TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

UIT

HOMEWORK #03

ĐỘ PHỨC TẠP VÀ CÁC KÝ HIỆU TIỆM CẬN

Môn:	Phân tích thiết kế thuật toán
Lớp:	CS112.N23.KHCL
Giảng viên hướng dẫn:	Huỳnh Thị Thanh Thương
Nhóm thực hiện:	Hồ Thị Khánh Hiền(Leader) - 21522057
	Tống Trần Tiến Dũng - 21521983
	Bùi Mạnh Hùng - 21522110

TP Hồ Chí Minh,Ngày 30 tháng 4 năm 2023

Mục lục

Bài tập 1

a)

Độ phức tạp:
- sử dụng để đánh giá tính hiệu quả về mặt không gian hoặc thời gian của thuật toán.
- phân loại cấp độ lớn, đánh giá cấp độ lớn (khi n đủ lớn).
- Độ phức tạp không phải là một khái niệm khoa học, toán học
- biểu diễn thông qua hệ thống các kí hiệu tiệm cận $\Omega, \mathcal{O}, \theta$, liên quan đến chặn biên

b)

b) Hãy cho biết ý kiến của bạn về nhận định dưới đây và giải thích vì sao?

"Khi nghiên cứu về các thuật toán, người ta quan tâm đặc biệt đến tính hiệu quả về thời gian của chúng nhưng thường là quan tâm đến bậc tăng trưởng (order of growth) của hàm thời gian thực hiện của thuật toán, chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện T(n)".

Người ta thường không quan tâm đến bản thân thời gian thực hiện T(n) vì:

- Trong thực tế, rất khó để tính T(n) chính xác
- Nếu tính được T(n) rồi thì có thể gặp khó khăn khác khi so sánh 2 hàm số với nhau
- Thời gian chính xác thực hiện T(n) phụ thuộc vào độ lớn của n
- Thời gian thực thi còn phụ thuộc vào tình trạng máy (thay đổi theo thời gian) => so sánh các thuật toán với nhau không chính xác

=> Khi nghiên cứu về thuật toán, người ta thường quan tâm đến bậc tăng trưởng chứ không phải là bản thân thời gian thực hiện T(n) (nhận định trên là đúng)

c)Nói về ĐPT tức là đề cập tới các ký hiệu tiệm cận, mà có nhiều ký hiệu khác nhau. Vậy khi nào(trong trường hợp nào) thì nên dùng ký hiệu nào ?

Có 3 ký hiệu tiệm cận thường dùng, đó là:

- $\mathcal{O}$(big oh): khi muốn đánh giá độ phức tạp của giải thuật trong trường hợp xấu nhất

  VD: $f(n) = 100n + 5 \in \mathcal{O}(n)$

- Ω(big omega): khi muốn đánh giá độ phức tạp của giải thuật trong trường hợp tốt nhất

  VD: $f(n) = n^3 \in \Omega(n^2)$

- Θ(big theta): khi muốn đánh giá độ phức tạp của giải thuật trong trường hợp trung bình

  VD: $f(n) = \frac{1}{2}n(n-1) \in \Theta(n^2)$

Bài tập 2

For each function f(n) and time t in the following table, determine the largest size n of a problem that can be solved in time t, assuming that the algorithm to solve the problem takes f(n) microseconds

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\log n$	210^3	26.10^4	236.10^5	2864.10^5	22592.10^6	231104.10^7	231104.10^9
$\sqrt{n}$	10^6	36.10^8	1926.10^{10}	$\approx 7460.10^{12}$	$\approx 6718.10^{15}$	$\approx 8951.10^{20}$	$\approx 8951.10^{24}$
n	10^3	6.10^4	36.10^5	864.10^5	2592.10^6	31104.10^7	31104.10^9
$n \log n$	62746	2801417	133378058	2755147513	71870856404	797633893349	68610956750570
n^2	1000	7745	60000	293938	1609968	5615692	56156922
n^3	100	391	1532	4420	13736	31593	146645
2^n	19	25	31	36	41	44	51
n!	9	11	12	13	15	16	17

Giải thích:

Theo giả thiết bài toán, giải thuật xử lý trong f(n) (microseconds) hay f(n) = t(microseconds) Với mỗi $f(n)$ ta thử từng trường hợp n để tìm giá trị n lớn nhất thỏa mãn, theo các đoạn code sau:

- $logn, \sqrt{n}, n$:

```python
#f(n) = lgn
def fun1(t):
    n=1 # khởi tạo n=1
    while(n):
        if math.log2(n) > t:
            return n-1 # nếu n vượt quá giá trị t thì trả về giá trị trước đó
        n=n+1 # ngược lại thử giá trị n tiếp theo

#f(n) = sqrt(n)
def fun2(t):
    n=1 # khởi tạo n=1
    while(n):
        if math.sqrt(n) > t:
            return n-1 # nếu n vượt quá giá trị t thì trả về giá trị trước đó
        n=n+1 # ngược lại thử giá trị n tiếp theo

#f(n) = n
def fun3(t):
    n=1 # khởi tạo n=1
    while(n):
        if n > t:
            return n-1 # nếu n vượt quá giá trị t thì trả về giá trị trước đó
        n=n+1 # ngược lại thử giá trị n tiếp theo
```

```python
#đổi thành microseconds
#giả sử 1 tháng 30 ngày
mr=10**6
time = {1*mr,60*mr,3600*mr,86400*mr,259200*mr,31104000*mr,31104000*100*mr}
for i in time:
    print(fun1(i),end=" ")
print()
for i in time:
    print(fun2(i),end=" ")
print()
for i in time:
    print(fun3(i),end=" ")
```

- $nlogn, n^2, n^3$:

```
[ ]  times = [1000 * 1000,
              1000 * 1000 * 60,
              1000 * 1000 * 60 * 60,
              1000 * 1000 * 60 * 60 * 24,
              1000 * 1000 * 60 * 60 * 24 * 30,
              1000 * 1000 * 60 * 60 * 24 * 365,
              1000 * 1000 * 60 * 60 * 24 * 365 * 100]
```

```
[ ]  for t in times:
       # for nlogn
       n = 1
       while n*log(n,2) < t:
           n += 1
       if n*log(n,2) > t: #nếu nlogn > t thì trả về giá trị n - 1
         print(n-1)
       else:
         print(n) #ngược lại trả về n
```

```
62746
2801417
133378058
```

```
[ ]  for t in times:
       # for n^2
       n = 1
       while n**2 < t:
           n += 1
       if n**2 > t:
         print(n-1)
       else:
         print(n)
```

```
1000
7745
60000
293938
1609968
5615692
56156922
```

```
[ ]  for t in times:
       # for n^3
       n = 1
       while n**3 < t:
           n += 1
       if n**3 > t:
         print(n-1)
       else:
         print(n)
```

```
100
391
1532
4420
13736
31593
146645
```

- $2^n, n!$:

```
runningTime.py > ...
#Trường hợp f(n) = n!
def find1(t):
    n = 1 #Giá trị ban đầu n = 1
    mul = 1 #Khởi tạo giá trị mul = 1
    while(n):
        mul*=n # mul = n!
        if mul > t :
            return n-1 # if n! > t thì trả về giá trị n trước đó
        n = n + 1 # Thử giá trị n tiếp theo
#Trường hợp f(n) = 2^n
def find2(t):
    n = 1 #Gía trị khởi tạo ban đầu n = 1
    while(n):
        if 2**n > t :
            return n-1 #If 2^n > t thì trả về giá trị n trước đó
        n = n + 1 #Nếu sai thử giá trị n tiếp theo

# Đổi 1 second,1 minute,... thành microseconds
time = [1000000,60000000,3600000000,86400000000,2629743831225,3.1556926*10000000000000,3.1556926*1000000000000000]
for i in time:
    print(find1(i),"\n")
for i in time:
    print(find2(i),"\n")
```

Bài tập 3

a)

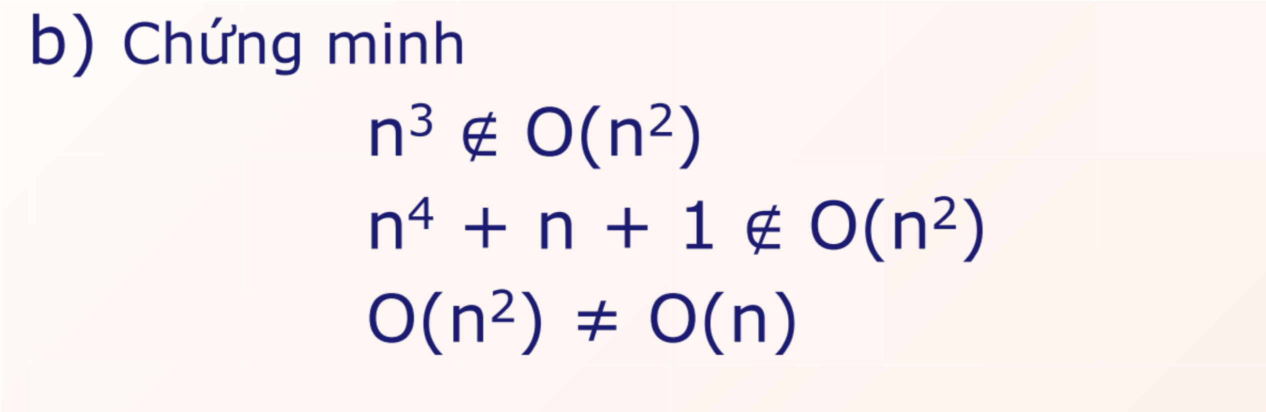
$$\frac{1}{2}n^2 = O(n^2)$$

$$n^2 + 1 = O(n^2)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}n^2 = n^2 + 1 \quad ???$$

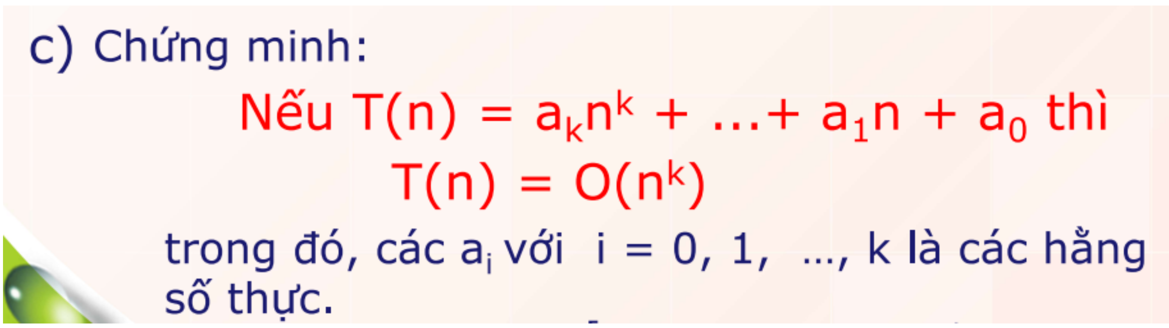
Phép suy ra bên trên là sai, dấu bằng "=" ở đây chỉ về mặt hình thức, chính xác hơn ở đây là dấu thuộc "$\in$".
Có nghĩa là 2 hàm trên đều thuộc tập hợp $\{t(n) : \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0, t(n) \leq cn^2\}$

b)



- Giả sử $n^3 \in \mathcal{O}(n^2) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^3 \leq cn^2$ $(\forall n \geq n_0) \Rightarrow n \leq c$
  Với n = c+1 thì $n \leq c$ sai $\Rightarrow n \notin \mathcal{O}(n^2)$ (đccm)
- Giả sử $n^4 + n + 1 \in \mathcal{O}(n^2) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^4 + n + 1 \leq cn^2$ $(\forall n \geq n_0) \Rightarrow$ $n^2 + 1/n + 1/n^2 \leq c$
  Chọn n = 1/c $\Rightarrow \frac{1}{c^2} + c + c^2 \leq c \Rightarrow \frac{1+c^4}{c^2} \leq 0 \Rightarrow 1 + c^4 \leq 0 \Rightarrow c^4 \leq -1$
  Mà c>0 => $c^4 > 0 \forall c \Rightarrow$ không tồn tại c để $n^4 + n + 1 \leq cn^2$
  $\Rightarrow n^4 + n + 1 \notin \mathcal{O}(n^2)$ (đccm)
- Để CM $\mathcal{O}(n^2) \neq \mathcal{O}(n)$ tìm f(n) $\in \mathcal{O}(n^2)$ nhưng f(n) $\notin \mathcal{O}(n)$
  Chọn f(n) = n^2
  f(n) $\in \mathcal{O}(n^2)$ với $c_1 = 1, n_0$ =1
  Giả sử $n^2 \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $n^2 \leq c_1 n$ $(\forall n \geq n_1) \Rightarrow n \leq c_1$
  Với n = $c_1 + 1$ thì $n \leq c_1$ sai $\Rightarrow n^2 \notin \mathcal{O}(n)$
  $\Rightarrow \mathcal{O}(n^2) \not\subset \mathcal{O}(n) \Rightarrow \mathcal{O}(n^2) \neq \mathcal{O}(n)$ (đccm)

c)



Ta có:
$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0 \leq |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + ... + |a_1| n + |a_0|$ $\forall n \geq 1$
=> $T(n) \leq (|a_k| + |a_{k-1}| + ... + |a_1| + |a_0|) n^k$ $\forall n \geq 1$
Chọn $c = |a_k| + |a_{k-1}| + ... + |a_1| + |a_0|$,$n_0 = 1$, theo định nghĩa của Big Oh, ta có: $T(n) = \mathcal{O}(n^k)$(đccm)

Bài tập 4

Group 1)

$$\textbf{Group 1:} \quad f_1(n) = \binom{n}{100}$$
$$f_2(n) = n^{100}$$
$$f_3(n) = 1/n$$
$$f_4(n) = 10^{1000}n$$
$$f_5(n) = nlogn$$

$f_1(n) = C_n^100 = \frac{n!}{(n-100)!100!} = \mathcal{O}(n^{100})$
$f_2(n) = \mathcal{O}(n^{100})$
$f_3(n) = \frac{1}{n} = \mathcal{O}(n^{-1})$
$f_4(n) = 10^{1000}n = \mathcal{O}(n)$
$f_5(n) = nlogn = n.n^{\log_n logn} = \mathcal{O}(n^{1+c})$
Vậy $f_3(n) < f_4(n) \approx f_5(n) < f_1(n) \approx f_2(n)$

Group 2)

$$\textbf{Group 2:} \quad f_1(n) = 2^{2^{1000000}}$$
$$f_2(n) = 2^{100000n}$$
$$f_3(n) = \binom{n}{2}$$
$$f_4(n) = n\sqrt{n}$$

$f_1(n) = 2^{2^{1000000}} = \mathcal{O}(1)$
$f_2(n) = 2^{100000n} = \mathcal{O}(2^n)$
$f_3(n) = C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \mathcal{O}(n^2)$
$f_4(n) = n\sqrt{n} = n^{3/2} = \mathcal{O}(n^{3/2})$
Vậy $f_1(n) < f_4(n) < f_3(n) < f_2(n)$

Group 3)

$$
\textbf{Group 3:}\quad
\begin{aligned}
f_1(n) &= n^{\sqrt{n}} \\
f_2(n) &= 2^n \\
f_3(n) &= n^{10} \cdot 2^{n/2} \\
f_4(n) &= \sum_{i=1}^{n} (i+1)
\end{aligned}
$$

Ta thấy:
$f_1(n) = n^{\sqrt{n}} = (2^{\log_2 n})^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}\log_2 n} = 2^{\mathcal{O}(n^{c+1/2})}$ với c $>$ 0
$f_2(n) = 2^n = 2^{\mathcal{O}(n)}$
$f_3(n) = n^{10} 2^{\frac{n}{2}} = 2^{10\log_2 n} 2^{\frac{n}{2}} = 2^{10\log_2 n + \frac{n}{2}} = 2^{\mathcal{O}(n)}$
$f_4(n) = \sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{n(n+1)}{2} = 2^{\log_2 \frac{n^2+n}{2}} = 2^{\mathcal{O}(n^c)}$ với c $>$ 0
Vậy $f_4(n) < f_1(n) < f_2(n) \approx f_3(n)$

Group 4)

$$
\textbf{Group 4:}\quad
\begin{aligned}
&f_1(n) = n^4\binom{n}{2} \\
&f_2(n) = \sqrt{n}(\mathrm{log}n)^4 \\
&f_3(n) = n^{5\mathrm{log}n} \\
&f_4(n) = 4logn + loglogn \\
&f_5(n) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} i
\end{aligned}
$$

$logn \in \mathcal{O}(n^c)$ với c có thể rất bé nhưng c $>$0
$f_1(n) = n^4 . \frac{n!}{(n-2)!2!} = n^{\mathcal{O}(6)}$
$f_2(n) = n^{1/2} n^{4\log_n(logn)} = n^{\mathcal{O}(1/2+4c)}$
$f_3(n) = n^{\mathcal{O}(logn)}$
$f_4(n) = n^{\mathcal{O}(c)}$
$f_5(n) = 4^{n^{1/4}} = \frac{n(n-1)}{2} = n^{\mathcal{O}(2)}$
Vậy $f_2(n) \approx f_4(n) < f_1(n) \approx f_5(n) < f_3(n)$

Group 5)

Group 5:

$$f_6(n) = n^{\sqrt{n}}$$
$$f_7(n) = \mathrm{n}^{logn}$$
$$f_8(n) = 2^{n/2}$$
$$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}}$$
$$f_{10}(n) = 4^{n^{1/4}}$$

$logn \in \mathcal{O}(n^c)$ với c có thể rất bé nhưng c >0
$f_6(n) = n^{\sqrt{n}} = (2^{logn})^{\sqrt{n}} = 2^{\sqrt{n}logn} = 2^{\mathcal{O}(\sqrt{n}n^c)} = 2^{\mathcal{O}(n^{1/2+c})}$
$f_7(n) = n^{logn} = (2^{logn})^{logn} = 2^{\mathcal{O}(n^{2c})}$
$f_8(n) = 2^{n/2} = 2^{\mathcal{O}(n/2)}$
$f_9(n) = 3^{\sqrt{n}} = 2^{log3\sqrt{n}} = 2^{\mathcal{O}(n^{1/2})}$
$f_{10}(n) = 4^{n^{1/4}} = 2^{2n^{1/4}} = 2^{\mathcal{O}(n^{1/4})}$
Vậy $f_7(n) < f_{10}(n) < f_9(n) \approx f_6(n) < f_8(n)$

Group 6)

Group 6:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n^{0.999999}\log n \\ f_2(n) &= 10000000n \\ f_3(n) &= 1.000001^n \\ f_4(n) &= n^2 \end{aligned}$$

Ta thấy:
$f_1(n) = n^{0.999999}\log n = \mathcal{O}(\log(n))$
$f_2(n) = 10000000n = \mathcal{O}(n)$
$f_3(n) = 1,000001^n = \mathcal{O}(c^n)$
$f_4(n) = n^2 = \mathcal{O}(n^2)$
Vậy $f_1(n) < f_2(n) < f_4(n) < f_3(n)$

Group 7)

$f_1(n) = (n-2)!$ $\quad f_2(n) = 5\lg(n+100)^{10}$ $\quad f_3(n) = 2^{2n}$
$f_4(n) = 0.001n^4 + 3n^3 + 1$ $\quad f_5(n) = \ln^2 n$ $\quad f_6(n) = \sqrt[3]{n}$
$f_7(n) = 3^n$

Ta thấy:
$f_1(n) = \mathcal{O}(n!)$

$f_2(n) = 50log(n + 100) = \mathcal{O}(n^c)$
$f_3(n) = \mathcal{O}(c^n)$
$f_4(n) = \mathcal{O}(n^4)$
$f_5(n) = ln^2 2.log^2 n = \mathcal{O}(n^{2c})$
$f_6(n) = \mathcal{O}(n^{1/3})$
$f_7(n) = \mathcal{O}(c^n)$
Vậy $f_2(n) < f_5(n) < f_6(n) < f_4(n) < f_7(n) < f_3(n) < f_1(n)$

Bài tập 5

a) $\mathcal{O}(C) = \mathcal{O}(1)$ với C là hằng số

- $\mathcal{O}(C) \subset \mathcal{O}(1)$
  Chọn bất kỳ $f(n) \in \mathcal{O}(C) \Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}^+$,$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \leq dC$ $\forall(n \geq n_1)$
  Chọn $k_1 = dC, n_3 = n_1 \Rightarrow f(n) \leq k_1.1$ $(\forall n \geq n_3)$$\Rightarrow \mathcal{O}(C) \subset \mathcal{O}(1)$
- $\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(C)$
  Chọn bất kỳ $f(n) \in \mathcal{O}(1) \Rightarrow \exists e \in \mathbb{R}^+$,$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \leq e.1$ $\forall(n \geq n_2)$
  Chọn $k_2 = a/C, n_4 = n_2 \Rightarrow f(n) \leq k_2.C.1 = k_2.C$ $(\forall n \geq n_4)$$\Rightarrow \mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(C)$

$\Rightarrow \mathcal{O}(C) = \mathcal{O}(1)$ với C là hằng số (**đccm**)

b) Nếu $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$ thì $f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$

Ta có:

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) => \exists c_1 \in \mathbb{R}^+$,$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ $|f(n) \leq c_1 g(n)$ $\forall n \geq n_1$
- $g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) => \exists c_2 \in \mathbb{R}^+$,$\exists n_2 \in \mathbb{N}$ $|g(n) \leq c_2 h(n)$ $\forall n \geq n_2$

$=> \forall n \geq max(n_1, n_2)$ thì $f(n) \leq c_1 c_2 h(n)$
Vậy, chọn $c = c_1 c_2$, $n_0 = max(n_1, n_2) => f(n) \in \mathcal{O}(h(n))$**(đccm)**

c) max{f(n),g(n)} = $\theta(f(n) + g(n))$

giả sử: $f(n) \geq 0$ và $g(n) \geq 0$,$\forall n \geq n_0$
ta thấy$f(n) \leq max\{f(n), g(n)\}$ và $g(n) \leq max\{f(n), g(n)\}$
$\rightarrow f(n) + g(n) \leq 2max\{f(n), g(n)\}$
$\Leftrightarrow 1/2(f(n) + g(n)) \leq max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n)$
$c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$
Dựa theo định nghĩa của Big-θ $\rightarrow max\{f(n), g(n)\} = \theta(f(n) + g(n))$

d) If t(n)$\in \mathcal{O}(g(n))$ then g(n) $\in \Omega(t(n))$

t(n)$\in \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:$t(n) \leq cg(n)$ $(\forall n \geq n_0)$
$\Rightarrow \frac{1}{c}t(n) \leq g(n)$ $(\forall n \geq n_0)$
Chọn d = 1/c, $n_1 = n_0 \Rightarrow dt(n) \leq g(n)$ $(\forall n \geq n_1)$
Dựa theo định nghĩa của Big-Ω thì g(n) $\in \Omega(t(n))$ (**đccm**)

e) $\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$**, where** $\alpha > 0$

Ta cần chứng minh $\Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))$
Xét một hàm số bất kỳ $f(n) \in \Theta(\alpha g(n))$
$=> \exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}$ $|d_1 \alpha g(n) \leq f(n) \leq d_2 \alpha g(n)$ $\forall n \geq n_0$
Chọn $k_1 = d_1\alpha, k_2 = d_2\alpha$ vì $\alpha > 0 => k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$,ta có:

$$k_1 g(n) \leq f(n) \leq k_2 g(n) \ \forall n \geq n_0$$

$=>f(n) \in \Theta(g(n)) => \Theta(\alpha g(n)) \subset \Theta(g(n))$ **(1)**

Ta cần chứng minh $\Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))$
Xét một hàm số bất kỳ $f(n) \in \Theta(g(n))$
$=> \exists d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$, $n_0 \in \mathbb{N}$ $|d_1 g(n) \leq f(n) \leq d_2 g(n)$ $\forall n \geq n_0$
Chọn $k_1 = \frac{d_1}{\alpha}, k_2 = \frac{d_2}{\alpha}$ vì $\alpha > 0 => k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+$,ta có:

$$k_1 \alpha g(n) \leq f(n) \leq k_2 \alpha g(n) \ \forall n \geq n_0$$

$=>f(n) \in \Theta(\alpha g(n)) => \Theta(g(n)) \subset \Theta(\alpha g(n))$ **(2)**
Từ **(1)** và **(2)** $=> \Theta(\alpha g(n)) = \Theta(g(n))$, where $\alpha > 0$
Vậy khẳng định trên là **đúng**

f) $\theta(g(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Chứng minh: $\theta(g(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
giả sử: $\forall f(n) \in \theta(g(n))$
$\exists c_1, c_2 \in R^+, \exists n_0 \in N \rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \forall n \geq n_0$
suy ra :
$+> \forall n \geq n_0, c_1 g(n) \leq f(n) \Rightarrow f(n) \in \Omega(g(n))$
$+> \forall n \geq n_0, f(n) \leq c_2 g(n) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
$\Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
vậy $\forall f(n) \in \theta(g(n)), f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
$\Rightarrow \theta(g(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$ (1)
Chứng minh: $\mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subset \theta(g(n))$
giả sử: $\forall f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$
suy ra :
$+> \exists c_1 \in R^+, \exists n_0 \in N \rightarrow f(n) \leq c_1 g(n) \forall n \geq n_0$
$+> \exists c_2 \in R^+, \exists n_1 \in N \rightarrow f(n) \geq c_2 g(n) \forall n \geq n_1$
$\rightarrow c_2 g(n) \leq f(n) \leq c_1 g(n) \forall n \geq max\{n_0, n_2\}$
$\Rightarrow f(n) \in \theta(g(n))$
vậy $\forall f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n)), f(n) \in \theta(g(n))$
$\Rightarrow \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \subset \theta(g(n))$ (2)
từ (1) và (2) $\Rightarrow \theta(g(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

Bài tập 6: Các khẳng định bên dưới là đúng hay sai? Vì sao?

a) Nếu $f(n) = \Theta(g(n))$ **và** $g(n) = \Theta(h(n))$**, thì** $h(n) = \Theta(f(n))$

Có:

- $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$
- $g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow g(n) = \mathcal{O}(h(n))$ và $h(n) = \mathcal{O}(g(n))$

Cần CM: $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$ và $h(n) = \mathcal{O}(f(n))$

- $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$
  $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \leq c_1 g(n)$
  $\Rightarrow \frac{1}{c_1} f(n) \leq g(n)\ \forall n \geq n_1$ (1)
  $g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \Rightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \leq c_2 h(n)\ \forall n \geq n_2$ (2)
  Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{c_1} f(n) \leq c_2 h(n) \Rightarrow f(n) \leq c_1 c_2 h(n)\ \forall n \geq n_1, n \geq n_2$
  Chọn a $= c_1 c_2, n_3 = \max(n_1, n_2) \Rightarrow f(n) \leq ah(n)\ \forall n \geq n_3 \Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(h(n))$

- $h(n) = \mathcal{O}(f(n))$
  $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \exists c_3 \in \mathbb{R}^+, n_4 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \leq c_3 f(n)$
  $\forall n \geq n_4$ (3)
  $h(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists c_4 \in \mathbb{R}^+, n_5 \in \mathbb{N}$ sao cho: $g(n) \leq c_4 h(n)$
  $\Rightarrow \frac{1}{c_4} g(n) \leq h(n)\ \forall n \geq n_5 (4)$
  Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{1}{c_4} h(n) \leq c_3 f(n) \Rightarrow h(n) \leq c_3 c_4 f(n)\ \forall n \geq n_4, n \geq n_5$
  Chọn b $= c_3 c_4, n_6 = \max(n_3, n_4) \Rightarrow hf(n) \leq bf(n)\ \forall n \geq n_6 \Rightarrow h(n) = \mathcal{O}(f(n))$

$\Rightarrow h(n) = \Theta(f(n))$
Vậy khẳng định trên là **đúng**

b) Nếu $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$, thì $h(n) = \Omega(f(n))$

Từ giả thiết:

- $f(n) = \Theta(g(n)) => \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}\ | f(n) \leq c_1 g(n)\ \forall n \geq n_1$
- $g(n) = \Theta(h(n)) => \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}\ | g(n) \leq c_2 h(n)\ \forall n \geq n_2$

=> Với $n_0 = max(n_1, n_2) => f(n) \leq c_1 c_2 h(n)\ \forall n \geq n_0$
=> Chọn $n_0 = max(n_1, n_2)$ và $c_0 = c_1 c_2$ thì $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$ hay $h(n) = \Omega(f(n))$ **(đccm)**

c) Nếu f(n) = $\mathcal{O}(g(n))$ và g(n) = $\mathcal{O}(f(n))$ thì f(n) = g(n)

Khẳng định trên là sai vì :

- f(n) = $\mathcal{O}(g(n))$
  $\Rightarrow \exists c_1 \in R^+, \exists n_1 \in N \rightarrow f(n) \leq c_1 g(n)\ \forall n \geq n_1$
- g(n) = $\mathcal{O}(f(n))$
  $\Rightarrow \exists c_2 \in R^+, \exists n_2 \in N \rightarrow f(n) \leq c_2 g(n)\ \forall n \geq n_2$

$\Rightarrow f(n), g(n)$chỉ là 1 trong tập tất cả các hàm thoã mãn 2 điều kiện trên
$\Rightarrow$ chưa đủ điều kiện để khẳng định f(n) = g(n)

d) n/100 = $\Omega(n)$

Có: $\frac{n}{100} \geq \frac{n}{1000}\ \forall n \geq 1$
Chọn c = $\frac{1}{1000}, n_0 = 1 \Rightarrow \frac{n}{100} \geq cn\ (\forall n \geq n_0)$
Theo định nghĩa Big-Ω: n/100 = $\Omega(n)$ (**đccm**)
Vậy khẳng định trên là **đúng**

e) $f(n) + \mathcal{O}(f(n)) = \Theta(f(n))$

Xét một hàm số bất kỳ $h(n) = \mathcal{O}(f(n))$, khi đó: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N} | h(n) \leq cf(n)\ \forall n \geq n_0$
Ta có: $0 \leq h(n) \leq cf(n)\ \forall n \geq n_0$
$=> f(n) \leq f(n) + h(n) \leq f(n) + cf(n)\ \forall n \geq n_0$
$=> f(n) \leq f(n) + \mathcal{O}(f(n)) \leq (c+1)f(n)\ \forall n \geq n_0$
Chọn $c_1 = 1, c_2 = 1 + c, n_1 = n_0$, theo định nghĩa Big-$\mathcal{O}$ thì $f(n) + \mathcal{O}(f(n)) = \Theta(f(n))$
Vậy khẳng định trên là **đúng**

f) $2^{10n} = \mathcal{O}(2^n)$

Giả sử : $2^{10n} = \mathcal{O}(2^n)$
$\Rightarrow \exists c \in R^+, \exists n_0 \in N \Rightarrow 2^{10n} \leq c2^n,\ \forall n \geq n_0$
$\Leftrightarrow \log(2^{10n}) \leq \log(c2^n)$
$\Leftrightarrow 10n \leq \log(c) + n$
$\Leftrightarrow n \leq \frac{\log(c)}{9}$
$\Rightarrow \nexists n_0$ thoả $n \geq n_0$
Vậy khẳng định trên là **sai**

g) $2^{n+10} = \mathcal{O}(2^n)$

Giả sử $2^{n+10} = \mathcal{O}(2^n) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $2^n.2^{10} \leq c2^n$ với $\forall n \geq n_0 \Rightarrow c \geq 2^{10}$
Khi đó: $2^{n+10} = \mathcal{O}(2^n)$ với c $\geq 2^{10}$
Vậy khẳng định trên là **đúng**

h) $\log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$

Ta thấy:
$\lim_{n->\infty} \frac{\log_{10} n}{\log_2 n} = \lim_{n->\infty} \frac{\log_2 n \log_{10} 2}{\log_2 n} = \log_{10} 2 \# 0$
$=> \log_{10} n = \Theta(\log_2 n)$
Vậy khẳng định trên là **đúng**

Bài tập 7: Định lý Master

1) T(n) = 3T(n/2) + n^2

Vì f(n) là đa thức nên áp dụng Định lý số 1
a = 3, b = 2, d =2
$\rightarrow 3 < 2^2 = 8$ TH1 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$

2) T(n) = 7T(n/3) + n^2

Vì f(n) là đa thức nên áp dụng Định lý số 1
a = 7, b = 3, d =2
$\rightarrow 7 < 3^2 = 8$ TH1 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^2)$

3) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \frac{n}{2}$

Ta có: $a = 3, b = 3, f(n) = \frac{n}{2} \in \Theta(n) => d = 1$. Áp dụng Định lý Master 1,ta thấy:
$a = b^d(3 = 3^1)$(case 2)
Kết luận $T(n) = \Theta(n \log n)$

4) $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n$

Ta có: $a = 16, b = 4, f(n) = n \in \Theta(n) => d = 1$. Áp dụng Định lý Master 1,ta thấy:
$a > b^d(16 > 4^1)$(case 3)
Kết luận $T(n) = \Theta(n^{\log_4 16})$

5) T(n) = 2T(n/4) + $n^{0.51}$

Vì f(n) là đa thức nên áp dụng Định lý số 1
a = 2, b = 4, d =0.51
$\rightarrow 2 < 4^{0.51} = 2^{1.02}$ TH1 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^{0.51})$

6) $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n$

Ta có: $a = 3, b = 2, f(n) = n \in \Theta(n) => d = 1$. Áp dụng Định lý Master 1,ta thấy:
$a > b^d(3 > 2^1)$(case 3)
Kết luận $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$

7) $T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \sqrt{n}$

Ta có: $a = 3, b = 3, f(n) = \sqrt{n} = n^{1/2} \in \Theta(n) => d = \frac{1}{2}$. Áp dụng Định lý Master 1,ta thấy:
$a > b^d(3 > 3^{1/2})$(case 3)
Kết luận $T(n) = \Theta(n^{\log_3 3}) = \theta(n)$

8) T(n) = 4T(n/2) + cn

Vì f(n) là đa thức nên áp dụng Định lý số 1
a = 4, b = 2, d =1
$\rightarrow 4 > 2^1 = 2$ TH3 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$

9) $T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + 5n$

Ta có: $a = 4, b = 4, f(n) = 5n \in \Theta(n) => d = 1$. Áp dụng Định lý Master 1,ta thấy:
$a > b^d(5 = 4^1)$(case 3)
Kết luận $T(n) = \Theta(n \log n)$

10) $T(n) = 5T(\frac{n}{4}) + 4n$

Ta có: $a = 5, b = 4, f(n) = 5n \in \Theta(n) => d = 1$. Áp dụng Định lý Master 1,ta thấy:
$a = b^d (4 = 4^1)$(case 2)
Kết luận $T(n) = \Theta(n^{\log_4 5})$

11) T(n) = 4T(n/5) + 5n

Vì f(n) là đa thức nên áp dụng Định lý số 1
a = 4, b = 5, d =1
$\rightarrow 4 < 5^1 = 5$ TH1 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n)$

12) $T(n) = 25T(\frac{n}{25}) + n^2$

Ta có: $a = 25, b = 5, f(n) = n^2 \in \Theta(n^2) => d = 2$. Áp dụng Định lý Master 1,ta thấy:
$a = b^d (25 = 5^2)$(case 2)
Kết luận $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$

13) T(n) = 10T(n/3) + $n^{1,2}$

Vì f(n) là đa thức nên áp dụng Định lý số 1
a = 10, b = 3, d =1,2
$\rightarrow 10 > 3^{1,2}$ TH3 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(\sqrt[5]{n^6})$

14) T(n) = 7T(n/2) + n^3

Vì f(n) là đa thức nên áp dụng Định lý số 1
a = 7, b = 2, d =3
$\rightarrow 7 < 2^3 = 8$ TH1 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^d) = \Theta(n^3)$

15) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \log n$

Ta có: $a = 4, b = 2, n^{\log_b a} = n^2$
Vì $f(n) = \log n$ không phải là đa thức, Áp dụng định lý Master 2, ta thấy:
$f(n) = \log n = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \epsilon})$, chọn $\epsilon = 1 => f(n) = \mathcal{O}(n)$, case 1 được áp dụng
Kết luận $T(n) = \Theta(n^2)$

16) $T(n) = 4T(\frac{n}{5}) + \log n$

Ta có: $a = 4, b = 5, n^{\log_b a} = n^2$
Vì $f(n) = n \log n$ không phải là đa thức, Áp dụng định lý Master 2, ta thấy:
$f(n) = n \log n = \mathcal{O}(n^{\log_5 4 + \epsilon})$, với $\epsilon > 0$
Check regularity condition:
$4f(\frac{n}{5}) \leq cf(n) <=> 4\frac{n}{5} \log \frac{n}{5} \leq cn \log n <=> \frac{4}{5} n(\log n - \log 5) \leq cn \log n$ (vì $\log 5 > 0 \Rightarrow$ $log(n) - log(5) < log(n)$, chọn $c = 4/5$

=> Case 3 được áp dụng
Kết luận $T(n) = \Theta(n \log n)$

17) T(n) = $\sqrt{2}$T(n/2) + logn

Vì f(n) = logn không là đa thức nên áp dụng Định lý số 2
a = $\sqrt{2}$, b = 2, $\log_b a$ = 1/2
logn $\in \mathcal{O}(n^c)$ với c > 0 => f(n) $\in \mathcal{O}(n^{\log_b a-\epsilon}), \epsilon = 0.25$
TH1 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(\sqrt{n})$

18) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n \log n$

Ta có: $a = 2, b = 3, n^{\log_b a} = n^{\log_3 2}$
Vì $f(n) = n \log n$ không phải là đa thức, Áp dụng định lý Master 2, ta thấy:
$f(n) = n \log n = \mathcal{O}(n^{\log_3 2+\epsilon})$, với $\epsilon > 0$
Check regularity condition:
$2f(\frac{n}{3}) \leq cf(n) <=> 2\frac{n}{3} \log \frac{n}{3} \leq cn \log n <=> \frac{2}{3} n \log n - \frac{2}{3} n \log 3 \leq cn \log n$ (vì $n \log n > 0$, chia 2 vế cho $n \log n$)
=> $\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{\log 3}{\log n} \leq c$, chọn $c = 0.5$ thỏa mãn khi n đủ lớn
=> Case 3 được áp dụng
Kết luận $T(n) = \Theta(n \log n)$

19) $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \log n$

Ta có: $a = 3, b = 4, n^{\log_b a} = n^{\log_4 3}$
Vì $f(n) = n \log n$ không phải là đa thức, Áp dụng định lý Master 2, ta thấy:
$f(n) = n \log n = \mathcal{O}(n^{\log_4 3+\epsilon})$, với $\epsilon > 0$
Check regularity condition:
$3f(\frac{n}{4}) \leq cf(n) <=> 3\frac{n}{4} \log \frac{n}{4} \leq cn \log n <=> \frac{3}{4} n(\log n - 2) \leq cn \log n$ (vì $\log 5 > 0 \Rightarrow log(n) - log(5) < log(n)$, chọn $c = 3/4$
=> Case 3 được áp dụng
Kết luận $T(n) = \Theta(n \log n)$

20) T(n) = 6T(n/3) + $n^2 logn$

Vì f(n) = $n^2 logn$ không là đa thức nên áp dụng Định lý số 2
a = 6, b = 3, $\log_b a = \log_3 6$
$logn \geq c$ với c > 0, c $\in \mathbb{R}^+$ => $n^2 logn \geq n^2 c$ => $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\epsilon}), \epsilon = 0.25$
và $af(n/b) \leq cf(n)$
(vì $6(n/3)^2 \log \frac{n}{3} = \frac{2}{3} n^2 logn - \frac{2}{3} n^2 log3 \leq cn^2 logn, c = 2/3$
TH3 được áp dụng
Kết luận: $T(n) \in \Theta(f(n)) = \Theta(n^2 logn)$

21) $T(n) = 3T(\frac{n}{5}) + \log^2 n$

Ta có: $a = 3, b = 5, n^{\log_5 3}$
$f(n) = \log^2 n$ không phải là đa thức => Áp dụng định lý Master 2, ta có:
$f(n) = \log^2 n = \mathcal{O}(n^{\log_5 3-\epsilon})$ với $\epsilon = 0.1 > 0$

=> **Case 1** được áp dụng
=> $T(n) = \Theta(n^{\log_5 3})$

22) T(n) = $2^nT(n/2) + \frac{n}{logn}$

a=2, b=2, f(n) = $\frac{n}{logn}$, $n^{\log_2(2)} = n$
f(n) = $n^{\log_b(a)}.log^k n = n^{\log_2(2)}.log^{-1}n$
k=-1
$\Rightarrow$ không tồn tại đa thức giữa f(n) và $n^{\log_b(a)} \rightarrow mastermethod$ không áp dụng được

23) T(n) = $2^nT(n/2) + n^n$

a = 2^n, b = 2, f(n) = n^n không là đa thức nên không áp dụng Định lý số 1
a phải là hằng số nhưng a = 2^n (a phụ thuộc vào n)
Kết luận: Không áp dụng được định lý Master

24) $T(n) = 0.5T(\frac{n}{2}) + n$

Ta có: $a = \frac{1}{2}, b = 2$
Vì $a < 1$ không thỏa mãn điều kiện của định lý Master: $a \geq 1$
=> Không áp dụng được định lý Master 1 và 2.

25) T(n) = T(n/2) - $n(2 - cosn)$

vì $1 \leq 2 - cosn \leq 3$
$\Rightarrow \mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(n)$
áp dụng định lý master (1) a = 1, b = 2,d = 1
1<$2^1 \Rightarrow case1$
Kết luận : T(n) = $\mathcal{O}(n)$

26) T(n) = 64T(n/8) - n^2logn

T(n) = 64T(n/8) + $n^2log(\frac{1}{n})$
a = 6, b = 8, f(n) = $n^2log(\frac{1}{n})$ không là đa thức nên không áp dụng Định lý số 1
$n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow \log(\frac{1}{n}) \leq 0 \Rightarrow n^2\log(\frac{1}{n}) \leq 0$
Mà f(n) phải là hàm số dương
Kết luận: Không áp dụng được định lý Master

27) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + 2^n$

Ta có: $a = 1, b = 2, n^{\log_b a} = 0$
$f(n) = 2^n$ không phải là đa thức => áp dụng định lý Master 2,ta có:
$f(n) = 2^n = \Omega(n^{0+\epsilon})$với$\epsilon = 2$
Check regularity condition:
$f(\frac{n}{2}) < cf(n) <=> 2^{\frac{n}{2}} < c2^n <=> c > 2^{\frac{-n}{2}}$ chọn $c = 0.5 < 1$ thỏa mãn khi n đủ lớn
=> **Case 3** được áp dụng
=> $T(n) = \Theta(2^n)$

28) $T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n!$

a=16, b=4, f(n) = n!, $n^{\log_b a} = n^{\log_4(16)} = n^2$
áp dụng master theorem (2):
n!.n^2 > n! > $n^{2+\epsilon}$ > n^2 khi n đủ lớn
⇒ f(n) = $\Omega(n^{2+\epsilon})$ case 3
⇒ T(n) = $\theta(n!)$

Bài tập 8: BONUS

1) Chứng minh: $n + n^2\mathcal{O}(lnn) = \mathcal{O}(n^2lnn)$

Chọn f(n) bất kỳ $\in \mathcal{O}(lnn)$: $\exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho f(n) ≤ clnn ($\forall n \geq n_0$)
⇒ $n + n^2\mathcal{O}(lnn) = n + n^2f(n) \leq n + n^2clnn \leq (1+c)n^2lnn$ ($\forall n \geq n_0$)
Chọn c_1 = 1 + c, $n_1 = n_0 \Rightarrow n + n^2\mathcal{O}(lnn) \leq c_1n^2lnn$ ($\forall n \geq n_1$)
Theo định nghĩa Big-$\mathcal{O}$: $n + n^2\mathcal{O}(lnn) = \mathcal{O}(n^2lnn)$ (**đccm**)

2)Chứng minh: $g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) => \mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(h(n))$

Đặt $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, theo định nghĩa Big Oh, ta có:
$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N} | f(n) \leq c_1g(n)\ \forall n \geq n_1$ **(1)**
Từ giả thiết $g(n) \in \mathcal{O}(h(n))$, theo định nghĩa Big Oh, ta có:
$\exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N} | g(n) \leq c_2h(n)\ \forall n \geq n_2$ **(2)**
Từ **(1)** và **(2)** $=> f(n) \leq c_1c_2h(n)\ \forall n \geq max(n_1, n_2)$
Chọn $c = c_1c_2, n_0 = max(n_1, n_2) => f(n) \in \mathcal{O}(h(n)) => \mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(h(n))$
Để $\mathcal{O}(g(n)) = \mathcal{O}(h(n))$ khi và chỉ khi:
$\begin{cases} \mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(h(n)) \textbf{(đã chứng minh ở trên)} \\ \mathcal{O}(h(n)) \subset \mathcal{O}(gn) \end{cases}$
Giả sử $h(n) \in \mathcal{O}(gn)$ Đặt $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$, theo định nghĩa Big Oh, ta có:
$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N} | f(n) \leq c_1h(n)\ \forall n \geq n_1$ **(3)**
Từ điều kiện giả sử: $h(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, theo định nghĩa Big Oh, ta có:
$\exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N} | h(n) \leq c_2g(n)\ \forall n \geq n_2$ **(4)**
Từ **(3)** và **(4)** $=> h(n) \leq c_1c_2g(n)\ \forall n \geq max(n_1, n_2)$
Chọn $c = c_1c_2, n_0 = max(n_1, n_2) => f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
$=> \mathcal{O}(h(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$ khi $h(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
Vậy $g(n) \in \mathcal{O}(h(n)) => \mathcal{O}(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(h(n))$, dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $h(n) \in \mathcal{O}(g(n))$

3)chứng minh g(n) ∈ O(f(n)) và f(n) ∈ O(g(n)) ⇒O(g(n)) = O(f(n))

từ tính chất được chứng minh ở câu 2
với g(n) ∈ O(f(n)) ⇒ O(g(n)) ⊆ $O(f(n))$ (1)
với f(n) ∈ O(g(n)) ⇒ O(f(n)) ⊆ $O(g(n))$ (2)
từ (1) và (2) kết luận:
Nếu g(n) ∈ O(f(n)) và f(n) ∈ O(g(n)) ⇒O(g(n)) = O(f(n)) (*)
chứng minh O(g(n)) = O(f(n)) ⇒ g(n) ∈ O(f(n)) và f(n) ∈ O(g(n))
Giả sử : +> f(n) > 0 và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_1$
+> g(n) > 0 và đơn điệu tăng $\forall n \geq n_2$
ta thấy: f(n) leq 2f(n) $\forall n \leq n_1$
chọn c=2, n = n_1

theo định nghĩa Big-O ta được f(n) $\in$ O(f(n))
mà O(g(n))=O(f(n)) nên f(n) = O(g(n))(3)
chứng minh tương tự ta có g(n) = O(f(n))(4)
từ (3) và (4) kết luận:
nếu O(g(n)) = O(f(n)) $\Rightarrow$ g(n) $\in$ O(f(n)) và f(n) $\in$ O(g(n))
từ (*) và (**) ta được:
O(f(n))=O(g(n))$\Leftrightarrow$ g(n) $\in$ O(f(n)) và f(n) $\in$ O(g(n))

4) $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ **và** $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$

- **CM:** $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$
  $f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le c_1 g(n)$ $(\forall n \ge n_1)$
  Chọn bất kỳ t(n) $\in \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}^+, n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho: $t(n) \le c_2 f(n)$ $(\forall n \ge n_2)$
  $\Rightarrow$ t(n) $\le c_1 c_2 g(n)$ $(\forall n \ge \max(n_1, n_2))$
  Chọn c = $c_1 c_2, n_0 = \max(n_1, n_2)$: t(n) $\le cg(n)$ $(\forall n \ge n_0)$
  Theo định nghĩa Big-$\mathcal{O}$ có t(n) $\in \mathcal{O}(g(n))$
  $\Rightarrow \mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$ (1)
  Giả sử $g(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \exists c_3 \in \mathbb{R}^+, n_3 \in \mathbb{N}$ sao cho: $f(n) \le c_3 g(n)$ $(\forall n \ge n_3)$
  Chứng minh tương tự như trên, ta có: $\Rightarrow \mathcal{O}(g(n)) \subset \mathcal{O}(f(n))$ (2)
  (1),(2) $\Rightarrow \mathcal{O}(f(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ (dấu "=" xảy ra khi: $g(n) \in \mathcal{O}(f(n))$
  $\Rightarrow$ $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \Rightarrow \mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n))$ (*)
- **CM:** $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$
  Giả sử f(n) $>$ 0 và đơn điệu tăng $(\forall n \ge n_{0f})$
  Có: f(n) $\le$ 2f(n) $(\forall n \ge n_{0f})$
  Chọn c = 2, $n_0 = n_{0f}$: f(n) $\in \mathcal{O}(f(n))$
  Mà $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ (3)
  Có ở câu 3: $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \wedge f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
  $\Rightarrow \mathcal{O}(f(n)) \ne \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \vee f(n) \notin \mathcal{O}(g(n))$ (4)
  Từ (3), (4): $\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$ (**)

Từ (*) và (**) ta có kết luận:
$\mathcal{O}(f(n)) \subset \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ và $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$ (**đccm**)

5) Chứng minh: $f(n) \in \mathcal{O}(n) => 2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^n)$

Từ giả thiết: $f(n) \in \mathcal{O}(n)$, theo định nghĩa Big Oh, ta có:
$\exists c_1 \in \mathbb{R}^+, n_1 \in \mathbb{N} | f(n) \le c_1 n \ \forall n \ge n_1$
$=> 2^{f(n)} \le 2^{c_1 n} \ \forall n \ge n_1$
Để $2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^n) <=> 2^{f(n)} \le c2^n \ \forall n \ge n_0 | c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ **(1)**
(1) xảy ra $<=> c2^n \le 2^{c_1 n} <=> c \le 2^{n(c_1-1)} \forall n \ge n_1 =>$ chọn $c = 2^{n_1(c_1-1)}$
Chọn $c = 2^{n_1(c_1-1)}, n_0 = n_1 => 2^{f(n)} \le 2^n => 2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^n)$(**đccm**)

Bài tập 9: BONUS

1) cho: $f(n) = \sum_{i=1}^{n}(i), g(n) = n^2$**, chứng minh** $f(n) = \theta(g(n))$

Cách 1: Dùng định nghĩa
Giả sử $f(n) = \theta(g(n))$ thì: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n) \ \forall n \ge n_0$

$\Leftrightarrow c_1n^2 \le \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \le c_2n^2 \ \forall n \ge n_0$

- $c_1n^2 \le \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \Rightarrow c_1 \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$
  $\forall n \ge n_0 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2n} \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2}$
  Chọn $c_1 = \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \ge \frac{1}{2} \ \forall n \ge 1$
- $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \le c_2n^2 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le c_2$
  $\frac{1}{2n} \le \frac{1}{2} \forall n \ge 1$
  $\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le 1 \forall n \ge 1$
  Chọn $c_2 = 1$ thì $\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \le 1 \ \forall n \ge 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 \le \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \le n^2 \Rightarrow \frac{1}{2}g(n) \le f(n) \le g(n) \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ (**đccm**)

Cách 2: Dùng giới hạn

$\lim_{n->\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2} = \lim_{n->\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} > 0, \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$ (**đccm**)

2) Chứng minh: $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$

Cách 1: Dùng định nghĩa

Giả sử $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ thì: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $c_1n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2n^2 \ \forall n \ge n_0$

- $c_1n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \Rightarrow c_1 \le \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$
  $\forall n \ge n_0 = 12 \Rightarrow \frac{3}{n} \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \ge \frac{1}{4}$
  Chọn $c_1 = \frac{1}{4}$ thì $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \ge \frac{1}{4} \ \forall n \ge 12$
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n \le c_2n^2 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le c_2$
  Chọn $c_2 = \frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \le \frac{1}{2} \ \forall n \ge 12$

$\Rightarrow \frac{1}{4}n^2 \le \frac{1}{2}n^2 - 3n \le \frac{1}{2}n^2 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ (**đccm**)

Cách 2: Dùng giới hạn

$\lim_{n->\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2-3n}{n^2} = \lim_{n->\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n}\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} > 0, \frac{1}{2} < \infty \Rightarrow \frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ (**đccm**)

3) Chứng minh: $n \log n - 2n + 13 = \Omega(n \log n)$

Cách 1: Dùng định nghĩa

Ta thấy: $n \log n - 2n + 13 \ge n \log n \ \forall n \ge 1$
Chọn $c = 1, n_0 = 1$, theo định lý Big OmegaNI: $n \log n - 2n + 13 = \Omega(g(n)) \ \forall n \ge n_0$

Cách 2: Dùng giới hạn

Ta thấy: $\lim_{n->\infty} \frac{n \log n - 2n + 13}{n \log n} = lim_{n->\infty}(1 - \frac{2}{\log n} + \frac{13}{n \log n}) = 1 > 0(\forall n > 1)$
$=> n \log n - 2n + 13 = \Omega(n \log n) \ (\forall n > 1)$

4) chứng minh $\log_3(n^2) = \theta(\log_2(n^3))$

Cách 1: Dùng định nghĩa

Giả sử $\log_3(n^2) = \theta(\log_2(n^3))$ thì: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $c_1 \log_2(n^3) \le \log_3(n^2) \le c_2 \log_2(n^3) \ \forall n \ge n_0$

- $c_1 \log_2(n^3) \leq \log_3(n^2) \Rightarrow 3c_1 \log_2(n) \leq 2\log_3(n)$
  chia cho$3log_2(n)$
  $\Rightarrow c_1 \leq \frac{2}{3}\frac{\log_3(n)}{\log_2(n)}$
  $\Rightarrow c_1 \leq \frac{2}{3}\frac{\log_n(2)}{\log_n(3)}$
  $\Rightarrow c_1 \leq \frac{2}{3}\log_3(2)$
  Chọn $c_1 = \frac{2}{3}\log_3(2)$, $n_0 = 2$ thì $\frac{2}{3}\log_3(2) \geq \frac{2}{3}\log_3(2)\ \forall n \geq n_0$

- $\log_3(n^2) \leq c_2 \log_2(n^3) 2\log_3(n) \leq 3c_2 \log_2(n)$
  chia cho$3log_2(n)$
  $\Rightarrow c_2 \geq \frac{2}{3}\frac{\log_3(n)}{\log_2(n)}$
  $\Rightarrow c_2 \geq \frac{2}{3}\frac{\log_n(2)}{\log_n(3)}$
  $\Rightarrow c_2 \geq \frac{2}{3}\log_3(2)$
  Chọn $c_2 = \frac{2}{3}$, $n_0 = 2$ thì $\frac{2}{3}\log_3(2) \leq \frac{2}{3}\ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow c_1 \log_2(n^3) \leq \log_3(n^2) \leq c_2 \log_2(n^3) \Rightarrow \log_3(n^2) = \theta(\log_2(n^3))$ (**đccm**)
Cách 2: Dùng giới hạn
$\lim_{n->\infty} \frac{\log_3(n^2)}{\log_2(n^3)} = \lim_{n->\infty} \left(\frac{2\log_3(n)}{3\log_2(n)}\right) = \lim_{n->\infty} \left(\frac{2\log_n(2)}{3\log_n(3)}\right) = \lim_{n->\infty} \left(\frac{2}{3}\log_3(2)\right) = \frac{2}{3}\log_3(2)$
$\frac{2}{3}\log_3(2) > 0, \frac{2}{3}\log_3(2) < \infty \Rightarrow \log_3(n^2) = \theta(\log_2(n^3))$ (**đccm**)

5) Chứng minh: $n^{lg4} \in \omega(3^{lgn})$

Cách 1: Dùng định nghĩa
Giả sử $n^{lg4} \in \omega(3^{lgn})$ thì: với bất kỳ $c > 0, \exists n_0 > 0$ sao cho: $0 \leq c3^{lgn} < n^{lg4}\ \forall n \geq n_0$
$\Rightarrow cn^{lg3} < n^{lg4} \Rightarrow c < n^{lg\frac{4}{3}}$
Chọn c $= 0.25$, $n_0 = 1$ ta có: $0,25.3^{lgn} < n^{lg4}\ \forall n \geq 1 \Rightarrow n^{lg4} \in \omega(3^{lgn})$ (**đccm**)
Cách 2: Dùng giới hạn
$\lim_{n->\infty} \frac{n^{lg4}}{3^{lgn}} = \lim_{n->\infty} \frac{n^{lg4}}{n^{lg3}} = \lim_{n->\infty} n^{lg\frac{4}{3}} = \infty \Rightarrow n^{lg4} \in \omega(3^{lgn})$ (**đccm**)

6) Chứng minh: $\log^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$

Cách 1: Dùng định nghĩa
Để $\log^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}}) <=> \forall c > 0, \exists n_0 > 0 | 0 \leq \log^2 n \leq cn^{\frac{1}{2}}$
hay $\begin{cases} \log^2 n \geq 0 \\ cn^{\frac{1}{2}} \geq log^2 n \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} n > 0 \\ c \geq \frac{\log^2 n}{n^{\frac{1}{2}}} \end{cases}$
Chọn $c = 1, n_0 = 1$, ta có $0 \leq \log^2 n \leq n^{\frac{1}{2}}\ \forall n \geq n_0 => \log^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$ **(đccm)**
Cách 2: Dùng giới hạn
Vì $\lim_{n\to\infty} \log^2 n = \infty \& \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty \& (n^{\frac{1}{2}})' \# 0 \forall n > 0$,Áp dụng L'Hôpital's Rule ta có:
$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log^2 n)'}{(n^{\frac{1}{2}})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\log n}{n^{\frac{1}{2}}}$
Vì $\lim_{n\to\infty} 4\log n = \infty \& \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} = \infty \& (n^{\frac{1}{2}})' \# 0 \forall n > 0$,Áp dụng L'Hôpital's Rule ta có:
$\lim_{n\to\infty} \frac{4\log n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4\log n)'}{(n^{\frac{1}{2}})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$
$=> \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{1}{2}}} = 0\ \forall n > 0$
$=> \log^2 n \in o(n^{\frac{1}{2}})$ **(đccm)**

7) chứng minh $\frac{1}{2}n^2 \neq \omega(n^2)$

Cách 1: Dùng định nghĩa

Giả sử $\frac{1}{2}n^2 = \omega(n^2)$ thì: $\forall c_1 \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho: $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2 \; \forall n \geq n_0$

- $c_1 n^2 \leq \frac{1}{2}n^2$
  Chọn $c_1 = 1$, $\Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{2}n^2$, $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow \frac{1}{2}n^2 \neq \omega(n^2)$ (**đccm**)

Cách 2: Dùng giới hạn

$\lim_{n->\infty} \frac{\frac{1}{2}n^2}{n^2} = \lim_{n->\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \neq \infty, \frac{1}{2}n^2 \neq \omega(n^2)$ (**đccm**)