$$

Ha $x \in (-x_0, x_0)$, azaz $|x| < |x_0|$, akkor

$$|a_n \cdot x^n| = \left|a_n \cdot x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = |a_n \cdot x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq K \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \qquad \text{és} \qquad \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ sor $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ kvóciensű konvergens mértani sor, amely egyben majoránsa a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n| = |a_0| + |a_1 x| + ... + |a_n x^n| + ...$$

hatványsornak. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n \cdot x^n|$ sor konvergens, tehát a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hatványsor abszolút konvergens.

A második rész bizonyításához vegyük figyelembe, hogy amennyiben az $|x| > |x_0|$ helyen a sor konvergens lenne, akkor az első rész szerint abszolút konvergens lenne a sor az $x = x_0$ pontban. Ez viszont ellenkezik a feltételünkkel, miszerint a sor az x_0 helyen divergens. □

12.3.5. Megjegyzés

A 12.3.4. Tételből látható, hogy a hatványsor konvergenciaintervalluma egy olyan intervallum, amelynek középpontja a 0 pont.

12.3.6. Definíció (konvergenciaintervallum, konvergenciasugár)

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ hatványsor konvergenciaintervallumának azt az origó körüli szimmetrikus $(-r, r)$ intervallumot nevezzük, melynek pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens. Az r számot (a konvergenciaintervallum félhosszát) konvergenciasugárnak mondjuk.

12.3.7. Megjegyzés

A konvergenciaintervallum végpontjainak valamelyikében, esetleg mindkettőben a hatványsor lehet konvergens illetve divergens. Így a számítások során külön vizsgálatot igényelnek a végpontok.

12.3.8. Tétel (konvergenciasugár meghatározása)
Ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ *hatványsor esetén a*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

határértékek léteznek, akkor ezek megegyeznek és közös értékük határozza meg a hatványsor konvergencia sugarát:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Bizonyítás:
A numerikus soroknál megismert hányados kritérium (11.4.8. Tétel) alapján a sor abszolút konvergens, ha

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| < 1,$$

melyből

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot x \right| < 1,$$

illetve

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| < 1,$$

következik. Ekkor

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|},$$

amelyből adódik, hogy

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Továbbá, a gyökkritérium (11.4.17. Tétel) felhasználásával, az adott sor abszolút konvergens, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1,$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

azaz

$$|x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Tehát
$$|x| < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Az $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ és $|x| < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ egyenlőtlenségekből adódik a (12.3.4. Tétel) alapján, hogy ha léteznek az egyenlőtlenségekben szereplő határértékek, akkor azok szükségképpen megegyeznek és közös r értékük adja a konvergenciasugarat. □

12.3.9. Megjegyzés

Ha a 12.3.8. Tételben szereplő határértékek nem léteznek, de a $\left\{\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right\}_{n=1}^{\infty}$ illetve a $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak vannak torlódási pontjai, akkor
$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

vagyis a legnagyobb illetve legkisebb torlódási értéket kell felhasználni.

12.3.10. Példa

Határozzuk meg a
$$2x + \frac{2^2 \cdot x^2}{2} + \frac{2^3 \cdot x^3}{3} + ... + \frac{2^n \cdot x^n}{n} + ..$$

hatványsor konvergenciaintervallumát!

Megoldás:

Itt $a_n = \frac{2^n}{n}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$. Ezért
$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (n+1)}{n \cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

A $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ konvergenciaintervallumon tehát a hatványsor abszolút konvergens.

Ha $x = -\frac{1}{2}$, akkor a keletkező numerikus sor:
$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} + ...,$$

amely Leibniz-típusú alternáló sor, azaz konvergens.
Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

divergens harmonikus sort kapjuk. Ezek alapján a hatványsor konvergencia-intervalluma:

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

12.3.11. Példa
Adjuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

hatványsor konvergenciasugarát!

Megoldás:
A 12.3.8. Tétel alapján

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Mivel a konvergenciasugár végtelen, így bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén a hatványsor abszolút konvergens.

12.3.12. Példa
Számítsuk ki a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

hatványsor konvergenciasugarát és adjuk meg konvergenciaintervallumát!

Megoldás:
A 12.3.8. Tétel alapján

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = 1.$$

Ha $x = 1$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + ... + 1 + ...$$

numerikus sort kapjuk, amely divergens.
Ha $x = -1$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

sor adódik, amely szintén divergens. Így a konvergenciaintervallum:

$$(-1, 1).$$

12.3.13. Példa
Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n = 1 + 1! \cdot x + 2! \cdot x^2 + ... + n! \cdot x^n + ...$$

hatványsor konvergenciasugarát és adjuk meg konvergenciaintervallumát!

Megoldás:
A 12.3.8. Tétel alapján

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ekkor a konvergenciaintervallum egyetlen pontból, a hatványsor középpontjából áll:

$$\{0\}.$$

12.3.14. Tétel (egyenletes konvergencia zárt részintervallumon)
A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *hatványsor a* $(-r, r)$ *konvergenciaintervallum minden* $[a, b] \subset (-r, r)$ *zárt intervallumon egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás:
Válasszunk meg egy c értéket úgy, hogy

$$-r << a < b < c < r$$

teljesüljön. Mivel c a konvergenciaintrevallumban van, ezért az

$$a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + ... + a_n c^n + ...$$

sor abszolút konvergens, vagyis az

$$|a_0| + |a_1| \cdot |c| + |a_2| \cdot |c^2| + ... + |a_n| \cdot |c^n| + ...$$

nem negatív tagokból álló numerikus sor konvergens. Ha $a \leq x \leq b$, akkor a Weierstrass-féle elégséges kritérium értelmében a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor az $[a, b]$ zárt intervallumon egyenletesen konvergens, mivel

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot |x^n| \leq |a_n| \cdot |c^n|$$

teljesül bármely $x \in [a, b]$ és bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. $\square$

12.3.15. Tétel (hatványsor tagonkénti differenciálhatósága)
Az

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

hatványsor r konvergenciasugara egyenlő a tagonkénti differenciálással kapott

$$a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

hatványsor r_1 konvergenciasugarával.

Bizonyítás:
A tagonkénti differenciálással kapott hatványsor konvergenciasugara:

$$r_1 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot a_n}{(n+1) \cdot a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = r,$$

mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

A tagonkénti differenciálással kapott hatványsor tehát ugyanúgy abszolút konvergens a $(-r, r)$ intervallumban, mint az eredeti sor ill. ugyanúgy egyenletesen konvergens. $\square$

12.3.16. Tétel (Ábel tétele az összegfüggvény folytonosságáról)
Bármely $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S(x)$ hatványsor $S(x)$ összegfüggvénye folytonos a konvergenciaintervallumban.

Bizonyítás:
A sor tagjainak folytonossága és az egyenletes konvergencia biztosítja, hogy az állítás igaz. $\square$

12.3.17. Tétel (összegfüggvény differenciálhatósága a konvergencia-intervallumon)
Bármely $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = S(x)$ *hatványsor* $S(x)$ *összegfüggvénye differenciálható a konvergenciaintervallum belső pontjaiban, és deriváltja a sor tagonkénti deriválásával kapható meg.*

Bizonyítás:
A sor tagjainak differenciálhatósága (12.3.15. Tétel) és a tagonkénti deriválással kapott sor egyenletes konvergenciája miatt teljesül az állítás. □

12.4 TAYLOR-SOR

Már ismeretes számunkra, hogy egy hatványsor a konvergenciaintervallumban egy összegfüggvényt határoz meg. Felmerül a kérdés, hogy vajon elő lehet-e állítani egy adott függvényt hatványsorba fejtéssel? Ezt vizsgáljuk a továbbiakban.

Már bevezettük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in D_f$ helyhez tartozó n-ed fokú Taylor-polinomját (10.2.1. Definíció):

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

és ismerjük a Taylor-formulát (10.2.5. Tétel):

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta),$$

ahol az

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

kifejezést Lagrange-féle maradéktagnak nevezzük.

12.4.1. Definíció (Taylor-sor, Maclaurin-sor)
Ha az f *függvény akárhányszor differenciálható az* x_0 *hely valamely környezetében, akkor a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

végtelen hatványsort az f függvény x_0 pont körüli Taylor-sorának nevezzük. Amennyiben az $x_0 = 0$ helyen tekintjük az f függvény Taylor-sorát, akkor az f függvény Maclaurin-soráról beszélünk.

12.4.2. Megjegyzés
A Taylor-sor n-edik $S_n(x)$ részletösszegét az f függvény n-ed fokú Taylor-polinomjának mondjuk. Jelölése:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = S_n(x).$$

Vegyük észre, hogy a Taylor-sor a hatványsor egy speciális esete.

12.4.3. Példa
Írjuk fel az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sorát és Taylor-sorát az $x_0 = 3$ hely körül!

Megoldás:
Az adott függvény akárhányszor differenciálható és

$$f^{(k)}(x) = e^x,$$

ezért

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1.$$

Így

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ha $x_0 = 3$, akkor

$$f^{(k)}(3) = e^3,$$

ezért az $x_0 = 3$ pont körüli Taylor-sor:

$$e^x = e^3 + \frac{e^3}{1!}(x-3) + \frac{e^3}{2!}(x-3)^2 + ... + \frac{e^3}{n!}(x-3)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n.$$

Egy adott f függvény Taylor-sorfejtésekor azonnal felvetődik a kérdés, hogy vajon a kapott Taylor-sornak, mint hatványsornak mi lesz az összegfüggvénye? Azt várnánk, hogy az összegfüggvény mindig az adott f függvény legyen. Ez azonban nem mindig igaz. Az viszont mindig fennáll, ha egy adott $f(x)$ függvény előállítható egy x_0 körüli hatványsor összegeként, akkor ez csak egyféleképpen lehetséges, amikor ez a hatványsor az f függvény x_0 hely körüli Taylor-sora.

12.4.4. Tétel (a hatványsor és a Taylor-sor egybeesése)
Ha az x_0 hely környezetében az

$$a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$$

hatványsor összegfüggvénye $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

akkor $f(x)$ ebben a környezetben akárhányszor differenciálható és ez a hatványsor nem más, mint az $f(x)$ függvény x_0-körüli Taylor-sora.

Bizonyítás:
Az f függvény akárhányszori differenciálhatósága a 12.3.17. Tételből következik. Továbbá az $x = x_0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $a_0 = f(x_0)$. majd tagonkénti ismételt deriválással és $x = x_0$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad ..., \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, ...$$

Tehát a hatványsor valóban f Taylor-sora. □

12.4.5. Megjegyzés
A 12.4.4. Tétel azt állítja, hogy bármilyen módon jutunk el egy adott f függvény hatványsoros felírásához:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...,$$

ez a hatványsor mindig az f függvény x_0 körüli Taylor-sora lesz.

Most választ adunk arra a kérdésre, hogy egy adott f függvény Taylor-sorának az összegfüggvénye mikor lesz egyenlő $f(x)$-el, azaz mikor teljesül az alábbi egyenlőség:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ... = f(x).$$

12.4.6. Definíció (Taylor-sor n-edik maradéksora)
Az

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - T_n(x) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

különbséget a Taylor-sor n-edik maradéksorának (maradéktagjának) nevezzük.

12.4.7. Megjegyzés
Az $R_n(x)$ maradéktag többféle alakban is előállítható. A 10.2.5. Tételben ismertük meg a maradéktag Lagrange-féle alakját:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \qquad \xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

Ismert még a Cauchy-féle alakja is:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \qquad \xi \in (x_0-\delta, x_0+\delta).$$

12.4.8. Tétel (szükséges és elégséges feltétel egy függvény Taylor-sorral való előállítására)
Ha az f függvény az x_0 pont valamely I környezetében akárhányszor differenciálható, akkor

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + ...$$

Taylor-sor akkor és csak akkor állítja elő az f függvényt, azaz a Taylor-sor összegfüggvénye akkor és csak akkor lesz egyenlő $f(x)$-el, ha bármely $x \in I$ pontban

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0,$$

ahol $\xi \in I$.

Bizonyítás:

- **Elégségesség.**
  Ha $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, akkor az

  $$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

  Taylor-képlet alapján:

  $$\lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty}(T_n(x) + R_n(x)),$$

  azaz

  $$f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k.$$

- **Szükségesség.**
Fordítva, ha $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$, akkor szükségképpen
$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

A 12.4.8. Tétel alapján már megadható egy elégséges feltétel ahhoz, hogy egy adott függvény Taylor-sora előállítsa a függvényt.

12.4.9. Tétel (elégséges feltétel egy függvény Taylor-sorral való előállítására)
Ha az f függvény az x_0 hely $(x_0 - h, x_0 + h)$ környezetében akárhányszor differenciálható és van egy közös $K > 0$ korlát, amelyre
$$|f^{(n)}(x)| \leq K,$$
$n = 0, 1, 2, ...$ *és bármely* $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ *esetén, akkor az*
$$(x_0 - h, x_0 + h)$$
intervallumban az f függvény x_0 pontbeli Taylor-sorának összege egyenlő $f(x)$-el, azaz a Taylor-sor előállítja az adott f függvényt:
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

Bizonyítás:
Az adott feltételek mellett igazoljuk, hogy az $R_n(x)$ maradéktag nullához tart, ha $n \to \infty$. A maradéktag Lagrange-féle alakját nézve, mivel
$$|f^{(n)}(x)| \leq K, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$
és bármely $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ esetén, ezért
$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi) \cdot (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq K \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq K \cdot \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$
Igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, mint egy konvergens
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$
sor általános tagja. A $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor konvergenciáját a hányados kritérium biztosítja:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h^{n+2} \cdot (n+1)!}{(n+2)! \cdot h^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{h}{n+1} = 0 < 1.$$
Azaz $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$ □

12.5 Nevezetes hatványsorok

12.5.1. Definíció (exponenciális függvény)
Az

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

képlettel értelmezett függvényt exponenciális függvények nevezzük.

12.5.2. Megjegyzés
Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$, ezért a fenti hatványsornak a konvergencia sugara $+\infty$ (12.3.8. Tétel), tehát a hatványsor az egész $\mathbb{R}$ halmazon (abszolút) konvergens.

12.5.3. Definíció (szinusz-hiperbolikusz és koszinusz-hiperbolikusz függvény)
A

$$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \textit{és} \qquad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

képletekkel értelmezett függvényeket hiperbolikus függvényeknek nevezzük. Az első függvényt szinusz-hiperbolikusznak, a másodikat pedig koszinusz-hiperbolikusznak mondjuk.

12.5.4. Megjegyzés
Könnyen látható, hogy mindkét függvény konvergenciatartománya az egész valós számhalmaz, és a definícióból azonnal adódik, hogy sh páratlan, ch pedig páros függvény, azaz

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x) \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x), \qquad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Az alábbi tétel a hiperbolikus függvényeknek ez exponenciális függvénnyel való kapcsolatát írja le.

12.5.5. Tétel
Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \textit{és} \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2},$$

továbbá

$$\exp(x) = \operatorname{sh}(x) + \operatorname{ch}(x).$$

Bizonyítás:
A bizonyítás során felhasználjuk a 11.8.5. Tételt:

$$\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=\operatorname{sh}(x).$$

Ugyanígy látható be a ch függvényre vonatkozó állítás is. A harmadik egyenlőség hasonlóan, vagy az első két összefüggést felhasználva igazolható:

$$\operatorname{sh}(x)+\operatorname{ch}(x)=\frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}+\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}=\exp(x).\quad\square$$

12.5.6. Tétel (A hiperbolikus függvények addíciós tétele)
Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$$

és

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y).$$

Bizonyítás:
Az első összefüggés igazolásához tekintsük az egyenlőség jobb oldalán található összeget és alkalmazzuk az

$$\exp(x)=e^x$$

jelölést. Felhasználva a 12.5.5. Tétel összefüggéseit:

$$\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2},$$

azaz

$$\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)+\operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)=\frac{2e^{(x+y)}-2e^{-(x+y)}}{4}=\operatorname{sh}(x+y).$$

A második addíciós tétel hasonlóan igazolható. $\square$

12.5.7. Definíció (szinusz és koszinusz függvény)
A

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\qquad \text{és}\qquad \cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

képletekkel értelmezett függvényeket szinusz, illetve koszinusz függvényeknek, összefoglaló néven pedig trigonometrikus függvényeknek nevezzük.

12.5.8. Megjegyzés
Látható, hogy mindkét függvény konvergenciatartománya az egész valós számegyenes, továbbá, hogy sin páratlan, cos pedig páros függvény, azaz

$$\sin(-x) = -\sin(x) \qquad \text{és} \qquad \cos(-x) = \cos(x), \qquad \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A trigonometrikus és a hiperbolikus függvények között pedig a fennáll a következő kapcsolat.

12.5.9. Tétel
Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{sh}(ix) = i\sin(x), \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos(x),$$

illetve

$$\sin(ix) = i\operatorname{sh}(x), \quad \cos(ix) = \operatorname{ch}(x).$$

Bizonyítás:

$$\operatorname{sh}(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = i\sin(x).$$

A többi egyenlőség igazolása teljesen analóg. □

A következő tétel a trigonometrikus függvényeknek az exponenciális függvénnyel való összefüggését írja le.

12.5.10. Tétel
Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

és

$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2},$$

továbbá

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x).$$

Bizonyítás:
Az állítás igazolásához használjuk fel az exponenciális függvény és a hiperbolikus függvények kapcsolatát leíró 12.5.5. Tételt, valamint a 12.5.9. Tételbeli összefüggéseket. Ekkor kapjuk, hogy

$$\sin(x) = \frac{\operatorname{sh}(ix)}{i} = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$$

és

$$\cos(x) = \operatorname{ch}(ix) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2},$$

illetve

$$\exp(ix) = \operatorname{sh}(ix) + \operatorname{ch}(ix) = i\sin(x) + \cos(x).$$

□

12.5.11. Megjegyzés
A 12.5.10. Tétel utolsó egyenlőségét szokás *Euler-azonosságnak* is nevezni.

12.5.12. Tétel (A trigonometrikus függvények addíciós tétele)
Bármely $x, y \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

és

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

Bizonyítás:
Használjuk fel a hiperbolikus függvények addíciós tételét és a 12.5.10. Tételbeli összefüggéseket. Ekkor nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \frac{\operatorname{sh}(ix + iy)}{i} = \frac{\operatorname{sh}(ix)}{i}\operatorname{ch}(ix) + \operatorname{ch}(ix)\frac{\operatorname{sh}(iy)}{i} \\ &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y). \end{aligned}$$

A cos függvényre vonatkozó összefüggés teljesen hasonlóan látható be. □

A sh, ch, sin és cos függvények segítségével további fontos hiperbolikus és trigonometrikus függvényeket értelmezhetünk.

12.5.13. Definíció (th, cth, tg és ctg függvény)
Ha $x \in \mathbb{R}$*, akkor legyen*

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}, \quad \operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)},$$

illetve

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \operatorname{ctg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

feltéve, hogy a megfelelő kifejezés nevezője nem nulla. A fenti függvényeket rendre tangens hiperbolikusz, kotangens hiperbolikusz, illetve tangens és kotangens függvényeknek nevezzük.

Irodalomjegyzék

[1] Császár Ákos: *Valós analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

[2] Denkinger Géza: *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[3] Denkinger Géza, Gyurkó Lajos: *Analízis gyakorlatok*, harmadik kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[4] Kovács József, Takács Gábor, Takács Miklós: *Analízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.

[5] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera: *Analízis I-II.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[6] Liptai Kálmán: *Analízis Feladatgyűjtemény (nem matematika szakos hallgatóknak)*, EKTF Líceum Kiadó, Eger, 2005.

[7] Makai Imre: *Bevezetés az analízisbe*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.

[8] Mendelson, E.: *Matematika példatár az analízis témaköréből*, Panem - McGraw-Hill, 1995.

[9] Páles Zsolt: *Bevezetés az Analízisbe (Előadáskövető egyetemi jegyzet)*, KLTE, Debrecen, 1997.

[10] Ribnyikov, K. A.: *A matematika története*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[11] Rimán János: *Matematikai Analízis*, I. kötet, EKTF Líceum Kiadó, Eger, 1998.

[12] Rimán János: *Matematikai analízis feladatgyüjtemény*, I. kötet, második, javított kiadás, EKTF Líceum Kiadó, Eger, 2002.

[13] Rudin, W.: *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Kiadó, Budapest, 1978.

[14] Szász Gábor: *Matematika I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[15] Szili László: *Analízis feladatokban I.*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2008.