

## [9] Numerical Integration (数値積分)

**目的：**数値積分の必要性和シンプソン則の理解、及び定積分をモンテカルロ法を用いて求める手法を理解すること。

### 1. Numerical Integration

Numerical integration is the approximate computation of an integral using numerical techniques. The following formulas of numerical integration are well known.

- (1) Newton-Cotes formula (Trapezoidal rule, Midpoint rule, Simpson's rule)
- (2) Chebyshev formula
- (3) Gauss formula

### 2. Simpson's Rule

**Exercise.** Make a program to solve  $\int_0^1 (x^2 + x + 1)dx \cdots (A)$  by Simpson's rule. Use float type in the program. (最初に、この練習問題の解をシンプソン則を用いてプログラムを作成し求めてください。(A) 式の値は約 1.833 です。提出不要。)

```
#include<stdio.h>
#define f(x) (x)*(x)+x+1
int main(void){
    .
    .
    .
}
```

**3. Assignment** (レポート提出課題はここからです。レポートの作成にはワープロソフトを使用しても構いません。グラフなど手書きしたものを撮影し、適切な箇所に貼り付け、一つの pdf ファイルにまとめて提出してください。 他の人のコピーは不可。)

- (1) Explain Simpson's rule.
- (2) Calculate  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx \cdots (B)$  by Simpson's rule and fill in the following table. Define  $\pi = 3.14159265$ . Use float type in a program and show 8 digits after the decimal point. (Table 1 の Error 欄には、(B) 式を手計算で求めた値 (真値) とシンプソン則で求めた値との差 (絶対値) を記入すること。)

Partitions ( $n$ )	Simpson's rule	Error (誤差)
50		
100		
500		
1000		
2000		
5000		
10000		
20000		

Table 1

- (3) Explain what you find in Table 1.
- (4) Print the program (2). (作成したプログラムの画像の貼り付け、またはプログラムコードをレポートにコピーし提出すること。)
- (5) Show the area of  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  by drawing the graph. (グラフ描画の導出過程を省略しないこと。)
- (6) Solve  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  by two ways. (異なる二つの方法で求めなさい。導出過程を省略しないこと。)
- (7) Calculate  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$  by Simpson's rule and fill in the following table. Define  $\pi = 3.14159265$ . Use float type in a program and show 8 digits after the decimal point.

Partitions ( $n$ )	Simpson's rule	Error (誤差)
50		
100		
500		
1000		
2000		
5000		
10000		
20000		

Table 2

- (8) Show the area of  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$  by drawing the graph. (グラフ描画の導出過程を省略しないこと。)
- (9) Solve  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$  by hand. (手計算で求めなさい。導出過程を省略しないこと。)

Simpson's 3/8 Rule

$$S = \frac{3h}{8} \left\{ y_0 + 3 \sum_{i=1,4,7,\dots}^{n-2} y_i + 3 \sum_{i=2,5,8,\dots}^{n-1} y_i + 2 \sum_{i=3,6,9,\dots}^{n-3} y_i + y_n \right\}, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

- (10) Calculate  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  by Simpson's 3/8 rule and fill in the following table. Define  $\pi = 3.14159265$ . Use float type in a program. Print this program.

Partitions ( $n$ )	Simpson's 3/8 rule	Error
50		
100		
500		
1000		
2000		
5000		
10000		
20000		

Table 3

- (11) Calculate  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$  by Simpson's 3/8 rule and fill in the following table. Define  $\pi = 3.14159265$ . Use float type in a program.

Partitions ( $n$ )	Simpson's 3/8 rule	Error
50		
100		
500		
1000		
2000		
5000		
10000		
20000		

Table 4

## モンテカルロ法

以下のプログラムは、モンテカルロ法を用いて円周率の近似値を求めるプログラムである。プログラムを完成させ、その実行結果と円周率  $\pi$  の値を比較しなさい。提出不要。

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#define NUM 10000000 /* NUM 個の点を乱数をもとに一様にばらまく */
double rnd(void){
    return(_____); /* 0以上1以下の値を発生させ返す */
}
int main(void){
    double x,y,pi;
    int i,in=0;
    for(i=0;i<NUM;i++){
        x=rnd(); /* ばらまく点の x 座標 */
        y=rnd(); /* ばらまく点の y 座標 */
        if(_____) in++;
        /* 原点が中心で、第1象限にある 1/4 円に入った点の個数を数える */
    }
    pi=_____
    printf("pi=%f\n",pi);
    return(0);
}
```

4. モンテカルロ法を用いて、以下の楕円の面積を求めるプログラムを作成し、その実行結果を示しなさい。

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

5. モンテカルロ法を用いて、以下の定積分を求めるプログラムを作成し、その実行結果を示しなさい。

$$(1) \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx$$

$$(2) \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$$

$$(3) \int_0^1 \frac{4}{1 + x^2}dx$$

6. ビュフォンの針の問題について、以下の各問いに答えなさい。

- (1) この問題の解法をわかりやすく説明しなさい。
- (2) この問題から円周率の近似値を求めるプログラムを作成し、その実行結果を示しなさい。また、作成したプログラムの処理内容をわかりやすく説明しなさい。各コードをただ翻訳するような説明はしないこと。

### レポート提出に関して

レポートには本実験の目的、及び考察も記入してください。考察には本実験で学んだこと、新たに理解できたことなどを記入してください。他人のコピーは不可。