LEHRSTUHL FÜR RECHNERTECHNIK UND RECHNERORGANISATION

Rechnerarchitekturpraktikum

Projektaufgabe – Aufgabenbereich Assembler (1.12)

1 Organisatorisches

Auf den folgenden Seiten finden Sie die Aufgabenstellung zu einer Ihrer Projektaufgabe für das Praktikum. Die Rahmenbedingungen für die Bearbeitung werden in der Praktikumsordnung festgesetzt, die Sie auch über die Praktikumshomepage aufrufen können.

Bei Fragen/Unklarheiten in Bezug auf den Ablauf und die Aufgabenstellung wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor.

Mit freundlichen Grüßen,
Ihre Übungsleitung

2 Aufgabenumfeld

Dieses Projekt realisiert eine häufig genutzte trigonometrische oder arithmetische Gleitkomma-Operation in Assembler.
Diese lässt sich am Effizientesten durch Verwendung einer Reihenentwicklung oder einer Lookup Table realisieren. Bei der Reihenentwicklung wird die Funktion durch eine Summierung elementarer Ausdrücke approximiert. Einige wichtige Reihenentwicklungen sind in Abb. 6.5 zusammengefasst. In Lookup Tables werden für bestimmte Stellen des Wertebereichs vorberechnete Funktionswerte in einer Tabelle abgelegt. Der Funktionswert zu einem beliebigen Wert wird aus den Funktionswerten der benachbarten Stützstellen durch Interpolation berechnet. Der Abstand der Stützstellen, für die Funktionswerte abgespeichert werden, richtet sich nach dem Funktionsverlauf und dem sich daraus ergebenden Interpolationsfehler.
Beide Ansätze erfordert einen Tradeoff zwischen Berechnungsdauer bzw. Tabellengröße und dem resultierenden Berechnungsfehler.
Sie können zur Lösung dieser Aufgaben die FPU-Befehle für die vier Grundrechenarten $+, -, *, /$ und Negation (Multiplikation mit -1) verwenden, sowie die notwendigen Speicherverwaltungs- und Kontrollbefehle. Die Verwendung weiterer FPU-Befehle ist nicht gestattet.
Das Projekt kann wahlweise unter Windows, Linux oder Mac OS durchgeführt werden.

3 Aufgabe

Realisieren Sie die Funktion $y = \sin x$ entsprechend den oben beschriebenen Vorgaben.

3.1 Arbeitsaufträge

Bitte bearbeiten Sie nur die folgenden Arbeitsaufträge:

- Informieren Sie sich über die vorhandenen FPU-Befehle (die Benutzung der FPU ist für diese Aufgabe Pflicht).
- Implementieren Sie die folgende Funktion:

  float sin(float x);

- Stellen Sie ein C-Rahmenprogramm zur Verfügung, das zum Testen auf Korrektheit und zur Durchführung einer Leistungsmessung Ihre Assembler-Routine aufruft:
  - Validieren Sie Ihre Realisierung der Funktion durch Vergleich mit einer geeigneten Referenz, z. B. dem entsprechenden Befehl der FPU oder der entsprechenden Routine der C-Bibliothek.

  - Führen Sie des Weiteren einen Leistungsvergleich (Zeitmessung) zwischen Ihrer Lösung und dem entsprechenden FPU-Befehl bzw. der entsprechenden Bibliotheksroutine des Compilers / der C-Bibliothek durch.
  - Achten Sie darauf, kein Inline-Assembler zu verwenden.
- Erstellen Sie ein Makefile, mit dem das Projekt kompiliert werden kann.

Taylor-Mac Laurin'sche Formel:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

wobei $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$ mit $0 < \theta < 1$.

Besondere Reihen:

$\sin(x) =$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \ldots$	für $x \in]-\infty;\infty[$
$\cos(x) =$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots$	für $x \in]-\infty;\infty[$
$\tan(x) =$	$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n}x^{2n-1} + \ldots$	$\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\arcsin(x) =$	$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)} + \ldots$	für $\lvert x\rvert < 1$
$\arccos(x) =$	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)} + \ldots$	für $\lvert x\rvert < 1$
$\arctan(x) =$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots$	für $\lvert x\rvert \leq 1$
$\arctan(x) =$	$\pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \pm \ldots$ [a]	für $\lvert x\rvert > 1$
$\sinh(x) =$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	für $x \in \mathbb{R}$
$\cosh(x) =$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	für $x \in \mathbb{R}$
$\tanh(x) =$	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n}x^{2n-1} + \ldots$	für $\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arsinh}(x) =$	$x - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)} \pm \ldots$	für $\lvert x\rvert < 1$
$\operatorname{arcosh}(x) =$	$\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \ldots - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot 2(n-1)-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2(n-1)x^{2(n-1)}} - \ldots$	für $x > 1$
$\operatorname{artanh}(x) =$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$	für $\lvert x\rvert < 1$
$e^x =$	$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	für $x \in]-\infty;\infty[$
$\ln(1+x) =$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \pm \ldots$	für $x \in]-1;1]$
$(1+x)^m =$	$1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$	$m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, x \in]-1;1]$
$a^x = e^{x\ln a} =$	$a + \frac{(x\ln a)}{1!} + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \ldots + \frac{(x\ln a)^n}{n!} + \ldots$	$\lvert x\rvert < \infty, a > 0$

B_n bezeichnet die Bernoullischen Zahlen. Nachfolgend die Tabelle der ersten Bernoullischen Zahlen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_k	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

[a] Das erste Glied trägt das Vorzeichen „+“ für $x > 1$ und „-“ für $x < -1$

Abbildung 6.5: Einige wichtige Potenzreihen (aus [BMNW78] und [BS81])