Семинар №6. Задача о путях в размеченных орграфах

(теоретический материал в пар. 5.6)

Чтобы вычислить j-й столбец матрицы стоимостей, надо решить систему линейных уравнений в полукольце, над которым размечен граф, основная матрица которой есть матрица меток дуг графа, где в j-м уравнении в правой части добавляется слагаемое «единица полукольца» (не число 1, а единица данного полукольца!), то есть решить систему

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x_j = a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jj}x_j + \ldots + a_{jn}x_n + 1 \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$1 \le j \le n.$

Это следует из того, что матрица стоимостей, равная итерации матрицы меток дуг, есть решение матричного уравнения (в полукольце матриц над исходным полукольцом разметки графа)

$$X = AX + E \ ,$$

имеющее вид

$$X = A^*E = A^* = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \ ,$$

где A – матрица меток дуг, а E – единичная матрица.

Матрица стоимостей $C = A^*$ вычисляется последовательно по столбцам, и матрично-векторное уравнение относительно j-го столбца этой матрицы имеет вид:

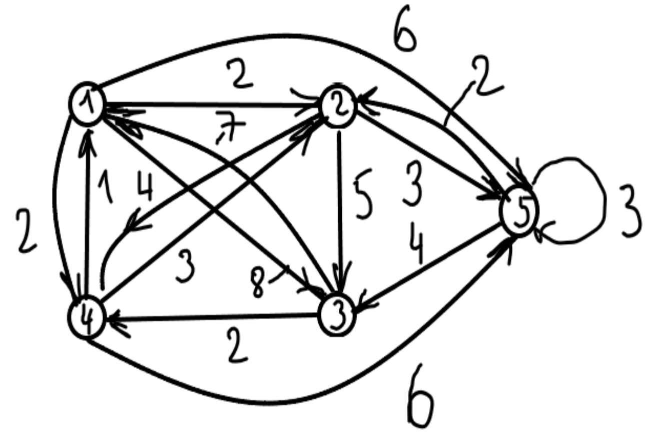
$$\xi_j = A\xi_j + \varepsilon_j, 1 \le j \le n \ ,$$

где ε_j - j-й столбец единичной матрицы, у которого все компоненты, кроме j-й, равны 0 полукольца, а j-я равна единице полукольца.

Полагая $\xi_j = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)^T$ (столбец неизвестных) и расписывая матрично-векторное уравнение по строкам, получим систему, показанную выше. Она решается методом последовательного исключения неизвестных с использованием дополнительных приемов, обусловленных спецификой полукольца и конкретной задачи.

Задача №1. Разметка над полукольцом R^+

Граф:



Матрица меток дуг:

$$A = \begin{pmatrix} +\infty & 2 & 8 & 2 & 6 \\ +\infty & +\infty & 5 & 4 & 3 \\ 7 & +\infty & +\infty & 2 & +\infty \\ 1 & 3 & +\infty & +\infty & 6 \\ +\infty & 2 & 4 & +\infty & 3 \end{pmatrix}$$

1 столбец

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 6\cdot x_5 + 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 = 5\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 3\cdot x_5 \\ x_3 = 7\cdot x_1 + 2\cdot x_4 \\ x_4 = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 6\cdot x_5 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 5\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 3\cdot x_5 \\ x_3 = 2\cdot x_4 + 7 \Rightarrow x_3 = 2\cdot 1 + 7 = 3 \\ x_4 = 3\cdot x_2 + 6\cdot x_5 + 1 \Rightarrow x_4 = 1 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3\cdot x_5 + 5 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 3\cdot x_5 + 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3\cdot x_5 + 5 \\ x_5 = 2\cdot (3\cdot x_5 + 5) + 3\cdot x_5 + 7 \end{cases}$$

$$x_5 = 3\cdot x_5 + 7$$

$$x_5 = 7, x_2 = 5$$

Итак, 1 столбец матрицы стоимостей определился как

$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ Следует обратить внимание на 3-й элемент: он показывает, что обходной путь из 3-й вершины в 1-ю короче прямого: 3<7.

2 столбец

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 6\cdot x_5 \\ x_2 = 5\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 3\cdot x_5 + 0 \Rightarrow x_2 = 0 \\ x_3 = 7\cdot x_1 + 2\cdot x_4 \\ x_4 = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 6\cdot x_5 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 6\cdot x_5 + 2 \\ x_3 = 7\cdot x_1 + 2\cdot x_4 \\ x_4 = 1\cdot x_1 + 6\cdot x_5 + 3 \\ x_5 = 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 + 2 \end{cases}$$

$$x_1 = 2, x_5 = 2, x_4 = 3, x_3 = 5$$

Итак, 2 столбец:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 столбец

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 6\cdot x_5 \\ x_2 = 5\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 3\cdot x_5 \\ x_3 = 7\cdot x_1 + 2\cdot x_4 + 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_4 = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 6\cdot x_5 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot x_2 + 2\cdot x_4 + 6\cdot x_5 + 8 \\ x_2 = 4\cdot x_4 + 3\cdot x_5 + 5 \\ x_4 = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 6\cdot x_5 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 3\cdot x_5 + 4 \end{cases}$$

Из последнего уравнения исключаем x_5:

$$x_5 = 2 \cdot x_2 + 4$$

Подставляем это выражение в остальные уравнения:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_4 + 6 \cdot (2 \cdot x_2 + 4) + 8 \\ x_2 = 4 \cdot x_4 + 3 \cdot (2 \cdot x_2 + 4) + 5 \\ x_4 = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \cdot (2 \cdot x_2 + 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_4 + 8 \\ x_2 = 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_4 + 5 \\ x_4 = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 10 \end{cases}$$

$$x_2 = 5,$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot x_4 + 7 \\ x_4 = 1 \cdot x_1 + 8 \end{cases}$$

$$x_1 = 2(1 \cdot x_1 + 8) + 7$$

$$x_1 = 3 \cdot x_1 + 7$$

$$x_1 = 7, x_4 = 8, x_5 = 4$$

Имеем 3 столбец:

$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ Здесь также первый элемент показывает, что обходной путь из 1-й вершины в 3-ю короче прямого: 7<8.

4 столбец

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 6\cdot x_5 \\ x_2 = 5\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 3\cdot x_5 \\ x_3 = 7\cdot x_1 + 2\cdot x_4 \\ x_4 = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 6\cdot x_5 + 0 \Rightarrow x_4 = 0 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 6\cdot x_5 + 2 \\ x_2 = 5\cdot x_3 + 3\cdot x_5 + 4 \\ x_3 = 7\cdot x_1 + 2 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 \end{cases}$$

$x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 2$

Получаем уравнение для x_5:

$x_5 = 3\cdot x_5 + 6$.

Решая его, получаем $x_5 = 6$.

Итак, 4 столбец:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

5 столбец

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 6\cdot x_5 \\ x_2 = 5\cdot x_3 + 4\cdot x_4 + 3\cdot x_5 \\ x_3 = 7\cdot x_1 + 2\cdot x_4 \\ x_4 = 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 6\cdot x_5 \\ x_5 = 2\cdot x_2 + 4\cdot x_3 + 3\cdot x_5 + 0 \Rightarrow x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 6 \\ x_2 = 5 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 3 \\ x_3 = 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_4 \\ x_4 = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 6 \end{cases}$$

Сразу можно сказать, что $x_2 = 3$.

Подставляя это значение в правые части остальных уравнений, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 5 \\ x_3 = 7 \cdot x_1 + 2 \cdot x_4 \\ x_4 = 1 \cdot x_1 + 6 \end{cases}$$

Теперь разумно исключить x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \cdot x_3 + 2 \cdot (1 \cdot x_1 + 6) + 5 \\ x_3 = 7 \cdot x_1 + 2 \cdot (1 \cdot x_1 + 6) \end{cases}$$

Приводя подобные члены в правых частях, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot x_1 + 8 \cdot x_3 + 5 \\ x_3 = 3 \cdot x_1 + 8 \end{cases}$$

Из первого уравнения, с учетом удаления «рекурсивного» слагаемого, сразу получим $x_1 = 5$. Сразу заметим, что также оказалось, что обходной путь из 1-й вершины в 5-ю (через 2-ю) оказался короче прямого: 5<6.

Тогда очевидно, что $x_3 = 8, x_4 = 6$.

Запишем полную матрицу стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

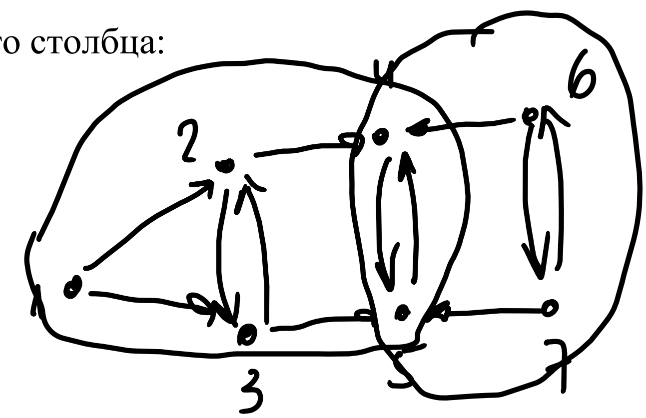
Заметим, что, если в этой матрице каждое обычное число (включая 0) заменить единицей, а $+\infty$ нулем, то получим матрицу достижимости нашего графа. В данном случае она оказывается полностью заполненной единицами, что означает сильную связность графа. Подчеркнем также несимметричность матрицы стоимостей, то есть кратчайшее расстояние от i-й вершины до j-й не равно в общем случае расстоянию от j-й до i-й. Например, в этом конкретном случае $c_{12} = 2, c_{21} = 5; c_{13} = 7, c_{31} = 3$ и т.д. Вообще может оказаться, что в какую-то достижимости нет, то есть соответствующий элемент матрицы равен $+\infty$.

Задача №2. Разметка над полукольцом B.

При такой разметке матрица стоимостей есть матрица достижимости.

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 5.9 Учебника (стр. 286).

Запишем систему для вычисления 1-го столбца:



$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 + x_4 \\ x_3 = x_2 + x_5 \\ x_4 = x_5 \\ x_5 = x_4 \\ x_6 = x_4 + x_7 \\ x_7 = x_5 + x_6 \end{cases}$$

Тогда $x_1 = 1$.

Дальше смотрим, есть ли где-нибудь неизвестная x_1 в правых частях. Видим, что нет. Это значит, что для остальных неизвестных мы получаем систему с нулевым столбцом свободных членов. Значит, ее решение нулевое, то есть

Все остальные неизвестные равны нулю. По графу видно, что 1-я вершина достижима только сама из себя по пути длины 0.

2 столбец:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 + x_4 + 1 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_3 = x_2 + x_5 \Rightarrow x_3 = 1 \\ x_4 = x_5 \\ x_5 = x_4 \\ x_6 = x_4 + x_7 \\ x_7 = x_5 + x_6 \end{cases}$$

Та неизвестная, где в уравнении для нее справа стоит x_2, обращается в единицу и далее ее начинаем искать в правых частях. Своего рода принцип домино. В данном случае первые три элемента столбца обратились в единицу, что согласуется с картинкой: 2-я вершина достижима из 1-й и 3-й и, конечно, из себя самой. Остальные неизвестные равны нулю, так как для них также получается система с нулевым столбцом свободных членов.

Такой же результат получим для 3-го столбца (проверить!).

Вычислим 4-й столбец.

Система:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = x_3 + x_4 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_3 = x_2 + x_5 \\ x_4 = x_5 + 1 \Rightarrow x_4 = 1 \\ x_5 = x_4 \Rightarrow x_5 = 1 \\ x_6 = x_4 + x_7 \Rightarrow x_6 = 1 \\ x_7 = x_5 + x_6 \end{cases}$$

Выше показан процесс обращения в единицу тех неизвестных, у которых в правых частях уравнений стоит x_4. Дальше смотрим за 2-й, 5-й и 6-й неизвестной и т.д. В итоге получается, что все неизвестные приняли значение 1. Это отвечает тому, что 4-я вершина достижима из всех остальных.

Остальные столбцы рекомендуется вычислить самостоятельно.