

REPORTE DE ESTADÍA: DINÁMICA COMPLEJA BÁSICA

BENJAMÍN MACÍAS QUEZADA*

RESUMEN. En este reporte se presentan la teoría revisada e imágenes generadas computacionalmente durante el período de la estadía de investigación. A saber, se revisan conceptos elementales de la teoría de sistemas dinámicos, análisis complejo y dinámica compleja. Se trata brevemente sobre conjuntos de Julia y de Mandelbrot cuadráticos y sus gráficos.

1. CONTEXTO

Esta actividad se realizó dentro del programa *Investigación en Verano 2021* de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Esta estadía fue dirigida por prof. Jan Kiwi.

2. PRELIMINARES

2.1. Terminología básica En dinámica se estudia el proceso de **iteración** reiterada de funciones cuyo dominio es igual a su codominio. Dado F , definimos F^j como F compuesto j veces consigo misma. Nos interesa precisamente la sucesión de las imágenes resultantes de iterar F desde un $x_0 \in A$, llamada **órbita** de x_0 bajo F , denotada $\mathcal{O}_F(x_0) := (F^j(x_0))_{j \geq 0}$. Notar que la órbita de F , cuando es invertible, podría considerar j entero y los iterados negativos son solo composiciones reiteradas de F^{-1} . Nosotros no entraremos a discutir el caso $j < 0$.

Estas órbitas pueden clasificarse según su comportamiento: las de los **puntos fijos** son constantes, y las de **puntos periódicos**, aquellos x_0 tales que $F^n(x_0) = x_0$ para algún $n > 1$, que consisten en los primeros n términos repetidos indefinidamente. También existen los **puntos eventualmente fijos** y los **eventualmente periódicos**, que son aquellos x_0 tales que no son en sí fijos (resp. periódicos), pero algún punto de su órbita sí es fijo (resp. periódico).

2.2. Análisis complejo En tanto \mathbb{C} es un cuerpo y un espacio completo bajo la métrica usual, se define la derivada de una función $F: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con U abierto en \mathbb{C} , de forma análoga al caso real, léase, decimos que F es **diferenciable** en $z_0 \in \mathbb{C}$ si el límite

$$F'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

*DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE, CHILE.

E-mail address: benjaquezadam@uc.cl.

existe. Notamos que las funciones de una variable compleja se pueden interpretar como funciones reales de dos variables (pues \mathbb{C} es un \mathbb{R} -espacio vectorial de dos dimensiones), y si una función es diferenciable en el sentido complejo entonces lo es en el sentido real (el recíproco de esta afirmación no es verdadero).

Para una función compleja, la condición de ser complejo-diferenciable es potente pues implica, por ejemplo, que es infinitas veces diferenciable en su dominio, y que es analítica, es decir, se puede aproximar localmente mediante series de potencia convergentes en todo su dominio.

La interpretación geométrica de la derivada es ilustrada mediante las funciones del tipo $z \mapsto z + \alpha$, que actúan como traslaciones, y las del tipo $z \mapsto \alpha z$, que actúan como rotaciones. Así, podemos dar sentido geométrico a la derivada compleja.

Así, por ejemplo, si tenemos $F(z) = re^{i\theta}z$ con $r, \theta \in \mathbb{R}$, entonces actúa contrayendo o expandiendo el plano por un factor de r y rotándolo según un ángulo θ . La derivada de F nos da información local: como $F'(z) = re^{i\theta}$ entonces, localmente cerca de z , la contracción/expansión es efectivamente de factor r , y la rotación según θ .

3. DINÁMICA COMPLEJA

La discusión anterior nos permite precisamente definir las nociones de dinámica en el caso complejo: nos interesan aquellos z_0 tales que $|F'(z_0)| < 1$ o $|F'(z_0)| > 1$. Estudiar estos puntos sin haberlo motivado a priori puede parecer una decisión arbitraria, pero esperamos que las siguientes consecuencias sirvan como motivación a posteriori.

Teorema 1 (Atracción por puntos fijos en \mathbb{C}). Si z_0 es un punto fijo de F tal que $|F'(z_0)| < 1$, entonces existe un disco alrededor de z_0 tal que la órbita de todos sus puntos está contenida completamente en el disco, y estas tienden a z_0 en el infinito.

Decimos que tal z_0 es un **punto fijo atractor**.

Teorema 2 (Repulsión por puntos fijos en \mathbb{C}). Si z_0 es un punto fijo de F tal que $|F'(z_0)| > 1$, entonces existe un disco alrededor de z_0 tal que la órbita de todos sus puntos (distintos a z_0) eventualmente sale y escapa del disco.

Decimos que tal z_0 es un **punto fijo repulsor**. Si z_0 es tal que $|F'(z_0)| = 1$ la situación es más delicada,

en el sentido de que a priori no se puede determinar su comportamiento sin más información. Tal z_0 llamamos un **punto fijo neutral**.

La noción de puntos atractores, repulsores y neutrales se puede extender naturalmente a puntos periódicos: si z_0 es un punto periódico de periodo n para F , entonces es un atractor (resp. repulsor) si es un atractor (resp. repulsor) para F^n . Para cerrar los preliminares, presentamos la definición de caos de Devaney:

Definición 3. Una función $F: X \subset \mathbb{C} \rightarrow X \subset \mathbb{C}$, con X compacto, se dice **caótica** si los puntos periódicos de F son densos en su dominio, es transitiva, y depende sensiblemente de condiciones iniciales.

La noción de densidad es la usual de topología. Decimos que F es transitiva si para cada par de puntos x_1, x_2 hay otro punto arbitrariamente cerca de x_1 cuya órbita se acerca arbitrariamente a x_2 . Decimos que F depende sensiblemente de condiciones iniciales si siempre hay un punto y arbitrariamente cerca de cualquier punto x cuya órbita eventualmente se aleja de x una distancia de al menos $d > 0$. Simbólicamente, $\forall x \in X, \exists \delta > 0, \forall \varepsilon, \exists y: \varepsilon$ -cercano a $x, \exists n: F^n(x)$ y $F^n(y)$ son δ -lejanos.

4. CONJUNTOS DE JULIA DE MAPAS CUADRÁTICOS

Estudiamos la familia de las funciones complejas $z \mapsto z^2 + c$ con $c \in \mathbb{C}$. Por ejemplo, en el caso $c = 0$ se tienen tres casos para la órbita de z_0 dependiendo de su módulo: si $|z_0| < 1$ la órbita colapsa al 0; si $|z_0| > 1$ la órbita se dispara a infinito; y si $|z_0| = 1$, entonces Q_0 es caótica en la circunferencia unitaria.

Cuando $|z_0| \leq 1$ entonces la órbita de z_0 bajo Q_0 permanece acotada. Esta noción se extiende naturalmente para todo $c \in \mathbb{C}$: decimos que la órbita de z_0 bajo Q_c es acotada si existe algún $A > 0$ tal que $|Q_c^j(z_0)| < A$ para todo $j \geq 0$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 4. El **conjunto de Julia lleno** de Q_c , denotado K_c es el conjunto de todos los puntos cuyas órbitas son acotadas. El **conjunto de Julia** de Q_c es la frontera de K_c , y lo denotamos J_c .

La discusión anterior nos permite observar que $K_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y que $J_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

El siguiente teorema es útil al momento de determinar K_c : nos indica que si $|c| > 2$, entonces tenemos $K_c \subseteq \{|z| < |c|\}$. Usando esto, podemos determinar si un punto z pertenece a K_c solamente estudiando

su módulo, en vez de calculando el límite correspondiente:

Teorema 5 (Criterio de escape). Si $|z| \geq |c| > 2$ entonces $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$.

Demostración. Supongamos las hipótesis del enunciado. Notar que

$$|Q_c(z)| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1),$$

y que $|z| - 1 > 1 + \lambda$ para algún $\lambda > 0$. Como $|Q_c(z)| > |z|$ repetimos el argumento, para obtener en la n -ésima repetición que $|Q_c^n(z)| > (1 + \lambda)^n |z|$, de lo que $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. \square

Este teorema nos otorga un resultado de vital importancia pues nos permitirá desarrollar un algoritmo para computar una aproximación de K_c :

Corolario 6. Si $|Q_c^j(z)| > \max(|c|, 2)$, para algún $j \geq 0$, entonces $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$.

Por tanto, para determinar aproximadamente si algún $z \in \mathbb{C}$ pertenece a K_c , podemos utilizar el siguiente algoritmo:

Teorema 7 (Algoritmo para K_c). Elegimos un número máximo de iteraciones N , y para cada punto z de la región se calculan los primeros N elementos de la órbita de z bajo Q_c . Si para algún $i \leq N$ se tiene que $|Q_c^i(z)| > \max(|c|, 2)$ se detiene la iteración y se pinta z de blanco. De lo contrario, se pinta de negro. El conjunto de los puntos negros es una aproximación al conjunto de Julia lleno.

Una implementación en C++ original de este algoritmo existe en [4], que colorea dependiendo de la cantidad de iteraciones que le tomó a cada punto salir o no del disco correspondiente. También se implementó coloración suave [7]. Presentamos algunas de las imágenes obtenidas en Fig. 1.

5. CONJUNTO DE MANDELBROT

Un resultado fundamental de la dinámica compleja es el siguiente, que indica que hay esencialmente dos tipos de conjuntos de Julia llenos:

Teorema 8 (Dicotomía Fundamental). Para Q_c , o la órbita de 0 escapa a infinito lo que implica que K_c consiste en infinitas componentes disjuntas, o la órbita de 0 permanece acotada lo que implica que K_c es conexo.

Esto motiva un concepto sumamente importante:

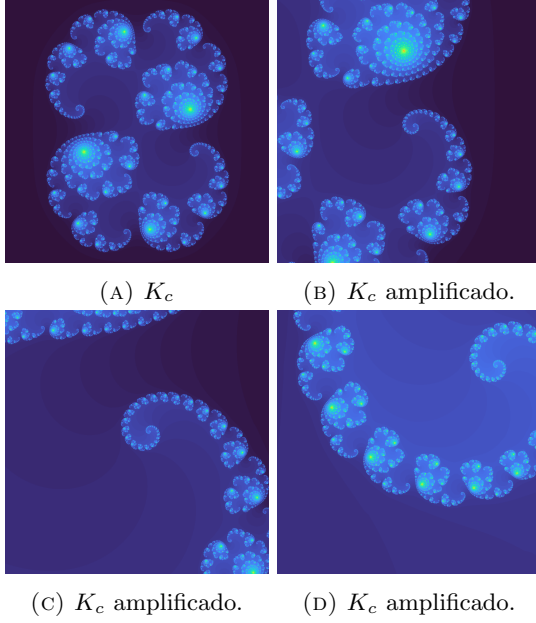


FIGURA 1. K_c , $c = 0,285 + 0,01i$
 $N = 1000$. Zoom a punto fijo.

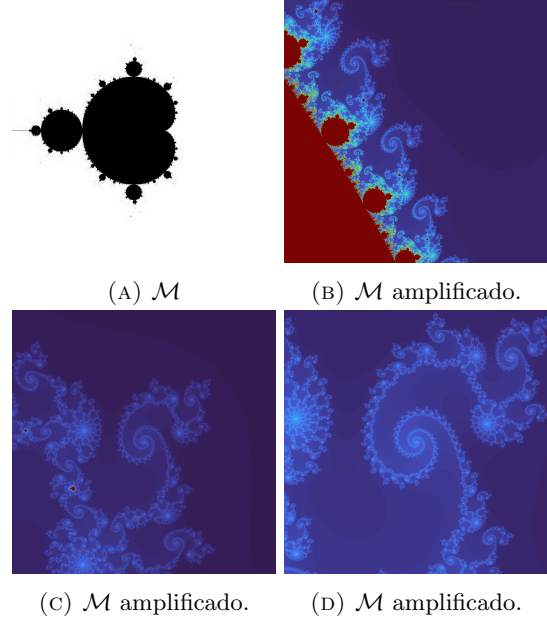


FIGURA 2. \mathcal{M} , $N = 1000$. Zoom a
punto $-0,77568377 + 0,13646737i$.

Definición 9. El conjunto de Mandelbrot, denotado \mathcal{M} consiste en todos los valores de $c \in \mathbb{C}$ para los que K_c es conexo, es decir, todos los c tales que la órbita de 0 bajo Q_c es acotada.

Utilizando nuevamente el teorema (5), podemos desarrollar un algoritmo similar al de K_c para computar \mathcal{M} :

Teorema 10 (Algoritmo para \mathcal{M}). Se elige un número máximo de iteraciones N , y para cada punto c del plano se calculan los primeros N elementos de la órbita de 0 bajo Q_c . Si para algún $i \leq N$ se tiene que $|Q_c^i(0)| > 2$ se detiene la iteración y se pinta c blanco. De lo contrario, se pinta negro. El conjunto de los puntos negros es una aproximación de \mathcal{M} .

Una implementación original en C++ existe en [5]. También implementamos coloración dependiente de la cantidad de iteraciones que tomó a cada punto escapar o no, y coloración suave. Presentamos algunas imágenes resultantes de este programa en Fig. 2.

6. APÉNDICE

Una selección de imágenes resultantes, de las implementaciones [4] y [5], que incluye las de Fig. 1 y Fig. 2 se encuentran almacenadas en [6] en su resolución original.

REFERENCIAS

- [1] Lars V. Ahlfors. *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1953. ISBN: 0-07-000657-1.
- [2] Robert L. Devaney. *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment*. Addison-Wesley studies. Perseus Books, 1948. ISBN: 0-201-55406-2.
- [3] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley studies. Westview Press, 1948. ISBN: 0-8133-4085-3.
- [4] Benjamín Macías. *filled-julia-set*. URL: github.com/bmq-nlm/filled-julia-set.
- [5] Benjamín Macías. *mandelbrot*. URL: github.com/bmq-nlm/mandelbrot.
- [6] Benjamín Macías. *Some filled Julia sets of quadratic complex maps*. URL: imgur.com/a/TUt5aMl.
- [7] Linas Vepstas. *Renormalizing the Mandelbrot Escape*. URL: linas.org/art-gallery/escape/escape.html.