

## Révision sur les dérivées (Correction)

Mardi 11 novembre 2025

### Exercice 1

La dérivée de  $f$  est

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

1. Le fait que la courbe passe par  $A(0; 2)$  donne

$$f(0) = d = 2.$$

La tangente en  $x = 0$  a pour équation  $y = 3x + 2$  : son coefficient directeur est 3. Donc

$$f'(0) = c = 3.$$

2. Le point  $B(1; 5)$  appartient à la courbe, donc

$$f(1) = a + b + c + d = 5.$$

En utilisant  $c = 3$  et  $d = 2$  cela donne

$$a + b + 3 + 2 = 5 \implies a + b = 0. \quad (1)$$

La tangente en  $x = 1$  a pour coefficient directeur 0, donc  $f'(1) = 0$ . Or

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0.$$

Avec  $c = 3$  on obtient

$$3a + 2b + 3 = 0. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) forment le système pour  $a$  et  $b$ .

3. Résolvons le système. De (1) on a  $b = -a$ . En remplaçant dans (2) :

$$3a + 2(-a) + 3 = 0 \implies 3a - 2a + 3 = 0 \implies a + 3 = 0,$$

d'où  $a = -3$ . Ensuite  $b = -a = 3$ .

Ainsi

$$(a, b, c, d) = (-3, 3, 3, 2)$$

et la fonction recherchée est

$$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$$

### Exercice 2

1. On dérive  $f$  en utilisant la formule de la dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{(a)(x-2) - (ax+b)(1)}{(x-2)^2}.$$

On simplifie :

$$f'(x) = \frac{ax - 2a - ax - b}{(x-2)^2} = \frac{-2a - b}{(x-2)^2}.$$

2. La courbe passe par  $P(3;5)$ , donc

$$f(3) = \frac{3a+b}{3-2} = 3a+b=5. \quad (1)$$

Le coefficient directeur de la tangente en  $x=3$  est  $-2$ , donc

$$f'(3) = -2.$$

Or d'après la formule obtenue :

$$f'(3) = \frac{-2a-b}{(3-2)^2} = -2a-b = -2. \quad (2)$$

On résout le système formé par (1) et (2) :

$$\begin{cases} 3a+b=5, \\ -2a-b=-2. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$a=3.$$

Puis, en remplaçant dans (1) :

$$3 \times 3 + b = 5 \quad \Rightarrow \quad b = -4.$$

3. On a donc  $a=3$  et  $b=-4$ , d'où :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2}.$$

On vérifie :

$$f(x) = \frac{3x-6+2}{x-2} = \frac{3(x-2)+2}{x-2} = 3 + \frac{2}{x-2}.$$

Autrement méthode :

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2} = \frac{3(x-2)+2}{x-2} = 3 + \frac{2}{x-2}.$$

On vérifie par l'inverse :

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x-2} = \frac{3(x-2)}{x-2} + \frac{2}{x-2} = \frac{3x-6+2}{x-2} = \frac{3x-4}{x-2}$$

Donc la forme est :

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x-2}, \quad x \neq 2.$$

## Exercice 3

La dérivée de  $f$  est

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

1. Les tangentes parallèles à la droite  $y = 3x + 1$  ont pour coefficient directeur 3. On résout donc

$$f'(x) = 3 \iff 3(x-1)(x-3) = 3.$$

Divisant par 3,

$$(x-1)(x-3) = 1.$$

Développons et ramenons au premier membre :

$$x^2 - 4x + 3 = 1 \iff x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Le discriminant vaut  $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$ . Les solutions sont

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Calculons les ordonnées correspondantes. Posons  $u = \sqrt{2}$ . Pour  $x_1 = 2 + u$ ,

$$x_1^2 = (2 + u)^2 = 6 + 4u,$$

$$x_1^3 = (2 + u)(6 + 4u) = 20 + 14u,$$

donc

$$f(x_1) = x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1 + 2 = (20 + 14u) - 6(6 + 4u) + 9(2 + u) + 2 = 4 - u.$$

Ainsi  $f(2 + \sqrt{2}) = 4 - \sqrt{2}$ .

De même, pour  $x_2 = 2 - \sqrt{2}$  on obtient  $f(x_2) = 4 + \sqrt{2}$ .

Les points cherchés sont donc

$$\boxed{M_1(2 + \sqrt{2}; 4 - \sqrt{2}) \quad \text{et} \quad M_2(2 - \sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})}.$$

2. Le milieu  $I$  du segment  $[M_1M_2]$  est

$$I\left(\frac{(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})}{2}; \frac{(4-\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})}{2}\right) = (2; 4).$$

Pour montrer que  $I$  est le centre de symétrie de la courbe, il suffit de vérifier que pour tout  $h \in \mathbb{R}$ ,

$$f(2 + h) + f(2 - h) = 2 \cdot 4 = 8,$$

ce qui signifie que les points  $(2 + h, f(2 + h))$  et  $(2 - h, f(2 - h))$  sont symétriques par rapport à  $I$ .

Évaluons  $f(2 + h) + f(2 - h)$ . Développons  $f(2 + t)$  en fonction de  $t$  :

$$\begin{aligned} f(2 + t) &= (2 + t)^3 - 6(2 + t)^2 + 9(2 + t) + 2 \\ &= (8 + 12t + 6t^2 + t^3) - 6(4 + 4t + t^2) + 18 + 9t + 2 \\ &= 8 + 12t + 6t^2 + t^3 - 24 - 24t - 6t^2 + 20 + 9t \\ &= (8 - 24 + 20) + (12 - 24 + 9)t + (6 - 6)t^2 + t^3 \\ &= 4 - t + t^3. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(2 + t) = 4 - t + t^3.$$

En remplaçant  $t$  par  $h$  et par  $-h$  :

$$f(2 + h) = 4 - h + h^3, \quad f(2 - h) = 4 - (-h) + (-h)^3 = 4 + h - h^3.$$

On en déduit

$$f(2 + h) + f(2 - h) = (4 - h + h^3) + (4 + h - h^3) = 8.$$

Donc  $f(2 + h)$  et  $f(2 - h)$  sont symétriques par rapport à  $I(2, 4)$  pour tout  $h$ , ce qui prouve que  $I$  est le centre de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

3. Le point d'inflexion d'une courbe est un point où  $f''$  s'annule et change de signe. Calculons

$$f''(x) = 6x - 12.$$

On a  $f''(x) = 0 \iff 6x - 12 = 0 \iff x = 2$ . L'ordonnée correspondante est

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 2 = 8 - 24 + 18 + 2 = 4.$$

Le point d'inflexion est donc  $(2, 4)$ , qui est exactement le milieu  $I$  trouvé précédemment. Ainsi le centre de symétrie de la courbe coïncide avec son point d'inflexion.

Centre de symétrie (et point d'inflexion) =  $(2, 4)$ .

## Exercice 4

Posons  $u(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ . Alors  $f(x) = u(x)^3$ . Par la règle de la chaîne,

$$f'(x) = 3u(x)^2 \cdot u'(x).$$

Calculons  $u'(x)$  (dérivée d'un quotient) :

$$u'(x) = \frac{(2)(x-3) - (2x+1)(1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \left( \frac{2x+1}{x-3} \right)^2 \cdot \frac{-7}{(x-3)^2} \\ &= -21 \frac{(2x+1)^2}{(x-3)^4}. \end{aligned}$$

$f'(x) = -21 \frac{(2x+1)^2}{(x-3)^4}, \quad x \neq 3.$

2. Cherchons les  $x$  tels que  $f'(x) = 0$ .

Une fraction rationnelle est nulle si et seulement si son numérateur est nul (et son dénominateur non nul). Ici le numérateur est  $-21(2x+1)^2$ . Comme  $-21 \neq 0$ , on a

$$(2x+1)^2 = 0 \iff 2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}.$$

Vérifions que ce point appartient au domaine de  $f$  :  $-\frac{1}{2} \neq 3$ , donc c'est acceptable.

$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$

Remarque :  $f'$  n'est pas définie en  $x = 3$  (point hors du domaine). La seule valeur de l'ensemble de définition où la dérivée s'annule est  $x = -\frac{1}{2}$ .

## Exercice 5

1. Le taux de variation de  $f$  entre 1 et  $1+h$  (pour  $h \neq 0$ ) est

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Calculons  $f(1)$  et  $f(1+h)$ . On a

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

et

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 2(1+h)^2 - 3(1+h) + 1 \\ &= 2(1+2h+h^2) - 3 - 3h + 1 \\ &= 2 + 4h + 2h^2 - 3 - 3h + 1 \\ &= h + 2h^2. \end{aligned}$$

Donc, pour  $h \neq 0$ ,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h + 2h^2 - 0}{h} = 1 + 2h.$$

2. La limite du taux de variation quand  $h \rightarrow 0$  est

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2h) = 1.$$

La limite existe finie, donc  $f$  est dérivable en 1 et

$$\boxed{f'(1) = 1.}$$

3. Vérification par les formules de dérivation. On dérive  $f$  :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^2 - 3x + 1) = 4x - 3.$$

En particulier,

$$f'(1) = 4 \cdot 1 - 3 = 1,$$

ce qui confirme le résultat précédent.

## Exercice 6

1. Le taux de variation de  $f$  entre  $x_0$  et  $x_0+h$  (pour  $h \neq 0$ ) s'écrit

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

2. Calculons  $f(x_0+h)$  :

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= (x_0+h)^2 + 2(x_0+h) \\ &= x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h) - (x_0^2 + 2x_0)}{h} \\ &= \frac{2x_0h + h^2 + 2h}{h} \\ &= 2x_0 + h + 2. \end{aligned}$$

Donc le taux de variation simplifié est

$$\boxed{2x_0 + 2 + h}.$$

3. La limite quand  $h \rightarrow 0$  est

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + 2 + h) = 2x_0 + 2.$$

Ceci est la dérivée  $f'(x_0)$ .

4. Pour que la tangente ait une pente égale à 6, il faut

$$2x_0 + 2 = 6 \implies 2x_0 = 4 \implies x_0 = 2.$$

L'abscisse recherchée est donc  $x_0 = 2$ . L'ordonnée correspondante est

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8,$$

et la tangente au point  $(2, 8)$  a bien pour pente 6.

$f'(x) = 2x + 2, \quad f'(2) = 6, \quad \text{point de tangence } (2, 8).$
--

## Exercice 7

1. **Calcul de  $f'(x)$ .** On applique la règle du quotient :

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 3)}{(x - 1)^2}.$$

En développant :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Ainsi :

$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}, \quad x \neq 1.$
---

2. **Recherche des points où  $f'(x) = -1$ .** On résout :

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = -1.$$

En multipliant par  $(x - 1)^2$  :

$$x^2 - 2x - 1 = -(x - 1)^2 = -(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1.$$

On obtient :

$$x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 2x - 1 \implies 2x^2 - 4x = 0.$$

Donc :

$$x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

3. **Équations des tangentes.** On calcule les points correspondants :

$$f(0) = \frac{0 - 0 + 3}{0 - 1} = -3, \quad f(2) = \frac{4 - 4 + 3}{2 - 1} = 3.$$

La pente vaut  $-1$  dans les deux cas.

Les tangentes s'écrivent donc :

$$\begin{cases} y = -x + b, \\ \text{avec } b = f(x_0) + x_0. \end{cases}$$

Pour  $x_0 = 0$  :  $b = -3 + 0 = -3 \implies y = -x - 3$ .

Pour  $x_0 = 2$  :  $b = 3 + 2 = 5 \implies y = -x + 5$ .

Tangente en $x = 0$ : $y = -x - 3$ et Tangente en $x = 2$ : $y = -x + 5$ .
--

**4. Parallélisme.** Les deux droites ont le même coefficient directeur  $-1$ , donc :

Les tangentes sont parallèles.

## Exercice 8

Les dérivées sont

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = -2x + 6.$$

1. Tangente à  $\mathcal{C}_f$  en  $x = a$  : équation point-pente

$$\Delta : y = f'(a)(x - a) + f(a) = 2a(x - a) + a^2.$$

En simplifiant,

$$y = 2ax - a^2.$$

2. Tangente à  $\mathcal{C}_g$  en  $x = b$  : équation

$$\Delta : y = g'(b)(x - b) + g(b) = (-2b + 6)(x - b) + (-b^2 + 6b - 5).$$

En développant et en regroupant les termes constants :

$$(-2b + 6)(x - b) = (-2b + 6)x + (2b^2 - 6b),$$

donc

$$y = (-2b + 6)x + (2b^2 - 6b) + (-b^2 + 6b - 5) = (-2b + 6)x + b^2 - 5.$$

Ainsi

$$y = (-2b + 6)x + b^2 - 5.$$

3. Pour que les deux expressions donnent la même droite il faut évaluer les coefficients en  $x$  et les termes constants :

$$\begin{cases} 2a = -2b + 6, \\ -a^2 = b^2 - 5. \end{cases}$$

On peut réécrire le système de façon plus simple :

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

4. Résolvons le système. Posons  $b = 3 - a$ . Alors

$$a^2 + (3 - a)^2 = 5 \implies a^2 + 9 - 6a + a^2 = 5,$$

donc

$$2a^2 - 6a + 4 = 0 \implies a^2 - 3a + 2 = 0.$$

On factorise :

$$(a - 1)(a - 2) = 0,$$

donc  $a = 1$  ou  $a = 2$ . Les valeurs correspondantes de  $b$  sont  $b = 2$  et  $b = 1$ .

On obtient donc deux solutions symétriques :

— Pour  $a = 1$ ,  $b = 2$  la tangente est

$$y = 2ax - a^2 = 2x - 1.$$

Vérification rapide : pour  $b = 2$ ,  $-2b + 6 = -4 + 6 = 2$  et  $b^2 - 5 = 4 - 5 = -1$ , donc la même droite.

— Pour  $a = 2$ ,  $b = 1$  la tangente est

$$y = 2ax - a^2 = 4x - 4.$$

Vérification : pour  $b = 1$ ,  $-2b + 6 = -2 + 6 = 4$  et  $b^2 - 5 = 1 - 5 = -4$ .

Donc il y a deux tangentes communes :  $y = 2x - 1$  et  $y = 4x - 4$ .

5. Vérifications numériques (aux points de tangence) :

Pour la droite  $y = 2x - 1$  :

— Point de tangence avec  $f$  :  $a = 1$ .  $f(1) = 1$  et la droite en  $x = 1$  vaut  $2 \cdot 1 - 1 = 1$ . De plus  $f'(1) = 2$  est bien la pente.

— Point de tangence avec  $g$  :  $b = 2$ .  $g(2) = -4 + 12 - 5 = 3$  et la droite en  $x = 2$  vaut  $2 \cdot 2 - 1 = 3$ . De plus  $g'(2) = -4 + 6 = 2$ .

Pour la droite  $y = 4x - 4$  :

— Point de tangence avec  $f$  :  $a = 2$ .  $f(2) = 4$  et la droite en  $x = 2$  vaut  $4 \cdot 2 - 4 = 4$ . De plus  $f'(2) = 4$ .

— Point de tangence avec  $g$  :  $b = 1$ .  $g(1) = -1 + 6 - 5 = 0$  et la droite en  $x = 1$  vaut  $4 \cdot 1 - 4 = 0$ . De plus  $g'(1) = -2 + 6 = 4$ .

Ces vérifications confirment que les deux droites sont bien tangentes simultanément aux deux courbes aux abscisses trouvées.