TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

UIT

HOMEWORK #02

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐỆ QUY BẰNG NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

Môn:	Phân tích thiết kế thuật toán
Lớp:	CS112.N23.KHCL
Giảng viên hướng dẫn:	Huỳnh Thị Thanh Thương
Nhóm thực hiện:	Hồ Thị Khánh Hiền(Leader) - 21522057
	Tống Trần Tiến Dũng - 21521983
	Bùi Mạnh Hùng - 21522110

TP Hồ Chí Minh,Ngày 11 tháng 4 năm 2023

Mục lục

Bài tập 1: Thành lập phương trình đệ quy

a)

a). Gửi ngân hàng 1000 USD, lãi suất 12%/năm. Số tiền có được sau 30 năm là bao nhiêu?

$$T(n) = \begin{cases} C_1, \text{ khi n} = 0 \\ T(n-1) + C_2, \text{ khi n} > 0 \end{cases}$$

b)

```
long Fibo(int n)
{
   if (n == 0 || n == 1)
      return 1;
   return Fibo(n–
1)+Fibo(n–2);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1, \text{ khi n} \leq 1 \\ T(n-1) + T(n-2) + C_2, \text{ khi n} > 1 \end{cases}$$

c)

```
public int g(int n) {
   if (n == 1)
      return 2;
   else
      return 3 * g(n / 2) + g( n / 2) + 5;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1, \text{ khi n} = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + C_2, \text{ khi n} > 1 \end{cases}$$

d)

```
long xn(int n)
{
   if (n == 0) return 1;
   long s = 0;
   for (int i=1; i<=n; i++)
      s = s + i*i*xn(n–i);
   return s;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1, \text{ khi n} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} [T(n-i) + (n-i)C_2] + C_3, \text{ khi n} > 0 \end{cases}$$

e)

```
int f (int n)
{
        if (n==1)       return 2;
        return  3^f(n/2) + 2*log(f(n/2)) – f(n/2) +1;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1, \text{ khi n} = 1 \\ 3T(n/2) + C_2, \text{ khi n} > 1 \end{cases}$$

f)

```
waste (n)
{    if (n==0) return 0;
     for (i = 1 to n )
          for (j = 1 to i )
               print i,j,n;
     for (i = 1 to 3)
               waste (n/2);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1, \text{ khi n} = 0 \\ 3T(\frac{n}{2}) + \frac{n(n+1)}{2} + C_2, \text{khi } n > 0 \end{cases}$$

g)

```
Draw (n)
{    if (n < 1) return 0;
     for (i = 1 ; i <= n; i++ )
          for (j = 1 ; j <=n ; j++)
               print ("*");
     Draw (n-3);
}
```

$$T(n) = \begin{cases} C_1, \text{ khi n } < 1 \\ T(n-3) + n^2 + C_2, \text{khi } n \geq 1 \end{cases}$$

h)

Gọi T(n) là số phép cộng cần thực hiện khi gọi Zeta (k). Hãy thiết lập công thức truy hồi cho T(n)

```
Cho hàm:
Zeta (n)
{   if (n == 0) Zeta = 6;
    else
    {   k = 0;
        Ret = 0;
        while (k<=n-1)
        {       Ret = Ret +Zeta(k) ;
                k = k+1;
        }
        Zeta = Ret;
}
```

$$T(n) = \begin{cases} 0, \text{ khi n } = 0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} T(k) + 2n, \text{khi n} > 0 \end{cases}$$

Giải pt đệ quy:

Có:

T(0) = 0

T(1) = T(0) + 2.1 = 2

T(2) = $\sum_{k=0}^{1} T(k)$ + 2n = T(0) + T(1) + 2.2 = 6

T(3) = T(0) + T(1) + T(2) + 2.3 = 14

...

⇒ T(n) = $\sum_{i=1}^{n} 2^i$ = 2^{n+1} - 2

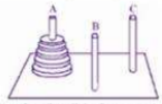
Khi đó:

$T(n) = 2^{n+1} - 2, \forall n \Rightarrow T(n) = O(2^n)$

i)

Cho bài toán Tháp Hà Nội như sau:

Mô tả bài toán: Có 3 cột được đặt tên là A,B,C. Cột A hiện đang gắn n đĩa có kích thước khác nhau, đĩa nhỏ ở trên đĩa lớn hơn ở dưới. Hãy chuyển chồng đĩa từ cột A sang cột C (xem cột B là cột trung gian) với điều kiện mỗi lần chỉ dời 1 đĩa, đĩa đặt trên bao giờ cũng nhỏ hơn đĩa đặt dưới.



- **Goal:** transfer all N disks from peg A to peg C
- **Rules:**
  - move one disk at a time
  - never place larger disk above smaller one
- **Recursive solution:**
  - transfer *N* -1 disks from A to B
  - move largest disk from A to C
  - transfer *N* -1 disks from B to C

Giả sử ta chỉ quan tâm đến thao tác chuyển đĩa (transfer) vì đây là tác vụ căn bản của thuật toán. Khi đó, thời gian thực hiện của thuật toán **T(n) được xác định bởi số lần chuyển n đĩa** từ cột này sang cột kia và hiển nhiên T(0) = 0.

Yêu cầu:

- Viết mã giả thuật toán giải bài toán Tháp Hà Nội

- Thành lập phương trình đệ quy về số lần tác vụ căn bản được thực thi trong thuật toán.

Yêu cầu: đến chính xác số thao tác chuyễn đĩa (ko dùng tham số C1, C2)

Bắt đầu giải thuật Tháp Hà nội Hanoi(n, A, C, B)
Nếu chỉ có 1 đĩa, di chuyển đĩa từ cột A tới cột C
IF n == 1, thì di chuyển đĩa từ A tới C

Nếu có nhiều hơn 1 đĩa:

Bước 1: Di chuyển n-1 đĩa từ cột A tới cột B
Hanoi(n - 1, A, B, C)
Bước 2: Di chuyển đĩa thứ n từ cột A tới cột C

Bước 3: Di chuyển n-1 đĩa từ cột B về cột C
Hanoi(n - 1, B, C, A)

$$T(n) = \begin{cases} 1, \text{ khi n = 1} \\ 2T(n-1)+1, \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

j)

b) Xét "Bài toán nhân 2 số nguyên dương lớn có n chữ số", với n có thể lên đến hàng chục hay hàng trăm chữ số, áp dụng kỹ thuật Chia để trị ta có một cách giải như sau:

Chia 2 số nguyên X, Y (có n chữ số) thành các số nguyên lớn có n/2 chữ số: X = A $10^{n/2}$ + B và Y = C $10^{n/2}$ + D. Ví dụ: X = 1288 thì X = 12 x $10^{n/2}$ + 88

Khi đó, X.Y = AC 10^n + [(A-B)(D-C) + AC + BD] $10^{n/2}$ + BD **(*)**

Với mỗi số có n/2 chữ số, chúng ta lại tiếp tục phân tích theo cách trên, quá trình phân tích sẽ dẫn đến bài toán cơ sở là nhân các số nguyên chỉ gồm một chữ số mà ta dễ dàng thực hiện. Việc tổng hợp kết quả chính là thực hiện các phép toán theo công thức **(*)**.

Hãy đánh giá độ phức tạp của giải thuật đệ quy áp dụng kỹ thuật Chia để trị như trên, bằng cách thực hiện các yêu cầu sau: 1) Thành lập phương trình đệ quy (kèm giải thích ngắn gọn cách thành lập); ~~2) Giải phương trình dùng **phương pháp truy hồi (còn gọi là thay thế)** hoặc **phương pháp đoán nghiệm.** SV không cần trình bày (mã giả) thuật toán~~.

Từ (*) ta quy ước:

- Nếu A,B,C,D là số có $\frac{n}{2}$ chữ số thì (A-B) và (D-C) cũng là số có $\frac{n}{2}$ chữ số
- AC lặp lại 2 lần trong công thức, ta chỉ gọi đệ quy 1 lần và gán giá trị cho biến x => thế x = AC vào (*)
- BD lặp lại 2 lần trong công thức, ta chỉ gọi đệ quy 1 lần và gán giá trị cho biến y => thế y = BD vào (*)

Khi đó (*) => $\begin{cases} x = AC \\ y = BD \\ XY = x.10^n + [(A-B)(D-C) + x + y]10^{\frac{n}{2}} + y \end{cases}$

$T(n) = \begin{cases} 1, \text{ khi n = 1} \\ 3T(\frac{n}{2}) + C_1, \text{khi } n > 1 \end{cases}$

Bài tập 2: Giải các phương trình đệ quy bằng phương pháp truy hồi

1)

$$T(n) = T(n-1) + 5 \qquad T(1) = 0$$

T(n) $= T(n-2) + 10 = T(n-3) + 15 = T(n-i) + 5i$
Quá trình dừng lại khi đạt tới T(1) ⇒ n - i = 1 ⇒ i = n -1
Khi đó:
T(n) = T(1) + 5(n-1) = 5n - 5

2)

$$T(n) = T(n-1) + n \qquad T(1) = 1$$

T(n) $= [T(n-2) + (n-1)] + n = [T(n-3) + (n-2)] + (n-1) + n = T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1}(n-k = T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1}(n) - \sum_{k=0}^{i-1}(k) = T(n-i) + (i-1)n - \frac{(i-1)(i-2)}{2}$
......

Quá trình kết thúc khi: $n - i = 1 => i = n - 1$
Khi đó:
T(n) $= T(1) + n(n-2) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}$
$= 1 + \frac{(n-2)(n+3)}{2}$
$\Rightarrow T(n) = O(n^2)$

3)

T(n) = 3T(n-1) + 1   T(1) = 4

T(n) $= 3[3T(n-2)+1]+1 = 9[3T(n-3)+1]+3+1 = 3^3T(n-3)+3^2+3^1+3^0$
......
T(n) $= 3^iT(n-i)+\sum_{k=0}^{i-1} 3^k$

$$T(n) = \begin{cases} 4, \text{ khi n} = 1 \\ 3^iT(n-i)+\sum_{k=0}^{i-1} 3^k, \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $n-i=1 => i=n-1$
Khi đó:
T(n) $= 4.3^{n-1}+\sum_{k=0}^{n-2} 3^k = \frac{4}{3}.3^n+1+\frac{3^{n-1}-3}{2} = \frac{3^{n+1}}{2}-\frac{1}{2}$

4)

T(n) = 2T(n/2) + 1   T(1) = 1

T(n) = 2[2T(n/4)+1] + 1 = 4T(n/4) + 3 = 8T(n/8) + 7 = iT(n/i) + (i-1)
Quá trình dừng lại khi đạt tới T(1) ⇒ n/i = 1 ⇒ i = n
Khi đó:
T(n) = nT(1) + n-1 = 2n - 1

5)

T(n) = 2T(n/2) + n   T(1) = 1

T(n) $= 2[2T(\frac{n}{4})+(\frac{n}{2})]+n = 4[2T(\frac{n}{8})+(\frac{n}{4})]+2n = 8T(\frac{n}{8})+3n = 2^3.T(\frac{n}{2^3})+3n$
......
T(n) $= 2^iT(\frac{n}{2^i})+\sum_{k=0}^{i} n$
$= 2^iT(\frac{n}{2^i})+in$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i}=1 => i=\log_2 n$
Khi đó:
T(n) $= 2^{\log_2 n}+n\log_2 n = n+n\log_2 n =$ O(n$\log_2(n)$)

6)

T(n) = 2T(n/2) + n²   T(1) = 1

T(n) $= 2[2T(\frac{n}{4})+(\frac{n}{2})^2]+n^2 = 4[2T(\frac{n}{8})+(\frac{n}{4})^2]+\frac{n^2}{2}+n^2 = 2^3.T(\frac{n}{2^3})+\frac{n^2}{2^2}+\frac{n^2}{2^1}+\frac{n^2}{2^0}$
......
T(n) $= 2^iT(\frac{n}{2^i})+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{n^2}{2^k}$

$T(n) = \begin{cases} 1, \text{ khi n } = 1 \\ 2^i T(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{n^2}{2^k}, \text{khi } n > 1 \end{cases}$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 => i = \log_2 n$

Khi đó:

T(n) $= 2^{\log_2 n} + n^2 . \sum_{k=0}^{\log_2 n-1} (\frac{1}{2})^k = n + n^2.2[1 - (\frac{1}{2})^{\log_2 n}] = n + 2n^2(1 - \frac{1}{n}) = 2n^2 - n$

7)

T(n) = 2T(n/2) + logn   T(1) = 1

$$\begin{aligned} \text{T(n)} &= 2[2T(\frac{n}{4}) + log(\frac{n}{2})] + logn = 4T(\frac{n}{4}) + 2log(\frac{n}{2}) + logn \\ &= 4[2T(\frac{n}{8}) + log(\frac{n}{4})] + 2log(\frac{n}{2}) + logn \\ &= 8T(\frac{n}{8}) + 4log(\frac{n}{4}) + 2log(\frac{n}{2}) + logn \\ &= 2^i T(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k log\frac{n}{2^k} \end{aligned}$$

Quá trình dừng lại khi đạt tới T(1)$\Rightarrow n/2^i = 1 \Rightarrow i = log_2 n = logn \ (log = log_2)$

$$\begin{aligned} \text{T(n)} &= n + \sum_{k=0}^{logn-1} 2^k log\frac{n}{2^k} = n + logn. \sum_{k=0}^{logn-1} 2^k - \sum_{k=0}^{logn-1} 2^k log 2^k \\ &= n + (n-1)logn - log2 \sum_{k=0}^{logn-1} k2^k = n + (n-1)logn - log2\big((logn-2)n + 2\big) \\ &= n + (n-1)logn - nlogn + 2n - 2 = 3n - 2 - logn \end{aligned}$$

Bài tập 3: Giải các phương trình đệ quy bằng PP truy hồi với T(1) = 1

1)

T(n) = 3T(n/2) + n²

T(n) $= 3[3T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^2] + n^2 = 3^2[3T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^2] + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2 = 3^3.T(\frac{n}{2^3}) + 3^2\left(\frac{n}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{2}\right)^2 + n^2$

......

$T(n) = 3^i.T(\frac{n}{2^i}) + n^2 \sum_{k=0}^{i-1} (3^k \frac{1}{2^{2k}})$

$= 3^i.T(\frac{n}{2^i}) + n^2 \sum_{k=0}^{i-1} (\frac{3}{4})k$

$= 3^i.T(\frac{n}{2^i}) + n^2 \frac{(3/4)^i - 1}{(3/4) - 1}$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 => i = \log_2 n$

Khi đó:

T(n) $= 3^{\log_2 n} + n^2 \frac{(3/4)^{\log_2 n} - 1}{(3/4) - 1} = O(n^2)$

2)

$$T(n) = 8T(n/2) + n^3$$

T(n) $= 8[8T(\frac{n}{4}) + (\frac{n}{2})^3] + n^3 = 8^2[8T(\frac{n}{8}) + (\frac{n}{4})^3] + 2n^3 = 8^3.T(\frac{n}{2^3}) + 3.n^3$
......
T(n) $= 8^i.T(\frac{n}{2^i}) + i.n^3$

$$T(n) = \begin{cases} 1, \text{ khi n = 1} \\ 8^i.T(\frac{n}{2^i}) + i.n^3, \text{khi } n > 1 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{2^i} = 1 => i = \log_2 n$
Khi đó:
T(n) $= 8^{\log_2 n} + \log_2 n.n^3 = n^3 + n^3.\log_2 n$

3)

$$T(n) = 4T(n/3)+n$$

T(n) $= 4[4T(\frac{n}{9}) + \frac{n}{3}] + n = 16T(\frac{n}{9}) + \frac{7n}{3}$
$= 16[4T(\frac{n}{27}) + \frac{n}{9}] + \frac{7n}{3} = 64T(\frac{n}{27}) + \frac{37n}{9}$
$= 64[4T(\frac{n}{81}) + \frac{n}{27}] + \frac{37n}{9} = 256T(\frac{n}{81}) + \frac{175n}{27}$
$= 4^iT(\frac{n}{3^i}) + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{4}{3}\right)^k$
Quá trình dừng lại khi đạt tới T(1) $\Rightarrow \frac{n}{3^i} = 1 \Rightarrow i = log_3n$
Khi đó:
T(n) $= 4^{log_3n} + \sum_{k=0}^{log_3n-1} \left(\frac{4}{3}\right)^k = 4^{log_3n} + 3\left(\frac{4^{log_3n}}{n} - 1\right)$

4)

$$T(n) = 9T(n/3) + n^2$$

T(n) $= 9[9T(\frac{n}{9}) + (\frac{n}{3})^2] + n^2 = 9^2[9T(\frac{n}{27}) + (\frac{n}{9})^2] + 2n^2 = 9^3.T(\frac{n}{3^3}) + 3n^2$
......
$T(n) == 9^i.T(\frac{n}{3^i}) + in^2$

Quá trình kết thúc khi: $\frac{n}{3^i} = 1 => i = \log_3 n$
Khi đó:
T(n) $= 9^{\log_3 n}T(1) + n^2long_3 = 9 + n^2long_3 = O(n^2)$

5)

$$T(2) = 0 \qquad T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$$

T(n) $= 2[2T(n^{\frac{1}{4}}) + 1] + 1 = 2^2[2T(2^{\frac{1}{8}}) + 1] + 2 + 1 = 2^3.T(n^{\frac{1}{2^3}}) + 4 + 2 + 1$
......
T(n) $= 2^i.T(n^{\frac{1}{2^i}}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k$

$$T(n) = \begin{cases} 0, \text{ khi n = 2} \\ 2^i.T(n^{\frac{1}{2^i}}) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k, \text{khi } n > 2 \end{cases}$$

Quá trình kết thúc khi: $n^{\frac{1}{2^i}} = 1 => n = 2^{2^i} => i = \log_2(\log_2 n)$
Khi đó:
T(n) $= \log_2 n.0 + 2^i - 1 = \log_2 n - 1$

Bài tập 4: Giải phương trình đệ quy sau dùng phương trình đặc trưng

a)

T (n) = 4 T (n – 1) - 3 T (n – 2)
T (0) = 1
T (1) = 2

Xét phương trình T(n) - 4T(n-1) + 3T(n-2) = 0
Đặt $X^n =$ T(n)
Ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 3X^{n-2} = 0$
Phương trình đặc trưng: $X^2 - 4X + 3 = 0 \Rightarrow (X-3)(X-1) = 0$
Có 2 nghiệm đơn $X_1 = 1$ và $X_2 = 3$
Ta có: T(n) $= \ c_1X_1^n + c_2X_2^n = c_1.1 + c_2.3^n$

$$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/2 \\ c_2 = 1/2 \end{cases}$$

Vậy T(n) $= \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}$

b)

T(n) = 4T(n-1) – 5T(n-2) + 2T(n-3)
T (0) = 0
T (1) = 1
T(2) = 2

Xét phương trình T(n) - 4T(n-1) + 5T(n-2) + 2T(n-3) = 0
Đặt $X^n =$ T(n)
Ta có: $X^n - 4X^{n-1} + 5X^{n-2} + 2X^{n-3} = 0$
Phương trình đặc trưng: $X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = 0 \Rightarrow (X-1)^2(X-2) = 0$
Có 1 nghiệm đơn $X_1 = 2$ và nghiệm kép $X_2 = 1$
Ta có: T(n) $= \ c_1X_1^n + c_2X_2^n + c_3nX_2^n = c_1.2^n + c_2.1^n + c_3n1^n$

$$\begin{cases} T(0) = 0 \\ T(1) = 1 \\ T(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ 4c_1 + c_2 + 2c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 = 0 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Vậy T(n) = $n1^n = n$

c)

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$
$$T(0) = 1$$
$$T(1) = 1$$

Xét phương trình T(n) - T(n-1) - T(n-2) = 0
Đặt X$^n = T(n)$
Ta có:$X^n - X^{n-1} - X^{n-2} = 0$
Phương trình đặc trưng:$X^2 - X - 1 = 0$
=> $\begin{cases} X_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ X_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$
Ta có: T(n) = c$_1X_1^n + c_2X_2^n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$
$\begin{cases} T(0) = 1 \\ T(1) = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_2) + \frac{\sqrt{5}}{2}(c_1 - c_2) = 1 \end{cases}$ => $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$ => $\begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ c_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$
Vậy: T(n) = $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

Bài tập 5: Giải phương trình đệ quy sau dùng phương pháp hàm sinh

a)

$$T(n) = \begin{cases} 1 & khi\ n = 0 \\ 2T(n-1) + 7 & khi\ n > 0 \end{cases}$$

Hàm sinh của dãy vô hạn T(n)$_{n=0\to\infty}$ có dạng:
f(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} [2T(n-1) + 7]x^n + 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1$
Đặt A = $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n$, B = $7\sum_{n=1}^{\infty} x^n$
A = $\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = xf(x)$
B = $7\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 7\big(\frac{1}{1-x} - 1\big)$
Khi đó: f(x) = $2xf(x) + 7\big(\frac{1}{1-x} - 1\big) + 1 = 2xf(x) + \frac{7}{1-x} - 6$
$\Rightarrow f(x) = \frac{6x+1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1-2x}$
$\Rightarrow a(1-2x) + b(1-x) = 6x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 8 \end{cases}$
$\Rightarrow f(x) = \frac{-7}{1-x} + \frac{8}{1-2x} = -7\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 8\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-7 + 8.2^n)x^n$
Vậy T(n) = -7 + 8.2^n

b)

T(n) = 7T(n-1) - 12T(n-2) nếu n>=2
T(0) = 1
T(1) = 2

Hàm sinh của dãy vô hạn T(n)$_{n=0\to\infty}$ có dạng:
f(x) $= \sum_{n=0}^{\infty} T(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} [7T(n-1) - 12T(n-2)]x^n + 1 + 2x = 7\sum_{n=1}^{\infty} T(n-1)x^n - 12\sum_{n=1}^{\infty} T(n-2)x^n + 1 + 2x$
Đặt A $= \sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n$, B $= \sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n$
A $= \sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^n = x\sum_{n=2}^{\infty} T(n-1)x^{n-1} = xf(x)$
B $= x^2\sum_{n=2}^{\infty} T(n-2)x^n = x^2 f(x)$
Khi đó: f(x) $= 7x(f(x)-1) + 12x^2 f(x) + 1 + 2x = 7xf(x) - 7x - 12x^2 f(x) + 1 + 2x$
$\Rightarrow f(x) = \frac{1-5x}{1-7x+12x^2} = \frac{-8}{x-1/3} + \frac{3}{x-1/4} = \frac{24}{1-3x} - \frac{12}{1-4x}$
$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 24(n-1)3^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (12(n-1)4^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 12(n-1)(12.3^n - 4^n)x^n$
Vậy T(n) $= 12(n-1)(12.3^n - 4^n)$

c)

T(n+1) = T(n) + 2(n+2) nếu n >=1
T(0) = 3

Đặt n = t - 1, ta có:
$\{$ Hàm sinh của dãy vô hạn $T(n)_{0\to\infty}$ là:
f(x) $= \sum_{t=0}^{\infty} T(t)x^t = \sum_{t=2}^{\infty} T(t)x^t + T(1).x^1 + T(0).x^0 = \sum_{t=2}^{\infty} T(t-1) + 2(t+1) + 7x + 3$
$= \sum_{t=2}^{\infty} T(t-1)x^t + 2\sum_{t=2}^{\infty} (t+1)x^t + 7x + 3$
$= xf(x) - 3x + 2[\frac{1}{(1-x)^2} - 1 - 2x] + 7x + 3 = xf(x) + 1 + \frac{2}{(1-x)^2} => (1-x)f(x) = 1 + \frac{2}{(1-x)^2}$
$=> f(x) = \frac{1}{(1-x)} + \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{t=0}^{\infty} x^t + 2\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(t+2)!}{t!.2!} x^t = \sum_{t=0}^{\infty} [1 + (t+1)(t+2)]x^t$
mà f(x) $= \sum_{t=0}^{\infty} T(t)x^t => T(t) = t^2 + 3t + 4$

Bài tập 6: Phương pháp đoán nghiệm

❖**Bài tập 6:** Cho phương trình đệ quy:

$$\begin{cases} T(1) = C_1 \\ T(n) = 4T(n/2) + n \quad \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

Một người dùng phương pháp đoán nghiệm để giải phương trình đệ quy trên. Giả sử anh ta lần lượt đoán 3 nghiệm như sau:

i. $f(n) = an^3$

ii. $f(n) = an^2$

iii. $f(n) = an^2 - bn$

❖Theo bạn, lần đoán nào thành công, thất bại và vì sao? (Gợi ý: thử đoán như anh ta)

i.
B1: CM: T(1) $\leq$ f(1)
Với n =1, T(1) = C1 và f(1) = a
Để có T(1) $\leq$ f(1) thì chọn C1 $\leq$ a (1)
B2: Giả sử T(k) $\leq$ f(k), $\forall$ k< n
B3: Ta CM T(n) $\leq$ f(n), $\forall$ n

Áp dụng giả thiết quy nạp với k = $\frac{n}{2}$ < n (n > 0)
Ta có T(n/2) $\leq$ f(n/2) = $\frac{an^3}{8}$
T(n) = 4T(n/2) + n $\leq$ $\frac{an^3}{2}$ + n
$\Rightarrow$ T(n) $\leq$ $\frac{an^3}{2}$ + n = f(n) - $\frac{an^3}{2}$ + n
Nếu $\frac{-an^3}{2}$ + n $\leq$ 0 $\Rightarrow$ T(n) $\leq$ f(n) -$\frac{an^3}{2}$ + n $\leq$ f(n)
Có $\frac{-an^3}{2}$ + n $\leq$ 0 $\Leftrightarrow$ $\frac{-1}{2}n(an^2-2) \leq 0 \Rightarrow an^2 - 2 \geq 0$ (vì n>0) $\Leftrightarrow$ a $\geq$ $\frac{2}{n^2}$
$\frac{2}{n^2}$ đạt GTLN tại n = 1 $\Rightarrow$ $\frac{2}{n^2}$ $\leq$ 2 ($\forall$ n > 0) (2)
(1), (2) $\Rightarrow$ nếu chọn a = |C1| + 2 thì: $\begin{cases} |C1| + 2 = a \geq \frac{2}{n^2} \\ C1 \leq a = |C1| + 2 \end{cases}$
$\Rightarrow$ T(n) $\leq$ $(|C1|+2)n^3\ \forall n$
$\Rightarrow$ T(n) = O(n^3)
ii.
B1: CM: T(1) $\leq$ f(1)
Với n =1, T(1) = C1 và f(1) = a
Để có T(1) $\leq$ f(1) thì chọn C1 $\leq$ a (1)
B2: Giả sử T(k) $\leq$ f(k), $\forall$ k< n
B3: Ta CM T(n) $\leq$ f(n), $\forall$ n

Áp dụng giả thiết quy nạp với k = $\frac{n}{2}$ < n (n > 0)
Ta có T(n/2) $\leq$ f(n/2) = $\frac{an^2}{4}$

T(n) = 4T(n/2) + n $\leq an^2$ + n
$\Rightarrow$ T(n) $\leq an^2$ + n = f(n) + n
Nếu n $\leq$ 0 $\Rightarrow$ T(n) $\leq$ f(n) + n $\leq$ f(n)
mà n $\leq$ 0 $\Rightarrow$ vô lý
$\frac{2}{n^2}$ đạt GTLN tại n = 1 $\Rightarrow \frac{2}{n^2} \leq 2$ ($\forall$ n > 0) (2)
=> đoán nghiệm f(x) = an^2 là không đúng.
iii.
Với $n = 1$, $T(1) = c_1$, $f(1) = a - b$
Để có $T(1) \leq f(1)$ => chọn $c_1 \leq a - b$
Giả sử $T(k) \leq f(k)\ \forall k < n$
Ta chứng minh: $T(n) \leq f(n)\ \forall n$
Áp dụng giả thiết quy nạp với $k = \frac{n}{2} < n(n > 1)$
Ta có:
$T(\frac{n}{2}) \leq f(\frac{n}{2}) = a\frac{n^2}{4} - b\frac{n}{2}$
$=> 4T(\frac{n}{2}) + n \leq an^2 - 2bn + n$
$=> T(n) \leq an^2 - 2bn + n = f(n) - bn + n$
Nếu $n - bn \leq 0 => T(n) \leq f(n)$
Ta thấy $n - bn \leq 0 <=> n(1 - b) \leq 0$ vì $n > 0 => b \geq 1$ Ta có hệ: $\begin{cases} b \geq 1 \\ a - b \geq c_1 \end{cases}$
Chọn b=1; a = $c_1 + 1$ =>T(n) $\leq (c_1 + 1)n^2 - n\ \forall n$
$=> T(n) = O(n^2)$

Bài tập 7: Phương pháp đoán nghiệm

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$
$$T(n) = 1 \quad \textit{với} \quad n \leq 5$$

Đoán f(n) = an + b
Dùng quy nạp để CM: T(n) $\leq$ f(n), $\forall$ n
B1: CM: T(n) $\leq$ f(n) với n $\leq$ 5
Với n =0, T(0) = 1 và f(0) = b
Với n =1, T(1) = 1 và f(1) = a+b
Với n =2, T(2) = 1 và f(2) = 2a+b
...
Để có T(n) $\leq$ f(n) với n $\leq$ 5 thì chọn b = 1, a $\geq$ 0
B2: Giả sử T(k) $\leq$ f(k), $\forall$ k< n
B3: Ta CM T(n) $\leq$ f(n), $\forall$ n > 5
Áp dụng giả thiết quy nạp với $k_1 = \frac{n}{2}$ < n
Ta có T(n/2) $\leq$ f(n/2) = $\frac{an}{2}$ + b (1)
Áp dụng giả thiết quy nạp với $k_2 = \frac{n}{4}$ < n

Ta có T(n/4) $\leq$ f(n/4) = $\frac{an}{4}$ + b (2)
(1), (2) $\Rightarrow$ T(n/2) + T(n/4) + n $\leq$ $\frac{an}{2}$ + b + $\frac{an}{4}$ + b + n
$\Rightarrow$ T(n) $\leq$ $\frac{3an}{4}$ + 2b + n = f(n) - $\frac{an}{4}$ + b + n
Nếu - $\frac{an}{4}$ + b + n $\leq$ 0 $\Rightarrow$ T(n) $\leq$ f(n) - $\frac{an}{4}$ + b + n $\leq$ f(n)
- $\frac{an}{4}$ + b + n $\leq$ 0 $\Rightarrow$ - $\frac{an}{4}$ + 1 + n $\leq$ 0 $\Rightarrow a \geq 4 + \frac{4}{n}$
Có 4 + $\frac{4}{n}$ đạt GTLN tại n = 6 (với n $>$ 5)$\Rightarrow 4 + \frac{4}{n} \leq \frac{14}{3}$ ($\forall$ n $>$ 5)
Vậy nếu chọn a = 14/3 thì 14/3 = a $\geq 4 + \frac{4}{n}$
a = 14/3, b = 1 $\Rightarrow$ T(n) $\leq$ $\frac{14}{3}$ n + 1 $\forall$ n
$\Rightarrow$ T(n) = O(n)