

Révision sur les dérivées (Correction)

Mardi 11 novembre 2025

Exercice 1

La dérivée de f est

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

- Le fait que la courbe passe par $A(0; 2)$ donne

$$f(0) = d = 2.$$

La tangente en $x = 0$ a pour équation $y = 3x + 2$: son coefficient directeur est 3. Donc

$$f'(0) = c = 3.$$

- Le point $B(1; 5)$ appartient à la courbe, donc

$$f(1) = a + b + c + d = 5.$$

En utilisant $c = 3$ et $d = 2$ cela donne

$$a + b + 3 + 2 = 5 \implies a + b = 0. \quad (1)$$

La tangente en $x = 1$ a pour coefficient directeur 0, donc $f'(1) = 0$. Or

$$f'(1) = 3a + 2b + c = 0.$$

Avec $c = 3$ on obtient

$$3a + 2b + 3 = 0. \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) forment le système pour a et b .

- Résolvons le système. De (1) on a $b = -a$. En remplaçant dans (2) :

$$3a + 2(-a) + 3 = 0 \implies 3a - 2a + 3 = 0 \implies a + 3 = 0,$$

d'où $a = -3$. Ensuite $b = -a = 3$.

Ainsi

$$(a, b, c, d) = (-3, 3, 3, 2)$$

et la fonction recherchée est

$$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$$

Exercice 2

- On dérive f en utilisant la formule de la dérivée d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{(a)(x-2) - (ax+b)(1)}{(x-2)^2}.$$

On simplifie :

$$f'(x) = \frac{ax - 2a - ax - b}{(x-2)^2} = \frac{-2a - b}{(x-2)^2}.$$

2. La courbe passe par $P(3; 5)$, donc

$$f(3) = \frac{3a + b}{3 - 2} = 3a + b = 5. \quad (1)$$

Le coefficient directeur de la tangente en $x = 3$ est -2 , donc

$$f'(3) = -2.$$

Or d'après la formule obtenue :

$$f'(3) = \frac{-2a - b}{(3 - 2)^2} = -2a - b = -2. \quad (2)$$

On résout le système formé par (1) et (2) :

$$\begin{cases} 3a + b = 5, \\ -2a - b = -2. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations :

$$a = 3.$$

Puis, en remplaçant dans (1) :

$$3 \times 3 + b = 5 \Rightarrow b = -4.$$

3. On a donc $a = 3$ et $b = -4$, d'où :

$$f(x) = \frac{3x - 4}{x - 2}.$$

On vérifie :

$$f(x) = \frac{3x - 6 + 2}{x - 2} = \frac{3(x - 2) + 2}{x - 2} = 3 + \frac{2}{x - 2}.$$

Autrement méthode :

$$f(x) = \frac{3x - 4}{x - 2} = \frac{3(x - 2) + 2}{x - 2} = 3 + \frac{2}{x - 2}.$$

On vérifie par l'inverse :

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x - 2} = \frac{3(x - 2)}{x - 2} + \frac{2}{x - 2} = \frac{3x - 6 + 2}{x - 2} = \frac{3x - 4}{x - 2}$$

Donc la forme est :

$$f(x) = 3 + \frac{2}{x - 2}, \quad x \neq 2.$$

Exercice 3

La dérivée de f est

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

1. Les tangentes parallèles à la droite $y = 3x + 1$ ont pour coefficient directeur 3. On résout donc

$$f'(x) = 3 \iff 3(x-1)(x-3) = 3.$$

Divisant par 3,

$$(x-1)(x-3) = 1.$$

Développons et ramenons au premier membre :

$$x^2 - 4x + 3 = 1 \iff x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Le discriminant vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$. Les solutions sont

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Calculons les ordonnées correspondantes. Posons $u = \sqrt{2}$. Pour $x_1 = 2 + u$,

$$\begin{aligned} x_1^2 &= (2+u)^2 = 6+4u, \\ x_1^3 &= (2+u)(6+4u) = 20+14u, \end{aligned}$$

donc

$$f(x_1) = x_1^3 - 6x_1^2 + 9x_1 + 2 = (20+14u) - 6(6+4u) + 9(2+u) + 2 = 4-u.$$

Ainsi $f(2+\sqrt{2}) = 4-\sqrt{2}$.

De même, pour $x_2 = 2 - \sqrt{2}$ on obtient $f(x_2) = 4 + \sqrt{2}$.

Les points cherchés sont donc

$$M_1(2+\sqrt{2}; 4-\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad M_2(2-\sqrt{2}; 4+\sqrt{2}).$$

2. Le milieu I du segment $[M_1M_2]$ est

$$I\left(\frac{(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})}{2}; \frac{(4-\sqrt{2})+(4+\sqrt{2})}{2}\right) = (2; 4).$$

Pour montrer que I est le centre de symétrie de la courbe, il suffit de vérifier que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$f(2+h) + f(2-h) = 2 \cdot 4 = 8,$$

ce qui signifie que les points $(2+h, f(2+h))$ et $(2-h, f(2-h))$ sont symétriques par rapport à I .

Évaluons $f(2+h) + f(2-h)$. Développons $f(2+t)$ en fonction de t :

$$\begin{aligned} f(2+t) &= (2+t)^3 - 6(2+t)^2 + 9(2+t) + 2 \\ &= (8+12t+6t^2+t^3) - 6(4+4t+t^2) + 18+9t+2 \\ &= 8+12t+6t^2+t^3-24-24t-6t^2+20+9t \\ &= (8-24+20)+(12-24+9)t+(6-6)t^2+t^3 \\ &= 4-t+t^3. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f(2+t) = 4-t+t^3.$$

En remplaçant t par h et par $-h$:

$$f(2+h) = 4-h+h^3, \quad f(2-h) = 4-(-h)+(-h)^3 = 4+h-h^3.$$

On en déduit

$$f(2+h) + f(2-h) = (4-h+h^3) + (4+h-h^3) = 8.$$

Donc $f(2+h)$ et $f(2-h)$ sont symétriques par rapport à $I(2, 4)$ pour tout h , ce qui prouve que I est le centre de symétrie de la courbe \mathcal{C}_f .

3. Le point d'inflexion d'une courbe est un point où f'' s'annule et change de signe. Calculons

$$f''(x) = 6x - 12.$$

On a $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$. L'ordonnée correspondante est

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 2 = 8 - 24 + 18 + 2 = 4.$$

Le point d'inflexion est donc $(2, 4)$, qui est exactement le milieu I trouvé précédemment. Ainsi le centre de symétrie de la courbe coïncide avec son point d'inflexion.

Centre de symétrie (et point d'inflexion) = $(2, 4)$.

Exercice 4

Posons $u(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. Alors $f(x) = u(x)^3$. Par la règle de la chaîne,

$$f'(x) = 3u(x)^2 \cdot u'(x).$$

Calculons $u'(x)$ (dérivée d'un quotient) :

$$u'(x) = \frac{(2)(x-3) - (2x+1)(1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-1}{(x-3)^2} = \frac{-7}{(x-3)^2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)^2 \cdot \frac{-7}{(x-3)^2} \\ &= -21 \frac{(2x+1)^2}{(x-3)^4}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = -21 \frac{(2x+1)^2}{(x-3)^4}, \quad x \neq 3.$$

2. Cherchons les x tels que $f'(x) = 0$.

Une fraction rationnelle est nulle si et seulement si son numérateur est nul (et son dénominateur non nul). Ici le numérateur est $-21(2x+1)^2$. Comme $-21 \neq 0$, on a

$$(2x+1)^2 = 0 \iff 2x+1 = 0 \implies x = -\frac{1}{2}.$$

Vérifions que ce point appartient au domaine de $f : -\frac{1}{2} \neq 3$, donc c'est acceptable.

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{2}.$$

Remarque : f' n'est pas définie en $x = 3$ (point hors du domaine). La seule valeur de l'ensemble de définition où la dérivée s'annule est $x = -\frac{1}{2}$.

Exercice 5

1. Le taux de variation de f entre 1 et $1+h$ (pour $h \neq 0$) est

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Calculons $f(1)$ et $f(1+h)$. On a

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

et

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 2(1+h)^2 - 3(1+h) + 1 \\ &= 2(1+2h+h^2) - 3 - 3h + 1 \\ &= 2 + 4h + 2h^2 - 3 - 3h + 1 \\ &= h + 2h^2. \end{aligned}$$

Donc, pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h + 2h^2 - 0}{h} = 1 + 2h.$$

2. La limite du taux de variation quand $h \rightarrow 0$ est

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + 2h) = 1.$$

La limite existe finie, donc f est dérivable en 1 et

$$f'(1) = 1.$$

3. Vérification par les formules de dérivation. On dérive f :

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(2x^2 - 3x + 1) = 4x - 3.$$

En particulier,

$$f'(1) = 4 \cdot 1 - 3 = 1,$$

ce qui confirme le résultat précédent.

Exercice 6

1. Le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$ (pour $h \neq 0$) s'écrit

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

2. Calculons $f(x_0 + h)$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= (x_0 + h)^2 + 2(x_0 + h) \\ &= x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h) - (x_0^2 + 2x_0)}{h} \\ &= \frac{2x_0h + h^2 + 2h}{h} \\ &= 2x_0 + h + 2. \end{aligned}$$

Donc le taux de variation simplifié est

$$2x_0 + 2 + h.$$

3. La limite quand $h \rightarrow 0$ est

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + 2 + h) = 2x_0 + 2.$$

Ceci est la dérivée $f'(x_0)$.

4. Pour que la tangente ait une pente égale à 6, il faut

$$2x_0 + 2 = 6 \implies 2x_0 = 4 \implies x_0 = 2.$$

L'abscisse recherchée est donc $x_0 = 2$. L'ordonnée correspondante est

$$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8,$$

et la tangente au point $(2, 8)$ a bien pour pente 6.

$$f'(x) = 2x + 2, \quad f'(2) = 6, \quad \text{point de tangence } (2, 8).$$

Exercice 7

1. Calcul de $f'(x)$. On applique la règle du quotient :

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 3)}{(x - 1)^2}.$$

En développant :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}.$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}, \quad x \neq 1.$$

2. Recherche des points où $f'(x) = -1$. On résout :

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2} = -1.$$

En multipliant par $(x - 1)^2$:

$$x^2 - 2x - 1 = -(x - 1)^2 = -(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1.$$

On obtient :

$$x^2 - 2x - 1 = -x^2 + 2x - 1 \implies 2x^2 - 4x = 0.$$

Donc :

$$x(x - 2) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

3. Équations des tangentes. On calcule les points correspondants :

$$f(0) = \frac{0 - 0 + 3}{0 - 1} = -3, \quad f(2) = \frac{4 - 4 + 3}{2 - 1} = 3.$$

La pente vaut -1 dans les deux cas.

Les tangentes s'écrivent donc :

$$\begin{cases} y = -x + b, \\ \text{avec } b = f(x_0) + x_0. \end{cases}$$

Pour $x_0 = 0$: $b = -3 + 0 = -3 \Rightarrow y = -x - 3$.

Pour $x_0 = 2$: $b = 3 + 2 = 5 \Rightarrow y = -x + 5$.

$$\boxed{\text{Tangente en } x = 0 : y = -x - 3 \quad \text{et} \quad \text{Tangente en } x = 2 : y = -x + 5.}$$

4. Parallélisme. Les deux droites ont le même coefficient directeur -1 , donc :

Les tangentes sont parallèles.

Exercice 8

Les dérivées sont

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = -2x + 6.$$

1. Tangente à \mathcal{C}_f en $x = a$: équation point-pente

$$\Delta : y = f'(a)(x - a) + f(a) = 2a(x - a) + a^2.$$

En simplifiant,

$y = 2ax - a^2$.

2. Tangente à \mathcal{C}_g en $x = b$: équation

$$\Delta : y = g'(b)(x - b) + g(b) = (-2b + 6)(x - b) + (-b^2 + 6b - 5).$$

En développant et en regroupant les termes constants :

$$(-2b + 6)(x - b) = (-2b + 6)x + (2b^2 - 6b),$$

donc

$$y = (-2b + 6)x + (2b^2 - 6b) + (-b^2 + 6b - 5) = (-2b + 6)x + b^2 - 5.$$

Ainsi

$y = (-2b + 6)x + b^2 - 5$.

3. Pour que les deux expressions donnent la même droite il faut égaler les coefficients en x et les termes constants :

$$\begin{cases} 2a = -2b + 6, \\ -a^2 = b^2 - 5. \end{cases}$$

On peut réécrire le système de façon plus simple :

$$\begin{cases} a + b = 3, \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

4. Résolvons le système. Posons $b = 3 - a$. Alors

$$a^2 + (3 - a)^2 = 5 \implies a^2 + 9 - 6a + a^2 = 5,$$

donc

$$2a^2 - 6a + 4 = 0 \implies a^2 - 3a + 2 = 0.$$

On factorise :

$$(a - 1)(a - 2) = 0,$$

donc $a = 1$ ou $a = 2$. Les valeurs correspondantes de b sont $b = 2$ et $b = 1$.

- On obtient donc deux solutions symétriques :
- Pour $a = 1$, $b = 2$ la tangente est

$$y = 2ax - a^2 = 2x - 1.$$

Vérification rapide : pour $b = 2$, $-2b + 6 = -4 + 6 = 2$ et $b^2 - 5 = 4 - 5 = -1$, donc la même droite.

- Pour $a = 2$, $b = 1$ la tangente est

$$y = 2ax - a^2 = 4x - 4.$$

Vérification : pour $b = 1$, $-2b + 6 = -2 + 6 = 4$ et $b^2 - 5 = 1 - 5 = -4$.

Donc il y a deux tangentes communes : $y = 2x - 1$ et $y = 4x - 4$.

5. Vérifications numériques (aux points de tangence) :

Pour la droite $y = 2x - 1$:

- Point de tangence avec f : $a = 1$. $f(1) = 1$ et la droite en $x = 1$ vaut $2 \cdot 1 - 1 = 1$. De plus $f'(1) = 2$ est bien la pente.
- Point de tangence avec g : $b = 2$. $g(2) = -4 + 12 - 5 = 3$ et la droite en $x = 2$ vaut $2 \cdot 2 - 1 = 3$. De plus $g'(2) = -4 + 6 = 2$.

Pour la droite $y = 4x - 4$:

- Point de tangence avec f : $a = 2$. $f(2) = 4$ et la droite en $x = 2$ vaut $4 \cdot 2 - 4 = 4$. De plus $f'(2) = 4$.
- Point de tangence avec g : $b = 1$. $g(1) = -1 + 6 - 5 = 0$ et la droite en $x = 1$ vaut $4 \cdot 1 - 4 = 0$. De plus $g'(1) = -2 + 6 = 4$.

Ces vérifications confirment que les deux droites sont bien tangentes simultanément aux deux courbes aux abscisses trouvées.