Лекция №19 (продолжение)

29.11.24

V. Элементы комбинаторики

1. Основные комбинации

Число отображений одного множества в другое

(Размещения с повторениями)

Определим число всех отображений множества $A, |A| = m$, в множество $B, |B| = n$. Каждое такое отображение можно задать в виде таблицы:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_m} \end{pmatrix}.$$

Поскольку верхняя строка фиксирована, то отображение определяется нижней строкой, т.е. кортежем элементов множества B размерности m.

Каждый элемент кортежа, поскольку допускаются любые повторения элементов, может быть выбран n способами; следовательно, число таких кортежей (и, стало быть, число всех отображений множества A в множество

B) составит n^m. Это число называется в комбинаторике ***числом размещений с повторениями из*** n ***элементов по*** m и обозначается $\tilde{A}_n^m$.

Содержательно это можно представить действительно как размещение элементов первого множества по «ячейкам», которые являются элементами второго множества. Имеется *n* мест (ячеек), в которых размещается *m* элементов[1]. Повторение означает, что элементов больше, чем мест, и одно и то же место служит для размещения нескольких элементов.

Размещения без повторений

Чтобы элементы можно было разместить по ячейкам без повторений, число элементов должно быть не больше числа ячеек: $m \le n$. В каждой ячейке размещен один элемент, но могут остаться свободные ячейки.

Определить число m-компонентных кортежей без повторений на n-элементном множестве можно, исходя из следующих соображений: в кортеже $(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m})$ первую компоненту можно выбрать n способами, вторую – уже $n-1$

---

[1] Поэтому лучше было бы назвать эту комбинацию размещением m элементов в n местах. Или: из n мест выбираются разные варианты размещения в них m элементов. То есть **из *n*** мест выбираем места для размещения в них **(по) *m*** элементов.

способами, третью - $n-2$, ..., последнюю, m-ую – числом способов, равным $n-m+1$. Итак, искомое число, обозначаемое в комбинаторике A_n^m составит

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

Это и есть ***число размещений без повторений***. Нетрудно понять, что оно равно также *числу инъекций* из множества A в множество B.

Выражение для A_n^m можно преобразовать следующим образом:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Заметим, что при $m=0$ получаем единственный 0-компонентный, т.е. *пустой кортеж*.

С другой стороны, при $m=n$ получим *число биекций* из A в B, равное $n!$. Это же число *перестановок* (биекций на себя) n-элементного множества.

Сочетания без повторений

Если в конкретном размещении без повторений, т.е. в m-компонентном кортеже без повторений на n-элементном множестве игнорировать порядок элементов, принимая во внимание только их состав, то получится не что иное как некоторое подмножество из m элементов множества из n элементов. Число таких подмножеств будет в $m!$ раз меньше числа кортежей (все перестановки элементов кортежа отождествляются!) и составит

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Это число называется ***числом сочетаний без повторений*** из n элементов по m. Оно равно *числу всех m-элементных подмножеств n-элементного множества*.

Поскольку число всех подмножеств n-элементного множества равно 2^n, то получим такую формулу:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Очевидно также, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Сочетания с повторениями

Пусть дано n-элементное множество $A=\{a_1, a_2, ...a_n\}$, элементы которого договоримся называть ***типами*** (или ***сортами***). Фиксировав произвольно число m, рассмотрим всевозможные неупорядоченные m-выборки

$$\{\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{m_1},\underbrace{a_2,\dots,a_2}_{m_2},\dots,\underbrace{a_n,\dots,a_n}_{m_n}\}.$$

Каждая такая выборка содержит m_1 элементов сорта a_1, m_2 элементов сорта a_2,..., m_n элементов сорта a_n так, что $m_1+m_2+\ldots+m_n=m$, и называется ***сочетанием из n элементов по m с повторениями***. Число таких сочетаний обозначается $\tilde{C}_n^m$.

Можно показать, что

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Действительно, это будет число способов, которым можно $n-1$ «перегородками» разделить элементы разных сортов, т.е. выбрать $n-1$ место среди $m+n-1$ мест. Это будет число $C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^m$. Нетрудно понять, что это будет и число способов, которыми число m можно представить в виде суммы неотрицательных слагаемых, т.е. число всех различных (неотрицательных) решений уравнения $x_1+\ldots+x_n=m$.

Например, при n = 3, m = 5 имеем $\tilde{C}_3^5 = C_7^5 = 21$ решение. Конкретно:

{0,0, 5} – 3 решения, из которых два нулевых; {0, 1, 4} – 6 решений, из которых одно нулевое (на каждую из трех возможных позиций нулевого решения приходится две перестановки остальных); {0, 2, 3} – 6 решений; {1, 2, 2} – 3 решения (3 возможных позиции единицы); {1, 1, 3} – 3 решения.

Замечание. 1) Комбинацию сочетания с повторениями можно свести к комбинации перестановок с повторениями (см. Н.Я. Виленкин. Комбинаторика.- М.: Наука, 1969, стр. 47 и дальше).

Именно, образуем кортеж, в котором на месте элементов разных сортов стоят единицы, а на месте «перегородок» - нули. Размерность такого кортежа равна $n+m-1$. Число всех таких кортежей есть число перестановок с повторениями $n-1$ нулей и m единиц. Общая формула для числа перестановок с повторениями из n элементов по m, где 1-й элемент повторяется m_1 раз, второй - m_2 раз, ..., n -й - m_n раз, где $m_1+m_2+\ldots+m_n=m$, равно

$$P(m_1,m_2,\dots,m_n) = \frac{m!}{m_1!m_2!\dots m_n!}$$ (Виленкин, стр. 37 и дальше).

В нашем случае

$$\tilde{C}_n^m = P(m, n-1) = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = C_{m+n-1}^m = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

Представляет интерес случай, когда к сочетаниям с повторениями предъявляются дополнительные требования. Например, нужно, чтобы в выборках присутствовали обязательно элементы выделенных $r \le n$ сортов. Тогда подсчет производится так: занимаем выделенные $r \le n$ мест, а остальные $m-r$ мест занимаем любыми элементами n сортов. В итоге получим

$$\tilde{C}_n^{m-r} = C_{m+n-r-1}^{m-r} = C_{m+n-r-1}^{n-1}.$$

В частности, при $r = n \le m$

$$\tilde{C}_n^{m-n} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}$$

Например, число ненулевых решений уравнения $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ будет равно $C_4^2 = 6$ (см. выше).

2) Выборку $\{\underbrace{a_1,...,a_1}_{m_1}, \underbrace{a_2,...,a_2}_{m_2},..., \underbrace{a_n,...,a_n}_{m_n}\}$ называют также *мультимножеством над множеством* $A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$, точнее m*-мультимножеством над* n*-элементным множеством* (при $m_1 + m_2 + ... + m_n = m$)[2]. Число таких мультимножеств можно найти, вычислив число способов, которыми можно отделить элементы разных сортов друг от друга. Так появляются условные «перегородки» и естественно считать, что каждая «перегородка» занимает отдельное место, обозначает переход от одного сорта к другому.

---

[2] В общем случае *мультимножеством над непустым множеством* A (даже не обязательно конечным) называют произвольное отображение $\nu : A \to \mathbb{N}_0$, где значение $\nu(a) \ge 0$ показывает, сколько раз элемент $a \in A$входит в мультимножество (может быть, ни разу!). *Строгим мультимножеством* называют такое мультимножество, что для всех $a \in A\, \nu(a) > 0$. В конечном случае число всех m-мультимножеств над n-элементным множеством равно как раз числу сочетаний из n по m с повторениями, а число строгих m-мультимножеств равно, как следует из приведенного выше рассуждения, C_{m-1}^{n-1}. Отличие мультимножества от кортежа состоит в том, порядок перечисления сортов не имеет значения, как и порядок перечисления элементов одного и того же сорта. Заметим еще, что число m может быть равно нулю (но, конечно, n>0), и тогда $\tilde{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} = \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} = 1$ - единственное «пустое» мультимножество.

2. Формулы включения и исключения

Вывод формулы для числа элементов объединения множеств

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|.$$

Заметим, что внутренняя сумма для заданного p содержит C_n^p слагаемых (число подмножеств из p индексов во всем множестве индексов $\{1, 2, \ldots, n\}$).

В частности:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|;$$
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$
$$-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Внутренняя сумма рассматривается для фиксированного p. Номера (индексы) в пересечении упорядочены по возрастанию. При этом предполагается, очевидно, что $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_p \le n$ (но «крайние» нестрогие неравенства обычно не пишут).
Записанная выше сумма для трех множеств может быть переписана так:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum_{p=1}^{3} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$$

При $p = 1$ это будет $\sum_{1 \le i_1 \le 3} |A_{i_1}| = |A_1| + |A_2| + |A_3|$;

при $p = 2$: $\sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 3} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|$;

при $p = 3$: $\sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

Знак при внутренней сумме «минус» для четного p и «плюс» для нечетного.

Первый вывод

Индукция по n.

Базис (нетривиальный) при $n = 2$ - см. выше.

Далее (с учетом индукционного предположения):

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}| + |A_n| -$$

$$- |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n| =$$

$$= \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + |A_n| -$$

$$- |(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| =$$

$$= \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + |A_n| -$$

$$- \sum_{p=2}^{n} (-1)^{p} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_{p-1}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n| =$$

$$= \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + |A_n| +$$

$$+ \sum_{p=2}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_{p-1}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n|.$$

Во втором и третьем слагаемых учтены все новые наборы из p множеств ($1 \le p \le n-1$), содержащие множество A_n. Поэтому вся написанная выше сумма будет равна

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|,$$

что и требовалось.

Второй вывод

Достаточно доказать, что каждый элемент рассматриваемого объединения учтен в правой части равенства ровно один раз.

Пусть элемент a принадлежит в точности k множествам из n, а именно, пусть $a \in A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots \cap A_{j_k}, k \le n$. Тогда в сумме $\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|$ этот элемент фигурирует во всех таких пересечениях, что $\{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_k\}$, то есть $a \in A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}$ тогда и только тогда, когда $\{i_1, \ldots, i_p\} \subseteq \{j_1, \ldots, j_k\}$. Но таких подмножеств номеров будет C_k^p. Следовательно, элемент a в каждой такой сумме (при фиксированном p) будет фигурировать C_k^p раз. Но в общей (внешней) сумме внутренние суммы указанного вида идут с чередующимся знаком.

Следовательно, во всей правой части этот элемент фигурирует $\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}C_k^p$ раз.

Верхний предел равен k, так как в пересечениях числа подмножеств, которое больше k, элемент a уже не будет встречаться[3].

Но последняя сумма равна 1.

Действительно,

$0=(1-1)^k=\sum_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p=1-\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}C_k^p$, откуда $\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}C_k^p=1$, что и требовалось.

Формула для пересечения дополнений множеств

Подсчет числа элементов в объединении множеств позволяет находить число элементов, обладающих хотя одним из n свойств. Следующая формула позволяет находить число элементов, не обладающих ни одним из n свойств. Если обозначить через A_i множество всех тех элементов, которые обладают свойством P_i (при $i=1,\ldots,n$), то множество всех тех элементов, которые не обладают ни одним из указанных свойств, есть пересечение дополнений $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
&|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n|=|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}|=\\
&=|U|-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\\
&=|U|-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_p}|=\\
&=|U|+\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_p}|.
\end{aligned}
$$

(Здесь U - универсальное множество, т.е. «высший род» в заданном классе элементов.)

---

[3] Например, при n=4, k=3 пусть элемент *a* принадлежит первым трем множествам. Тогда при p=1, то есть в сумме мощностей самих множеств, этот элемент встречается 3 раза со знаком «плюс», в сумме мощностей пересечений двух множеств он встречается в трех пересечениях (1 и 2, 1 и 3, 2 и 3) со знаком «минус» и, наконец в сумме мощностей пересечений 3-х множеств он фигурирует 1 раз со знаком «плюс», Итого, он будет упомянут ровно один раз.

Пример. 1) Найти, сколько чисел, не больших 100, взаимно просты с 30.

Найдем, сколь много чисел, не больших 100, которые имеют с 30 общий делитель, больший 1. Для этого достаточно определить, сколь много чисел в указанном диапазоне, которые кратны 2, 3 или 5. Множества чисел, кратных другим делителям 30, будут подмножествами указанных.

Пусть A_1, A_2, A_3 - множества чисел, кратных 2, 3 и 5 соответственно. Тогда

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$, что составит

50+33+20 – (16+10+6)+3 = 74, откуда искомое число будет равно 100-74=26, а без учета единицы составит 25.

2) Сколько чисел, не больших 1000, взаимно простых с 420?

Так как 420 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то аналогично предыдущему имеем для искомого числа:

1000- ([1000/2]+[1000/3]+[1000/5]+[1000/7]) + ([1000/6]+[1000/10]+[1000/14]+[1000/15]+[1000/21]+[1000/35]) – ([1000/30]+[1000/42])+[1000/105])+[1000/70])+[1000/210]=1000-772=228.

Без учета единицы – 227.

Число сюръекций

Формулы включения-исключения можно применить для подсчета числа сюръективных отображений одного конечного множества на другое.

Пусть $A = \{a_1, ... a_m\}, B = \{b_1, ..., b_n\}$; пусть $W_i = \{f : f \in B^A, b_i \notin R(f)\}$ - множество всех таких отображений A в B, в область значений которых не попадает элемент b_i. Тогда для фиксированных $i_1, ..., i_k$ имеем $|W_{i_1} \cap ... \cap W_{i_k}| = (n-k)^m$, а

$$\sum_{i_1 < ... < i_k} |W_{i_1} \cap ... \cap W_{i_k}| = C_n^k (n-k)^m .$$

Следовательно,

$$|W_1 \cup ... \cup W_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k (n-k)^m$$

(число всех отображений, не являющихся сюръекциями).

Тогда число $S(m,n)$ всех сюръекций A на B составит

$$S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k (n-k)^m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m .$$

Число $S(m,n)$ может быть получено и по другой формуле:

$$S(m,n) = \sum_{\substack{k_1+...+k_n=m, \\ k_i>0}} \frac{m!}{k_1!...k_n!}, \qquad (1)$$

где суммирование идет по всем векторам $(k_1,...,k_n)$ с ненулевыми компонентами таким, что сумма компонент равна m.

Например, $S(3,2) = 2^3 - 2 \cdot 1 = 6$ по первой формуле, тогда как по второй

$$S(3,2) = \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!} = 6.$$

Аналогично $S(4,2) = 2^4 - 2 \cdot 1 = 14 = \frac{4!}{2!2!} + 2 \cdot \frac{4!}{3!1!}$.

Замечание. Так как $S(n,n) = n!$, то получаем такое представление для факториала:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^n,$$

то есть

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)^n,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (n-k)^n = 1$$

На основании полученных результатов можно вывести формулу для числа всех возможных разбиений m-элементного множества на n подмножеств. Оно будет, как нетрудно показать, равно $\frac{1}{n!}S(m,n)$ [Сачков, с. 44][4]. При этом число разбиений при фиксированных ненулевых числах $k_1, k_2, ..., k_n$ будет равно

$$\frac{1}{n!}\sum_{\substack{k_1+...+k_n=m, \\ k_i \text{ фиксированы}}} \frac{m!}{k_1!...k_n!}, \qquad (2)$$

т.е. суммирование ведется по всем *различным* векторам, компоненты которых суть числа k_i. Например, при $m=4, n=2, k_1=k_2=1, k_3=2$ получим $\frac{1}{3!}(\frac{4!}{1!1!2!}+\frac{4!}{1!2!1!}+\frac{4!}{2!1!1!})=\frac{1}{6}3\frac{4!}{1!1!2!}=6$, т.е. существует 6 способов разбить 4-элементное множество на 2 одноэлементных и одно двухэлементное. Вот эти разбиения:

1-{1}, {2}, {3,4}, **2**-{1}, {3}, {2,4},**3**-{1}, {4}, {2,3}, **4**-{2}, {3}, {1,4}, **5**-{2}, {4}, {1,3}, **6**-{3}, {4}, {1,2}.

Это число совпадает с числом Стирлинга 2-го рода $\frac{1}{3!}S(4,3)=6$, так как очевидно, что никаких других разбиений четырехэлементного множества на три подмножества не существует.

Замечание. Формулу для числа упорядоченных разбиений можно получить из таких соображений.

Пусть надо m предметов разложить по n ящикам так, чтобы в первом ящике было k_1 предметов, во втором - k_2 предметов и т. д., в n-м ящике - k_n предметов. И, конечно, $k_1+k_2+...+k_n=m$.

Предметы для первого ящика можно выбрать $C_m^{k_1}=\frac{m!}{k_1!(m-k_1)!}$ способами. Далее, относительно каждого такого выбора предметы для второго ящика можно выбрать $C_{m-k_1}^{k_2}=\frac{(m-k_1)!}{k_2!(m-k_1-k_2)!}$ способами и т. д. В итоге получаем

[4] Числа $\frac{1}{n!}S(m,n)$ называются ***числами Стирлинга 2-го рода***. [Андерсон, с. 553.]. Часто числа Стирлинга 2-го рода обозначают как $S(m,n)$. Тогда соответствующее число сюръекций следует обозначить иначе, например, $\tilde{S}(m,n)$. Мы, однако, сохраним наше обозначение.

$$\frac{m!}{k_1!(m-k_1)!}\cdot\frac{(m-k_1)!}{k_2!(m-k_1-k_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(m-k_1-\ldots-k_{n-1})!}{k_n!0!}=$$
$$=\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$$

Это и есть число упорядоченных разбиений m-элементного множества на такие подмножества, что в первом будет k_1 элементов, во втором k_2 элементов и т. д.

В записанном выше произведении, как нетрудно сообразить, все множители вида $(m-k_1-\ldots-k_p)!, 1\le p\le n-1$, сокращаются, а $(m-k_1-\ldots-k_n)!=0!=1$.

Если же теперь варьировать числа $k_i>0, 1\le i\le n$,так, чтобы их сумма оставалась равной m (в частности, переставлять их), то получится формула (1). Если только переставлять, получится формула (2) (без учета деления на факториал n).

Заметим, что, если число $\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$ разделить на $n!$, то не получится число *всех неупорядоченных* разбиений, так как само это число не дает *всех упорядоченных* разбиений, а дает только число определенных упорядоченных разбиений для фиксированного вектора $(k_1,\ldots,k_n)$.

Если в выше написанной формуле для числа сюръекций допустить, что некоторые из чисел k_i могут быть равны нулю, то получим формулу для числа ***всех*** отображений m-элементного множества в n-элементное.

По индукции может быть доказана такая формула:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^m=\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=m,\\ k_i\ge 0}}\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_n^{k_n}$$

([Сачков, с. 39]).

Тогда при $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ получаем $n^m=\sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_n=m,\\ k_i\ge 0}}\frac{m!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$,

что и равно числу всех отображений m-элементного множества в n-элементное.

Замечание. Для чисел Стирлинга 2-го рода существуют рекуррентные соотношения:

$$\tilde{S}(n,k)=\tilde{S}(n-1,k-1)+k\tilde{S}(n-1,k).$$

Это можно понять так.

К каждому разбиению (n-1)-элементного множества на (k-1) классов добавляем класс {n}.

Далее рассматриваем разбиение (n-1)-элементного множества на k классов и в каждый класс каждого разбиения добавляем по очереди n-й элемент, то есть действуем по такой схеме:

$$\begin{array}{cccc} \{\ldots,n\} & \{\ldots\} & \ldots & \{\ldots\} \\ \{\ldots\} & \{\ldots,n\} & \ldots & \{\ldots\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \{\ldots\} & \{\ldots\} & \ldots & \{\ldots,n\} \end{array}$$

В этой таблице k строк и k столбцов (число членов разбиения – классов эквивалентности в разбиении n-1 на k). Тогда в каждом из $\tilde{S}(n-1,k)$ разбиений новый элемент добавляется в 1-й класс, потом во 2-й класс и т. д. На месте каждого разбиения n-1 на k появляется k новых разбиений, и возникает тем самым $k\tilde{S}(n-1,k)$ разбиений.

Например,

$$\tilde{S}(4,3) = \tilde{S}(3,2) + 3\tilde{S}(3,3) = 3 + 3 = 6;$$

$$\tilde{S}(3,2) : \{\{1\},\{2,3\}\},\{\{2\},\{1,3\}\},\{\{3\},\{1,2\}\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(4,3) : &\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\},\{\{2\},\{1,3\},\{4\}\},\{\{3\},\{1,2\},\{4\}\}, \\ &\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\},\{\{1\},\{2,4\},\{3\}\},\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\} \end{aligned}$$

См. https://ru.wikipedia.org/wiki/Числа_Стирлинга_второго_рода