Superficies elípticas racionales

Benjamín Macías Quezada

19 de mayo de 2022

Índice

1. Recuerdo y preliminar

Usaremos la misma notación que [SS19], a saber, dada una variedad proyectiva X, denotamos $e(X)$ a su característica de Euler–Poincaré topológica, y dado un haz coherente $\mathscr{F}$ en un esquema propio, denotamos como $\chi(\mathscr{F})$ a su característica de Euler. En particular, si $\mathscr{O}_X$ es el haz estructural de X, su característica de Euler $\chi(\mathscr{O}_X)$ también será denotada como $\chi(X)$. S siempre denotará una superficie suave proyectiva, y se especificará la fibración en caso de ser elíptica.

Nuestro objeto de estudio son las *superficies elípticas*, que son superficies suaves proyectivas equipadas con alguna *fibración elíptica*. Estas son morfismos (sobreyectivos, con fibras conexas) a alguna curva suave $\pi\colon S \to C$ de modo que sus fibras son curvas suaves proyectivas de género 1, y solo finitas son singulares (aka., *fibras malas*).

También seguimos las convenciones de [SS19], y solicitamos que S sea *relativamente minimal* (ie., que no contenga curvas (-1)), de modo que al explotar en un punto la fibra resultante no contenga al divisor excepcional. También, asumimos que siempre hay una *sección* distinguida (ie. un morfismo $\sigma_0\colon C \to S$ tal que $f \circ \sigma_0 = \mathrm{id}_C$), de modo que identificamos un punto distinguido en cada fibra, por lo que de hecho las fibras serán curvas elípticas. En este contexto, las secciones forman un grupo que denotamos como $\mathrm{MW}(S, \pi)$.

Las fibras malas son de particular interés pues acarrean mucha información de la superficie en cuestión. Un primer resultado es:

Teorema 1 (Lang–Néron). *Si la superficie elíptica $\pi\colon S \to C$ tiene fibras malas, entonces $\mathrm{MW}(S, \pi)$ es finitamente generado.*

En la siguiente sección veremos cómo se presentan algunos invariantes en presencia de una fibración elíptica con fibras malas. Motivado por este interés, Néron y Kodaira dieron una clasificación de estas fibras de forma independiente (cf. [Kod60, Kod64, Né64]), y posteriormente Tate entregó un algoritmo que permite identificar el tipo de fibra mala en la clasificación de Néron–Kodaira (cf. [Tat75]).

Grupo de Néron–Severi

Otro invariante relevante es el *grupo de Néron–Severi* de una superficie S,

$$\mathrm{NS}(S) := \mathrm{div}(S)/\approx,$$

donde $\approx$ es la relación de *equivalencia algebraica*. Intuitivamente, dos divisores son algebraicamente equivalentes si podemos degenerar uno al otro. $\mathrm{NS}(S)$ es un grupo abeliano finitamente generado, y su rango se llama el *número de Picard* de S, denotado $\rho(S) := \mathrm{rk}(\mathrm{NS}(S))$. Por ejemplo, se puede probar que $\mathrm{NS}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$, por lo que $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$.

2. Invariantes de superficies elípticas

Las superficies elípticas $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$ que tienen $v(a_4) < 4$ y $v(a_6) < 6$ admiten una forma de Weierstrass minimal definida globalmente. Definimos n el menor entero tal que $\deg(a_i) < ni$ para cada i. Este número resulta coincidir con el *género aritmético* $p_a := \chi(\mathscr{O}_S) - 1$, y nos indica dónde cae la superficie elíptica en la clasificación de Enriques–Kodaira:

Teorema 2 (Clasificación de Enriques–Kodaira). *Dada una superficie algebraica S, todo modelo minimal S' de S cae en alguno de los siguientes casos:*

$\kappa(S)$	Nombre genérico para S'
-1	Racional, reglada
0	Abeliana, K3, Enriques, Bielíptica
1	Elíptica
> 2	de tipo general

Si además la superficie es elíptica $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$, los modelos minimales son:

$\kappa(S)$	p_a	Nombre genérico para S'
-1	1	Elíptica racional
0	2	K3
1	> 2	Honestamente elíptica

2.1. Característica y número de Euler

Para una superficie elíptica $\pi\colon S \to C$ hay una fórmula para $e(S)$ dependiente del número de Euler de cada fibra y del número de ramificación salvaje en cada punto. En cada fibra $F_v := \pi^{-1}(v)$, con $v \in C$, se tiene que

$$e(F_v) := \begin{cases} 0 & \text{si } F_v \text{ es suave,} \\ m_v & \text{si } F_v \text{ es multiplicativa,} \\ m_v + 1 & \text{si } F_v \text{ es aditiva.} \end{cases}$$

Sabiendo esto, podemos calcular $e(S)$ a través de:

Teorema 3. *Dada $\pi\colon S \to C$ una superficie elíptica, se tiene que*

$$e(S) = \sum_{v \in C} e(F_v) + \delta_v.$$

Esta suma es finita porque casi todas las fibras son suaves (ie. casi todos los sumandos son 0). El índice de ramificación salvaje es 0 salvo en características 2 y 3, y cuando la fibra mala es aditiva.

En particular, $e(S)$ siempre es positivo, por lo que de la fórmula de Noether, se deduce que

$$\chi(S) = \frac{1}{12} e(S),$$

también lo es.

2.2. Divisor y bundle canónicos

Recordemos que en una superficie S, en el haz Ω^1_S de las 1-formas diferenciales en S, el producto exterior $\wedge$ define un haz invertible

$$\omega_S := \wedge^2\Omega^1_S,$$

llamado el bundle canónico de S, que tiene asociado de forma canónica un divisor de Cartier $K_S \in \mathrm{Pic}(S)$, llamado el divisor canónico de S. Por ejemplo, $K_{\mathbb{P}^2} = -3L$, donde L es una recta. En el caso de superficies elípticas, el bundle canónico tiene una descripción dependiente de la fibración y sus fibras malas:

Teorema 4 (Fórmula para el bundle canónico). *El bundle canónico de una superficie elíptica $\pi\colon S \to C$ es dado por*

$$\omega_S = \pi^*(\omega_C \otimes \mathcal{L}^{-1}),$$

donde $\mathcal{L}$ es un bundle de rectas de grado $-\chi(S)$ en C. En particular, se puede deducir que

$$K_s \approx [2p_g(C) - 2 + \chi(S)]F,$$

donde F es un fibra, y que $K_S^2 = 0$.

Por ejemplo, si la curva de base fuese $C = \mathbb{P}^1$, ésta tiene género $p_g(\mathbb{P}^1) = 0$, y la fórmula anterior indica que

$$K_S = (-2 + \chi(S))F.$$

3. Superficies elípticas racionales

Las superficies racionales son aquellas birracionales a $\mathbb{P}^2$. Ahora, vamos a estudiar superficies racionales y elípticas. Como primera consideración, siempre podemos asumir que la curva base es $\mathbb{P}^1$ gracias a un teorema de Lüroth.

3.1. Invariantes de superficies elípticas racionales

Recordemos que q y p_g son invariantes birracionales. Como $q(\mathbb{P}^2) = p_g(\mathbb{P}_2) = 0$, se tiene que $q(S) = p_g(S) = 0$. Esto, más el hecho que $\chi = p_g - q + 1$, prueba que:

Proposición 5. *Toda superficie elíptica racional S tiene $\chi(S) = 1$.*

Por otro lado, la fórmula de Noether indica que $e(S) + 12K_S^2 = 12\chi(S)$, por lo que la proposición anterior y la fórmula para el bundle canónico en el caso elíptico prueban que:

Proposición 6. *Toda superficie elíptica racional tiene* $e(S) = 12$.

Calculemos el número de Picard de S. Como no es invariante birracional, no podemos llegar y copiar el de $\mathbb{P}^2$. Esto es un inconveniente, pero no todo está perdido pues la diferencia $\lambda(S) = b_2(S) - \rho(S)$, llamada el *número de Lefschetz de* S, sí lo es. Sabemos que $\rho(\mathbb{P}^2) = 1 = b_2(\mathbb{P}^2)$, por lo que $\lambda(S) = 0$, y por tanto $b_2(S) = \rho(S)$. Recordemos que $e(S)$ es la suma alternada de los números de Betti, $e(S) = 2 - 2b_1(S) = b_2(S)$, lo que se traduce a que

$$12 = 2 - 2b_1 + \rho(S),$$

por lo que falta conocer el valor de $b_1(S)$ para obtener lo que queremos. Este número de Betti es el rango de la variedad abeliana $\mathrm{Pic}^0(S)$, que es trivial. Así:

Proposición 7. *Toda superficie elíptica racional tiene* $\rho(S) = 10$.

3.2. Pencils de cúbicas

Dados $F, G \in k[X, Y, Z]$ homogéneos cúbicos coprimos, podemos considerar el pencil de cúbicas S definido por

$$sF + tG = 0, \quad [s : t] \in \mathbb{P}^1,$$

que de hecho corresponde a una superficie racional con $3^2 = 9$ puntos de base. Nos gustaría establecer una estructura de superficie elíptica. Para ello, consideremos el siguiente resultado:

Lema 8. *Si entre los puntos base del pencil S no hay tres colineales ni múltiples (ie., son todos distintos), las fibraciones de género uno $\pi \colon S \to \mathbb{P}^1$ tienen todas sus fibras irreducibles. En este caso, la fibración es elíptica.*

Por lo que bastaría encontrar una fibración de género uno $\pi \colon S \to \mathbb{P}^1$ para concluir lo deseado. Para esto, podemos considerar S como variedad proyectiva en $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, de modo que la proyección a $\mathbb{P}^2$ exhiba a la superficie como la explosión en los nueve puntos de base del pencil, lo queda una fibración de género uno $S \to \mathbb{P}^1$. Por el lema anterior:

Corolario 9. *Todo pencil de cúbicas con puntos de base distintos sin tres colineales admite una fibración elíptica $S \to \mathbb{P}^1$, es decir, se realiza como una superficie elíptica racional.*

La gracia de los pencils de cúbicas, es que existe una suerte de conversa para el resultado anterior:

Teorema 10. *Todo superficie elíptica racional admite un modelo como pencil de cúbicas.*

Referencias

[Kod60] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces, i*, Annals of Mathematics **71** (1960), no. 1, 111–152.

[Kod64] ______, *On compact analytic surfaces: Ii*, Annals of Mathematics **77** (1964), no. 3, 563–626.

[Né64] André Néron, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **21** (1964), 5–128 (fr). MR 31 3423

[SS19] Matthias Schütt and Tetsuji Shioda, *Mordell–Weil lattices*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer, Singapore, 2019.

[Tat75] J. Tate, *Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil.*, Modular functions of one variable. IV. Proceedings of the international summer school, University of Antwerp, RUCA, July 17 – August 3, 1972, Berlin: Springer, 1975, pp. 33–52 (English).