Análisis (ver. 0.1)

Benjamín Macías

2021–2022

Resumen

Estos son apuntes basados en el curso de Análisis Real impartido por Duván Henao en la PUC Chile en primavera de 2021, y en el libro Espaços Métricos, de Elon Lages Lima. Empezaron como estudio personal, pero terminaron cubriendo casi por completo nuestro curso de pregrado.

A la fecha, faltan las demostraciones del teorema de Arzelà–Ascoli, el de Stone–Weierstraß, y una sección sobre conexidad (que espero poder escribir dentro de poco). A futuro, planeo agregar todo lo que considere necesario, ya sea porque aprendí algo nuevo, o porque me fue sugerido. De todos modos, en mi corazón hay ganas de que contenga una sección sobre la construcción de los reales, sobre cálculo real en una y varias variables, sobre cálculo complejo, y todo lo que pueda de teoría de medida.

Respecto a lo que sí está escrito, es una exposición bastante estándar. Las únicas advertencias son: en la sección sobre el teorema de Baire introduzco la definición de "densidad en abiertos", que no es tradicional; la sección de compacidad incluye una primera aproximación desde un lente histórico; y que el teorema de Arzelà–Ascoli es primero demostrado en el caso particular sobre los números reales, y después generalizado, solo porque considero que esto tiene valor pedagógico.

Está de más decir que debo haber escrito muchos errores, tanto en la matemática como en la exposición. Espero que a medida que sean encontrados me los puedan comunicar (junto a cualquier sugerencia que tengan) a mi correo `benjaquezadam@uc.cl` para corregirlos, o en la página de GitHub `www.github.com/bmq-00/analisis` en la que estará hosteada la versión más reciente.

Índice

1. Espacios métricos

El concepto de compacidad es central en el análisis. La búsqueda por generalizar el teorema Bolzano–Weierstraß a espacios de funciones, fue la que llevó a Fréchet (1906) a introducir los espacios métricos abstractos en [Fre06]. Un espacio métrico es un conjunto equipado con una noción de distancia entre dos puntos. Esta noción es suficiente para empezar a hacer geometría y topología en espacios distintos a $\mathbb{R}$.

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1. Una *métrica* en un conjunto M es una función $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ no-negativa, simétrica, y que cumple la desigualdad triangular. Simbólicamente,

1. $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

El número $d(x, y)$ se llama *distancia* entre x e y, y el par (M, d) se llama un *espacio métrico.*

Ejemplo 1.2. En cualquier conjunto M se puede definir la función

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Esta función define una métrica en M: en efecto, las condiciones 1 y 2 de 1.1 claramente se cumplen. Para la terecera condición, notamos que el lado izquierdo es a lo más 1. Si fuese 0, entonces $x = z$ y la condición se cumple trivialmente; si fuese 1, el lado derecho es distinto de 0, pues de lo contrario se tendría que $x = y = z$, lo que fuerza a que el lado izquierdo sea 0, contradicción. Esta métrica se llama *métrica cero-uno*. Es de gran utilidad para producir contraejemplos.

Ejemplo 1.3. Sea (M, d) un espacio métrico. Cualquier subconjunto $S \subseteq M$ puede ser realizado como un espacio métrico considerando la restricción de d a S, en otras palabras, $(S, d|_S)$ es un espacio métrico: las tres condiciones de 1.1 se cumplen para todos $x, y, z \in M$, por lo que en particular se cumplen para todos $x, y, z \in S$. Este espacio se llama un *subespacio métrico* de S, y $d|_S$ se llama una *métrica inducida* por (M, d).

Ejemplo 1.4. Puede existir más de una métrica para algún conjunto. Por ejemplo, en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ se pueden definir tres métricas sumamente importantes. Escribiendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definimos

(1) $d(x, y) := \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$.

(2) $d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

(3) $d_\infty(x,y) := \text{máx}_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$.

Las tres funciones claramente cumplen las condiciones 1 y 2 de 1.1. La condición 3 es directa para las últimas dos (para el paso complicado basta usar la desigualdad triangular de $\mathbb{R}$). Para la primera, notemos que $d(x,y) = \|x-y\|$, con $\|\cdot\|$ es la norma usual de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, basta probar que se cumple la desigualdad triangular para la norma. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) \\
&= \|x\|^2 + 2(x\cdot y) + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|x\cdot y| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Tomando raíz, se obtiene el resultado.

Ejemplo 1.5. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado de dimensión finita. La función $d(x,y) := \|x-y\|$ define una métrica en E, llamada la *métrica inducida por la norma*. Veamos algunas normas de interés. Recordemos que como asumimos E de dimensión finita, se tiene que $E \cong \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, por lo que basta estudiar $\mathbb{R}^n$.

(1) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, el espacio real con la norma-uno, definida por $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Probar que es una norma es directo. La métrica que induce es (2) de 1.4.

(2) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, el espacio real con la norma euclidiana, o norma-dos, definida por $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$. Es un caso particular de (4) con $p = 2$, por lo que probamos que es una norma en. La métrica que induce es (1) de 1.4.

(3) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, el espacio real con la norma-infinito, o norma-supremo, definida por $\|x\|_\infty := \text{máx}_{i=1,\ldots,n} |x_i|$. Probar que es una norma es directo. La métrica que induce es (3) de 1.4.

(4) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ con $1 < p < \infty$, el espacio real con la norma-p, definida por $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

Probar que es una norma es directo, excepto la parte de demostrar que cumple la desigualdad triangular, lo que es no-trivial. De hecho, esta desigualdad se conoce como desigualdad de Minkowski (cf.), cuya demostración es consecuencia de la desigualdad de Hölder (cf.), la cual a su vez es probada usando la desigualdad de Young (cf.).

Lema 1.6 (Desigualdad de Young). *Sean $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se tiene que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Daremos un argumento por convexidad. Adoptemos la notación del enunciado. Recordemos que $f(x) = e^x$ es una función convexa, por lo que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que el segmento de recta que conecta $f(x)$ y $f(y)$ está sobre el grafo de f.

Este segmento es la combinación convexa de los puntos $f(x)$ y $f(y)$. Por tanto, notamos que la imagen de cualquier combinación convexa es menor o igual a cualquier combinación convexa de las imágenes respectivas, es decir, para cualquier $\lambda \in [0,1]$ se tiene

$$f(\lambda x + [1-\lambda]y) \leq \lambda f(x) + [1-\lambda] f(y).$$

Notamos que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, por lo que eligiendo $\lambda := \frac{1}{p}$ forzamos que $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. Con $x := \log(a^p)$ y $y := \log(b^q)$, se obtiene el resultado enunciado. $\square$

Lema 1.7 (Desigualdad de Hölder). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, se tiene que*

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Notamos que si x o y son 0, entonces la desigualdad es cierta trivialmente, por lo que podemos suponer que $x, y \neq 0$. Considerando $u := \frac{x}{\|x\|_p}$ y $v := \frac{y}{\|y\|_q}$ es claro que $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$, y por tanto también $\|u\|_p^p = \|v\|_q^q = 1$.

Ahora, para cada $i = 1, \ldots, n$ notamos que por Young 1.6 se tiene que $|u_i v_i| \leq \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q}$. Sumando estas n desigualdades se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| = \|uv\|_1 &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q} \right) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \\
&= \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

En particular $\|uv\|_1 \leq 1$, por lo que multiplicando a ambos lados por $\|x\|_p \|y\|_q$ se tiene el resultado enunciado. $\square$

Proposición 1.8 (Desigualdad de Minkowski). *Sea $1 < p < \infty$. Para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Demostración. Asumamos la notación del enunciado. Usando la desigualdad triangular usual se tiene que

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p &\leq \sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p \\ &= \sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)(|x_i|+|y_i|)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}.\end{aligned}$$

Acotaremos las dos últimas sumas usando Hölder 1.7. Notemos que $q := \frac{p}{p-1}$ es tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Denotemos por $a,b,c \in \mathbb{R}^n$ a los vectores tales que

$$a_j := |x_j|, \qquad b_j := (|x_i|+|y_i|)^{p-1}, \qquad c_j := |y_i|,$$

Es claro que $\|a\|_p = \|x\|_p$ y $\|c\|_p = \|y\|_p$. Notamos que se cumplen las hipótesis de Hölder 1.7, por lo que se tiene que

$$\|ab\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} \leq \|a\|_p \|b\|_q = \|a\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q},$$

y análogamente, $\|cb\|_1 \leq \|c\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$. Como por definición tenemos $(p-1)q = p$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p \leq (\|a\|_p+\|c\|_p)\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/q}.$$

Dividiendo a ambos lados por el último término a la derecha, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|a\|_p + \|c\|_p.$$

Como $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, se tiene que el lado izquierdo es igual a $\|x+y\|_p$, por lo que se tiene el resultado enunciado. □

Ejemplo 1.9. De forma análoga, las normas y productos internos inducen métricas en los espacios vectoriales de dimensión infinita. Veamos algunos ejemplos.

(1) Sea $\mathcal{B}(X) := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid f \text{ es acotada}\}$. Este conjunto es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con operaciones punto a punto, y la función $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X}|f(x)|$ es una norma en $\mathcal{B}(X)$. Nos interesarán un par de estos espacios: el espacio de las sucesiones acotadas $\mathcal{B}(\mathbb{N})$, y $\mathcal{B}([0,1])$. Probemos que es una norma.

Lema 1.10. *La función $\|f\|_\infty$ define una norma en $\mathcal{B}(X)$.*

Demostración. Que $\|f\|_\infty$ es no-negativa y simétrica es directo. Por la desigualdad triangular usual, se tiene que

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|.$$

Como $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)|$ es la menor de las cotas superiores, en particular se tiene que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|,$$

por lo que $\|f\|_\infty$ efectivamente cumple la desigualdad triangular. □

(2) Sea $\mathcal{C}([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$. Este conjunto es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con operaciones punto a punto. Podemos definir dos normas que nos serán de interés.

a) Notamos que $\mathcal{C}([0,1]) \subseteq \mathcal{B}([0,1])$, pues todas las funciones continuas desde un intervalo son acotadas. Por tanto, podemos considerar la norma $\|f\|_\infty$ definida anteriormente.

b) Sea $1 \leq p < \infty$. Definimos la p-norma de $f \in \mathcal{C}([0,1])$ como $\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$. Checkear que es una norma es directo para $p = 1$. Probaremos el resultado para $p > 1$.

Lema 1.11. *La función $\|f\|_p$ define una norma en $\mathcal{C}([0,1])$.*

Demostración. Que $\|f\|_p$ es no-negativa y simétrica es directo. Para la desigualdad triangular, consideremos una partición equiespaciada $x_0, \ldots, x_n$ del $[0,1]$ en n subintervalos de longitud $\frac{1}{n}$. Sea $t_i := \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$, y análogamente sea $s_i := \max_{x\in[x_i,x_{i+1}]} g(x)$. Consideremos los vectores

$$u := \left(N^{-1/p}t_0, N^{-1/p}t_1, \ldots, N^{-1/p}t_n\right) \in \mathbb{R}^n,$$
$$v := \left(N^{-1/p}s_0, N^{-1/p}s_1, \ldots, N^{-1/p}s_n\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Por Minkowski en u, v, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p \\
\iff &\left(\textstyle\sum_{i=1}^n \left|N^{\frac{-1}{p}}(t_0+s_0)\right|^p\right)^{\frac{-1}{p}} \leq \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \left|N^{\frac{-1}{p}}(t_0)\right|^p\right)^{\frac{-1}{p}} + \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \left|N^{\frac{-1}{p}}(s_0)\right|^p\right)^{\frac{-1}{p}} \\
\iff &\left(\textstyle\sum_{i=1}^n N^{-1}|(t_0+s_0)|^p\right)^{\frac{-1}{p}} \leq \left(\textstyle\sum_{i=1}^n N^{-1}|(t_0)|^p\right)^{\frac{-1}{p}} + \left(\textstyle\sum_{i=1}^n N^{-1}|(s_0)|^p\right)^{\frac{-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Tomando, $n \to \infty$, queda la definición de integral, y por tanto se tiene lo pedido. □

(3) Sea $1 \leq p < \infty$. Sea $\ell^p := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$, llamado espacio de las sucesiones p-sumables.

Este conjunto es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con operaciones punto a punto, y se puede definir una norma mediante la función $\|x\|_p := \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$. Es directo que esta función es no-negativa y simétrica. Para probar la desigualdad triangular, sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$, consideremos la desigualdad de Minkowski para los primeros N términos, y tomamos $N \to \infty$.

1.2. Bolas y esferas

Definición 1.12. Sea M un espacio métrico y $a \in M$. Dado $r > 0$, definimos

1. La *bola abierta* de centro a y radio r como el conjunto de puntos de M que están a una distancia menor que r de a, léase, $B(a,r) := \{x \in M \mid d(x,a) < r\}$.
2. La *bola cerrada* de centro a y radio r como el conjunto de puntos de M a distancia menor o igual a r de a, léase, $B[a,r] := \{x \in M \mid d(x,a) \leq r\}$.
3. La *esfera* de centro a y radio r es el conjunto de puntos de M a distancia igual a r de a, léase $S(a,r) := \{x \in M \mid d(x,a) = r\}$.

Observación. Claramente $B[a,r] = B(a,r) \cup S(a,r)$, y $B(a,r) \cap S(a,r) = \emptyset$.

Ejemplo 1.13. Sea M un espacio métrico con la métrica cero-uno (cf. 1.2). Por definición, en este espacio cualquier par de puntos están a distancia menor o igual a 1, por lo que para todo $a \in M$ se tiene que

$$B(a,r) = \begin{cases} M & \text{si } r > 1, \\ \{a\} & \text{si } r \leq 1, \end{cases}$$

$$B[a,r] = \begin{cases} M & \text{si } r \geq 1, \\ \{a\} & \text{si } r < 1, \end{cases}$$

$$S(a,r) = \begin{cases} M - \{a\} & \text{si } r = 1, \\ \emptyset & \text{si } r \neq 1. \end{cases}$$

Ejemplo 1.14. En $\mathbb{R}$ con la métrica usual se tiene que

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R} \colon |x-a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon -r < x-a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon a-r < x < a+r\} \\ &= (a-r, a+r). \end{aligned}$$

De forma análoga, $B[a,r] = [a-r, a+r]$, y $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$.

Ejemplo 1.15. Sea $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1\}$ el disco de radio 1 centrado en el origen, con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$. Es claro que para todo $r > 1$, se tiene que $B(0, r) = B[a, r] = M$ y $S(0, r) = \emptyset$.

Ejemplo 1.16. Sea M un espacio métrico, y $a \in M$. Siempre podemos escribir $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(a, \frac{1}{n})$: es claro que a pertenece a cada una de estas bolas, y por tanto a su intersección. Probemos que no hay más puntos. Sea $x \neq a$. Por tanto, $d(x, a) > 0$, y por propiedad arquimedina, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $d(x, a) > \frac{1}{n}$, es decir, $x \notin B(a, \frac{1}{n})$. Esto prueba que para cada $x \neq a$, existe una bola centrada en a que no lo contiene, por lo que no formará parte de la intersección de todas las bolas. Por tanto, a es efectivamente el único punto de la intersección.

Definición 1.17. Sea M un espacio métrico. Un punto $a \in M$ se llama un *punto aislado* de M cuando es una bola abierta en M, es decir, cuando existe un radio $r > 0$ de modo que $\{a\} = B(a, r)$.

Observación. Que un punto $a \in M$ sea aislado nos dice que no hay puntos de M a distancia $r > 0$ de a. Obviamente, que un punto sea no-aislado quiere decir que siempre hay puntos de M a distancia arbitraria de r.

Ejemplo 1.18. Sea $\mathbb{Z}$ con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Todo $n \in \mathbb{Z}$ es aislado, pues $\{n\} = B(n, 1)$.

Ejemplo 1.19. Sea (M, d) un espacio métrico con d la métrica discreta. Claramente, todos los puntos $a \in M$ son aislados, pues dos puntos distintos están a distancia exactamente 1, por lo que $\{a\} = B(a, 1)$.

Ejemplo 1.20. Sea $P := \{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ con la métrica usual de $\mathbb{R}$. El 0 no es aislado en P: dado cualquier $r > 0$, por propiedad arquimediana existe un natural $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{r} < n$ y por tanto $r > \frac{1}{n}$, esto es, $\frac{1}{n} \in B(0, r)$.

El resto de puntos de P sí son aislados: dado $\frac{1}{n} \in P$, el punto de P más cercano es $\frac{1}{n+1}$. La distancia entre estos puntos es $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, por lo que para cualquier $0 < r < \frac{1}{n(n+1)}$ se tiene que $B(\frac{1}{n}, r)$ tiene como único punto al $\frac{1}{n}$, es decir, el punto en cuestión es aislado.

Ejemplo 1.21. Ningún punto de un espacio vectorial normado no-trivial E es aislado. Sean $a \in E, r > 0$, y probemos que $B(a, r)$ contiene puntos distintos de a. Para esto, tomemos un $0 \neq y \in E$, y notemos que $z := \frac{r}{2|y|}y$ tiene norma $|z| = \frac{r}{2}$. Se sigue que $0 < \|z\| < r$, por lo que $x := z + a \in B(a, r)$.

Lema 1.22. *Sea M un espacio métrico. Para todo $a \in M$ se tiene*

1. $r_1 < r_2 \implies B(a, r_1) \subseteq B(a, r_2)$.
2. $\bigcup_{r>0} B(a, r) = \bigcup_{r>0} B[a, r] = M$, *y* $\bigcap_{r>0} B(a, r) = \bigcap_{r>0} B[a, r] = \{x\}$.
3. $r_1 < r_2 \implies B[a, r_1] \subseteq B(a, r_2)$.

2. Funciones continuas

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1. Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es *continua* en el punto $a \in M$ si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que cada vez que $d(x, a) < \delta$, se tenga que $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Decimos que f *continua* si lo es en todos los puntos de M.

Observación. En lenguaje de bolas, $f\colon N \to M$ es continua en $a \in M$ si y solo si dada cualquier bola $B_N := B(f(a), \varepsilon)$, existe una bola $B_M := (a, \delta)$ de modo que $f(B_M) \subseteq B_N$.

Ejemplo 2.2. Sean M, N espacios métricos. Si $a \in M$ es un punto aislado (cf. 1.17), entonces toda función $f\colon M \to N$ es continua en a: sea $\varepsilon > 0$, y como a es aislado, entonces $\{a\} = B(a, \delta)$ para algún $\delta > 0$. Como esta bola es un singleton, entonces

$$\begin{aligned} x \in B(a, \delta) &\iff d(x, a) < \delta \\ &\implies x = a \\ &\implies f(x) = f(a) \\ &\iff d(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, si (M, d) es un espacio métrico con d la métrica discreta, entonces en virtud de 1.19, todas las funciones $f\colon M \to N$ son continuas.

Ejemplo 2.3. La composición de funciones continuas es continua: si $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to P$ son continuas, entonces $g \circ f\colon M \to P$ es continua. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de f, podemos encontrar $\delta_1 > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta_1$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Dado $\varepsilon := \delta_1$, la continuidad de g nos permite encontrar δ_2 de modo que si $d(f(x), f(a)) < \delta_2$, entonces $d(gf(x), gf(a)) < \delta_1 < \varepsilon$.

Definición 2.4. Sean M, N espacios métricos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es *lipschitziana* si existe una constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para todos $x, y \in M$.

Ejemplo 2.5. Todas las funciones lipschitzianas son continuas. En efecto, sea f lipschitziana de constante c. Debemos probar que f es continua, es decir, que cumple con 2.1. Sean $a \in M$ y $\varepsilon > 0$, y consideremos $\delta := \varepsilon/c$. Se sigue que $d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a)$, pues f es lipschitziana. Por tanto, si $d(x, a) < \delta = \varepsilon/c$, se tiene que $d(f(x), f(a)) < c \cdot \varepsilon/c = \varepsilon$, es decir, f es efectivamente continua.

Observación. Las funciones lipschitzianas reales son cerradas bajo combinaciones $\mathbb{R}$-lineales. Consideremos $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ funciones lipschitzianas de constantes c, k y una constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Para probar que $(f + g)$ también es lipschitziana, notemos que

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x)-(f+g)(y)| &= |f(x)+g(x)-f(y)-g(y)| \\
&= |[f(x)-f(y)]+[g(x)-g(y)]| \\
&\leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\
&\leq cd(x,y)+kd(x,y) \\
&= (c+k)d(x,y),
\end{aligned}$$

donde la tercera línea se obtuvo por desigualdad triangular, y la cuarta porque estamos suponiendo f, g lipschitzianas. Para probar que λf es lipschitziana, notamos que

$$|(\lambda f)(x)-(\lambda f)(y)| = |\lambda(f(x)-\lambda f(y))| = |\lambda||f(x)-f(y)| \leq |\lambda| d(x,y).$$

Lema 2.6. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Si $f\colon I \to \mathbb{R}$ es diferenciable con derivada acotada por $c > 0$, entonces es lipschitziana de constante c (y por tanto continua).*

Demostración. Sea f como en el enunciado. Como f tiene derivada acotada, entonces existe un $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$. El teorema del valor medio nos dice que dados $x, y \in I$ arbitrarios, existe un $x < z < y$ tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$. Por lo mencionado antes, se tiene que $|f'(z)| \leq c$, por lo que tomando valor absoluto de la expresión anterior, se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$. Esto prueba que f es lipschitziana, y por tanto continua. □

Ejemplo 2.7. Las funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ constantes son continuas, pues en cada intervalo son diferenciables y tienen derivada idénticamente nula, en particular acotada. Se concluye por 2.6.

Ejemplo 2.8. Los polinomios $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Para probar esto, basta probar que para $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$ es continua en cada intervalo (en virtud de que podemos tomar combinaciones $\mathbb{R}$-lineales de los monomios x^n).

En efecto, si consideramos un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq a$, para todo $x \in I$. Por tanto, se tiene que $|f'(x)| = \left|nx^{n-1}\right| \leq na^{n-1}$. Por tanto f es una función real definida en un intervalo, diferenciable, y con derivada acotada. Por 2.6, se concluye que f es lipschitziana, y por tanto continua.

Ejemplo 2.9. Un tipo de funciones lipschitzianas que nos interesarán son la siguientes: sea M un espacio métrico. Decimos que una función $f\colon M \to M$ es una *contracción* si es lipschitziana de constante $0 < c < 1$. Estudiamos la utilidad de estas funciones en la sección 5.4. Si f es lipschitziana de constante $c = 1$, decimos que es una *contracción débil*.

Ejemplo 2.10. Las siguientes funciones son contracciones débiles, y por tanto continuas. Sean M, N espacios métricos.

(1) Cualquier función constante $f\colon M \to N$, pues $d(f(x), f(y)) = 0$ siempre.
(2) En cualquier espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$, la norma es una contracción débil, pues

$$\begin{aligned} d(\|x\|, \|y\|) &= \|\|x\| - \|y\|\| \\ &= \|\|x - 0\| - \|y - 0\|\| \\ &\leq \|x - y\| = d(x, y). \end{aligned}$$

Definición 2.11. Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos. Decimos que $f\colon M \to N$ es *discontinua* en $a \in M$ si no es continua en a, vale decir, que existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar un $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ pero $\rho(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

Observación. Esta definición es equivalente a que exista $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se pueda obtener $x_n \in M$ tal que $d(x_n, a) < 1/n$ pero $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$.

Ejemplo 2.12. Consideremos la función *característica* de $\mathbb{Q}$, dada por

$$\begin{aligned} \xi\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función es discontinua en todo $a \in \mathbb{R}$: sea $\varepsilon := 1/2$ y $\delta > 0$. Si a es racional, consideramos x_δ irracional tal que $|x_\delta - a| < \delta$, y si a es irracional consideramos x_δ racional tal que $|x_\delta - a| < \delta$. En ambos casos se tiene que $|\xi(x_\delta) - \xi(a)| = 1 \geq 1/2$, por lo que ξ es en efecto discontinua en a.

Observación. Si bien ξ no es continua en $\mathbb{R}$, las funciones $\xi|_{\mathbb{Q}}$ y $\xi|_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$ sí son continuas en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ respectivamente (pues son constantes), por mucho que ξ no sea continua en ninguno de los dos conjuntos.

Ejemplo 2.13. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función es discontinua en 0: sea $\varepsilon := 1/2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $x_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$. Se sigue que $\sin(1/x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi n) = \pm 1$. Por tanto, se tiene que $|x_n - 0| < 1/n$ (esto es directo), pero también que $|f(x_n) - f(0)| = \left|\sin(\frac{1}{x_n}) - 0\right| = 1 \geq 1/2 = \varepsilon$. Por tanto, f es efectivamente discontinua.

2.2. Continuidad uniforme

Definición 2.14. Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos. Decimos que $f\colon M \to N$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x,y) < \delta$ entonces $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observación.

1. Es claro que si f es uniformemente continua, entonces es continua. El recíproco no es cierto.
2. El concepto de continuidad (cf. 2.1) y el de continuidad uniforme se diferencian en que el primero es un fenómeno local y el segundo global: continuidad nos dice que cerca de un punto las imágenes están cerca de la imagen del punto, mientras que continuidad uniforme nos dice que dos puntos cercanos tienen imágenes que están cerca.

Ejemplo 2.15. Si $f\colon M_1 \to M_2$ y $g\colon M_2 \to M_3$ son uniformemente continuas, entonces $g \circ f\colon M_1 \to M_3$ también lo es: dado $\varepsilon > 0$, usando la continuidad uniforme de g podemos encontrar $\delta_1 > 0$ de modo que para $x, y \in M_2$ se tenga $d(x,y) < \delta_1 \implies d(g(x), g(y)) < \varepsilon$. Por tanto, usando la continuidad uniforme de f podemos encontrar $\delta_2 > 0$ de modo que para todos $a, b \in M_1$ se tenga que $d(a,b) < \delta_2 \implies d(f(a), f(b)) < \delta_1$. Por tanto, si $d(x,y) < \delta_2$ entonces $d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) < \varepsilon$.

Ejemplo 2.16. La suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua. Sin embargo, el producto de funciones uniformemente continuas no ha de serlo, como ejemplifica $x \mapsto x^2$.

Ejemplo 2.17. Toda función lipschitziana es uniformemente continua. La demostración del ejemplo 2.5 funciona verbatim.

Ejemplo 2.18. Toda función uniformemente continua es acotada: basta desarrollar habiendo elegido $\varepsilon = 1$.

3. Topología de espacios métricos

3.1. Conjuntos abiertos

Definición 3.1. Sea M un espacio métrico, y $X \subseteq M$.

1. Decimos que un $a \in X$ es un *punto interior* de X si es centro de una bola abierta en X, es decir, si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq X$. El conjunto de todos los puntos interiores a X en M se llama *interior* de X en M, y se denota como $\operatorname{int} X$.
2. Decimos que un $b \in M$ es un *punto frontera* de X en M si toda bola abierta centrada en b no queda completamente contenida en X, es decir, que tiene tanto puntos de X como de su complemento $M - X$. Simbólicamente, que para cada $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(b, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ y que $B(b, \varepsilon) \cap M - X \neq \emptyset$.

   El conjunto de todos los puntos frontera de X en M se llama *frontera* de X en M, y se denota como ∂X.

Observación.

1. Que a no sea interior a X en M es equivalente a que toda bola abierta centrada en a no esté completamente contenida en X, es decir, que a es un punto frontera.
2. Los puntos fronteras de un subconjunto pertenecen al espacio métrico ambiente, por lo que no necesariamente pertenecen al subconjunto.
3. En particular, las nociones de interior y frontera son relativas al espacio métrico ambiente.
4. Es claro que $\operatorname{int} X \subseteq X$.

Ejemplo 3.2. El interior de $[0, 1)$ en $\mathbb{R}$ es $\operatorname{int}[0, 1) = (0, 1)$: notamos que para cada $0 < a < 1$ podemos elegir $r := \text{mín}\{a, 1-a\}$, y se tiene que $B(a, r) \subseteq [0, 1)$, por lo que $a \in \operatorname{int}[0, 1)$, y por tanto $(0, 1) \subseteq \operatorname{int}[0, 1)$. Probemos que no hay más puntos interiores.

Partimos notando que 0 no es punto interior de $[0, 1)$ (y por tanto punto frontera de $[0, 1)$) pues cualquier bola abierta centrada en 0 contiene números negativos y positivos. Análogamente, $1 \in \partial[0, 1)$ pues toda bola abierta centrada en 1 contiene números mayores y menores que 1. Finalmente es claro que si $x < 0$ o $x > 1$ existen bolas abiertas centradas en x que no intersectan a $[0, 1)$ (basta tomar $r < \text{mín}\{|x - 0|, |x - 1|\}$). Por tanto no hay más puntos interiores a $[0, 1)$ fuera de $(0, 1)$. En particular $\operatorname{int}[0, 1) = (0, 1)$ y $\partial[0, 1) = \{0, 1\}$.

Por otro lado, notamos que el interior de $[0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$ es vacío, pues toda bola abierta centrada en algún punto se sale del $[0, 1)$, por lo que de hecho todo $[0, 1]$ es la frontera de $[0, 1)$ en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 3.3. Recordemos que cualquier bola abierta centrada en un número racional contiene infinitos números irracionales. Por tanto, el interior de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es vacío. Por el mismo motivo, la frontera de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es todo $\mathbb{R}$.

Definición 3.4. Sea M un espacio métrico y $A \subseteq M$. Decimos que A es un conjunto *abierto* en M si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A = \operatorname{int} A$.

Observación. Por tanto, un conjunto A es abierto si y solo si todos sus puntos a pertenecen a alguna bola abierta centrada en a completamente contenida en A.

Ejemplo 3.5. Sea M un espacio métrico. Toda bola abierta en M (cf. 1.12) es un conjunto abierto: sea $B(a,r)$ una bola abierta ccentrada en $a \in M$ de radio $r > 0$. Debemos probar que para cada $x \in B(a,r)$, existe un radio $s > 0$ tal que $B(x,s) \subseteq B(a,r)$.

Consideremos $s := r - d(a,x) > 0$. Por definición, si $y \in B(x,s)$, entonces $d(x,y) < s$. Por tanto, por desigualdad triangular, notamos que $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r$, es decir, $y \in B(a,r)$, por lo que $B(x,s) \subseteq B(a,r)$. Esto es que $B(a,r)$ es un conjunto abierto en M.

Ejemplo 3.6. Sea M un espacio métrico, y $X \subseteq M$. Se tiene que $\operatorname{int} X$ es un abierto en M, es decir, que para cada punto interior es centro de una bola abierta completamente contenida en $\operatorname{int} X$. Notar que esto es probar que $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$.

En efecto, sea $a \in \operatorname{int} X$ arbitrario, y consideremos $r > 0$ de modo que $B(a,r) \subseteq X$, el cual existe por la definición de $\operatorname{int} X$. Para cada $x \in B(a,r)$ arbitrario, podemos encontrar $s > 0$ tal que $B(x,s) \subseteq B(a,r)$. Por lo que $B(x,s) \subseteq X$, es decir, $x \in \operatorname{int} X$. Como x es un punto de $B(a,r)$ arbitrario, se sigue que $B(a,r) \subseteq \operatorname{int} X$. Esto es que $\operatorname{int} X$ es abierto en M

Ejemplo 3.7. Sea M un espacio métrico. Si $a \in M$ es un punto aislado (cf. 1.17), entonces $\{a\}$ es abierto en M.

Ejemplo 3.8. Sea M un espacio métrico. El mismo M es abierto en M, pues todas las bolas centradas en $a \in M$ están contenidas en M. También $\emptyset \subseteq M$ es abierto en M por vacuidad.

Ejemplo 3.9. Sea M un espacio métrico. El complemento $M - B[a,r]$ de cualquier bola cerrada de centro $a \in M$ y radio $r > 0$ es abierto en M: sea $x \in M - B[a,r]$, es decir, tal que $d(a,x) > r$. Probemos que x es un punto interior de $M - B[x,r]$. Para esto, consideremos $s > 0$ tal que $s < d(a,x) - r$. Por construcción, es claro que $B[a,r] \cap B(x,s) = \emptyset$, es decir, $B(x,s) \subseteq M - B[a,r]$. Esto es precisamente que x es un punto interior de $M - B[a,r]$, por lo que efectivamente $M - B[a,r]$ es abierto en M.

Ejemplo 3.10. Sea M un espacio métrico, y $F := \{a_1 \ldots, a_n\} \subseteq M$ un subconjunto finito de M. Se tiene que $M - F$ es abierto en M: en efecto, para cada

$x \in M - F$ podemos considerar $r := \min\{d(x, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$. Se sigue que $B(x, r)$ es una bola abierta que por construcción no contiene a ninguno de los a_i, es decir, que $B(x, r) \subseteq M - F$. Esto es precisamente que $M - F$ es abierto en M.

Ejemplo 3.11. Todo intervalo real abierto acotado (a, b) es abierto en $\mathbb{R}$ pues es la bola abierta de centro $\frac{b+a}{2}$ y radio $\frac{b-a}{2}$. Análogamente, todo intervalo real abierto generalizado $(-\infty, a)$ (resp. (a, ∞)) es abierto en $\mathbb{R}$ pues para cada $x \in (-\infty, a)$ (resp. $x \in (a, \infty)$), la bola de centro x y radio $r := |a - x|$ es una bola abierta contenida en el conjunto respectivo.

Lema 3.12. *Sea M un espacio métrico, y sea $\tau := \{A \subseteq M \mid A \text{ es abierto en } M\}$, la colección de todos los subconjuntos abiertos de M. Se tiene que:*

1. *$M, \emptyset \in \tau$.*
2. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, entoncecs $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.*
3. *Sea L es un conjunto de índices. Entonces si $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.*

Demostración. Sean M, τ como en el enunciado. Probemos cada parte.

1. Esto fue probado en el ejemplo 3.8.
2. Sean $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, y sea $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, es decir $a \in A_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Como cada uno de estos conjuntos es abierto, para cada $1 \leq i \leq n$ existe $r_i > 0$ tal que $B(a, r_i) \subseteq A_i$. Consideremos $r := \min\{r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Por tanto, se tiene que $B(a, r) \subseteq B(a, r_i) \subseteq A_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Esto es precisamente que $B(a, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$, es decir, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es efecctivamentev abierto en M.
3. Sean L y cada A_λ como en el enunciado. Sea $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Se sigue que existe algún $\lambda \in L$ tal que A_λ es abierto en M, es decir, que existe un $r_\lambda > 0$ de modo que $B(a, r_\lambda) \subseteq A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Por tanto, el conjunto en cuestión es efectivamente abierto en M. □

Observación. Una intersección arbitraria de conjuntos abiertos no es necesariamente un conjunto abierto: un singleton $\{a\} \subseteq M$ es abierto en M si y solo si a es un punto aislado de M (cf. 1.17, 3.7). Sin embargo, todo singleton es intersección infinita de abiertos, pues podemos escribir $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(a, \frac{1}{n})$ (cf. 1.16). Por tanto, si a no es aislado en M, entonces $\{a\}$ no es abierto en M, pero sí es intersección infinita de abiertos en M.

Lema 3.13. *Sea M un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq M$ es abierto en M si y solo si A es una unión de bolas abiertas.*

Demostración. Sea M un espacio métrico. Probemos ambas implicancias.

$\Longleftarrow$: Si $A \subseteq M$ es una unión de bolas abiertas en M, entonces A es unión de abiertos en M (cf. 3.5), y por tanto un conjunto abierto de M (cf. 3.12(3)).

$\Longrightarrow$: Sea $A \subseteq M$ abierto en M. Por tanto, todos sus puntos son interiores, es decir, para cada $x \in A$, podemos encontrar $r_x > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Entonces, tenemos las inclusiones $\{x\} \subseteq B(x, r_x) \subseteq A$. Tomando unión sobre cada $x \in A$, se tiene que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A,$$

y por tanto $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$, lo que prueba lo enunciado. $\square$

Ejemplo 3.14. Sea $\ell^\infty(M, N) := \{f : M \to N \mid f \text{ es acotada}\}$ (cf. 4.3). El conjunto $D \subseteq \ell^\infty(M, N)$ de las funciones acotadas discontinuas es abierto en $\ell^\infty(M, N)$.

Para esto, probemos que para cada $a \in M$, el conjunto $D_a := \{f \in \ell^\infty(M, N) \mid f \text{ es discontinua en } a\}$ es abierto en $\ell^\infty(M, N)$. Sea $f \in D_a$, es decir, que f es una función acotada, discontinua en a. Por tanto (cf. 2.11) existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, podemos encontrar $x_\delta \in M$ de modo que $d(x_\delta, a) < \delta$ y $d(f(x_\delta), f(a)) \geq 3\varepsilon$.

Debemos probar que $B(f, \varepsilon) \subseteq D_a$. Sea $g \in B(f, \varepsilon)$. Por tanto, $d(f, g) < \varepsilon$. Por desigualdad triangular, para todo $\delta > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} 3\varepsilon &\leq d(f(x_\delta), f(a)) \\ &\leq [d(f(x_\delta), g(x_\delta)) + d(g(x_\delta), f(a)] + d(g(x_\delta), g(a)) \\ &< 2\varepsilon + d(g(x_\delta), g(a)). \end{aligned}$$

Cancelando, se sigue que $\varepsilon < d(g(x_\delta), g(a))$. Esto es precisamente que g es discontinua en a, es decir, que $g \in D_a$. Por tanto, efectivamente $B(f, \varepsilon) \subseteq D_a$, por lo que todos los puntos de D_a son interiores, y por definición es un conjunto abierto. Considerando $D := \bigcup_{a \in M} D_a$, se tiene el resultado enunciado.

3.2. Continuidad y topología

Lema 3.15. *Sean M, N espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es continua si y solo si la preimagen $f^{-1}(A) \subseteq M$ de cualquier abierto $A \subseteq N$ de N, es un abierto de M.*

Demostración. Sean M, N espacios métricos. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Supongamos que $f\colon M \to N$ es una función continua. Sea $A \subseteq N$ un abierto de N. Por definición, que $a \in f^{-1}(a)$ nos dice que $f(a) \in A$. Como A es un conjunto abierto, existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que que $B(f(a), \varepsilon) \subseteq A$.

Como f es continua, dado este radio $\varepsilon > 0$, podemos (cf. 2.1) encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenga $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Por transitividad de la inclusión, tenemos que $f(B(a, \delta)) \subseteq A$, y por tanto que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$.

Esto es precisamente que a es un punto interior de $f^{-1}(A)$. Como a era arbirario, se tiene que $f^{-1}(A)$ es efectivamente abierto en M.

$\Longleftarrow$: Supongamos que dado cualquier abierto $A \subseteq N$ de N, su preimagen $f^{-1}(A) \subseteq M$ es un abierto de M. Probemos que f es continua en cada $a \in M$.

Notamos que dado $a \in M$, una bola $B(f(a), \varepsilon)$ de cualquier radio $\varepsilon > 0$ es un abierto de N. Por tanto, nuestra hipótesis nos dice que $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ es un abierto de M. Por definición, a es un punto interior de $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, por lo que existe $\delta > 0$ de modo que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, y por tanto $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Esto es precisamente que f es continua en a. □

Observación. La imagen $f(A)$ de un abierto de M bajo una función continua $f\colon M \to N$ no es necesariamente un abierto de M: por ejemplo, la función $x \mapsto x^2$ es continua de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El conjunto $A := (-2, 2)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, pero $f(A) = [0, 4)$, que no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3.16. Sean $M_1, \ldots, M_n$ espacios métricos, y sean $A_1, \ldots, A_n$ de modo que cada A_i es un subconjunto abierto de M_i. Se tiene que el conjunto $\prod_{i=1}^n A_i$ es un abierto de $\prod_{i=1}^n M_i$: en efecto, notamos que cada proyección $\pi_i\colon \prod_{i=1}^n M_i \to M_i$ es continua. Como A_i es un abierto de M_i, se tiene que $\pi^{-1}(A_i)$ es un abierto de M. Como $\prod_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \pi_1^{-1}(A_i)$, se tiene lo enunciado (cf. 3.12(2)).

Ejemplo 3.17. Sea M un espacio métrico y sean $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$. El conjunto

$$A := \{x \in M \mid f_i(x) > 0 \text{ para cada } i = 1, \ldots, n\}$$

es abierto en M. Para probar esto, usamos el ejemplo anterior: notamos que la función $f\colon M \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ es continua, y que el conjunto $\prod_{i=1}^n (0, \infty)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, pues es producto de abiertos. Se sigue que el conjunto $A = f^{-1}(\prod_{i=1}^n (0, \infty))$ es un abierto de M.

Ejemplo 3.18. Sean M, N espacios métricos, y sean $f, g\colon M \to N$ funciones continuas. Se tiene que el conjunto $A := \{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\}$ es abierto en M: sea $F(x) := d(f(x), g(x))$. Como esta función es continua, se sigue que

$$\{x \in M \mid \varphi(x) > 0\} = \{x \in M \mid d(f(x), g(x)) \neq 0\} = \{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\} = A.$$

Por el ejemplo anterior, se concluye que A es abierto en M.

Ejemplo 3.19. Podemos probar de otra forma que una bola abierta es un conjunto abierto. Sea M un espacio métrico, y $B(a, r)$ una bola abierta de M para algunos $a \in M, r > 0$. Consideremos la función $M \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto r - d(a, x)$. Esta es continua, y es claro que

$$\{x \in M \mid f(x) > 0\} = \{x \in M \mid d(a, x) < r\} = B(a, r),$$

por lo que el ejemplo 3.17 nos asegura que $B(a, r)$ es un abierto de M. Considerando $g(x) := d(a, x) - r$ podemos probar de forma análoga que $M - B[a, r]$ es un abierto de M.

3.3. Conjuntos cerrados

Definición 3.20. Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Un punto $a \in M$ se dice *adherente* a X si existen puntos de X arbitrariamente cercanos a X, es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x \in X$ de modo que $d(a, x) < \varepsilon$. El conjunto de todos los puntos adherentes a X se llama *clausura* (o *adherencia*) de X, y se denota $\overline{X}$.

Observación.

1. En lenguaje de bolas, $a \in M$ es adherente a X si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. En lenguaje de abiertos, $a \in M$ es adherente a X si para todo abierto A de M que contiene a a se tiene que $A \cap X \neq \emptyset$.
2. Que un $a \in M$ no sea un punto adherente a $X \subseteq M$ es equivalente a que exista una bola abierta centrada en a que no contenga puntos de X, es decir, que contiene únicamente puntos de su complemento $M - X$. Esto es precisamente que $a \in \operatorname{int}(M - X)$.

Ejemplo 3.21. Todo punto de X es adherente a X, pues estos se encuentran a distancia 0 de X. Su frontera ∂X también es adherente a X por definición (cf. 3.1(2)).

Lema 3.22. *Sea M un espacio métrico. Se tiene que (todas las clausuras tomadas respecto a M):*

1. $\overline{M} = M$ *y* $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. *Un conjunto está contenido en su clausura, es decir, que* $X \subseteq \overline{X}$ *para todo* $X \subseteq M$.

3. *Tomar clausura preserva el orden, es decir, si* $X \subseteq Y$ *entonces* $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ *para todos* $X, Y \subseteq M$*.*
4. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ *para todo* $X \subseteq M$*.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado.

1. Todo punto de M está a distancia 0 de M, por lo que $\overline{M} = M$. Que $\overline{\emptyset} = \emptyset$ es cierto por vacuidad.
2. Esto es equivalente a que todo punto de X es adherente a X, lo cual fue probado en el ejemplo anterior.
3. Sea $X \subseteq Y$, y $x \in \overline{X}$. Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x,\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $X \subseteq Y$, se tiene que $B(x,\varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$, es decir, que $x \in \overline{Y}$. Por lo tanto, efectivamente $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.
4. Probemos la doble contención. De (2), tomando clausura a ambos lados de la igualdad, se deduce que $\overline{X} \subseteq \overline{\overline{X}}$.

   Por otro lado, sea $a \in \overline{\overline{X}}$. Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in \overline{X}$ de modo que $d(a,x) < \varepsilon$. Por otro lado, existe $y \in X$ de modo $d(x,y) < \varepsilon$. Por desigualdad triangular, se sigue que

   $$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < 2\varepsilon.$$

   Como ε era arbitrario, se sigue que a está arbitrariamente cerca de X, es decir, que $a \in \overline{X}$. Habiendo probado la doble contención, concluimos que efectivamente $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$. □

Definición 3.23. Sea M un espacio métrico. Decimos que un $F \subseteq M$ es *cerrado* en M si su complemento $M - F$ es abierto en M.

Observación. Si bien "abierto"y "cerrado" son antónimos en español, en este contexto un conjunto abierto no es lo contrario de un conjunto cerrado: por ejemplo $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$, y en cualquier espacio métrico M, el vacío es abierto y cerrado en M al mismo tiempo.

Ejemplo 3.24. Sea M un espacio métrico. Cualquier bola cerrada en M es cerrada, pues en el ejemplo 3.19 probamos que su complemento es abierto.

Ejemplo 3.25. Sea M un espacio métrico. Cualquier singleton $\{x\} \subseteq M$ es cerrado en M, pues $M - \{x\}$ es abierto en M (cf. 3.10).

Ejemplo 3.26. Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. La frontera ∂X de X es un conjunto cerrado de M, pues $M - \partial X = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(M - X)$

La relación entre conjuntos cerrados y clausura está en el siguiente resultado.

Lema 3.27. *Sea* M *un espacio métrico. Un* $F \subseteq M$ *es cerrado en* M *si y solo si es su misma clausura, es decir, que* $\overline{F} = F$*.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Que F sea su misma clausura nos dice que contiene a todos sus puntos adherentes, por lo que todo punto fuera de F no será adherente a F. Por tanto, la última observación nos indica que todo punto en $M-F$ pertenece a $\operatorname{int}(M-F)$, es decir, que $M-F \subseteq \operatorname{int}(M-F)$.

Esto, más el hecho que $\operatorname{int}(M-F) \subseteq M-F$, nos permite concluir que $M-F = \operatorname{int}(M-F)$, esto es, que $M-F$ es abierto, y por tanto que F es cerrado. $\square$

Los siguientes lemas muestran que los conjuntos abiertos y cerrados se comportan de forma muy similar.

Lema 3.28. *Sea M un espacio métrico, y sea $\tau := \{F \subseteq M \mid A \text{ es cerrado en } M\}$, la colección de todos los subconjuntos abiertos de M. Se tiene que:*

1. *$M, \emptyset \in \tau$.*
2. *Si $F_1, \ldots, F_n \in \tau$, entonces $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \tau$.*
3. *Sea L es un conjunto de índices. Entonces si $F_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, entonces $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \tau$.*

Demostración. Basta tomar complementos adecuadamente en 3.12 y usar las leyes de De Morgan. $\square$

Observación. Una unión arbitraria de cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado: sea M un espacio métrico y $X \subset M$ un abierto de M. Se tiene que $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, pero cada $\{x\}$ es cerrado en M (cf. 3.25).

Lema 3.29. *Sean M, N espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es continua si y solo si la preimagen $f^{-1}(F) \subseteq M$ de cualquier cerrado $F \subseteq N$ de N, es un cerrado de M.*

Demostración. Basta tomar complementos adecuadamente en 3.15, usando las leyes de De Morgan. $\square$

Ejemplo 3.30. Esta similitud se extiende a los ejemplos que revisamos para conjuntos abiertos. Las demostraciones son análogas, tomando complementos.

(1) Sean $M_1, \ldots, M_n$ espacios métricos, y sean $F_1, \ldots, F_n$ de modo que cada F_i es un subconjunto cerrado de M_i. Se tiene que el conjunto $\prod_{i=1}^n F_i$ es un cerrado de $\prod_{i=1}^n M_i$.

(2) Sea M un espacio métrico, sea L un conjunto de índices, y sean $\{f_\lambda\}_{\lambda \in L} \subseteq \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$. El conjunto $A := \{x \in M \mid f_\lambda(x) \geq 0 \text{ para todo } \lambda \in L\}$ es cerrado en M.

(3) El conjunto $\mathcal{C}_0(M, N)$ de las funciones continuas y acotadas es cerrado en $\ell^\infty(M, N)$, pues es el complemento de D en 3.14, el cual es abierto.

Ejemplo 3.31. Sea M un espacio métrico, $a \in M$ y $r > 0$. La esfera $S(a, r)$ (cf. 1.12(3)) es cerrada en M: consideremos la función $d_a : M \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto d(a, x)$, y notemos que $S(a, r) = f^{-1}(\{r\})$. Como $\{r\}$ es cerrado en M (cf. 3.25), se tiene que $S(a, r)$ es preimagen de cerrado y por tanto cerrado.

Lema 3.32. *Sea M un espacio métrico completo. Un subespacio $F \subseteq M$ es cerrado si y solo si es completo.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado y probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Supongamos que $F \subseteq M$ es cerrado. Sea $(x_n)_{n \in N}$ una sucesión Cauchy en F. Como F es cerrado, entonces $a := \lim_{n\to\infty} x_n \in F$, lo que prueba que F es completo.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $F \subseteq M$ es completo y consideremos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en F convergente a $a \in M$. Por 5.4, esta sucesión también es Cauchy en M, por lo que es Cauchy en F, por lo que es convergente en F, lo que prueba que F es cerrado.

$\square$

Definición 3.33. Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Decimos que un $a \in M$ es un punto de *acumulación* de X si toda bola centrada en a tiene puntos de X, distintos de a. El conjunto de todos los puntos de acumulación de X se llama conjunto *derivado* de X, y se denota X'.

Observación.

1. Los puntos de acumulación de un subconjunto pertenecen al espacio métrico ambiente, por lo que no necesariamente están en el subconjunto.
2. Equivalentemente, el que $a \in M$ sea un punto de acumulación de X es precisamente que a es un punto límite de $X - \{a\}$. Es decir, $a \in X'$ si y solo si $a \in \overline{X - \{a\}}$.

Lema 3.34. *Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Un $a \in M$ es un punto de acumulación de X si y solo toda bola abierta centrada en a contiene infinitos puntos de X.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Sea a un punto límite de X. Sea $r > 0$ arbitrario. Para probar que $B(a, r)$ contiene infinitos puntos de X, procedemos de forma iterativa: como a es punto límite de X, existe un $x_1 \in B(a, r) \cap X$ distinto de a. Sea $r_1 := d(a, x_1)$. Como $r_1 < r$, se tiene que $B(a, r_1) \subseteq B(a, r)$.

Ahora, notemos que también existe $x_2 \in B(a, r_1) \cap X$ distinto de a, que por construcción también es distinto a x_1. Podemos seguir de forma indefinida con este proceso, en el que en cada paso generamos un elemento de X en la bola $B(a, r)$.

$\Longleftarrow$: Si toda bola abierta centrada en a contiene infinitos puntos de X, entonces evidentemente alguno será distinto de a, lo que hace a a un punto límite de X. $\square$

Ejemplo 3.35. Consideremos $\mathbb{R}$ como espacio métrico.

(1) El que $\mathbb{Q}$ sea denso en $\mathbb{R}$ nos dice precisamente que $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

(2) $\mathbb{Z}' = \emptyset$, pues dado $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, la bola de centro x y radio $r := \text{mín}\{|x - \lfloor x \rfloor|, |x - \lceil x \rceil|\}$ no contiene números enteros; y si $x \in \mathbb{Z}$, la bola $B(x, 1)$ no contiene enteros distintos a x.

(3) $[0, 1]' = [0, 1]$: si $x \in [0, 1]$ es claro que cualquier bola centrada en x contiene infinitos puntos distintos de x. Por otro lado, si $x \in \mathbb{R} - [0, 1]$, basta tomar la bola de centro x y radio $r := \text{mín}\{|x - 1|, |x|\}$, que no contiene puntos de $[0, 1]$.

(4) $A := \{\frac{1}{n}\}'_{n \in \mathbb{N}} = \{0\}$: el que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \to 0$ nos dice precisamente que toda bola abierta centrada en 0 contiene infinitos puntos de la forma $\frac{1}{n}$. Por otro lado, si $x \in R - \{0\}$, entonces $x \in (\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m})$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

(5) De forma análoga $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{e\}$, la constante de Euler.

4. Límites y sucesiones

Definición 4.1. Una *sucesión* en un conjunto $M \neq \emptyset$ es una función $x\colon \mathbb{N} \to M$. El n-ésimo término de esta sucesión se denota como x_n. Para representar una sucesión se utiliza la notación $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Una *subsucesión* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una restricción de x a un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, vale decir, si $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, la subsucesión correspondiente es $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo 4.2. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n := 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Una subuscesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, donde resulta que $x_{2n} = 4^n$.

Definición 4.3. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M es *acotada* cuando el conjunto de sus términos es acotada en M, es decir, que existe una bola $B(x, c)$ tal que $x_m \in B(x, c)$ para todo x_m.

Ejemplo 4.4. Las sucesiones que toman una cantidad finita de valores (como las constantes) son acotadas: consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (M, d) que toma finitos valores, y sea $r := \max_{m,n\in\mathbb{N}}\{d(x_n, x_m)\}$. Es claro que $d(x_n, x_m) \leq r$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

Definición 4.5. Sea M un espacio métrico, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M. Decimos que el *límite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a a si para todo $\varepsilon > 0$ arbitrario, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, se tenga que $d(x_n, a) < \varepsilon$. En tal caso, denotamos $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n := a$.

Observación.

1. Si el límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe y es igual a a también decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende* a a, o que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a a. También se escribe $x_n \to a$. Si el límite en cuestión no existe, decimos que la sucesión *diverge.*
2. En lenguaje de bolas, la definición 4.5 es equivalente a que para todo radio $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, \varepsilon)$ para todo $n > N$.
3. Que una sucesión sea divergente es, por definición, que para todo $a \in M$, existe algún $\varepsilon > 0$, tal que sin importar cuál sea $N \in \mathbb{N}$, se tiene que existe algún $n > N$ tal que $d(x_n, a) \geq \varepsilon$. En lenguaje de bolas, es que existe algún radio $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $n > N$ de modo que $x_n \notin B(a, \varepsilon)$.

Ejemplo 4.6. Sea M un espacio métrico, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión constante en M, es decir, tal que $x_n = a \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión converge a a: en efecto, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar cualquier $N \in \mathbb{N}$, pues como $x_n = a$ siempre, en particular cuando $n > N$ se tendrá que $d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \varepsilon$.

Ejemplo 4.7. En todo espacio métrico M con al menos dos elementos existen sucesiones divergentes. Sean $a, b \in M$ y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_n := \begin{cases} a & \text{si } n \text{ par}, \\ b & \text{si } n \text{ impar}, \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x_n \to L \in M$. Consideremos $\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2}$. Es claro que ninguna bola de radio ε contiene a a y b al mismo tiempo, por lo que dado cualquier $N \in \mathbb{N}$ va a existir un $n > N$ de modo que $x_n \notin B(L, \varepsilon)$.

Ejemplo 4.8. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x_n := \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ converge a 0: en efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N > \frac{1}{\varepsilon}$. De acá, se sigue que

$$n > N \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Lema 4.9. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico M es convergente, entonces es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a \in M$. Para $\varepsilon = 1$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $x_n \in B(a, 1)$. Por lo tanto, los términos de la sucesión están contenidos en el conjunto $\{x_1, \ldots, x_N\} \cup B(a, 1)$. Como ambos conjuntos son acotados, se sigue que su unión también es acotada. □

Observación. El contrarrecíproco de 4.9 nos dice que si una sucesión no es acotada, entonces es divergente. Por ejemplo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n := n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ no es acotada, y por tanto es divergente.

Lema 4.10. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico M es convergente, entonces su límite es único.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a \in M$ y que $x_n \to b \in M$. Esto es, por definición, que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1$ entonces $d(x_n, a) < \varepsilon$, y si $n > N_2$ entonces $d(x_n, b) < \varepsilon$. Consideremos $N > \max\{N_1, N_2\}$. Por tanto, si $n > N$, se sigue, por desigualdad triangular, que $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon$. Como ε era arbitrario, se tiene que $d(a, b) = 0$, y por tanto $a = b$. □

Lema 4.11. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico M es convergente, entonces todas sus subsucesiones convergen al límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, y supongamos que $x_n \to a \in M$. Por definición, esto es que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $d(x_n, a) < \varepsilon$. Por otro lado, también existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$, pues $n_1 < n_2 < \ldots$ Por tanto, se sigue que si $k > K$, entonces $n_k > N$, y por tanto $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Esto es, $x_{n_k} \to a$. □

Observación. El contrarrecíproco de 4.11 nos dice que si una sucesión tiene al menos un par de subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces esta diverge. Por ejemplo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x_n := (-1)^n$ tiene las subsucesiones $(x_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ (que es constantamente 1) y $(x_{(2j-1)})_{j\in\mathbb{N}}$ (que es constantemente -1). Estas convergen a 1 y a -1 respectivamente, y como $1 \neq -1$, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

4.1. Sucesiones reales

Definición 4.12. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ se dice *creciente* (resp. *decreciente*) cuando $x_n < x_{n+1}$ (resp. $x_n > x_{n+1}$) para todo $n \in \mathbb{N}$. Si se cumple la desigualdad no-estricta $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$), decimos que la sucesión es *no-decreciente* (resp. *no-creciente*). En cualquier caso, la sucesión se dice *monótona*.

Observación. También, para la monotonicidad no-estricta se suelen usar los términos creciente o decreciente, y para la monotonicidad estricta los términos *estrictamente* creciente o decreciente. También, se puede utilizar la palabra *monotónica* en vez de monótona.

Lema 4.13. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ monótona y acotada, entonces es convergente, y de hecho converge al supremo del conjunto de los términos de la sucesión.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, pero sin perder generalidad supongamos que es no-decreciente. Como el conjunto de los valores de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no-vacío y acotado, se sigue que tiene supremo. Sea $a := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$. Probemos que $x_n \to a$. Sea $\varepsilon > 0$. Notemos que $a - \varepsilon$ no es el supremo de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, por lo que existen elementos de la sucesión entre $a - \varepsilon$ y a. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_N \leq a$. Por tanto, si $n > N$, se tiene que

$$a - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq a < a + \varepsilon \iff a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \iff |x_n - a| < \varepsilon,$$

es decir, efectivamente $x_n \to a$. □

Lema 4.14. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ monótona es convergente si y solo si tiene alguna subsucesión acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, pero sin perder generalidad supongamos que es no-decreciente. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. El resultado es directo, pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de sí misma, y en tanto es convergente, el lema 4.9 implica que es acotada.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión acotada, digamos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \leq c \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Probemos que esta cota también funciona para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notemos que como para cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < n_k$, se tendrá que $x_n \leq x_{n_k} \leq c$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no-decreciente, se tiene que $x_1 \leq x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión es efectivamente acotada. $\square$

4.2. Series

Definición 4.15. Sea E un espacio vectorial normado, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos su *n-ésima suma parcial* como $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si S_n converge a $S \in E$, diremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es una *serie convergente*. De lo contrario, decimos que la serie es *divergente*.

Lema 4.16. *Si una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente nula.*

Demostración. Supongamos que la serie converge a a. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= a - a = 0.\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 4.17. El que una sucesión sea eventualmente nula no implica que su serie sea convergente. Por ejemplo consideremos $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $h_n := \frac{1}{n}$. Ya sabemos que $h_n \to 0$, pero la sucesión de sumas parciales, llamada *serie harmónica*, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión no-acotada, por lo que no puede ser convergente:

$$\begin{aligned}H_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} \\ &= 1 + \frac{n}{2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.18. La *serie geométrica*, dada por $G := \sum_{i=0}^{\infty} a^i$, donde a es complejo, converge si y solo si $|a| < 1$. En efecto, si a está en el disco unitario, entonces la suma parcial es tal que

$$\begin{aligned} G_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n &\implies G_n = 1 + a(1 + a + \cdots + a^{n-1}) \\ &\implies G_n = 1 + aG_{n-1} + aa^n - aa^n \\ &\implies G_n = 1 + aG_n - a^{n+1} \\ &\implies G_n = \tfrac{1-a^{n+1}}{1-a}. \end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$, obtenemos que $G = \frac{1}{1-a}$. Por otro lado, si $|a| \geq 0$, entonces $a^n \to \infty$ en cada suma parcial, por lo que la serie efectivamente diverge.

Ejemplo 4.19. Una serie de reales no-negativos converge si y solo si la sucesión de sus términos tiene alguna subsucesión acotada. Esto viene del hecho de que en este caso la succesión de sumas parciales es una sucesión no-decreciente, por lo que el tener una subsucesión acotada es equivalente a ser convergente (cf. lema 4.14)

Ejemplo 4.20. Una serie $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$, donde cada $v_i \in \mathbb{R}^k$ es convergente si y solo si la serie de cada coordenada es covergente.

4.3. Convergencia y topología

Lema 4.21. *Sean M, N espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es continua en $a \in M$ si y solo si preserva límites secuenciales, es decir, que si $x_n \to a$, entonces $f(x_n) \to f(a)$.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado.

$\implies$: Si f es continua en a, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ menor a δ. Por tanto, para todo $n > N$ se tendrá que $d(x_n, a) < N < \delta$, y por tanto $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, es decir, efectivamente $f(x_n) \to f(a)$.

$\impliedby$: Supongamos que $f(x_n) \to f(a)$ para cualquier sucesión que converja a a. Buscando una contradicción, supongamos que f no es continua en a. Por tanto, existe al menos un $\varepsilon > 0$ de modo que para cualquier distancia $\delta > 0$, en particular para cada $\delta_n := \frac{1}{n}$, existe $x_n \in M$ tal que $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, pero $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Es decir, hemos encontrado una secuencia que converge a a, pero la sucesión de imágenes no converge a $f(a)$, lo que contradice nuestra hipótesis. □

Ejemplo 4.22. Una función es continua si y solo si la sucesión de imágenes de una sucesión convergente, es en sí una sucesión convergente. En este caso, el límite de las imágenes es la imagen del límite.

Lema 4.23. *Sean M un espacio métrico, $a \in M$ y $X \subseteq M$. Se tiene que $a \in \overline{X}$ si y solo si a es el límite de alguna sucesión en X.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado.

$\Longrightarrow$: Si $a \in \overline{X}$, entonces para cualquier distancia $r > 0$, se tiene que $B(a, r)$ tiene puntos de X. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos algún $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es formada únicamente por elementos de X, y por construcción converge a a.

$\Longleftarrow$: Si $x_n \to a$ es una sucesión en X, por convergencia se tiene que toda bola abierta centrada en a contiene puntos de la sucesión, es decir, que $a \in \overline{X}$.

□

Ejemplo 4.24. Notemos que $\partial X = \overline{X} \cap \overline{M - X}$, por lo que los puntos en la frontera de X son precisamente los puntos que son límites de sucesiones en X y $M - X$ al mismo tiempo.

Ejemplo 4.25. Un subconjunto $X \subseteq M$ es denso en M si y solo si $\overline{X} = M$, es decir, si M es el conjunto de todos los límites de sucesiones en X.

Ejemplo 4.26. Un conjunto F es cerrado en M si y solo si $\overline{F} = F$, es decir, que el mismo F es el conjunto de todos los límites de sucesiones en F.

4.4. Sucesiones de funciones

Definición 4.27. Sea X un conjunto y M un espacio métrico. Denotamos $\mathcal{F}(X, M) := \{f : X \to M\}$ al conjunto de todas las funciones $X \to M$. Una *sucesión de funciones* de X en M es una sucesión en $\mathcal{F}(X, M)$. Tenemos dos formas de hablar de convergrencia de sucesiones de funciones.

1. Una sucesión $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(X, M)$ *converge puntualmente* si para todo $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en M en el sentido usual (cf. 4.5).
2. Una sucesión $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(X, M)$ *converge uniformemente* a $f \in \mathcal{F}(X, M)$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ de modo que en cada $x \in X$ se tenga que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Observación.

1. La diferencia entre convergencia puntual y uniforme puede no ser evidente pues en ambos casos las sucesiones efectivamente se van acercando a su límite. Esta reside en que en el caso puntual, cada una de las sucesiones de $f_n(x)$ debe converger a f por separado, posiblemente a distinto ritmo, pues el N depende tanto de ε como de x. En el caso uniforme, todas las funciones convergen a f más menos al mismo ritmo, pues N depende solo de ε.

   En otras palabras, el que una sucesión de funciones esté a ε de distancia de f puntualmente nos indica que *eventualmente* cada término de la sucesión está a ε de distancia de f, mientras que el estar a ε de distancia de f

uniformemente nos dice que eventualmente todos los términos están a distancia ε de f al mismo tiempo.

2. Si una sucesión de funciones converge uniformemente, entonces converge puntualmente: sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a f. Por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que en cada $x \in X$ se tenga que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $n > N$. Ahora, sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Es claro que para todo $n > N_\varepsilon$ se tiene que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, que es la convergencia puntual.

   Si una función converge puntualmente, no es necesario que converja uniformemente (cf. el primer ejemplo abajo). Sin embargo, el teorema de Dini (cf.) nos entrega condiciones para que esto sí ocurra. Esto es relevante pues resulta que ocurre en situaciones más bien exigentes.

3. La afirmación contrarecíproca del punto anterior nos indica que si una sucesión de funciones no converge puntualmente entonces no puede converger uniformemente.

Ejemplo 4.28. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := \frac{x}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ converge puntualmente: fijando $x \in \mathbb{R}$, se sigue que $f_n(x) = x\frac{1}{n}$ es producto de algo acotado (pues x está fijo) con algo convergente a 0, por lo que converge a 0. Esto es precisamente que la sucesión converge puntualmente a la función 0.

Sin embargo, no converge uniformemente: para $\varepsilon = 1$ y $N \in \mathbb{N}$ cualquiera, podemos elegir cualquier natural $n > N$ y luego cualquier real $x > n$ y tendremos que $|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{n}\right| \geq 1$. Es decir, al menos una de las funciones de la sucesión no alcanza a estar a distancia menor a 1 de 0 a tiempo N arbitrario, que es precisamente que no converge uniformemente.

Lema 4.29. *Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(X, M)$ converge uniformemente a f si y solo si $f \in \mathcal{B}_f(X, M)$.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Se tiene que dado $\varepsilon > 0$, eventualmente, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(f_n, f) < \varepsilon &\iff d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \\ &\iff f \in \mathcal{B}_f(X, M). \end{aligned}$$ □

Lema 4.30. *El límite uniforme de funciones continuas en un punto a es continuo en a: sean M, N espacios métricos, y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en a. Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es continua en a.*

Demostración. Sea F el conjunto de funciones $M \to N$ a distancia finita de f, el que es cerrado en $\mathcal{B}_f(X, M)$. Eventualmente se tendrá que $f_n \in F$ y por tanto $f \in F$, es decir, que f es continua en a. □

5. Espacios métricos completos

5.1. Sucesiones Cauchy

Definición 5.1. Sea M un espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M es *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todos $m, n > N$.

Observación.

1. La definición 5.1 dice que la distancia entre los términos de una sucesión Cauchy se va haciendo cada vez más pequeña. Esto contrasta con la definición de sucesión convergente (cf. 4.5), en la que es la distancia entre términos de la sucesión y un punto la que se va haciendo cada vez más pequeña.
2. Toda subsucesión de una sucesión Cauchy, también es Cauchy: basta notar que dado $\varepsilon > 0$, los terminos en posiciones mayores a algún $N \in \mathbb{N}$ siguen estando a distancia menor que ε, independientemente si forman parte o no de alguna subsucesión.
3. Que una sucesión sea Cauchy es una propiedad intrínseca de la sucesión, en el sentido de que ser Cauchy depende de los términos de la sucesión y la distancia entre ellos, pero no del espacio métrico ambiente. Es decir, una sucesión es Cauchy en un espacio métrico M si y solo si lo es en cualquier subespacio métrico de M.

Ejemplo 5.2. Las sucesiones Cauchy de un espacio métrico finito son prescisamente las que son eventualmente constantes: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy en un espacio métrico finito $M := \{m_1, \ldots, m_r\}$, entonces para $\varepsilon := \text{mín}_{1\leq i,j,\leq r}\{d(x_i, x_j) \neq 0\}$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j > N$, entonces $d(x_i, x_j) < \varepsilon$, por lo que $d(x_i, x_j) = 0$ y por tanto $x_i = x_j$.

Ejemplo 5.3. De forma similar, en un espacio métrico con la métrica cero-uno las sucesiones Cauchy también son las eventualmente constantes: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, entonces para $0 < \varepsilon < 1$ se tiene que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_i, x_j) < \varepsilon$. Esto fuerza que $d(x_i, x_j) = 0$, y por tanto $x_i = x_j$.

Una pregunta natural es cómo se relacionan los conceptos de sucesiones convergentes y sucesiones Cauchy. Intuitivamente, como en el caso de una sucesión convergente los puntos de una sucesión se van acercando cada vez más al límite, se tiene que estos puntos también tiene que estar acercándose entre sí.

Lema 5.4. *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en un espacio métrico M es Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > N$.

Por tanto, para todos $m, n > N$, por la desigualdad triangular de M se tiene que $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, la sucesión es efectivamente Cauchy. $\square$

Observación.

1. El contrarrecíproco del lema 5.4 nos dice que si una sucesión no es Cauchy, entonces no es convergente.
2. Es importante notar que una sucesión sea Cauchy no implica que sea convergente: consideremos $\mathbb{Q}$ como subespacio métrico de $\mathbb{R}$, sea $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, y consideremos una sucesión en $\mathbb{R}$ de números racionales que converge a a (e.g. la expansión decimal de a).

   Notemos que esta sucesión converge en $\mathbb{R}$, por lo que el lema 5.4 nos dice que es Cauchy en $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{Q}$ es subespacio métrico de $\mathbb{R}$, entonces la sucesión es Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $a \notin \mathbb{Q}$, es decir, la sucesión no es convergente en $\mathbb{Q}$.

Lema 5.5. *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy en un espacio métrico M es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Como es Cauchy, dado $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$ para todos $n, m > N$, es decir, que el conjunto $\{x_n \mid n > N\}$ está contenido en una bola B de diámetro 1. Se sigue el conjunto de los términos de la sucesión está contenido en $\{x_1, \ldots, x_N\} \cup B$. Como cada conjunto es finito, su unión también lo es. $\square$

Observación. El contrarrecíproco de 5.5 nos dice que si una sucesión no es acotada, entonces no es Cauchy (y por tanto no es convergente). También, es importante notar que una sucesión sea acotada no implica que sea Cauchy: consideremos la sucesión $(2, 0, 2, 0, \ldots)$ en $\mathbb{R}$. Esta sucesión es claramente acotada (e.g. por 2), pero no es Cauchy, pues la distancia entre términos es siempre 0 o 2, en vez de arbitrariamente pequeña.

Lema 5.6. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy en un espacio métrico M tiene alguna subsucesión convergente, entonces es convergente, y el límite es el mismo que el de la subsucesión.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, y sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $a \in M$. Probemos que igualmente $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todos $m, n > N_1$. Por otro lado, como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n_k > N_2$. Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$. Por tanto, por la desigualdad triangular de M, se tiene que

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{x_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todos $x_n, x_{n_k} > N$ Esto es por definición que $x_n \to a$. $\square$

Observación. El contrarrecíproco de 5.6 dice que si una sucesión Cauchy no es convergente, entonces todas sus subsucesiones divergen. También, si una sucesión posee dos subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces esta no puede ser Cauchy.

Lema 5.7. *Sean M, N espacios métricos. Si $f\colon M \to N$ es uniformemente continua, entonces mapea sucesiones Cauchy en M a sucesiones Cauchy en N.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en M, y consideremos la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en N. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme existe $\delta > 0$ de modo que si $d(x,y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por la propiedad de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que si $m, n > N$, entonces $d(x_m, x_n) < \delta$. Por tanto, $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión de imágenes es Cauchy en N. $\square$

Observación.

1. El que la continuidad sea uniforme es necesario: una función que es solo solo continua, como

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x}, \end{aligned}$$

   mapea la sucesión Cauchy $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ a la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, que no es Cauchy en $\mathbb{R}$.

2. El que una función mapee sucesiones Cauchy a sucesiones Cauchy no es un criterio para chequear continuidad uniforme: la función real $x \mapsto x^2$ no es uniformemente continua, pero si una sucesión es Cauchy es en particular acotada por $c \in \mathbb{R}$, por lo que la función restringida a $[-c, c]$ es lipschitziana y por tanto la sucesión de imágenes continua.

5.2. Espacios métricos completos

Definición 5.8. Decimos que un espacio métrico M es *completo* si toda sucesión Cauchy en M es convergente.

Ejemplo 5.9. $\mathbb{Q}$ no es un espacio métrico completo.

Ejemplo 5.10. Los espacios con la métrica cero-uno son completos: cualquier sucesión Cauchy acá es eventualmente constante (cf. 5.2), y las sucesiones (eventualmente) constantes son convergentes (cf. 4.6).

El siguiente resultado es crucial para el análisis y cálculo real.

Teorema 5.11. *Los números reales $\mathbb{R}$ son un espacio métrico completo con la métrica usual.*

Demostración. Debemos probar que $\mathbb{R}$ cumple con la definición 5.8. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $X_n := \{x_i \mid i \geq n\} = \{x_i, x_{i+1}, \ldots\}$. Notemos que si $i > j$, entonces $X_j \supseteq X_i$, es decir, $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$

Como X_1 tiene a todos los términos de la sucesión, y esta es Cauchy, se sigue que X_1 es acotado por algún $b \in \mathbb{R}$ (cf. 5.5), y como X_1 contiene a X_n para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que estos también son acotados. En tanto también son no vacíos, tienen ínfimo. Sea $a_n := \inf X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si consideramos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como esta es monótona ($a_1 \leq a_2 \leq \cdots$) y acotada por b, entonces converge al supremo del conjunto de los términos de la sucesión (cf. 4.13), digamos a $a := \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probemos que $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para $n, m > N$. Como a es supremo de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $a - \varepsilon$ no es cota superior de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_k < a$. En particular, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, podemos contrar $k > N$ es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_k < a$.

Por otro lado, a_k es ínfimo de X_k, por lo que $a_k + \varepsilon$ no es cota inferior de X_k, es decir, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_k < x_j < a_k + \varepsilon$. En particular, $x_j \in X_k$, por lo que existe $j > k$ tal que $a_k < x_j < a_k + \varepsilon$. Por tanto, se tiene la cadena de desigualdades

$$a - \varepsilon < a_k < x_j < a_k + \varepsilon < a + \varepsilon,$$

para $j, k > N$. Es decir, para $n > N$ se tiene que $|x_n - a| < \varepsilon$, por lo que efectivamente $x_n \to a$. Por tanto, $\mathbb{R}$ es completo. □

Lema 5.12. *Si M, N son espacios métricos completos, entonces $M \times N$ es completo. Inductivamente, si $M_1, \ldots, M_n$ son espacios métricos completos, entonces $\prod_{i=1}^n M_i$ es completo.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $M \times N$ dada por

$$z_n := (a_n, b_n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como las proyecciones $\pi_1 \colon M \times N \to M$ y $\pi_2 \colon M \times N \to N$ son uniformemente continuas, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son Cauchy en M y N respectivamente, por lo que son convergentes en M y N respectivamente, debido a la completitud, digamos a a y b respectivamente. Se sigue que $z_n \to (a, b) \in M \times N$, de lo que la sucesión es Cauchy, y por tanto el espacio $M \times N$ es completo. ‘ □

Observación. El recíproco de este resultado también es cierto, pero para probarlo se necesitan herramientas que si bien no son complicadas, no hemos revisado (y no sé si se piensan revisar).

Ejemplo 5.13. Como ya probamos que $\mathbb{R}$ es completo, es directo que $\mathbb{R}^n$ es completo para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Podemos generalizar este resultado para productos numerables.

Lema 5.14. *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de espacios métricos completos, entonces $\prod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ es completo.*

Demostración. La idea es análoga al resultado anterior, pero la notación complica algo las cosas. Adoptemos la notación del enunciado. Sea $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $\prod_{n\in\mathbb{N}} M_i$. Cada proyección $\pi_i\colon \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \to M_i$ es uniformemente continua, por lo que mapea sucesiones Cauchy a sucesiones Cauchy. En particular cada $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en M_i, por lo que es convergente en M_i, digamos a a_i. Se sigue que $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}}) \to (a_1, a_2, \ldots)$, lo que prueba que el producto numerable es efectivamente completo. $\square$

Observación. Igualmente, el recíproco de este resultado es cierto, pero no lo probamos.

Ejemplo 5.15. El espacio de funciones reales acotadas $\mathcal{B}(X)$ es completo respecto a la métrica inducida por la norma-infinito $\|\cdot\|_\infty$ (cf. 1.9(1)). En efecto, consideremos una sucesión Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}(X)$. Por definición esto es que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ para todos $m, n > N$. Esto nos dice que como

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon,$$

para todo $x \in X$, entonces la sucesión $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$, y por tanto convergente en $\mathbb{R}$, digamos a $f(x)$, para cada $x \in X$. Este es nuestro candidato a límite. Primero, corresponde chequear que es acotada: en efecto, toda sucesión Cauchy es acotada, por lo que existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que $\|f_n\|_\infty \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como

$$|f_n(x)| \leq \|f_n(x)\|_\infty \leq M,$$

se sigue, tomando $n \to \infty$, que $|f(x)| \leq M$, es decir, que f es efectivamente acotada. Resta probar que nuestra sucesión original converge a f. Esto es directo, pues para $n > N$ se tiene que

$$\|f_n - f\|_\infty = \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

lo que prueba que $f_n \to f \in \mathcal{B}(X)$, lo que es precisamente que $\mathcal{B}(X)$ es completo.

Ejemplo 5.16. El espacio de las funciones reales continuas desde un intervalo cerrado $\mathcal{C}([0,1])$ es completo respecto a la métrica inducida por la norma-infinito $\|\cdot\|_\infty$ (cf. 1.9(2)(a)). Consideremos una sucesión Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}([0,1])$. Nuestro candidato a límite f lo construimos de igual modo que en el ejemplo anterior. Del mismo modo probamos que $f_n \to f$. Resta probar que $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in [0,1]$ arbitrario. Por la continuidad de cada f_n, existe $\delta_n > 0$ de modo que para $n > N$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,$$

siempre que $|x-y| < \delta_n$. Tomando $n \to \infty$, se tiene que efectivamente f es continua. En resumen f_n converge a $f_n \in \mathcal{C}([0,1])$, lo que es precisamente que $\mathcal{C}([0,1])$ es completo.

Ejemplo 5.17. El espacio de las sucesiones reales 2-sumables ℓ^2 es completo respecto a la métrica inducida por la norma-2 (cf. 1.9(3)). Sea $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en ℓ^2. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_2 < \varepsilon$ si $i, j > N$. Como $\|\cdot\|_p$ es decreciente en p, se sigue que

$$\|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \leq \|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_2 < \varepsilon,$$

de lo que la sucesión $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo, y por tanto convergente, digamos que a $a_i \in \mathbb{R}$. Proponemos que nuestra sucesión original converge a $a := (a_1, a_2, \ldots)$. Primero, corresponde chequear que $a \in \ell^2$, es decir, que es 2-sumable. En efecto, como la sucesión original es Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{k} |x_{in} - x_{jn}|^2} < \|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_2 < \varepsilon$$

si $i, j > N$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Elevando al cuadrado, obtenemos que $\sum_{n=1}^{k} |x_{im} - x_{jn}|^2 < \varepsilon^2$, y tomando $i \to \infty$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{k} |a_n - x_{jn}|^2 < \varepsilon^2 \tag{1}$$

Por la desigualdad triangular notamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} |a_n|^2 &= \sum_{n=1}^{k} |a_n - x_{jn} + x_{jn}|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{k} |a_n - x_{jn}|^2 + \sum_{n=1}^{k} |x_{jn}|^2 \\
&< \varepsilon^2 + M,
\end{aligned}$$

para algún $M \in \mathbb{R}$. Tomando $k \to \infty$, esto prueba que $a \in \ell^2$. Ahora, tomando $k \to \infty$ en la ecuación 1, obtenemos que $(x_{mn})_{n\in\mathbb{N}} \to a$, lo que prueba que la sucesión original es Cauchy, y por tanto ℓ^2 es completo.

5.3. Teorema de las categorías de Baire

Este teorema nos dará información topológica de un espacio métrico (sobre densidad de sus subespacios), a partir de información métrica—la completitud. Más aun, en palabras de Haworth y McCoy en [HawMc77], la completitud de un espacio métrico suele ser útil en tanto permite usar este teorema. Por ejemplo, sirve para probar el teorema del grafo cerrado, el del mapeo abierto, y el de cotas uniformes. También, para probar que existe una función real continua no-diferenciable.

La idea es buscar una noción global, en cierto sentido, de densidad/no-densidad. Consideremos un espacio métrico M, y recordemos que un subconjunto $A \subseteq M$ es no-denso en M si y solo si existe un abierto $U \subseteq M$ disjunto de A. Sin embargo, A puede ser denso en algún subespacio de M. Por ejemplo, consideremos el conjunto $A := (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Es claro que A no es denso en $\mathbb{R}$, pues $(-1, 1)$ es un abierto de $\mathbb{R}$ disjunto a A. Pero A sí es denso en $\mathbb{R} - (-1, 1)$.

Por tanto, podemos buscar una condición más fuerte de "no-densidad". Pedir de frente que un conjunto sea disjunto de todo abierto es ridículo, porque el único conjunto que cumple esto es $\emptyset$. Sin embargo, pedir no-densidad en cada abierto de M no es nada descabellado.

Definición 5.18. Sea M un espacio métrico.

1. Sea M un espacio métrico. Un $X \subseteq M$ se dice *denso en abiertos* de M si existe algún abierto $U \subseteq M$ de modo que $\overline{X \cap U} = \overline{U}$, es decir, X es denso en U. Si X no es denso en abiertos, decimos que X *no es denso en ninguna parte* de M.
2. Un $X \subseteq M$ se dice *magro* (lit. "delgado") en M si es la unión de conjuntos densos en ninguna parte de M.

Observación. Sea M un espacio métrico, y $X \subseteq M$.

1. X no es denso en ninguna parte de M si y solo no contiene abiertos (aparte de $\emptyset$), es decir, si su interior es vacío. Es más directo verificar que X es denso en abiertos si y solo si contiene algún abierto: si X contiene un abierto U, entonces $X \cap U = U$, y tomando clausura el resultado es claro. Por otro lado, si existe algún abierto U de modo que $\overline{X \cap U} = \overline{U}$, entonces $X \cap U$ es un abierto contenido en X.
2. La segunda definición es equivalente a la siguiente: X es magro en M si
$$X^C = M - X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (M - X_n),$$
donde $\operatorname{int}(M - X_n)$ es denso en M.
3. No basta solo pedir que X tenga interior vacío, pues por ejemplo $\mathbb{Q}, (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ tienen interior vacío pero $\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.
4. También, el que X se escriba como unión de conjuntos nunca denso no lo hace nunca denso: consideremos los racionales numerados $\mathbb{Q} = \{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Se tiene que cada $\{r_j\}$ no es denso en ningúna parte de $\mathbb{Q}$, pero $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{r_j\} = \mathbb{Q}$, y $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (es decir, $\mathbb{Q}$ sí se escribe como unión de conjuntos densos en ninguna parte de $\mathbb{R}$, pero no es denso en ninguna parte de sí porque su clausura es $\mathbb{R}$, que es denso en $\mathbb{R}$).

Lema 5.19. *Sea M un espacio métrico.*

1. *X es magro en M si y solo si $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donde cada F_n es no denso en ninguna parte de M.*
2. *Si X es magro en M, entonces cualquier $Y \subseteq X$ es magro en M.*
3. *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos magros en M entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es magro en M.*
4. *Un conjunto numerable X es magro en M si y solo si ninguno de sus puntos es aislado en magro.*

Demostración.

1. Probemos ambas implicancias.

   $\Longrightarrow$: Obvio, pues si X es magro en M, entonces es igual a una unión de conjuntos no densos en ninguna parte de M, por lo que en particular es subconjunto de una unión de conjuntos no densos en ninguna parte de M.

   $\Longleftarrow$:

2. Si X es magro en M, entonces es unión de conjuntos no denso en ninguna parte de M, por lo que cualquier $Y \subseteq X$ está contenido en una unión de conjuntos no densos en ninguna parte de M, y por el inciso anterior, se tiene que debe ser en sí magro en M.
3. Como cada X_n es magro en M, para cada $n \in M$ podemos escribir $X_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Y_{n_m}$, donde cada Y_{n_m} es no denso en ninguna parte de M. Por tanto,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Y_{n_m} \right) = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} Y_{n_m},$$

   y como cada Y_{n_m} no denso en ninguna parte de M, se sigue que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ debe ser magro en M.
4. Sea X numerable. Recordemos que un singleton $\{x\} \subseteq M$ tiene interior vacío en M si y solo si el punto x no es aislado en M. Sea $X := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$.

   Por tanto, se tiene que X es magro en M si y solo si cada $\{x_n\}$ no denso en ninguna parte de en M si y solo si cada x_n no es aislado en M. □

Ejemplo 5.20. Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto no denso en ninguna parte de $\mathbb{R}^2$. Es claro que tal recta es cerrada en $\mathbb{R}^2$, por lo que es igual a su clausura. Para ver que tiene interior vacío basta notar que cualquier bola abierta centrada en algún punto de la recta no puede quedar completamente contenida en ella.

Ejemplo 5.21. Sea $A \subseteq M$ un abierto. Su frontera ∂A es un conjunto no denso en ninguna parte de M. En efecto, como ∂A es cerrado, es igual a su clausura. Para verificar que tiene interior vacío, tomemos un $x \in \partial A$ y notamos que, como

x es un punto de frontera, ninguna bola abierta centrada en x está contenida completamente en ∂A. Por definición, ∂A tiene interior vacío.

Ejemplo 5.22. Construimos un conjunto que es naturalmente denso en ninguna parte de en $\mathbb{R}$:

- Partimos del intervalo $[0,1]$, lo dividimos en tres subintervalos iguales, y le restamos el abierto del medio, de modo que quede $[0,1] - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y definimos $I_1 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
- Repetimos el proceso de restar el tercio abierto del medio sucesivamente para cada intervalo restante del paso anterior.

En cada paso se retiró una cantidad numerable de intervalos abiertos, los cuales numeramos como $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos el *conjunto de Cantor* como el conjunto de los números que no fueron retirados, a saber,

$$K := [0,1] - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Probemos que es efectivamente no denso en ninguna parte de $\mathbb{R}$. Ver que es cerrado es obvio, pues K es el complemento de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$—una unión de abiertos, y por tanto abierto—en el espacio ambiente $[0,1]$, y el complemento de un abierto es cerrado. Como K es cerrado en $[0,1]$, es cerrado en $\mathbb{R}$, y por tanto es igual a su clausura en $\mathbb{R}$.

También, de la construcción es claro que K no contiene ningún intervalo abierto: sea I un cualquier subconjunto abierto del $[0,1]$, y denotemos su largo como l. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < l$. Luego, en el paso $(N+1)$-ésimo, se retira un trozo de I, por lo que este intervalo no puede quedar completamente contenido en K, y por definición $\operatorname{int} K = \emptyset$.

Teorema 5.23 (Intersección de Cantor). *Un espacio métrico M es completo si y solo si para toda cadena decreciente $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ de cerrados no-vacíos en M tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$ para algún $a \in M$.*

Demostración. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Sean M completo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Para cada n, escogemos un $x_n \in F_n$ (cosa que podemos hacer porque cada F_n es no-vacío). Esto define una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M. Podemos probar que esta sucesión es Cauchy en M.

En efecto, dado $N \in \mathbb{N}$, se tiene que si $m, n > N$, entonces, $F_n, F_m \subset F_N$, y por tanto $x_m, x_n \in F_N$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n > N \implies x_m, x_n \in F_N \implies d(x_m, x_n) < \operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon,$$

por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es efectivamente Cauchy en M, y como M es completo, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Sea $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Para ver que $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, notamos lo siguiente: a partir de cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \in F_N$ para todo $n \geq N$, por lo que $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in F_N$. Como $F_N \subseteq F_{N-1} \subseteq \ldots \subseteq F_1$, se tiene que $a \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por tanto $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Para probar que la intersección no posee otro elemento, supongamos lo contrario: sean $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Por tanto, en particular se tiene que $d(a,b) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que en particular $d(a,b) \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, de lo que $d(a,b) = 0$, y por definición de métrica, $a = b$.

$\Longleftarrow$: Supongamos que la intersección de una cadena decreciente cerrados no-vacíos en M con diámetro tendiendo a 0 es un único punto. Para probar que M es completo, probaremos que es secuencialmente completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy, y definamos $X_n := \{x_j\}_{j\geq n}$. Es claro que $X_1 \supseteq X_2 \supset \ldots$ es una cadena decreciente de conjuntos no-vacíos, por lo que $\overline{X_1} \supseteq \overline{X_2} \supset \ldots$ es una cadena decreciente de conjuntos no-vacíos cerrados en M.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, la distancia entre puntos es decreciente a medida que crece n, por lo que se tendrá que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{X_n}) = 0$, y por hipótesis se tendrá que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{a\}$ para algún $a \in M$.

[Something], por lo que a es el límite de una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y cómo esta es Cauchy, se tiene que en verdad $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ era arbitraria, se tiene que cualquier sucesión Cauchy converge en M, por lo que M es efectivamente completo. $\square$

Teorema 5.24 (Baire). *Sea M un espacio métrico completo. Todo conjunto F magro en M tiene interior vacío en M.*

Observación.

1. Esto es equivalente (por definición de conjunto magro) a decir que en un espacio métrico completo M, si $F \subseteq M$ es unión de cerrados con interior vacío, léase, $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ con cada F_n con interior vacío en M, entonces $\operatorname{int}(F) = \emptyset$ en M.

2. También, el teorema es equivalente a que en un espacio métrico completo M, si

$$(M - F) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (M - F_n),$$

con cada $\operatorname{int}(M - F_n)$ un abierto denso en M, entonces $(M - F)$ es denso en M.

Más generalmente, esto es equivalente a que toda intersección de abiertos densos en M es densa en M

Demostración. Probemos la segunda equivalencia. Sea M un espacio métrico completo, y sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos abiertos en M, cada uno abierto y denso en M. Probemos que $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en M, esto es, que cada bola abierta B en M contiene algún punto de A.

Sea B_1 una bola abierta de M. Como A_1 es denso en M, se tiene que $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$, y como A_1 es abierto en M, se tiene que $A_1 \cap B_1$ es un abierto en M (pues la intersección de abiertos es abierta). Por tanto, existe una bola abierta $B_2 \subseteq A_1 \cap B_1$, de radio menor al de B_1 (y de hecho podemos elegir una bola de modo que $\overline{B_2} \subseteq A_1 \cap B_1$).

Ahora, como A_2 es abierto y denso en M, se tendrá que $A_2 \cap B_2$ es un abierto no-vacío en M, y por tanto existirá una bola B_3 de radio menor al de B_2, y que de hecho sea tal que $\overline{B_3} \subseteq A_2 \cap B_2$.

Seguimos con este proceso indefinidamente, obteniendo la familia $\{\overline{B_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notamos entonces, que $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \ldots$ es una cadena de cerrados en M, tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{B_n}) = 0$, por lo que, como se cumplen las hipótesis de 5.23 (acá se usa que M es completo), se tendrá que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n} = \{a\}$, para algún $a \in M$.

Es claro que, por construcción, $\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n \cap A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, por definición de contención, como $a \in \overline{B_{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a \in B_n$ y $a \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$. Por definición, A es efectivamente denso en M. $\square$

Ejemplo 5.25. Si un espacio métrico M es unión de cerrados, entonces al menos uno debe tener interior no vacío: si no fuese este el caso, es decir, el teorema de Baire nos indica que su unión tiene interior vacío en M; pero esta unión es todo M, lo que es absurdo.

Ejemplo 5.26. Un espacio métrico completo M no es magro en sí mismo, pues si se escribiera como unión de conjuntos nunca densos en M, 5.24 nos indica que M tiene interior vacío en M, lo cual es absurdo.

Ejemplo 5.27. Si M es un espacio métrico completo numerable, se tiene que el conjunto de los puntos aislados de M es un conjunto abierto y denso en M: sea A el conjunto de los puntos aislados de M, y para cada punto no-aislado de M, es decir, $x \in M - A$, definimos $U_x := M - \{x\}$. Los singletons siempre son cerrados en el espacio ambiente, por lo que U_x es el complemento en M de un cerrado en M, por lo que es abierto en M.

Recordamos que p es aislado en M si y solo si $\{p\}$ es abierto en M, por lo que, como un $x \in M - A$ no es aislado, se tendrá que $\{x\}$ no es abierto en M. Es claro que $\overline{U_x} = X$, pues x no es aislado.

5.4. Teorema del punto fijo de Banach

Un problema recurrente en sistemas dinámicos y el estudio de ecuaciones diferenciales es el encontrar puntos fijos. Recordemos la definición.

Definición 5.28. Sea A un conjunto y $f\colon A \to A$. Decimos que $x \in A$ es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$.

Existen múltiples teoremas que nos aseguran la existencia de estos puntos fijos. En esta sección estudiaremos un par de estos resultados para espacios métricos, aprovechando que ya tenemos múltiples herramientas en nuestro arsenal.

Teorema 5.29 (Punto fijo de Brouwer). *Consideremos $\mathbb{R}$ como espacio métrico. Toda función continua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tiene al menos un punto fijo $x \in [0,1]$.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Consideremos la función auxiliar $g(x) := f(x) - x$. Notamos que esta función es continua. Como $f([0,1]) \subseteq [0,1]$, se tiene que $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$, y que $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. El teorema del valor intermedio nos asegura que existe $x \in [0,1]$ de modo que $g(x) = 0$, es decir, tal que $f(x) = x$. Por tanto, hemos encontrado un punto fijo de f. $\square$

Hacemos dos observaciones. Primero, este resultado podría haber sido revisado en un curso de cálculo real sin problemas. Segundo, este teorema se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, pero no lo estudiamos pues no nos es relevante. Ahora, probemos algo más interesante, y que sí usa herramientas de análisis.

Teorema 5.30 (Punto fijo de Banach). *Sea M un espacio métrico. Si M es completo, entonces toda contracción $f\colon M \to M$ posee un único punto fijo. Más aún, este punto fijo está dado por el límite de la órbita bajo f de cualquier $x_0 \in M$.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Consideremos la órbita de x_0 bajo f definida recursivamente por

$$\begin{aligned} x_0 &:= x_0, \\ x_n &:= f(x_{n-1}) \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Para probar el resultado hay que probar que esta órbita siempre converge, que este límite es punto fijo de f, y que este punto fijo que encontramos resulta ser único. Vamos en orden.

Para probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, podemos aprovecharnos de que estamos suponiendo que M es completo y probar únicamente que la sucesión es Cauchy.

Notamos que, estudiando términos consecutivos, se tiene

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1),$$

y también que

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2 d(x_0, x_1).$$

Inductivamente, se sigue que

$$d(x_n, x_{x+1}) \leq c^n d(x_0, x_1), \tag{2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, notamos que si $n < m$, entonces $m = n + p$ para algún $p \in \mathbb{N}$, lo que nos permite usar la desigualdad triangular múltiples veces, obteniendo que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (c^n + \cdots + c^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= c^n (1 + c + \cdots + c^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{c^n}{1 - c} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

En la primera desigualdad, usamos la desigualdad triangular, en la segunda la cota obtenida en la ecuación 2, y en la última la fórmula cerrada de una suma geométrica, que podemos utilizar en este caso porque estamos asumiendo que $|c| < 1$. Tomando $n \to \infty$ en la última linea, tenemos producto de límite nulo por constante, que es nulo. Por tanto, $d(x_n, x_m) \to 0$ y concluimos que la sucesión es efectivamente Cauchy y por tanto convergente. Sea $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Probar que a es punto fijo de f es directo, pues

$$\begin{aligned} f(a) &= f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la continuidad de f. Efectivamente a es punto fijo de f

Para probar la unicidad, supongamos que $b \in M$ también es un punto fijo de f. Se tiene que

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b)) \implies d(a, b) - cd(a, b) = (1 - c)d(a, b) \leq 0.$$

Como $(1 - c) > 0$, debe ser que $d(a, b) \leq 0$, pero las métricas son no-negativas, de lo que $d(a, b) = 0$. Es decir, $a = b$. Esto prueba el resultado. $\square$

6. Espacios métricos compactos

El concepto de compacidad de un espacio métrico es sumamente relevante. En esta sección entregamos una exposición más bien histórica, basada principalmente en el trabajo de Raman-Sundström en [Ram14].

En el siglo XIX fue cuando se empezaron a entender realmente la esencia de los intervalos de la recta real, de hecho, el conocimiento del área era tan rudimentario que las ideas sobre lo que ahora llamamos compacidad fueron desarrolladas incluso antes de acuñar el término. Se desarrollaron dos corrientes principales de estas ideas pre-compacidad: una de parte de Bolzano y Weierstraß que trata sobre sucesiones y otra de la mano de Heine, Borel, y Lebesgue que trata sobre coberturas abiertas.

Vamos en orden cronológico. Asumiendo que toda sucesión Cauchy es convergente en $\mathbb{R}$, Bolzano probó en [Bol17] el siguiente resultado como un lema para probar lo que ahora llamamos teorema del valor intermedio.

Teorema 6.1 (Axioma del Supremo de Bolzano). *Todo subconjunto no-vacío y acotado de $\mathbb{R}$ posee supremo.*

No lo demostraremos, pues de hecho estamos asumiéndolo como axioma. Posteriormente, Weierstraß usó las ideas de Bolzano para demostrar el siguiente resultado en [Wei77].

Teorema 6.2 (Valor extremo de Weierstraß). *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces alcanza su máximo y mínimo en $[a,b]$.*

Tampoco lo demostraremos, pues probamos una versión más general en 6.23, y de forma más sofisticada. Frèchet quiso generalizar este teorema de Weierstraß a espacios abstractos, y trabajando en ello fue cuando notó que podía utilizar un resultado intermedio para su teoría—que sí probamos.

Teorema 6.3 (Punto límite de Bolzano–Weierstraß). *Todo $X \subseteq \mathbb{R}$ infinito y acotado posee algún punto de acumulación.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ infinito y acotado, y definamos $A := \{x \in \mathbb{R} \mid X \cap (x,\infty) \text{ es infinito}\}$. En tanto X es acotado, hay un $a \in \mathbb{R}$ de modo que $X \subseteq [-b,b]$. Notemos que A es no-vacío porque $-b \in A$, y es acotado superiormente por b, por lo que tiene supremo. Probemos que $c := \sup A$ es un punto de acumulación de X.

Como c es supremo de A, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ el número $c-\varepsilon$ no es cota superior de A, es decir, existe $a \in A$ de modo que $c-\varepsilon < a \leq c$. Esta desigualdad nos dice que como $c-\varepsilon$ está a la izquierda de a, y a la derecha de a hay infinitos puntos de X, entonces hay infinitos puntos a la derecha de $c-\varepsilon$, es decir, que $c-\varepsilon \in A$. En particular $B(c,\varepsilon) \cap X$ es infinita para todo $\varepsilon > 0$, por lo que el lema 3.34 implica que c efectivamente es un punto de acumulación de X. $\square$

Con este resultado en mente, Frèchet intentó dotar de esta noción de compacidad a espacios de funciones, pero no lo consiguió. La buena noticia es que sí lo consiguió para espacios métricos. Los conjuntos que cumplen este tipo de propiedades ahora reciben un nombre acorde.

Definición 6.4. Sea M un espacio métrico. Decimos que $X \subseteq M$ tiene la *propiedad de Bolzano–Weierstraß* si el ser infinito y acotado implica que tiene algún punto de acumulación.

Con esto, podemos mostrar una de las definiciones de compacidad que presentó Frèchet en [Fre06].

Definición 6.5. Sea M un espacio métrico. Decimos que $K \subseteq M$ es *Frèchet-compacto* o *punto-límite compacto* si tiene la propiedad de Bolzano–Weierstraß.

El último teorema se puede enunciar de forma equivalente en lenguaje de sucesiones. Esta versión es más conocida.

Teorema 6.6 (Bolzano–Weierstraß). *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ acotada posee alguna subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ acotada, es decir, que existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $A \leq x_n \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos $X_n := \{x_i \mid i \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, que son acotados. En tanto también son no vacíos, tienen ínfimo. Sea $a_n := \inf X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión de los a_n es creciente ($a_1 \leq a_2 \leq \ldots$) y también es acotada (por B), por lo que 4.13 nos asegura que es convergente, digamos a $a \in \mathbb{R}$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|x_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon$ para todo $n_\varepsilon > N$. Considerando $\varepsilon := \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos armar una subsucesión formada por los x_{n_ε} correspondiente, que converge a a. Esto prueba lo enunciado. $\square$

Con esto en mente, hay otra definición contemporánea de compacidad para espacios métricos abstractos.

Definición 6.7. Sea M un espacio métrico. Decimos que $K \subseteq M$ es *secuencialmente compacto* si toda subsucesión en K posee alguna subsucesión convergente.

Observación. A esta idea también se le conoce como propiedad de Bolzano–Weierstraß, por lo que sería válido enunciar que un conjunto es secuencialmente compacto si cumple la propiedad de Bolzano–Weierstraß. Pero son nociones distintas. Equivalentes, pero distintas, así que hay que tener cuidado.

De forma casi paralela, se estaban probando resultados que a primera vista parecen no tener relación con lo revisado hasta ahora, pero irónicamente solo se estaba estudiando la misma propiedad desde un punto de vista diferente. Borel probó en [Bor94] el siguiente resultado (que escribimos en lenguaje contemporáneo).

Teorema 6.8 (Borel). *Sea* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo cerrado y acotado en* $\mathbb{R}$. *Sea* L *un conjunto de índices, y* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *una familia de conjuntos abiertos de* $\mathbb{R}$ *tales que* $[a,b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. *Entonces, existen finitos* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ *de modo que* $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. El que $[a,b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ nos indica que para cada $x \in [a,b]$, hay al menos un A_λ que contiene a x. Consideremos el conjunto

$$X := \{x \in [a,b] \mid [a,x] \subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^{n_x} A_i \text{ con cada } A_i \text{ abierto}\}.$$

El plan es probar que X es en verdad todo $[a,b]$. Primero, este conjunto es no-vacío: por hipótesis, a está contenido en algún abierto A_λ, por lo que existe un radio $r > 0$ de modo que $B(a,r) \subseteq A_\lambda$. Así, $B(a,r) \cap [a,b] = [a, a+r) \subseteq A_\lambda$, y por tanto $[a, a+r) \subseteq X$, lo que muestra que $X \neq \emptyset$.

Ahora, notamos que X es un intervalo: si $x \in X$, entonces todo $y \leq x$ también está en X, pues en este caso $y \in [a,x]$. A priori X puede ser un intervalo cerrado o abierto por la derecha, i. e. de la forma $[a,c]$ o $[a,c)$, donde $c = \sup X$. Probemos que este intervalo debe ser cerrado con $c = b$, para lo cual basta probar que $b \in X$.

Esto es análogo a cómo probamos que $a \in X$: por hipótesis b está en algún abierto A_b, por lo que existe un radio $r > 0$ de modo que $B(b,r) \subseteq A_b$, de lo que $[a,b] \cap B(b,r) = (b-r, b] \subseteq A_b$. En particular, $b \in X$, por lo que $[a,b] \subseteq X$. Esto prueba que $X = [a,b]$, es decir, que el cubrimiento original efectivamente admite un subcubrimiento finito. □

Tiempo después, este resultado se generalizó para cerrados acotados de $\mathbb{R}$— no necesariamente intervalos. Este teorema suele llevar el nombre de Heine, pero en realidad él no participó en su demostración, sino que fue Dirichlet, por lo que hacemos justicia.

Teorema 6.9 (Heine–Borel–Dirichlet–Lebesgue). *Sea* $F \subseteq \mathbb{R}$ *cerrado y acotado en* $\mathbb{R}$. *Sea* L *un conjunto de índices, y* $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ *una familia de conjuntos abiertos de* $\mathbb{R}$ *tales que* $F \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. *Entonces, existen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ *de modo que* $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Como F es acotado, entonces está contenido en algún intervalo, digamos que $F \subseteq [a,b]$. Ahora bien, podríamos hacer observaciones sobre cubrimientos de $[a,b]$, pero eso no nos da toda la información sobre los cubrimientos F. Para solucionar esto, notemos que como F es cerrado, su complemento $\mathbb{R} - F$ es abierto. Por tanto, $[a, b]$ puede ser cubiertos por los abiertos que cubren a F y el complemento de F, léase,

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \cup (\mathbb{R} - F).$$

Este es un cubrimiento por abiertos de $[a, b]$, por lo que el teorema de Borel 6.8 nos dice que podemos encontrar un cubrimiento C finito por abiertos de $[a, b]$. De estos, alguno puede ser igual a $(\mathbb{R} - F)$, pero este no contiene elementos de F, por lo que de hecho C es un cubrimiento finito por abiertos de F, que es lo que que queríamos probar. $\square$

Finalmente, fueron Alexandroff y Urysohn los que se dieron cuenta de que los resultados potentes en un conjunto no eran debidos al hecho de ser cerrado y acotado, sino que esto era una consecuencia de la afirmación sobre las coberturas. Lo mejor de esto, es que eso es una noción meramente topológica, por lo que puede ser abstraída sin muchos problemas a espacios topológicos abstractos, en contraste de las nociones secuenciales y de punto-límite.

Definición 6.10. Sea M un espacio métrico. Decimos que un conjunto K es *topológicamente compacto* si dada $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de conjuntos abiertos de M tales que $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, entonces existen finitos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ de modo que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

En resumen, Frèchet quiso desarrollar teoremas tipo Bolzano–Weierstraß para espacios de funciones, usando herramientas de puntos límite y sucesiones al igual que en espacios métricos, pero falló. Posteriormente, Borel y compañía probaron resultados sobre coberturas de conjuntos de $\mathbb{R}$ que estaban cerrados y acotados, lo que llevó a Alexandroff y Urysohn a notar que lo importante eran las coberturas, pudiendo no solo abstraer una buena noción para espacios métricos, sino que para espacios topológicos abstractos. En espacios métricos, estas tres definiciones de compacidad son equivalentes, pero en espacios topológicos no (para ejemplos, ver [Ram14] pp. 11–12).

6.1. Definición y ejemplos

Ahora retornamos a la exposición más tradicional. Seguiremos la tradición contemporánea, que es partir estudiando compacidad topológica.

Definición 6.11. Sean M un espacio métrico, $X \subseteq M$, y L un conjunto de índices.

1. Un *cubrimiento* de X es una familia $\mathcal{C} := (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tales que $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.
2. Si $L' \subseteq L$ es tal que $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ es un cubrimiento de X, decimos que es *subcubrimiento* de X.

3. Decimos que el cubrimiento $(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ es *abierto* si cada C_λ es abierto en M.
4. Decimos que el cubrimiento $(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ es *finito* si L es finito.
5. Decimos que X es un conjunto *compacto* si todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento abierto finito.

Observación. La compacidad en una propiedad intrínseca del conjunto, no del espacio métrico ambiente. Es decir, un conjunto es compacto en un espacio métrico si y solo si lo es en cualquier (intersección adecuada de) subespacios métricos.

Ejemplo 6.12. Los teoremas de Borel y Heine–Borel–Dirichlet–Lebesgue (cf. 6.8, 6.9) nos dicen que todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto. Esta idea se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, como hacemos en

Ejemplo 6.13. Todo espacio métrico M finito es compacto, pues para cubrir por abiertos todo M solo se necesitan finitos abiertos, de lo que es claro que todo cubrimiento por abiertos de M admite un subcubrimiento finito.

Ejemplo 6.14. En $\mathbb{R}$, un intervalo abierto (a, b) no es compacto: notemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $A_n := (a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}) \subseteq (a, b)$ para todo $n > N$. Es claro que $\bigcup_n A_{n\in\mathbb{N}} = (a, b)$ es un cubrimiento por abiertos de (a, b). Sin embargo, no admite subcubrimientos finitos, pues la unión de finitos A_n es igual al más grande de estos.

Ejemplo 6.15. En todo espacio métrico M, la unión de subconjuntos compactos es compacta: sean $K, L \subseteq M$ compactos, y consideremos $\mathcal{C}$ un cubrimiento por abiertos de $K \cup L$. En particular $\mathcal{C}$ es un cubrimiento por abiertos de K y de L, por lo que, al ser compactos, podemos extraer subcubrimientos finitos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ respectivamente, de lo que notamos que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un subcubrimiento finito de $K \cup L$. Inductivamente, la unión numerable de subconjuntos compactos es compacta.

Ejemplo 6.16. Una unión arbitraria de compactos puede no ser compacta: por ejemplo, $\mathbb{R} := \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$. El ejemplo 6.13 muestra que cada $\{x\}$ es compacto, pero $\mathbb{R}$ no es compacto.

Tomando complementos, podemos caracterizar la compacidad de un conjunto por conjuntos cerrados:

Lema 6.17. *Un espacio métrico M es compacto si y solo si toda familia de cerrados de M cuya intersección es vacía posee una subfamilia finita cuya intersección es vacía.*

Demostración. M es compacto si y solo si todo cubrimiento por abiertos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de M admite un subcubrimiento finito. Simbólicamente, si $M = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$, entonces existe existen finitos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de modo que $M = \bigcup_{i=1}^n A_{\lambda_i}$. Tomando complementos y utilizando las leyes de De Morgan, esto es equivalente a que si $\emptyset = \bigcap_{\lambda \in L}(M - A_\lambda)$, entonces $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n (M - A_{\lambda_i})$. Como esto es cierto para abiertos arbitrarios, y los cerrados son precisamente los complementos de los abiertos, esto es cierto para todo cerrado. $\square$

Observación. La segunda condición nos dice que dada una familia de cerrados de M, si tienen intersección vacía, entonces existe una subfamilia finita con intersección vacía. Por tanto, la afirmación contrarecíproca es que dada una familia de cerrados de M, si toda subfamilia finita posee intersección no-vacía, entonces la intersección de toda la familia es no-vacía. Esta es la primera definición de compacidad que dio Frèchet en [Fre06]. No fue muy popular, pero sigue siendo útil

6.2. Propiedades

Lema 6.18. *Sea K un espacio métrico compacto. Un subespacio $S \subseteq K$ es cerrado si y solo si es compacto.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado y probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Sea S un cerrado de K. Consideremos un cubrimiento por abiertos de S arbitrario, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Con esto, construimos el cubrimiento por abiertos de K que consiste de $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \cup (K - S)$, del cual extraemos el subcubrimiento finito

$$C := A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n} \cup (K - S).$$

Es claro $S \subseteq C$, pero como $(K - S)$ no tiene puntos de S, debe ser que $S \subseteq A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$, de lo que hemos encontrado un subcubrimiento finito del original, lo que prueba la compacidad de S.

$\Longleftarrow$: Sea S compacto en K, y supongamos que no es cerrado en K, es decir, que S es distinto a su clausura, y por tanto existe $x \in (\overline{S} - S) = \partial S$. Para llegar a una contradicción, habría que encontrar un cubrimiento por abiertos de S que no admitiera una subcubrimiento finito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n := (M - B[x, \tfrac{1}{n}]),$$

los cuales son claramente abiertos, pues son los complementos de las bolas cerradas, que son conjuntos cerrados. Más aún, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un cubrimiento (abierto) de S: basta notar que como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x, \frac{1}{n}] = \{x\}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}(M - \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x, \frac{1}{n}]) &= M - \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}}(M - B[x, \frac{1}{n}]) \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ &= M - \{x\},\end{aligned}$$

el cual es abierto pues es complemento de un singleton, los cuales siempre son cerrados.

Es claro que estos conjuntos forma una cadena ascendente $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, pues a medida que n crece, cada A_n corresponde a haberle quitado a M discos cada vez más pequeños. Por tanto, cualquier unión finita de estos conjuntos corresponde a aquel que sea más grande (en este caso, al que tenga mayor índice).

Sin embargo, esto es lo que nos hace llegar a la contradicción: como $x \in \partial S$, se sigue que cada $B[x, \frac{1}{n}]$ tiene al menos un punto de S, lo que implica que a cada A_n le falta al menos un punto de S, por lo que a cualquier unión finita de los A_n le falta al menos un punto de S. Por tanto, estos conjuntos son un cubrimiento por abiertos de S que no admite un subcubrimiento finito, lo que contradice la compacidad de S, de lo que concluimos que S debe ser efectivamente un cerrado. $\square$

Observación. De hecho, probamos algo más fuerte: en la segunda implicancia nunca usamos el que K era compacto. Esto no es una coincidencia o un error, pues el resultado general es que en todo espacio métrico—no necesariamente compacto—un conjunto compacto es cerrado.

Corolario 6.19. *Sea M un espacio métrico.*

1. *Si $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una familia de compactos de M, entonces $\bigcap_{\lambda \in L} K_\lambda$ es compacto.*
2. *Si M es compacto entonces es completo.*
3. *Si M es compacto entonces es acotado.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado y probemos cada apartado.

1. Si $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ es una familia de compactos de M, entonces cada uno es cerrado en M, por lo que su intersección también es un cerrado en M. Por tanto, esta intersección también es un cerrado de cada K_λ, y por el lema anterior, un compacto en cada K_λ, por lo que lo es en M.
2. Ver lema 3.32.
3. Si M es compacto, entonces cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de M admite un subcubrimiento finito $\mathcal{C}'$, lo que nos indica que M es acotado. $\square$

Lema 6.20. *Sean M, N espacios métricos y $f \colon M \to N$ continua. Si $K \subseteq M$ es compacto en M, entonces $f(K)$ es compacto en N.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Consideremos un cubrimiento por abiertos

$$f(K) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Como f es continua y cada A_λ abierto, se sigue que cada conjunto preimagen $f^{-1}(A_\lambda)$ es un abierto de M. Ahora, notamos que, tomando preimagen en la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(K)) &\subseteq f^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda\big) \\ &= \textstyle\bigcup_{\lambda\in L} f^{-1}(A_\lambda), \end{aligned}$$

donde en la contención usamos que el tomar preimagen preserva inclusión, y en la igualdad el que la preimagen de una unión es la unión de las preimágenes. Como $K \subseteq f^{-1}(f(K))$, esto muestra que estas preimágenes son un cubrimiento por abiertos de K.

La compacidad de K nos permite elegir un subcubrimiento finito $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\lambda_i})$. Por tanto, tomando imagen se tiene que

$$\begin{aligned} f(K) &\subseteq f\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\lambda_i})\big) \\ &= \big(\textstyle\bigcup_{i=1}^n f f^{-1}(A_{\lambda_i})\big) \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^n A_{\lambda_i}, \end{aligned}$$

donde en la primera contención usamos que el tomar imagen preserva inclusión, en la primera igualdad estamos usando que la imagen de una unión es la unión de las imágenes, y en la segunda contención el que la imagen de la preimagen de un conjunto está contenida en el conjunto.

Por tanto, hemos encontrado un subcubrimiento abierto finito del original, lo que prueba la compacidad de $f(K)$. □

Corolario 6.21. *Sea K un espacio métrico compacto y M un espacio métrico. Sea $f\colon K \to M$*

1. *f envía cerrados de K a cerrados de M.*
2. *La imagen de f es acotada.*

Demostración. Asumamos la notación del enunciado.

1. Sea $F \subseteq K$ cerrado. Como K es compacto, entonces F también es compacto (cf. 6.18). Por el lema anterior, se tiene que $f(F)$ es compacto en M, y nuevamente por 6.18, concluimos que $f(F)$ es cerrado en M.
2. El lema anterior nos indica que la imagen de K es compacta, por lo que debe ser acotada en M (cf. 6.19(3)). □

Ejemplo 6.22. El primer resultado es útil para probar que conjuntos son compactos. A modo de ejemplo, los dado un camino continuo $f\colon [a,b] \to M$, la curva $f([a,b])$ es compacta en M. Así, la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ es compacta pues es la imagen de $[0,2\pi]$ bajo la función $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Ejemplo 6.23. Probemos 6.2. Adoptemos la notación del enunciado. Como K es compacto y f continua, se tiene que $f(K)$ es un compacto de $\mathbb{R}$. El teorema de Borel–Dirchlet–Lebesgue (6.9) asegura por tanto, que $f(K)$ es cerrado y acotado. En tanto acotado, existen $M := \sup f(K)$ y $m := \inf f(K)$. En tanto cerrado, se tiene que $M, m \in f(K)$, por lo que corresponden al máximo y mínimo de f en K, respectivamente.

Definición 6.24. Decimos que un espacio métrico M es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un cubrimiento finito de M formado únicamente por bolas abiertas de radio ε. Tales cubrimientos se llaman ε-*redes*.

Teorema 6.25. *Sea M un espacio métrico. Son equivalentes*

1. *M es compacto,*
2. *todo subconjunto infinito de M posee algún punto de acumulación,*
3. *Toda sucesión en M posee alguna subsucesión convergente.*
4. *M es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado.

$1 \implies 2$: Supongamos que M es compacto, y sea $X \subseteq M$ un conjunto sin puntos de acumulación. Probemos que esto fuerza a X a ser finito. Supongamos que fuese infinito. Por definición, $\overline{X} = X \cup X'$, y por hipótesis se tiene que este unión es simplemente X. Por tanto, X es un conjunto cerrado en M, y por ende compacto. Ahora, el que X no tenga puntos de acumulación nos indica que para cada $x \in M$, hay una bola $B(x, r_x)$ que contiene a lo más finitos puntos de X. Estas bolas son un cubrimiento por abiertos de X, que no admite un subcubrimiento finito, pues al retirar siquiera una de las bolas de la colección ya no cubriríamos X. Esto contradice la compacidad de X, por lo que X debe ser finito.

$2 \implies 3$: Supongamos que todo subconjunto infinito de M tiene algún punto de acumulación. Consideremos una sucesión en M. Si tiene finitos términos distintos, es claro que admite una subsucesión convergente. Si tiene infinitos términos, entonces posee algún punto de acumulación, que es límite de alguna subsucesión.

$3 \implies 4$: Supongamos que toda subsucesión en M posee alguna subsucesión convergente. En este caso, toda sucesión Cauchy en M posee una subsucesión convergente, por lo que es en sí convergente, y por tanto M es efectivamente completo. Resta probar que es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$, y construyamos una ε-red del siguiente modo: elijamos consecutivamente $x_1, x_2, \ldots \in M$, y si en algún punto el conjunto $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_n, \varepsilon)$ es una ε-red, detenemos el proceso. Este proceso debe terminar, pues si no, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión cuyos términos están a lo menos a ε de distancia, por lo que no puede tener subsucesiones convergentes, lo que contradice nuestra hipótesis.

$4 \implies 1$: Supongamos M completo y totalmente acotado. Buscando una contradicción, supongamos que no es compacto, es decir, que existe un cubrimiento abierto $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de M que no admite un subcubrimiento finito. Como es totalmente acotado, podemos cubrir M por bolas cerradas de radio < 1 (basta cubrir por bolas abiertas y tomar clausura). Por tanto, al menos una de estas bolas, digamos B_1, no admite un subcubrimiento finito. B_1 sigue siendo totalmente acotado, por lo que lo podemos cubrir por bolas cerradas de radio $< \frac{1}{2}$, de las que, digamos B_2, no admite un subcubrimiento finito. Siguiendo de este modo, $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ es una familia encajonada de cerrados no-vacíos de M, tal que su diámetro converge a 0. En tanto M es completo, esto es equivalente a que la intersección $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es precisamente un punto, digamos $\{a\}$ (cf. teorema 5.23). Por tanto, a está en algún A_λ, el que a su vez contiene a algún $B(a, \frac{1}{n})$ (pues es un abierto). Notemos que $B_n \subseteq B(a, \frac{1}{n})$, por lo que en particular $B_n \subseteq A_\lambda$. Esto es una contradicción, pues los B_n fueron construidos para ser tales que ningún número finito de los A_λ los cubra. Por tanto, M debe ser compacto. □

Corolario 6.26. *Un subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Demostración. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado si y solo si es completo y totalmente acotado, lo que es equivalente a ser compacto según el teorema anterior. □

Ejemplo 6.27. La esfera unitaria $S^n := S(0,1)$ en $\mathbb{R}^n$ y la bola cerrada $B^n := B[0,1]$ en $\mathbb{R}^n$ son subconjuntos cerrados y acotados, y por tanto compactos.

Lema 6.28. *Si K, L son espacios métricos compactos, entonces su producto cartesiano $K \times L$ también es compacto. Inductivamente, el producto finito de espacios métricos compactos es compacto.*

Demostración. Sean K, L espacios métricos compactos. Probemos que su producto $K \times L$ es secuencialmente compacto. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $z_n := (x_n, y_n) \in K \times L$, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en K y L respectivamente. Por la compacidad de K, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un $x \in K$, digamos indexada por $N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Por tanto, $(y_n)_{n\in N_1}$ es otra sucesión en L, y por la compacidad de L, podemos encontrar otra subsucesión de $(y_n)_{n\in N_1}$ convergente a un $y \in L$, digamos indexada por $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Se sigue que $(z_n)_{n\in N_2}$ es una subsucesión convergente a (x, y) de nuestra sucesión original, lo que prueba que $K \times L$ es secuencialmente compacto, y por ende compacto. □

Teorema 6.29 (Cantor–Tychonov). *Un producto numerable de espacios métricos compactos es en sí compacto si cada factor es compacto.*

Demostración. Esta demostración ocupa fuertemente el Axioma de Elección. Sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto de espacios métricos compactos, y sea $M := \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Probemos que es secuencialmente compacto, utilizando un argumento similar al lema anterior. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia arbitraria en M. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, denotaremos por $(x_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ a la n-ésima entrada de nuestra sucesión, que es a su vez una sucesión.

Utilizando la compacidad de M_1, podemos encontrar una subsucesión de $(x_{1i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a un $a_1 \in M_1$, digamos indexada por $N_1 \in \mathbb{N}$. Luego, $(x_{2i})_{i\in N_1}$ es otra sucesión en M_2, y por compacidad podemos encontrarle una subsucesión convergente a un $a_2 \in M_2$, indexada por, digamos, $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Procediendo de este modo, encontramos una familia numerable de índices $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots$, y un punto $a := (a_1, a_2, \ldots) \in M$. Por el Axioma de Elección, existe un $N_* \subseteq \mathbb{N}$ de modo que su j-ésimo elemento sea el j-ésimo elemento de N_j (todos los conjuntos ordenados de forma creciente). Se sigue que $(x_n)_{n\in N_*}$ es una subsucesión convergente a $a \in M$ de la original, lo que prueba que m es secuencialmente compacto, y por ende compacto. $\square$

Lema 6.30. *Sean K, N espacios métricos. Si K es compacto, entonces cualquier función continua $f : K \to N$ es uniformemente continua.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado, y supongamos, buscando una contradicción, que la continuidad de f no fuese uniforme. En tal caso, existe $\varepsilon > 0$ de modo que para cualquier $\delta > 0$, en particular para $\delta_n := \frac{1}{n}$, podemos encontrar $x_n, y_n \in K$ de modo que $d(x_n, y_n) < \delta_n$, pero $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Consideremos las sucesiones formadas por los x_n y los y_n. En virtud de la compacidad, podemos encontrar subsucesiones, ambas convergentes a un $a \in K$. Como f y d son continuas, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) &= d\Big(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\Big) \\
&= d\Big(f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big), f\Big(\lim_{n\to\infty} f(y_n)\Big)\Big) \\
&= d(f(a), f(a)) = 0,
\end{aligned}$$

lo que es contradictorio. $\square$

6.3. Compacidad en espacios de funciones

Probamos que un subconjunto en $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Lamentablemente, este no es el caso en espacios de funciones continuas.

Ejemplo 6.31. Consideremos $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. La bola unitaria cerrada

$$B[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continua} : |f(x)| \leq 1\},$$

es cerrada (pues es una bola cerrada), y acotada. Sin embargo, no es compacta: consideremos la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B[0,1]$ dada por

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{n+1}], \\ ax + b & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

para algunos $a, b \in \mathbb{R}$. Se sigue que si $m \neq n$, entonces $d(g_n, g_m) = 1$, por lo que no puede tener alguna subsucesión convergente, y por tanto contradice una posible compacidad de D.

Por lo tanto nos gustaría desarrollar alguna condición adicional que imponer sobre una familia de funciones continuas para que, al sumar las condiciones de que sea cerrada y acotada, nos entregue la equivalencia a compacidad a la que ya nos acostumbramos. Por suerte, este problema fue resuelto hace tiempo, y la respuesta se encuentra en el concepto de equicontinuidad. Como advertencia, en una primera instancia nos remitiremos al caso real de esta teoría.

6.3.1. Teorema de Arzelà–Ascoli, caso real

Definición 6.32. Un subconjunto $E \subseteq \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ se dice *equicontinuo* si dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todas las $f \in E$.

Esto es ciertamente casi la noción de continuidad usual, solo que estamos solicitando que el δ que encontremos funcione para todo el conjunto al mismo tiempo.

Teorema 6.33 (Arzelà–Ascoli real). *Un conjunto $E \subseteq \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ es compacto si y solo si es cerrado, acotado, y equicontinuo.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado, y probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Ya sabemos que si E es compacto, entonces debe ser cerrado y acotado, por lo que resta probar que es equicontinuo. Supongamos que no lo fuese. Así, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $\delta > 0$, se tenga que hay $x, y \in [0,1]$ y $f \in E$ tales que $|x - y| < \delta$, pero $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

En particular, para cada $\delta_n := \frac{1}{n}$, habrá $f_n \in E$ y $x_n, y_n \in [0,1]$ tales que $|x_n - y_n| < \delta$, pero $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Consideremos la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por la compacidad de E, esta sucesión admite una subsucesión convergente, y por tanto equicontinua. Pero por construcción, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es equicontinua y por tanto no tiene subsucesiones equicontinuas, lo que es contradictorio. Por tanto, debe ser que E sí es equicontintinuo después de todo.

$\Longleftarrow$: Probemos compacidad secuencial. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. El plan es el siguiente: construir usando fuerza bruta una subsucesión convergente, primero utilizando el hecho de E es cerrado y acotado para encontrar una que sirva en los puntos racionales de $[0,1]$, y luego la equicontinuidad para extender esta convergencia de modo uniforme sobre todo $[0,1]$.

En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de los racionales de $[0,1]$. Notamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, las evaluaciones $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ son una sucesión de reales, que es acotada, y por tanto posee una subsucesión convergente. Supongamos que la respectiva subsucesión de cada $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a_i, y que es indexada por $N_i \subseteq \mathbb{N}$.

Por tanto, hemos encontrado una familia numerable de índices $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots$, y un punto $a := (a_1, a_2, \ldots)$. Por el Axioma de Elección, existe un $N_* \subseteq \mathbb{N}$ de modo que su j-ésimo elemento sea el j-ésimo elemento de N_j (todos los conjuntos ordenados de forma creciente). Se sigue que cada miembro de $(f_n(x_i)_{n\in N_*}$ converge puntualmente a a_i, por lo que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una $f \in E$ sobre racionales.

Ahora, notemos que si probamos que esta convergencia es uniforme en $[0, 1]$, terminamos, pues esto dice en esencia que la convergencia es independiente del punto de $[0, 1]$ que escojamos. Para esto, podemos utilizar el lema 6.41, que nos entrega inmediatamente que la convergencia de $(f_n)_{n\in N_*}$ es uniforme en compactos de $[0, 1]$, en particular sobre el mismo $[0, 1]$. Por tanto, hemos encontrado una subsucesión convergente de la original, lo que prueba la compacidad secuencial.

□

6.3.2. Teorema de Arzelà-Ascoli, caso general

Definición 6.34. Sean M, N espacios métricos y sea $E \subseteq \mathcal{F}(M, N)$. Este conjunto se dice *equicontinuo* en $a \in M$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para todas las $f \in E$.

Observación. La gracia de una familia equicontinua de funciones es que claramente son continuas, pero los puntos que tengan imágenes cercanas a $f(a)$ son precisamente aquellos que están a distancia uniforme de a, vale decir, que el δ depende solo de ε, no de cada $f \in E$.

Ejemplo 6.35. Sean M, N espacios métricos. Un conjunto $E \subseteq \mathcal{F}(M, N)$ formado por funciones lipschitzianas con misma constante $c > 0$ es equicontinuo: en efecto, dado $\varepsilon > 0$ cada $f \in E$ es tal que si $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{c}$ entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ (cf. 2.5).

Ejemplo 6.36. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ dada por $f_n(x) := \frac{x}{n}$ es equicontinua: basta notar que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \frac{1}{n} \leq 1$, es decir, cada f_n tiene derivada acotada por 1, por lo que cada una es lipschitziana de constante 1 (cf. 2.6). El ejemplo anterior nos permite concluir que esta sucesión es en efecto equicontinua.

Ejemplo 6.37. Sean M, N espacios métricos. Un conjunto finito $E := \{f_1, \ldots, f_n\}$ de funciones $M \to N$ continuas en $a \in M$ es equicontinuo en a: dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_i > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta_i$ entonces $d(f_i(x), d(a)) < \varepsilon$. Sea $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Por tanto, para cada $f_i \in E$ se tiene que si $d(x, a) < \delta \leq \delta_i$ entonces $d(f_i(x), f(a)) < \varepsilon$, que prueba lo deseado.

Ejemplo 6.38. La unión de finitos conjuntos equicontinuos es equicontinuo: sean M, N espacios métricos y sean $E_1, \ldots, E_n \subseteq \mathcal{F}(M, N)$ equicontinuos. En efecto, sea $a \in M$ arbitrario, y para cada $i = 1, \ldots, n$, sea $f_i \in E_i$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea[1] $\delta_{i\varepsilon} > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta_{i\varepsilon}$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para cada $f \in E_i$ que nos entrega la equicontinuidad de E_i.

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$ sea $\delta_\varepsilon = \text{mín}\{\delta_{1\varepsilon}, \ldots, \delta_{n\varepsilon}\}$. Por tanto, si $f \in \bigcup_{i=1}^n E_i$, entonces $f \in E_i$ para algún $i = 1, \ldots, n$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que si $d(x, a) < \delta_\varepsilon \leq \delta_{i\varepsilon}$ entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, lo que prueba el resultado deseado.

Ejemplo 6.39. Sean M, N espacios métricos. Si una sucesión equicontinua $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(M, N)$ converge puntualmente a $f \in \mathcal{F}(M, N)$, entonces el conjunto $E := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f\}$ es equicontinuo: dado $a \in M$ y $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta$ entonces $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ para toda $f_n \in E$. En particular, $\text{lím}_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(a)) = d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, lo que prueba lo deseado.

Definición 6.40. Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Decimos que X es *precompacto* en M si $\overline{X}$ es compacta en M.

Observación.

1. En términos de sucesiones, la compacidad usual nos indica que toda sucesión en X tiene alguna subsucesión convergente en X, mientras que la precompacidad nos indica que toda sucesión tiene alguna subsucesión convergente en M, de hecho posiblemente en $M - X$.
2. Es claro que si X es cerrado y precompacto en M, entonces es compacto en M.

Ahora, probamos dos proposiciones que son claves para entender esta nueva noción de precompacidad.

Lema 6.41. *Sean M, N espacios métricos. Si una sucesión equicontinua $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(M, N)$ converge puntualmente en a $f \in \mathcal{F}(M, N)$, entonces esta convergencia es uniforme sobre cada compacto $K \subseteq M$.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. La equicontinuidad de la sucesión nos dice que de hecho $E := \{f, f_1, f_2, \ldots\}$ es equicontinuo (cf. el ejemplo justo anterior), es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un radio $\delta_\varepsilon > 0$ de modo que si $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ entonces $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ y $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Notamos que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $A_\varepsilon := \bigcup_{x\in K} B(x, \delta_\varepsilon)$ es un cubrimiento por abiertos del compacto K, por lo que podemos extraer algún subcubrimiento finito $B_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B(x_{\varepsilon i}, \delta_\varepsilon)$ de K, con cada $x_\varepsilon \in K$.

Ahora, la convergencia puntual nos dice que para cada $x \in M$, dado $\varepsilon > 0$,

[1] Acá estamos usando el Axioma de Elección.

podemos elegir $n_{x\varepsilon} \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ cuando $n > n_{x\varepsilon}$. En particular, tomemos $N_\varepsilon := \text{máx}\{n_{x_{\varepsilon 1}\varepsilon}, \dots, n_{x_{\varepsilon m_\varepsilon}\varepsilon}\}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Si $x \in K$, entonces $x \in B(x_{\varepsilon i}, \delta_\varepsilon)$ para algún $i = 1, \dots, m_\varepsilon$, es decir $d(x, x_{\varepsilon i}) < \delta_\varepsilon$, por lo que $d(f_n(x), f_n(x_{\varepsilon i})) < \varepsilon$. Por desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f(x)) &\leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x)) \\ &\leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

donde la cota del segundo sumando es cierta para $n > N_\varepsilon$, y las del primero y tercero por la equicontinuidad. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, se tiene lo deseado. □

Lema 6.42. *Sean M, N espacios métricos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión equicontinua en $\mathcal{F}(M, N)$ tal que cada $E(x) := \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenga clausura completa en N. Si la sucesión converge puntualmente en algún subconjunto denso de M, entonces converge uniformemente sobre cada compacto de M.*

Demostración. Adoptemos la notación e hipótesis del enunciado. En virtud del lema anterior, basta probar que la sucesión converge puntualmente en M, para lo cual basta probar que para cada $x \in M$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en N, pues en tal caso es Cauchy en $\overline{E(x)}$ y por tanto convergente en N.

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in M$, la equicontinuidad de la sucesión nos dice que existe $\delta_\varepsilon > 0$ de modo que si $y \in B(x, \delta_\varepsilon)$, entonces $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $D \subseteq M$ un denso de modo que la sucesión converja en D. Sea $y \in B(x, \delta_\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Como la sucesión converge en D, se sigue que en particular $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en D, por lo que es Cauchy en D, por lo que es Cauchy en N, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f_n(y), f_m(y)) < \varepsilon$ cuando $n, m > n_0$. Por desigualdad triangular, se sigue que

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f_m(y)) < \varepsilon + \varepsilon,$$

donde el primer sumando es acotado por la equicontinuidad, y el segundo cuando $m, n > n_0$. Esto prueba que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en N, y por lo comentado anteriormente, se sigue la convergencia uniforme sobre compactos de M. □

Teorema 6.43 (Arzelà–Ascoli). *Sean K, N espacios métricos, K compacto. Un conjunto $E \subseteq \mathcal{C}(K, N)$ es precompacto si y solo si es equicontinuo y $E(x) := \{f(x)\}_{f\in E}$ es precompacto en N para cada $x \in K$.*

6.4. Aplicaciones de compacidad

6.4.1. Distancia entre subconjuntos de un espacio métrico

Nos tornamos al problema de dar una buena noción de distancia entre dos conjuntos—una métrica entre conjuntos. Como primer paso, abstraemos la noción de distancia entre un punto a un conjunto. Recordemos que en $\mathbb{R}^2$, la distancia entre un punto y una recta se define como la proyección ortogonal del punto a la recta. Lo interesante es que esta distancia coincide con la menor de las distancia del punto a alguno de la recta. Esto nos indica hacia la siguiente abstracción.

Definición 6.44. Sea M un espacio métrico. Definimos la *distancia punto-conjunto* entre $a \in M$ y $Y \subseteq M$ como $d(a, Y) := \inf_{y \in Y}\{d(a, y)\}$.

Observación. Si bien esta es una buena noción de distancia en su propio mérito, no está definida como una métrica, pues el dominio de d no es $M \times M$. Incluso obviando esto, se tiene que si $a \in Y$ entonces $d(a, Y) = 0$, lo que es una falta a uno de los axiomas de las métricas. Aun queda trabajo.

Podemos definir otra función que tenga un dominio adecuado. Si queremos medir distancias entre conjuntos, más vale que estemos trabajando en el ambiente correcto, en este caso $\mathcal{P}(M)$. Lo natural es ocupar la distancia punto-conjunto en cada punto, y de ellas tomar la más grande.

Definición 6.45. Sea M un espacio métrico. Definimos la *distancia conjunto-conjunto* entre $X, Y \subseteq M$ como $d(X, Y) := \sup_{x \in X}\{d(x, Y)\}$.

Observación. El dominio de esta función es $\mathcal{P}(M)^2$, por lo que a priori sí podría ser una métrica, de cumplir las condiciones necesarias. Sin embargo, nos falla la simetría: consideremos $M = \mathbb{R}$, $X = (a, b)$, y $Y := \{c\}$ (con c a la derecha de b). En este caso se tiene que $d(X, Y) = |c - a|$, pero $d(Y, X) = |c - b|$, que son claramente distintos.

Ahora es cuando entra la compacidad: si X, Y son ambos compactos, entonces d es casi una métrica: cumple que $d(X, X) = 0$ y hereda la desigualdad triangular de M. Sin embargo, las observaciones anteriores muestran que falla la simetría y el que $d(X, Y) = 0$ no fuerza el que $X = Y$. Esto se arregla con la siguiente definición.

Definición 6.46. Sea M un espacio métrico, y sea $\mathcal{K}(M) := \{K \subseteq M \mid K \text{ es compacto}\}$. Definimos la *distancia de Hausdorff* en $\mathcal{K}(M)$ como

$$d_{\mathrm{H}}(X, Y) := \max\{d(X, Y), d(Y, X)\}.$$

El tomar este máximo nos otorga el que dos elementos iguales son indistinguibles, y la simetría que nos faltaba. Por tanto, estamos en nuestro derecho de decir que $(\mathcal{K}(M), d_{\mathrm{H}})$ es un espacio métrico.

6.4.2. Aproximación de Stone–Weierstraß

El teorema de aproximación de Taylor dice que toda función real $f \in \mathcal{C}^\infty$ es analítica, es decir que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ para algunos $c_n \in \mathbb{R}$. Notemos que si definimos $p_n(x) := \sum_{i=0}^{n} c_i(x-a)^i$, entonces $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Weierstraß generalizó esta noción para funciones continuas—no necesariamente diferenciables—sobre compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 6.47 (Aproximación de Weierstraß). *Toda función $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ se puede aproximar uniformemente en $[a,b]$ por una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios $[a,b] \to \mathbb{R}$.*

No probaremos este resultado pues vamos a demostrar uno aun más general. Antes de enunciarlo y probarlo necesitamos un par de herramientas técnicas.

Definición 6.48. Sean M, N un espacios métricos. Decimos que un conjunto $S \subseteq \mathcal{C}(M,N)$ *separa los puntos* de M si es que dados $x \neq y$ en M, podemos encontrar alguna $f \in S$ de modo que $f(x) \neq f(y)$ también. Es decir, si siempre hay funciones $f \in S$ que mapean puntos distintos a puntos distintos.

Ejemplo 6.49. Un caso particularmente útil es cuando estamos trabajando en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ y S contiene alguna función inyectiva en $[a,b]$ (como x, e^x, u otras dependiendo del dominio), pues esto asegura inmediatamente que S separa puntos.

Definición 6.50. Sea k un cuerpo, sea A un k-espacio vectorial, y $\varphi\colon k \to A$ un morfismo de anillos. Decimos que (A, k, φ) es una *k-álgebra*.

Ejemplo 6.51. Las funciones continuas $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ son una $\mathbb{R}$-álgebra: es claro que son un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y además la multiplicación puntual de funciones es cerrada. Acá, $k = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}([0,1],\mathbb{R})$ y $\varphi =$ evaluación.

Lema 6.52. *Sea M un espacio métrico y $A \subseteq \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ una $\mathbb{R}$-álgera que contiene a las funciones constantes y separa puntos. Entonces, dados $x, y \in M$ distintos, y $a, b \in \mathbb{R}$, existe $f \in A$ de modo que $f(x) = a$ y $f(y) = b$.*

Teorema 6.53 (Aproximación de Stone–Weierstraß). *Sea K un espacio métrico compacto, y $A \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ una $\mathbb{R}$-álgebra que contiene a las funciones constantes y separa puntos. Entonces, toda función continua $f\colon K \to \mathbb{R}$ puede ser aproximada uniformemente por funciones de A, es decir, $\overline{A} = \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Referencias

[Fre06] Fréchet, M. (1906). Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti di Palermo* **22**, 1–72.
doi.org/10.1007/BF03018603

[Ram14] Raman-Sundstroöm, M. (2014). A pedagogical history of compactness. arXiv:1006.4131v2.

[Bol17] Bolzano, B. (1817). Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.

[Wei77] Weierstrass, K. (1988). Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen.

[Bor94] Borel, E. (1894). Sur Quelques Points de la Théorie des Fonctions.

[HawMc77] Haworth, R. C. & McCoy, R. A. (1977), Baire Spaces, Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk. eudml.org/doc/268479