# Análisis real

Benjamín Macías Quezada

Ver. 2024

# Índice

**Resumen**

Este texto comenzó como apuntes personales del curso de Análisis Real MAT2515 impartido por el profesor Duván Henao en la Pontificia Universidad Católica de Chile en primavera de 2021. Posteriormente, decidí completar lo que había escrito hasta cubrir, más menos, todo el contenido que se ve usualmente en nuestro curso de pregrado, apoyándome fuertemente en el maravilloso libro de Elon Lages Lima, *Espaços Métricos* [Lim14].

Este curso es fundamental para cualquier estudiante de matemática. Mi idea es que estas notas sirvan de introducción al área, y como base sólida para el estudio posterior de, por ejemplo, Análisis Complejo, Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Integración, Análisis Funcional, y Teoría Espectral.

Es pertinente comentar sobre la desición de contenidos que he hecho. He optado, generalmente, por un enfoque minimalista, pero sin escatimar en recursos pedagógicos. El motivo es que, al haber ya pasado por los cursos mencionados anteriormente, he notado dos posibles sitios en los que optimizar recursos. Por un lado existe solapamiento no-trivial entre lo visto en cada curso, y por otro, se suelen estudiar teoría y resultados que no son particularmente útiles sino solo cuando están en algún contexto particular.

Por ejemplo, podríamos discutir axiomas de separabilidad y contabilidad, pero resulta que todos los espacios métricos, en particular espacios de Hilbert y de Banach, satisfacen estos axiomas. El interés viene al querer estudiar espacios vectoriales topológicos no-metrizables, que ocurren naturalmente en áreas más especializadas. Otro ejemplo es el Teorema de Hanh–Banach, que si bien es muy importante, no tiene mayores aplicaciones hasta que estudiemos operadores lineales y dualidad. Otra instancia es el Teorema de Baire.

Así, he decidido cubrir el contenido que es útil para el resto de cursos, pero he omitido el que se debería estudiar con lujo de detalle en esos mismo cursos.

Está de más decir que debo haber cometido muchos errores, tanto en la matemática como en la exposición—de los cuales no me hago responsable. Espero que a medida que sean encontrados me los puedan comunicar a mi correo benjaquezadam@uc.cl para corregirlos.

# 1. Espacios métricos y su topología

Maurice Fréchet, en su tesis de 1906 [Fré06], apuntó a generalizar enormemente la teoría y resultados de cálculo, principalmente a espacios de funciones. Una de sus más grandez hazañas fue introducir el concepto de *espacio métrico*, que es fundamental en la matemática contemporánea.

## 1.1. Definición y ejemplos de espacios métricos

Un espacio métrico es un conjunto equipado con una noción de distancia entre dos puntos. Intuitivamente, cualquier noción decente de distancia debe cumplir varias propiedades mínimas, que son rescatadas por la definición:

**Definición 1.1.** Una *métrica* en un conjunto $M$ es una función $d\colon M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades para todos $x, y, z \in M$:

(M1) *Coincidencia:* $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(M2) *Simetría:* $d(x, y) = d(y, x)$.

(M3) *Desigualdad triangular:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

El número $d(x, y)$ se llama *distancia* entre $x$ e $y$, y el par $(M, d)$ se llama un *espacio métrico*.

La definición indica que la distancia es positiva salvo cuando se mide la distancia entre un punto y sí mismo, que da lo mismo el orden en el que se mida la distancia, y que la distancia más corta entre dos puntos es aquella que no toma ningún desvío.

*Observación.* Tres cosas.

1. El nombre de "coincidencia" en (M1) no es estándar. De hecho, no hay estándar, por lo que decidimos de forma completamente arbitraria acoger el nombre que Fréchet usó originalmente. Otros nombres incluyen "separación", "no-degeneración", y "propiedad de indistinguibles".

2. Hay autores que escriben la no-negatividad de $d$ de forma explícita como un cuarto axioma. Nosotros hemos elegido hacerlo de forma implícita, pero de todos modos de debe verificar en una demostración formal.

3. La lista de axiomas que dimos es redundante: basta asumir que $d$ cumple (M1) y (M3) para deducir la no-negatividad y (M2). El motivo de la redundancia es meramente histórico y convencional, y se encontrará la misma lista en cualquier texto decente.

**Ejemplo 1.2.** Uno de los ejemplos clásicos es $(\mathbb{R}^n, d)$, donde

$$d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

la *métrica usual*. Claramente es una función no-negativa, porque es raíz cuadrada de un número no-negativo. Estudiemos el resto de condiciones: (M1) viene del hecho de que una suma de números no-negativos puede ser 0 exclusivamente en el caso que cada sumando sea 0, mientras que (M2) es debido a que $(a-b)^2 = (b-a)^2$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$. (M3) es no-trivial, y en este caso se conoce como la *desigualdad de Cauchy–Schwarz* , y debería sonar familiar del curso de Álgebra Lineal.

**Ejemplo 1.3.** En cualquier conjunto $M$ se puede definir la función

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Esta función define una métrica en $M$, lo que se puede verificar por fuerza bruta. Esta métrica se llama *métrica cero-uno* o *métrica discreta*. Es de gran utilidad para producir contraejemplos.

**Ejemplo 1.4.** Sea $(M, d)$ un espacio métrico. Cualquier subconjunto $S \subseteq M$ puede ser realizado como un espacio métrico considerando la restricción de $d$ a $S$, en otras palabras, $(S,\, d|_{S\times S})$ es un espacio métrico: las tres condiciones de la Definición 1.1 se cumplen para todos $x, y, z \in M$, por lo que en particular se cumplen para todos $x, y, z \in S$. Este espacio se llama un *subespacio métrico* de $M$, y $d|_{S\times S}$ se llama la *métrica subespacio inducida* por $(M, d)$.

**Ejemplo 1.5.** Dados dos espacios métricos $(M_1, d_1)$ y $(M_2, d_2)$, podemos definir su *producto*. El conjunto de base será el producto cartesiano $M_1 \times M_2$, pero se pueden definir distintas métricas. Por nombrar algunas, tenemos para cada par de puntos $z := (x, y)$, $z' := (x', y') \in M_1 \times M_2$, que las funciones

$$\begin{aligned} d'(z,z') &:= d(x,x') + d(y,y') \\ d''(z,z') &:= \text{máx}\,\{d(x,x'),\, d(y,y')\} \\ d'''(z,z') &:= \sqrt{d(x,x')^2 + d(y,y')^2} \end{aligned}$$

son métricas en $M_1 \times M_2$.

Así, no hay una forma “canónica” de introducir una métrica producto, lo que puede parecer problemático—o al menos incómodo—al trabajar en espacios producto. Esto es evidencia a favor de una teoría de *espacios topológicos* abostractos, pues resulta que resultados que parecen “métricos” en naturaleza, son topológicos e independientes de la métrica. En particular, las tres métricas mencionadas *inducen* la misma topología en $M_1 \times M_2$, y en tal caso decimos que tales métricas son *topológicamente equivalentes*.

**Ejemplo 1.6.** Recordemos que un $\mathbb{R}$-espacio vectorial es un grupo abeliano $(V, +)$ equipado con una acción compatible del anillo $\mathbb{R}$. Todo producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en $V$ induce una norma $\|\cdot\|$ en $V$ a través de

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

la que a su vez induce una métrica en $V$ a través de

$$d(v, w) := \|v - w\| .$$

**Ejemplo 1.7.** Dado un conjunto $X$, denotamos el conjunto de las *funciones* $X \to \mathbb{R}$ *acotadas* como $\mathcal{B}(X) := \{f \colon X \to \mathbb{R} \text{ acotada}\}$. En este conjunto, la norma

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

induce la métrica

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x).|$$

El paso no-trivial es verificar la desigualdad triangular de esta norma. En efecto, para todas $f, g, h \in \mathcal{B}(X)$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$. Tomando supremo,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)|,$$

lo que podemos hacer gracias a la hipótesis de que las funciones son acotadas.

**Ejemplo 1.8.** En particular, tomando distintos $X$ en el Ejemplo anterior obtenemos varios espacios de interés. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^n$, obtenemos la *norma-supremo*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j|.$$

También, para $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, obtenemos el *espacios de sucesiones acotadas* $\ell^\infty$, con su norma-supremo,

$$\|(x_j)_{j \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j|.$$

Finalmente, si $X$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, también obtenemos un espacio normado $\mathcal{B}([a, b])$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

**Ejemplo 1.9.** En virtud del Ejemplo 1.4, podemos considerar subespacios lineales de espacios normados, que seguirán siendo espacios normados. Por ejemplo, el conjunto $\mathcal{C}([a, b])$ es subespacio de $\mathcal{B}([a, b])$ gracias al Teorema del Valor Extremo, y por tanto hereda su norma-supremo. Ejemplos de subespacios de $\ell^\infty$ son el espacio $c$ de las sucesiones convergentes, $c_0$ de las sucesiones convergentes a 0, y $c_{00}$ de las sucesiones eventualmente nulas.

**Ejemplo 1.10.** Otra familia de normas en los espacios del Ejemplo 1.8 son las normas-$p$, con $p \in [1, \infty)$. En $\mathbb{R}^n$, podemos considerar la función

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p},$$

y análogamente en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la función

$$\|(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}.$$

También en $\mathcal{C}([a, b])$, podemos definir la función

$$\|f\|_p := \left(\int |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p.}$$

Considerando los subconjuntos donde estas sumas e integral convergen, obtenemos efectivamente normas. Es claro que dichas funciones son no-negativas, simétricas, y satisfacen no-coincidencia. El desafío está en probar la desigualdad triangular, y utilizamos el resto de esta sección para probar esto rigurosamente.

La desigualdad triangular de $\|\cdot\|_p$ tiene un nombre especial: la *desigualdad de Minkowski*. Esta se prueba a través de la *desigualdad de Hölder*, la que a su vez necesita de la *desigualdad de Young*. Vamos en orden:

**Lema 1.11 (Desigualdad de Young).** *Sean $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y $p, q > 1$. Si se tiene que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Demostración.* Daremos un argumento por convexidad. Recordemos que la función $f(x) := e^x$ es convexa, es decir, que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ el segmento de recta que conecta $f(x)$ y $f(y)$ está sobre el gráfico de $f$. Es decir, para cualquier $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + [1-\lambda]y) \leq \lambda f(x) + [1-\lambda]f(y). \tag{1.11.1}$$

Ahora, notamos que si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, por lo que eligiendo $\lambda := \frac{1}{p}$ forzamos que $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. Reemplazando $x := \log(a^p)$ y $y := \log(b^q)$ en la Ecuación 1.11.1, se obtiene el resultado enunciado. ☐

**Lema 1.12 (Desigualdad de Hölder).** *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $1 < p, q < \infty$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

*Demostración.* Notamos que si $x$ o $y$ son 0, entonces la desigualdad es cierta trivialmente, por lo que podemos suponer que $x, y \neq 0$. Considerando $u := \frac{x}{\|x\|_p}$ y $v := \frac{y}{\|y\|_q}$ es claro que $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$, y por tanto también $\|u\|_p^p = \|v\|_q^q = 1$.

Ahora, para cada $i = 1, \ldots, n$ notamos que por la desigualdad de Young (lema 1.11) se tiene que $|u_i v_i| \leq \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q}$. Sumando estas $n$ desigualdades, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |u_i v_i| = \|uv\|_1 &\leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q} \right) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |v_i|^q \\
&= \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.
\end{aligned}$$

□

Finalmente, podemos probar la desigualdad triangular que buscábamos:

**Teorema 1.13 (Desigualdad de Minkowski).** *Sea $1 < p < \infty$. Para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

*Demostración.* Asumamos la notación del enunciado. Usando la desigualdad triangular usual se tiene que

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|)^p &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \\
&= \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Acotaremos las dos últimas sumas usando la desigualdad de Hölder (lema 1.12). Notemos que $q := \frac{p}{p-1}$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Denotemos por $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ a los vectores cuyas coordenadas $j$-ésimas coordenadas son

$$a_j := |x_j|, \qquad b_j := (|x_i| + |y_i|)^{p-1}, \qquad c_j := |y_i|,$$

Es claro que $\|a\|_p = \|x\|_p$ y $\|c\|_p = \|y\|_p$. Notamos que se cumplen las hipótesis de la desigualdad Hölder, por lo que

$$\begin{aligned}\|ab\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1} \\ &\leq \|a\|_p \|b\|_q \\ &= \|a\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q},\end{aligned}$$

Análogamente, $\|cb\|_1 \leq \|c\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$. Como por definición tenemos $(p-1)q = p$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p \leq (\|a\|_p + \|c\|_p)\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/q}.$$

Dividiendo a ambos lados por el último término a la derecha, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|a\|_p + \|c\|_p.$$

Como $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, se tiene que el lado izquierdo es igual a $\|x+y\|_p$, por lo que se tiene el resultado enunciado. □

**Ejemplo 1.9** (Continuado)**.** Así, si probamos que los conjuntos

$$\ell^p := \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < \infty\right\}, \quad \text{y} \quad L^p := \left\{f \in \mathcal{C}([a,b]) : \|f\|_p < \infty\right\},$$

son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, el resultado anterior verifica que son $\mathbb{R}$-espacios normados con las normas $p$-respectivas. Los llamamos espacios de las *sucesiones $p$-sumables* y de *funciones $p$-integrables*, respectivamente.

## 1.2. Topología de un espacio métrico

Dado un conjunto $X$, una *topología en $X$* es una colección de subconjuntos $\tau$ de $X$ que contenga a $\emptyset, X$, que sea cerrada bajo uniones arbitrarias, y bajo intersecciones finitas. Cada elemento de $\tau$ se llama un conjunto *abierto*, y el par $(X,\tau)$ se llama un *espacio topológico*.

En esta sección vamos a abstraer los conceptos fundamentales de $\mathbb{R}$ a espacios métricos. Debemos partir definiendo una topología, es decir, declarar qué es un abierto en un espacio métrico. Para esto, vamos a apoyarnos en un tipo de conjunto más sencillo: las bolas. Estas nos van a permitir identificar cuándo un punto está "dentro" topológicamente de un conjunto. Un abierto será un conjunto que solo tiene "interior".

**Definición 1.13.** Sea $M$ un espacio métrico y $a \in M$. Dado $r > 0$, definimos la *bola abierta* de centro $a$ y radio $r$ como el conjunto de puntos de $M$ que están a una distancia menor que $r$ de $a$, léase, $B(a, r) := \{x \in M : d(x, a) < r\}$.

**Ejemplo 1.14.**

1. Sea $M$ un espacio métrico con la métrica cero-uno. Por definición, en este espacio cualquier par de puntos están a distancia menor o igual a 1, por lo que para todo $a \in M$ se tiene que

$$B(a, r) = \begin{cases} M & \text{si } r > 1, \\ \{a\} & \text{si } r \leq 1. \end{cases}$$

2. En $\mathbb{R}$ con la métrica usual se tiene que

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x - a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} \\ &= (a - r, a + r). \end{aligned}$$

**Definición 1.15.** Sea $M$ un espacio métrico, y $X \subseteq M$. Decimos que un $a \in X$ es un *punto interior* de $X$ si es centro de una bola abierta en $X$, es decir, si existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq X$. El conjunto de todos los puntos interiores a $X$ en $M$ se llama *interior* de $X$ en $M$, y se denota como $\operatorname{int} X$. Decimos que $A \subseteq M$ es un conjunto *abierto* en $M$ si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A = \operatorname{int} A$.

**Ejemplo 1.16.**

1. Recordemos que cualquier intervalo abierto centrado en un número racional contiene números irracionales. Por tanto, el interior de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es vacío. Es decir, $\mathbb{Q}$ no es un abierto de $\mathbb{R}$.

2. Sea $M$ un espacio métrico. Toda bola abierta en $M$ es un conjunto abierto: sea $B(a, r)$ una bola abierta centrada en $a \in M$ de radio $r > 0$.

   Debemos probar que para cada $x \in B(a, r)$, podemos encontrar un radio $s > 0$ de modo que $B(x, s) \subseteq B(a, r)$.

   Consideremos $s := r - d(a, x) > 0$. Por definición, si $y \in B(x, s)$, entonces $d(x, y) < s$. Por tanto, por desigualdad triangular, notamos que

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + s = r,$$

   es decir, $y \in B(a, r)$, por lo que $B(x, s) \subseteq B(a, r)$.

3. Sea $M$ un espacio métrico. El mismo $M$ es abierto en $M$, pues todas las bolas centradas en $a \in M$ están contenidas en $M$. También $\emptyset \subseteq M$ es abierto en $M$ por vacuidad.

4. Sea $M$ un espacio métrico, y $F := \{a_1 \dots, a_n\} \subseteq M$ un subconjunto finito de $M$. Se tiene que $M - F$ es abierto en $M$: en efecto, para cada $x \in M - F$ podemos considerar
$$r := \min_{i=1,\dots,n} \{d(x, a_i)\}.$$
Se sigue que $B(x, r)$ es una bola abierta que por construcción no contiene a ninguno de los $a_i$, es decir, que $B(x, r) \subseteq M - F$. Esto es precisamente que $M - F$ es abierto en $M$.
5. Todo intervalo real abierto acotado $(a, b)$ es abierto en $\mathbb{R}$ pues es la bola abierta de centro $\frac{b+a}{2}$ y radio $\frac{b-a}{2}$.

Como mencionamos antes, los abiertos métricos son una topología:

**Proposición 1.17.** *Sea $M$ espacio métrico. La colección $\tau := \{A \subseteq M \text{ abierto}\}$ define una topología en $M$, es decir, se tiene que:*

1. *$M, \emptyset \in \tau$.*
2. *Si $A_1, \dots, A_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$.*
3. *Sea $L$ es un conjunto de índices. Entonces si $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.*

*Demostración.* Probemos que se satisfacen los axiomas de topología.

1. Esto fue probado en el Ejemplo 1.16(3).
2. Sean $A_1, \dots, A_n \in \tau$, y sea $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, es decir $a \in A_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Como cada uno de estos conjuntos es abierto, existe $r_i > 0$ tal que $B(a, r_i) \subseteq A_i$. Consideremos
$$r := \min_{i=1,\dots,n} \{r_i\}.$$
Por tanto, se tiene que $B(a, r) \subseteq B(a, r_i) \subseteq A_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Esto es precisamente que $B(a, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$, es decir, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es efectivamente abierto en $M$.
3. Sean $L$ y cada $A_\lambda$ como en el enunciado. Sea $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Se sigue que existe algún $\lambda \in L$ tal que $A_\lambda$ es abierto en $M$, es decir, que existe un $r_\lambda > 0$ de modo que $B(a, r_\lambda) \subseteq A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Por tanto, el conjunto en cuestión es efectivamente abierto en $M$. □

*Observación.* Una intersección arbitraria de conjuntos abiertos no es necesariamente un conjunto abierto: un singleton $\{a\} \subseteq M$ puede ser abierto en $M$ solo en el caso que sea *aislado*, en el sentido que *sea* una bola métrica. Este es el caso, por ejemplo, de métrica cero-uno, en la que todo punto es aislado.

Podemos caracterizar a los abiertos métricos como aquellos conjuntos que son uniones de bolas abiertas. En lenguaje topológico, esto dice que las bolas abiertas son una *base* de la topología:

**Proposición 1.18.** *Sea $M$ un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq M$ es abierto en $M$ si y solo si $A$ es una unión de bolas abiertas.*

*Demostración.* Sea $M$ un espacio métrico. Probemos ambas implicancias.

$\Longleftarrow$ : Si $A \subseteq M$ es una unión de bolas abiertas en $M$, entonces $A$ es unión de abiertos en $M$, y por tanto un conjunto abierto de $M$.

$\Longrightarrow$ : Sea $A \subseteq M$ abierto en $M$, por lo que para cada $x \in A$, podemos encontrar $r_x > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Así, se tiene que $\{x\} \subseteq B(x, r_x) \subseteq A$. Tomando unión sobre cada $x \in A$, se tiene que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A,$$

y por tanto $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$, lo que prueba lo enunciado. $\square$

Las funciones continuas de Cálculo son aquellas que envían vecindades de un punto, a vecindades de la imagen del punto. La definición para espacios métricos es la misma, intercambiando el valor absoluto por la distancia:

**Definición 1.19.** Sean $(M, d)$ y $(N, \rho)$ espacios métricos. Decimos que una función $f \colon M \to N$ es *continua* en el punto $a \in M$ si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que cada vez que $d(x, a) < \delta$, se tenga que $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Decimos que $f$ *continua* si lo es en todos los puntos de $M$.

*Observación.* En lenguaje de bolas, $f \colon M \to N$ es continua en $a \in M$ si y solo si dada cualquier bola $B_N := B(f(a), \varepsilon)$, existe una bola $B_M := (a, \delta)$ de modo que $f(B_M) \subseteq B_N$.

**Lema 1.20.** *La composición de funciones continuas es continua.*

*Demostración.* Sean $(M, d)$, $(N, \rho)$, $(O, \sigma)$ espacios métricos, y sean $f \colon M \to N$ y $g \colon N \to P$ continuas. Dados $\varepsilon, \xi > 0$, la continuidad de $g$ indica que hay un $\delta_2 > 0$ tal que si $\rho(z, w) < \delta_2$, entonces $\sigma(g(z), g(w)) < \varepsilon$. Por otro lado, la continuidad de $f$ nos permite encontrar $\delta_1 > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta_1$, entonces $\rho(f(x), f(a)) < \xi$. En particular, si $\xi := \delta_2$, va a existir $\delta > 0$ tal que si $d(x, a) < \delta$, entonces $\rho(f(x), f(a)) < \delta_2$, y en este caso se tendrá que $\sigma((g \circ f)(x), (g \circ f)(a)) < \varepsilon$. $\square$

Podemos dar una caracterización topológica (ie., que no dependa de la métrica) de continuidad: una función será métricamente continua (nuestra definición) si y solo si es topológicamente continua (ie., tal que el conjunto preimagen de un conjunto abierto, sea abierto):

**Proposición 1.21.** *Sean $M, N$ espacios métricos. Una función $f \colon M \to N$ es continua si y solo si la preimagen $f^{-1}(A) \subseteq M$ de cualquier abierto $A \subseteq N$ de $N$, es un abierto de $M$.*

*Demostración.* Sean $M, N$ espacios métricos. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Supongamos que $f\colon M \to N$ es una función continua. Sea $A \subseteq N$ un abierto de $N$. Por definición, que $a \in f^{-1}(a)$ nos dice que $f(a) \in A$. Como $A$ es un conjunto abierto, existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que que $B(f(a), \varepsilon) \subseteq A$.

Como $f$ es continua, dado este radio $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenga $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Por transitividad de la inclusión, tenemos que $f(B(a, \delta)) \subseteq A$, y por tanto que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$.

Esto es precisamente que $a$ es un punto interior de $f^{-1}(A)$. Como $a$ era arbitrario, se tiene que $f^{-1}(A)$ es efectivamente abierto en $M$.

$\Longleftarrow$: Supongamos que dado cualquier abierto $A \subseteq N$ de $N$, su preimagen $f^{-1}(A) \subseteq M$ es un abierto de $M$. Probemos que $f$ es continua en cada $a \in M$. Notamos que dado $a \in M$, una bola $B(f(a), \varepsilon)$ de cualquier radio $\varepsilon > 0$ es un abierto de $N$. Por tanto, nuestra hipótesis nos dice que $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ es un abierto de $M$. Por definición, $a$ es un punto interior de $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, por lo que existe $\delta > 0$ de modo que $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$, y por tanto $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Esto es precisamente que $f$ es continua en $a$. $\square$

*Observación.* La imagen $f(A)$ de un abierto de $M$ bajo una función continua $f\colon M \to N$ no es necesariamente un abierto de $N$: por ejemplo, la función $x \mapsto x^2$ es continua de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El conjunto $A := (-2, 2)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, pero $f(A) = [0, 4)$, que no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

**Ejemplo 1.22.**

1. Sean $M_1, \dots, M_n$ espacios métricos, y sean $A_1, \dots, A_n$ de modo que cada $A_i$ es un subconjunto abierto de $M_i$. Se tiene que el conjunto $\prod_{i=1}^n A_i$ es un abierto de $M := \prod_{i=1}^n M_i$. En efecto, notamos que cada proyección

$$\pi_i\colon \prod_{j=1}^n M_j \to M_i$$

   es continua. Como $A_i$ es un abierto de $M_i$, se tiene que $\pi^{-1}(A_i)$ es un abierto de $M$. Como $\prod_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \pi_1^{-1}(A_i)$, se tiene lo enunciado, pues es una intersección finita de abiertos.

2. Sea $M$ un espacio métrico y sean $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$. El conjunto

$$A := \{x \in M\colon f_i(x) > 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}$$

   es abierto en $M$. Para probar esto, usamos el ejemplo anterior: notamos que la función $f\colon M \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ es continua, y que el conjunto $\prod_{i=1}^n (0, \infty)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, pues es producto de abiertos. Se sigue que el conjunto $A = f^{-1}(\prod_{i=1}^n (0, \infty))$ es un abierto de $M$.

3. Sean $M, N$ espacios métricos, y sean $f, g\colon M \to N$ funciones continuas. Se tiene que el conjunto
$$A := \{x \in M\colon f(x) \neq g(x)\}$$
es abierto en $M$: sea $F(x) := d(f(x), g(x))$. Como esta función es continua $M \to \mathbb{R}$, se sigue que
$$\begin{aligned} \{x \in M\colon F(x) > 0\} &= \{x \in M\colon d(f(x), g(x)) \neq 0\} \\ &= \{x \in M\colon f(x) \neq g(x)\} \\ &= A. \end{aligned}$$
Por el punto anterior, se concluye que $A$ es abierto en $M$.

4. Podemos probar de otra forma que una bola abierta es un conjunto abierto. Sea $M$ un espacio métrico, y $B(a, r)$ una bola abierta de $M$ para algunos $a \in M$, $r > 0$. Consideremos la función $M \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto r - d(a, x)$. Esta es continua, y es claro que
$$\begin{aligned} \{x \in M\colon f(x) > 0\} &= \{x \in M\colon d(a, x) < r\} \\ &= B(a, r), \end{aligned}$$
por lo que el punto (2) nos asegura que $B(a, r)$ es un abierto de $M$.

La definición de discontinuidad es simplemente la negación lógica de la definición de continuidad:

**Definición 1.23.** Sean $(M, d)$ y $(N, \rho)$ espacios métricos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es *discontinua* en $a \in M$ si no es continua en $a$, vale decir, si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar un $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ pero $\rho(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

**Ejemplo 1.24.** Consideremos la función *característica* de $\mathbb{Q}$, dada por
$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$
Esta función es discontinua en todo $a \in \mathbb{R}$: sea $\varepsilon := 1/2$ y $\delta > 0$. Si $a$ es racional, consideramos $x_\delta$ irracional tal que $|x_\delta - a| < \delta$, y si $a$ es irracional consideramos $x_\delta$ racional tal que $|x_\delta - a| < \delta$. En ambos casos se tiene que $|1_{\mathbb{Q}}(x_\delta) - 1_{\mathbb{Q}}(a)| = 1 \geq 1/2$, por lo que $1_{\mathbb{Q}}$ es en efecto discontinua en $a$.

**Ejemplo 1.25.** Consideremos la función
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función es discontinua en 0: sea $\varepsilon := 1/2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $x_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$. Se sigue que

$$\begin{aligned}\sin(1/x_n) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)\\ &= \pm 1.\end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $|x_n - 0| < 1/n$ (esto es directo), pero también que

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(0)| &= \left|\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - 0\right|\\ &= 1\\ &\geq 1/2\\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, $f$ es efectivamente discontinua.

## 1.3. Sucesiones y cerrados en espacios métricos

**Definición 1.26.** Sea $M$ un espacio métrico. Decimos que un $F \subseteq M$ es *cerrado* en $M$ si su complemento $M - F$ es abierto en $M$.

*Observación.* Si bien "abierto"y "cerrado" son antónimos en castellano, en este contexto un conjunto abierto no es lo contrario de un conjunto cerrado: por ejemplo $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$, y en cualquier espacio métrico $M$, se tiene que $\emptyset$, $M$ son abiertos y cerrados en al mismo tiempo.

**Ejemplo 1.27.**

1. Sea $M$ un espacio métrico. Cualquier bola cerrada

$$B[a,r] := \{x \in M \colon d(x,a) \leq r\} \tag{1.27.1}$$

   es cerrada, pues dado $y \in A := M - B[a,r]$, se tiene que $s := d(y,a) > r$. Así, podemos considerar $B(y, s-r)$, que será un abierto completamente contenido en $A$.

2. Sea $M$ un espacio métrico. Cualquier singleton $\{x\} \subseteq M$ es cerrado en $M$, pues dado $a \in A := M - \{x\}$, podemos considerar $s < d(a,x)$, y la bola $B(x,s)$ estará completamente contenida en $A$.

Prestemos atención a la ecuación 1.27.1: la única diferencia con las bolas abiertas es que ahora admitimos puntos que estén en el "borde" de las bolas, y el resultado fue un conjunto cerrado. La definición para cualquier conjunto (no necesariamente bolas abiertas) es la siguiente:

**Definición 1.28.** Sea $M$ un espacio métrico, y $X \subseteq M$. Decimos que $x \in M$ es un punto *frontera* de $X$ si cualquier vecindad $U_x$ de $x$ contiene puntos tanto como de $X$ como de su complemento $M - X$, es decir, si

$$U_x \cap X \neq \emptyset, \quad \text{y} \quad U_x \cap (M - X) \neq \emptyset.$$

El conjunto de todos los puntos frontera de $X$ se llama la *frontera* de $X$, y se denota $\partial X$.

*Observación.* Los puntos frontera de un conjunto pertenecen al espacio métrico ambiente, pero no necesariamente a dicho conjunto.

**Ejemplo 1.29.** Sea $M$ un espacio métrico. La *esfera* de centro $a \in M$ y radio $r > 0$, definida $S(a, r) := \{x \in M : d(a, x) = r\}$ es la frontera de las bolas $B(a, r)$ y $B[a, r]$.

El resultado esperado es que para conseguir un cerrado a partir de cualquier conjunto, basta añadirle su frontera:

**Proposición 1.30.** *Sea $M$ un espacio métrico. Dado $X \subseteq M$, se tiene que el conjunto $\overline{X} := X \cup \partial X$ es cerrado.*

*Demostración.* Sea $\tau_M$ la topología generada por las bolas de $M$. Directamente,

$$M - \overline{X} = \{x \in M : x \notin X \wedge \exists U_x \in \tau_M[(U_x \cap X = \emptyset \vee U_x \cap (M - X) = \emptyset]\}.$$

En cualquier caso, la vecindad $U_x$ es un abierto contenido en $M - \overline{X}$. $\square$

Así, hemos construido un conjunto cerrado a partir de $X$:

**Definición 1.31.** Sea $M$ un espacio métrico. Dado $X \subseteq M$, el conjunto $\overline{X} := X \cup \partial X$ se llama la *cerradura* (o *clausura*) de $X$.

Esta definición de clausura es algo laboriosa de usar. Podemos dar una caracterización de la clausura de un conjunto como aquellos puntos que están arbitrariamente cerca de dicho conjunto:

**Proposición 1.32.** *Sea $M$ un espacio métrico y $X \subseteq M$. Se tiene que $a \in \overline{X}$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar algún $x \in X$ de modo que $d(a, x) < \varepsilon$.*

*Demostración.* Veamos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$ : Si $a \in X$, el resultado es claro. Por otro lado, si $a \in \partial X$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $A := B(a, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Así, cualquier $x \in A$ satisface lo requerido.

$\Longleftarrow$ : Sea $a \in M$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ podamos encontrar $x \in X$ tal que $d(a, x) < \varepsilon$. Claramente siempre se tiene que $x \in A := B(a, \varepsilon) \cap X$, por lo que $A \neq \emptyset$. De acá hay dos posibilidades: $B(a, \varepsilon)$ intersecta a $M - X$, o no. En el primer caso se tiene que $a \in X$, y en el segundo que $a \in \partial X$. Es decir, $a \in \overline{X}$. ☐

Podemos dar una caracterización de conjunto cerrado a través de la clausura:

**Lema 1.33.** *Sea $M$ un espacio métrico. Un $F \subseteq M$ es cerrado en $M$ si y solo si es su misma clausura, es decir, que $\overline{F} = F$.*

*Demostración.* Que $F$ sea su misma clausura nos dice que contiene a todos sus puntos adherentes, por lo que todo punto fuera de $F$ no será adherente a $F$. Por tanto, la última observación nos indica que todo punto en $M - F$ pertenece a $\operatorname{int}(M - F)$, es decir, que $M - F \subseteq \operatorname{int}(M - F)$.

Esto, más el hecho que $\operatorname{int}(M - F) \subseteq M - F$, nos permite concluir que $M - F = \operatorname{int}(M - F)$, esto es, que $M - F$ es abierto, y por tanto que $F$ es cerrado. ☐

Los siguientes lemas verifican que estudiar topología desde el punto de vista de los abiertos es equivalente a estudiarla desde los cerrados:

**Lema 1.34.** *Sea $M$ un espacio métrico. La $\tau$ colección de todos los conjuntos cerrados de $M$ es una topología en $M$.*

1. *$M, \emptyset \in \tau$.*
2. *Si $F_1, \ldots, F_n \in \tau$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \tau$.*
3. *Sea $L$ es un conjunto de índices. Entonces si $F_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, entonces $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \tau$.*

*Demostración.* Basta tomar complementos adecuadamente en la proposición 1.17 y usar las leyes de De Morgan. ☐

*Observación.* Una unión arbitraria de cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado: sea $M$ un espacio métrico y $X \subset M$ un abierto de $M$. Se tiene que $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, pero cada $\{x\}$ es cerrado en $M$.

**Lema 1.35.** *Sean $M, N$ espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es continua si y solo si la preimagen $f^{-1}(F) \subseteq M$ de cualquier cerrado $F \subseteq N$ de $N$, es un cerrado de $M$.*

*Demostración.* Basta tomar complementos adecuadamente en la proposición 1.21, usando las leyes de De Morgan. ☐

Estudiar sucesiones en espacios métricos es la generalización natural de estudiarlas en $\mathbb{R}$. Como es de esperar, muchas de las definiciones y propiedades se traducen sin problemas a espacios métricos.

**Definición 1.36.** Una *sucesión* en un conjunto $M$ es una función $x\colon \mathbb{N} \to M$. El $n$-ésimo término de esta sucesión se denota como $x_n$. Para representar una sucesión se utiliza la notación $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Una *subsucesión* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una restricción de $x$ a un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, vale decir, si $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, la subsucesión correspondiente es $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M$ es *acotada* cuando el conjunto de sus términos es acotada en $M$, es decir, que existe una bola $B(x, c)$ tal que $x_m \in B(x, c)$ para todo $x_m$.

**Ejemplo 1.37.**

1. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n := 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Una subuscesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, donde resulta que $x_{2n} = 4^n$.

2. Las sucesiones que toman una cantidad finita de valores (como las constantes) son acotadas: consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(M, d)$ que toma finitos valores, y sea $r := \max_{m,n\in\mathbb{N}} \{d(x_n, x_m)\}$. Es claro que $d(x_n, x_m) \leq r$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

La definición $\epsilon$-$\delta$ de límite es la misma de cálculo:

**Definición 1.38.** Sea $M$ un espacio métrico, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $M$. Decimos que el *límite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a $a$ si dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, se tenga que $d(x_n, a) < \varepsilon$. En tal caso, denotamos $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n := a$.

*Observación.*

1. Si el límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe y es igual a $a$ también decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende* a $a$, o que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a $a$. También se escribe $x_n \to a$. Si el límite en cuestión no existe, decimos que la sucesión *diverge*.

2. En lenguaje de bolas, la definición 1.38 es equivalente a que para todo radio $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, \varepsilon)$ para todo $n > N$.

3. Que una sucesión sea divergente es, por definición, que para todo $a \in M$, existe algún $\varepsilon > 0$, tal que sin importar cuál sea $N \in \mathbb{N}$, se tiene que existe algún $n > N$ tal que $d(x_n, a) \geq \varepsilon$.

   En lenguaje de bolas, es que existe algún radio $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $n > N$ de modo que $x_n \notin B(a, \varepsilon)$.

**Ejemplo 1.39.**

1. Sea $M$ un espacio métrico, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión constante en $M$, es decir, tal que $x_n = a \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión converge a $a$: en efecto, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar cualquier $N \in \mathbb{N}$, pues como $x_n = a$

siempre, en particular cuando $n > N$ se tendrá que $d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \varepsilon$.

2. En todo espacio métrico $M$ con al menos dos elementos existen sucesiones divergentes. Sean $a, b \in M$ y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_n := \begin{cases} a & \text{si } n \text{ par,} \\ b & \text{si } n \text{ impar,} \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x_n \to L \in M$. Consideremos $\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2}$. Es claro que ninguna bola de radio $\varepsilon$ contiene a $a$ y $b$ al mismo tiempo, por lo que dado cualquier $N \in \mathbb{N}$ va a existir un $n > N$ de modo que $x_n \notin B(L, \varepsilon)$.

3. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x_n := \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ converge a 0: en efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N > \frac{1}{\varepsilon}$. De acá, se sigue que

$$n > N \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

**Lema 1.40.** *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico $M$ es convergente, entonces es acotada.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a \in M$. Para $\varepsilon = 1$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $x_n \in B(a, 1)$. Por lo tanto, los términos de la sucesión están contenidos en el conjunto $\{x_1, \ldots, x_N\} \cup B(a, 1)$. Como ambos conjuntos son acotados, se sigue que su unión también es acotada. □

*Observación.* El contrarrecíproco de 1.40 nos dice que si una sucesión no es acotada, entonces es divergente. Por ejemplo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n := n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ no es acotada, y por tanto es divergente.

**Lema 1.41.** *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico $M$ es convergente, entonces su límite es único.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a \in M$ y que $x_n \to b \in M$. Esto es, por definición, que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1$ entonces $d(x_n, a) < \varepsilon$, y si $n > N_2$ entonces $d(x_n, b) < \varepsilon$. Consideremos $N > \max\{N_1, N_2\}$. Por tanto, si $n > N$, se sigue, por desigualdad triangular, que $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon$. Como $\varepsilon$ era arbitrario, se tiene que $d(a, b) = 0$, y por tanto $a = b$. □

**Lema 1.42.** *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico $M$ es convergente, entonces todas sus subsucesiones convergen al límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, y supongamos que $x_n \to a \in M$. Por definición, esto es que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $d(x_n, a) < \varepsilon$. Por otro lado, también existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$, pues $n_1 < n_2 < \dots$ Por tanto, se sigue que si $k > K$, entonces $n_k > N$, y por tanto $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Esto es, $x_{n_k} \to a$. $\square$

*Observación.* El contrarrecíproco de 1.42 nos dice que si una sucesión tiene al menos un par de subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces esta diverge. Por ejemplo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x_n := (-1)^n$ tiene las subsucesiones $(x_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ (que es constantemente 1) y $(x_{(2j-1)})_{j\in\mathbb{N}}$ (que es constantemente $-1$). Estas convergen a 1 y a $-1$ respectivamente, y como $1 \neq -1$, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Podemos dar una otra caracterización—muy útil—de función continua: una función será métricamente continua (y por tanto topológicamente continua) si y solo si es *secuencialmente continua*:

**Proposición 1.43.** *Sean $M, N$ espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es continua en $a \in M$ si y solo si preserva límites secuenciales, es decir, que si $x_n \to a$, entonces $f(x_n) \to f(a)$.*

*Demostración.* Probemos ambas implicancias:

$\Longrightarrow$: Si $f$ es continua en $a$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ menor a $\delta$. Por tanto, para todo $n > N$ se tendrá que $d(x_n, a) < N < \delta$, y por tanto $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, es decir, efectivamente $f(x_n) \to f(a)$.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $f(x_n) \to f(a)$ para cualquier sucesión que converja a $a$. Buscando una contradicción, supongamos que $f$ no es continua en $a$. Por tanto, existe al menos un $\varepsilon > 0$ de modo que para cualquier distancia $\delta > 0$, en particular para cada $\delta_n := \frac{1}{n}$, existe $x_n \in M$ tal que $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, pero $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Es decir, hemos encontrado una secuencia que converge a $a$, pero la sucesión de imágenes no converge a $f(a)$, lo que contradice nuestra hipótesis. $\square$

También, hay una caracterización de clausura en términos de sucesiones:

**Proposición 1.44.** *Sean $M$ un espacio métrico, $a \in M$ y $X \subseteq M$. Se tiene que $a \in \overline{X}$ si y solo si $a$ es el límite de alguna sucesión en $X$.*

*Demostración.* Adoptemos la notación del enunciado.

$\Longrightarrow$: Si $a \in \overline{X}$, entonces para cualquier distancia $r > 0$, se tiene que $B(a, r)$ tiene puntos de $X$. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos algún $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es formada únicamente por elementos de $X$, y por construcción converge a $a$.

$\Longleftarrow$: Si $x_n \to a$ es una sucesión en $X$, por convergencia se tiene que toda bola abierta centrada en $a$ contiene puntos de la sucesión, es decir, que $a \in \overline{X}$.

□

**Ejemplo 1.45.**

1. Notemos que $\partial X = \overline{X} \cap \overline{M - X}$, por lo que los puntos en la frontera de $X$ son precisamente los puntos que son límites de sucesiones en $X$ y $M - X$ al mismo tiempo.

2. Un subconjunto $X \subseteq M$ es *denso* en $M$ si y solo si $\overline{X} = M$, es decir, si $M$ es el conjunto de todos los límites de sucesiones en $X$.

3. Un conjunto $F$ es cerrado en $M$ si y solo si $\overline{F} = F$, es decir, que el mismo $F$ es el conjunto de todos los límites de sucesiones en $F$.

## 1.4. Espacios métricos compactos

La noción de compacidad es central en el análisis. Su concepción no es una historia clara, sino que fue el fruto de una serie de abstracciones de propiedades de intervalos de la recta real. Empezaremos dando cuenta breve de la exposición histórica detallada que se puede encontrar en [Ram14].

Para la década del 1900 ya se conocían resultados importantes sobre los intervalos de $\mathbb{R}$, que actualmente son clásicos y son estudiados en los cursos de Cálculo Real. Por ejemplo, Bernard Bolzano, en su trabajo más famoso, *Rein analytischer Beweis* [Bol17], probó que toda sucesión acotada (e infinita) en $\mathbb{R}$ posee alguna subsucesión convergente (hecho llamado la *Propiedad de Bolzano*[1]), como un lema para probar el Teorema del Valor Intermedio. También, en su *Functionenlehre* [Bol30, I, §§20–21][2], demostró el Teorema del Valor Extremo, que indica que toda función continua en un intervalo cerrado alcanza sus valores mínimo y máximo en dicho intervalo.

Estas propiedades son deseables, y el interés por generalizarlas a otros espacios vectoriales normados—incluso a espacios vectoriales topológicos—es natural. En este contexto más general hay sucesiones de funciones definidas en un mismo intervalo cerrado que no convergen. Fueron Giulio Ascoli y Cesare Arzelà quienes dieron condiciones suficientes y necesarias para que una sucesión de funciones posea el análogo respectivo de la propiedad de Bolzano [Asc84, Arz95, Arz83].

Fréchet fue el que extrajo por primera vez la escencia de la propiedad de Bolzano, y propuso formalmente una primera noción de compacidad en su tesis [Fré06]: un espacio es *compacto* si toda sucesión en dicho espacio posee alguna subsucesión convergente dentro del espacio. Esta definición de compacidad es buena para espacios métricos, pero no para espacios topológicos más generales.

En paralelo, se estaba desarrollando otra corriente que sí resultaría en una

[1] La literatura refiere a esto como propiedad de Bolzano–Weierstraß, pues este último los redescubrió y recontextualizó.

[2] Este artículo fue escrito en 1830, pero publicado recién en 1930, según [RKL05, p. 304].

definición más general. Émile Borel, estudiando continuaciones analíticas, probó el hecho que todo cubrimiento *numerable* por abiertos de un intervalo cerrado, posee un subcubrimiento finito [Bor95]. Casi al mismo tiempo, Pierre Cousin, en un artículo sobre funciones de varias variables complejas [Cou95], demostró el análogo para cerrados acotados de $\mathbb{R}^2$, pero generalizando a cubrimientos arbitrarios. Posteriormente, Arthur Schoenflies verificó que la demostración de Borel se adaptaba directamente para cubrimientos arbitrarios [Sch00], y atribuyó el resultado de Borel como una generalización de un teorema de Eduard Heine, lo que llegó a generar controversia[3]. Henri Lebesgue ofreció otra demostración, muy popular en la literatura, de este resultado en su tratado sobre integración [Leb04]. Referiremos a este hecho como la *Propiedad de Borel*.

Fue la escuela rusa de Pavel Alexandrov y Pavel Urysohn, al desarrollar la topología punto-conjunto, quienes notaron que la propiedad de Borel—topológica en naturaleza—implica la propiedad de Bolzano, y propusieron una noción más general de compacidad [AU29]. Esta idea se ha vuelto la dominante en la literatura, y es la que seguiremos.

**Definición 1.46.** Sea $M$ un espacio métrico y $X \subseteq M$. Decimos que una colección de abiertos de $M$ *cubre* a $X$ si está contenido en la unión de dicha colección, y en tal caso con referemos a esta como un *cubrimiento* de $X$. Decimos que $X$ es (*topológicamente*) *compacto* si todo cubrimiento de $X$ admite un subcubrimiento formado por finitos abiertos.

**Ejemplo 1.47.**

1. El teorema de Borel indica que todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto. Esta idea se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$.

2. Todo espacio métrico $M$ finito es compacto, pues para cubrir por abiertos todo $M$ solo se necesitan finitos abiertos, de lo que es claro que todo cubrimiento por abiertos de $M$ admite un subcubrimiento finito.

3. En $\mathbb{R}$, un intervalo abierto $(a, b)$ no es compacto: notemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $A_n := (a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}) \subseteq (a, b)$ para todo $n > N$. Es claro que $\bigcup_n A_{n\in\mathbb{N}} = (a, b)$ es un cubrimiento por abiertos de $(a, b)$. Sin embargo, no admite subcubrimientos finitos, pues la unión de finitos $A_n$ es igual al más grande de estos.

4. En todo espacio métrico $M$, la unión de subconjuntos compactos es compacta: sean $K, L \subseteq M$ compactos, y consideremos $\mathcal{C}$ un cubrimiento por abiertos de $K \cup L$. En particular $\mathcal{C}$ es un cubrimiento por abiertos de $K$ y de $L$, por lo que, al ser compactos, podemos extraer subcubrimientos finitos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ respectivamente, de lo que notamos que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un subcubrimiento finito de $K \cup L$. Inductivamente, la unión numerable de

[3] Hasta el día de hoy este teorema suele llevar el nombre de Heine–Borel, pero Heine nunca demostró ni enunció este resultado o algún análogo [Ram14, p. 7]. Para más detalles, ver [AEP13] o [Dug89].

subconjuntos compactos es compacta.

5. Una unión arbitraria de compactos puede no ser compacta: por ejemplo, $\mathbb{R} := \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$. El ejemplo (2) muestra que cada $\{x\}$ es compacto, pero $\mathbb{R}$ no es compacto.

Tomando complementos, podemos caracterizar la compacidad de un conjunto por conjuntos cerrados:

**Proposición 1.48.** *Un espacio métrico $M$ es compacto si y solo si toda familia de cerrados de $M$ cuya intersección es vacía posee una subfamilia finita cuya intersección es vacía.*

*Demostración.* $M$ es compacto si y solo si todo cubrimiento por abiertos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de $M$ admite un subcubrimiento finito. Simbólicamente, si $M = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$, entonces existe existen finitos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de modo que $M = \bigcup_{i=1}^n A_{\lambda_i}$. Tomando complementos y utilizando las leyes de De Morgan, esto es equivalente a que si $\emptyset = \bigcap_{\lambda\in L}(M - A_\lambda)$, entonces $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n (M - A_{\lambda_i})$. Como esto es cierto para abiertos arbitrarios, y los cerrados son precisamente los complementos de los abiertos, esto es cierto para todo cerrado. □

Nos referimos a este hecho como la *Propiedad de Intersecciones Fintas*. Estudiaremos algunas propiedades de la compacidad. En particular, veremos cómo se relaciona con la topología métrica, y con las otras nociones de compacidad que describimos anteriormente.

**Proposición 1.49.** *Sea $K$ un espacio métrico compacto. Un subespacio $S \subseteq K$ es cerrado si y solo si es compacto.*

*Demostración.* Adoptemos la notación del enunciado y probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$ : Sea $S$ un cerrado de $K$. Consideremos un cubrimiento por abiertos de $S$ arbitrario, $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$. Con esto, construimos el cubrimiento por abiertos de $K$ que consiste de $\bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda \cup (K-S)$, del cual extraemos el subcubrimiento finito

$$C := A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n} \cup (K - S).$$

Es claro $S \subseteq C$, pero como $(K - S)$ no tiene puntos de $S$, debe ser que $S \subseteq A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$, de lo que hemos encontrado un subcubrimiento finito del original, lo que prueba la compacidad de $S$.

$\Longleftarrow$ : Sea $S$ compacto en $K$, y supongamos que no es cerrado en $K$, es decir, que $S$ es distinto a su clausura, y por tanto existe $x \in (\overline{S}-S) = \partial S$. Para llegar a una contradicción, habría que encontrar un cubrimiento por abiertos de $S$ que no admitiera una subcubrimiento finito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n := (M - B[x, \tfrac{1}{n}]),$$

los cuales son claramente abiertos, pues son los complementos de las bolas cerradas, que son conjuntos cerrados. Más aún, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un cubrimiento (abierto) de $S$: basta notar que como $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B[x, \frac{1}{n}] = \{x\}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}(M - \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B[x, \frac{1}{n}]) &= M - \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M - B[x, \frac{1}{n}]) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ &= M - \{x\},\end{aligned}$$

el cual es abierto pues es complemento de un singleton, los cuales siempre son cerrados.

Es claro que estos conjuntos forma una cadena ascendente $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, pues a medida que $n$ crece, cada $A_n$ corresponde a haberle quitado a $M$ discos cada vez más pequeños. Por tanto, cualquier unión finita de estos conjuntos corresponde a aquel que sea más grande (en este caso, al que tenga mayor índice).

Sin embargo, esto es lo que nos hace llegar a la contradicción: como $x \in \partial S$, se sigue que cada $B[x, \frac{1}{n}]$ tiene al menos un punto de $S$, lo que implica que a cada $A_n$ le falta al menos un punto de $S$, por lo que a cualquier unión finita de los $A_n$ le falta al menos un punto de $S$. Por tanto, estos conjuntos son un cubrimiento por abiertos de $S$ que no admite un subcubrimiento finito, lo que contradice la compacidad de $S$, de lo que concluimos que $S$ debe ser efectivamente un cerrado. $\square$

*Observación.* De hecho, probamos algo más fuerte: en la segunda implicancia nunca usamos el que $K$ era compacto. Esto no es una coincidencia o un error, pues el resultado general es que en todo espacio métrico—no necesariamente compacto—un conjunto compacto es cerrado.

**Corolario 1.50.** *Sea $M$ un espacio métrico.*

1. *Si $(K_\lambda)_{\lambda\in L}$ es una familia de compactos de $M$, entonces $\bigcap_{\lambda\in L} K_\lambda$ es compacto.*
2. *Si $M$ es compacto entonces es acotado.*

*Demostración.* Probemos cada apartado.

1. Si $(K_\lambda)_{\lambda\in L}$ es una familia de compactos de $M$, entonces cada uno es cerrado en $M$, por lo que su intersección también es un cerrado en $M$. Por tanto, esta intersección también es un cerrado de cada $K_\lambda$, y por la proposición anterior, un compacto en cada $K_\lambda$, por lo que lo es en $M$.
2. Si $M$ es compacto, entonces cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de $M$ admite un subcubrimiento finito $\mathcal{C}'$, lo que nos indica que $M$ es acotado. $\square$

Otra propiedad importante es que las funciones continuas mapean compactos en compactos:

**Proposición 1.51.** *Sean $M, N$ espacios métricos y $f\colon M \to N$ continua. Si $K \subseteq M$ es compacto en $M$, entonces $f(K)$ es compacto en $N$.*

*Demostración.* Consideremos un cubrimiento por abiertos

$$f(K) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Como $f$ es continua y cada $A_\lambda$ abierto, se sigue que cada conjunto preimagen $f^{-1}(A_\lambda)$ es un abierto de $M$. Ahora, notamos que, tomando preimagen en la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(K)) &\subseteq f^{-1}\big(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\big) \\ &= \bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(A_\lambda), \end{aligned}$$

donde en la contención usamos que el tomar preimagen preserva inclusión, y en la igualdad el que la preimagen de una unión es la unión de las preimágenes. Como $K \subseteq f^{-1}(f(K))$, esto muestra que estas preimágenes son un cubrimiento por abiertos de $K$.

La compacidad de $K$ nos permite elegir un subcubrimiento finito $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_{\lambda_i})$. Por tanto, tomando imagen se tiene que

$$\begin{aligned} f(K) &\subseteq f\big(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_{\lambda_i})\big) \\ &= \big(\bigcup_{i=1}^{n} f f^{-1}(A_{\lambda_i})\big) \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{\lambda_i}, \end{aligned}$$

donde en la primera contención usamos que el tomar imagen preserva inclusión, en la primera igualdad estamos usando que la imagen de una unión es la unión de las imágenes, y en la segunda contención el que la imagen de la preimagen de un conjunto está contenida en el conjunto.

Por tanto, hemos encontrado un subcubrimiento abierto finito del original, lo que prueba la compacidad de $f(K)$. □

**Corolario 1.52.** *Sea $K$ un espacio métrico compacto y $M$ un espacio métrico. Sea $f\colon K \to M$*

1. *$f$ envía cerrados de $K$ a cerrados de $M$.*
2. *La imagen de $f$ es acotada.*

*Demostración.* Verifiquemos ambos puntos.

1. Sea $F \subseteq K$ cerrado. Como $K$ es compacto, entonces un cerrado $F$ también es compacto. Por la proposición anterior, se tiene que $f(F)$ es compacto en $M$, y nuevamente concluimos que $f(F)$ es cerrado en $M$.

2. El lema anterior nos indica que la imagen de $K$ es compacta, por lo que debe ser acotada en $M$. $\square$

**Ejemplo 1.53.** El primer apartado del resultado anterior es útil para probar que conjuntos son compactos. A modo de ejemplo, los dado un camino continuo $f\colon [a,b] \to M$, la curva $f([a,b])$ es compacta en $M$. Así, la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ es compacta pues es la imagen de $[0, 2\pi]$ bajo la función $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

El siguiente resultado caracteriza la compacidad:

**Teorema 1.54.** *Sea $M$ un espacio métrico. Son equivalentes*

1. *$M$ es compacto (Propiedad de Borel).*
2. *Todo subconjunto infinito de $M$ posee algún punto de acumulación.*
3. *Toda sucesión en $M$ posee alguna subsucesión convergente (Propiedad de Bolzano).*

*Demostración.*

$1 \implies 2$: Supongamos que $M$ es compacto, y sea $X \subseteq M$ un conjunto sin puntos de acumulación. Probemos que esto fuerza a $X$ a ser finito. Supongamos que fuese infinito. Por definición, $\overline{X} = X \cup X'$, y por hipótesis se tiene que este unión es simplemente $X$. Por tanto, $X$ es un conjunto cerrado en $M$, y por ende compacto. Ahora, el que $X$ no tenga puntos de acumulación nos indica que para cada $x \in M$, hay una bola $B(x, r_x)$ que contiene a lo más finitos puntos de $X$. Estas bolas son un cubrimiento por abiertos de $X$, que no admite un subcubrimiento finito, pues al retirar siquiera una de las bolas de la colección ya no cubriríamos $X$. Esto contradice la compacidad de $X$, por lo que $X$ debe ser finito.

$2 \implies 3$: Supongamos que todo subconjunto infinito de $M$ tiene algún punto de acumulación. Consideremos una sucesión en $M$. Si tiene finitos términos distintos, es claro que admite una subsucesión convergente. Si tiene infinitos términos, entonces posee algún punto de acumulación, que es límite de alguna subsucesión.

$3 \implies 1$: Sea $(U_i)_i$ un cubrimiento por abiertos de $M$. El plan es verificar que podemos encontrar un radio $\delta > 0$ tal que las bolas de este radio estén dentro de algún $U_i$, y luego que podemos encontrar un subcubrimiento usando estas bolas.

En efecto, supongamos que no, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$, escogiendo el radio $\delta_n := \frac{1}{n}$, podemos encontrar una bola $B(x_n, \delta_n)$ que no esté contenida completamente en ningún $U_i$. Por hipótesis, la sucesión de centros $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee alguna subsucesión convergente, digamos a $a$. Dicho $a$ está contenido en algún $U_j$, que al ser abierto conteien a alguna bola $B(a, \varepsilon)$. Así, por definición de convergencia, podemos encontrar algún $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que $x_k \in B(a, \varepsilon)$. Como esta bola es abierto, podemos encontrar otra boal centrada en $x_k$ contenida en $B(a, \varepsilon)$, por lo que está contenida en $U_j$, lo que es contradictorio.

Afirmamos que hay finitas bolas de radio $\delta$ que cubren a $M$. Supongamos lo contrario. Así, tomamos $x_1 \in M$, y la bola $B_1 := B(x_1, \delta)$ no cubre $M$, de modo que podemos elegir $x_2 \in M - B_1$. Inductivamente, elegimos $x_n \in M - B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, deberíamos poder extraer una subsucesión convergente de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pero $d(x_j, x_i) \leq \delta$, por lo que dicha sucesión no puede converger. $\square$

Se puede demostrar que el productos de dos espacios métricos compactos es compacto:

**Proposición 1.55.** *Si $K, L$ son espacios métricos compactos, entonces su producto cartesiano $K \times L$ también es compacto. Inductivamente, el producto finito de espacios métricos compactos es compacto.*

*Demostración.* Sean $K, L$ espacios métricos compactos. Probemos que su producto $K \times L$ es secuencialmente compacto. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $z_n := (x_n, y_n) \in K \times L$, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $K$ y $L$ respectivamente. Por la compacidad de $K$, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un $x \in K$, digamos indexada por $N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Por tanto, $(y_n)_{n\in N_1}$ es otra sucesión en $L$, y por la compacidad de $L$, podemos encontrar otra subsucesión de $(y_n)_{n\in N_1}$ convergente a un $y \in L$, digamos indexada por $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Se sigue que $(z_n)_{n\in N_2}$ es una subsucesión convergente a $(x, y)$ de nuestra sucesión original, lo que prueba que $K \times L$ es secuencialmente compacto, y por ende compacto. $\square$

La generalización natural del resultado anterior es pasar a productos numerables.

**Teorema 1.56 (Cantor–Tychonov).** *Un producto numerable de espacios métricos compactos es en sí compacto si cada factor es compacto.*

*Demostración.* Sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto de espacios métricos compactos, y sea $M := \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Probemos que es secuencialmente compacto, utilizando un argumento similar al lema anterior. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia arbitraria en $M$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, denotaremos por $(x_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ a la $n$-ésima entrada de nuestra sucesión, que es a su vez una sucesión.

Utilizando la compacidad de $M_1$, podemos encontrar una subsucesión de $(x_{1i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a un $a_1 \in M_1$[4], digamos indexada por $N_1 \in \mathbb{N}$. Luego, $(x_{2i})_{i\in N_1}$ es otra sucesión en $M_2$, y por compacidad podemos encontrarle una subsucesión convergente a un $a_2 \in M_2$, indexada por, digamos, $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$.

[4] Este $a_1$ no es necesariamente único, por lo que debemos invocar el Axioma de Elección. Kelley probó que dicho Axioma es lógicamente al Teorema que estamos estudiando en [Kel50].

Procediendo de este modo, encontramos una familia numerable de índices $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots$, y un punto $a := (a_1, a_2, \ldots) \in M$. Por el Axioma de Elección, existe un $N_* \subseteq \mathbb{N}$ de modo que su $j$-ésimo elemento sea el $j$-ésimo elemento de $N_j$ (todos los conjuntos ordenados de forma creciente). Se sigue que $(x_n)_{n \in N_*}$ es una subsucesión convergente a $a \in M$ de la original, lo que prueba que $m$ es secuencialmente compacto, y por ende compacto. $\square$

# 2. Propiedades de espacios métricos

## 2.1. Completitud

Vamos a estudiar otra abstracción de un fenómeno que ocurre en $\mathbb{R}$. Supongamos que estamos en un mundo donde nuestro sistema numérico es $\mathbb{Q}$. Una construcción estándar es la raíz cuadrada de un número, pero hay veces que la situación se complica. Por ejemplo, se puede probar que la raíz cuadrada de 2, asumiendo que existe, no es un número racional. Por otro lado, esta aparece como solución de la ecuación $x^2-2$, y como tal se puede aproximar (eg., usando Newton–Raphson), como una sucesión de números racionales, conocida como su *expansión decimal*. Por lo anterior, esta sucesión no converge en $\mathbb{Q}$, pero la distancia entre sus término es cada vez más pequeña, de hecho, arbitrariamente pequeña. Estas sucesiones se llaman *Cauchy*, y nuestro problema se parcha añadiendo formalmente los límites de las sucesiones Cauchy, lo que resulta en $\mathbb{R}$, la *compleción de* $\mathbb{Q}$. Vamos a ver esta demostración formalmente más adelante.

**Definición 2.1.** Sea $M$ un espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M$ es *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todos $m, n > N$.

*Observación.*

1. Esta definición dice que la distancia entre los términos de una sucesión Cauchy se va haciendo cada vez más pequeña. Esto contrasta con la definición de sucesión convergente, en la que es la distancia entre términos de la sucesión y un punto la que se va haciendo cada vez más pequeña.

2. Toda subsucesión de una sucesión Cauchy, también es Cauchy: basta notar que dado $\varepsilon > 0$, los términos en posiciones mayores a algún $N \in \mathbb{N}$ siguen estando a distancia menor que $\varepsilon$, independientemente si forman parte o no de alguna subsucesión.

**Ejemplo 2.2.**

1. Las sucesiones Cauchy de un espacio métrico finito son precisamente las que son eventualmente constantes: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy en un espacio métrico finito $M := \{m_1, \ldots, m_r\}$, entonces para $\varepsilon := \min_{1\leq i,j,\leq r} \{d(x_i, x_j) \neq 0\}$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $i, j > N$, entonces $d(x_i, x_j) < \varepsilon$, por lo que $d(x_i, x_j) = 0$ y por tanto $x_i = x_j$.

2. De forma similar, en un espacio métrico con la métrica cero-uno las sucesiones Cauchy también son las eventualmente constantes: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, entonces para $0 < \varepsilon < 1$ se tiene que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_i, x_j) < \varepsilon$. Esto fuerza que $d(x_i, x_j) = 0$, y por tanto $x_i = x_j$.

Una pregunta natural es cómo se relacionan los conceptos de sucesiones convergentes y sucesiones Cauchy. Intuitivamente, como en el caso de una sucesión convergente los puntos de una sucesión se van acercando cada vez más al límite, se tiene que estos puntos también tiene que estar acercándose entre sí.

**Lema 2.3.** *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en un espacio métrico $M$ es Cauchy.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > N$. Por tanto, para todos $m, n > N$, por la desigualdad triangular de $M$ se tiene que $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, es decir, la sucesión es efectivamente Cauchy. $\square$

*Observación.*

1. El contrarrecíproco del lema 2.3 nos dice que si una sucesión no es Cauchy, entonces no es convergente.

2. Es importante notar que una sucesión sea Cauchy no implica que sea convergente: consideremos $\mathbb{Q}$ como subespacio métrico de $\mathbb{R}$, sea $a \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, y consideremos una sucesión en $\mathbb{R}$ de números racionales que converge a $a$ (eg., la expansión decimal de $a$).

   Notemos que esta sucesión converge en $\mathbb{R}$, por lo que el lema 2.3 nos dice que es Cauchy en $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{Q}$ es subespacio métrico de $\mathbb{R}$, entonces la sucesión es Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $a \notin \mathbb{Q}$, es decir, la sucesión no es convergente en $\mathbb{Q}$.

**Lema 2.4.** *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy en un espacio métrico $M$ es acotada.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Como es Cauchy, dado $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < 1$ para todos $n, m > N$, es decir, que el conjunto $\{x_n \mid n > N\}$ está contenido en una bola $B$ de diámetro 1. Se sigue el conjunto de los términos de la sucesión está contenido en $\{x_1, \ldots, x_N\} \cup B$. Como cada conjunto es acotado, su unión también lo es. $\square$

*Observación.* El contrarrecíproco de 2.4 nos dice que si una sucesión no es acotada, entonces no es Cauchy (y por tanto no es convergente). También, es importante notar que una sucesión sea acotada no implica que sea Cauchy: consideremos la sucesión $(2, 0, 2, 0, \ldots)$ en $\mathbb{R}$. Esta sucesión es claramente acotada (eg., por 2), pero no es Cauchy, pues la distancia entre términos es siempre 0 o 2, en vez de arbitrariamente pequeña.

**Lema 2.5.** *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy en un espacio métrico $M$ tiene alguna subsucesión convergente, entonces es convergente, y el límite es el mismo que el de la subsucesión.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, y sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $a \in M$. Probemos que igualmente $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todos $m, n > N_1$. Por otro lado, como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n_k > N_2$. Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$. Por tanto, por la desigualdad triangular de $M$, se tiene que

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{x_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todos $x_n, x_{n_k} > N$ Esto es por definición que $x_n \to a$. □

*Observación.* El contrarrecíproco de 2.5 dice que si una sucesión Cauchy no es convergente, entonces todas sus subsucesiones divergen. También, si una sucesión posee dos subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces esta no puede ser Cauchy.

**Definición 2.6.** Decimos que un espacio métrico $M$ es *completo* si toda sucesión Cauchy en $M$ es convergente.

**Ejemplo 2.7.**

1. $\mathbb{Q}$ no es un espacio métrico completo, como muestra el caso de $\sqrt{2}$.

2. Los espacios con la métrica cero-uno son completos: cualquier sucesión Cauchy acá es eventualmente constante , y las sucesiones (eventualmente) constantes son convergentes.

El siguiente resultado es crucial para el análisis y cálculo real, y es una muy buena aplicación de toda la teoría que hemos revisado hasta ahora.

**Teorema 2.8.** *Los números reales $\mathbb{R}$ son un espacio métrico completo con la métrica usual.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $X_n := \{x_i : i \geq n\} = \{x_i, x_{i+1}, \ldots\}$. Notemos que si $i > j$, entonces $X_j \supseteq X_i$, es decir, $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$

Como $X_1$ tiene a todos los términos de la sucesión, y esta es Cauchy, se sigue que $X_1$ es acotado por algún $b \in \mathbb{R}$, y como $X_1$ contiene a $X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que estos también son acotados. En tanto también son no vacíos, tienen ínfimo. Sea $a_n := \text{ínf}\, X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si consideramos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como esta es monótona ($a_1 \leq a_2 \leq \cdots$) y acotada por $b$, entonces converge al supremo del conjunto de los términos de la sucesión, digamos a $a := \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probemos que $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, entonces existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para $n, m > N$. Como $a$ es supremo de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $a-\varepsilon$ no es cota superior de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_k < a$. En particular, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, podemos contrar $k > N$ es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_k < a$.

Por otro lado, $a_k$ es ínfimo de $X_k$, por lo que $a_k + \varepsilon$ no es cota inferior de $X_k$, es decir, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_k < x_j < a_k + \varepsilon$. En particular, $x_j \in X_k$, por lo que existe $j > k$ tal que $a_k < x_j < a_k + \varepsilon$. Por tanto, se tiene la cadena de desigualdades

$$a - \varepsilon < a_k < x_j < a_k + \varepsilon < a + \varepsilon,$$

para $j, k > N$. Es decir, para $n > N$ se tiene que $|x_n - a| < \varepsilon$, por lo que efectivamente $x_n \to a$. Por tanto, $\mathbb{R}$ es completo. □

El siguiente resultado dice que en un espacio completo, ser cerrado es equivalente a ser completo:

**Proposición 2.9.** *Sea $M$ un espacio métrico completo. Un subespacio $F \subseteq M$ es cerrado si y solo si es completo.*

*Demostración.* Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$ : Supongamos que $F \subseteq M$ es cerrado. Sea $(x_n)_{n \in N}$ una sucesión Cauchy en $F$. Como $F$ es cerrado, entonces $a := \lim_{n\to\infty} x_n \in F$, lo que prueba que $F$ es completo.

$\Longleftarrow$ : Supongamos que $F \subseteq M$ es completo y consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $F$ convergente a $a \in M$. Por 2.3, esta sucesión también es Cauchy en $M$, por lo que es Cauchy en $F$, por lo que es convergente en $F$, lo que prueba que $F$ es cerrado. □

El siguiente teorema caracteriza los espacios completos como aquellos que poseen la propiedad de los intervalos encajados:

**Teorema 2.10 (Intersección de Cantor).** *Un espacio métrico $M$ es completo si y solo si para toda cadena decreciente $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ de cerrados no-vacíos en $M$ tales que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$ para algún $a \in M$.*

*Demostración.* Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$ : Sean $M$ completo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Para cada $n$, escogemos un $x_n \in F_n$ (cosa que podemos hacer porque cada $F_n$ es no-vacío). Esto define una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $M$. Podemos probar que esta sucesión es Cauchy en $M$.

En efecto, dado $N \in \mathbb{N}$, se tiene que si $m, n > N$, entonces, $F_n, F_m \subset F_N$, y por tanto $x_m, x_n \in F_N$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n > N \implies x_m, x_n \in F_N \implies d(x_m, x_n) < \operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon,$$

por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es efectivamente Cauchy en $M$, y como $M$ es completo, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Sea $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Para ver que $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, notamos lo siguiente: a partir de cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \in F_N$ para todo $n \geq N$, por lo que $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in F_N$. Como $F_N \subseteq F_{N-1} \subseteq \ldots \subseteq F_1$, se tiene que $a \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por tanto $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Para probar que la intersección no posee otro elemento, supongamos lo contrario: sean $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Por tanto, en particular se tiene que $d(a, b) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que en particular $d(a, b) \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, de lo que $d(a, b) = 0$, y por definición de métrica, $a = b$.

$\Longleftarrow$ : Supongamos que la intersección de una cadena decreciente cerrados no-vacíos en $M$ con diámetro tendiendo a 0 es un único punto. Para probar que $M$ es completo, probaremos que es secuencialmente completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy, y definamos $X_n := \{x_j\}_{j\geq n}$. Es claro que $X_1 \supseteq X_2 \supset \ldots$ es una cadena decreciente de conjuntos no-vacíos, por lo que $\overline{X_1} \supseteq \overline{X_2} \supset \ldots$ es una cadena decreciente de conjuntos no-vacíos cerrados en $M$.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, la distancia entre puntos es decreciente a medida que crece $n$, por lo que se tendrá que

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{X_n}) = 0,$$

y por hipótesis se tendrá que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{a\}$ para algún $a \in M$.

Así, $a$ es el límite de una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y cómo esta es Cauchy, se tiene que en verdad $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ era arbitraria, se tiene que cualquier sucesión Cauchy converge en $M$, por lo que $M$ es efectivamente completo. □

## 2.2. Funciones lipschitzianas y el Teorema de Banach

Un ejemplo importante de funciones continuas son las *de Lipschitz*, que son aquellas limitadas en cuánto pueden cambiar. Por ejemplo, estas se utilizan para probar el teorema del punto fijo de Banach; también, pedir que una función sea lipschitziana es la condición crucial para el teorema de Picard–Lindelöf de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial.

**Definición 2.11.** Sean $M, N$ espacios métricos. Una función $f : M \to N$ es *lipschitziana* si existe una constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para todos $x, y \in M$.

**Ejemplo 2.12.** El ejemplo más sencillo de funciones lipschitzianas son las funciones constantes, porque la distancia entre imágenes bajo una función constante siempre es 0, por lo que cualquier $c$ funciona.

La propiedad importante de estas funciones, es que son todas continuas, por lo que cada ejemplo de función lipschitziana es ejemplo de función continua:

**Proposición 2.13.** *Toda función lipschitziana* $f\colon M \to N$ *es continua.*

*Demostración.* Sea $f$ lipschitziana de constante $c$. Debemos probar que $f$ es continua. Sean $a \in M$ y $\varepsilon > 0$, y consideremos $\delta := \varepsilon/c$. Se sigue que $d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x,a)$, pues $f$ es lipschitziana. Por tanto, si $d(x,a) < \delta = \varepsilon/c$, se tiene que $d(f(x), f(a)) < c \cdot \varepsilon/c = \varepsilon$, es decir, $f$ es efectivamente continua. □

Las funciones lipschitzianas tienen estructura de espacio vectorial:

**Proposición 2.14.** *El conjunto* $\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ *de las funciones lipschitzianas* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial con la suma y escalamiento punto a punto.*

*Demostración.* Consideremos $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ funciones lipschitzianas de constantes $c, k$ y una constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Para probar que $(f+g)$ también es lipschitziana, notemos que

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\
&= |[f(x) - f(y)] + [g(x) - g(y)]| \\
&\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
&\leq cd(x,y) + kd(x,y) \\
&= (c+k)d(x,y),
\end{aligned}$$

donde la tercera línea se obtuvo por desigualdad triangular, y la cuarta porque estamos suponiendo $f, g$ lipschitzianas. Para probar que $\lambda f$ es lipschitziana, notamos que

$$\begin{aligned}
|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| &= |\lambda f(x) - \lambda f(y))| \\
&= |\lambda||f(x) - f(y)| \\
&\leq |\lambda| cd(x,y).
\end{aligned}$$

□

Para exhibir ejemplos, conviene desarrollar un criterio que permita verificar si una función real es lipschitziana. Sirve ver si tiene primera derivada acotada:

**Lema 2.15.** *Si* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es diferenciable con derivada acotada por entonces es lipschitziana de constante* $c := \sup\{|f'(x)|\}$.

*Demostración.* Dado $c$ como en el enunciado, existe algún intervalo cerrado $I := [a,b]$ en el que $f'$ es acotada por $c$. El teorema del valor medio nos dice que dados $x, y \in I$ arbitrarios, existe un $x < z < y$ tal que $f(x) - f(y) = f'(z)(x-y)$. Por lo mencionado antes, se tiene que $|f'(z)| \leq c$, por lo que tomando valor absoluto de la expresión anterior, se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|$. □

**Ejemplo 2.16.**

1. Por tanto, funciones como las polinomiales restringidas a intervalos, seno o coseno, son todas continuas.

2. Si bien esta condición es suficiente para determinar si una función es lipschitziana, no es necesaria. Por ejemplo, el valor absoluto usual $f(x) := |x|$ es lipschitziana de constante 1, pero no es diferenciable en 0.

3. Decimos que una función es una *contracción* si es lipschitziana de constante $0 < c < 1$. Si $f$ es lipschitziana de constante $c = 1$, decimos que es una *contracción débil*.

4. En cualquier espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$, la norma es una contracción débil, pues

$$\begin{aligned} d(\|x\|, \|y\|) &= \|\|x\| - \|y\|\| \\ &= \|\|x - 0\| - \|y - 0\|\| \\ &\leq \|x - y\| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Un problema recurrente en sistemas dinámicos y el estudio de ecuaciones diferenciales es el encontrar puntos fijos. Recordemos la definición.

**Definición 2.17.** Sea $A$ un conjunto y $f\colon A \to A$. Decimos que $x \in A$ es un *punto fijo* de $f$ si $f(x) = x$.

Existen múltiples teoremas que nos aseguran la existencia de estos puntos fijos. En esta sección estudiaremos un par de estos resultados para espacios métricos, aprovechando que ya tenemos múltiples herramientas en nuestro arsenal.

**Teorema 2.18 (Punto fijo de Brouwer).** *Consideremos $\mathbb{R}$ como espacio métrico. Toda función continua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tiene al menos un punto fijo $x \in [0,1]$.*

*Demostración.* Consideremos la función auxiliar $g(x) := f(x) - x$. Notamos que esta función es continua. Como $f([0,1]) \subseteq [0,1]$, se tiene que $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$, y que $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. El teorema del valor intermedio nos asegura que existe $x \in [0,1]$ de modo que $g(x) = 0$, es decir, tal que $f(x) = x$. Por tanto, hemos encontrado un punto fijo de $f$. $\square$

Hacemos dos observaciones. Primero, este resultado podría haber sido revisado en un curso de cálculo real sin problemas. Segundo, este teorema se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, pero no lo estudiamos pues no nos es relevante. Ahora, probemos algo más interesante, y que sí usa herramientas de análisis. Este teorema es clave para demostrar, por ejemplo, el Teorema de Picard–Lidelöf sobre existencia y unicidad de problemas de Cauchy en Ecuaciones Diferenciales.

**Teorema 2.19 (Punto fijo de Banach).** *Sea $M$ un espacio métrico. Si $M$ es completo, entonces toda contracción $f\colon M \to M$ posee un único punto fijo. Más aún, este punto fijo está dado por el límite de la órbita bajo $f$ de cualquier $x_0 \in M$.*

*Demostración.* Consideremos la órbita de $x_0$ bajo $f$ definida recursivamente por

$$\begin{aligned} x_0 &:= x_0, \\ x_n &:= f(x_{n-1}) \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Para probar el resultado hay que probar que esta órbita siempre converge, que este límite es punto fijo de $f$, y que este punto fijo que encontramos resulta ser único. Vamos en orden.

Para probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, podemos aprovecharnos de que estamos suponiendo que $M$ es completo y probar únicamente que la sucesión es Cauchy. Notamos que, estudiando términos consecutivos, se tiene

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1),$$

y también que

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2 d(x_0, x_1).$$

Inductivamente, se sigue que

$$d(x_n, x_{x+1}) \leq c^n d(x_0, x_1), \tag{2.19.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, notamos que si $n < m$, entonces $m = n + p$ para algún $p \in \mathbb{N}$, lo que nos permite usar la desigualdad triangular múltiples veces, obteniendo que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (c^n + \cdots + c^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= c^n (1 + c + \cdots + c^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

En la primera desigualdad, usamos la desigualdad triangular, en la segunda la cota obtenida en la ecuación 2.19.1, y en la última la fórmula cerrada de una suma geométrica, que podemos utilizar en este caso porque estamos asumiendo que $|c| < 1$. Tomando $n \to \infty$ en la última linea, tenemos producto de límite nulo por constante, que es nulo. Por tanto, $d(x_n, x_m) \to 0$ y concluimos que la sucesión es efectivamente Cauchy y por tanto convergente. Sea $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Probar que $a$ es punto fijo de $f$ es directo, pues

$$\begin{aligned} f(a) &= f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la continuidad de $f$. Efectivamente $a$ es punto fijo de $f$

Para probar la unicidad, supongamos que $b \in M$ también es un punto fijo de $f$. Se tiene que

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a,b)) \implies d(a,b) - cd(a,b) = (1-c)d(a,b) \leq 0.$$

Como $(1-c) > 0$, debe ser que $d(a,b) \leq 0$, pero las métricas son no-negativas, de lo que $d(a,b) = 0$. Es decir, $a = b$. Esto prueba el resultado. $\square$

## 2.3. Continuidad uniforme

La continuidad que revisamos es local, pero hay veces que esta condición no es suficiente para deducir resultados importantes. Por ejemplo, para demostrar que toda función $[a,b] \to \mathbb{R}$ continua es Riemann-integrable, Cauchy utilizó (sin darse cuenta) el hecho no trivial de que las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado son de hecho *uniformemente continuas*, en el sentido de que no solo mapean vecindades de un punto a vecindades de la imagen del punto, sino que mapean a puntos cercanos de modo que sus imágenes sean cercanas:

**Definición 2.20.** Sean $(M,d)$ y $(N,\rho)$ espacios métricos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x,y) < \delta$ entonces $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

*Observación.*

1. La diferencia lógica con la continuidad es solo el orden de los cuantificadores. Esto se traduce a que el $\delta$ que vayamos a escoger, solo dependerá del valor de $\varepsilon$, y no de los puntos que elijamos.

2. Es claro que si $f$ es uniformemente continua, entonces es continua. El recíproco no es cierto. Por ejemplo, al considerar la función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$ y dado $\delta > 0$ arbitrario, se tendrá que (asumiendo $x > 0$)

$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| = x\delta + \frac{\delta^2}{4}. \tag{2.20.1}$$

   Se tiene que $|x + \delta/2 - x| = |\delta/2| < \delta$, pero el lado derecho de la ecuación 2.20.1 no es acotado como función de $x$.

**Lema 2.21.** *De estar bien definida, la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.*

*Demostración.* La demostración del lema 1.20 funciona mutatis mutandis. $\square$

**Ejemplo 2.22.**

1. Toda función lipschitziana es uniformemente continua. La demostración del ejemplo 2.13 funciona mutatis mutandis.

2. La suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua, lo que es directo de probar. Sin embargo, el producto de funciones uniformemente continuas no ha de serlo, como ejemplifica $x \mapsto x^2$ definida $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sin embargo, al restringir esta función a un intervalo acotado, se vuelve lipschitziana, y por tanto uniformemente continua.

Recordemos que una función es continua si mapea sucesiones convergentes a sucesiones convergentes, preservando el límite. Algo similar ocurre con funciones uniformemente continuas y sucesiones Cauchy:

**Proposición 2.23.** *Sean $M, N$ espacios métricos. Si $f\colon M \to N$ es uniformemente continua, entonces mapea sucesiones Cauchy en $M$ a sucesiones Cauchy en $N$.*

*Demostración.* Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $M$, y consideremos la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $N$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme existe $\delta > 0$ de modo que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por la propiedad de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que si $m, n > N$, entonces $d(x_m, x_n) < \delta$. Por tanto, $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión de imágenes es Cauchy en $N$. □

*Observación.*

1. El que la continuidad sea uniforme es necesario: una función que es solo solo continua, como

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x}, \end{aligned}$$

   mapea la sucesión Cauchy $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ a la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, que no es Cauchy en $\mathbb{R}$.

2. Con esto, podemos probar que el que una función mapee sucesiones Cauchy a sucesiones Cauchy no es un criterio para chequear continuidad uniforme: la función real $x \mapsto x^2$ es continua, por lo que mapea sucesiones convergentes (y por tanto Cauchy), en sucesiones convergentes (y por tanto Cauchy), pero no es uniformemente continua.

El siguiente resultado dice que un producto finito de espacios completos, es completo:

**Proposición 2.24.** *Si $M, N$ son espacios métricos completos, entonces $M \times N$ es completo. Inductivamente, si $M_1, \ldots, M_n$ son espacios métricos completos, entonces $\prod_{i=1}^n M_i$ es completo.*

*Demostración.* Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $M \times N$ dada por

$$z_n := (a_n, b_n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como las proyecciones $\pi_1 \colon M \times N \to M$ y $\pi_2 \colon M \times N \to N$ son uniformemente continuas, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son Cauchy en $M$ y $N$ respectivamente, por lo que son convergentes en $M$ y $N$ respectivamente, debido a la completitud, digamos a $a$ y $b$ respectivamente. Se sigue que $z_n \to (a,b) \in M \times N$, de lo que la sucesión es Cauchy, y por tanto el espacio $M \times N$ es completo. □

*Observación.* El recíproco de este resultado también es cierto, pero para probarlo se necesitan herramientas que si bien no son complicadas, no hemos revisado.

**Ejemplo 2.25.** Como ya probamos que $\mathbb{R}$ es completo, es directo que $\mathbb{R}^n$ es completo para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Podemos generalizar este resultado para productos numerables:

**Proposición 2.26.** *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de espacios métricos completos, entonces $\prod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ es completo.*

*Demostración.* La idea es análoga al resultado anterior, pero la notación complica algo las cosas. Sea $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $\prod_{n\in\mathbb{N}} M_i$. Cada proyección $\pi_i \colon \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \to M_i$ es uniformemente continua, por lo que mapea sucesiones Cauchy a sucesiones Cauchy. En particular cada $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $M_i$, por lo que es convergente en $M_i$, digamos a $a_i$. Se sigue que $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}}) \to (a_1, a_2, \ldots)$, lo que prueba que el producto numerable es efectivamente completo. □

*Observación.* Igualmente, el recíproco de este resultado es cierto, pero no lo probamos.

El siguiente resultado es importante en general. Por ejemplo, es el paso crucial para demostrar que toda función continua en $\mathbb{R}$ es Riemann-integrable.

**Proposición 2.27 (Heine–Cantor).** *Sean $K, N$ espacios métricos. Si $K$ es compacto, entonces cualquier función continua $f \colon K \to N$ es uniformemente continua.*

*Demostración.* Supongamos, buscando una contradicción, que la continuidad de $f$ no fuese uniforme. En tal caso, existe $\varepsilon > 0$ de modo que para cualquier $\delta > 0$, en particular para $\delta_n := \frac{1}{n}$, podemos encontrar $x_n, y_n \in K$ de modo que $d(x_n, y_n) < \delta_n$, pero $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Consideremos las sucesiones formadas por los $x_n$ y los $y_n$. En virtud de la compacidad, podemos encontrar subsucesiones, ambas convergentes a un $a \in K$. Como $f$ y $d$ son continuas, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) &= d\Big(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\Big) \\
&= d\Big(f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big), f\Big(\lim_{n\to\infty} f(y_n)\Big)\Big) \\
&= d(f(a), f(a)) = 0,
\end{aligned}$$

lo que es contradictorio. $\square$

# 3. El espacio de las funciones reales continuas sobre un compacto

Recordemos del Ejemplo 1.7 que dado un conjunto $X$, el conjunto $\mathcal{B}(X)$ es un espacio métrico con la función

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|,$$

que puede ser inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$. La convergencia en esta norma/métrica, se llama *uniforme*. Resulta ser que es completo:

**Teorema 3.1.** *Dado un conjunto $X$, se tiene que $\mathcal{B}(X)$ es un espacio de Banach, es decir, es completo respecto a la métrica inducida por la norma-infinito $\|\cdot\|_\infty$.*

*Demostración.* En efecto, consideremos una sucesión Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}(X)$. Por definición esto es que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$ para todos $m, n > N$. Esto nos dice que como

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon,$$

para todo $x \in X$, entonces la sucesión $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$, y por tanto convergente en $\mathbb{R}$. Así, nuestro candidato a límite puede ser definido punto a punto como

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Primero, corresponde chequear que $f$ es acotada. En efecto, toda sucesión Cauchy es acotada, por lo que existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que $\|f_n\|_\infty \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M,$$

se sigue, tomando $n \to \infty$, que $|f(x)| \leq M$, es decir, que $f$ es efectivamente acotada.

Resta probar que nuestra sucesión original converge a $f$. Esto es directo, pues para $n > N$ se tiene que

$$\|f_n - f\|_\infty = \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

lo que prueba que efectivamente $f_n \to f \in \mathcal{B}(X)$. $\square$

Si $X$ es un espacio métrico compacto (eg., $[a, b]$ con la métrica de $\mathbb{R}$), el conjunto de las funciones continuas a valores reales $\mathcal{C}(X)$ es un subespacio métrico de $\mathcal{B}(X)$ gracias al Teorema del Valor Extremo, y también es una $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Este espacio también es completo:

**Teorema 3.2.** *Dado $X$ un espacio métrico compacto, $\mathcal{C}(X)$ es un espacio de Banach, es decir, es completo respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

*Demostración.* Recordemos que en un espacio completo, un subespacio es completo si y solo si es cerrado. Por tanto, basta probar que $\mathcal{C}(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X)$. Para ello, verificamos que que toda sucesión convergente de funciones continuas tiene como límite a una función continua, lo que es un argumento breve: como $X$ es compacto, las nociones de función continua y uniformemente continua coinciden, y sabemos que el límite de funciones uniformemente continuas es uniformemente continuo. $\square$

En este contexto, el espacio $\mathcal{C}(X)$ también es un anillo (conmutativo, con unidad) equipado con el producto punto a punto. La estructura de anillo y de $\mathbb{R}$-espacio vectorial son compatibles, en el sentido que la acción de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{C}(X)$ distribuye sobre el producto de $\mathbb{R}$.

Más generalmente, dado un cuerpo $k$, decimos que un anillo $A$ (conmutativo, con unidad[5]) es una *$k$-álgebra* si es un $k$-espacio vectorial, y las operaciones involucradas son compatibles en el sentido del párrafo anterior. Un ejemplo importante es el espacio de las funciones polinomiales con coeficientes reales, restringidas a algún intervalo cerrado:

**Ejemplo 3.3.** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto, y consideremos

$$\mathcal{P}_n(I) := \left\{ p \in \mathcal{C}(I) \colon p = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,\ a_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

De nuestros cursos anteriores, sabemos que toda función polinomial a valores reales definida en un intervalo compacto es continua, es decir $\mathcal{P}_n(I) \subseteq \mathcal{C}(I)$, que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y que es un anillo. Para verificar que es una $\mathbb{R}$-álgebra, hay que verificar la condición de compatibilidad, que en este caso se lee

$$(\alpha f)(\beta g) = (\alpha\beta)(fg), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}),$$

que es clara al expandir $f$ y $g$.

## 3.1. El teorema de Stone–Weierstrass

Un problema natural es el siguiente. Consideremos $X$ un espacio métrico compacto, y $A$ un sub-álgebra de $\mathcal{C}(X)$. Probamos que este espacio es cerrado, por lo que $\overline{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$. Así, podemos preguntarnos bajo qué condiciones esta contención es una igualdad. Resulta que basta la hipótesis que $A$ *separe puntos*, en el sentido que dados $x, y \in X$, podamos encontrar $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

[5] La existencia de la unidad es importante pues implica que contiene a todas las constantes (ie., los elementos de $k$). Hay autores que estudian otras configuraciones. Por ejemplo, se pueden considerar álgebras no-unitarias, no-conmutativas, o no-asociativas, las que son naturales en otros contextos. Acá trabajaremos el caso más simple.

**Teorema 3.4 (Stone–Weierstrass).** *Sea $X$ un espacio métrico compacto. Si $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ una sub-álgebra que separa puntos, entonces $\overline{A} = \mathcal{C}(X)$.*

Expliquemos la idea de la demostración. Fijada $f \in \mathcal{C}(X)$, para cada $\varepsilon > 0$ queremos encontrar $\varphi \in \overline{A}$ tal que $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$, de modo que $f \in \overline{A}$. Esta $\varphi$ estará dada por el *máximo puntual* de finitas funciones (acá usaremos la compacidad), cada una dada por una *interpolación* adecuada de $f$. Procedamos a la prueba.

**Lema 3.5 (Interpolación).** *Bajo las hipótesis de Stone–Weierstrass, para cada $a, b \in X$ existe una función $h_{a,b} \in A$ tal que*

$$h_{a,b}(a) = f(a) \quad y \quad h_{a,b}(b) = f(b).$$

*Demostración.* Si $a = b$, basta elegir $f$. Para $a \neq b$, por la hipótesis que $A$ separa puntos podemos encontrar $\psi \in A$ tal que $\psi(a) \neq \psi(b)$. Así, podemos considerar la interpolación

$$h_{a,b}(x) := f(a) + [f(b) - f(a)]\frac{\psi(x) - \psi(a)}{\psi(b) - \psi(a)}.$$

Es una combinación $\mathbb{R}$-lineal de elementos de $A$, por lo que también es miembro de $A$. Para verificar que satisface la propiedad de interpolación, basta con evaluar directamente. $\square$

**Lema 3.6 (Aproximación).** *Bajo las hipótesis de Stone–Weierstrass y fijado $x \in X$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $g \in A$ tal que*

$$g(y) \in (f(y) - \varepsilon,\ f(y) + \varepsilon),$$

*para todo $y \in X$.*

*Demostración.* Para cada $y \in X$, sea $h_{x,y}$ Podemos considerar el intervalo real de radio $\varepsilon$ alrededor de $(f - h_{x,y})(y) \in \mathbb{R}$, cuyo conjunto preimagen, por continuidad, contiene una vecindad (que podemos asumir es una bola $B_y$) en torno a $y \in X$ tal que $f(z) - h_{x,y}(z) < \varepsilon$, es decir

$$f(z) < h_{x,y}(z) + \varepsilon$$

para cada $z \in B_y$.

La colección $\{B_y : y \in X\}$ cubre $X$, y por la compacidad de $X$ podemos extraer un subcubrimiento finito $B_{y_1}, \ldots, B_{y_n}$. Así, la función

$$h_x(z) := \text{mín}(h_{x,y_1}(z), \ldots, h_{x,y_n}(z))$$

está bien definida. En el lema siguiente probamos que de hecho $h_x \in \overline{A}$, pero de momento lo asumimos.

Haremos un argumento análogo al recién visto, pero con $h_x$. Dado $x \in X$, como $f$ es continua podemos encontrar una vecindad $V_x$ de $x$ de modo que $f(z) < h_x(z) + \varepsilon$ para todo $z \in V_x$, o equivalentemente, que

$$f(z) - \varepsilon < h_x(z).$$

Todos los $V_x$ cubren $X$, y por compacidad extraemos finitos $x_1, \ldots, x_m \in X$. Así, la función

$$g(z) := \text{máx}(h_{x_1}(z), \ldots, h_{x_m}(z))$$

está bien definida, y satisface la cota deseada. Estamos prontos a probar que $g \in \overline{A}$. $\square$

**Lema 3.7 (Pertenencia).** *Bajo las hipótesis de Stone–Weierstrass, si $f, g \in A$, entonces*

$$(f \wedge g)(x) := \text{máx}(f(x),\, g(x)), \quad \textit{y} \quad (f \vee g)(x) := \text{mín}(f(x),\, g(x))$$

*pertenecen a $\overline{A}$.*

*Demostración.* Partimos recordando que un truco estándar permite probar que

$$f \wedge g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{y} \quad f \vee g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

por lo que el problema está en verificar que $|\cdot| \in \overline{A}$.

Notemos que podemos escribir $|f(x)| = \sqrt{f(x)^2}$. Por comodidad, normalicemos una $f \in \overline{A}$, de modo que

$$F(x) := \frac{f(x)^2}{\|f(x)\|_\infty^2} \in [0,1].$$

Esta función habita en $\overline{A}$, por lo que nos gustaría tomarle raíz cuadrada para recuperar el valor absoluto. El problema es que la función $x \mapsto \sqrt{x}$ no necesariamente está en $\overline{A}$.

Lo que sí podemos hacer es aproximarla uniformemente por funciones polinomiales, que ciertamente están en $A$. Los aproximandos se definen recursivamente como

$$\begin{cases} u_1(t) := 0 \\ u_{n+1}(t) := u_n(t) + \frac{1}{2}[t - u_n(t)^2] \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Se puede probar que la sucesión es (puntualmente) creciente mediante inducción. Para probar que converge puntualmente a la raíz cuadrada usamos un poco de manipulación algebraica. En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{t}-u_{n+1}(t)\right| &= \left|\sqrt{t}-u_n(t)-\frac{1}{2}\big(t-u_n(t)^2\big)\right| \\ &= \left|\sqrt{t}-u_n(t)-\frac{1}{2}\Big(\sqrt{t}+u_n(t)\Big)\Big(\sqrt{t}-u_n(t)\Big)\right| \\ &= \left|\Big(\sqrt{t}-u_n(t)\Big)\bigg(1-\frac{1}{2}\Big(\sqrt{t}+u_n(t)\Big)\bigg)\right|,\end{aligned}$$

y como $u_n(t) \leq \sqrt{t}$, el factor en la derecha es siempre positivo. Tomando $n \to \infty$, la única forma en que se mantenga la igualdad es que $\left|\sqrt{t}-u_n(t)\right| \to 0$, que es lo que habíamos afirmado.

Gracias al Teorema de Dini, podemos concluir que $u_n(t) \to \sqrt{t}$ uniformemente. Por lo argumentado anteriormente, concluimos lo enunciado. $\square$

Así, el Ejemplo 3.3 muestra que el espacio $\mathcal{P}_n([a,b])$ satisface las hipótesis del Teorema de Stone–Weierstrass, por lo que deducimos inmediatamente que las funciones polinomiales de $[a,b]$ son densas en el espacio de funciones continuas de $[a,b]$, es decir, que toda función continua en $[a,b]$ se puede aproximar uniformemente por funciones polinomiales de $[a,b]$. Este resultado se generaliza directamente a funciones polinomiales en varias variables.

## 3.2. El teorema de Arzelà–Ascoli

Probamos que un subconjunto en $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo posee la Propiedad de Borel, es decir, si es cerrado y acotado. Este no es el caso en espacios de funciones continuas, donde de hecho ninguna bola cerrada es compacta. Veamos el caso de la bola unitaria:

**Ejemplo 3.8.** Consideremos $\mathcal{C}([a,b])$. La bola unitaria cerrada

$$B[0,1] = \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua}\colon \ \|f\|_\infty \leq 1\},$$

es cerrada (pues es una bola cerrada), y acotada. Sin embargo, no es compacta: consideremos la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B[0,1]$ dada por

$$g_n(x) := x^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión converge puntualmente a la función

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1, \end{cases}$$

que no es continua. En particular, esta sucesión y sus subsucesiones no tienen límite puntual en $B[0,1]$, y por tanto no tienen límite uniforme en $B[0,1]$. Esto es precisamente no ser compacto.

Por lo tanto nos gustaría desarrollar alguna condición adicional que imponer sobre una familia de funciones continuas para recuperar la equivalencia a compacidad a la que ya nos acostumbramos. La respuesta se encuentra en el concepto de *equicontinuidad*. Giulio Ascoli probó que efectivamente esta condición bastaba en [Asc84], y Cesare Arzelà demostró que en verdad dicha condición era necesaria en [Arz95]. Intuitivamente, una familia $F$ de funciones continuas $[a, b] \to \mathbb{R}$ será equicontinua si cada una de las funciones de $F$ envía puntos suficientemente cercanos de $[a, b]$ a imágenes uniformemente cercanas. Formalmente:

**Definición 3.9.** Un subconjunto $E \subseteq \mathcal{C}([a, b])$ se dice (*uniformemente*) *equicontinuo* si dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para todas las $f \in E$.

Veamos un par de ejemplos de familias equicontinuas.

**Ejemplo 3.10.**

1. Si $E \subseteq \mathcal{C}([a, b])$ es formado por funciones lipschitzianas con misma constante $c > 0$, entonces es equicontinuo. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ cada $f \in E$ es tal que si $|x - y| < \frac{\varepsilon}{c}$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}^1([a, b])$ dada por $f_n(x) := \frac{x}{n}$ es equicontinua: basta notar que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \frac{1}{n} \leq 1$, es decir, cada $f_n$ tiene derivada acotada por 1, por lo que cada una es lipschitziana de constante 1. El ejemplo anterior nos permite concluir que esta sucesión es en efecto equicontinua.

Ahora, estudiaremos algunos resultados preliminares sobre familias equicontinuas que nos serán de utilidad para probar el Teorema de Arzelà–Ascoli.

**Lema 3.11.** *Si una sucesión equicontinua $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}([a, b])$ converge puntualmente a $f \in \mathcal{C}([a, b])$, entonces el conjunto $E := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f\}$ es equicontinuo.*

*Demostración.* Falta probar la equicontinuidad de $f$. Usando desigualdad triangular y ceros convenientes, tenemos para cada $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.
\end{aligned}$$

Por la convergencia puntual, para $n$ suficientemente grande el primer y último sumando de la expresión anterior son $< \varepsilon$, y por la equicontinuidad, el sumando de en medio es $< \varepsilon$ cuando $|x - y| < \delta$. Así, concluimos que

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$$

cuando $|x-y|<\delta$, y como $\varepsilon$ era arbitrario esto termina de verificar la equicontinuidad para $f$. $\square$

**Lema 3.12.** *Si una sucesión equicontinua $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}([a,b])$ converge puntualmente en a $f\in\mathcal{C}([a,b])$, entonces esta convergencia es uniforme sobre cada compacto $K\subseteq[a,b]$.*

*Demostración.* Debemos probar que $\|f_n-f\|_\infty\to 0$, o equivalentemente, que dado $\varepsilon>0$ podemos encontrar $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $x\in K$ se tenga $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Intentemos un argumento análogo a la demostración del Lema anterior. Por desigualdad triangular y ceros convenientes, se tiene que

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &= |f_n(x)-f_n(y)+f_n(y)-f(x)|\\ &\leq |f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(x)|\\ &\leq |f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)+f(y)-f(x)|\\ &\leq |f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|+|f(y)-f(x)|\end{aligned}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$ y $y\in K$ arbitrario. Intentemos estimar esta suma.

Como la sucesión es equicontinua, el Lema 3.11 nos permite deducir que el conjunto $E:=\{f,f_1,f_2,\ldots\}$ es equicontinuo, y por tanto dado $\varepsilon>0$, podemos encontrar $\delta>0$ tal que el primer y último sumando sean $<\varepsilon$ cuando $|x-y|<\delta$.

El problema es que la convergencia puntual no basta para acotar el sumando de en medio *uniformemente*, pues la velocidad de convergencia dependerá del punto en cuestión. Acá es que la compacidad entra en juego.

Consideremos el $\delta>0$ definido anteriormente por la equicontinuidad. Por la compacidad, podemos cubrir $K$ con finitas bolas abiertas de radio $\delta$, digamos

$$B(y_1,\delta),\ldots,B(y_k,\delta),$$

para $y_j\in K$ y algún $k\in\mathbb{N}$.

Ahora, la convergencia puntual nos dice que para cada $j=1,\ldots,k$, podemos encontrar $N(\varepsilon,y_j)\in\mathbb{N}$ tal que $|f_n(y_j)-f(y_j)|<\varepsilon$ cuando $n>N(\varepsilon,y_j)$. Así, podemos escoger

$$N(\varepsilon):=\max_{j=1,\ldots,k}\{N(\varepsilon,y_j)\},$$

y se tendrá que el sumando de en medio efectivamente es $<\varepsilon$ cuando $n>N(\varepsilon)$. Este $N(\varepsilon)$ solo depende de $K$ y $\varepsilon$, pero no de $x$, por lo que la convergencia es en efecto uniforme.

En particular, tenemos que $|f_n(x)-f(x)|<3\varepsilon$ cuando $n>N(\varepsilon)$. Como $\varepsilon$ era arbitrario, concluimos lo afirmado. $\square$

**Teorema 3.13 (Arzelà–Ascoli).** *Un conjunto $E\subseteq\mathcal{C}([a,b])$ es compacto si y solo si es cerrado, acotado, y equicontinuo.*

*Demostración.* Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$ : Ya sabemos que si $E$ es compacto, entonces debe ser cerrado y acotado, por lo que resta probar que es equicontinuo. Supongamos que no lo fuese. Así, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $\delta > 0$, se tenga que hay $x, y \in [a, b]$ y $f \in E$ tales que $|x - y| < \delta$, pero $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

En particular, para cada $\delta_n := \frac{1}{n}$, habrá $f_n \in E$ y $x_n, y_n \in [a, b]$ tales que $|x_n - y_n| < \delta$, pero $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Consideremos la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por la compacidad de $E$, esta sucesión admite una subsucesión convergente, y por tanto equicontinua. Pero por construcción, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es equicontinua y por tanto no tiene subsucesiones equicontinuas, lo que es contradictorio. Por tanto, debe ser que $E$ sí es equicontintinuo.

$\Longleftarrow$ : Probemos compacidad secuencial. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $E$. El plan es el siguiente: construir usando fuerza bruta una subsucesión convergente, primero utilizando el hecho de $E$ es cerrado y acotado para encontrar una que sirva en los puntos racionales de $[a, b]$, y luego apoyarnos en la equicontinuidad para extender esta convergencia de modo uniforme sobre todo $[a, b]$.

En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de los racionales de $[a, b]$. Notamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, cada sucesión de evaluaciones $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y posee una subsucesión convergente por estar en $E$. Supongamos que la respectiva subsucesión de cada $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $a_i$. Ahora, utilizaremos un argumento diagonal. Sea $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ el conjunto que indexa la subsucesión $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $a_1$. Ahora, podemos considerar la sucesión $(f_n(x_2))_{n\in N_1}$, que aún posee una subsucesión convergente a $a_2$, supongamos indexada por $N_2 \subseteq N_1$.

Siguiendo de esta manera para cada $i \in \mathbb{N}$, habremos encontrado una familia numerable de índices $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots$, y un punto $a := (a_1, a_2, \ldots)$. Por el Axioma de Elección, existe un $N_* \subseteq \mathbb{N}$ de modo que su $j$-ésimo elemento sea el $j$-ésimo elemento de $N_j$ (todos los conjuntos ordenados de forma creciente). Se sigue que cada miembro de $(f_n(x_i))_{n\in N_*}$ converge puntualmente a $a_i$, por lo que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una $f \in E$ sobre racionales.

Ahora, notemos que si probamos que esta convergencia es uniforme en $[a, b]$, terminamos. Esto es inmediato del Lema 3.12, que nos inidca que la convergencia es uniforme en compactos de $[a, b]$, en particular sobre el mismo $[a, b]$. $\square$

## 3.3. Funcionales lineales y el Teorema de Helly

Dado un $\mathbb{R}$-espacio normado, en nuestro curso de Álgebra Lineal estudiamos su estructura de $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Ahora, también conocemos que gracias a su norma, porta una estructura topológica. Por tanto, es natural indagar cómo interactúan estas estructuras.

Una de estas interacciones ocurre al nivel de morfismos. En el caso de los espacios vectoriales, estos corresponden a las transformaciones lineales, mientras que para espacios topológicos son las funciones continuas. Así, podemos estudiar las transformaciones lineales continuas entre dos espacios normados.

Resulta ser que las tranformaciones lineales continuas son precisamente las *acotadas*. Dados dos $\mathbb{R}$-espacios normados $V, W$, podemos definir, en primera instancia, una transformación $\mathbb{R}$-lineal $T\colon V \to W$ como acotada si

$$\|Tv\| < \infty$$

para cada $v \in V$. Resulta ser conveniente considerar una noción algo más fuerte, pues en tal caso conseguiremos una norma que hace del espacio de las transformaciones lineales continuas de un espacio de Banch:

**Teorema 3.14.** *Dados $V, W$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach, la función*

$$\|T\|_{\mathrm{op}} := \sup_{\|x\|_V \leq 1} \{\|Tx\|_W\}$$

*es una norma en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial*

$$\mathcal{B}(V, W) := \Big\{T \in \mathcal{L}(V, W)\colon \|T\|_{\mathrm{op}} < \infty\Big\},$$

*que resulta ser completo respecto a tal norma.*

*Demostración.* Omitimeros la demostración de que $\mathcal{B}(V, W)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y de la norma solo probaremos la desigualdad triangular—el resto queda propuesto. Directamente,

$$\begin{aligned} \|T+S\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{\|x\|_V \leq 1} \{\|(T+S)x\|_W\} \\ &\leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \{\|Tx\|_W + \|Sx\|_W\} \\ &\leq \sup_{\|x\|_V \leq 1} \{\|Tx\|_W\} + \sup_{\|x\|_V \leq 1} \{\|Sx\|_W\} \\ &= \|T\|_{\mathrm{op}} + \|S\|_{\mathrm{op}}. \end{aligned}$$

Para probar la completitud, consideremos $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $\mathcal{B}(V, W)$, y notemos que para cada $f \in V$ fijo, se tiene que

$$\|T_i f - T_j f\|_W \leq \|T_i - T_j\|_{\mathrm{op}} \|f\|_V .$$

Gracias a la condición de Cauchy de le hipótesis, esto indica que $(T_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $W$, que al ser Banach hace de dicha sucesión convergente, digamos a $Tf$. Esto define únicamente una función $T\colon V \to W$, que se verifica como lineal directamente. Para probar que es acotada, notamos que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_W &\leq \sup \{\|T_k f\|_W\}_{n\in\mathbb{N}} \\ &\leq \|f\|_V \sup \Big\{\|T_k\|_{\mathrm{op}}\Big\}_{n\in\mathbb{N}} < \infty, \end{aligned}$$

donde el último supremo es acotado debido a que cualquier sucesión Cauchy es acotada. Finalmente, falta probar que efectivamente $T_k \to T$. Para ello, notamos que

$$\begin{aligned}\|T_k f - Tf\|_W &= \lim_{n\to\infty} \|T_k f - T_n f\|_W \\ &\le \lim_{n\to\infty} \|T_k - T_n\|_{\text{op}} \|f\|_V \\ &\le \varepsilon \|f\|_V ,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta para $n, k$ suficientemente grandes, dados por la condición de Cauchy original. Tomando $\sup_{\|f\|_V \le 1}$, concluimos la convergencia deseada. □

La norma $\|\cdot\|_{\text{op}}$ se llama *norma operador*, y por eso usamos el subíndice para distinguirlo de las otras dos normas. Si bien pueden haber tres normas distintas usándose al mismo tiempo, es habitual omitir los subíndices por simplicidad notacional. Nosotros acogemos esa costumbre desde ahora, a menos que sea necesario.

Con esta noción, tiene sentido hablar de una *transformación acotada* como aquella que es acotada respecto a su norma operador. Así, podemos probar el resultado afirmado inicialmente:

**Proposición 3.15.** *Sean $V, W$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach. Una transformación lineal $T\colon V \to W$ es continua si y solo si es acotada.*

*Demostración.* Usaremos la caracterización de continuidad via sucesiones.

$\Longrightarrow$ : Probemos la afirmación contrarecíproca. Supongamos $T$ no acotada, caso en el que dada una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $V$ de norma $\le 1$, se tendrá $\|Tf_n\| \to \infty$. Así, se tiene

$$\frac{f_n}{\|Tf_n\|} \to 0 \quad \text{y} \quad T\left(\frac{f_n}{\|Tf_n\|}\right) = \frac{Tf_n}{\|Tf_n\|} \not\to 0,$$

es decir, $T$ no es continua.

$\Longleftarrow$ : Supongamos que $T$ es acotado. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una suecesión convergente en $V$, digamos a $f$, y probemos que $Tf_n \to T_f$. Directamente,

$$\begin{aligned}\|Tf_n - Tf\| &= \|T(f_n - f)\| \\ &\le \|T\| \|f_n - f\| \to 0,\end{aligned}$$

lo que verifica lo afirmado.

□

# Referencias


[AEP13] Nicole R. Andre, Susannah M. Engdahl, and Adam E. Parker, *An analysis of the first proofs of the Heine–Borel theorem*, Convergence (2013).

[Arz83] Cesare Arzelà, *Un'osservazione intorno alle serie di funzioni*, Rend. Dell' Accad. R. Delle Sci. dell'Istituto di Bologna (1882–1883), 142–159.

[Arz95] ———, *Sulle funzioni di linee*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis. Mat. **5** (1895), no. 5, 55–74.

[Asc84] G. Ascoli, *Le curve limite di una varietà data di curve*, Atti della R. Accad. Dei Lincei Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **18** (1883–1884), no. 3, 521–586.

[AU29] Pavel Alexandrov and Pavel Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings of the Section of Mathematical Sciences **14** (1929).

[Bol17] Bernard Bolzano, *Rein analytischer beweis des lehrsatzes, daß zwischen je zwey werthen, die ein entgegengesetztes resultat gewähren, wenigstens eine reelle wurzel der gleichung liegt*, Gottlieb Haase, Prague, 1817.

[Bol30] ———, *Functionenlehre*, Royal Bohemian Academy of Sciences, Prague, 1930.

[Bor95] É. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Annales scientifiques de l'E.N.S. Serie 3 **12** (1895), 9–55.

[Cou95] P. Cousin, *Sur les fonctions de n variables complexes*, Acta Mathematica **19** (1895), 22.

[Dug89] P. Dugac, *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet–Heine–Weierestrass–Borel–Schoenflies–Lebesgue*, Archives internationales d'histoire des sciences **39** (1989), no. 122, 69–110.

[Fré06] M. Maurice Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) **22** (1906), no. 1, 1–72.

[Kel50] John L. Kelley, *The tychonoff product theorem implies the axiom of choice*, Fundamenta Mathematicae **37** (1950), 75–76.

[Leb04] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1904.

[Lim14] Elon Lages Lima, *Espaços métricos*, IMPA, 2014.

[Ram14] Manya Raman-Sundstrom, *A pedagogical history of compactness*, arXiv:1006.4131 [math] (2014), arXiv: 1006.4131.

[RKL05] P. Rusnock and A. Kerr-Lawson, *Bolzano and uniform continuity*, Historia Mathematica **32** (2005), 303–311.

[Sch00] A. Schoenflies, *Die entwickelung der lehre von den punktmannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, B.G. Teubner, Leipzig, 1900.