



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

## **Домашнее работа №2**

Дисциплина Логика и теория алгоритмов

Тема Математическая логика

Вариант 20

Преподаватель Белоусов Алексей Иванович

Москва — 2020 г.

## Задание №3

### Условие:

Доказать в исчислении высказываний (буквы обозначают произвольные формулы):

$$(\neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)) \equiv A \vee (B \vee C)$$

### Решение:

Преобразуем правую часть формулы, используя определение дизъюнкции  
 $\varphi \vee \psi \equiv \neg \varphi \rightarrow \psi$  :

$$A \vee (B \vee C) = \neg A \rightarrow (B \vee C) = \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$$

Для доказательства эквивалентности необходимо доказать вывод в обе стороны:

- 1)  $\neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C$
- 2)  $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash \neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$

1) Доказательство вывода правой части формулы из левой

$$\neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C$$

Согласно теореме дедукции, достаточно доказать, что

$$\neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B), \neg(\neg A \rightarrow B) \vdash C$$

1.	$\neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$	гипотеза 1
2.	$\neg(\neg A \rightarrow B)$	гипотеза 2
3.	$(\neg A \& \neg B) \rightarrow C$	правило контрапозиции для (1)
4.	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	секвенция 5
5.	$\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg A$	правило обратной контрапозиции для (4)
6.	$\neg A$	Modus ponens для (5) и (2)
7.	$B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	аксиома 1
8.	$\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg B$	правило обратной контрапозиции для (7)
9.	$\neg B$	Modus ponens для (8) и (2)

R<sub>7</sub>(1)

R<sub>7</sub>(4)

R<sub>7</sub>(7)

10.	$\neg A \& \neg B$	свойство конъюнкции для (6), (9)
11.	$C$	Modus ponens для (3) и (10) <span style="color: green;">(10/10)</span>

Теперь так как доказан вывод  $\neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B), \neg(\neg A \rightarrow B) \vdash C$ , то используем теорему дедукции и получим, что  $\neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B) \vdash \neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C$ .

2) Доказательство вывода левой части формулы из правой

$$\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash \neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$$

Согласно теореме дедукции, достаточно доказать, что

$$\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C, \neg C \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$$

1.	$\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C$	гипотеза 1
2.	$\neg C$	гипотеза 2
3.	$\neg C \rightarrow \neg\neg(\neg A \rightarrow B)$	правило обратной контрапозиции для (1)
4.	$\neg\neg(\neg A \rightarrow B)$	Modus ponens для (3) и (2)
5.	$\neg A \rightarrow B$	правило снятия двойного отрицания для (4)
6.	$B \rightarrow \neg\neg B$	секвенция 4
7.	$\neg A \rightarrow \neg\neg B$	секвенция 1 для (5) и (6)
8.	$\neg\neg(\neg A \rightarrow \neg\neg B)$	правило введения двойного отрицания для (7)
9.	$\neg(\neg A \& \neg B)$	отрицание конъюнкции для (8)

R2(1)  
R3(4)  
R4(7)

Вновь используя теорему дедукции для вывода  $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C, \neg C \vdash \neg(\neg A \& \neg B)$ , получаем, что  $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C \vdash \neg C \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$ .

Доказательство проведено в обе стороны, следовательно доказана требуемая эквивалентность.