«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет: Информатика и системы управления

Кафедра: ИУ7

Цифровая обработка сигналов

Студент группы ИУ7-83Б,

Степанов Александр

Преподаватель:

Филиппов Михаил Владимирович

2021 г.

Содержание

§1 Список литературы

1. Р. Гонсалес, Р. Вудс «Цифровая обработка изображений»

2. А. Оппенгейм, Р. Шафер «Цифровая обработка сигналов»

3. Н. Красильников «Цифровая обработка 2D и 3D изображений»

§2 Элементы теории сигналов

Сигнал – под сигналом понимается физический процесс отображающий сообщения и служащий для его передачи по каналу связи.

2.1 Классификация

2.1.1 Критерии классификации

— множество значений, которые может принимать сигнал

— множество значений, которые принимают аргументы этого сигнала

В общем случае сигнал описывается функцией

$$U(x, y, z, t)$$

1. Пространственный и временной
2. Финитный и инфинитный
3. Аналоговый и цифровой:
   - Дискретный (аргументы не являются непрерывными, последовательность значений)
   - Квантованный (аргументы конечные и дискретные)
4. Детерминированный и случайный

§3 Математичское представление сигналов

$$U = U_{R_e} + iU_{im}, i \text{ – мнимая единица}$$

3.1 Формула Эйлера

$$U = \underbrace{U_0}_{\text{амплитуда}} e^{i \underbrace{\varphi}_{\text{фаза}}}$$

$$|U|^2 \text{ – интенсивность}$$

3.2 Основные свойства

1. Степень отличия 2-х сигналов

   — среднеквадратичное отклонение

$$d = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} | U_1(x_i) - U_2(x_i) |^2}$$

   — максимальное отклонение

$$d = \max_{i=0,1,\dots,N-1} | U_1(x_i) - U_2(x_i) |$$

   — PSNR – пиковое отношение «сигнал/шум»

   Для изображений:

$$d = \lg \frac{255^2 N^2}{\sum_{i,j=0}^{N-1} | U_{1_{ij}} - U_{2_{ij}} |^2}$$

   — визуальный критерий

2. Принцип суперпозиции – результат действия двух или более сигналов равен их геометрической сумме

$$U = U_1 + U_2$$

$$U \neq \mid U_1 \mid^2 + \mid U_2 \mid^2$$

3. Разложение по базисным функциям

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \varphi_k$$

φ_k – базисные функции

U_k – коэффициент разложения

3.3 Дискретиация сигналов

Дискретизация сигналов – это замена непрерывного сигнала последовательностью чисел, называемых отсчетами, являющийся представлением этого сигнала по некоторому базису.

3.3.1 Теорема Котельникова

Сигналы, сперкт Фурье которых равен нулю за пределами интервала $(-F; F)$, могут быть точно восстановлены по своим отсчетам взятым с шагом $\Delta t = \frac{1}{2F}$ по следующей формуле

$$U(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(k\Delta t) \operatorname{sinc}\left(2\pi F\left(t - \frac{k}{2F}\right)\right)$$

$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ – функция отсчета

Спектр Фурье

$$U(t) : V(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \exp(-2\pi i f t) dt \text{ – преобразования Фурье}$$

f – частота

1. Муар-эффект $[-F, F]$

2. Строб-эффект (Фильтрация с использованием «окон»)

3.3.2 Примеры

1. Окно Хэннинга

$$w(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi \frac{f}{F})), \text{ при } \mid f \mid \leq F \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

2. Окно Кайзера

$$w(f) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha\sqrt{1-(\frac{f}{F})^2})}{I_0(\alpha)}, \mid f \mid \leq F \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

I_0 – модифицируемая функция Бесселя

3.4 Квантование

$$\varepsilon_1 = \mid u - \tilde{u}_1 \mid$$

Функция потерь $D(\varepsilon_1)$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \int_{u_{i-1}}^{u_i} p(u) D(\varepsilon) du \to \min$$

Предискажение сигнала – прежде чем выполнять операцию квантования мы подвергаем сигнал некоторому преобразованию.

$$\tilde{u} = w(u)$$

$$D(\Delta_i); \Delta_i = u_i - u_{i-1}$$

$$D(\Delta_i) = \begin{cases} 1, \mid \Delta_i \mid \leq \Delta_{\text{пор}} \\ 0, \mid \Delta_i \mid > \Delta_{\text{пор}} \end{cases}$$

3.4.1 Закон Вебера-Фенера (для изображений)

$$\Delta_{\text{пор}} = \delta_0 \cdot u$$

$$\frac{w(u) - w(u_{\min})}{w(u_{\max}) - w(u_{\min})} = \frac{\ln\left(\frac{u}{u_{\min}}\right)}{\ln q}, \quad q = \frac{u_{\max}}{u_{\min}}$$

$$N = \frac{\ln q}{\delta_0} \approx 230 - 240$$

§4 Преобразование сигналов

4.1 Спектральные преобразования

4.1.1 Преобразование Фурье

$$v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-2\pi ift}dt$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(f)e^{2\pi ift}df$$

Теорема о свертке

Имеются функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ тогда **сверткой** этих функций будет $w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t')u_2(t-t')dt'$

Фурье-образ свертки равен произведению фурье-образов свертываемых функций.

$$\overline{w}(f) = F(w(t))$$

$v_1(t)$ и $v_2(t)$ – $F(u_1)$ и $F(u_2)$

$$\tilde{w}(f) = v_1(f)v_2(f)$$

4.1.2 Преобразование Уолша

Функция Уолша

$$u_\alpha(z) = (-1)^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}$$

$$0 \le z \le 1, z = \sum_{k=1}^{n} z_k 2^{-k}, z_k = 0, 1$$

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 2^{k-1}$$

4.2 Линейные фильтры

$$u_{\text{вых}} = \underbrace{T}_{\text{линейный оператор}} u_{\text{вх}}(t)$$

Фильтр называется **линейным** если для него выполняется следующее условие

$$T(\alpha u_{\text{вх}_1} + \beta u_{\text{вх}_2}) = \alpha u_{\text{вых}_1} + \beta u_{\text{вых}_2}$$

Преобразование инвариантное к сдвигу

$$T(u_{\text{вх}}(t-\tau)) = u_{\text{вых}}(t-\tau)$$

ЛИС-преобразования (линейные преобразования инвариентные к сдвигу)

S-функция (Дирак) была введена для описания точечных объектов.

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, x = 0 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Фильтрующее свойство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\delta(x - x_0) dx = u(x_0)$$

§5 Лабораторные работы

5.1 Лабораторная работа 1

Дискретизация типовых сигналов

1. Прямоугольный импульс

$$u(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 1, \mid x \mid \leq 1 \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

2. Функция Гаусса

$$u(x) = Ae^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

Два типовых сигнала: нужно сделать дискретизацию (получить набора значений в точках), а затем восстановить этот сигна по теореме Котельникова. Построить два графика: исходный сигнал, что получится в результате восстановления.