Espacios métricos

Benjamín Macías Quezada

2021–2023

Índice

Resumen

Este documento comenzó como apuntes personales del curso de Análisis Real MAT2515 impartido por Duván Henao en la Pontificia Universidad Católica de Chile en primavera de 2021. Posteriormente, decidí completar lo que había escrito hasta cubrir, más menos, todo el contenido que se ve usualmente en nuestro curso de pregrado, apoyándome fuertemente en el maravilloso libro de Elon Lages Lima, *Espaços métricos* [Lim14].

Mi objetivo al publicarlos en internet es que exista un recurso en español y de libre acceso al contenido de nuestro curso, cuya exposición sea lo más rigurosa y pedagógica posible, de modo que sirva tanto a quien quiera estudiar de ellos, tanto como a profesores para realizar algún curso.

A la fecha, de lo que me gustaría incluir faltan las demostraciones del teorema de Arzelà–Ascoli en generalidad, el de Stone–Weierstraß, y el de Hahn–Banach. He decidido omitir completamente hablar sobre espacios métricos conexos porque considero que es tiempo mal utilizado, principalmente porque en el curso de topología se estudian exactamente las mismas construcciones, propiedades, y ejemplos que en espacios métricos.

Respecto a lo que sí está escrito, es una exposición bastante estándar, salvo que utilizamos la nomenclatura de Lima [Lim14], y es habitual en la tradición brasileña que algunos resultados lleven otros nombres, o estén atribuidos a otras personas (eg., un teorema que usualmente se atribuye a Tychonov, acá será indicado como de Cantor–Tychonov).

Está de más decir que debo haber cometido muchos errores, tanto en la matemática como en la exposición—de los cuales no me hago responsable. Espero que a medida que sean encontrados me los puedan comunicar a mi correo `benjaquezadam@uc.cl` para corregirlos.

1. Introducción

El estudiar espacios métricos tiene varias motivaciones: a posteriori, los espacios métricos aparecen de forma natural en un abanico amplio de contextos, por lo que es conveniente tener una teoría abstracta que aplicar en los casos particulares. Por otro lado los espacios métricos son ejemplos de espacios topológicos, por lo que su estudio a este nivel sirve como buena preparación para el estudio póstumo de topología general, en especial porque son bien portados en contraste a espacios topológicos más exóticos, y también porque ya tenemos desarrollada alguna intuición gracias a nuestros cursos de cálculo real.

Históricamente, el concepto de espacio métrico viene después del cálculo, y nació tras intentos de generalizar ideas de cálculo a otros espacios (eg. espacios de funciones). Por ejemplo, se tenía en mente la noción de *compacidad*: de nuestros cursos de cálculo sabemos que en $\mathbb{R}$ los conjuntos compactos son precisamente los cerrados y acotados, y sabemos que poseen propiedades deseables, como por ejemplo, la propiedad de Bolzano–Weierstraß. Resulta que la generalización no es directa a espacios de funciones, y la búsqueda de esta generalización llevó a Maurice Fréchet [Fr6] en en su tesis de 1906 a acuñar el concepto de espacio métrico.

El plan para este capítulo es definir espacio métrico, dar una variedad de ejemplos para tenerlos a mano, y posteriormente, lo que nos convoca, estudiar detalladamente la topología de los espacios métricos.

1.1. Definición y ejemplos

Un espacio métrico es un conjunto equipado con una noción de distancia entre dos puntos. Intuitivamente, cualquier noción decente de distancia debe cumplir varias propiedades mínimas, que son rescatadas por la definición:

Definición 1.1. Una *métrica* en un conjunto M es una función $d\colon M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades para todos $x, y, z \in M$:

(M1) *Coincidencia:* $d(x,y) = 0 \iff x = y$.

(M2) *Simetría:* $d(x,y) = d(y,x)$.

(M3) *Desigualdad triangular:* $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

El número $d(x,y)$ se llama *distancia* entre x e y, y el par (M,d) se llama un *espacio métrico*.

La definición indica que la distancia es positiva salvo cuando se mide la distancia entre un punto y sí mismo, que da lo mismo el orden en el que se mida la distancia, y que la distancia más corta entre dos puntos es aquella que no toma ningún desvío.

Observación. Tres cosas.

1. El nombre de "coincidencia" en (M1) no es estándar. De hecho, no hay estándar, por lo que decidimos de forma completamente arbitraria acoger el nombre que Fréchet usó originalmente. Otros nombres incluyen "separción", "no-degeneración", y "propiedad de indistinguibles".

2. Hay autores que escriben la no-negatividad de d de forma explícita como un cuarto axioma. Nosotros hemos elegido hacerlo de forma implícita, pero de todos modos de debe verificar en una demostración formal.

3. La lista de axiomas que dimos es redundante: basta asumir que d cumple (M1) y (M3) para deducir la no-negatividad y (M2). El motivo de la redundancia es meramente histórico y convencional, y se encontrará la misma lista en cualquier texto decente.

Ejemplo 1.2. En cualquier conjunto M se puede definir la función

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Esta función define una métrica en M: en efecto, las condiciones (M1) y (M2) de la definición 1.1 claramente se cumplen, y es ciertamente no-negativa. Para la tercera condición, notamos que el lado izquierdo es a lo más 1. Si fuese 0, entonces $x = z$ y la condición se cumple trivialmente; si fuese 1, el lado derecho es distinto de 0, pues de lo contrario se tendría que $x = y = z$, lo que fuerza a que el lado izquierdo sea 0, contradicción. Esta métrica se llama *métrica cero-uno* o *métrica discreta*. Es de gran utilidad para producir contraejemplos.

Ejemplo 1.3. Sea (M,d) un espacio métrico. Cualquier subconjunto $S \subseteq M$ puede ser realizado como un espacio métrico considerando la restricción de d a S, en otras palabras, $(S, d|_S)$ es un espacio métrico: las tres condiciones de la definición 1.1 se cumplen para todos $x, y, z \in M$, por lo que en particular se cumplen para todos $x, y, z \in S$. Este espacio se llama un *subespacio métrico* de M, y $d|_S$ se llama la *métrica subespacio inducida* por (M,d).

Ejemplo 1.4. Uno de los ejemplos recurrentes es $(\mathbb{R}^n, d)$, donde

$$d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

la *métrica usual*. Claramente es una función no-negativa, porque es raíz cuadrada de un número no-negativo. Estudiemos el resto de condiciones: (M1) viene del hecho de que una suma de números no-negativos puede ser 0 exclusivamente en el caso que cada sumando sea 0, mientras que (M2) es debido a que $(a-b)^2 = (b-a)^2$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$. (M3) es no-trivial, y en este caso se conoce como la *desigualdad de Cauchy–Schwarz* para $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, y debería sonar familiar del curso de álgebra lineal. De todos modos no lo probaremos ahora porque estamos prontos a dar una demostración de un resultado más general, que cubre este caso.

Ejemplo 1.5. Se pueden definir espacios donde el conjunto de base está formado por funciones. Estudiaremos estos espacios es con lujo de detalle posteriormente, por lo que ahora solo daremos una definición para tener el ejemplo a mano. Dado un conjunto X, denotamos el conjunto de las *funciones* $X \to \mathbb{R}$ *acotadas* como $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}) := \{f \colon X \to \mathbb{R} \colon f \text{ acotada}\}$. El uso más recurrente es cuando X es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ (como $[0, 1]$). En este conjunto, la función

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

es una métrica: la no-negatividad es clara, y (M1) y (M2) son heredadas gratuitamente del valor absoluto. (M3) requiere un poquito más de cuidado. En efecto, para todas $f, g, h \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

para todo $x \in X$, de lo que, tomando supremo,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in X} |h(x) - g(x)|.$$

Podemos tomar estos supremos porque estamos suponiendo que todas estas funciones son acotadas.

1.2. Espacios euclideanos: dimensión finita

Pueden haber múltiples maneras de inducir una estructura métrica en un conjunto. Este es el caso de, por ejemplo, $\mathbb{R}^n$. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado. La función $d(x, y) := \|x - y\|$ define una métrica en E, llamada la *métrica inducida por* $\|\cdot\|$. Veamos algunas normas de interés. Recordemos que si es E de dimensión finita, se tiene que $E \cong \mathbb{R}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ (como espacios vectoriales), por lo que en este caso basta estudiar $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.6. Dado $p \geq 1$, definimos la *norma p de a* $:= (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$\|a\|_p := \sqrt[p]{\textstyle\sum_{i=1}^n |a_i|^p}.$$

En el caso $p = \infty$, definimos $\|a\|_\infty := \sup_{1 \leq i \leq n} |a_i|$.

El verificar que $\|\cdot\|_\infty$ es efectivamente una norma es directo y similar al ejemplo 1.5. Sin embargo, aun no estamos en condiciones de bautizar esta norma como tal en el caso $1 \leq p < \infty$, pues aún no probamos que lo es. La única parte complicada es probar que satisface la desigualdad triangular. Para ello necesitamos un par de resultados, los que nos serán de gran ayuda no solo para verificar la desigualdad triangular en este caso, sino que también para las sucesiones infinitas y para las funciones Lebesgue-integrables. La desigualdad triangular de $\|\cdot\|_p$ tiene un nombre especial: la *desigualdad de Minkowski*. Esta se prueba a través de la *desigualdad de Hölder*, la que a su vez necesita de la *desigualdad de Young*. Vamos en orden:

Lema 1.7 (Desigualdad de Young). *Sean $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y $p, q > 1$. Si se tiene que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demostración. Daremos un argumento por convexidad. Recordemos que la función $f(x) = e^x$ es convexa, es decir, que para todos $x, y \in \mathbb{R}$, el segmento de recta que conecta $f(x)$ y $f(y)$ está sobre el grafo de f. Como este segmento de recta es dado por una combinación convexa de los puntos $f(x)$ y $f(y)$, se tiene que para cualquier $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + [1 - \lambda]y) \leq \lambda f(x) + [1 - \lambda]f(y). \tag{1.7.1}$$

Ahora, notamos que si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, por lo que eligiendo $\lambda := \frac{1}{p}$ forzamos que $1 - \lambda = \frac{1}{q}$. Reemplazando $x := \log(a^p)$ y $y := \log(b^q)$ en la ecuación 1.7.1, se obtiene el resultado enunciado. $\square$

Ahora vamos a probar dos resultados claves. Queremos hacer notar que si bien ambos son casos particular de resultados más generales, suelen llevar el mismo nombre que en el caso más general (que estudiaremos eventualmente). Para hacer la distinción, hemos decidido agregarles el adjetivo de "en dimensión finita", aunque advertimos que esto no es para nada estándar.

Lema 1.8 (Desigualdad de Hölder en dimensión finita). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $1 < p, q < \infty$. Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces*

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

Demostración. Notamos que si x o y son 0, entonces la desigualdad es cierta trivialmente, por lo que podemos suponer que $x, y \neq 0$. Considerando $u := \frac{x}{\|x\|_p}$ y $v := \frac{y}{\|y\|_q}$ es claro que $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$, y por tanto también $\|u\|_p^p = \|v\|_q^q = 1$.

Ahora, para cada $i = 1, \ldots, n$ notamos que por la desigualdad de Young (lema 1.7) se tiene que $|u_i v_i| \leq \frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q}$. Sumando estas n desigualdades, obtenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| = \|uv\|_1 &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|u_i|^p}{p} + \frac{|v_i|^q}{q} \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \\ &= \frac{1}{p} \|u\|_p^p + \frac{1}{q} \|v\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

□

Finalmente, podemos probar la desigualdad triangular que buscábamos:

Teorema 1.9 (Desigualdad de Minkowski en dimensión finita). *Sea* $1 < p < \infty$. *Para todos* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *se tiene que*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p .$$

Demostración. Asumamos la notación del enunciado. Usando la desigualdad triangular usual se tiene que

$$\begin{aligned}\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|)^p &\leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p \\ &= \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}. \end{aligned}$$

Acotaremos las dos últimas sumas usando la desigualdad de Hölder (lema 1.8). Notemos que $q := \frac{p}{p-1}$ es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Denotemos por $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ a los vectores cuyas coordenadas j-ésimas coordenadas son

$$a_j := |x_j|, \qquad b_j := (|x_i| + |y_i|)^{p-1}, \qquad c_j := |y_i|,$$

Es claro que $\|a\|_p = \|x\|_p$ y $\|c\|_p = \|y\|_p$. Notamos que se cumplen las hipótesis de la desigualdad Hölder, por lo que

$$\begin{aligned}\|ab\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\ &\leq \|a\|_p \|b\|_q \\ &= \|a\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^{(p-1)q} \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

Análogamente, $\|cb\|_1 \leq \|c\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$. Como por definición tenemos $(p-1)q = p$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p \leq (\|a\|_p + \|c\|_p)\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/q}.$$

Dividiendo a ambos lados por el último término a la derecha, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \|a\|_p + \|c\|_p .$$

Como $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, se tiene que el lado izquierdo es igual a $\|x+y\|_p$, por lo que se tiene el resultado enunciado. $\square$

Observación. Esto termina verificar que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ es norma para todo $p \geq 1$, y por tanto que cada $(\mathbb{R}^n, d_p)$ es espacio métrico para cada $p \geq 1$. El caso más intuitivo es el de $(\mathbb{R}^2, d_2)$, la métrica usual en $\mathbb{R}^2$.

1.3. Espacios euclideanos: dimensión infinita

Ahora, estamos en condiciones de definir más espacios normados (y de probar que efectivamente lo son). En primera estancia, la norma p que acabamos de revisar se generaliza fácilmente para espacios de sucesiones. Recordemos que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ denota al $\mathbb{R}$-espacio vectorial de todas las sucesiones reales.

Definición 1.10. Veremos que hay tres tipos de métricas de interés en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos la *norma p de $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$* como

$$\|a\|_p := \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p},$$

de estar bien definida. En el caso $p = \infty$, definimos $\|a\|_\infty := \sup_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Por otro lado, si $0 < p < 1$, no hay una norma que induzca una métrica (probar este hecho es no-trivial), pero sí hay métrica por sí sola, definida por

$$d_p((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^p.$$

Formalmente, no hemos probado que estas funciones son normas, pero de momento será omitido.

Ejemplo 1.11. Dado $p > 0$, denotaremos al conjunto de las *sucesiones p-sumables* como

$$\ell^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) := \left\{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|a\|_p < \infty\right\},$$

que es un espacio métrico con cualquiera de las métricas definidas anteriormente.

Ejemplo 1.12. Los subespacios de $\ell^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ heredan sus métricas. Ejemplos destacables de estos espacios son el espacio $c(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ de las sucesiones convergentes, $c_0(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ de las sucesiones convergentes a 0, y $c_{00}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ de las sucesiones eventualmente nulas. Queda pendiente probar que son $\mathbb{R}$-subespacios vectoriales de $\ell^p(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

Existen muchos más ejemplos de espacios métricos, de espacios normados, y de espacios de producto interno. En secciones posteriores, estudiaremos espacios espacios de funciones continuas, y espacios de funciones integrables. Aparecerán en su debido momento.

1.4. Isometrías

Las funciones entre espacios métricos que preservan distancia reciben atención especial:

Definición 1.13. Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos. Diremos que una función $f\colon M \to N$ es una *inmersión isométrica* o que *preserva distancias* si la distancia entre dos puntos es la misma que entre sus imágenes bajo f, es decir, si $d(x, y) = \rho(f(x), f(y))$ para todos $x, y \in M$.

Se puede demostrar fácilmente que las inmersiones isométricas son siempre inyectivas:

Proposición 1.14. *Toda inmersión isométrica entre espacios métricos $f\colon M \to N$ es inyectiva.*

Demostración. Esto es una cuenta directa: dados $x, y \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies d(f(x), f(y)) = d(x, y) = 0 \\ &\implies x = y. \end{aligned}$$ □

Por tanto, una inmersión isométrica sobreyectiva es automáticamente biyectiva, y por ende invertible. Estas reciben otro nombre:

Definición 1.15. Una *isometría* entre dos espacios métricos M, N es una inmersión isométrica invertible $f\colon M \to N$.

De estar bien definidas, la composición de inmersiones, y la inversa de una inmersión, son inmersiones:

Proposición 1.16. *Sean (M, d), (N, ρ), (O, σ) espacios métricos. Dadas isometrías $f\colon M \to N$ y $g\colon N \to O$, entonces $g \circ f$ y f^{-1} también son isometrías.*

Demostración. Veamos la composición. En primer lugar, $g \circ f$ es inmersión isométrica pues dados $x, y \in M$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \rho(f(x), f(y)) \\ &= \sigma(g(f(x)), g(f(y))) \\ &= \sigma([g \circ f](x),\, [g \circ f](y)). \end{aligned}$$

La inversa de $g \circ f$ es claramente $f^{-1} \circ g^{-1}$. Esto verifica que la composición de isometrías es isometría.

Probar que f^{-1} es una isometría $N \to M$ es directo. En efecto, si $x, y \in N$, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \rho(\mathrm{id}_N(x), \mathrm{id}_N(y)) \\ &= \rho(f(f^{-1}(x)),\, f(f^{1}(y))) \\ &= d(f^{-1}(x),\, f^{-1}(y)), \end{aligned}$$

lo que verifica que f^{-1} es inmersión isométrica. Su inversa es f, por hipótesis. $\square$

Hay veces que vamos a querer estudiar un conjunto X de interés, pero puede no tener una métrica equipada. El nombre de *inmersión* viene de que si tenemos una función inyectiva a un espacio métrico $f\colon X \to M$, vamos a poder inmergir X en M de forma canónica:

Proposición 1.17. *Sea X un conjunto, y (M, d) un espacio métrico. Dada una función inyectiva $f\colon X \to M$, se tiene que la función*

$$d'(x,y) := d(f(x), f(y))$$

define una métrica en X, que hace de f una inmersión isométrica.

Demostración. Es claro que d' satisface la no-negatividad, simetría, y desigualdad de triangular, pues es heredada de d. La única parte no trivial es la coincidencia. Dados $x, y \in X$, se tiene que

$$\begin{aligned} d'(x,y) &\iff d(f(x), f(y)) = 0 \\ &\iff f(x) = f(y) \\ &\iff x = y, \end{aligned}$$

donde la última equivalencia usa la inyectividad de f. El que f sea inmersión isométrica es por construcción. $\square$

Ejemplo 1.18. Podemos inmergir isométricamente $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ (con cualquier norma) del siguiente modo: sean $a, u \in \mathbb{R}^n$, con u unitario (ie., $\|u\| = 1$), y consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto a + tu. \end{aligned}$$

Esta es una inmersión isométrica, pues

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) &= \|f(s) - f(t)\| \\ &= \|a + su - a - tu\| \\ &= \|(s-t)u\| \\ &= \|s-t\| \\ &= d(s,t). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.19. Intuitivamente, $\mathbb{R}^n$ debe ser isométrico consigo mismo. Esto puede probarse de distintas formas. Por ejemplo, dado $a \in \mathbb{R}^n$, la función de *traslación por a* definida por $g_a(x) := x + a$ es una isometría: dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(g_a(x), g_a(y)) &= \|x + a - y - a\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x,y), \end{aligned}$$

y su inversa es claramente la función $y \mapsto y - a$. Por otro lado, la función de *reflexión* dada por $h(x) := -x$ es otra isometría: dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\begin{aligned} d(h(x), h(y)) &= d(-x, -y) \\ &= \|-x + y\| \\ &= d(y,x) \\ &= d(x,y) \end{aligned}$$

2. Topología de espacios métricos I

Históricamente, la topología es abstracción de una abstracción. En primera instancia, fueron desarrolladas ideas en $\mathbb{R}$, que son más bien tangibles (eg., la definición ε-δ de continuidad), y ya deberíamos tener cierta familiaridad con ellos. Posteriormente, estos conceptos fueron adaptados a espacios métricos, pues solo era necesaria una noción de distancia para trabajar. El siguiente nivel de abstracción fue la topología general, que busca formular las mismas nociones que veremos ahora en espacios métricos, pero sin apoyarse de una métrica.

La topología, grosso modo, es el estudio de las "deformaciones" de espacios. Particularmente, un tema de interés son los *invariantes topológicos*, que corresponden a toda la información de nuestro espacio que no cambia a medida que lo "deformamos", lo que es particularmente útil pues permite estudiar un objeto complicado "deformándolo" a uno más sencillo.

El uso de comillas es para aclarar que estamos siendo vagos. La idea formal es, dado un conjunto X, una *topología en* X es una colección de subconjuntos τ de X que contenga a $\emptyset, X$, que sea cerrada bajo uniones arbitrarias, y bajo intersecciones finitas. Cada elemento de τ se llama un conjunto *abierto*, y el par (X, τ) se llama un *espacio topológico*.

En esta sección vamos a abstraer los conceptos fundamentales de $\mathbb{R}$ a espacios métricos. Debemos partir definiendo una topología, es decir, declarar qué es un abierto en un espacio métrico.

2.1. Conjuntos abiertos

Para definir conjunto abierto vamos a apoyarnos en un tipo de conjunto más sencillo: las bolas. Estas nos van a permitir identificar cuándo un punto está "dentro" topológicamente de un conjunto. Un abierto será un conjunto que solo tiene "interior".

Definición 2.1. Sea M un espacio métrico y $a \in M$. Dado $r > 0$, definimos la *bola abierta* de centro a y radio r como el conjunto de puntos de M que están a una distancia menor que r de a, léase, $B(a, r) := \{x \in M : d(x, a) < r\}$.

Ejemplo 2.2.

1. Sea M un espacio métrico con la métrica cero-uno. Por definición, en este espacio cualquier par de puntos están a distancia menor o igual a 1, por lo que para todo $a \in M$ se tiene que

$$B(a, r) = \begin{cases} M & \text{si } r > 1, \\ \{a\} & \text{si } r \leq 1. \end{cases}$$

2. En $\mathbb{R}$ con la métrica usual se tiene que

$$\begin{aligned} B(a,r) &= \{x \in \mathbb{R} \colon |x-a| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon -r < x-a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon a-r < x < a+r\} \\ &= (a-r, a+r). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3. Sea M un espacio métrico, y $a \in M$. Siempre podemos escribir $\{a\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(a, \frac{1}{n})$: es claro que a pertenece a cada una de estas bolas, y por tanto a su intersección. Probemos que no hay más puntos. Sea $x \neq a$. Por tanto, $d(x,a) > 0$, y por Propiedad Arquimediana, existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $d(x,a) > \frac{1}{n}$, es decir, $x \notin B(a, \frac{1}{n})$. Esto prueba que para cada $x \neq a$, existe una bola centrada en a que no lo contiene, por lo que no formará parte de la intersección de todas las bolas. Por tanto, a es efectivamente el único punto de la intersección.

Esto nos acerca a la definición de abierto. Falta un ingrediente:

Definición 2.4. Sea M un espacio métrico, y $X \subseteq M$. Decimos que un $a \in X$ es un *punto interior* de X si es centro de una bola abierta en X, es decir, si existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq X$. El conjunto de todos los puntos interiores a X en M se llama *interior* de X en M, y se denota como $\operatorname{int} X$.

Ejemplo 2.5.

1. El interior de $[0,1)$ en $\mathbb{R}$ es $\operatorname{int}[0,1) = (0,1)$: notamos que dado $0 < a < 1$ podemos elegir $r := \min\{a, 1-a\}$, y se tendrá que $B(a,r) \subseteq [0,1)$, por lo que $a \in \operatorname{int}[0,1)$, y por tanto $(0,1) \subseteq \operatorname{int}[0,1)$. Probemos que no hay más puntos interiores.

   Partimos notando que 0 no es punto interior de $[0,1)$, pues cualquier bola abierta centrada en 0 contiene números negativos y positivos. Análogamente, 1 tampoco es interior pues toda bola abierta centrada en 1 contiene números mayores y menores que 1. Finalmente es claro que si $x < 0$ o $x > 1$ existen bolas abiertas centradas en x que no intersectan a $[0,1)$. Por tanto no hay más puntos interiores a $[0,1)$ fuera de $(0,1)$. En particular $\operatorname{int}[0,1) = (0,1)$.

2. Recordemos que cualquier intervalo abierto centrado en un número racional contiene infinitos números irracionales. Por tanto, el interior de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es vacío.

Con esto, la definición de un conjunto abierto en un espacio métrico es la siguiente:

Definición 2.6. Sea M un espacio métrico y $A \subseteq M$. Decimos que A es un conjunto *abierto* en M si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A = \operatorname{int} A$.

Ejemplo 2.7.

1. Sea M un espacio métrico. Toda bola abierta en M es un conjunto abierto: sea $B(a,r)$ una bola abierta centrada en $a \in M$ de radio $r > 0$. Debemos probar que para cada $x \in B(a,r)$, podemos encontrar un radio $s > 0$ de modo que $B(x,s) \subseteq B(a,r)$.

   Consideremos $s := r - d(a,x) > 0$. Por definición, si $y \in B(x,s)$, entonces $d(x,y) < s$. Por tanto, por desigualdad triangular, notamos que $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + s = r$, es decir, $y \in B(a,r)$, por lo que $B(x,s) \subseteq B(a,r)$. Esto es que $B(a,r)$ es un conjunto abierto en M.

2. Sea M un espacio métrico, y $X \subseteq M$. Se tiene que $\operatorname{int} X$ es un abierto en M, es decir, que para cada punto interior es centro de una bola abierta completamente contenida en $\operatorname{int} X$. Notar que esto es probar que $\operatorname{int}(\operatorname{int} X) = \operatorname{int} X$.

   En efecto, sea $a \in \operatorname{int} X$ arbitrario, y consideremos $r > 0$ de modo que $B(a,r) \subseteq X$, el cual existe por la definición de $\operatorname{int} X$. Para cada $x \in B(a,r)$ arbitrario, podemos encontrar $s > 0$ tal que $B(x,s) \subseteq B(a,r)$. Por lo que $B(x,s) \subseteq X$, es decir, $x \in \operatorname{int} X$. Como x es un punto de $B(a,r)$ arbitrario, se sigue que $B(a,r) \subseteq \operatorname{int} X$. Esto es que $\operatorname{int} X$ es abierto en M.

3. Sea M un espacio métrico. El mismo M es abierto en M, pues todas las bolas centradas en $a \in M$ están contenidas en M. También $\emptyset \subseteq M$ es abierto en M por vacuidad.

4. Sea M un espacio métrico, y $F := \{a_1 \ldots, a_n\} \subseteq M$ un subconjunto finito de M. Se tiene que $M - F$ es abierto en M: en efecto, para cada $x \in M - F$ podemos considerar $r := \min\{d(x,a_i) \colon 1 \leq i \leq n\}$. Se sigue que $B(x,r)$ es una bola abierta que por construcción no contiene a ninguno de los a_i, es decir, que $B(x,r) \subseteq M - F$. Esto es precisamente que $M - F$ es abierto en M.

5. Todo intervalo real abierto acotado (a,b) es abierto en $\mathbb{R}$ pues es la bola abierta de centro $\frac{b+a}{2}$ y radio $\frac{b-a}{2}$. Análogamente, todo intervalo real abierto generalizado $(-\infty, a)$ (resp. (a, ∞)) es abierto en $\mathbb{R}$ pues para cada $x \in (-\infty, a)$ (resp. $x \in (a, \infty)$), la bola de centro x y radio $r := |a - x|$ es una bola abierta contenida en el conjunto respectivo.

Como mencionamos antes, los abiertos métricos son una topología:

Proposición 2.8. *Sea M un espacio métrico. La colección $\tau := \{A \subseteq M \text{ abierto}\}$ define una topología en M, es decir, se tiene que:*

1. $M, \emptyset \in \tau$.
2. *Si $A_1, \ldots, A_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$.*
3. *Sea L es un conjunto de índices. Entonces si $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \in \tau$.*

Demostración. Sean M, τ como en el enunciado. Probemos cada parte.

1. Esto fue probado en el ejemplo 2.7(3).

2. Sean $A_1, \dots, A_n \in \tau$, y sea $a \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, es decir $a \in A_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Como cada uno de estos conjuntos es abierto, para cada $1 \leq i \leq n$ existe $r_i > 0$ tal que $B(a, r_i) \subseteq A_i$. Consideremos $r := \min\{r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Por tanto, se tiene que $B(a, r) \subseteq B(a, r_i) \subseteq A_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Esto es precisamente que $B(a, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$, es decir, $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es efectivamente abierto en M.

3. Sean L y cada A_λ como en el enunciado. Sea $a \in \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Se sigue que existe algún $\lambda \in L$ tal que A_λ es abierto en M, es decir, que existe un $r_\lambda > 0$ de modo que $B(a, r_\lambda) \subseteq A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Por tanto, el conjunto en cuestión es efectivamente abierto en M. □

Observación. Una intersección arbitraria de conjuntos abiertos no es necesariamente un conjunto abierto: un singleton $\{a\} \subseteq M$ puede ser abierto en M solo en el caso que sea *aislado*, en el sentido que *sea* una bola métrica. Este es el caso, por ejemplo, de métrica cero-uno, en la que todo punto es aislado. Pero en lugares menos patológicos, como $\mathbb{R}$, ningún singleton es aislado.

Podemos caracterizar a los abiertos métricos como aquellos conjuntos que son uniones de bolas abiertas. En lenguaje topológico, esto dice que las bolas abiertas son una *base* de la topología:

Proposición 2.9. *Sea M un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq M$ es abierto en M si y solo si A es una unión de bolas abiertas.*

Demostración. Sea M un espacio métrico. Probemos ambas implicancias.

$\Longleftarrow$: Si $A \subseteq M$ es una unión de bolas abiertas en M, entonces A es unión de abiertos en M, y por tanto un conjunto abierto de M.

$\Longrightarrow$: Sea $A \subseteq M$ abierto en M. Por tanto, todos sus puntos son interiores, es decir, para cada $x \in A$, podemos encontrar $r_x > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$. Entonces, tenemos las inclusiones $\{x\} \subseteq B(x, r_x) \subseteq A$. Tomando unión sobre cada $x \in A$, se tiene que

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subseteq A,$$

y por tanto $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$, lo que prueba lo enunciado. □

2.2. Funciones continuas

Las funciones continuas de Cálculo son aquellas que envían vecindades de un punto, a vecindades de la imagen del punto. La definición para espacios métricos es la misma, intercambiando el valor absoluto por la distancia:

Definición 2.10. Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos. Decimos que una función $f\colon M\to N$ es *continua* en el punto $a\in M$ si dado $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que cada vez que $d(x,a)<\delta$, se tenga que $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$. Decimos que f *continua* si lo es en todos los puntos de M.

Observación. En lenguaje de bolas, $f\colon M\to N$ es continua en $a\in M$ si y solo si dada cualquier bola $B_N:=B(f(a),\varepsilon)$, existe una bola $B_M:=(a,\delta)$ de modo que $f(B_M)\subseteq B_N$.

Lema 2.11. *La composición de funciones continuas es continua.*

Demostración. Sean (M,d), (N,ρ), (O,σ) espacios métricos, y sean $f\colon M\to N$ y $g\colon N\to P$ continuas. Dados $\varepsilon,\xi>0$, la continuidad de g indica que hay un $\delta_2>0$ tal que si $\rho(z,w)<\delta_2$, entonces $\sigma(g(z),g(w))<\varepsilon$. Por otro lado, la continuidad de f nos permite encontrar $\delta_1>0$ de modo que si $d(x,a)<\delta_1$, entonces $\rho(f(x),f(a))<\xi$. En particular, si $\xi:=\delta_2$, va a existir $\delta>0$ tal que si $d(x,a)<\delta$, entonces $\rho(f(x),f(a))<\delta_2$, y en este caso se tendrá que $\sigma((g\circ f)(x),(g\circ f)(a))<\varepsilon$. $\square$

Podemos dar una caracterización topológica (ie., que no dependa de la métrica) de continuidad: una función será métricamente continua (nuestra definición) si y solo si es topológicamente continua (ie., tal que el conjunto preimagen de un conjunto abierto, sea abierto):

Proposición 2.12. *Sean M,N espacios métricos. Una función $f\colon M\to N$ es continua si y solo si la preimagen $f^{-1}(A)\subseteq M$ de cualquier abierto $A\subseteq N$ de N, es un abierto de M.*

Demostración. Sean M,N espacios métricos. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Supongamos que $f\colon M\to N$ es una función continua. Sea $A\subseteq N$ un abierto de N. Por definición, que $a\in f^{-1}(a)$ nos dice que $f(a)\in A$. Como A es un conjunto abierto, existe un radio $\varepsilon>0$ tal que que $B(f(a),\varepsilon)\subseteq A$.

Como f es continua, dado este radio $\varepsilon>0$, podemos encontrar $\delta>0$ de modo que se tenga $f(B(a,\delta))\subseteq B(f(a),\varepsilon)$. Por transitividad de la inclusión, tenemos que $f(B(a,\delta))\subseteq A$, y por tanto que $B(a,\delta)\subseteq f^{-1}(A)$.

Esto es precisamente que a es un punto interior de $f^{-1}(A)$. Como a era arbitrario, se tiene que $f^{-1}(A)$ es efectivamente abierto en M.

$\Longleftarrow$: Supongamos que dado cualquier abierto $A\subseteq N$ de N, su preimagen $f^{-1}(A)\subseteq M$ es un abierto de M. Probemos que f es continua en cada $a\in M$. Notamos que dado $a\in M$, una bola $B(f(a),\varepsilon)$ de cualquier radio $\varepsilon>0$ es un abierto de N. Por tanto, nuestra hipótesis nos dice que $f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$ es un abierto de M. Por definición, a es un punto interior de $f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$, por lo que existe $\delta>0$ de modo que $B(a,\delta)\subseteq f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$, y por tanto $f(B(a,\delta))\subseteq B(f(a),\varepsilon)$. Esto es precisamente que f es continua en a. $\square$

Observación. La imagen $f(A)$ de un abierto de M bajo una función continua $f\colon M \to N$ no es necesariamente un abierto de M: por ejemplo, la función $x \mapsto x^2$ es continua de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. El conjunto $A := (-2, 2)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, pero $f(A) = [0, 4)$, que no es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.13.

1. Sean $M_1, \dots, M_n$ espacios métricos, y sean $A_1, \dots, A_n$ de modo que cada A_i es un subconjunto abierto de M_i. Se tiene que el conjunto $\prod_{i=1}^n A_i$ es un abierto de $M := \prod_{i=1}^n M_i$. En efecto, notamos que cada proyección

$$\pi_i\colon \prod_{j=1}^n M_j \to M_i$$

   es continua. Como A_i es un abierto de M_i, se tiene que $\pi^{-1}(A_i)$ es un abierto de M. Como $\prod_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \pi_1^{-1}(A_i)$, se tiene lo enunciado, pues es una intersección finita de abiertos.

2. Sea M un espacio métrico y sean $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$. El conjunto

$$A := \{x \in M\colon f_i(x) > 0 \text{ para cada } i = 1, \dots, n\}$$

   es abierto en M. Para probar esto, usamos el ejemplo anterior: notamos que la función $f\colon M \to \mathbb{R}^n$; $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ es continua, y que el conjunto $\prod_{i=1}^n (0, \infty)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, pues es producto de abiertos. Se sigue que el conjunto $A = f^{-1}(\prod_{i=1}^n (0, \infty))$ es un abierto de M.

3. Sean M, N espacios métricos, y sean $f, g\colon M \to N$ funciones continuas. Se tiene que el conjunto

$$A := \{x \in M\colon f(x) \neq g(x)\}$$

   es abierto en M: sea $F(x) := d(f(x), g(x))$. Como esta función es continua $M \to \mathbb{R}$, se sigue que

$$\begin{aligned}\{x \in M\colon F(x) > 0\} &= \{x \in M\colon d(f(x), g(x)) \neq 0\}\\ &= \{x \in M\colon f(x) \neq g(x)\}\\ &= A.\end{aligned}$$

   Por el punto anterior, se concluye que A es abierto en M.

4. Podemos probar de otra forma que una bola abierta es un conjunto abierto. Sea M un espacio métrico, y $B(a, r)$ una bola abierta de M para algunos $a \in M$, $r > 0$. Consideremos la función $M \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto r - d(a, x)$. Esta es continua, y es claro que

$$\begin{aligned}\{x \in M\colon f(x) > 0\} &= \{x \in M\colon d(a, x) < r\}\\ &= B(a, r),\end{aligned}$$

   por lo que el punto (2) nos asegura que $B(a, r)$ es un abierto de M.

Funciones lipschitzianas

Un ejemplo importante de funciones continuas son las *de Lipschitz*, que son aquellas limitadas en cuánto pueden cambiar. Por ejemplo, estas se utilizan para probar el teorema del punto fijo de Banach; también, pedir que una función sea lipschitziana es la condición crucial para el teorema de Picard–Lindelöf de existencia y unicidad de soluciones del problema de valor inicial.

Definición 2.14. Sean M, N espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es *lipschitziana* si existe una constante $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para todos $x, y \in M$.

Ejemplo 2.15.

1. El ejemplo más sencillo de funciones lipschitzianas son las funciones constantes, porque la distancia entre imágenes bajo una función constante siempre es 0, por lo que cualquier c funciona.

2. Toda isometría $f\colon (M, d) \to (N, \rho)$ es lipschitziana de constante 1, pues

$$\rho(f(x),\ f(y)) \leq d(x, y).$$

La propiedad importante de estas funciones, es que son todas continuas, por lo que cada ejemplo de función lipschitziana es ejemplo de función continua:

Proposición 2.16. *Toda función lipschitziana $f\colon M \to N$ es continua.*

Demostración. Sea f lipschitziana de constante c. Debemos probar que f es continua. Sean $a \in M$ y $\varepsilon > 0$, y consideremos $\delta := \varepsilon/c$. Se sigue que $d(f(x), f(a)) \leq c \cdot d(x, a)$, pues f es lipschitziana. Por tanto, si $d(x, a) < \delta = \varepsilon/c$, se tiene que $d(f(x), f(a)) < c \cdot \varepsilon/c = \varepsilon$, es decir, f es efectivamente continua. $\square$

Las funciones lipschitzianas tienen estructura de espacio vectorial:

Proposición 2.17. *El conjunto* $\mathrm{Lip}(\mathbb{R})$ *de las funciones lipschitzianas* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial con la suma y escalamiento punto a punto.*

Demostración. Consideremos $f, g\colon M \to \mathbb{R}$ funciones lipschitzianas de constantes c, k y una constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Para probar que $(f + g)$ también es lipschitziana, notemos que

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\
&= |[f(x) - f(y)] + [g(x) - g(y)]| \\
&\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
&\leq cd(x, y) + kd(x, y) \\
&= (c + k)d(x, y),
\end{aligned}$$

donde la tercera línea se obtuvo por desigualdad triangular, y la cuarta porque estamos suponiendo f, g lipschitzianas. Para probar que λf es lipschitziana, notamos que

$$\begin{aligned}|(\lambda f)(x) - (\lambda f)(y)| &= |\lambda f(x) - \lambda f(y))| \\ &= |\lambda||f(x) - f(y)| \\ &\leq |\lambda|cd(x, y).\end{aligned}$$ ☐

Para exhibir ejemplos, conviene desarrollar un criterio que permita verificar si una función real es lipschitziana. Sirve ver si tiene primera derivada acotada:

Lema 2.18. *Si* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es diferenciable con derivada acotada por entonces es lipschitziana de constante* $c := \sup\{|f'(x)|\}$.

Demostración. Dado c como en el enunciado, existe algún intervalo cerrado $I := [a, b]$ en el que f' es acotada por c. El teorema del valor medio nos dice que dados $x, y \in I$ arbitrarios, existe un $x < z < y$ tal que $f(x)-f(y) = f'(z)(x-y)$. Por lo mencionado antes, se tiene que $|f'(z)| \leq c$, por lo que tomando valor absoluto de la expresión anterior, se tiene que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$. ☐

Ejemplo 2.19.

1. Por tanto, funciones como las polinomiales restringidas a intervalos, seno o coseno, son todas continuas.
2. Si bien esta condición es suficiente para determinar si una función es lipschitziana, no es necesaria. Por ejemplo, el valor absoluto usual $f(x) := |x|$ es lipschitziana de constante 1, pero no es diferenciable en 0.
3. Decimos que una función es una *contracción* si es lipschitziana de constante $0 < c < 1$. Estudiamos la utilidad de estas funciones en la sección 3.4. Si f es lipschitziana de constante $c = 1$, decimos que es una *contracción débil*. Las siguientes funciones son contracciones débiles, y por tanto continuas. Sean M, N espacios métricos.
    a) Cualquier función constante $f\colon M \to N$, pues $d(f(x), f(y)) = 0$ siempre.
    b) En cualquier espacio vectorial normado $(E, \|\cdot\|)$, la norma es una contracción débil, pues
    $$\begin{aligned}d(\|x\|, \|y\|) &= \|\|x\| - \|y\|\| \\ &= \|\|x - 0\| - \|y - 0\|\| \\ &\leq \|x - y\| \\ &= d(x, y).\end{aligned}$$
    c) En el ejemplo anterior probamos que toda isometría es una contracción débil.

Discontinuidad

La definición de discontinuidad es simplemente la negación lógica de la definición de continuidad:

Definición 2.20. Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es *discontinua* en $a \in M$ si no es continua en a, vale decir, si existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar un $x_\delta \in M$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ pero $\rho(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon$.

Ejemplo 2.21. Consideremos la función *característica* de $\mathbb{Q}$, dada por

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{Q}}\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función es discontinua en todo $a \in \mathbb{R}$: sea $\varepsilon := 1/2$ y $\delta > 0$. Si a es racional, consideramos x_δ irracional tal que $|x_\delta - a| < \delta$, y si a es irracional consideramos x_δ racional tal que $|x_\delta - a| < \delta$. En ambos casos se tiene que $|1_{\mathbb{Q}}(x_\delta) - 1_{\mathbb{Q}}(a)| = 1 \geq 1/2$, por lo que $1_{\mathbb{Q}}$ es en efecto discontinua en a.

Ejemplo 2.22. Consideremos la función

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función es discontinua en 0: sea $\varepsilon := 1/2$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $x_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$. Se sigue que

$$\begin{aligned} \sin(1/x_n) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \\ &= \pm 1. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $|x_n - 0| < 1/n$ (esto es directo), pero también que

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(0)| &= \left|\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) - 0\right| \\ &= 1 \\ &\geq 1/2 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, f es efectivamente discontinua.

Continuidad uniforme

La continuidad que revisamos es local, pero hay veces que esta condición no es suficiente para deducir resultados importantes. Por ejemplo, para demostrar que toda función $[a,b] \to \mathbb{R}$ continua es Riemann-integrable, Cauchy utilizó (sin darse cuenta) el hecho no trivial de que las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado son de hecho *uniformemente continuas*, en el sentido de que no solo mapean vecindades de un punto a vecindades de la imagen del punto, sino que mapean a puntos cercanos de modo que sus imágenes sean cercanas:

Definición 2.23. Sean (M,d) y (N,ρ) espacios métricos. Decimos que una función $f\colon M \to N$ es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x,y) < \delta$ entonces $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Observación.

1. La diferencia lógica con la continuidad es solo el orden de los cuantificadores. Esto se traduce a que el δ que vayamos a escoger, solo dependerá del valor de ε, y no de los puntos que elijamos.

2. Es claro que si f es uniformemente continua, entonces es continua. El recíproco no es cierto. Por ejemplo, al considerar la función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^2$ y dado $\delta > 0$ arbitrario, se tendrá que (asumiendo $x > 0$)
$$\left| f\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - f(x) \right| = x\delta + \frac{\delta^2}{4}. \tag{2.23.1}$$
Se tiene que $|x + \delta/2 - x| = |\delta/2| < \delta$, pero el lado derecho de la ecuación 2.23.1 no es acotado como función de x.

Lema 2.24. *De estar bien definida, la composición de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.*

Demostración. La demostración del lema 2.11 funciona mutatis mutandis. □

Ejemplo 2.25.

1. Toda función lipschitziana es uniformemente continua. La demostración del ejemplo 2.16 funciona mutatis mutandis.

2. La suma de funciones uniformemente continuas es uniformemente continua, lo que es directo de probar. Sin embargo, el producto de funciones uniformemente continuas no ha de serlo, como ejemplifica $x \mapsto x^2$ definida $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sin embargo, al restringir esta función a un intervalo acotado, se vuelve lipschitziana, y por tanto uniformemente continua.

2.3. Conjuntos cerrados

Será importante estudiar los complementos de los conjuntos abiertos de un espacio métrico:

Definición 2.26. Sea M un espacio métrico. Decimos que un $F \subseteq M$ es *cerrado* en M si su complemento $M - F$ es abierto en M.

Observación. Si bien "abierto"y "cerrado" son antónimos en español, en este contexto un conjunto abierto no es lo contrario de un conjunto cerrado: por ejemplo $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$, y en cualquier espacio métrico M, se tiene que $\emptyset$, M son abiertos y cerrados en al mismo tiempo.

Ejemplo 2.27.

1. Sea M un espacio métrico. Cualquier bola cerrada
$$B[a,r] := \{x \in M : d(x,a) \leq r\} \tag{2.27.1}$$
es cerrada, pues dado $y \in A := M - B[a,r]$, se tiene que $s := d(y,a) > r$. Así, podemos considerar $B(y, s-r)$, que será un abierto completamente contenido en A.

2. Sea M un espacio métrico. Cualquier singleton $\{x\} \subseteq M$ es cerrado en M, pues dado $a \in A := M - \{x\}$, podemos considerar $s < d(a,x)$, y la bola $B(x,s)$ estará completamente contenida en A.

Prestemos atención a la ecuación 2.27.1: la única diferencia con las bolas abiertas es que ahora admitimos puntos que estén en el "borde" de las bolas, y el resultado fue un conjunto cerrado. La definición para cualquier conjunto (no necesariamente bolas abiertas) es la siguiente:

Definición 2.28. Sea M un espacio métrico, y $X \subseteq M$. Decimos que $x \in M$ es un punto *frontera* de X si cualquier vecindad U_x de x contiene puntos tanto como de X como de su complemento $M - X$, es decir, si
$$U_x \cap X \neq \emptyset, \quad \text{y} \quad U_x \cap (M - X) \neq \emptyset.$$
El conjunto de todos los puntos frontera de X se llama la *frontera* de X, y se denota ∂X.

Observación. Los puntos frontera de un conjunto pertenecen al espacio métrico ambiente, pero no necesariamente a dicho conjunto.

Ejemplo 2.29. Sea M un espacio métrico. La *esfera* de centro $a \in M$ y radio $r > 0$, definida $S(a,r) := \{x \in M : d(a,x) = r\}$ es la frontera de las bolas $B(a,r)$ y $B[a,r]$.

El resultado esperado es que para conseguir un cerrado a partir de cualquier conjunto, basta añadirle su frontera:

Proposición 2.30. *Sea M un espacio métrico. Dado $X \subseteq M$, se tiene que el conjunto $\overline{X} := X \cup \partial X$ es cerrado.*

Demostración. Sea τ_M la topología generada por las bolas de M. Directamente,
$$M - \overline{X} = \{x \in M : x \notin X \wedge \exists U_x \in \tau_M [(U_x \cap X = \emptyset \vee U_x \cap (M - X) = \emptyset]\}.$$

En cualquier caso, la vecindad U_x es un abierto contenido en $M - \overline{X}$. $\square$

Así, hemos construido un conjunto cerrado a partir de X:

Definición 2.31. Sea M un espacio métrico. Dado $X \subseteq M$, el conjunto $\overline{X} := X \cup \partial X$ se llama la *cerradura* (o *clausura*) de X.

Esta definición de clausura es algo laboriosa de usar. Podemos dar una caracterización de la clausura de un conjunto como aquellos puntos que están arbitrariamente cerca de dicho conjunto:

Proposición 2.32. *Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Se tiene que $a \in \overline{X}$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar algún $x \in X$ de modo que $d(a,x) < \varepsilon$.*

Demostración. Veamos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Si $a \in X$, el resultado es claro. Por otro lado, si $a \in \partial X$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $A := B(a,\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Así, cualquier $x \in A$ satisface lo requerido.

$\Longleftarrow$: Sea $a \in M$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ podamos encontrar $x \in X$ tal que $d(a,x) < \varepsilon$. Claramente siempre se tiene que $x \in A := B(a,\varepsilon) \cap X$, por lo que $A \neq \emptyset$. De acá hay dos posibilidades: $B(a,\varepsilon)$ intersecta a $M - X$, o no. En el primer caso se tiene que $a \in X$, y en el segundo que $a \in \partial X$. Es decir, $a \in \overline{X}$. $\square$

Con esta caracterización podemos demostrar algunas propiedades útiles de la operación de tomar clausura de un conjunto:

Lema 2.33. *Sea M un espacio métrico. Se tiene que:*

1. $\overline{M} = M$ *y* $\overline{\emptyset} = \emptyset$.
2. *Un conjunto está contenido en su clausura, es decir, que $X \subseteq \overline{X}$ para todo $X \subseteq M$.*
3. *Tomar clausura es una operación monótona, es decir, si $X \subseteq Y$ entonces $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$ para todos $X, Y \subseteq M$.*
4. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ *para todo* $X \subseteq M$.

Demostración. Probemos cada punto.

1. Todo punto de M está a distancia 0 de M, por lo que $\overline{M} = M$. Que $\overline{\emptyset} = \emptyset$ es cierto por vacuidad.
2. Esto es equivalente a que todo punto de X es adherente a X, lo cual fue probado en el ejemplo anterior.

3. Sea $X \subseteq Y$, y $x \in \overline{X}$. Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$. Como $X \subseteq Y$, se tiene que $B(x, \varepsilon) \cap Y \neq \emptyset$, es decir, que $x \in \overline{Y}$. Por lo tanto, efectivamente $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$.

4. Probemos la doble contención. Del punto (2), tomando clausura a ambos lados de la igualdad, se deduce que $\overline{X} \subseteq \overline{\overline{X}}$.

   Por otro lado, sea $a \in \overline{\overline{X}}$. Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in \overline{X}$ de modo que $d(a, x) < \varepsilon$. Por otro lado, existe $y \in X$ de modo $d(x, y) < \varepsilon$. Por desigualdad triangular, se sigue que

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < 2\varepsilon.$$

   Como ε era arbitrario, se sigue que a está arbitrariamente cerca de X, es decir, que $a \in \overline{X}$. Habiendo probado la doble contención, concluimos que efectivamente $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$. □

Podemos dar una caracterización de conjunto cerrado a través de la clausura:

Lema 2.34. *Sea M un espacio métrico. Un $F \subseteq M$ es cerrado en M si y solo si es su misma clausura, es decir, que $\overline{F} = F$.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado. Que F sea su misma clausura nos dice que contiene a todos sus puntos adherentes, por lo que todo punto fuera de F no será adherente a F. Por tanto, la última observación nos indica que todo punto en $M - F$ pertenece a $\operatorname{int}(M - F)$, es decir, que $M - F \subseteq \operatorname{int}(M - F)$.

Esto, más el hecho que $\operatorname{int}(M - F) \subseteq M - F$, nos permite concluir que $M - F = \operatorname{int}(M - F)$, esto es, que $M - F$ es abierto, y por tanto que F es cerrado. □

Los siguientes lemas verifican que estudiar topología desde el punto de vista de los abiertos es equivalente a estudiarla desde los cerrados:

Lema 2.35. *Sea M un espacio métrico. La τ colección de todos los conjuntos cerrados de M es una topología en M.*

1. *$M, \emptyset \in \tau$.*
2. *Si $F_1, \ldots, F_n \in \tau$, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \tau$.*
3. *Sea L es un conjunto de índices. Entonces si $F_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in L$, entonces $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \in \tau$.*

Demostración. Basta tomar complementos adecuadamente en la proposición 2.8 y usar las leyes de De Morgan. □

Observación. Una unión arbitraria de cerrados no es necesariamente un conjunto cerrado: sea M un espacio métrico y $X \subset M$ un abierto de M. Se tiene que $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, pero cada $\{x\}$ es cerrado en M.

Lema 2.36. *Sean M, N espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es continua si y solo si la preimagen $f^{-1}(F) \subseteq M$ de cualquier cerrado $F \subseteq N$ de N, es un cerrado de M.*

Demostración. Basta tomar complementos adecuadamente en la proposición 2.12, usando las leyes de De Morgan. □

Ejemplo 2.37. Esta similitud se extiende a los ejemplos que revisamos para conjuntos abiertos. Las demostraciones son análogas, tomando complementos.

1. Sean $M_1, \ldots, M_n$ espacios métricos, y sean $F_1, \ldots, F_n$ de modo que cada F_i es un subconjunto cerrado de M_i. Se tiene que el conjunto $\prod_{i=1}^n F_i$ es un cerrado de $\prod_{i=1}^n M_i$.

2. Sea M un espacio métrico, sea L un conjunto de índices, y sean $\{f_\lambda\}_{\lambda \in L} \subseteq \mathcal{C}(M, \mathbb{R})$. El conjunto $A := \{x \in M\colon f_\lambda(x) \geq 0 \text{ para todo } \lambda \in L\}$ es cerrado en M.

3. El conjunto $\mathcal{C}_0(M, N)$ de las funciones continuas y acotadas es cerrado en $\mathcal{C}(M, N)$

Ejemplo 2.38. Sea M un espacio métrico, $a \in M$ y $r > 0$. La esfera $S(a, r)$ es cerrada en M: consideremos la función $d_a\colon M \to \mathbb{R}$ dada por $x \mapsto d(a, x)$, y notemos que $S(a, r) = f^{-1}(\{r\})$. Como $\{r\}$ es cerrado en M, se tiene que $S(a, r)$ es preimagen de cerrado y por tanto cerrado.

2.4. Sucesiones y límites

Estudiar sucesiones en espacios métricos es la generalización natural de estudiarlas en $\mathbb{R}$. Como es de esperar, muchas de las definiciones y propiedades se traducen sin problemas a espacios métricos.

Definición 2.39. Una *sucesión* en un conjunto $M \neq \emptyset$ es una función $x\colon \mathbb{N} \to M$. El n-ésimo término de esta sucesión se denota como x_n. Para representar una sucesión se utiliza la notación $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Una *subsucesión* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una restricción de x a un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, vale decir, si $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$, la subsucesión correspondiente es $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M es *acotada* cuando el conjunto de sus términos es acotada en M, es decir, que existe una bola $B(x, c)$ tal que $x_m \in B(x, c)$ para todo x_m.

Ejemplo 2.40.

1. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $x_n := 2^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Una subuscesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, donde resulta que $x_{2n} = 4^n$.

2. Las sucesiones que toman una cantidad finita de valores (como las constantes) son acotadas: consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (M, d) que toma

finitos valores, y sea $r := \max_{m,n\in\mathbb{N}}\{d(x_n, x_m)\}$. Es claro que $d(x_n, x_m) \leq r$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

La definición ϵ-δ de límite es la misma de cálculo:

Definición 2.41. Sea M un espacio métrico, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M. Decimos que el *límite* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es igual a a si dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, se tenga que $d(x_n, a) < \varepsilon$. En tal caso, denotamos $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n := a$.

Observación.

1. Si el límite de una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe y es igual a a también decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende* a a, o que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a a. También se escribe $x_n \to a$. Si el límite en cuestión no existe, decimos que la sucesión *diverge*.

2. En lenguaje de bolas, la definición 2.41 es equivalente a que para todo radio $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(a, \varepsilon)$ para todo $n > N$.

3. Que una sucesión sea divergente es, por definición, que para todo $a \in M$, existe algún $\varepsilon > 0$, tal que sin importar cuál sea $N \in \mathbb{N}$, se tiene que existe algún $n > N$ tal que $d(x_n, a) \geq \varepsilon$.

   En lenguaje de bolas, es que existe algún radio $\varepsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $n > N$ de modo que $x_n \notin B(a, \varepsilon)$.

Ejemplo 2.42.

1. Sea M un espacio métrico, y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión constante en M, es decir, tal que $x_n = a \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión converge a a: en efecto, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar cualquier $N \in \mathbb{N}$, pues como $x_n = a$ siempre, en particular cuando $n > N$ se tendrá que $d(x_n, a) = d(a, a) = 0 < \varepsilon$.

2. En todo espacio métrico M con al menos dos elementos existen sucesiones divergentes. Sean $a, b \in M$ y consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_n := \begin{cases} a & \text{si } n \text{ par,} \\ b & \text{si } n \text{ impar,} \end{cases}$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $x_n \to L \in M$. Consideremos $\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2}$. Es claro que ninguna bola de radio ε contiene a a y b al mismo tiempo, por lo que dado cualquier $N \in \mathbb{N}$ va a existir un $n > N$ de modo que $x_n \notin B(L, \varepsilon)$.

3. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x_n := \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ converge a 0: en efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N > \frac{1}{\varepsilon}$. De acá, se sigue que

$$n > N \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{N} \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Lema 2.43. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico M es convergente, entonces es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a \in M$. Para $\varepsilon = 1$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $x_n \in B(a, 1)$. Por lo tanto, los términos de la sucesión están contenidos en el conjunto $\{x_1, \dots, x_N\} \cup B(a, 1)$. Como ambos conjuntos son acotados, se sigue que su unión también es acotada. □

Observación. El contrarrecíproco de 2.43 nos dice que si una sucesión no es acotada, entonces es divergente. Por ejemplo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $x_n := n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ no es acotada, y por tanto es divergente.

Lema 2.44. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico M es convergente, entonces su límite es único.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n \to a \in M$ y que $x_n \to b \in M$. Esto es, por definición, que dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1$ entonces $d(x_n, a) < \varepsilon$, y si $n > N_2$ entonces $d(x_n, b) < \varepsilon$. Consideremos $N > \max\{N_1, N_2\}$. Por tanto, si $n > N$, se sigue, por desigualdad triangular, que $d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < 2\varepsilon$. Como ε era arbitrario, se tiene que $d(a, b) = 0$, y por tanto $a = b$. □

Lema 2.45. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico M es convergente, entonces todas sus subsucesiones convergen al límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, y supongamos que $x_n \to a \in M$. Por definición, esto es que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $d(x_n, a) < \varepsilon$. Por otro lado, también existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $n_K > N$, pues $n_1 < n_2 < \dots$ Por tanto, se sigue que si $k > K$, entonces $n_k > N$, y por tanto $d(x_{n_k}, a) < \varepsilon$. Esto es, $x_{n_k} \to a$. □

Observación. El contrarrecíproco de 2.45 nos dice que si una sucesión tiene al menos un par de subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces esta diverge. Por ejemplo, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ dada por $x_n := (-1)^n$ tiene las subsucesiones $(x_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ (que es constantemente 1) y $(x_{(2j-1)})_{j\in\mathbb{N}}$ (que es constantemente -1). Estas convergen a 1 y a -1 respectivamente, y como $1 \neq -1$, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Podemos dar una otra caracterización—muy útil—de función continua: una función será métricamente continua (y por tanto topológicamente continua) si y solo si es *secuencialmente continua*:

Proposición 2.46. *Sean M, N espacios métricos. Una función $f\colon M \to N$ es continua en $a \in M$ si y solo si preserva límites secuenciales, es decir, que si $x_n \to a$, entonces $f(x_n) \to f(a)$.*

Demostración. Probemos ambas implicancias:

$\Longrightarrow$: Si f es continua en a, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ menor a δ. Por tanto, para todo $n > N$ se tendrá que $d(x_n, a) < N < \delta$, y por tanto $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$, es decir, efectivamente $f(x_n) \to f(a)$.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $f(x_n) \to f(a)$ para cualquier sucesión que converja a a. Buscando una contradicción, supongamos que f no es continua en a. Por tanto, existe al menos un $\varepsilon > 0$ de modo que para cualquier distancia $\delta > 0$, en particular para cada $\delta_n := \frac{1}{n}$, existe $x_n \in M$ tal que $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$, pero $d(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$. Es decir, hemos encontrado una secuencia que converge a a, pero la sucesión de imágenes no converge a $f(a)$, lo que contradice nuestra hipótesis. $\square$

También, hay una caracterización de clausura en términos de sucesiones:

Proposición 2.47. *Sean M un espacio métrico, $a \in M$ y $X \subseteq M$. Se tiene que $a \in \overline{X}$ si y solo si a es el límite de alguna sucesión en X.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado.

$\Longrightarrow$: Si $a \in \overline{X}$, entonces para cualquier distancia $r > 0$, se tiene que $B(a, r)$ tiene puntos de X. Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos algún $x_n \in B(a, \frac{1}{n})$. La sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es formada únicamente por elementos de X, y por construcción converge a a.

$\Longleftarrow$: Si $x_n \to a$ es una sucesión en X, por convergencia se tiene que toda bola abierta centrada en a contiene puntos de la sucesión, es decir, que $a \in \overline{X}$.

$\square$

Ejemplo 2.48.

1. Notemos que $\partial X = \overline{X} \cap \overline{M - X}$, por lo que los puntos en la frontera de X son precisamente los puntos que son límites de sucesiones en X y $M - X$ al mismo tiempo.

2. Un subconjunto $X \subseteq M$ es *denso* en M si y solo si $\overline{X} = M$, es decir, si M es el conjunto de todos los límites de sucesiones en X.

3. Un conjunto F es cerrado en M si y solo si $\overline{F} = F$, es decir, que el mismo F es el conjunto de todos los límites de sucesiones en F.

3. Espacios métricos completos

Vamos a estudiar otra abstracción de un fenómeno que ocurre en $\mathbb{R}$. Supongamos que estamos en un mundo donde nuestro sistema numérico es $\mathbb{Q}$. Una construcción estándar es la raíz cuadrada de un número, pero hay veces que la situación se complica. Por ejemplo, se puede probar que la raíz cuadrada de 2, asumiendo que existe, no es un número racional. Por otro lado, esta aparece como solución de la ecuación $x^2 - 2$, y como tal se puede aproximar (eg., usando Newton–Raphson), como una sucesión de números racionales, conocida como su *expansión decimal*. Por lo anterior, esta sucesión no converge en $\mathbb{Q}$, pero la distancia entre sus término es cada vez más pequeña, de hecho, arbitrariamente pequeña. Estas sucesiones se llaman *Cauchy*, y nuestro problema se parcha añadiendo formalmente los límites de las sucesiones Cauchy, lo que resulta en $\mathbb{R}$, la *compleción de* $\mathbb{Q}$. Vamos a ver esta demostración formalmente más adelante.

Ahora, vamos a estudiar la teoría abstracta de las sucesiones Cauchy y la completitud, que es útil no solo para resolver ecuaciones, sino que viene de regalo con un teorema de Baire, que posee varias aplicaciones a análisis funcional.

3.1. Sucesiones Cauchy

Definición 3.1. Sea M un espacio métrico. Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M es *Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ para todos $m, n > N$.

Observación.

1. Esta definición dice que la distancia entre los términos de una sucesión Cauchy se va haciendo cada vez más pequeña. Esto contrasta con la definición de sucesión convergente, en la que es la distancia entre términos de la sucesión y un punto la que se va haciendo cada vez más pequeña.

2. Toda subsucesión de una sucesión Cauchy, también es Cauchy: basta notar que dado $\varepsilon > 0$, los términos en posiciones mayores a algún $N \in \mathbb{N}$ siguen estando a distancia menor que ε, independientemente si forman parte o no de alguna subsucesión.

3. Que una sucesión sea Cauchy es una propiedad intrínseca de la sucesión, en el sentido de que ser Cauchy depende de los términos de la sucesión y la distancia entre ellos, pero no del espacio métrico ambiente. Es decir, una sucesión es Cauchy en un espacio métrico M si y solo si lo es en cualquier subespacio métrico de M.

Ejemplo 3.2.

1. Las sucesiones Cauchy de un espacio métrico finito son precisamente las que son eventualmente constantes: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión Cauchy en un espacio métrico finito $M := \{m_1, \ldots, m_r\}$, entonces para $\varepsilon :=$

$\min_{1\leq i,j,\leq r}\{d(x_i,x_j)\neq 0\}$, se tiene que existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $i,j>N$, entonces $d(x_i,x_j)<\varepsilon$, por lo que $d(x_i,x_j)=0$ y por tanto $x_i=x_j$.

2. De forma similar, en un espacio métrico con la métrica cero-uno las sucesiones Cauchy también son las eventualmente constantes: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, entonces para $0<\varepsilon<1$ se tiene que existe un $N\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_i,x_j)<\varepsilon$. Esto fuerza que $d(x_i,x_j)=0$, y por tanto $x_i=x_j$.

Una pregunta natural es cómo se relacionan los conceptos de sucesiones convergentes y sucesiones Cauchy. Intuitivamente, como en el caso de una sucesión convergente los puntos de una sucesión se van acercando cada vez más al límite, se tiene que estos puntos también tiene que estar acercándose entre sí.

Lema 3.3. *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en un espacio métrico M es Cauchy.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Supongamos que $x_n\to a$. Por tanto, dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n>N$. Por tanto, para todos $m,n>N$, por la desigualdad triangular de M se tiene que $d(x_m,x_n)\leq d(x_m,a)+d(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, es decir, la sucesión es efectivamente Cauchy. □

Observación.

1. El contrarrecíproco del lema 3.3 nos dice que si una sucesión no es Cauchy, entonces no es convergente.

2. Es importante notar que una sucesión sea Cauchy no implica que sea convergente: consideremos $\mathbb{Q}$ como subespacio métrico de $\mathbb{R}$, sea $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, y consideremos una sucesión en $\mathbb{R}$ de números racionales que converge a a (eg., la expansión decimal de a).

   Notemos que esta sucesión converge en $\mathbb{R}$, por lo que el lema 3.3 nos dice que es Cauchy en $\mathbb{R}$, y como $\mathbb{Q}$ es subespacio métrico de $\mathbb{R}$, entonces la sucesión es Cauchy en $\mathbb{Q}$. Sin embargo, $a\notin\mathbb{Q}$, es decir, la sucesión no es convergente en $\mathbb{Q}$.

Lema 3.4. *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy en un espacio métrico M es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Como es Cauchy, dado $\varepsilon=1$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_m)<1$ para todos $n,m>N$, es decir, que el conjunto $\{x_n\mid n>N\}$ está contenido en una bola B de diámetro 1. Se sigue el conjunto de los términos de la sucesión está contenido en $\{x_1,\ldots,x_N\}\cup B$. Como cada conjunto es acotado, su unión también lo es. □

Observación. El contrarrecíproco de 3.4 nos dice que si una sucesión no es acotada, entonces no es Cauchy (y por tanto no es convergente). También, es importante notar que una sucesión sea acotada no implica que sea Cauchy: consideremos la sucesión $(2,0,2,0,\ldots)$ en $\mathbb{R}$. Esta sucesión es claramente acotada (eg., por 2), pero no es Cauchy, pues la distancia entre términos es siempre 0 o 2, en vez de arbitrariamente pequeña.

Lema 3.5. *Si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy en un espacio métrico M tiene alguna subsucesión convergente, entonces es convergente, y el límite es el mismo que el de la subsucesión.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado, y sea $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $a \in M$. Probemos que igualmente $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todos $m, n > N_1$. Por otro lado, como $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n_k > N_2$. Sea $N := \max\{N_1, N_2\}$. Por tanto, por la desigualdad triangular de M, se tiene que

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{x_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todos $x_n, x_{n_k} > N$ Esto es por definición que $x_n \to a$. □

Observación. El contrarrecíproco de 3.5 dice que si una sucesión Cauchy no es convergente, entonces todas sus subsucesiones divergen. También, si una sucesión posee dos subsucesiones que convergen a límites distintos, entonces esta no puede ser Cauchy.

Recordemos que una función es continua si mapea sucesiones convergentes a sucesiones convergentes, preservando el límite. Algo similar ocurre con funciones uniformemente continuas y sucesiones Cauchy:

Proposición 3.6. *Sean M, N espacios métricos. Si $f\colon M \to N$ es uniformemente continua, entonces mapea sucesiones Cauchy en M a sucesiones Cauchy en N.*

Demostración. Consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en M, y consideremos la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en N. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme existe $\delta > 0$ de modo que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Por la propiedad de Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que si $m, n > N$, entonces $d(x_m, x_n) < \delta$. Por tanto, $d(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$, lo que prueba que la sucesión de imágenes es Cauchy en N. □

Observación.

El que la continuidad sea uniforme es necesario: una función que es solo solo continua, como

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{1}{x}, \end{aligned}$$

mapea la sucesión Cauchy $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ a la sucesión $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, que no es Cauchy en $\mathbb{R}$

3.2. Espacios métricos completos

Definición 3.7. Decimos que un espacio métrico M es *completo* si toda sucesión Cauchy en M es convergente.

Ejemplo 3.8.

1. $\mathbb{Q}$ no es un espacio métrico completo, como muestra el caso de $\sqrt{2}$.
2. Los espacios con la métrica cero-uno son completos: cualquier sucesión Cauchy acá es eventualmente constante , y las sucesiones (eventualmente) constantes son convergentes.

El siguiente resultado es crucial para el análisis y cálculo real, y es una muy buena aplicación de toda la teoría que hemos revisado hasta ahora.

Teorema 3.9. *Los números reales $\mathbb{R}$ son un espacio métrico completo con la métrica usual.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto $X_n := \{x_i \colon i \geq n\} = \{x_i, x_{i+1}, \ldots\}$. Notemos que si $i > j$, entonces $X_j \supseteq X_i$, es decir, $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$

Como X_1 tiene a todos los términos de la sucesión, y esta es Cauchy, se sigue que X_1 es acotado por algún $b \in \mathbb{R}$, y como X_1 contiene a X_n para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que estos también son acotados. En tanto también son no vacíos, tienen ínfimo. Sea $a_n := \operatorname{ínf} X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Si consideramos la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, como esta es monótona $(a_1 \leq a_2 \leq \cdots)$ y acotada por b, entonces converge al supremo del conjunto de los términos de la sucesión, digamos a $a := \sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probemos que $x_n \to a$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, entonces existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - x_m| < \varepsilon$ para $n, m > N$. Como a es supremo de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se tiene que $a-\varepsilon$ no es cota superior de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a-\varepsilon < a_k < a$. En particular, como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, podemos contrar $k > N$ es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < a_k < a$.

Por otro lado, a_k es ínfimo de X_k, por lo que $a_k + \varepsilon$ no es cota inferior de X_k, es decir, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_k < x_j < a_k + \varepsilon$. En particular, $x_j \in X_k$, por lo que existe $j > k$ tal que $a_k < x_j < a_k + \varepsilon$. Por tanto, se tiene la cadena de desigualdades

$$a - \varepsilon < a_k < x_j < a_k + \varepsilon < a + \varepsilon,$$

para $j, k > N$. Es decir, para $n > N$ se tiene que $|x_n - a| < \varepsilon$, por lo que efectivamente $x_n \to a$. Por tanto, $\mathbb{R}$ es completo. □

Observación. Con esto, podemos probar que el que una función mapee sucesiones Cauchy a sucesiones Cauchy no es un criterio para chequear continuidad uniforme: la función real $x \mapsto x^2$ es continua, por lo que mapea sucesiones convergentes (y por tanto Cauchy), en sucesiones convergentes (y por tanto Cauchy), pero no es uniformemente continua.

El siguiente resultado dice que un producto finito de espacios completos, es completo:

Proposición 3.10. *Si M, N son espacios métricos completos, entonces $M \times N$ es completo. Inductivamente, si $M_1, \ldots, M_n$ son espacios métricos completos, entonces $\prod_{i=1}^n M_i$ es completo.*

Demostración. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $M \times N$ dada por

$$z_n := (a_n, b_n),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como las proyecciones $\pi_1 \colon M \times N \to M$ y $\pi_2 \colon M \times N \to N$ son uniformemente continuas, se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son Cauchy en M y N respectivamente, por lo que son convergentes en M y N respectivamente, debido a la completitud, digamos a a y b respectivamente. Se sigue que $z_n \to (a, b) \in M \times N$, de lo que la sucesión es Cauchy, y por tanto el espacio $M \times N$ es completo. $\square$

Observación. El recíproco de este resultado también es cierto, pero para probarlo se necesitan herramientas que si bien no son complicadas, no hemos revisado.

Ejemplo 3.11. Como ya probamos que $\mathbb{R}$ es completo, es directo que $\mathbb{R}^n$ es completo para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Podemos generalizar este resultado para productos numerables:

Proposición 3.12. *Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de espacios métricos completos, entonces $\prod_{i\in\mathbb{N}} M_i$ es completo.*

Demostración. La idea es análoga al resultado anterior, pero la notación complica algo las cosas. Sea $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en $\prod_{n\in\mathbb{N}} M_i$. Cada proyección $\pi_i \colon \prod_{i\in\mathbb{N}} M_i \to M_i$ es uniformemente continua, por lo que mapea sucesiones Cauchy a sucesiones Cauchy. En particular cada $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en M_i, por lo que es convergente en M_i, digamos a a_i. Se sigue que $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}}) \to (a_1, a_2, \ldots)$, lo que prueba que el producto numerable es efectivamente completo. $\square$

Observación. Igualmente, el recíproco de este resultado es cierto, pero no lo probamos.

El siguiente resultado dice que en un espacio completo, ser cerrado es equivalente a ser completo:

Proposición 3.13. *Sea M un espacio métrico completo. Un subespacio $F \subseteq M$ es cerrado si y solo si es completo.*

Demostración. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Supongamos que $F \subseteq M$ es cerrado. Sea $(x_n)_{n\in N}$ una sucesión Cauchy en F. Como F es cerrado, entonces $a := \lim_{n\to\infty} x_n \in F$, lo que prueba que F es completo.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $F \subseteq M$ es completo y consideremos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en F convergente a $a \in M$. Por 3.3, esta sucesión también es Cauchy en M, por lo que es Cauchy en F, por lo que es convergente en F, lo que prueba que F es cerrado.

□

El siguiente teorema caracteriza los espacios completos como aquellos que poseen la propiedad de los intervalos encajados:

Teorema 3.14 (Intersección de Cantor). *Un espacio métrico M es completo si y solo si para toda cadena decreciente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ de cerrados no-vacíos en M tales que* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$*, se tiene que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$ *para algún* $a \in M$.

Demostración. Probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Sean M completo y $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como en el enunciado. Para cada n, escogemos un $x_n \in F_n$ (cosa que podemos hacer porque cada F_n es no-vacío). Esto define una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M. Podemos probar que esta sucesión es Cauchy en M.

En efecto, dado $N \in \mathbb{N}$, se tiene que si $m, n > N$, entonces, $F_n, F_m \subset F_N$, y por tanto $x_m, x_n \in F_N$. Por otro lado, como $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n > N \implies x_m, x_n \in F_N \implies d(x_m, x_n) < \operatorname{diam}(F_N) < \varepsilon,$$

por lo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es efectivamente Cauchy en M, y como M es completo, se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Sea $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Para ver que $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, notamos lo siguiente: a partir de cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \in F_N$ para todo $n \geq N$, por lo que $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in F_N$. Como $F_N \subseteq F_{N-1} \subseteq \ldots \subseteq F_1$, se tiene que $a \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y por tanto $a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Para probar que la intersección no posee otro elemento, supongamos lo contrario: sean $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Por tanto, en particular se tiene que $d(a, b) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que en particular $d(a, b) \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, de lo que $d(a, b) = 0$, y por definición de métrica, $a = b$.

$\Longleftarrow$: Supongamos que la intersección de una cadena decreciente cerrados no-vacíos en M con diámetro tendiendo a 0 es un único punto. Para probar que M es completo, probaremos que es secuencialmente completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy, y definamos $X_n := \{x_j\}_{j\geq n}$. Es claro que $X_1 \supseteq X_2 \supset \dots$ es una cadena decreciente de conjuntos no-vacíos, por lo que $\overline{X_1} \supseteq \overline{X_2} \supset \dots$ es una cadena decreciente de conjuntos no-vacíos cerrados en M.

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, la distancia entre puntos es decreciente a medida que crece n, por lo que se tendrá que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\overline{X_n}) = 0$, y por hipótesis se tendrá que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n} = \{a\}$ para algún $a \in M$.

[Something], por lo que a es el límite de una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y cómo esta es Cauchy, se tiene que en verdad $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in M$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ era arbitraria, se tiene que cualquier sucesión Cauchy converge en M, por lo que M es efectivamente completo. ☐

3.3. Teorema de las categorías de Baire

Este teorema nos dará información topológica de un espacio métrico (sobre densidad de sus subespacios), a partir de información métrica—la completitud. Más aun, en palabras de Haworth y McCoy [HM77], la completitud de un espacio métrico suele ser útil en tanto permite usar este teorema. Por ejemplo, sirve para probar el teorema del grafo cerrado, el del mapeo abierto, y el de cotas uniformes. También, para probar que existe una función real continua no-diferenciable.

Para formular y probar el teorema necesitamos la noción de conjunto *nunca denso*. Este tipo de conjuntos nacieron cuando se estaba desarrollando la teoría de la medida en $\mathbb{R}$, como ejemplos patológicos que desafían nuestra intuición. En particular, estos conjuntos rescatan la idea de ser "pequeños" topológicamente, pero hay casos en que por muy "pequeños" que sean estos conjuntos, resulta que tienen medida positiva.

Pero no nos desviemos. Sea M un espacio métrico. Recordemos que un subconjunto $X \subseteq M$ es *denso en* M si $\overline{X} = M$. Esta noción se puede extender a los subespacios de M. En particular, dado un abierto U, se tendrá que X es denso en U si $\overline{X \cap U} = U$. Los conjuntos nunca densos son aquellos que no lo son en ningún abierto de M:

Definición 3.15. Sea M un espacio métrico. Un $X \subseteq M$ se dice *nunca denso* (o *denso en ninguna parte de* M) si no es denso en ningún abierto de M. Decimos que un conjunto es *magro* (o *delgado*) en M si es unión de conjuntos nunca densos en M.

Observación. Sea M un espacio métrico, y $X \subseteq M$.

1. La nomenclatura puede ser confusa. Por mucho que se ocupen los términos "nunca" o "en ninguna parte", nos referimos solo a conjuntos abiertos. Un nombre más descriptivo sería conjunto "denso en ningún abierto de M".

2. Se podría que una noción buena de ser "pequeño" topológicamente es que X tenga interior vacío (ie., que sea *hueco*). Esto no es suficiente, pues nos

gustaría que la unión de conjuntos "pequeños" sea "pequeña", pero esto no siempre ocurre pues $\mathbb{Q}$ y $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})$ tienen interior vacío pero $\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, que es denso en $\mathbb{R}$.

Los conjuntos nunca densos se pueden caracterizar como aquellos que no tienen interior:

Proposición 3.16. *Sea M un espacios métrico. $X \subseteq M$ es nunca denso en M si y solo no contiene abiertos (aparte de $\emptyset$), es decir, si su interior es vacío.*

Demostración. Es más directo verificar que X no es nunca denso si y solo si contiene algún abierto.

$\Longrightarrow$: Si existe algún abierto U de modo que $\overline{X \cap U} = U$, entonces $X \cap U$ es un abierto contenido en X.

$\Longleftarrow$: Si X contiene un abierto U, entonces $X \cap U = U$, y tomando clausura el resultado es claro. $\square$

Observación. En particular, para probar que un conjunto es nunca denso, es suficiente probar que es cerrado (así es su propia clausura), y hueco.

Veamos algunas propiedades de conjuntos magros:

Lema 3.17. *Sea M un espacio métrico.*

1. *Si X es magro en M, entonces cualquier $Y \subseteq X$ es magro en M.*
2. *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos magros en M entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es magro en M.*
3. *Un conjunto numerable X es magro en M si y solo si ninguno de sus puntos es aislado.*

Demostración.

1. Si X es magro en M, entonces es unión de conjuntos nunca densos en M, por lo que cualquier $Y \subseteq X$ está contenido en una unión de conjuntos nunca densos de M, y por tanto debe ser en magro en M.
2. Como cada X_n es magro en M, para cada $n \in M$ podemos escribir $X_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Y_{n_m}$, donde cada Y_{n_m} es nunca denso en M. Por tanto,
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} Y_{n_m} \right) = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} Y_{n_m},$$
y como cada Y_{n_m} es nunca denso en M, se sigue que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ debe ser magro en M.

3. Sea X numerable. Recordemos que un singleton $\{x\} \subseteq M$ tiene interior vacío en M si y solo si el punto x no es aislado en M. Sea $X := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$.

   Por tanto, se tiene que X es magro en M si y solo si cada $\{x_n\}$ es nunca denso en en M si y solo si cada x_n no es aislado en M. □

Ejemplo 3.18.

1. Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subconjunto nunca denso en $\mathbb{R}^2$. Es claro que tal recta es cerrada en $\mathbb{R}^2$, por lo que es igual a su clausura. Para ver que tiene interior vacío basta notar que cualquier bola abierta centrada en algún punto de la recta no puede quedar completamente contenida en ella.

2. Sea $A \subseteq M$ un abierto. Su frontera ∂A es un conjunto nunca denso en M. En efecto, como ∂A es cerrado, es igual a su clausura. Para verificar que tiene interior vacío, tomemos un $x \in \partial A$ y notamos que, como x es un punto de frontera, ninguna bola abierta centrada en x está contenida completamente en ∂A. Por definición, ∂A tiene interior vacío.

Ejemplo 3.19. Construimos un conjunto que es naturalmente nunca denso en en $\mathbb{R}$:

- Partimos del intervalo $[0, 1]$, lo dividimos en tres subintervalos iguales, y le restamos el abierto del medio, de modo que quede $[0, 1] - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ y definimos $I_1 := \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
- Repetimos el proceso de restar el tercio abierto del medio sucesivamente para cada intervalo restante del paso anterior.

En cada paso se retiró una cantidad numerable de intervalos abiertos, los cuales numeramos como $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Definimos el *conjunto de Cantor* como el conjunto de los números que no fueron retirados, a saber,

$$K := [0, 1] - \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Probemos que es efectivamente nunca denso en $\mathbb{R}$. Ver que es cerrado es claro, pues K es el complemento del abierto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Como K es cerrado en $[0, 1]$, es cerrado en $\mathbb{R}$, y por tanto es igual a su clausura en $\mathbb{R}$.

También, de la construcción es claro que K no contiene ningún intervalo abierto: sea I un cualquier subconjunto abierto del $[0, 1]$, y denotemos su largo como l. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^N} < l$. Luego, en el paso $(N + 1)$-ésimo, se retira un trozo de I, por lo que este intervalo no puede quedar completamente contenido en K, y por definición $\operatorname{int} K = \emptyset$.

Sin más preámbulos, el teorema de Baire. Dice que los conjuntos magros son huecos:

Teorema 3.20 (Baire). *Sea M un espacio métrico completo. Todo conjunto magro $F \subseteq M$ tiene interior vacío en M.*

Observación.

1. Esto es equivalente (por definición de conjunto magro) a decir que en un espacio métrico completo M, si $F \subseteq M$ es unión de cerrados con interior vacío, entonces tiene interior vacío.

2. También, el teorema es equivalente a que en un espacio métrico completo M, si

   $$M - F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M - F_n,$$

   con cada $\operatorname{int} M - F_n$ un abierto denso en M, entonces $M - F$ es denso en M.

   Más generalmente, esto es equivalente a que toda intersección de abiertos densos en M es densa en M

Demostración. Probemos la segunda equivalencia. Sea M un espacio métrico completo, y sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos en M, cada uno abierto y denso en M. Probemos que $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es denso en M, esto es, que cada bola abierta B en M contiene algún punto de A.

Sea B_1 una bola abierta de M. Como A_1 es denso en M, se tiene que $A_1 \cap B_1 \neq \emptyset$, y como A_1 es abierto en M, se tiene que $A_1 \cap B_1$ es un abierto en M. Por tanto, existe una bola abierta $B_2 \subseteq A_1 \cap B_1$, de radio menor al de B_1 (y de hecho podemos elegir una bola de modo que $\overline{B_2} \subseteq A_1 \cap B_1$).

Ahora, como A_2 es abierto y denso en M, se tendrá que $A_2 \cap B_2$ es un abierto no-vacío en M, y por tanto existirá una bola B_3 de radio menor al de B_2, y que de hecho sea tal que $\overline{B_3} \subseteq A_2 \cap B_2$.

Seguimos con este proceso indefinidamente, obteniendo la familia $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Notamos entonces, que $\overline{B_1} \supset \overline{B_2} \supset \ldots$ es una cadena de cerrados en M, tales que $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(\overline{B_n}) = 0$, por lo que, como se cumplen las hipótesis del teorema de intersección de Cantor 3.14 (acá se usa que M es completo), se tendrá que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_n} = \{a\}$, para algún $a \in M$.

Es claro que, por construcción, $\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n \cap A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, por definición de contención, como $a \in \overline{B_{n+1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $a \in B_n$ y $a \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En particular, $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$. Por definición, A es efectivamente denso en M. $\square$

Ejemplo 3.21.

1. Si un espacio métrico completo M es unión de cerrados, entonces al menos uno debe tener interior no vacío: si no fuese este el caso, es decir, el teorema de Baire 3.20 nos indica que su unión tiene interior vacío en M; pero esta unión es todo M, lo que es absurdo, pues M es abierto.

2. Un espacio métrico completo M no es magro en sí mismo, pues si se escribiera como unión de conjuntos nunca densos en M, el teorema de Baire 3.20 nos indica que M tiene interior vacío en M, lo cual es absurdo.
3. Una de las aplicaciones más entretenidas del teorema de Baire es probar la existencia de funciones reales continuas, no-derivables en ningún punto. Es largo de probar, pero si alguien tiene interés en ver el desarrollo, puede estudiar [Lim14, Exemplo 33, pp. 193–194].

3.4. Teorema del punto fijo de Banach

Un problema recurrente en sistemas dinámicos y el estudio de ecuaciones diferenciales es el encontrar puntos fijos. Recordemos la definición.

Definición 3.22. Sea A un conjunto y $f: A \to A$. Decimos que $x \in A$ es un *punto fijo* de f si $f(x) = x$.

Existen múltiples teoremas que nos aseguran la existencia de estos puntos fijos. En esta sección estudiaremos un par de estos resultados para espacios métricos, aprovechando que ya tenemos múltiples herramientas en nuestro arsenal.

Teorema 3.23 (Punto fijo de Brouwer). *Consideremos $\mathbb{R}$ como espacio métrico. Toda función continua $f: [0,1] \to [0,1]$ tiene al menos un punto fijo $x \in [0,1]$.*

Demostración. Consideremos la función auxiliar $g(x) := f(x) - x$. Notamos que esta función es continua. Como $f([0,1]) \subseteq [0,1]$, se tiene que $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$, y que $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. El teorema del valor intermedio nos asegura que existe $x \in [0,1]$ de modo que $g(x) = 0$, es decir, tal que $f(x) = x$. Por tanto, hemos encontrado un punto fijo de f. $\square$

Hacemos dos observaciones. Primero, este resultado podría haber sido revisado en un curso de cálculo real sin problemas. Segundo, este teorema se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, pero no lo estudiamos pues no nos es relevante. Ahora, probemos algo más interesante, y que sí usa herramientas de análisis.

Teorema 3.24 (Punto fijo de Banach). *Sea M un espacio métrico. Si M es completo, entonces toda contracción $f: M \to M$ posee un único punto fijo. Más aún, este punto fijo está dado por el límite de la órbita bajo f de cualquier $x_0 \in M$.*

Demostración. Consideremos la órbita de x_0 bajo f definida recursivamente por

$$\begin{aligned} x_0 &:= x_0, \\ x_n &:= f(x_{n-1}) \text{ para } n \geq 1. \end{aligned}$$

Para probar el resultado hay que probar que esta órbita siempre converge, que este límite es punto fijo de f, y que este punto fijo que encontramos resulta ser único. Vamos en orden.

Para probar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, podemos aprovecharnos de que estamos suponiendo que M es completo y probar únicamente que la sucesión es Cauchy. Notamos que, estudiando términos consecutivos, se tiene

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq cd(x_0, x_1),$$

y también que

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq cd(x_1, x_2) \leq c^2 d(x_0, x_1).$$

Inductivamente, se sigue que

$$d(x_n, x_{x+1}) \leq c^n d(x_0, x_1), \tag{3.24.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, notamos que si $n < m$, entonces $m = n + p$ para algún $p \in \mathbb{N}$, lo que nos permite usar la desigualdad triangular múltiples veces, obteniendo que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) = d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (c^n + \cdots + c^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= c^n(1 + c + \cdots + c^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{c^n}{1-c} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

En la primera desigualdad, usamos la desigualdad triangular, en la segunda la cota obtenida en la ecuación 3.24.1, y en la última la fórmula cerrada de una suma geométrica, que podemos utilizar en este caso porque estamos asumiendo que $|c| < 1$. Tomando $n \to \infty$ en la última linea, tenemos producto de límite nulo por constante, que es nulo. Por tanto, $d(x_n, x_m) \to 0$ y concluimos que la sucesión es efectivamente Cauchy y por tanto convergente. Sea $a := \lim_{n\to\infty} x_n$. Probar que a es punto fijo de f es directo, pues

$$\begin{aligned} f(a) &= f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la continuidad de f. Efectivamente a es punto fijo de f

Para probar la unicidad, supongamos que $b \in M$ también es un punto fijo de f. Se tiene que

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq cd(a, b)) \implies d(a, b) - cd(a, b) = (1 - c)d(a, b) \leq 0.$$

Como $(1 - c) > 0$, debe ser que $d(a, b) \leq 0$, pero las métricas son no-negativas, de lo que $d(a, b) = 0$. Es decir, $a = b$. Esto prueba el resultado. $\square$

Teorema de Picard–Lindelöf

Uno de los resultados basales en el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias es el teorema de Picard–Lindelöf, que indica que, bajo ciertas condiciones, la solución del problema de Cauchy es única. Para su demostración, asumiremos un teorema de Banach estándar, que dice que los espacios de funciones continuas $I \to \mathbb{R}$ son completos, con $I \subseteq \mathbb{R}$ cerrado y acotado.

Teorema 3.25 (Existencia y unicidad de Picard–Lindelöf). *Consideremos un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ cerrado y acotado, y una función*

$$f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

continua, lipschitziana en la segunda coordenada (ie., que existe $c > 0$ tal que $|f(t,x) - f(t,y)| \leq c|x-y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$, independiente de $t \in I$).

Se tiene que, dados $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}$, existe una única solución $\varphi \in \mathcal{C}^1(I)$ del problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = f(t,\, f(t)) & \textit{para todo } t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar, notamos que al integrar la ecuación diferencial entre t_0 y t arbitrario, el teorema fundamental del cálculo nos permite escribir la ecuación diferencial como una sola ecuación,

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\, \varphi(s))\mathrm{d}s. \tag{3.25.1}$$

Consideremos el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\colon \mathcal{C}(I) &\longrightarrow \mathcal{C}(I) \\ \varphi &\longmapsto [\mathcal{T}\varphi](t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\, \varphi(s))\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

y notemos que, al comparar con la ecuación 3.25.1, una solución del problema de Cauchy de interés es exactamente lo mismo que un punto fijo de $\mathcal{T}$. Por tanto, para probar nuestro teorema, basta verificar que $\mathcal{T}$ tiene un único punto fijo. Como $\mathcal{C}(I)$ es completo, el teorema del punto fijo de Banach 3.24 indica que es suficiente probar que $\mathcal{T}$ es una contracción.

Vamos a hacerlo un poco a lo bruto. Sea $k := \sup_{t \in I} |t - t_0|$. Para todos

$\varphi, \psi \in \mathcal{C}(I)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\varphi - \mathcal{T}\psi\| &= \sup_{t\in I} \left| \int_{t_0}^{t} [f(s,\, \varphi(s)) - f(s,\, \psi(s))] \mathrm{d}s \right| \\
&\leq k \sup_{s\in I} |f(s,\, \varphi(s)) - f(s,\, \psi(s))| \\
&\leq ck \sup_{s\in I} |\varphi(s) - \psi(s)| \\
&= ck \, \|\varphi - \psi\| \, . \qquad (3.25.2)
\end{aligned}$$

Notemos que a estas alturas k es una constante y c está fijo, por lo que no hay problema en elegir una constante $0 < \alpha < k$ de modo que $c\alpha < 1$. Esto permite acotar la ecuación 3.25.2 de modo que $\mathcal{T}$ sea exhibido como contracción. Por lo discutido anteriormente, esto prueba el resultado. $\square$

Observación. Con algunas modificaciones, esta misma demostración funciona para $\mathbb{R}^n$ en vez de $\mathbb{R}$, o incluso cualquier espacio de Banach E.

4. Topología de espacios métricos II: compacidad

El concepto de compacidad de un espacio métrico es sumamente relevante. En esta sección entregamos una exposición más bien histórica, basada principalmente en el trabajo de Raman-Sundström en [RS14].

4.1. Breve historia de la compacidad

En el siglo XIX fue cuando se empezó a entender realmente la esencia de los intervalos de la recta real. Uno de los conceptos centrales en este desarrollo fue el de *compacidad*. Se desarrollaron dos corrientes principales de estas ideas precompacidad: una de parte de Bolzano y Weierstraß que trata sobre sucesiones y otra de la mano de Heine, Borel, y Lebesgue que trata sobre coberturas abiertas.

Vamos en orden cronológico. Asumiendo que toda sucesión Cauchy es convergente en $\mathbb{R}$, Bolzano [Bol17] probó el siguiente resultado en 1817 como un lema para probar lo que ahora llamamos teorema del valor intermedio:

Teorema 4.1 (Axioma del Supremo de Bolzano). *Todo subconjunto no-vacío y acotado de $\mathbb{R}$ posee supremo.*

No lo demostraremos, pues de hecho estamos asumiéndolo como axioma. Posteriormente, Weierstraß [Wei78] usó las ideas de Bolzano para demostrar el siguiente resultado en 1878:

Teorema 4.2 (Valor extremo de Weierstraß). *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces alcanza su máximo y mínimo en $[a,b]$.*

Tampoco lo demostraremos, pues probamos una versión más general posteriormente, y de forma más sofisticada. Es acá que este tipo de propiedades empieza a ser llamativa. Tanto, que Frèchet quiso generalizar este teorema a espacios de funciones, y trabajando en ello fue cuando notó que podía utilizar un resultado intermedio para su teoría—que sí probamos:

Teorema 4.3 (Punto límite de Bolzano–Weierstraß). *Todo $X \subseteq \mathbb{R}$ infinito y acotado posee algún punto de acumulación.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ infinito y acotado, y definamos

$$A := \{x \in \mathbb{R} \colon X \cap (x, \infty) \text{ es infinito}\}.$$

En tanto X es acotado, hay un $a \in \mathbb{R}$ de modo que $X \subseteq [-b, b]$. Notemos que A es no-vacío porque $-b \in A$, y es acotado superiormente por b, por lo que tiene supremo. Probemos que $c := \sup A$ es un punto de acumulación de X.

Como c es supremo de A, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ el número $c - \varepsilon$ no es cota superior de A, es decir, existe $a \in A$ de modo que $c - \varepsilon < a \leq c$. Esta desigualdad nos dice que como $c - \varepsilon$ está a la izquierda de a, y a la derecha de a hay infinitos puntos de X, entonces hay infinitos puntos a la derecha de $c - \varepsilon$, es decir, que $c - \varepsilon \in A$. En particular $B(c, \varepsilon) \cap X$ es infinita para todo $\varepsilon > 0$, por lo que el lema **??** implica que c efectivamente es un punto de acumulación de X. $\square$

Con este resultado en mente, Frèchet intentó dotar de esta noción de compacidad a espacios de funciones, pero no lo consiguió. La buena noticia es que sí lo consiguió para espacios métricos en su tesis de 1906 [Fr6]. Los conjuntos que cumplen este tipo de propiedades ahora reciben un nombre acorde:

Definición 4.4. Sea M un espacio métrico. Decimos que $K \subseteq M$ tiene la *propiedad de Bolzano–Weierstraß* si el ser infinito y acotado implica que tiene algún punto de acumulación. En este caso, decimos que K es *Frèchet-compacto* o *punto límite-compacto.*

El teorema anterior se puede enunciar de forma equivalente en lenguaje de sucesiones. Esta versión es más conocida:

Teorema 4.5 (Bolzano–Weierstraß). *Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$ acotada posee alguna subsucesión convergente.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ acotada, es decir, que existen $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $A \leq x_n \leq B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos $X_n := \{x_i \colon i \geq n\} = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, que son acotados. En tanto también son no vacíos, tienen ínfimo. Sea $a_n := \operatorname{ínf} X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La sucesión de los a_n es creciente ($a_1 \leq a_2 \leq \ldots$) y también es acotada (por B), por lo que **??** nos asegura que es convergente, digamos a $a \in \mathbb{R}$. Por tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $|x_{n_\varepsilon} - a| < \varepsilon$ para todo $n_\varepsilon > N$. Considerando $\varepsilon := \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos armar una subsucesión formada por los x_{n_ε} correspondiente, que converge a a. Esto prueba lo enunciado. $\square$

Con esto en mente, hay otra definición contemporánea de compacidad para espacios métricos abstractos.

Definición 4.6. Sea M un espacio métrico. Decimos que $K \subseteq M$ es *secuencialmente compacto* si toda subsucesión en K posee alguna subsucesión convergente.

Observación. A esta idea también se le conoce como propiedad de Bolzano–Weierstraß, por lo que sería válido enunciar que un conjunto es secuencialmente compacto si cumple la propiedad de Bolzano–Weierstraß. Pero son nociones distintas. Equivalentes, pero distintas, así que hay que tener cuidado.

Se creía que estas propiedades se desprendían por estar trabajando en conjuntos cerrados y acotados, pues de hecho es precisamente lo que ocurre. Pero esta abstracción falla al considerar espacios de funciones. Resulta que, de forma casi paralela, se estaban probando resultados que a primera vista parecen no tener relación con lo revisado hasta ahora, pero irónicamente solo se estaba estudiando la misma propiedad desde un punto de vista diferente. Borel [Bor95] probó en el 1895 siguiente resultado (que escribimos en lenguaje contemporáneo).

Teorema 4.7 (Borel). *Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Sea L un conjunto de índices, y $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que $[a, b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Entonces, existen finitos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ de modo que $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.*

Demostración. El que $[a, b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ nos indica que para cada $x \in [a, b]$, hay al menos un A_λ que contiene a x. Consideremos el conjunto

$$X := \{x \in [a, b] \colon [a, x] \subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^{n_x} A_i \text{ con cada } A_i \text{ abierto}\}.$$

El plan es probar que X es en verdad todo $[a, b]$. Primero, este conjunto es no-vacío: por hipótesis, a está contenido en algún abierto A_λ, por lo que existe un radio $r > 0$ de modo que $B(a, r) \subseteq A_\lambda$. Así, $B(a, r) \cap [a, b] = [a, a + r) \subseteq A_\lambda$, y por tanto $[a, a + r) \subseteq X$, lo que muestra que $X \neq \emptyset$.

Ahora, notamos que X es un intervalo: si $x \in X$, entonces todo $y \leq x$ también está en X, pues en este caso $y \in [a, x]$. A priori X puede ser un intervalo cerrado o abierto por la derecha, i. e. de la forma $[a, c]$ o $[a, c)$, donde $c = \sup X$. Probemos que este intervalo debe ser cerrado con $c = b$, para lo cual basta probar que $b \in X$.

Esto es análogo a cómo probamos que $a \in X$: por hipótesis b está en algún abierto A_b, por lo que existe un radio $r > 0$ de modo que $B(b, r) \subseteq A_b$, de lo que $[a, b] \cap B(b, r) = (b - r, b] \subseteq A_b$. En particular, $b \in X$, por lo que $[a, b] \subseteq X$. Esto prueba que $X = [a, b]$, es decir, que el cubrimiento original efectivamente admite un subcubrimiento finito. □

Tiempo después, este resultado se generalizó para cerrados acotados de $\mathbb{R}$—no necesariamente intervalos. Este teorema suele llevar el nombre de Heine, pero en realidad él no participó en su demostración, sino que fue Dirichlet, por lo que hacemos justicia.

Teorema 4.8 (Heine–Borel–Dirichlet–Lebesgue). *Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Sea L un conjunto de índices, y $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ tales que $F \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Entonces, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ de modo que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.*

Demostración. Como F es acotado, entonces está contenido en algún intervalo, digamos que $F \subseteq [a, b]$. Ahora bien, podríamos hacer observaciones sobre cubrimientos de $[a, b]$, pero eso no nos da toda la información sobre los cubrimientos F. Para solucionar esto, notemos que como F es cerrado, su complemento $\mathbb{R} - F$

es abierto. Por tanto, $[a, b]$ puede ser cubiertos por los abiertos que cubren a F y el complemento de F, léase,

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \cup (\mathbb{R} - F).$$

Este es un cubrimiento por abiertos de $[a, b]$, por lo que el teorema de Borel 4.7 nos dice que podemos encontrar un cubrimiento C finito por abiertos de $[a, b]$. De estos, alguno puede ser igual a $(\mathbb{R} - F)$, pero este no contiene elementos de F, por lo que de hecho C es un cubrimiento finito por abiertos de F, que es lo que que queríamos probar. $\square$

Finalmente, fueron Alexandroff y Urysohn los que se dieron cuenta de que los resultados potentes en un conjunto no eran debidos al hecho de ser cerrado y acotado, sino que esto era una consecuencia de la afirmación sobre las coberturas. Lo mejor de esto es que eso es una noción meramente topológica, por lo que puede ser abstraída sin muchos problemas a espacios topológicos abstractos, en contraste de las nociones secuenciales y de punto-límite.

Definición 4.9. Sea M un espacio métrico. Decimos que un conjunto K es *topológicamente compacto* si dada $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de conjuntos abiertos de M tales que $K \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, entonces existen finitos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ de modo que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

En resumen, Frèchet quiso desarrollar teoremas tipo Bolzano–Weierstraß para espacios de funciones, usando herramientas de puntos límite y sucesiones al igual que en espacios métricos, pero falló. Posteriormente, Borel y compañía probaron resultados sobre coberturas de conjuntos de $\mathbb{R}$ que estaban cerrados y acotados, lo que llevó a Alexandroff y Urysohn a notar que lo importante eran las coberturas, pudiendo no solo abstraer una buena noción para espacios métricos y de funciones, sino que para espacios topológicos generales. En espacios métricos, estas tres definiciones de compacidad son equivalentes, pero en espacios topológicos no (para ejemplos, ver [RS14, pp. 11–12]).

4.2. Definición y ejemplos

Ahora retornamos a la exposición más tradicional. Seguiremos la tradición contemporánea, que es partir estudiando compacidad topológica.

Definición 4.10. Sean M un espacio métrico, $X \subseteq M$, y L un conjunto de índices.

- Un *cubrimiento* de X es una familia $\mathcal{C} := (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de M tales que $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.
- Si $L' \subseteq L$ es tal que $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$ es un cubrimiento de X, decimos que es *subcubrimiento* de X.

- Decimos que el cubrimiento $(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ es *abierto* si cada C_λ es abierto en M.
- Decimos que el cubrimiento $(C_\lambda)_{\lambda\in L}$ es *finito* si L es finito.
- Decimos que X es un conjunto *compacto* si todo cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento abierto finito.

Ejemplo 4.11.

1. Los teoremas de Borel y Heine–Borel–Dirichlet–Lebesgue nos dicen que todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ es compacto. Esta idea se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$.
2. Todo espacio métrico M finito es compacto, pues para cubrir por abiertos todo M solo se necesitan finitos abiertos, de lo que es claro que todo cubrimiento por abiertos de M admite un subcubrimiento finito.
3. En $\mathbb{R}$, un intervalo abierto (a, b) no es compacto: notemos que existe un $N \in \mathbb{N}$ de modo que $A_n := (a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}) \subseteq (a, b)$ para todo $n > N$. Es claro que $\bigcup_n A_{n\in\mathbb{N}} = (a, b)$ es un cubrimiento por abiertos de (a, b). Sin embargo, no admite subcubrimientos finitos, pues la unión de finitos A_n es igual al más grande de estos.
4. En todo espacio métrico M, la unión de subconjuntos compactos es compacta: sean $K, L \subseteq M$ compactos, y consideremos $\mathcal{C}$ un cubrimiento por abiertos de $K \cup L$. En particular $\mathcal{C}$ es un cubrimiento por abiertos de K y de L, por lo que, al ser compactos, podemos extraer subcubrimientos finitos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ respectivamente, de lo que notamos que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ es un subcubrimiento finito de $K \cup L$. Inductivamente, la unión numerable de subconjuntos compactos es compacta.
5. Una unión arbitraria de compactos puede no ser compacta: por ejemplo, $\mathbb{R} := \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$. El ejemplo (2) muestra que cada $\{x\}$ es compacto, pero $\mathbb{R}$ no es compacto.

Tomando complementos, podemos caracterizar la compacidad de un conjunto por conjuntos cerrados:

Proposición 4.12. *Un espacio métrico M es compacto si y solo si toda familia de cerrados de M cuya intersección es vacía posee una subfamilia finita cuya intersección es vacía.*

Demostración. M es compacto si y solo si todo cubrimiento por abiertos $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ de M admite un subcubrimiento finito. Simbólicamente, si $M = \bigcup_{\lambda\in L} A_\lambda$, entonces existe existen finitos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de modo que $M = \bigcup_{i=1}^n A_{\lambda_i}$. Tomando complementos y utilizando las leyes de De Morgan, esto es equivalente a que si $\emptyset = \bigcap_{\lambda\in L}(M - A_\lambda)$, entonces $\emptyset = \bigcap_{i=1}^n (M - A_{\lambda_i})$. Como esto es cierto para abiertos arbitrarios, y los cerrados son precisamente los complementos de los abiertos, esto es cierto para todo cerrado. □

Observación. La segunda condición nos dice que dada una familia de cerrados de M, si tienen intersección vacía, entonces existe una subfamilia finita con intersección vacía. Por tanto, la afirmación contrarecíproca es que dada una familia de cerrados de M, si toda subfamilia finita posee intersección no-vacía, entonces la intersección de toda la familia es no-vacía. Esta es la primera definición de compacidad que dio Frèchet [Fr6]. No fue muy popular, pero sigue siendo útil. En lenguaje contemporáneo, diríamos que un conjunto es compacto si posee la *propiedad de intersección finita*.

4.3. Propiedades de espacios compactos

Es esta sección vamos a entregar muchas propiedades generales de espacios compactos, incluyendo caracterizaciones de compacidad. Partimos demostrando que en un espacio compacto, ser cerrado es lo mismo que ser compacto:

Proposición 4.13. *Sea K un espacio métrico compacto. Un subespacio $S \subseteq K$ es cerrado si y solo si es compacto.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado y probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Sea S un cerrado de K. Consideremos un cubrimiento por abiertos de S arbitrario, $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Con esto, construimos el cubrimiento por abiertos de K que consiste de $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \cup (K - S)$, del cual extraemos el subcubrimiento finito

$$C := A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n} \cup (K - S).$$

Es claro $S \subseteq C$, pero como $(K - S)$ no tiene puntos de S, debe ser que $S \subseteq A_{\lambda_1} \cup \ldots \cup A_{\lambda_n}$, de lo que hemos encontrado un subcubrimiento finito del original, lo que prueba la compacidad de S.

$\Longleftarrow$: Sea S compacto en K, y supongamos que no es cerrado en K, es decir, que S es distinto a su clausura, y por tanto existe $x \in (\overline{S} - S) = \partial S$. Para llegar a una contradicción, habría que encontrar un cubrimiento por abiertos de S que no admitiera una subcubrimiento finito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$A_n := (M - B[x, \tfrac{1}{n}]),$$

los cuales son claramente abiertos, pues son los complementos de las bolas cerradas, que son conjuntos cerrados. Más aún, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es un cubrimiento (abierto) de S: basta notar que como $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B[x, \frac{1}{n}] = \{x\}$, entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
(M - \textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B[x, \frac{1}{n}]) &= M - \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M - B[x, \frac{1}{n}]) \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\
&= M - \{x\},
\end{aligned}
$$

el cual es abierto pues es complemento de un singleton, los cuales siempre son cerrados.

Es claro que estos conjuntos forma una cadena ascendente $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, pues a medida que n crece, cada A_n corresponde a haberle quitado a M discos cada vez más pequeños. Por tanto, cualquier unión finita de estos conjuntos corresponde a aquel que sea más grande (en este caso, al que tenga mayor índice).

Sin embargo, esto es lo que nos hace llegar a la contradicción: como $x \in \partial S$, se sigue que cada $B[x, \frac{1}{n}]$ tiene al menos un punto de S, lo que implica que a cada A_n le falta al menos un punto de S, por lo que a cualquier unión finita de los A_n le falta al menos un punto de S. Por tanto, estos conjuntos son un cubrimiento por abiertos de S que no admite un subcubrimiento finito, lo que contradice la compacidad de S, de lo que concluimos que S debe ser efectivamente un cerrado. □

Observación. De hecho, probamos algo más fuerte: en la segunda implicancia nunca usamos el que K era compacto. Esto no es una coincidencia o un error, pues el resultado general es que en todo espacio métrico—no necesariamente compacto—un conjunto compacto es cerrado.

Corolario 4.14. *Sea M un espacio métrico.*

1. *Si $(K_\lambda)_{\lambda\in L}$ es una familia de compactos de M, entonces $\bigcap_{\lambda\in L} K_\lambda$ es compacto.*
2. *Si M es compacto entonces es completo.*
3. *Si M es compacto entonces es acotado.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado y probemos cada apartado.

1. Si $(K_\lambda)_{\lambda\in L}$ es una familia de compactos de M, entonces cada uno es cerrado en M, por lo que su intersección también es un cerrado en M. Por tanto, esta intersección también es un cerrado de cada K_λ, y por la proposición anterior, un compacto en cada K_λ, por lo que lo es en M.
2. Por el teorema de intersección de Cantor 3.14, basta probar que la intersección de una familia F de cerrados cuyo diámetro tiende a 0 contiene un solo punto. Esto es directo, porque como M es compacto, posee la propiedad de la intersección finita, lo que prueba que la intersección de F es

no-vacía, pero como su diámetro tiende a 0, debe estar formada por un punto.

3. Si M es compacto, entonces cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{C}$ de M admite un subcubrimiento finito $\mathcal{C}'$, lo que nos indica que M es acotado. $\square$

Otra propiedad importante es que las funciones continuas mapean compactos en compactos:

Proposición 4.15. *Sean M, N espacios métricos y $f\colon M \to N$ continua. Si $K \subseteq M$ es compacto en M, entonces $f(K)$ es compacto en N.*

Demostración. Consideremos un cubrimiento por abiertos

$$f(K) \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda.$$

Como f es continua y cada A_λ abierto, se sigue que cada conjunto preimagen $f^{-1}(A_\lambda)$ es un abierto de M. Ahora, notamos que, tomando preimagen en la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(K)) &\subseteq f^{-1}\big(\textstyle\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\big) \\ &= \textstyle\bigcup_{\lambda \in L} f^{-1}(A_\lambda), \end{aligned}$$

donde en la contención usamos que el tomar preimagen preserva inclusión, y en la igualdad el que la preimagen de una unión es la unión de las preimágenes. Como $K \subseteq f^{-1}(f(K))$, esto muestra que estas preimágenes son un cubrimiento por abiertos de K.

La compacidad de K nos permite elegir un subcubrimiento finito $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\lambda_i})$. Por tanto, tomando imagen se tiene que

$$\begin{aligned} f(K) &\subseteq f\big(\textstyle\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(A_{\lambda_i})\big) \\ &= \big(\textstyle\bigcup_{i=1}^n f f^{-1}(A_{\lambda_i})\big) \\ &\subseteq \textstyle\bigcup_{i=1}^n A_{\lambda_i}, \end{aligned}$$

donde en la primera contención usamos que el tomar imagen preserva inclusión, en la primera igualdad estamos usando que la imagen de una unión es la unión de las imágenes, y en la segunda contención el que la imagen de la preimagen de un conjunto está contenida en el conjunto.

Por tanto, hemos encontrado un subcubrimiento abierto finito del original, lo que prueba la compacidad de $f(K)$. $\square$

Corolario 4.16. *Sea K un espacio métrico compacto y M un espacio métrico. Sea $f\colon K \to M$*

1. *f envía cerrados de K a cerrados de M.*

2. *La imagen de f es acotada.*

Demostración. Asumamos la notación del enunciado.

1. Sea $F \subseteq K$ cerrado. Como K es compacto, entonces un cerrado F también es compacto. Por la proposición anterior, se tiene que $f(F)$ es compacto en M, y nuevamente concluimos que $f(F)$ es cerrado en M.

2. El lema anterior nos indica que la imagen de K es compacta, por lo que debe ser acotada en M. □

Ejemplo 4.17.

1. El primer resultado es útil para probar que conjuntos son compactos. A modo de ejemplo, los dado un camino continuo $f\colon [a,b] \to M$, la curva $f([a,b])$ es compacta en M. Así, la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ es compacta pues es la imagen de $[0,2\pi]$ bajo la función $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

2. Probemos el teorema4.2. Como K es compacto y f continua, se tiene que $f(K)$ es un compacto de $\mathbb{R}$. El teorema de Borel–Dirichlet–Lebesgue 4.8 asegura por tanto, que $f(K)$ es cerrado y acotado. En tanto acotado, existen $M := \sup f(K)$ y $m := \text{ínf}\, f(K)$. En tanto cerrado, se tiene que $M, m \in f(K)$, por lo que corresponden al máximo y mínimo de f en K, respectivamente.

Vamos a probar un resultado importante: la caracterización de compacidad en espacios métricos. Una de las encarnaciones requiere la noción de *red*:

Definición 4.18. Decimos que un espacio métrico M es *totalmente acotado* si para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un cubrimiento finito de M formado únicamente por bolas abiertas de radio ε. Tales cubrimientos se llaman *ε-redes*.

Teorema 4.19. *Sea M un espacio métrico. Son equivalentes*

1. *M es compacto.*

2. *Todo subconjunto infinito de M posee algún punto de acumulación.*

3. *Toda sucesión en M posee alguna subsucesión convergente.*

4. *M es completo y totalmente acotado.*

Demostración.

$1 \implies 2$: Supongamos que M es compacto, y sea $X \subseteq M$ un conjunto sin puntos de acumulación. Probemos que esto fuerza a X a ser finito. Supongamos que fuese infinito. Por definición, $\overline{X} = X \cup X'$, y por hipótesis se tiene que este unión es simplemente X. Por tanto, X es un conjunto cerrado en M, y por ende compacto. Ahora, el que X no tenga puntos de acumulación nos indica que para cada $x \in M$, hay una bola $B(x, r_x)$ que contiene a lo más finitos puntos de X. Estas bolas son un cubrimiento por abiertos de X, que no admite un subcubrimiento finito, pues al retirar siquiera una de las bolas de la colección ya no cubriríamos X. Esto contradice la compacidad de X, por lo que X debe ser finito.

$2 \implies 3$: Supongamos que todo subconjunto infinito de M tiene algún punto de acumulación. Consideremos una sucesión en M. Si tiene finitos términos distintos, es claro que admite una subsucesión convergente. Si tiene infinitos términos, entonces posee algún punto de acumulación, que es límite de alguna subsucesión.

$3 \implies 4$: Supongamos que toda subsucesión en M posee alguna subsucesión convergente. En este caso, toda sucesión Cauchy en M posee una subsucesión convergente, por lo que es en sí convergente, y por tanto M es efectivamente completo. Resta probar que es totalmente acotado. Sea $\varepsilon > 0$, y construyamos una ε-red del siguiente modo: elijamos consecutivamente $x_1, x_2, \ldots \in M$, y si en algún punto el conjunto $B(x_1, \varepsilon), \ldots, B(x_n, \varepsilon)$ es una ε-red, detenemos el proceso. Este proceso debe terminar, pues si no, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sería una sucesión cuyos términos están a lo menos a ε de distancia, por lo que no podría tener subsucesiones convergentes, lo que contradiciería nuestra hipótesis.

$4 \implies 1$: Supongamos M completo y totalmente acotado. Buscando una contradicción, supongamos que no es compacto, es decir, que existe un cubrimiento abierto $\{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de M que no admite un subcubrimiento finito. Como es totalmente acotado, podemos cubrir M por bolas cerradas de radio < 1 (basta cubrir por bolas abiertas y tomar clausura). Por tanto, al menos una de estas bolas, digamos B_1, no admite un subcubrimiento finito. B_1 sigue siendo totalmente acotado, por lo que lo podemos cubrir por bolas cerradas de radio $< \frac{1}{2}$, de las que, digamos B_2, no admite un subcubrimiento finito. Siguiendo de este modo, $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ es una familia encajonada de cerrados no-vacíos de M, tal que su diámetro converge a 0. En tanto M es completo, esto es equivalente a que la intersección $\cap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es precisamente un punto, digamos $\{a\}$. Por tanto, a está en algún A_λ, el que a su vez contiene a algún $B(a, \frac{1}{n})$ (pues es un abierto). Notemos que $B_n \subseteq B(a, \frac{1}{n})$, por lo que en particular $B_n \subseteq A_\lambda$. Esto es una contradicción, pues los B_n fueron construidos para ser tales que ningún número finito de los A_λ los cubra. Por tanto, M debe ser compacto. □

Esto permite recuperar los compactos de $\mathbb{R}^n$ como los cerrados acotados:

Corolario 4.20. *Un subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Demostración. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado si y solo si es completo y totalmente acotado, lo que es equivalente a ser compacto según el teorema anterior. □

Ejemplo 4.21. La esfera unitaria $S(0,1)$ en $\mathbb{R}^n$ y la bola cerrada $B[0,1]$ en $\mathbb{R}^n$ son subconjuntos cerrados y acotados, y por tanto compactos.

Se puede demostrar que el productos de dos espacios métricos compactos es compacto:

Proposición 4.22. *Si K, L son espacios métricos compactos, entonces su producto cartesiano $K \times L$ también es compacto. Inductivamente, el producto finito de espacios métricos compactos es compacto.*

Demostración. Sean K, L espacios métricos compactos. Probemos que su producto $K \times L$ es secuencialmente compacto. Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $z_n := (x_n, y_n) \in K \times L$, donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en K y L respectivamente. Por la compacidad de K, existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a un $x \in K$, digamos indexada por $N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Por tanto, $(y_n)_{n\in N_1}$ es otra sucesión en L, y por la compacidad de L, podemos encontrar otra subsucesión de $(y_n)_{n\in N_1}$ convergente a un $y \in L$, digamos indexada por $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Se sigue que $(z_n)_{n\in N_2}$ es una subsucesión convergente a (x, y) de nuestra sucesión original, lo que prueba que $K \times L$ es secuencialmente compacto, y por ende compacto. □

La generalización natural del resultado anterior es pasar a productos naturales. Como dato freak, el siguiente teorema es lógicamente equivalente al axioma de elección:

Teorema 4.23 (Cantor–Tychonov). *Un producto numerable de espacios métricos compactos es en sí compacto si cada factor es compacto.*

Demostración. Esta demostración ocupa fuertemente el Axioma de Elección. Sea $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto de espacios métricos compactos, y sea $M := \prod_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Probemos que es secuencialmente compacto, utilizando un argumento similar al lema anterior. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia arbitraria en M. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo, denotaremos por $(x_{ni})_{i\in\mathbb{N}}$ a la n-ésima entrada de nuestra sucesión, que es a su vez una sucesión.

Utilizando la compacidad de M_1, podemos encontrar una subsucesión de $(x_{1i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a un $a_1 \in M_1$, digamos indexada por $N_1 \in \mathbb{N}$. Luego, $(x_{2i})_{i\in N_1}$ es otra sucesión en M_2, y por compacidad podemos encontrarle una subsucesión convergente a un $a_2 \in M_2$, indexada por, digamos, $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$. Procediendo de este modo, encontramos una familia numerable de índices $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots$, y un punto $a := (a_1, a_2, \dots) \in M$. Por el Axioma de Elección, existe un $N_* \subseteq \mathbb{N}$ de modo que su j-ésimo elemento sea el j-ésimo elemento de N_j (todos los conjuntos ordenados de forma creciente). Se sigue que $(x_n)_{n\in N_*}$ es una subsucesión convergente a $a \in M$ de la original, lo que prueba que m es secuencialmente compacto, y por ende compacto. □

El siguiente resultado es importante en general. Por ejemplo, es el paso crucial para demostrar que toda función continua en $\mathbb{R}$ es Riemann-integrable.

Proposición 4.24. *Sean K, N espacios métricos. Si K es compacto, entonces cualquier función continua $f\colon K \to N$ es uniformemente continua.*

Demostración. Supongamos, buscando una contradicción, que la continuidad de f no fuese uniforme. En tal caso, existe $\varepsilon > 0$ de modo que para cualquier $\delta > 0$, en particular para $\delta_n := \frac{1}{n}$, podemos encontrar $x_n, y_n \in K$ de modo que $d(x_n, y_n) < \delta_n$, pero $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Consideremos las sucesiones formadas por los x_n y los y_n. En virtud de la compacidad, podemos encontrar subsucesiones, ambas convergentes a un $a \in K$. Como f y d son continuas, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(y_n)) &= d\Big(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)\Big) \\
&= d\Big(f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big), f\Big(\lim_{n\to\infty} f(y_n)\Big)\Big) \\
&= d(f(a), f(a)) = 0,
\end{aligned}$$

lo que es contradictorio. $\square$

5. Introducción al análisis funcional

El estudio de los espacios vectoriales de funciones se llama *análisis funcional*. En general, hay dos formas de obtener una estructura métrica (y por tanto topológica) en estos espacios: puede venir de un producto interno, o directamente de una norma. En el caso de inducir un espacio métrico completo, los primeros se llaman *espacios de Hilbert*, mientras que los otros se llaman *espacios de Banach*.

5.1. Algunos espacios de funciones

En esta sección, vamos a definir dos clases de espacios de funciones importantes: espacios de funciones acotadas, de funciones continuas, y espacios de sucesiones.

Espacios de funciones acotadas

Definición 5.1. Dado un conjunto X y un espacio métrico M, denotamos el conjunto de las funciones acotadas $X \to M$ como

$$\mathcal{B}(X, M) := \{f \colon X \to M \mid f \text{ acotada}\}.$$

Este conjunto puede ser munido de una métrica, notando que que dadas dos funciones $f, g \in \mathcal{B}(X, M)$, el conjunto $\{d(f(x), g(x)) \colon x \in X\}$ es acotado, por lo que tiene supremo bien definido. Así:

Proposición 5.2. *Dados un conjunto X y un espacio métrico M, el conjunto $\mathcal{B}(X, M)$ es un espacio métrico con la función*

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} \{d(f(x), g(x))\}.$$

Demostración. Por definición, la distancia punto a punto es no-negativa, por lo que el supremo de estas también lo será. Por otro lado, el supremo será igual a 0, si y solo si todas las distancias punto a punto son 0, que es precisamente que $f = g$. La simetría es clara. $\square$

En particular, nos será de interés el caso cuando $M = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En este caso, escribiremos genéricamente $\mathcal{B}(X, k)$, o si el cuerpo es claro del contexto, solamente $\mathcal{B}(X)$. En este caso, dicho espacio es completo:

Proposición 5.3. *Dado un conjunto X, se tiene que el espacio $\mathcal{B}(X)$ de funciones acotadas a valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es completo respecto a la métrica inducida por la norma-infinito $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. En efecto, consideremos una sucesión Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}(X)$. Por definición esto es que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon$

para todos $m, n > N$. Esto nos dice que como

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon,$$

para todo $x \in X$, entonces la sucesión $(|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$, y por tanto convergente en $\mathbb{R}$, digamos a $f(x)$, para cada $x \in X$. Este es nuestro candidato a límite. Primero, corresponde chequear que es acotada: en efecto, toda sucesión Cauchy es acotada, por lo que existe $M \in \mathbb{R}$ de modo que $\|f_n\|_\infty \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como

$$|f_n(x)| \leq \|f_n(x)\|_\infty \leq M,$$

se sigue, tomando $n \to \infty$, que $|f(x)| \leq M$, es decir, que f es efectivamente acotada. Resta probar que nuestra sucesión original converge a f. Esto es directo, pues para $n > N$ se tiene que

$$\|f_n - f\|_\infty = \lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,$$

lo que prueba que $f_n \to f \in \mathcal{B}(X)$, lo que es precisamente que $\mathcal{B}(X)$ es completo. $\square$

Espacios de funciones continuas

Definición 5.4. Sea $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Dado un espacio métrico compacto X (eg., $[a, b]$ con la métrica de $\mathbb{R}$), denotamos el conjunto de las funciones continuas a valores en k como

$$\mathcal{C}(X) := \{f \colon X \to k \mid f \text{ continua}\}.$$

Este conjunto es un k-espacio vectorial con las operaciones punto a punto habituales. También, como X es compacto, todas las funciones en $\mathcal{C}(X)$ son acotadas, es decir, $\mathcal{C}(X)$ es un subespacio de $\mathcal{B}(X)$. Este espacio también es completo:

Teorema 5.5. *Sea X un espacio métrico compacto. Se tiene que el conjunto $\mathcal{C}(X)$ de las funciones continuas a valores en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es completo respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Recordemos que en un espacio completo, un subespacio es completo si y solo si es cerrado. Por tanto, basta probar que $\mathcal{C}(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X)$. $\square$

5.2. Sucesiones en espacios de funciones

Definición 5.6. Sea X un conjunto y M un espacio métrico. Denotamos

$$\mathcal{F}(X, M) := \{f \colon X \to M\}$$

al conjunto de todas las funciones $X \to M$. Una *sucesión de funciones* de X en M es una sucesión en $\mathcal{F}(X, M)$. Tenemos dos formas de hablar de convergencia de sucesiones de funciones.

1. Una sucesión $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(X, M)$ *converge puntualmente* si para todo $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en M en el sentido usual (cf. 2.41).

2. Una sucesión $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(X, M)$ *converge uniformemente* a $f \in \mathcal{F}(X, M)$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ de modo que en cada $x \in X$ se tenga que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $n > N$.

Observación.

1. La diferencia entre convergencia puntual y uniforme puede no ser evidente pues en ambos casos las sucesiones efectivamente se van acercando a su límite. Esta reside en que en el caso puntual, cada una de las sucesiones de $f_n(x)$ debe converger a f por separado, posiblemente a distinto ritmo, pues el N depende tanto de ε como de x. En el caso uniforme, todas las funciones convergen a f más menos al mismo ritmo, pues N depende solo de ε.

   En otras palabras, el que una sucesión de funciones esté a ε de distancia de f puntualmente nos indica que *eventualmente* cada término de la sucesión está a ε de distancia de f, mientras que el estar a ε de distancia de f uniformemente nos dice que eventualmente todos los términos están a distancia ε de f al mismo tiempo.

2. Si una sucesión de funciones converge uniformemente, entonces converge puntualmente: sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a f. Por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de modo que en cada $x \in X$ se tenga que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para todo $n > N$. Ahora, sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Es claro que para todo $n > N_\varepsilon$ se tiene que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$, que es la convergencia puntual.

   Si una función converge puntualmente, no es necesario que converja uniformemente (cf. el primer ejemplo abajo). Sin embargo, el teorema de Dini (cf.) nos entrega condiciones para que esto sí ocurra. Esto es relevante pues resulta que ocurre en situaciones más bien exigentes.

3. La afirmación contrarecíproca del punto anterior nos indica que si una sucesión de funciones no converge puntualmente entonces no puede converger uniformemente.

Ejemplo 5.7. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) := \frac{x}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ converge puntualmente: fijando $x \in \mathbb{R}$, se sigue que $f_n(x) = x\frac{1}{n}$ es producto de algo acotado (pues x está fijo) con algo convergente a 0, por lo que converge a 0. Esto es precisamente que la sucesión converge puntualmente a la función 0.

Sin embargo, no converge uniformemente: para $\varepsilon = 1$ y $N \in \mathbb{N}$ cualquiera, podemos elegir cualquier natural $n > N$ y luego cualquier real $x > n$ y tendremos que $|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{n}\right| \geq 1$. Es decir, al menos una de las funciones de la sucesión no alcanza a estar a distancia menor a 1 de 0 a tiempo N arbitrario, que es precisamente que no converge uniformemente.

Lema 5.8. *Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(X, M)$ converge uniformemente a f si y solo si $f \in \mathcal{B}_f(X, M)$.*

Demostración. Se tiene que dado $\varepsilon > 0$, eventualmente, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} d(f_n, f) < \varepsilon &\iff d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \\ &\iff f \in \mathcal{B}_f(X, M). \end{aligned}$$

□

Lema 5.9. *El límite uniforme de funciones continuas en un punto a es continuo en a: sean M, N espacios métricos, y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en a. Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces f es continua en a.*

Demostración. Sea F el conjunto de funciones $M \to N$ a distancia finita de f, el que es cerrado en $\mathcal{B}_f(X, M)$. Eventualmente se tendrá que $f_n \in F$ y por tanto $f \in F$, es decir, que f es continua en a. □

Lema 5.10. *El espacio de las funciones reales continuas desde un intervalo cerrado $\mathcal{C}([a, b])$ es completo respecto a la métrica inducida por la norma-infinito $\|\cdot\|_\infty$*

Demostración. Consideremos una sucesión Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{C}([a, b])$. Nuestro candidato a límite f lo construimos de igual modo que en el ejemplo anterior. Del mismo modo probamos que $f_n \to f$. Resta probar que $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Sea $\varepsilon > 0$ y $a \in [a, b]$ arbitrario. Por la continuidad de cada f_n, existe $\delta_n > 0$ de modo que para $n > N$ se tiene que

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,$$

siempre que $|x - y| < \delta_n$. Tomando $n \to \infty$, se tiene que efectivamente f es continua. En resumen f_n converge a $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$, lo que es precisamente que $\mathcal{C}([a, b])$ es completo. □

Lema 5.11. *El espacio de las sucesiones reales 2-sumables ℓ^2 es completo respecto a la métrica inducida por la norma-2*

Demostración. Sea $((x_{mn})_{n\in\mathbb{N}})_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión Cauchy en ℓ^2. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que $\|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_2 < \varepsilon$ si $i, j > N$. Como $\|\cdot\|_p$ es decreciente en p, se sigue que

$$\|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_1 \leq \|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_2 < \varepsilon,$$

de lo que la sucesión $(x_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ fijo, y por tanto convergente, digamos que a $a_i \in \mathbb{R}$. Proponemos que nuestra sucesión original converge a $a := (a_1, a_2, \ldots)$. Primero, corresponde chequear que $a \in \ell^2$, es decir, que es 2-sumable. En efecto, como la sucesión original es Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{k} |x_{in} - x_{jn}|^2} < \|(x_{in})_{n\in\mathbb{N}} - (x_{jn})_{n\in\mathbb{N}}\|_2 < \varepsilon$$

si $i, j > N$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Elevando al cuadrado, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{k} |x_{im} - x_{jn}|^2 < \varepsilon^2,$$

y tomando $i \to \infty$, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{k} |a_n - x_{jn}|^2 < \varepsilon^2 \tag{5.11.1}$$

Por la desigualdad triangular notamos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} |a_n|^2 &= \sum_{n=1}^{k} |a_n - x_{jn} + x_{jn}|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{k} |a_n - x_{jn}|^2 + \sum_{n=1}^{k} |x_{jn}|^2 \\ &< \varepsilon^2 + M,\end{aligned}$$

para algún $M \in \mathbb{R}$. Tomando $k \to \infty$, esto prueba que $a \in \ell^2$. Ahora, tomando $k \to \infty$ en la ecuación 5.11.1, obtenemos que $(x_{mn})_{n\in\mathbb{N}} \to a$, lo que prueba que la sucesión original es Cauchy, y por tanto ℓ^2 es completo. $\square$

5.3. Compacidad en espacios de funciones: teorema de Arzelà–Ascoli

Probamos que un subconjunto en $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado. Lamentablemente, este no es el caso en espacios de funciones continuas.

Ejemplo 5.12. Consideremos $\mathcal{C}([a, b])$. La bola unitaria cerrada

$$B[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ continua} : |f(x)| \leq 1\},$$

es cerrada (pues es una bola cerrada), y acotada. Sin embargo, no es compacta: consideremos la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $B[a, b]$ dada por

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{n+1}], \\ ax + b & x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1], \end{cases}$$

para algunos $a, b \in \mathbb{R}$. Se sigue que si $m \neq n$, entonces $d(g_n, g_m) = 1$, por lo que no puede tener alguna subsucesión convergente, y por tanto contradice una posible compacidad de D.

Por lo tanto nos gustaría desarrollar alguna condición adicional que imponer sobre una familia de funciones continuas para que, al sumar las condiciones de que sea cerrada y acotada, nos entregue la equivalencia a compacidad a la que ya nos acostumbramos. Por suerte, este problema fue resuelto hace tiempo, y la respuesta se encuentra en el concepto de equicontinuidad. Como advertencia, en una primera instancia nos remitiremos al caso real de esta teoría.

Definición 5.13. Un subconjunto $E \subseteq \mathcal{C}([a, b])$ se dice *equicontinuo* si dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todas las $f \in E$.

Teorema 5.14 (Arzelà–Ascoli real). *Un conjunto $E \subseteq \mathcal{C}([a, b])$ es compacto si y solo si es cerrado, acotado, y equicontinuo.*

Demostración. Adoptemos la notación del enunciado, y probemos ambas implicancias.

$\Longrightarrow$: Ya sabemos que si E es compacto, entonces debe ser cerrado y acotado, por lo que resta probar que es equicontinuo. Supongamos que no lo fuese. Así, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $\delta > 0$, se tenga que hay $x, y \in [a, b]$ y $f \in E$ tales que $|x - y| < \delta$, pero $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

En particular, para cada $\delta_n := \frac{1}{n}$, habrá $f_n \in E$ y $x_n, y_n \in [a, b]$ tales que $|x_n - y_n| < \delta$, pero $|f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \varepsilon$. Consideremos la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por la compacidad de E, esta sucesión admite una subsucesión convergente, y por tanto equicontinua. Pero por construcción, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es equicontinua y por tanto no tiene subsucesiones equicontinuas, lo que es contradictorio. Por tanto, debe ser que E sí es equicontintinuo.

$\Longleftarrow$: Probemos compacidad secuencial. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E. El plan es el siguiente: construir usando fuerza bruta una subsucesión convergente, primero utilizando el hecho de E es cerrado y acotado para encontrar una que sirva en los puntos racionales de $[a, b]$, y luego apoyarnos en la equicontinuidad para extender esta convergencia de modo uniforme sobre todo $[a, b]$.

En efecto, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una numeración de los racionales de $[a, b]$. Notamos que para cada $i \in \mathbb{N}$, las evaluaciones $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ son una sucesión de reales, que es acotada, y por tanto posee una subsucesión convergente. Supongamos que la respectiva subsucesión de cada $(f_n(x_i))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a_i, y que es indexada por $N_i \subseteq \mathbb{N}$.

Por tanto, hemos encontrado una familia numerable de índices $\mathbb{N} \supset N_1 \supset N_2 \supset \ldots$, y un punto $a := (a_1, a_2, \ldots)$. Por el Axioma de Elección, existe un $N_* \subseteq \mathbb{N}$ de modo que su j-ésimo elemento sea el j-ésimo elemento de N_j (todos los conjuntos ordenados de forma creciente). Se sigue que cada miembro de $(f_n(x_i)_{n\in N_*}$ converge puntualmente a a_i, por lo que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a una $f \in E$ sobre racionales.

Ahora, notemos que si probamos que esta convergencia es uniforme en $[a, b]$, terminamos, pues esto dice en esencia que la convergencia es independiente del punto de $[a, b]$ que escojamos. Para esto, podemos utilizar el lema 5.22, que nos entrega inmediatamente que la convergencia de $(f_n)_{n\in N_*}$ es uniforme en compactos de $[a, b]$, en particular sobre el mismo $[a, b]$. Por tanto, hemos encontrado una subsucesión convergente de la original, lo que prueba la compacidad secuencial. $\square$

Definición 5.15. Sean M, N espacios métricos y sea $E \subseteq \mathcal{F}(M, N)$. Este conjunto se dice *equicontinuo* en $a \in M$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para todas las $f \in E$.

Observación. La gracia de una familia equicontinua de funciones es que claramente son continuas, pero los puntos que tengan imágenes cercanas a $f(a)$ son precisamente aquellos que están a distancia uniforme de a, vale decir, que el δ depende solo de ε, no de cada $f \in E$.

Ejemplo 5.16. Sean M, N espacios métricos. Un conjunto $E \subseteq \mathcal{F}(M, N)$ formado por funciones lipschitzianas con misma constante $c > 0$ es equicontinuo: en efecto, dado $\varepsilon > 0$ cada $f \in E$ es tal que si $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{c}$ entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ (cf. 2.16).

Ejemplo 5.17. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ dada por $f_n(x) := \frac{x}{n}$ es equicontinua: basta notar que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = \frac{1}{n} \le 1$, es decir, cada f_n tiene derivada acotada por 1, por lo que cada una es lipschitziana de constante 1 (cf. 2.18). El ejemplo anterior nos permite concluir que esta sucesión es en efecto equicontinua.

Ejemplo 5.18. Sean M, N espacios métricos. Un conjunto finito $E := \{f_1, \dots, f_n\}$ de funciones $M \to N$ continuas en $a \in M$ es equicontinuo en a: dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta_i > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta_i$ entonces $d(f_i(x), d(a)) < \varepsilon$. Sea $\delta := \text{mín}\,\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Por tanto, para cada $f_i \in E$ se tiene que si $d(x, a) < \delta \le \delta_i$ entonces $d(f_i(x), f(a)) < \varepsilon$, que prueba lo deseado.

Ejemplo 5.19. La unión de finitos conjuntos equicontinuos es equicontinuo: sean M, N espacios métricos y sean $E_1, \dots, E_n \subseteq \mathcal{F}(M, N)$ equicontinuos. En efecto, sea $a \in M$ arbitrario, y para cada $i = 1, \dots, n$, sea $f_i \in E_i$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea[1] $\delta_{i\varepsilon} > 0$ de modo que si $d(x, a) < \delta_{i\varepsilon}$, entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ para cada $f \in E_i$ que nos entrega la equicontinuidad de E_i.

Ahora, para cada $\varepsilon > 0$ sea $\delta_\varepsilon = \text{mín}\,\{\delta_{1\varepsilon}, \dots, \delta_{n\varepsilon}\}$. Por tanto, si $f \in \bigcup_{i=1}^n E_i$, entonces $f \in E_i$ para algún $i = 1, \dots, n$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se sigue que

[1] Acá estamos usando el Axioma de Elección.

si $d(x,a) < \delta_\varepsilon \leq \delta_{i\varepsilon}$ entonces $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, lo que prueba el resultado deseado.

Ejemplo 5.20. Sean M, N espacios métricos. Si una sucesión equicontinua $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(M,N)$ converge puntualmente a $f \in \mathcal{F}(M,N)$, entonces el conjunto $E := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{f\}$ es equicontinuo: dado $a \in M$ y $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que si $d(x,a) < \delta$ entonces $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ para toda $f_n \in E$. En particular, $\lim_{n\to\infty} d(f_n(x), f_n(a)) = d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, lo que prueba lo deseado.

Definición 5.21. Sea M un espacio métrico y $X \subseteq M$. Decimos que X es *precompacto* en M si $\overline{X}$ es compacta en M.

Observación.

1. En términos de sucesiones, la compacidad usual nos indica que toda sucesión en X tiene alguna subsucesión convergente en X, mientras que la precompacidad nos indica que toda sucesión tiene alguna subsucesión convergente en M, de hecho posiblemente en $M - X$.

2. Es claro que si X es cerrado y precompacto en M, entonces es compacto en M.

Ahora, probamos dos proposiciones que son claves para entender esta nueva noción de precompacidad.

Lema 5.22. *Sean M, N espacios métricos. Si una sucesión equicontinua $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{F}(M,N)$ converge puntualmente en a $f \in \mathcal{F}(M,N)$, entonces esta convergencia es uniforme sobre cada compacto $K \subseteq M$.*

Demostración. La equicontinuidad de la sucesión nos dice que de hecho $E := \{f, f_1, f_2, \ldots\}$ es equicontinuo (cf. el ejemplo justo anterior), es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un radio $\delta_\varepsilon > 0$ de modo que si $d(x,y) < \delta_\varepsilon$ entonces $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ y $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Notamos que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $A_\varepsilon := \bigcup_{x\in K} B(x, \delta_\varepsilon)$ es un cubrimiento por abiertos del compacto K, por lo que podemos extraer algún subcubrimiento finito $B_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{m_\varepsilon} B(x_{\varepsilon i}, \delta_\varepsilon)$ de K, con cada $x_\varepsilon \in K$.

Ahora, la convergencia puntual nos dice que para cada $x \in M$, dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir $n_{x\varepsilon} \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ cuando $n > n_{x\varepsilon}$. En particular, tomemos $N_\varepsilon := \max\left\{n_{x_{\varepsilon 1}\varepsilon}, \ldots, n_{x_{\varepsilon m_\varepsilon}\varepsilon}\right\}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Si $x \in K$, entonces $x \in B(x_{\varepsilon i}, \delta_\varepsilon)$ para algún $i = 1, \ldots, m_\varepsilon$, es decir $d(x, x_{\varepsilon i}) < \delta_\varepsilon$, por lo que $d(f_n(x), f_n(x_{\varepsilon i})) < \varepsilon$. Por desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f_n(x), f(x)) &\leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x)) \\ &\leq d(f_n(x), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

donde la cota del segundo sumando es cierta para $n > N_\varepsilon$, y las del primero y tercero por la equicontinuidad. Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, se tiene lo deseado. $\square$

Lema 5.23. *Sean M, N espacios métricos y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión equicontinua en $\mathcal{F}(M, N)$ tal que cada $E(x) := \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenga clausura completa en N. Si la sucesión converge puntualmente en algún subconjunto denso de M, entonces converge uniformemente sobre cada compacto de M.*

Demostración. Adoptemos la notación e hipótesis del enunciado. En virtud del lema anterior, basta probar que la sucesión converge puntualmente en M, para lo cual basta probar que para cada $x \in M$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en N, pues en tal caso es Cauchy en $\overline{E(x)}$ y por tanto convergente en N.

Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in M$, la equicontinuidad de la sucesión nos dice que existe $\delta_\varepsilon > 0$ de modo que si $y \in B(x, \delta_\varepsilon)$, entonces $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $D \subseteq M$ un denso de modo que la sucesión converja en D. Sea $y \in B(x, \delta_\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Como la sucesión converge en D, se sigue que en particular $(f_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en D, por lo que es Cauchy en D, por lo que es Cauchy en N, es decir, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $d(f_n(y), f_m(y)) < \varepsilon$ cuando $n, m > n_0$. Por desigualdad triangular, se sigue que

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f_m(y)) < \varepsilon + \varepsilon,$$

donde el primer sumando es acotado por la equicontinuidad, y el segundo cuando $m, n > n_0$. Esto prueba que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en N, y por lo comentado anteriormente, se sigue la convergencia uniforme sobre compactos de M. $\square$

Teorema 5.24 (Arzelà–Ascoli). *Sean K, N espacios métricos, K compacto. Un conjunto $E \subseteq \mathcal{C}(K, N)$ es precompacto si y solo si es equicontinuo y $E(x) := \{f(x)\}_{f\in E}$ es precompacto en N para cada $x \in K$.*

5.4. Teorema de aproximación de Stone–Weierstraß

El teorema de aproximación de Taylor dice que toda función real $f \in \mathcal{C}^\infty$ es analítica, es decir que $f(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n(x-a)^n$ para algunos $c_n \in \mathbb{R}$. Notemos que si definimos $p_n(x) := \sum_{i=0}^n c_i(x-a)^i$, entonces $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$. Weierstraß generalizó esta noción para funciones continuas—no necesariamente diferenciables—sobre compactos de $\mathbb{R}$.

Teorema 5.25 (Aproximación de Weierstraß). *Toda función $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ se puede aproximar uniformemente en $[a,b]$ por una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios $[a,b] \to \mathbb{R}$.*

No probaremos este resultado pues vamos a demostrar uno aun más general. Antes de enunciarlo y probarlo necesitamos un par de herramientas técnicas.

Definición 5.26. Sean M, N un espacios métricos. Decimos que un conjunto $S \subseteq \mathcal{C}(M,N)$ *separa los puntos* de M si es que dados $x \neq y$ en M, podemos encontrar alguna $f \in S$ de modo que $f(x) \neq f(y)$ también. Es decir, si siempre hay funciones $f \in S$ que mapean puntos distintos a puntos distintos.

Ejemplo 5.27. Un caso particularmente útil es cuando estamos trabajando en $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ y S contiene alguna función inyectiva en $[a,b]$ (como x, e^x, u otras dependiendo del dominio), pues esto asegura inmediatamente que S separa puntos.

Definición 5.28. Sea k un cuerpo, sea A un k-espacio vectorial, y $\varphi\colon k \to A$ un morfismo de anillos. Decimos que (A, k, φ) es una k-*álgebra*.

Ejemplo 5.29. Las funciones continuas $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ son una $\mathbb{R}$-álgebra: es claro que son un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, y además la multiplicación puntual de funciones es cerrada. Acá, $k = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{C}([a,b],\mathbb{R})$ y $\varphi =$ evaluación.

Lema 5.30. *Sea M un espacio métrico y $A \subseteq \mathcal{C}(M,\mathbb{R})$ una $\mathbb{R}$-álgebra que contiene a las funciones constantes y separa puntos. Entonces, dados $x, y \in M$ distintos, y $a, b \in \mathbb{R}$, existe $f \in A$ de modo que $f(x) = a$ y $f(y) = b$.*

Teorema 5.31 (Aproximación de Stone–Weierstraß). *Sea K un espacio métrico compacto, y $A \subseteq \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ una $\mathbb{R}$-álgebra que contiene a las funciones constantes y separa puntos. Entonces, toda función continua $f\colon K \to \mathbb{R}$ puede ser aproximada uniformemente por funciones de A, es decir, $\overline{A} = \mathcal{C}(K,\mathbb{R})$.*

Referencias

[Bol17] Bernard Bolzano, *Rein analytischer beweis des lehrsatzes daß zwischen je zwey werthen, die ein entgegengesetzetes resultat gewähren, wenigstens eine reelle wurzel der gleichung liege.*

[Bor95] Émile Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, Annales scientifiques de l'École normale supérieure **12** (1895), 9–55.

[Fr6] M. Maurice Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940) **22** (1906), no. 1, 1–72.

[HM77] R. C. Haworth and R. A. McCoy, *Baire spaces.*

[Lim14] Elon Lages Lima, *Espaços métricos*, IMPA, 2014.

[RS14] Manya Raman-Sundstrom, *A pedagogical history of compactness*, arXiv:1006.4131 [math] (2014), arXiv: 1006.4131.

[Wei78] Karl Weierstraß, *Einleitung in die theorie der analytischen funktionen.*