TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

KHOA KHOA HỌC MÁY TÍNH

BÀI TẬP MÔN PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

HOMEWORK #01

ĐÁNH GIÁ THUẬT TOÁN DÙNG KỸ THUẬT TOÁN SƠ CẤP

Môn:	Phân tích thiết kế thuật toán
Lớp:	CS112.N23.KHCL
Giảng viên hướng dẫn:	Huỳnh Thị Thanh Thương
Nhóm thực hiện:	Hồ Thị Khánh Hiền(Leader) - 21522057
	Tống Trần Tiến Dũng - 21521983
	Bùi Mạnh Hùng - 21522110

TP Hồ Chí Minh,Ngày 3 tháng 4 năm 2023

Mục lục

1 Tính tổng hữu hạn

a)

$$1+3+5...+999=\sum_{i=1}^{500}(2i-1)=2\sum_{i=1}^{500}(i)-\sum_{i=1}^{500}(1)=500(500+1)-500=250000$$

b)

S = 2+4+8+16+...+1024
Số hạng đầu u_1 = 2
Công bội q =2
Có: $u_n = u_1 q^{n-1}$ => 1024 = 2.2^{n-1} => n = 10

$$S=\frac{u_1(q^{10}-1)}{q-1}=\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2046$$

c)

$$\sum_{i=3}^{n+1}1=\frac{(n+1)-3+1}{2}=\frac{n-1}{2}$$

d)

$$\sum_{i=3}^{n+1}i=\sum_{i=1}^{n+1}i-\sum_{i=1}^{2}i=\frac{(n+1)(n+2)}{2}-3$$

e)

$$\sum_{i=0}^{n-1}i(i+1)=\sum_{i=0}^{n-1}i^2+\sum_{i=0}^{n-1}i$$

Đặt x = n-1 suy ra:

$$\sum_{i=0}^{n-1}i^2+\sum_{i=0}^{n-1}i=\sum_{i=0}^{x}i^2+\sum_{i=0}^{x}i=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}+\frac{x(x+1)}{2}=\frac{n(n^2-1)}{3}$$

f)

$$\sum_{j=1}^{n}3^{j+1}=3\sum_{j=1}^{n}3^j=3(3^1+3^2+...+3^n)=3\frac{3^{n+1}-3}{2}=\frac{9}{2}(3^n-1)$$

g)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

h)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n.(n+1)}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

i)

$$\sum_{j\in\{2,3,5\}} (j^2 + j) = \sum_{j\in\{2,3,5\}} j(j+1) = (2.3 + 3.4) + 5.6 = 3.6 + 5.6 = 6.8 = 48$$

j)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100} (i+j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100} i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{100} j = 100n\sum_{i=1}^{m} i + 100\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} j$$
$$= 100n\left(\frac{m(m+1)}{2}\right) + 100m\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

2 Tính số phép gán và so sánh

Bài 2

```
s = 0;
i = 1;
while (i ≤ n) do
        j  = 1;
        while (j ≤ i²) do
                s = s + 1;
                j = j + 1;
        end do;
        i = i +1;
end do;
```

Giải
Gọi α_i là số lần lặp của while trong = số con j, j chạy từ 1 -> i^2, bước tăng là 1 = i^2-1+1 = i^2 (lần)
Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán(n)} &= 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 2n + 2\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= 2 + 2n + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6)}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{So sánh(n)} &= n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (i^2 + 1) \\
&= n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= n + 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \\
&= \frac{(2n+1)(n^2+n+6)}{6}
\end{aligned}$$

Bài 3

P_i

```
sum = 0
i = 1
while i≤n do
        j = n-i*i
        while j ≤ i*i do
                sum=sum + i*j
                j=j+1
        endw
        i=i+1
endw
```

Giải
Gọi α_i là số lần lặp của vòng lặp While P_i(xét độc lập với while ngoài)
Vòng lặp P_i chỉ thực hiện khi $j \leq i^2 <=> n - i^2 \leq 2i^2 => i \geq \sqrt{\frac{n}{2}}(i \geq 1)$
Suy ra:

$$\alpha_i = \begin{cases} \\ \text{i}^2 - (n - i^2) + 1, \end{cases}$$

Kết luận

$$\text{Gán(n)} = 2 + 2n + \sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i = 2 + 2n + 2 \sum_{i=\rfloor\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} 2i^2 - n + 1$$

$$= 2 + 2n + 2(n - \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(1 - n) + 2 \sum_{i=\rfloor\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} 2i^2$$

$$= 2 + 2n + 2(n - \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(1 - n) + 4(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{\rfloor\sqrt{\frac{n}{2}}-1} i^2)$$

$$= 2 + 2n + 2(n - \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(1 - n) + 4(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}{6})(\text{với } \alpha = \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} - 1)$$

$$\text{So sánh(n)} = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 = n + 1 + n + \sum_{i=\rfloor\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} 2i^2 - n + 1$$

$$= 2n + 1 + (n - \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(1 - n) + \sum_{i=\rfloor\sqrt{\frac{n}{2}}}^{n} 2i^2$$

$$= 2n + 1 + (n - \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(1 - n) + 2(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{\rfloor\sqrt{\frac{n}{2}}-1} i^2)$$

$$= 2n + 1 + (n - \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} + 1)(1 - n) + \frac{n(n+1)(2n+1) - \alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}{3}(\text{với } \alpha = \rfloor\sqrt{\frac{n}{2}} - 1)$$

Bài 4

```
float Alpha (float x, long n)
{         long i= 1; float z = 0;
          while ( i ≤ n)
          {         long j = 1; float t = 1;
                    while (j  ≤ i )
                    {         t = t*x;
                              j = 2*j;
                    }
                    z = z+i*t;
                    i=i+1;
          }
          return z;
}
```

Pi

Giải

Quy ước: Không xét câu lệnh return

Số lần lặp của vòng lặp While P_i(xét độc lập với while ngoài):

- Vòng lặp while P_i chỉ thực hiện khi $j \leq i$,số lần thực hiện bằng số con j với j chạy từ 1 đến i bước tăng $2j$

Gọi α_i là số lần lặp của P_i tập

$j : \{1, 2, 4, 8, ..., <= i\}$

$j : \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, ...2^k, <= i\}$

$\alpha_i =$ số con k thuộc$\{k \in N | 2^k \leq i\}$ $2^k \leq i$

$\Leftrightarrow \log_2 i \leq k$

mà $k \geq 0 \rightarrow 0 \leq k \leq \log_2 i$

$\alpha_i =$ số con k $= \log_2 i + 1$

$$\begin{aligned}
\text{Gán}(P_i) &= 2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1) \\
\text{So sánh}(P_i) &= \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1 + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 2)
\end{aligned}$$

Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán(n)} &= 2 + 2 + 4n + 2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 1) \\
&= 4 + 6n + 2\sum_{i=1}^{n}(\log_2 i) \\
\text{So sánh(n)} &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i + 2) \\
&= 3n + 1 + \sum_{i=1}^{n}(\log_2 i)
\end{aligned}$$

Bài 5

```
sum = 0; i = 1;
while ( i ≤ n)
{       j = n – i ;
        while (j  ≤ 2* i )
        {       sum = sum + i*j;
                j = j  + 2;
        }
        k = i ;
        while ( k > 0)
        {       sum = sum + 1;
                k = k / 2;
        }
        i = i + 1;
}
```

Giải

Số lần lặp while ($j \leq 2*i$)= α_i = số con j: n-i$\rightarrow 2i$, bước tăng 2 $= \frac{2i-(n-i)}{2}+1 = \frac{3i-n+2}{2}$
While ($j \leq 2*i$) chỉ thực hiện khi $n-i \leq 2i \Rightarrow i \geq \frac{n}{3}$
Suy ra: $\alpha_i = \begin{cases} (3i-n+2)/2 & \text{khi } i \geq n/3 \\ 0 & \text{khi } i < n/3 \end{cases}$
Số lần lặp while $(k \geq 0)$ = β_i = số con k: $i \rightarrow 1$, bước giảm i/2
Tập k: { $\frac{i}{2^0}, \frac{i}{2^1}, \frac{i}{2^2}, .., \frac{n}{2^u} \geq 1$}
$\Rightarrow \beta_i$ là số u với { $u \in N | \frac{i}{2^u} \geq 1$}
$\Rightarrow i \geq 2^u \Leftrightarrow u \leq \log_2 i \Leftrightarrow 0 \leq u \leq \log_2 i$
$\Leftrightarrow \beta_i$ = số con u $= \log_2 i + 1$

Kết luận

$$\text{Gán(n)} = 2+3n+\sum_{i=1}^{n} 2\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_i = 2+5n+\sum_{i=n/3}^{n}(3i-n+2) + 2\sum_{i=1}^{n}\log_2 i$$

$$= 2+5n+(2-n)(n-\frac{n}{3}+1) + \sum_{i=n/3}^{n} 3i + 2\sum_{i=1}^{n}\log_2 i$$

$$= 2+5n+\frac{(2n+3)(2-n)}{3} + 3(\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} i) + 2\sum_{i=1}^{n}\log_2 i$$

$$= 2+5n+\frac{(2n+3)(2-n)}{3} + 3\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\frac{n}{3}(\frac{n}{3}-1)}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n}\log_2 i$$

$$= 2+5n+\frac{(n-1)(n-6)}{3} + 2\sum_{i=1}^{n}\log_2 i$$

$$\approx 2+5n+\frac{(n-1)(n-6)}{3} + 2n\log_2 n$$

$$\text{So sánh(n)} = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i + 1) = 4n + 1 + \sum_{i=n/3}^{n} \frac{3i - n + 2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$$
$$= 4n + 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=n/3}^{n} (3i - n + 2) + \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$$
$$= 4n + 1 + \frac{(n-1)(n-6)}{6} + \sum_{i=1}^{n} \log_2 i$$
$$\approx 4n + 1 + \frac{(n-1)(n-6)}{6} + n \log_2 n$$

Bài 6

```
i = 1; count =0;
while ( i ≤ 4n)
{       x=(n-i)(i-3n) ;
        y=i-2n;
        j=1;
        while (j  ≤ x )
        {       count = count - 2;
                j = j  + 2;
        }
        if (x>0)
                if (y>0)
                        count = count +1;
        i = i + 1;
}
```

Giải

Xét bảng đổi dấu của x và y theo i

i	1		n		$2n$		$3n$		$4n$
x		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

Câu lệnh if($y > 0$) chỉ thực hiện khi ($x > 0$)
=> Số lần thực hiện phép so sánh ($y > 0$) = Số con i thỏa điều kiện ($x > 0$)
$= (3n - 1) - (n - 1) + 1 = 2n - 1$

Câu lệnh count = count + 1 thực hiện khi ($x > 0$) và ($y > 0$)
=> Số lần thực hiện phép gán (count = count + 1)
= Số con i thỏa điều kiện ($x > 0$) và ($y > 0$)

= (3n - 1) - (2n + 1) + 1 = n - 1

Gọi α_i là số lần lặp của While trong P_i (xét độc lập với While ngoài)
Số lần lặp của While trong P_i = số con j | j:1 -> x, bước tăng là 2
Vòng lặp While trong chỉ thực hiện khi x $\geq 1, hay$ x > 0 => $n < i < 3n$

$$\alpha_i = \begin{cases} x/2, & \text{khi } x > 0 \\ 0, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x/2, & \text{khi } n < i < 3n \\ 0, & \text{khi } i \leq n \text{ hoặc } i \geq 3n \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{4n} \text{Gán}(P_i) = \sum_{i=1}^{2n} 2\alpha_i = \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n)$$

$$\sum_{i=1}^{4n} \text{So sánh}(P_i) = \sum_{i=1}^{4n} (\alpha_i + 1) = \sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2}$$

Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán(n)} &= 2 + 12n + n + (n-1) + \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n) \\
&= 14n + 1 + \sum_{i=n+1}^{3n-1} (-i^2 + 4ni - 3n^2) \\
&= 14n + 1 - 3n^2[(3n-1) - (n+1) + 1] + \sum_{i=n+1}^{3n-1} (-i^2 + 4ni) \\
&= 14n + 1 - 3n^2(2n-1) - (\sum_{i=1}^{3n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2) + 4n(\sum_{i=1}^{3n-1} i - \sum_{i=1}^{n} i) \\
&= 14n + 1 - 6n^3 + 3n^2 - [\frac{(3n-1)3n(6n-1) - n(n+1)(2n+1)}{6}] + 4n[\frac{(3n-1)3n - n(n+1)}{2}] \\
&\approx 14n + 1 - 6n^3 + 3n^2 - (\frac{(3n-1)^3 - n^3}{3}) + 4n(\frac{(3n-1)^2 - n^2}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{So sánh(n)} &= 4n + 1 + 4n + 2n - 1 + \sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2} = 10n + \sum_{i=n+1}^{3n-1} \frac{(n-i)(i-3n)}{2} \\
&\approx 10n + \frac{-6n^3 + 3n^2 - (\frac{(3n-1)^3 - n^3}{3}) + 4n(\frac{(3n-1)^2 - n^2}{2})}{2}
\end{aligned}$$

Bài 7

```
i=1;
count = 0;
while(i<=4n)
{
     x=(n-i)(i-3n)
     y=i-2n
     j=1
     while(j<=x)
     {
          if(i>=2y)
               count = count -2
          j=j+1
     }
     i=i+1
}
```

Giải

Xét bảng đổi dấu của x theo i

i	1		n		$3n$		$4n$
x		$-$	0	$+$	0	$-$	
y							

Gọi α_i là số lần lặp của While trong P_i (xét độc lập với While ngoài)
Số lần lặp của While trong P_i = số con j | j:1 -> x, bước tăng là 1
Vòng lặp While trong chỉ thực hiện khi $x \geq 1$,hay $x > 0 => n < i < 3n$

$$\alpha_i = \begin{cases} x, & \text{khi } x > 0 \\ 0, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{khi } n < i < 3n \\ 0, & \text{khi } i \leq n \text{ hoặc } i \geq 3n \end{cases}$$

số lần thực hiện câu lệnh if(i≤2y) $= \alpha_i$
câu lệnh count = ... chỉ thực hiện khi:

$$i \geq 2y \Leftrightarrow i \geq 2i - 4n \Leftrightarrow i \leq 4n$$

mà i $\leq$ 4n luôn đúng khi vòng lặp P_i thực hiện
$\Rightarrow$ số lần phép count = ... thực hiện = α_i

$$\sum_{i=1}^{4n} \text{Gán}(P_i) = \sum_{i=1}^{4n} \alpha_i + \sum_{i=1}^{4n} \alpha_i = 2 \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n)$$

$$\sum_{i=1}^{4n} \text{So sánh}(P_i) = \sum_{i=1}^{4n} (\alpha_i{+}1) + \sum_{i=1}^{4n} \alpha_i = 2 \sum_{i=n+1}^{3n-1} (n-i)(i-3n) + \sum_{i=1}^{4n} 1$$

Kết luận

$$
\begin{aligned}
\text{Gán(n)} &= 2 + 16n + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)\\
&= 16n + 2 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)\\
&= 16n + 2 + 2\Bigg[-3n^2[(3n-1)-(n+1)+1] + \sum_{i=n+1}^{3n-1}(-i^2+4ni)\Bigg]\\
&= 16n + 2 + 2\Bigg[-3n^2(2n-1) - \Big(\sum_{i=1}^{3n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2\Big) + 4n\Big(\sum_{i=1}^{3n-1} i - \sum_{i=1}^{n} i\Big)\Bigg]\\
&= 16n + 2\\
&+ 2\Bigg[-6n^3 + 3n^2 - \left(\frac{(3n-1)3n(6n-1) - n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4n\left(\frac{(3n-1)3n - n(n+1)}{2}\right)\Bigg]\\
&\approx 16n + 2 - 12n^3 + 6n^2 - 2\left[\frac{(3n-1)^3 - n^3}{3}\right] + 8n\left[\frac{(3n-1)^2 - n^2}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{SS(n)} &= 4n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n) + \sum_{i=1}^{4n} 1\\
&= 8n + 1 + 2\sum_{i=n+1}^{3n-1}(n-i)(i-3n)\\
&= 8n + 1 + 2\Bigg[-3n^2[(3n-1)-(n+1)+1] + \sum_{i=n+1}^{3n-1}(-i^2+4ni)\Bigg]\\
&= 8n + 1 + 2\Bigg[-3n^2(2n-1) - \Big(\sum_{i=1}^{3n-1} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^2\Big) + 4n\Big(\sum_{i=1}^{3n-1} i - \sum_{i=1}^{n} i\Big)\Bigg]\\
&= 8n + 1\\
&+ 2\Bigg[-6n^3 + 3n^2 - \left(\frac{(3n-1)3n(6n-1) - n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 4n\left(\frac{(3n-1)3n - n(n+1)}{2}\right)\Bigg]\\
&\approx 8n + 1 - 12n^3 + 6n^2 - 2\left[\frac{(3n-1)^3 - n^3}{3}\right] + 8n\left[\frac{(3n-1)^2 - n^2}{2}\right]
\end{aligned}
$$

Bài 8

```
i= 1;count = 0;
while (i ≤ 3*n)
{
   x = 2*n - i;
   y = i - n ;
   j = 1;
   while (j ≤ x)
   {
      if(j ≥ n)
            count = count - 1;
      j = j+1;
   }
   if (y > 0)
      if (x > 0)
            count = count + 1;
   i = i+1;
}
```

Giải

Xét bảng đổi dấu của x và y theo i

i	1		n		$2n$		$3n$
x		$+$		$+$	0	$-$	
y		$-$	0	$+$		$+$	

Câu lệnh if(x > 0) chỉ thực hiện khi (y > 0)
=> Số lần thực hiện phép so sánh (x > 0) = Số con i thỏa điều kiện (y > 0)
$= 3n - (n + 1) + 1 = 2n$

Câu lệnh count = count + 1 thực hiện khi (y > 0) và (x > 0)
=> Số lần thực hiện phép gán (count = count + 1)
= Số con i thỏa điều kiện (x > 0) và (y > 0)
$= (2n - 1) - (n + 1) + 1 = n - 1$

Gọi α_i là số lần lặp của While trong P_i (xét độc lập với While ngoài)
Số lần lặp của While trong P_i = số con j | j:1 -> x, bước tăng là 1
Vòng lặp While trong chỉ thực hiện khi x ≥ 1, *hay* x > 0 =>i<2n

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{khi } i \geq 2n \\ x, & \text{khi } i \leq 2n - 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{khi } i \geq 2n \\ \text{2n-i}, & \text{khi } i \leq 2n - 1 \end{cases}$$

Gọi l_1 là số lần lặp của câu lệnh gán $count = count - 1$
Ta thấy câu lệnh gán $count = count - 1$ thực hiện khi $n \leq j \leq x$

Hay, $\begin{cases} i \le 2n-1 \\ n \le x \\ n \le j \end{cases} <=> \begin{cases} i \le 2n-1 \\ n \le 2n-i \\ n \le j \end{cases} <=> \begin{cases} i \le 2n-1 \\ \\ n \le j \end{cases} => \left\{ \begin{array}{ll} \begin{cases} i \le 2n-1 \\ n \le j \end{cases}, & \text{khi } n < 1 \\ \begin{cases} i \le n \\ n \le j \end{cases}, & \text{khi } n \ge 1 \end{array} \right.$

Kết luận

Trường hợp: $n \ge 1$

$$
\begin{aligned}
\text{Gán(n)} &= 2 + 9n + (n-1) + 3n + \sum_{i=1}^{3n} [\alpha_i + (x - n + 1)] \\
&= 13n + 1 + \sum_{i=1}^{2n-1} (2n - i) + \sum_{i=1}^{n} (n - i + 1) \\
&= 13n + 1 + 2n(2n-1) - \sum_{i=1}^{2n-1} i + n(n+1) - \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 13n + 1 + 4n^2 - 2n - \frac{(2n-1+1)(2n-1)}{2} + n^2 + n - \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 5n^2 + 12n + 1 - \frac{2n(2n-1) + n(n+1)}{2} = 5n^2 + 12n + 1 - \frac{5n^2 - n}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{So sánh(n)} &= (3n+1) + \sum_{i=1}^{3n} (\alpha_i + 1) + \sum_{i=1}^{i=3n} \alpha_i + (3n) + [3n - (n+1) + 1] \\
&= 11n + 1 + 2\sum_{i=1}^{2n-1} 2n - i = 11n + 1 + 4n(2n-1) - 2\sum_{i=1}^{2n-1} i \\
&= 8n^2 + 1 + 7n - 2\frac{(2n-1+1)(2n-1)}{2} = 8n^2 + 1 + 7n - 4n^2 + 2n = 4n^2 + 9n + 1
\end{aligned}
$$

Trường hợp: $n < 1$

$$\text{Gán(n)} = 2$$

$$\text{So sánh(n)} = 1$$

Bài 9

```
i=1;
res=0;
while i≤n do
        j=1;
        k=1;
        while j ≤ i do
                res=res+i*j;
                k=k+2;
                j=j+k;
        endw
        i=i+1;
endw
```

P_i

Giải

Gọi α_i là số lần lặp của while trong
Tại j = j+k, ta thấy j luôn là tổng của các số 1,3,5,7,... => j thuộc tập hợp các số chính phương.
Chứng minh j luôn là số chính phương: j=1+3+5+...+x
Đặt x = 2y-1 ($y \in N$, y>1)

$$j = 1 + 3 + 5 + ... + 2y - 1 = \frac{(2y-1)+1}{2}\left(\frac{(2y-1)-1}{2} + 1\right) = y^2$$

=> điều cần chứng minh

α_i là số con t với $\{t \in N \mid$ t $\geq$ 1,t^2 $\leq i\}$ => $\begin{cases} t \geq 1 \\ -\sqrt{i} \leq t \leq \sqrt{i} \end{cases}$ =>1 $\leq t \leq \sqrt{i}$

=> $\alpha_i = \sqrt{i}$

Kết luận

$$\text{Gán(n)} = 2 + 3n + \sum_{i=1}^{n} 3\alpha_i = 2 + 3n + 3\sum_{i=1}^{n} i^{1/2}$$
$$\approx 2 + 3n + \frac{3n^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 2 + 3n + 2n^{3/2}$$

$$\text{So sánh(n)} = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + 1 = 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i^{1/2}$$
$$\approx 2n + 1 + \frac{n^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 2n + 1 + \frac{2}{3}n^{3/2}$$

Bài 10

```
sum = 0; i=1; idx=-1;
while (i<=n)
{           j=1;
            while(j<=n)
            {           if( (i==j) && (i+j==n+1) )
                                  idx=i;
                        sum=sum+a[i][j];
                        j++;
            }
            i++;
 }
if(idx !=-1)
        sum=sum-a[idx][idx];
```

Giải

Xét TH: n là số chẵn

Xét vòng lặp While trong, ta thấy:

- Câu lệnh $if((i == j)\&\&(i + j == n + 1))$ đúng $<=>$ $2i = n + 1 | i \in N$
  Mà n chẵn => không có i thỏa mãn
  => Câu lệnh gán (idx=i) thực hiện 0 lần
- Số lần thực hiện lệnh so sánh (i+j==n+1)
  = Số lần câu lệnh so sánh (i==j) đúng = 1 lần

$$\sum_{i=1}^{n} \text{Gán}(P_i) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \text{So sánh}(P_i) = \sum_{i=1}^{n} n + 1 + n + 1 = \sum_{i=1}^{n} 2n + 2 = 2n^2 + 2n$$

Vậy

$$\text{Gán(n|n chẵn)} = 3 + 2n + 2n = 4n + 3$$

$$\text{So sánh(n|n chẵn)} = n + 1 + 2n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 3n + 2$$

Xét TH: n là số lẻ

Xét vòng lặp While trong, ta thấy:

- Câu lệnh $if((i == j)\&\&(i + j == n + 1))$ đúng $<=>$ $2i = n + 1 | i \in N$
  Mà n lẻ => có 1 giá trị i = (n+1)/2 thỏa mãn
  => Câu lệnh gán (idx=i) thực hiện 1 lần khi i = (n+1)/2
- Số lần thực hiện lệnh so sánh (i+j==n+1)
  = Số lần câu lệnh so sánh (i==j) đúng = 1 lần

$$\sum_{i=1}^{n} \text{Gán}(P_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n + 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \text{So sánh}(P_i) = \sum_{i=1}^{n} n + 1 + n + 1 = \sum_{i=1}^{n} 2n + 2 = 2n^2 + 2n$$

Vậy

$$\text{Gán(n|n lẻ)} = 3 + 2n + 2n + 1 + 1 = 4n + 5$$

$$\text{So sánh(n|n lẻ)} = n + 1 + 2n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 3n + 2$$

3 [BONUS]Tính số phép gán và so sánh & kiểm tra kết quả đếm bằng máy tính

Bài 11

```
i = 1; ret = 0; s = 0;
while ( i ≤ n)
{         j = 1 ;
          s = s+1/i; // {số thực}
          while (j  ≤ s )
          {         ret = ret + i*j;
                    j = j  + 1;
          }
          i = i + 1;
}
```

Giải

Gọi α_i là số lần lặp của While trong P_i (xét độc lập với While ngoài)
Số lần lặp của While trong P_i = số con j | j:1 -> s, bước tăng là 1

$$s = \sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j}$$

vì s là số thực, suy ra: với mỗi con i, số con j thoã mãn điều kiện j≤s là phần nguyên của s:

$$\Leftrightarrow \alpha_i = [\sum_{j=0}^{i} \frac{1}{j}]$$

$$\text{Gán}(P_i) = 2\sum_{i=1}^{n}\big[\alpha_i\big]$$

$$\text{So sánh}(P_i) = \sum_{i=1}^{n}\big[\alpha_i + 1\big]$$

Kết luận

$$\begin{aligned}
\text{Gán(n)} &= 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n}\big[\alpha_i\big] \\
&= 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n}\big[\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{j}\big] \\
&\approx 3 + 3n + 2\sum_{i=1}^{n}\big[\ln i + \gamma\big](\text{với}\gamma \approx 0.5772)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{So sánh(n)} &= (n+1) + \sum_{i=1}^{n}\big[\alpha_i + 1\big] \\
&= (n+1) + \sum_{i=1}^{n}\Big(\big[\alpha_i\big] + 1\Big) \\
&= (n+1) + \sum_{i=1}^{n}\big[\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{j}\big] + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&\approx 2n + 1 + \sum_{i=1}^{n}\big[\ln i + \gamma\big](\text{với}\gamma \approx 0.5772)
\end{aligned}$$

Bảng so sánh kết quả giữa công thức thủ công và chạy chương trình:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{G(n)} = 3+3n+2\sum_{i=1}^{n}\big[\ln i+\gamma\big]$	6	11	16	21	28	35	42	48	56	63
G(n) khi chạy chương trình =	8	13	18	25	32	39	46	53	60	67
$\text{SS(n)} = 2n+1+\sum_{i=1}^{n}\big[\ln i+\gamma\big]$	3	6	9	12	16	20	24	28	32	36
SS(n) khi chạy chương trình =	4	7	10	14	18	22	26	30	34	38

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
G(n) $= 3+3n+2\sum_{i=1}^{n}\left[\ln i+\gamma\right]$	70	76	85	97	106	115	124	135	142	151
G(n) khi chạy chương trình =	76	85	94	103	112	121	130	139	148	157
SS(n) $= 2n+1+\sum_{i=1}^{n}\left[\ln i+\gamma\right]$	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85
SS(n) khi chạy chương trình =	43	48	53	58	63	68	73	78	83	88

Bài 12

```
i = 1; res = 0;
while (i ≤ n) do
        j = 1;
        while (j ≤ i) do
                res = res + i*j ;
                j = j +  1;
        end do;
        i = i + số thứ tự của nhóm;
end do;
```

Giải

Số lần lặp while ngoài = số con i chạy từ 1 -> n, bước tăng 7 = $[\frac{n-1}{7}+1] = [\frac{n+6}{7}]$ (lần)

Số lần lặp while trong = x = số con j chạy từ: 1 -> i, bước tăng 1.

Vì bước tăng của i là 7 $\Rightarrow$ i có dạng: $7k+1, k \in N$

Có: $i \leq n \Rightarrow 7k+1 \leq n \Rightarrow k \leq [\frac{n-1}{7}]$

$\Rightarrow x = 7k+1$ với k $\in N, 0 \leq k \leq [\frac{n-1}{7}]$

Kết luận

$$
\begin{aligned}
\text{Gán(n)} &= 2 + 2[\frac{n+6}{7}] + \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{7}]} 2x \\
&= 2 + 2[\frac{n+6}{7}] + 2\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{7}]} (7k+1) \\
&= 2 + 2(y+1) + 14\sum_{k=0}^{y} k + \sum_{k=0}^{y} 2 \text{ (với y } = [\frac{n-1}{7}]) \\
&= 4 + 2y + 7y(y+1) + 2(y+1) \\
&= 7y^2 + 11y + 6 = 7[\frac{n-1}{7}]^2 + 11[\frac{n-1}{7}] + 6
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\text{So sánh(n)} &= [\frac{n+6}{7}] + 1 + \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{7}]} (x+1) \\
&= [\frac{n+6}{7}] + 1 + \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{7}]} (7k+2) \\
&= y + 2 + 7\sum_{k=0}^{y} k + \sum_{k=0}^{y} 2 \text{ (với y } = [\frac{n-1}{7}]) \\
&= y + 2 + \frac{7y(y+1)}{2} + 2(y+1) \\
&= \frac{7y^2+13y+8}{2} = \frac{7\left[\frac{n-1}{7}\right]^2 + 13\left[\frac{n-1}{7}\right] + 8}{2}
\end{aligned}$$

Bảng so sánh kết quả giữa công thức thủ công và chạy chương trình:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G(n) $= 7\left[\frac{n-1}{7}\right]^2 + 11\left[\frac{n-1}{7}\right] + 6$	6	6	6	6	6	6	6	24	24	24
G(n) khi chạy chương trình =	6	6	6	6	6	6	6	24	24	24
SS(n) $= \frac{7\left[\frac{n-1}{7}\right]^2+13\left[\frac{n-1}{7}\right]+8}{2}$	4	4	4	4	4	4	4	14	14	14
SS(n) khi chạy chương trình =	4	4	4	4	4	4	4	14	14	14

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
G(n) $= 7\left[\frac{n-1}{7}\right]^2 + 11\left[\frac{n-1}{7}\right] + 6$	24	24	24	24	56	56	56	56	56	56
G(n) khi chạy chương trình =	24	24	24	24	56	56	56	56	56	56
SS(n) $= \frac{7\left[\frac{n-1}{7}\right]^2+13\left[\frac{n-1}{7}\right]+8}{2}$	14	14	14	14	31	31	31	31	31	31
SS(n) khi chạy chương trình =	14	14	14	14	31	31	31	31	31	31

Bài 13

```
sum := 0;
i := n;
while  (i > 0) do
        j := i ;
        while (j  > 0)  do
                sum := sum + 1;
                j := j  - 1;
        endw;
        i = i div 2;
endw;
```

Giải
Số lần lặp của While ngoài = Số con i chạy từ i:n->1,bước giảm i/2
Ta thấy: i = { $\frac{n}{2^0}$,$\frac{n}{2^1}$,$\frac{n}{2^2}$,...,$\frac{n}{2^k}$ }
$i > 0 <=> \frac{n}{2^k} \geq 1 <=> n \geq 2^k <=> k \leq \log_2 n$
α_i = số con k,$0 \leq k \leq \log_2 n$ => $\alpha_i = \log_2 n + 1$
Kết luận

$$\text{Gán(n)} = \sum_{k=0}^{\rfloor \log_2 n} (2 + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2^k}} 2) + 2 = \sum_{k=0}^{\rfloor \log_2 n} 2 + \sum_{k=0}^{\rfloor \log_2 n} (\sum_{j=1}^{\frac{n}{2^k}} 2) + 2 \approx 2(\rfloor \log_2 n + 1) + 2n \sum_{k=0}^{\rfloor \log_2 n} \frac{1}{2^k} + 2$$
$$\approx 2(\rfloor \log_2 n) + 4 + 2n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{(}\rfloor \log_2 n)})$$

$$\text{So sánh(n)} = \alpha_i + 1 + \sum_{k=0}^{\log_2 n} (\sum_{j=1}^{\frac{n}{2^k}} 1 + 1) = \log_2 n + 2 + \sum_{k=0}^{\log_2 n} (\sum_{j=1}^{\frac{n}{2^k}} 1 + 1)$$
$$\approx \rfloor \log_2 n + 2 + \sum_{k=0}^{\log_2 n} (\sum_{j=1}^{\frac{n}{2^k}} 1) + \rfloor \log_2 n + 1 \approx \rfloor \log_2 n + 2 + \sum_{k=0}^{\log_2 n} \rfloor \frac{n}{2^k} + \rfloor \log_2 n + 1$$
$$\approx 2\rfloor \log_2 n + 3 + \sum_{k=0}^{\log_2 n} \rfloor \frac{n}{2^k}$$

Bảng so sánh kết quả giữa công thức thủ công và chạy chương trình:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G(n)-(a)	6	10	12	16	18	20	22	26	28	30
G(n)-ChayCT	6	12	14	22	24	28	30	40	42	46
SS(n)-(a)	4	7	8	11	12	13	14	17	18	19
SS(n)-ChayCT	4	8	9	14	15	17	18	24	25	27

Bảng 1: Kiểm tra kết quả đếm n:1->10

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
G(n)-(a)	32	34	36	38	40	44	46	48	50	52
G(n)-ChayCT	48	54	56	60	62	74	76	80	82	88
SS(n)-(a)	20	21	22	23	24	27	28	29	30	31
SS(n)-ChayCT	28	31	32	34	35	42	43	45	46	49

Bảng 2: Kiểm tra kết quả đếm n:11->20