# Лекция №11 (продолжение)

23.10.2024

# III. Элементы теории графов

## 1. Основные понятия

Граф формально определяется как упорядоченная пара $G = (V, \rho), \rho \subseteq V^2$, где множество $V$ называется множеством *вершин*, или *узлов*, а отношение $\rho \subseteq V^2$ называется *отношением смежности*.

Упорядоченные пары из отношения смежности называют *дугами* и при рассмотрении графа как геометрической фигуры дугу изображают так:

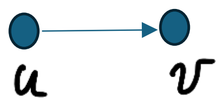



Рис. 1

Вершину u дуги (u, v) называют *началом дуги*, а вершину v – *концом дуги*. При этом говорят, что данная *дуга ведет из вершины u в вершину v*, *выходит* (или *исходит*) из вершины u и *заходит* (или *входит*) в вершину v. Саму дугу называют при этом *инцидентной* как своему началу, так и своему концу. .

В том случае, когда отношение смежности симметрично и иррефлексивно, граф называют ***неориентированным графом***. Граф же, в котором отношение смежности симметрично (но не обязательно иррефлексивно), называют ***неориентированным псевдографом***. В нашем курсе неориентированные псевдографы не рассматриваются. С содержательной точки зрения неориентированный псевдограф отличается от неориентированного графа наличием «петель» – дуг с совпадающими началом и концом.

Для неориентированного графа мы вводим новый объект – ***ребро***, которое есть, по определению, *неупорядоченная* пара вершин, связанных отношением смежности. Другими словами, если в неориентированном графе для каких-то вершин u и v выполняется $u\ \rho\ v$ (и, следовательно, $v\ \rho\ u$), то ребро с ***концами*** $u$, $v$ есть неупорядоченная пара $\{u, v\}$, причем в силу иррефлексивности отношения $\rho$ $u \neq v$. Множество ребер неориентированного графа обозначим через $E$. Тем самым $E = \{\{u, v\}: u\ \rho\ v\}$. Нетрудно понять, что, задавая произвольное конечное множество $V$ и некоторое подмножество $E$ множества всех неупорядоченных пар на $V$ (в предположении, что элементы каждой пары различны!), мы тем самым определяем на $V$ иррефлексивное и симметричное отношение $\rho = \{(u, v): \{u, v\} \in E\}$. Таким образом, всякий неориентированный граф можно рассматривать как упорядоченную пару множеств вершин и ребер: **G** = ($V$, $E$). Ребро называют *инцидентным* каждому из его концов.

В качестве общего понятия графа используем ориентированный граф (принят термин «орграф»). Но, в определенном смысле, неориентированный граф (как объект изучения возникший раньше ориентированного) «сопротивляется» вложению его в орграф как более общее понятие.

Договоримся также, что везде в этом курсе рассматриваются только конечные графы (то есть графы с конечным множеством вершин).

Для (ориентированного) графа **G** = ($V$, $\rho$) используем обозначение $u \to v$ для вершин $u$, $v$ таких, что $u \rho v$, а для неориентированного графа **G** = ($V$, $E$) используем обозначение $u - v$ для вершин $u$, $v$ таких, что $\{u, v\} \in E$.


Рис. 2

Ребро тем самым замещает пару встречных дуг:

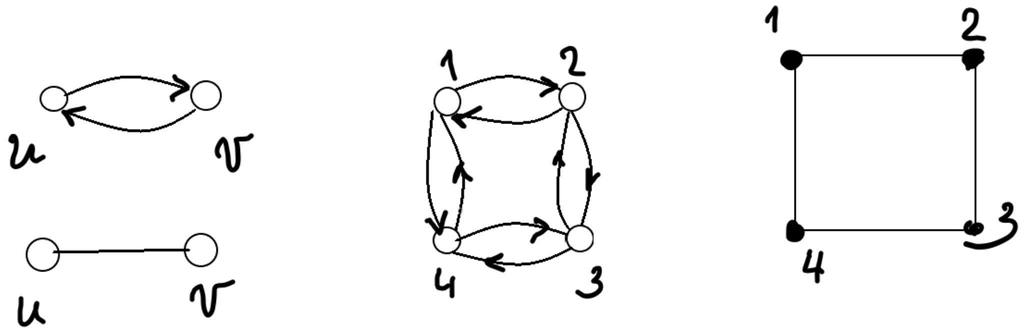



Рис. 3

***Преемниками*** вершины $u$ графа называют все вершины множества

$\rho(u) = \{x\colon u \rho x\}$, а ***предшественниками*** – все вершины множества $\rho^{-1}(u) = \{x\colon u \rho^{-1} x \} = \{x\colon x \rho u \}$; множество $\rho(u) \cup \rho^{-1}(u)$ называется ***окрестностью***, или ***окружением вершины*** $u$. Для неориентированного графа $\rho(u) = \rho^{-1}(u)$. В этом случае можно просто говорить о вершинах, смежных с данной.

Число всех преемников вершины u (или, что то же самое, число исходящих из нее дуг) называется *полустепенью исхода* данной вершины и обозначается $dg^{+}(u)$. Соответственно, число всех предшественников вершины u (число заходящих дуг) называется *полустепенью захода* данной вершины и обозначается $dg^{-}(u)$. *Степень вершины* определяется как сумма ее полустепеней. Для неориентированного графа степень вершины есть, по определению, число смежных с ней вершин (или, что то же) число инцидентных ей ребер. В орграфе из-за наличия петель степень вершины, в общем случае, не совпадает с числом инцидентный этой вершине дуг (петля будет учитываться дважды – как исходящая и как заходящая).

Вершина, имеющая нулевую степень, называется *изолированной*.

**Замечание**. Традиционное обозначение множества преемников и предшественников вершины $u$ для произвольного графа, заданного как пара множеств вершин и дуг (ребер): Г($u$) и

$\Gamma^{-1}(u)$ соответственно, т.е. $\Gamma(u) = \{x\colon u \to x\}$, $\Gamma^{-1}(u) = \{x\colon x \to u\}$ (для неориентированного графа: $\Gamma(u) = \{x\colon u - v\}$).

***Путь*** в графе **G** = ($V$, $\rho$) есть последовательность, конечная или бесконечная, вершин $v_0$, $v_1$, ..., $v_n$,..., такая, что для каждого $i \geq 0$

$v_i\ \rho\ v_{i+1}$ (или, что то же: $v_i \to v_{i+1}$), если $v_{i+1}$ определена в последовательности.

Для неориентированного графа определяется также понятие ***цепи*** как последовательности вершин $\{v_n\}_{n\geq 0}$, для которой $v_i - v_{i+1}$ для всякого $i$ такого, что определена вершина $v_{i+1}$.

Про любую вершину, являющуюся членом указанной выше последовательности (пути или цепи), будем говорить, что она лежит на соответствующем пути (или цепи).

Заметим, что цепь нельзя считать частным случаем пути (как и ребро – частным случаем дуги). Цепь есть как бы «склейка» двух «встречных» путей (как ребро – «склейка» двух «встречных» дуг).

В дальнейшем рассматриваем только конечные пути (и цепи). Первый член последовательности, являющейся путем, называют его ***началом***, а последний – ***концом***. Для цепи говорят об ее концах. ***Длина пути*** (***цепи***) – число фигурирующих в нем дуг (ребер). ***Простой путь*** – это путь, все вершины которого, кроме, может быть первой и последней, попарно различны, а в ***простой цепи*** еще и все фигурирующие в ней ребра должны быть попарно различны. ***Путь (цепь) нулевой длины*** – любая вершина графа, рассмотренная как одночленная последовательность.

***Контур*** – это простой путь ненулевой длины, начало и конец которого совпадают; ***цикл*** – это простая цепь ненулевой длины с совпадающими концами. Граф, не имеющий контуров, называется ***бесконтурным***, а граф, не имеющий циклов – ***ациклическим***.

Путь называется *замкнутым*, если его начало и конец совпадают. Поэтому контур можно назвать простым замкнутым путем.

*Замкнутая цепь* – это цепь с совпадающими концами, все ребра которой попарно различны.

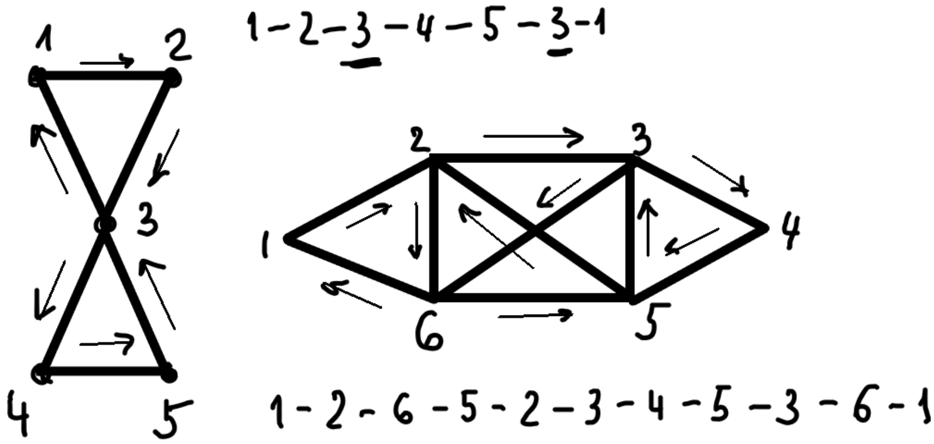



Рис. 4

На рис. 4 представлены замкнутые цепи, проходящие через все ребра графа по одному разу (ребра не должны повторяться!). Стрелками показано направление обхода (одно из возможных). Граф, в котором есть замкнутая цепь, проходящая по всем ребрам графа, называется *эйлеровым*[1], а саму такую цепь называют *эйлеровым циклом* (хотя, строго говоря, это не всегда именно цикл согласно нашему определению).

Цикл, таким образом, может быть определен как простая замкнутая цепь.

Граф может быть ациклическим, но при этом иметь контуры (как орграф!).

Так граф на рис. 3 слева сверху имеет контур, но (рассмотренный и изображенный как неориентированный) не имеет циклов.

С этим как раз связана оговорка насчет попарно различных ребер в простой цепи. Если это не оговорить, то упомянутый выше граф придется признать имеющим циклы (цепь u—v--u, проходящую два раза по одному и тому же ребру, пришлось бы считать циклом) что противоречит геометрическому пониманию цикла как некоторой замкнутой линии.

Мы пишем $v_1 \Rightarrow^* v_2$ тогда и только тогда, когда существует ***путь, (ведущий) из вершины*** $v_1$ ***в вершину*** $v_2$, т.е. путь $v_1 = u_0 \to u_1 \to \ldots \to u_n = v_2$, и говорим, что ***вершина*** $v_2$ ***достижима из вершины*** $v_1$. В неориентированном графе в таком случае существует ***цепь***, ***соединяющая*** указанные ***вершины***, т.е. цепь $v_1 = u_0 - u_1 - \ldots - u_n = v_2$. ***Отношение достижимости*** в графе – это отношение $\Rightarrow^*$. Для неориентированного графа используем обозначение |==|*. В общем случае отношение достижимости только предпорядок, для неориентированного графа – эквивалентность, а для бесконтурного орграфа – порядок.

[1] Название связано с тем, что одна из первых задач теории графов решалась знаменитым Леонардом Эйлером (1707-1783) и состояла в том, чтобы найти все способы обхода мостов г. Кёнигсберга (теперешнего Калининграда) так, чтобы пройти по каждому мосту ровно один раз.

Если надо подчеркнуть, что путь (цепь) ненулевой длины, пишем $v_1 \Rightarrow^+ v_2 (v_1 |{=}{=}|^+ v_2)$. Если надо указать длину пути (цепи), то пишем $v_1 \Rightarrow^n v_2 (v_1 |{=}{=}|^n v_2), n \geq 0$

Можно доказать такое утверждение:

**Утверждение**. Если существует путь, ведущий из вершины u в вершину v, то существует и простой путь, ведущий из первой вершины во вторую.

Если существует цепь, соединяющая две вершины неориентированного графа, то существует и простая цепь, соединяющая эти вершины.

**Следствие**. Если вершина графа лежит на некотором замкнутом пути (замкнутой цепи) , то она лежит на некотором контуре (цикле).

Доказать это рекомендуется самостоятельно.

# Лекция №12

25.10.2024

## 1. Основные понятия (продолжение)

Пусть $G = (V, \rho)$ – некий граф. Граф $G' = (V', \rho')$ называется ***подграфом*** графа $G$, если $V' \subseteq V$ и $\rho' \subseteq \rho|_{V'} = \rho \cap V'^2$. Если $\rho' = \rho|_{V'}$, то подграф $G'$ называется ***подграфом, порожденным множеством вершин*** $V'$. Таким образом, в порожденном подграфе отношение смежности есть не что иное, как ограничение отношения смежности в исходном графе на заданное подмножество вершин.

На рис. 5 подграф, построенный на вершинах 1 – 5 и содержащий лишь дуги, отмеченные зеленой точкой, не будет порожденным этим множеством вершин, но если мы добавим к нему ***все*** дуги исходного графа, инцидентные выбранным вершинам, получится порожденный подграф.

Подграф называется *собственным*, если хотя бы одно из включений в определении выше является строгим.

Подграф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин исходного графа, называется *остовным*. При этом множество дуг остовного подграфа может быть любым подмножеством множества дуг исходного графа, даже пустым.

**Максимальный подграф, обладающий данным свойством**

Пусть фиксировано какое-то свойство графов P (например, бесконтурность или ацикличность).

Подграф $G' = (V', \rho')$ графа $G = (V, \rho)$ называется *максимальным подграфом, обладающим свойством* P, если он не является собственным подграфом никакого другого подграфа графа G (включая сам граф G!), обладающего тем же свойством.

Менее формально, такой подграф нельзя нетривиально расширить, добавляя дуги (ребра) или вершины с сохранением свойства P.

На рис. 5 показан максимальный бесконтурный подграф (дуги, отмеченные зеленой или фиолетовой точкой). Ясно, что такой подграф должен быть остовным (почему?).

Процедура построения таких подграфов будет описана ниже при обсуждении алгоритма поиска в глубину. Заметим, что решение не единственное.

**Булева матрица графа**

Граф может быть задан посредством некоторых матриц. Нас будет здесь интересовать матрица, называемая матрицей смежности вершин, или булевой матрицей.

Ее элемент $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если есть дуга } v_i \to v_j \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$

Иллюстрация введенных понятий на рисунке:

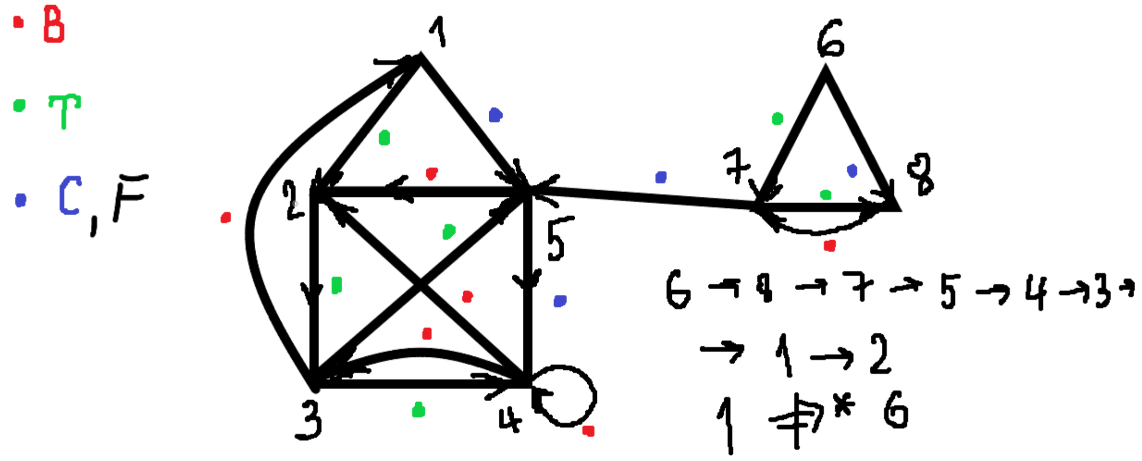



Рис. 5

Булева матрица этого графа:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Понятно, что булева матрица есть не что иное, как матрица его отношения смежности, то есть представляет некоторое конечное отношение, как это мы уже делали при анализе свойств конечных отношений.

Понятно также, что булева матрица неориентированного графа является симметрической с нулевой главной диагональю.

По булевой матрице графа легко вычислить окрестность каждой вершины. Чтобы получить множество преемников i-й вершины, надо в i-й строке матрицы отметить номера столбцов, где стоит единица. Чтобы получить множество предшественников i-й вершины, нужно в i-м столбце отметить номера строк, где стоит единица.

Так для 4-й вершины графа на рис. 5 преемниками будут 3-я и она сама (петля, которая считается входящей и исходящей одновременно), а предшественниками – 3-я, 5-я и снова она сама.

**Связность. Компоненты**

***Неориентированный граф*** называется *связным*, если две любые его вершины соединены цепью.

Для орграфа определяют три типа связности.

***Орграф*** называется *связным*, если для любой упорядоченной пары вершин хотя бы одна достижима из другой.

Другим словами, в связном орграфе не может быть обоюдно не достижимых вершин.

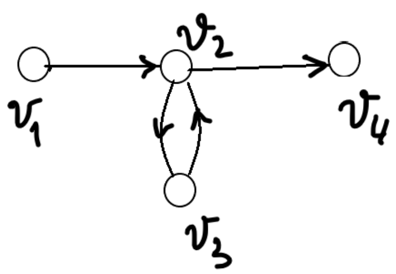
Орграф называется *сильно связным*, если для любой упорядоченной пары вершин каждая достижима из другой.

Может быть доказан такой критерий связности (и сильной связности) орграфа:

**Утверждение**. Орграф связен (сильно связен) тогда и только тогда, когда в нем есть путь (замкнутый путь), проходящий через все вершины.

**Доказательство** содержится в семинаре №5 (как решение задачи).

Граф, изображенный выше на рис. 5, связен, так как в нем есть путь (и даже простой), проходящий через все вершины. Заметим, что такой путь в общем случае не обязан быть простым. Представленный ниже орграф связен, но простого пути, проходящего через все вершины, в нем нет.




$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_2 \to v_4$$

Рис. 6

Для орграфа вводится еще понятие слабой связности.

Чтобы определить слабую связность орграфа, введем понятие неориентированного графа, ассоциированного с данным ориентированным.

Пусть $G=(V,\rho), \rho \subseteq V^2$ - орграф. Неориентированный граф $G_н=(V,E)$, в котором множество ребер определяется следующим образом $\{u,v\} \in E \rightleftharpoons (u\rho v \vee v\rho u) \,\&\, (u \neq v)$,

называется *неориентированным графом, ассоциированным с данным ориентированным* (иногда просто ассоциированным неор. графом, если исходный орграф подразумевается). Ниже изображен ассоциированный неор. граф для орграфа на рис. 5

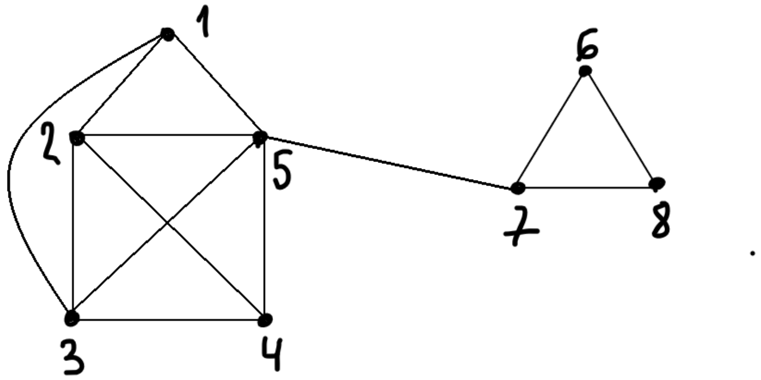



Рис. 7

Проще говоря, ассоциированный неор. граф получится, если в исходном орграфе стереть все стрелки (превратив дуги в ребра), убрать петли, а если между какой-то парой вершин получится два ребра, оставить одно.

Тогда орграф называется *слабо связным,* если ассоциированный с ним неор. граф связен.

Следующее понятие ***компоненты*** определяется одинаково для всех типов графов.

*Компонента связности (сильной, слабой)* – это максимальный связный (сильно, слабо) подграф.

Так как отношение достижимости в неор. графе есть эквивалентность, то компоненты связности неор. графа попарно не пересекаются (то есть не имеют общих вершин и ребер). Можно сказать, что компонента связности неор. графа – это подграф, порожденный классом эквивалентности на множестве вершин по отношению достижимости.

Поскольку слабая связность орграфа сводится к связности некоторого неор. графа, компоненты слабой связности (называемые иногда *слабыми компонентами*) также попарно не пересекаются.

Но и компоненты сильной связности, называемые часто *бикомпонентами*, также попарно не пересекаются, так как и отношение взаимной достижимости есть эквивалентность.

Компоненты связности в орграфе (их называют еще *компонентами односторонней связности*) вполне могут пересекаться (см. рис.8)

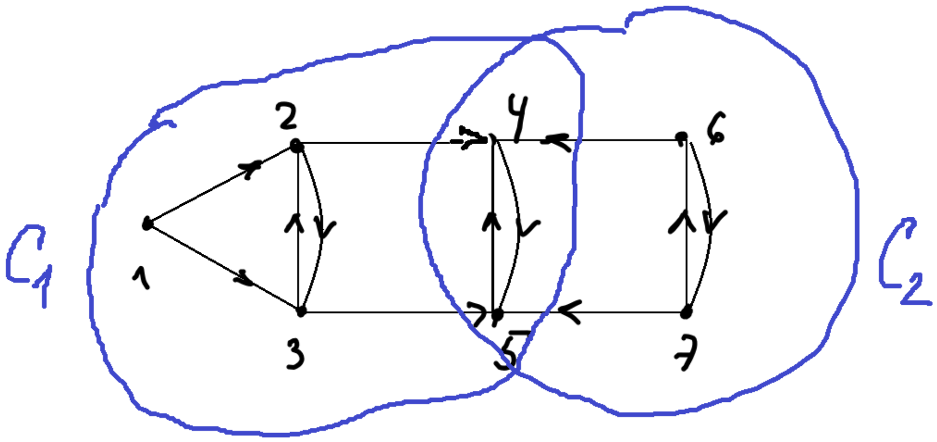



Рис. 8

Граф, который сам связен (сильно, слабо), будет своей единственной компонентой.

Существуют алгоритмы, позволяющие для любого графа найти все его компоненты (что-то мы обсудим при рассмотрении алгоритмов поиска).

Приведем в заключение простой критерий эйлеровсти неор. графа:

**Утверждение**. Связный неор. граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четна.

Рекомендуется доказать это самостоятельно.

## 2. Задача о путях

**Определение размеченного над полукольцом орграфа**

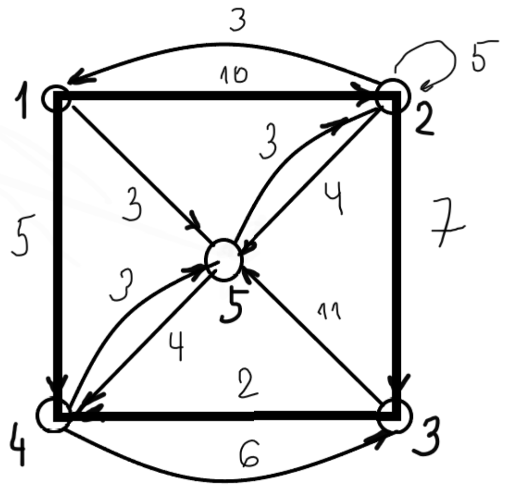
Пусть $G=(V,E), E\subseteq V^2$ - орграф, а $\mathbf{S}=(S,+,\cdot,0,1)$ - полукольцо (идемпотентное), которое будем считать замкнутым.

Пусть также задано отображение $\varphi: E\to S\setminus\{0\}$ множества дуг орграфа в множество ненулевых элементов полукольца, называемое *функцией разметки*, или *весовой функцией*. Тогда пара $(G,\varphi)$ называется *орграфом, размеченным над полукольцом* $\mathbf{S}=(S,+,\cdot,0,1)$.

Любой орграф можно считать орграфом, размеченным над полукольцом $\mathbf{B}=(\{0,1\},+,\cdot,0,1)$ и метка каждой дуги равна 1.

Полукольцо, над которым размечен орграф будем называть *полукольцом разметки* (или *полукольцом меток*).

Ниже на рисунке изображен орграф, размеченный над полукольцом $\mathbf{R}^+ = (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$:




Размеченный над полукольцом орграф задается матрицей

$$A = (a_{ij})_{n\times n}; a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } (v_i, v_j) \notin E \\ \varphi((v_i, v_j)), \text{если } (v_i, v_j) \in E \end{cases}$$

Она называется матрицей меток дуг. При разметке над полукольцом B она совпадает с матрицей смежности вершин (булевой матрицей).

Для орграфа, изображенного выше, матрица меток дуг имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} +\infty & 10 & +\infty & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & +\infty & 4 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 2 & 11 \\ +\infty & +\infty & 6 & +\infty & 3 \\ +\infty & 3 & +\infty & 4 & +\infty \end{pmatrix}$$

**Метка пути**

Распространим теперь функцию разметки на пути:

$$\varphi^*(W) = \begin{cases} 1, \text{ если } |W| = 0 \\ \varphi(e_1)\varphi(e_2)...\varphi(e_m), W = v_{i_1} \xrightarrow{e_1} v_{i_2} \xrightarrow{e_2} ... \xrightarrow{e_{m-1}} v_{i_{m-1}} \xrightarrow{e_m} v_{i_m}, |W| = m > 0 \end{cases}$$

То есть, по определению, метка пути нулевой длины равна единице полукольца, иначе же метка пути равна произведению (в полукольце разметки) меток дуг пути в порядке их прохождения. Для некоммутативного полукольца порядок важен!

Для графа, изображенного выше, метка пути 1 → 2 → 3 → 5 → 4 равна 10+7+11+4 = 32. Здесь полукольцо разметки коммутативно, и его операция умножения совпадает с числовым сложением.

При разметке над полукольцом **B** метка *любого* пути равна 1.

**Стоимость прохождения**

Под *стоимостью прохождения из вершины* $v_i$ *в вершину* $v_j$ понимается сумма меток всех путей, ведущих из вершины $v_i$ в вершину $v_j$, если имеет место достижимость $v_i \Rightarrow {}^*v_j$, и эта стоимость считается равной нулю полукольца разметки в противном случае.

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если} \neg(v_i \Rightarrow {}^*v_j) \\ \sum\limits_{W:v_i \Rightarrow {}^*v_j} \varphi^*(W), \text{ иначе} \end{cases}$$

Заметим, что сумма в общем случае может оказаться бесконечной! Например, если какой-путь содержит контур, по которому можно «крутиться» сколько угодно, то множество путей, ведущих из одной вершины в другую, будет бесконечным (но не более, чем счетным, то есть пути можно расположить в некоторую последовательность). Поскольку полукольцо разметки предполагается замкнутым, то все бесконечные суммы существуют.

Возникает тем самым матрица $C = (c_{ij})_{n \times n}, n = |V|$, называемая *матрицей стоимостей* размеченного над полукольцом графа.

В случае полукольца B, как нетрудно понять, стоимость прохождения $c_{ij}$ равна единице, если из i-й вершины достижима j-я, и равна нулю в противном случае. Такая матрица называется *матрицей достижимости* орграфа.

При разметке над полукольцом $\mathbf{R}^+ = (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \min, +, +\infty, 0)$, если $v_i \Rightarrow {}^*v_j$, то $c_{ij} = \sup_{R^+} \varphi^*(W) = \inf_{числ} \varphi^*(W) = \min_{числ} \varphi^*(W); W : v_i \Rightarrow {}^*v_j$.

В данном случае, поскольку не может быть бесконечно убывающей последовательности меток (почему?), то точная нижняя грань последовательности (в числовом порядке) совпадает с минимальным (в том же порядке) членом последовательности. Получаемая таким образом матрица стоимостей называется *матрицей кратчайших расстояний* (или кратчайших путей, ведущих из одной вершины в другую). Таким расстоянием для заданной упорядоченной пары вершин и будет записанный выше минимум. Кратчайшее расстояние – величина не симметричная в том смысле, что от i-й вершины до j-й одно расстояние, а от j-й до i-й совсем другое. В частности, «обратного пути» может и вовсе не быть (соответствующая стоимость равна $+\infty$). Мы убедимся в этом, когда будем решать конкретные задачи по вычислению таких матриц. Но даже на графе, изображенном выше, видно, что кратчайшее расстояние от 1-й до 5-й вершины равно 3, а «обратное расстояние» равно 6.

**Постановка задачи о путях**

Общая задача о путях в размеченном над полукольцом орграфе ставится так:

| |
|---|
| *Размеченный над полукольцом орграф задан матрицей меток дуг. Вычислить его матрицу стоимостей.* |

Решение задачи основано на следующей теореме:

**Теорема**. Матрица стоимостей размеченного над полукольцом орграфа равна итерации его матрицы меток дуг: $C = A^*$.