Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor Jan Kiwi
Ayudante Benjamín Macías Quezada

Introducción al Análisis - MAT2507
Compilado de Ayudantías
Otoño 2022

Problema 1. Sea k un cuerpo.

(a) Demuestre que para todo $x \in k$ se tiene que $(-1)x = -x$.

(b) Demuestre que si $a, b \in k^\times$ suman 1, entonces $(ab)^{-1} = (a^{-1} + b^{-1})$.

(c) Demuestre que si $a \in k^\times$, entonces $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.

Solución. Sea k un cuerpo.

(a) Sea $x \in k$ arbitrario. Probaremos que $(-1)x$ es un inverso aditivo de x, y concluiremos por unicidad. Directamente,

$$\begin{aligned}
(-1)x + x &= (-1)x + 1x && \text{neutro de } (k^\times, \cdot) \\
&= (-1+1)x && \text{distribución de } (k, +, \cdot) \\
&= 0x && \text{inversos en } (k, +) \\
&= 0 && 0x = 0. \text{ (cf. ejercicio 1)}
\end{aligned}$$

Por tanto, $(-1)x$ es un inverso aditivo de x, y como estos son únicos, tenemos que $(-1)x = -x$.

(b) Sean $a, b \in k^\times$ tales que $a + b = 1$. Probaremos que $(a^{-1} + b^{-1})$ es un inverso multiplicativo de ab, y concluiremos por unicidad. Directamente,

$$\begin{aligned}
(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (ab) &= a^{-1}(ab) + b^{-1}(ab) && \text{distribución de } (k, +, \cdot) \\
&= (a^{-1}a)b + b^{-1}(ba) && \text{asociando y conmutando en } (k^\times, \cdot) \\
&= 1b + (b^{-1}b)a && \text{inversos y asociatividad de } (k^\times, \cdot) \\
&= b + 1a && \text{neutro e inversos de } (k^\times, \cdot) \\
&= b + a && \text{neutro de } (k^\times, \cdot) \\
&= a + b && \text{conmutando en } (k, +) \\
&= 1. && \text{por hipótesis}
\end{aligned}$$

Por tanto, $(a^{-1}+b^{-1})$ es un inverso multiplicativo de (ab), y como estos son únicos, tenemos que $(a^{-1}+b^{-1}) = (ab)^{-1}$.

(c) Sea $a \in k^\times$. Probaremos que $(-a)^{-1}$ es un inverso aditivo de (a^{-1}), y concluiremos por unicidad. Directamente,

$$\begin{aligned}
(-a)^{-1} + a^{-1} &= ((-1)a)^{-1} + a^{-1} && \text{por P1(1)} \\
&= (-1)^{-1}a^{-1} + a^{-1} && (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1} \\
&= (-1)a^{-1} + a^{-1} && (-1)^{-1} = 1 \\
&= -a^{-1} + a^{-1} && \text{por P1(1)} \\
&= 0. && \text{inversos en } (k, +)
\end{aligned}$$

Por tanto, $(-a)^{-1}$ es un inverso aditivo de (a^{-1}), y como estos son únicos, tenemos que $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$. □

Problema 2. Sea k un cuerpo ordenado. Demuestre que si $a, b, c, d \in k$ son tales que $a < b$ y $c < d$, entonces $(a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$.

Solución. Adoptemos la notación del enunciado. Por definición, $(a+b)(c+d) < 2(ac+bd)$ si y solo si $0 < 2(ac+bd) - (a+b)(c+d)$. Directamente,

$$\begin{aligned}
2(ac+bd) - (a+b)(c+d) &= 2ac + 2bd - ac - ad - bc - bd \\
&= ac + bd - ad - bc \\
&= (b-a)(c-d).
\end{aligned}$$

□

Por hipótesis, ambos factores son positivos, por lo que su producto también lo es. Por tanto, la expresión original es efectivamente positiva.

Problema 3. Recuerde que el *cuerpo de fracciones racionales* de $\mathbb{R}$ es el conjunto $\mathbb{R}(x) := \{\frac{p(x)}{q(x)} : p, q \in \mathbb{R}[x], q \neq 0\}$, definido con las operaciones de suma y producto usuales. Demuestre que el conjunto $P \subseteq \mathbb{R}(x)$ definido como

$$P = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \in \mathbb{R}(x) \colon \text{ los coeficientes principales de } p, q \text{ tienen igual signo} \right\},$$

es un conjunto de positivos para $\mathbb{R}(x)$. Ademáas, pruebe que es no-arquimediano, construyendo un contraejemplo con $1, x \in \mathbb{R}(x)$.

Solución. Por definición, debemos probar que P es cerrado bajo suma, producto, y cumple con tricotomía. Veamos cada uno.

- Sean $\frac{p}{q}, \frac{f}{g} \in P$. Se tiene que $\frac{p}{q} + \frac{f}{g} = \frac{pg+fq}{qg}$. Si los coeficientes principales de cada polinomio en los numeradores y denominadores son iguales pues son positivos, claramente ocurre lo mismo en la suma. Si los de $\frac{p}{q}$ son distintos a los de $\frac{f}{g}$, entonces cada coeficiente principal de la suma es negativo.
- El razonamiento es análogo para $\frac{p}{q}\frac{f}{g} = \frac{pf}{qg}$.
- Se tiene que $0 = \frac{0}{1} \in P$. Si $\frac{p}{q} \neq 0$, hay cuatro posibilidades para los signos de los coeficientes: si los de p y q son positivos o negativos al mismo tiempo, entonces su fracción es claramente positiva. Si tienen signo distinto, supongamos que el de p es negativo y el de q positivo, entonces $-\frac{p}{q} = \frac{-p}{q}$ es tal que los signos de sus coeficientes principales son iguales, y por tanto un elemento de P.

Probemos que es no-arquimediano: notemos que $1 = \frac{1}{1} \in P$ y $x = \frac{x}{1} \in P$. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, y notemos que

$$x - 1 \cdot n = \frac{x-n}{1} \in P,$$

es decir, que $n < x$, lo que prueba que es no-arquimediano. □

Problema 4. Demuestre que todo cuerpo ordenado contiene una copia de $\mathbb{Q}$, en el sentido de que siempre existe un morfismo de anillos inyectivo $\mathbb{Q} \hookrightarrow k$.

Solución. El plan es primero construir esta función sobre $\mathbb{Z}$, y luego extenderla a $\mathbb{Q}$. Primero, consideremos el único morfismo de anillos $\mathbb{Z} \to k$, que queda únicamente determinado por la imagen de 1. Para extenderla a $\mathbb{Q}$, definamos

$$\tilde{f}(\tfrac{p}{q}) := \tfrac{f(p)}{f(q)}.$$

Esta función está claramente bien definida. Resta probar que $\tilde{f}$ es un morfismo de anillos y es inyectiva. Para ello, nos aprovecharemos de que ya sabemos que f sí es un morfismo de anillos.

Sean $\frac{p}{q}, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Se tiene que

$$\tilde{f}(\tfrac{p}{q} + \tfrac{a}{b}) = \tilde{f}(\tfrac{pb+aq}{qb}) = \tfrac{f(pb+aq)}{f(qb)} = \tfrac{f(p)f(b)+f(a)f(q)}{f(q)f(b)} = \tfrac{f(p)}{f(q)} + \tfrac{f(a)}{f(b)} = \tilde{f}(\tfrac{p}{q}) + \tilde{f}(\tfrac{a}{b}).$$

La demostración es análoga para el producto y la resta. Para probar que es inyectivo, sean $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$, que asumimos son tales que $\frac{p}{q} < \frac{a}{b}$, lo que es equivalente a que $0 < \frac{a}{b} - \frac{p}{q}$. Aplicando nuestro morfismo, tenemos que

$$\tilde{f}(\tfrac{a}{b} - \tfrac{p}{q}) = \tfrac{f(a)}{f(b)} - \tfrac{f(p)}{f(q)},$$

por lo que si probamos que f preserva orden, ganamos. Esto ocurre pues si $n < m$, entonces $f(n)$ es la suma de n copias de 1, y $f(m)$ es la suma de m copias de 1, de lo que $f(n) < f(m)$. Concluimos que $\tilde{f}$ también preserva el orden, y por tanto ha de ser inyectiva. $\square$

Problema 5. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no-vacío y acotado superiormente, formado únicamente por números positivos. Definamos $\frac{1}{A} := \{\frac{1}{a} : a \in A\}$. Pruebe que

$$\tfrac{1}{\sup(A)} = \inf(\tfrac{1}{A}).$$

Solución. En tanto es no-vacío y acotado superiormente, por Axioma del Supremo, tiene un supremo, digamos $S := \sup(A)$. Para lo pedido, probaremos que $\frac{1}{A}$ tiene ínfimo, y después probaremos que es $\frac{1}{S}$.

Claramente $\frac{1}{A} \neq \emptyset$. También es acotado inferiormente por $\frac{1}{S}$: en tanto S es supremo de A, se tiene que $x \leq S$ para todo $x \in A$. Tomando inversos, se tiene que $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{S}$. Por tanto, $\frac{1}{A}$ tiene ínfimo I.

Probemos que $I = \frac{1}{S}$. Buscando una contradicción, supongamos que $\frac{1}{S}$ no es el ínfimo. Por tanto, existe una cota inferior T de $\frac{1}{A}$, mayor a $\frac{1}{S}$. Es decir, para todo $y \in \frac{1}{A}$, se tiene que

$$\tfrac{1}{S} \leq T \leq y \implies S \geq \tfrac{1}{T} \geq \tfrac{1}{y},$$

donde en la implicancia tomamos inversos. Notamos que cada $\frac{1}{y}$ es un elemento de A, por lo que la última desigualdad nos dice efectivamente que $\frac{1}{T}$ es una cota superior de A, menor a S, lo que contradice que este es el supremo de A.

Por tanto, concluimos que $\frac{1}{S}$ debe ser el ínfimo de $\frac{1}{A}$. $\square$

Problema 6. Sea $r \in \mathbb{R}$. Demuestre que el supremo del conjunto definido por $A_r := \{x \in \mathbb{R} : \lfloor x \rfloor \leq r\}$ es $\lfloor r \rfloor + 1$.

Solución. Por definición,

$$\lfloor r \rfloor \leq r \leq \lfloor r \rfloor + 1.$$

Por tanto $A_r \neq \emptyset$ pues la desigualdad anterior nos indica que $r \in A_r$. También, nos indica que A_r es acotado superiormente por $r \leq \lfloor r \rfloor + 1$. Probemos que esta cota también corresponde al supremo del conjunto.

Buscando una contradicción, supongamos que existe T una cota superior de A_r, pero menor a $\lfloor r\rfloor+1$. Notemos que también $\lfloor r\rfloor \leq T$, pues de lo contrario T no sería cota superior. Por tanto, tenemos que

$$\lfloor r\rfloor \leq T < \frac{T+\lfloor r\rfloor+1}{2} < \lfloor r\rfloor+1,$$

de lo que $\left\lfloor \frac{T+\lfloor r\rfloor+1}{2}\right\rfloor = \lfloor r\rfloor$, por lo que $\frac{T+\lfloor r\rfloor+1}{2} \in A_r$. Es decir, hemos encontrado un elemento del conjunto, mayor a T, lo que contradice el que T sea una cota superior del conjunto.

Concluimos que $\lfloor r\rfloor+1$ sí es el supremo de A_r. □

Problema 7. Sea $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$.

Solución. La demostración adapta las ideas para probar que $\sqrt{2}$ existe. Sea

$$A := \{x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \colon x^n < a\}.$$

Este conjunto es no-vacío, pues $0 \in A$. También es acotado superiormente (por ejemplo, por a). Por tanto, tiene un supremo S. Probemos que $S^n = a$. Por tricotomía, sabemos que o $S^n < a$, o $S^n > a$, o $S^n = a$, por lo que si probamos que las dos primeras opciones no ocurren, entonces forzamos que sí lo haga la tercera.

Supongamos que $S^n < a$. Por tanto $a - S^n > 0$. Notemos que para cualquier $m \in \mathbb{N}$ se tendrá que

$$(S + \tfrac{1}{m})^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^n \frac{1}{m^{n-k}}.$$

Para cada $k = 0, \ldots, n-1$, utilicemos la propiedad arquimediana para encontrar $m_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\textstyle\binom{n}{k} S^n \frac{1}{m_k^{n-k}} \leq \frac{a-S^n}{n}$$

Sea $M := \max\{m_1, \ldots, m_{n-1}\}$. Se tiene que

$$(S + \tfrac{1}{M})^n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S^n \frac{1}{M^{n-k}} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a-S^n}{n} + S^n = a - S^n + S^n = a.$$

Por tanto, $S + \frac{1}{M} \in A$, pero es claramente mayor que S. Esto contradice el que S sea el supremo de A. Entonces, no puede ser que $S^n < a$.

De forma análoga se prueba que no puede ser que $S^n > a$. Por tanto, debe ser que $S^n = a$, lo que prueba lo deseado. □

Problema 8. Demuestre que el conjunto $Q_2 := \{\frac{m}{2^n} \in \mathbb{Q} \colon m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Solución. Debemos probar que cada intervalo de $\mathbb{R}$ tiene algún elemento de Q_2. Sea $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Por Propiedad Arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(b-a) > 1$, de lo que $2^n(b-a) > 1$. Por tanto, $(2^n a, 2^n b)$ es un intervalo de largo mayor a 1, por lo que debe contener a algún número entero, digamos l. Se sigue que

$$l \in (2^n a, 2^n b) \iff 2^n a < l < 2^n b \iff a < \frac{l}{2^n} < b.$$

Claramente $\frac{l}{2^n} \in Q_2$. Como está en (a,b) concluimos lo solicitado. □

Problema 9. Demuestre que si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ es convergente, entonces todas sus subsucesiones convergen al límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, y supongamos que $x_n \to a \in M$. Por definición, esto es que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $d(x_n, a) < \varepsilon$. Por otro lado, consideremos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la original. Dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$, pues $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona. Por tanto, se sigue que si $k > K$, entonces $n_k > N$, y por tanto $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Esto es, $x_{n_k} \to a$. $\square$

Problema 10. Demuestre que una sucesión monótona $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ es convergente si y solo si tiene alguna subsucesión acotada.

Solución. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, pero sin perder generalidad supongamos que es no-decreciente. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. El resultado es directo, pues $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de sí misma, y en tanto es convergente, es acotada.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión acotada, digamos que es $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \leq c \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Probemos que esta cota también funciona para $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Notemos que como para cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < n_k$, se tendrá que $x_n \leq x_{n_k} \leq c$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es no-decreciente, se tiene que $x_1 \leq x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, la sucesión es efectivamente acotada. $\square$

Problema 11. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos su *n-ésima suma parcial* como $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Si S_n converge a $S \in \mathbb{R}$, diremos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es una *serie convergente*.

(a) Pruebe que si una serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente nula.

(b) Pruebe que la *serie geométrica*, dada por $G := \sum_{i=0}^{\infty} a^i$, donde $a \in \mathbb{R}$, converge si y solo si $|a| < 1$.

Demostración.

(a) Supongamos que la serie converge a a. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\
&= a - a = 0.
\end{aligned}$$

(b) Si a está en el intervalo unitario, entonces la suma parcial es tal que

$$\begin{aligned}
G_n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n &\implies G_n = 1 + a(1 + a + \cdots + a^{n-1}) \\
&\implies G_n = 1 + aG_{n-1} + aa^n - aa^n \\
&\implies G_n = 1 + aG_n - a^{n+1} \\
&\implies G_n = \tfrac{1-a^{n+1}}{1-a}.
\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$, obtenemos que $G = \frac{1}{1-a}$. Por otro lado, si $|a| \geq 1$, entonces $a^n \to \infty$ en cada suma parcial, por lo que la serie efectivamente diverge. $\square$

Problema 12. El objetivo de este problema es probar un caso (muy) particular del *método de Newton–Raphson* para aproximar ceros de funciones.

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable, con primera derivada positiva y acotada inferiormente, con segunda derivada positiva y acotada superiormente, que cambia de signo una única vez entre a y b. Sea $\xi \in [a, b]$ el único cero de f (que queremos aproximar). Elijamos $x_1 \in (\xi, b)$, y definamos recursivamente

$$x_{n+1} := x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ para } n > 1.$$

(a) Pruebe que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y monótona, y concluya que converge.

(b) Pruebe que $x_n \to \xi$.

(c) Utilice el método de Newton–Raphson para aproximar $\sqrt{2}$.

Solución.

(a) Como $f' > 0$, tenemos que f es creciente. Como $\xi < x_1$, se tiene que $f(\xi) = 0 < f(x_1)$, por lo que $\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} > 0$. Por tanto $x_2 < x_1$. De forma análoga, tenemos que la sucesión es decreciente. La cota inferior queda propuesta.

(b) Sea L el límite. Tomando $n \to \infty$, se tiene que

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)} \implies f(L) = 0 \implies L = \xi.$$

□

Problema 13. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{10^k}$, y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Demuestre que $x_n \to \frac{1}{3}$.

Solución. El resultado es directo usando la fórmula de una serie geométrica (teniendo cuidado con los índices). □

Problema 14. En el teorema de los intervalos encajados hay dos hipótesis importantes: en primer lugar, el largo de los intervalos encajados tiene que ser cada vez más pequeño; pero también, estamos considerando intervalos en $\mathbb{R}$ que es completo. Dé ejemplos de intervalos encajados que muestren que estas hipótesis son necesarias para que la intersección sea no-vacía.

Solución. Para el primer punto, considerar la familia $I_n := [n, \infty)$ para cada $n \in \mathbb{N}$: son cerrados encajados pero su intersección es vacía. Esto es porque el radio de los intervalos no es decreciente. Para el segundo punto, consideremos la familia $I_n := I(0, \frac{1}{n}) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ para cada $n \in \mathbb{N}$: son cerrados encajados y su radio es decreciente, pero su intersección es vacía porque estamos considerando solo irracionales (si consideramos todo $\mathbb{R}$ da 0, que es racional) □

Problema 15. Pruebe que toda función continua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

con $0 < c < 1$ posee un único punto fijo. Más aún, este punto fijo está dado por el límite de la órbita bajo f de cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solución. Ver [Que22], pp. 44–45. □

Problema 16. Veamos varios ejemplos de puntos interiores y de sus propiedades.

(a) Pruebe que si un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ tiene algún punto interior, entonces es infinito y no-numerable. (Hint: los intervalos son infinitos y no-numerables).

(b) ¿Puede un conjunto finito tener puntos interiores?

(c) ¿Puede un conjunto numerable tener puntos interiores? Dé un ejemplo.

(d) ¿Todo conjunto no-numerable tiene puntos interiores?

(e) Determine el interior de $[0, 1)$.

Solución.
(a) Que un conjunto tenga un punto interior significa que contiene estrictamente a algún intervalo.
(b) No, de lo contrario sería infinito.
(c) No, de lo contrario no-numerable.
(d) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es infinito y no-numerable, pero no tiene ningún punto interior: por densidad, todo intervalo en torno a un irracional contiene racionales.
(e) Es $(0, 1)$. Todo punto de este intervalo es parte del interior de $[0, 1)$. También, 0 no parte del interior, porque toda vecindad de 0 contiene números negativos, lo cuales no están en $[0, 1)$. $\square$

Problema 17. Veamos varios ejemplos de conjuntos abiertos y de sus propiedades.
(a) ¿Puede un conjunto finito ser abierto?
(b) ¿Puede un conjunto numerable ser abierto?
(c) ¿Es $[0, 1)$ abierto?
(d) ¿Es $\mathbb{Q}$ abierto?
(e) Sabemos que toda intersección finita de abiertos es un abierto. Pruebe que no ocurre lo mismo con las intersecciones infintas necesariamente.
(f) Decimos que un conjunto de complemento finito es *cofinito*. Pruebe que todo conjunto cofinito es abierto.
(g) Pruebe que todo abierto se puede escribir como unión de intervalos abiertos.
(h) Pruebe que dados $x, y \in \mathbb{R}$, podemos encontrar intervalos abiertos centrados en x e y que sean disjuntos. Como cumple esta propiedad, decimos que $\mathbb{R}$ es un *espacio de Hausdorff*.

Solución.
(a) No, ver 1(b).
(b) No, ver 1(c).
(c) No, ver 1(e).
(d) No, por 2(b).
(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $I_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Se sigue que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$, el que es cerrado.
(f) El complemento de un cofinito es cerrado (porque es finito), de lo que cofinito debe ser abierto.
(g) Si X es abierto, cada $x \in X$ tiene un vecindario abierto $U_x \subseteq X$. Por tanto, $X = \bigcup_{x\in X} U_x$.
(h) Basta tomar $r := |x - y|/2$ y considerar $I(x, r)$ y $I(y, r)$.

$\square$

Problema 18. Veamos varios ejemplos de conjuntos cerrados y de sus propiedades.
(a) Pruebe que todo conjunto finito es cerrado.
(b) Dé ejemplos (distintos a $\emptyset$ y $\mathbb{R}$) de conjuntos que sean cerrados y abiertos al mismo tiempo.

Problema 19 (Funções contínuas)**.** Adaptado de [Lim14b], pp. 30–35. Veamos varios ejemplos de funciones continuas/discontinuas.
(a) ¿Puede una función $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ser continua?
(b) ¿Puede una función $X := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ ser continua? ¿Y una función $X \cup \{0\} \to \mathbb{R}$?

(c) Decimos que una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *lipschitziana* si existe una constante $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$. Pruebe que toda función lipschitziana es continua. Veamos ejemplos de funciones lipschitzianas.

- Estudie la continuidad de las funciones constantes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Estudie la continuidad del valor absoluto $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Pruebe que si $f\colon I \to \mathbb{R}$ es diferenciable con derivada acotada por $c > 0$, entonces es lipschitziana de constante c. Concluya que es continua.
- Pruebe que toda función polinomial $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua.

Solución.

(a) Todas lo son: para cualquier radio $\varepsilon > 0$ basta tomar cualquier $\delta < 1$, y se tendrá que $x \in I(a, \delta) \implies x = a$, y concluimos tomando f a ambos lados de la ecuación.

(b) Un argumento similar al de (a) funciona: cada $x \in X$ está entre $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n+1}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Eligiendo $\delta = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right|/2$ podemos concluir igual que antes.

Si consideramos $X \cup \{0\}$, el mismo argumento ya no funciona porque 0 no está aislado del resto de puntos.

(c) Ver [Que22], pp. 12–//14.

□

Problema 20 (Compacidade na reta)**.** Adaptado de [Lim14a], pp. 161–195.

(a) ¿Es $\mathbb{R}$ compacto? ¿Es $\mathbb{Q}$ compacto? Es ¿Es $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ compacto?

(b) ¿Es $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ compacto?

(c) ¿Es compacto un subconjunto finito de $\mathbb{R}$?

(d) Sabemos que una unión finita de compactos es en sí compacta. ¿Qué ocurre con una unión arbitraria?

(e) Pruebe que la imagen de $[0, 1]$ bajo una función continua es acotada.

Solución.

(a) $\mathbb{R}$ es cerrado, pero no es acotado, así que no. $\mathbb{Q}$ tampoco es acotado, así que no. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es acotado, pero no es cerrado: por ejemplo $1/\pi$ es irracional, pero su expanción decimal es una sucesión en $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

(b) No lo es: la sucesión $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge fuera del conjunto, así que no es cerrado.

(c) Sí, ya sabemos que son cerrados. El que sean acotados es directo, pues basta tomar el que esté más alejado de 0 como cota.

(d) Notemos que $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}$. Cada singleton es compacto, pero $\mathbb{R}$ no lo es.

(e) La imagen de un compacto bajo una función continua siempre es compacta, en particular, acotada.

□

Problema 21 (Interior, fecho, e à fronteira)**.** Si $A \subseteq \mathbb{R}$, definimos la *frontera* de A por la ecuación $\partial A := \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R} - A)}$.

(a) Pruebe que la frontera de A son precisamente los puntos cuyas vecindades contienen puntos de A y de su complemento.

(b) Calcule la frontera de $\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}$, y de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

(c) Determine el interior, clausura y frontera de $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución.

(a) Esto es esencialmente traducir la definición simbólica: los puntos $\overline{A}$ son los puntos de $\mathbb{R}$ cuyas vecindades tienen puntos de A, y análogamente, los puntos de $\overline{\mathbb{R} - A}$ son los puntos de $\mathbb{R}$ cuyas vecindades tienen puntos de $\mathbb{R} - A$.

(b) $\mathbb{R} - \mathbb{R} = \emptyset$, así que $\partial\mathbb{R} = \emptyset$. Por otro lado, tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son denso en $\mathbb{R}$, por lo que su clausura es simplemente $\mathbb{R}$, así que $\partial\mathbb{Q} = \partial(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

(c) Ya sabemos que el conjunto no tiene interior. Su clausura es simplemente añadirle el $\{0\}$ (que es el único punto límite). Finalmente, un cáluclo directo muestra que la frontera será $\{0, 1\}$.

□

Problema 22. Sea $f\colon A \subseteq \mathbb{R}$ una función uniformemente continua. Pruebe que existe una única extensión uniformemente continua de f a $\bar{A}$, es decir, que existe una única función $\bar{f}\colon \bar{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}|_A = f$.

Solución. Cf. [Lim14a], pp. 244–245, Teorema 18.

Debemos probar tres cosas: que tal $\bar{f}$ existe, que en este caso es uniformemente continua, y que es única.

Recordemos que $\bar{A} = A \cup A'$. Definiremos $\bar{f}$ en A y A' por separado de forma compatible. En primer lugar, debemos definir

$$\bar{f}(x) := f(x), \text{ si } x \in A.$$

Para lidiar con A', recordemos que en tanto f es u. c., se tiene que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe para todo $a \in A'$ (cf. [Lim14a], pp. 243, corolário do Teorema 16). Por tanto, podemos definir

$$\bar{f}(x) := \lim_{x\to a} f(x), \text{ si } a \in A'.$$

Probemos que $\bar{f}$ es u. c.: dado $\varepsilon > 0$, consideremos el $\delta > 0$ que nos entrega la u. c. de f. Queremos probar que si $x, y \in \bar{A}$ son tales que $|x - y| < \delta$, entonces $\left|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)\right| < \varepsilon$. Como x, y están en clausura de A, existen sucesiones en A que convergen a ellos, supongamos que son $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cada $x_n, y_n \in A$. Por definición de convergencia, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - y_n| < \delta$, y por continuidad, $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = \left|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)\right| < \varepsilon.$$

Para verificar la unicidad, supongamos que existe φ que está definida como $\bar{f}$. Se sigue que si $a \in \bar{A}$, hay una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a a, y por tanto

$$\begin{aligned}
\varphi(a) = \varphi(\lim x_n) &= \lim \varphi(x_n) \\
&= \lim f(x_n) \\
&= \lim \bar{f}(x_n) \\
&= \bar{f}(\lim x_n) \\
&= \bar{f}(a).
\end{aligned}$$

□

Problema 23. Sea $f\colon X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Pruebe que si X es acotado, entonces $f(X)$ también es acotado.

Solución. Ver [Lim14a], p. 245, corolário do Teorema 18. □

Problema 24. Demuestre que la función $2^x\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ es continua en 0. Concluya que esta función puede ser extendida a todo $\mathbb{R}$.
(*Hint: recuerde que si $a > 1$, entonces $|a^x - 1| \le a^{|x|} - 1$*).

Solución. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos $\delta > 0$ tal que

$$|x - 0| = |x| < \delta \implies \left|2^x - 2^0\right| = |2^x - 1| < \varepsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{Q}$. Notemos que

$$2^{|x|} - 1 < \varepsilon \iff |x| = \log_2(\varepsilon + 1),$$

por lo que basta tomar $\delta := \log_2(\varepsilon + 1)$ y obtenemos lo deseado.

Por un resultado visto en clases, sabemos que ahora 2^x es uniformemente continua en $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ para todos $a < b$. Por el problema 1, podemos extender a todo $[a, b]$. Se sigue que tenemos 2^x definida en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}$, en particular, en cada parte de $\mathbb{R}$. □

Problema 25. Pruebe que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ es continua, es constante.

Expansiones ternarias

Nuestro objetivo en esta sección es estudiar las expansiones de números en $[0, 1]$ en base 3. Probaremos que estas siempre existen, pero que no son necesariamente únicas. En virtud de esto, también estudiaremos cómo decidir si es que un número dicha expansión sí es única.

Los dígitos en base 3 son $\{0, 1, 2\}$. Intuitivamente, una expansión en base 3 de un número se determina indicando qué dígito se encuentra en qué posición, es decir, una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. ¿Cómo obtenemos un número a partir de esta sucesión? Al igual que en base 10: asignando la serie correspondiente. Formalmente, mediante la función

$$\begin{aligned} f_3 \colon \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow [0, 1] \\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}. \end{aligned}$$

En este contexto, llamaremos a $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una *sucesión de dígitos en base* 3, y a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ su respectiva 3-*serie*.

Problema 26. Muestre que f_3 está bien definida, en el sentido de que bajo estas condiciones, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ siempre converge, y lo hace a un número en $[0, 1]$. Para esto, verifique que la sucesión de sumas parciales es creciente y acotada (por 0 y 1, respectivamente).

Problema 27. Muestre que f_3 es sobreyectiva, es decir, que todo $x \in [0, 1]$ es una 3-serie de alguna sucesión en $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$. Para ello, trabajamos los casos $x = 1$ y $x \in [0, 1)$ por separado:

(a) Si $x = 1$, verifique que la sucesión constante 2 satisface lo requerido.

(b) Si $x \in [0, 1)$, procedemos como en la Guía 1 o en la Interrogación 1, construyendo la sucesión de dígitos a la fuerza de forma recursiva:

- En primera instancia, elegimos $a_1 := \sup_{a\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{a}{3} \le x \right\}$.
- Luego, para $n > 1$, elejimos $a_k := \sup_{a\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{a}{3^k} \le x - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_j}{3^j} \right\}$.
- De este modo, verifique que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \le x - \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{3^k} < \frac{1}{3^n},$$

y concluya lo deseado tomado $n \to \infty$.

Problema 28. Determinemos los casos en los que f_3 es inyectiva: consideremos dos sucesiones distintas $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$ cuyas 3-series coincidan, es decir, tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}. \tag{1}$$

(a) Suponga que el primer dígito en el que las sucesiones difieren está en la n-ésima posición, y suponga, sin perder generalidad, que $a_n > b_n$. Verifique que

$$\frac{a_n - b_n}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}.$$

(b) En este caso, verifique que $\frac{a_n-b_n}{3^n} \geq \frac{1}{3^n}$ y que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k} \leq \frac{1}{3^n}$.

(c) Verifique que la ecuación 1 es cierta si y solo si $a_n - b_n = 1$, y $a_k = 0, b_k = 2$ para todo $k \geq n+1$.

(d) Concluya que la inyectividad de f_3 falla si y solo si $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ termina en infinitos 0 y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en infinitos 2.

Problema 29. Considere una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente—no necesariamente continua.

(a) Demuestre que si $I \subseteq \mathbb{R}$ es conexo, entonces $f^{-1}(I)$ es conexo.

(b) Dé un ejemplo en el que $I \subseteq \mathbb{R}$ sea conexo, pero $f(I)$ no lo sea.

Solución.

(a) Sea $A := f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in I\}$. Si $A = \emptyset$, estamos listos, por lo que estudiamos el caso $A \neq \emptyset$. Sean $a, b \in A$. Si $a = b$, entonces estamos en prescencia de un singleton, que es conexo. Sin perder generalidad supongamos que $a < b$. Basta probar que todo $y \in (a,b)$ también pertenece a A. Esto es directo: como $f(a), f(b) \in I$, la monotonicidad de f nos permite concluir que $f(y) \in (f(a), f(b))$, y por tanto $y \in A$.

(b) Basta considerar $f(x) := \lfloor x \rfloor$, y $I := (1,2)$ para un ejemplo de creciente no-estricta. Para un ejemplo de creciente estricta podemos considerar $I := [0,2]$ y

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ x+1 & x \in (1,2]. \end{cases} \quad \square$$

Problema 30. Demuestre que si $f\colon (0,1) \to \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ es continua, entonces es constante.

Solución. Buscando una contradicción, supongamos que f no fuese constante. Como $(0,1)$ es conexo, y la imagen continua de un conexo es conexo, se tendría que $f((0,1)) \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ sería conexo. Pero como f es no constante, en la imagen hay al menos dos puntos distintos, que forman una desconexión de la imagen. $\square$

Problema 31. Demuestre que en este momento hay dos puntos ecuatoriales opuestos de la Tierra con la misma temperatura.

Solución. (Esto es un caso particular del teorema de Borsuk–Ulam). Sea $t\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ la temperatura en el punto del ecuador correspondiente a un ángulo θ respecto al eje x. Sea $T\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ la diferencia de temperatura en puntos opuestos, i. e., $T(\theta) = t(\theta + \pi) - t(\theta)$. Notamos que

$$T(0) = t(\pi) - t(0), \quad T(\pi) = t(2\pi) - t(\pi) = t(0) - t(\pi),$$

de lo que $T(0) = -T(\pi)$. Si $T(0) = 0$ estamos listos. Si no, podemos suponer que $T(0) < 0 < T(\pi)$. Por TVI, hay algún punto $x_* \in (0,\pi)$ tal que $T(x_*) = 0$. $\square$

Problema 32. Demuestre que $x := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7^{k^2}}$ es irracional.

Solución. Recordemos que un real es racional si y solo su expansión en base b (para cualquier b) es finita o periódica. Mirando la expansión en base 7, se obtiene que

$$x = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^9} + \ldots = (0100100001\ldots)_7,$$

que no es finita ni periódica. □

Problema 33. Encuentre un polinomio $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $p(1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) = 0$.

Solución 1. Basta tomar el producto de los polinomios irreducibles de raíz cada conjugado de $1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Desarrollando y escalando adecuadamente queda con coeficientes enteros (debería). □

Solución 2. Sea $x := 1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Elevamos al cuadrado la ecuación

$$x - 1 = \sqrt{3} + \sqrt{5} \tag{2}$$

suficientes veces (hasta eliminar todos los radicales) e igualando a 0 obtenemos una expresión formal en x. Interpretando esta expresión como un polinomio en $\mathbb{Z}[x]$, se obtiene lo deseado. □

Problema 34. Demuestre que π^2 es trascendente.

Solución 1. Supongamos que π^2 fuese algebraico. Por tanto, tiene polinomio minimal en $\mathbb{Q}[x]$. Entonces $\mathbb{Q}(\pi^2)$ tendría grado de extensión finita sobre $\mathbb{Q}$. Como $\mathbb{Q}(\pi)$ es subextensión de $\mathbb{Q}(\pi^2)$, la ley de torres indica que también tendría grado finito de extensión y por tanto sería algebraico. □

Solución 2. Supongamos que π^2 fuese algebraico. Por tanto existe algún polinomio $p \in \mathbb{Q}[x]$ tal que $p(\pi^2) = 0$. Por otro lado, el polinomio $\tilde{p} \in \mathbb{Q}[x^2]$ con los mismo coeficientes que p tiene a π como raíz, y por tanto π sería algebraico. □

Solución 3. Supongamos que π^2 fuese algebraico, es decir que $\pi^2 \in \bar{\mathbb{Q}}^{\text{alg}}$. Por tanto, el polinomio $x^2 - \pi^2 \in \bar{\mathbb{Q}}^{\text{alg}}[x]$ tiene como solución a π. Como $\bar{\mathbb{Q}}^{\text{alg}}$ es algebraicamente cerrado, contiene a a todos los algebraicos sobre $\mathbb{Q}$, por lo que π tendría que ser algebraico. □

Problema 35. Demuestre que $y := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{11^{k!}}$ es trascendente.

Solución. En primer lugar, y converge porque

$$\frac{\frac{k+1}{11^{(k+1)!}}}{\frac{k}{11^{k!}}} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{11^{k+1}} \longrightarrow 0.$$

Ahora, notemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{11^{k!}} &= \frac{1}{11^{n!}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{11^{k!-n!}} \\
&\leq \frac{1}{11^{n!}} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k-n}{11^{k-n}} + \frac{n}{11^{k-n}} \right) \\
&\leq \frac{1}{11^{n!}} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{k}{11^{k}} + \frac{n}{11^{k}} \right).
\end{aligned}$$

Supongamos que y fuese algebraico. En este caso, escribiendo $d := \deg y$, se tiene que existe $c > 0$ tal que

$$\left| y - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^d},$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. En particular, con $q := 11^{(n+1)!}$ (y el p adecuado), se tendría que

$$\begin{aligned} \frac{c}{(11^{(n-1)!})^d} &\leq \left| y - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{11^{k!}} \right| \\ &\leq \frac{1}{11^{n!}}(A + nB). \end{aligned}$$

donde escribimos $A := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k}{11^k}$, $B := \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{11^k}$ (notar que ambas series convergen). Por tanto,

$$\frac{11^{n!}c}{(11^{(n-1)!})^d(A + nB)} = 11^{(n-d)(n-1)} \frac{c}{A + nB} \leq 1,$$

pero el lado izquierdo de la desigualdad se va a ∞, lo que es contradictorio. $\square$

Problema 36. Asumiendo que e es trascendente, pruebe que $\log 2$ es irracional.

Solución. De ser racional, existirían $p, q \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$\begin{aligned} \log 2 = \frac{p}{q} &\implies 2 = e^{\frac{p}{q}} \\ &\implies 2^q = e^p. \end{aligned}$$

Así, el lado derecho sería entero, y el izquierdo trascendente (en particular, no un entero), lo que no puede ser. $\square$

Problema 37. Asumiendo que e es trascendente, demuestre que si $a, b \in \mathbb{N}$ son coprimos, entonces $\log_b a$ es irracional.

Solución. De ser racional existirían $p, q \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\begin{aligned} \log_b a = \frac{p}{q} &\implies a = b^{\frac{p}{q}} \\ &\implies a^q = b^p, \end{aligned}$$

lo que contradice la coprimalidad de a y b. $\square$

Problema 38. Asumiendo que e y π son irracionales, pruebe que al menos uno entre $e + \pi$ y $e\pi$ es irracional.

Solución. Notemos que e y π son soluciones de

$$p(x) := (x - e)(x - \pi) = x^2 - (e + \pi)x = e\pi,$$

como ambos son trascendentes, no puede ser que $p \in \mathbb{Q}[x]$ (i. e., que todos los coeficientes sean racionales) porque en ese caso ambos números serían algebraicos. Por tanto, al menos uno de los coeficientes ha de ser irracional. $\square$

References

[Lim14a] Elon Lages Lima, *Curso de análise*, vol. 1, IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[Lim14b] Elon Lages Lima, *Espaços métricos*, IMPA, 2014.

[Que22] Benjamín Macías Quezada, *Análisis*, `https://github.com/bmq-00/analisis`, 2022.