ТФКП-1. Элементарные функции

Формы представления комплексных чисел

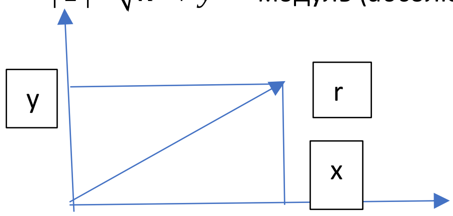
Алгебраическая форма:

$$z = x + iy, i^2 = -1.$$

$x = \mathrm{Re}\, z$ - действительная часть числа z,

$y = \mathrm{Im}\, z$ - мнимая часть числа z.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль (абсолютная величина) числа z.



При этом число $x - iy$ называется *сопряженным* к z и обозначается $\overline{z}$. Понятно, что точки, соответствующие числу и сопряженному с ним, симметричны относительно действительной оси.

Тригонометрическая форма:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль числа z,

а угол φ - аргумент числа z – есть угол, образованный радиус-вектором точки z с положительным направлением оси абсцисс (действительной оси). Аргумент числа z, обозначаемый $Arg(z)$, является 2π -периодической функцией:

$$Arg(z) = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

причем

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z},$$

и главное значение аргумента, угла φ, рассматривается в промежутке $(-\pi, \pi]$, обозначается $\arg(z)$ и тогда

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, x > 0 \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, x < 0, y \ge 0 \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Эти соотношения легко усматриваются из графика большого арктангенса.

Исходя из определений показательной и тригонометрической функций в виде сумм степенных рядов,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ ,$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

сходящихся абсолютно, как доказывается, на всей комплексной плоскости, можно получить следующие формулы:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$e^z = \cos iz - i \sin iz.$$

Используя первую, можно тригонометрическую форму преобразовать в показательную, более удобную при выполнении действий над комплексными числами:

$$z = re^{i\varphi} = |z|\, e^{i\arg z}, -\pi < \arg z \le \pi \ .$$

Полезно иметь в виду и определения гиперболических функций:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ .$$

Отсюда нетрудно получить такие соотношения:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -ishiz,$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = chiz,$$
$$e^z = shz + chz.$$

(Использовано очевидное равенство $\frac{1}{i} = -i$.)

Заметим, что свойства четности и нечетности тригонометрических и гиперболических функций сохраняются и в комплексном случае.

Замечание. Экспоненту, логарифм, тригонометрические и гиперболические функции можно определить иначе (см. [Лаврентьев-Шабат]).

Именно, по определению полагаем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

После этого определяется логарифм, а тригонометрические и гиперболические функции определяются согласно записанным выше формулам.

Степени и корни

Выражение для произвольной целой степени комплексного числа легко получить, используя показательную форму:

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}.$$

(Доказывается в комплексной алгебре, что все свойства степеней для действительных чисел сохраняются и для комплексных. Равно, как и свойства вещественной экспоненты.)

Таким образом, при возведении в целую степень модуль числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени, то есть аргумент ведет себя подобно логарифму.

Пример:

$$i^n = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = e^{i\frac{n\pi}{2}} = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}.$$

В частности, при n=-1 $i^{-1} = -i$.

Функция извлечения корня целой положительной степени определяется как функция, обратная функции возведения в целую положительную степень.

А именно, по определению

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z.$$

Пусть $z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\theta}$, тогда

$\rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi}$.

Это запись равенства двух комплексных чисел. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы совпадают с точностью до любого слагаемого, кратного 2π .

То есть

$$\rho = \sqrt[n]{r},$$
$$n\theta = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

откуда аргумент числа w определяется в виде:

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} .$$

Эта формула дает ровно n попарно различных значений аргумента при k=0,…,n-1.

Корни n-й степени из комплексного числа $z = re^{i\varphi}$, таким образом, находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ и повернутого относительно положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки на угол $\frac{\varphi}{n}$.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}, k = 0,1,2.$

Получаем три числа:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(k=0),$$
$$w_2 = e^{i\pi} = -1(k=1),$$
$$w_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(k=2)$$

Эти числа располагаются в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность единичного радиуса, одна из вершин которого лежит на оси абсцисс в точке (-1, 0).

2) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16e^{i\pi}} = 2e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, k = 0,1,2,3$.

Здесь мы имеем 4 корня, расположенные в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2, диагонали которого лежат на биссектрисах координатных углов:

$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}(k=0),$$
$$w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}(k=1),$$
$$w_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}(k=2),$$
$$w_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}(k=3)$$

Заметим, что здесь возникают две комплексно-сопряженных пары: $w_3 = \bar{w}_2, w_4 = \bar{w}_1$. И нет ни одного действительного корня.

3) $\sqrt[5]{1+i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{\pi+8\pi k}{20}}, k = \overline{0,4}.$

Перечислить явно полученные корни предлагается самостоятельно.

Логарифм

Логарифм определяется, естественно, как функция, обратная экспоненте:

$$w = Lnz \Leftrightarrow e^w = z\ .$$

Положим $z = re^{i\varphi}, w = u + iv$. Тогда

$$e^w = e^u e^{iv} = re^{i\varphi},$$

откуда

$$e^v = r \Rightarrow v = \ln r = \ln|z|,$$
$$v = \varphi + 2\pi k = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

То есть

$$Lnz = \ln|z| + i\arg z + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z}\ .$$

Это значит, что комплексный логарифм есть периодическая функция с чисто мнимым периодом $2\pi i$.

Функция

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

Называется главным значением логарифма.

Областью определения логарифма является вся комплексная плоскость, кроме точки (0, 0).

В комплексной области определен логарифмы отрицательных чисел, например:

$$Ln(-1)=\ln 1+i(\pi+2\pi k)=i(\pi+2\pi k), k\in\mathbb{Z}; \ln(-1)=i\pi\ .$$

С помощью логарифма можно определить степенную и показательную функции для произвольных комплексных оснований и показателей степени, положив

$$z^a=e^{aLnz}, a^z=e^{zLna}.$$

Примеры

1)

$$(1+i)^i=e^{iLn(1+i)}=e^{i(\ln\sqrt{2}+i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))}=e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k)+i\ln\sqrt{2}}=e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}e^{i\ln\sqrt{2}}=$$

$$=e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k)}(\cos\frac{\ln 2}{2}+i\sin\frac{\ln 2}{2}),$$

$$k\in\mathbb{Z}.$$

Если ограничиться главным значением логарифма, то получим следующее значение степени:

$$(1+i)^i=e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\frac{\ln 2}{2}+i\sin\frac{\ln 2}{2}).$$

2) $(-1)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln(-1)}=e^{i\sqrt{2}(\pi+2\pi k)}$.

Рассматривая только главное значение, получим:

$$(-1)^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}Ln(-1)}=e^{i\sqrt{2}\pi}=\cos\pi\sqrt{2}+i\sin\pi\sqrt{2}.$$

Обратные тригонометрические и гиперболические функции

Выведем выражение для функции $w=\operatorname{Arcsin} z$, обратной к синусу.

То есть

$$\sin w=z.$$

Вспоминая выражение синуса через экспоненту, получим:

$$\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=\frac{e^{iw}-\frac{1}{e^{iw}}}{2i}=\frac{e^{2iw}-1}{2ie^{iw}}=z.$$

Обозначая $t=e^{iw}$, получим относительно t квадратное уравнение:

$t^2 - 2izt - 1 = 0$.

Отсюда

$$t = iz + \sqrt{1-z^2}$$

(Мы не пишем $\pm$ перед корнем, так как имеется в виду двузначность функции извлечения квадратного корня.)

Итак,

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2} \ ,$$

откуда

$$iw = Ln(iz + \sqrt{1-z^2}),$$
$$w = \text{Arcsin}\, z = -iLn(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

В частности,

$$\text{Arcsin}\, 2 = -iLn(2i \pm i\sqrt{3}) = -iLn(2 \pm \sqrt{3})i \ .$$

Раскрывая логарифм (и ограничиваясь его главным значением), получим:

$$iLn(2 \pm \sqrt{3})i = i(\ln(2 \pm \sqrt{3}) + i\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} + i\ln(2 \pm \sqrt{3})$$

Заметим, что число $2-\sqrt{3}$ положительно, и можно обойтись без знака модуля под логарифмом.

Заметим также, что все значения

$$\text{Arcsin}\, 1 = -iLni = -i(i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \ ,$$

что и следовало ожидать (а «большой» арксинус 2 в вещественной области, конечно, не определен).

Действительная и мнимая части некоторых функций

Функция комплексной переменной $w = f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \ ,$$

где функции u(x,y) и v(x,y) называются соответственно действительной и мнимой частью исходной функции.

Найдем действительную и мнимую части функции $f(z) = \sin z$.

Имеем:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}=\frac{e^{ix-y}-e^{-ix+y}}{2i}=\frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2i}=$$
$$=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2i}=\frac{\cos x(e^{-y}-e^{y})+i\sin x(e^{-y}+e^{y})}{2i}=$$
$$=\frac{-2\cos xshy+2i\sin xchy}{2i}=\sin xchy+i\cos xshy.$$

При этом

$$|\sin z|=\sqrt{\sin^2 xch^2y+\cos^2 xsh^2y}$$

Отсюда видно, что комплексный синус неограничен по модулю; в существенном отличии от обычного вещественного синуса.

Аналогично можно показать, что

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos xchy-i\sin xshy\ .$$

Найдем теперь действительную и мнимую части функции

$$f(z)=tg(z+1)\,.$$

Рассмотрим сначала просто тангенс:

$$w=tgz=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{\sin xchy+i\cos xshy}{\cos xchy-i\sin xshy}=\frac{(\sin xchy+i\cos xshy)(\cos xchy+i\sin xshy)}{\cos^2 xch^2y+\sin^2 xsh^2y}=$$
$$=\frac{(\sin x\cos xch^2y-\sin x\cos xsh^2y)+i(\cos^2 xshychy+\sin^2 xshychy)}{\cos^2 xch^2y+\sin^2 xsh^2y}=$$
$$=\frac{\sin 2x+ish2y}{2(\cos^2 xch^2y+\sin^2 xsh^2y)}.$$

Знаменатель дроби можно преобразовать так:

$$\cos^2 xch^2y+\sin^2 xsh^2y=\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{ch2y+1}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{ch2y-1}{2}=$$
$$\frac{\cos 2x+ch2y}{2}.$$

Итак,

$$tgz=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+ch2y}+i\frac{sh2y}{\cos 2x+ch2y}\ .$$

Заметим, что при $y=0$ получим для действительной части:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}=tgx.$$

Возвращаясь к исходной задаче, получим, очевидно, так как $z+1=(x+1)+iy$, следующее:

$$tg(z+1)=\frac{\sin 2(x+1)}{\cos 2(x+1)+ch2y}+i\frac{sh2y}{\cos 2(x+1)+ch2y}.$$

Рассмотрим еще один пример:

$$f(z)=\sqrt{1-z^2}\ .$$

Преобразуем, подставляя вместо z $x+iy$:

$$\sqrt{1-(x+iy)^2}=\sqrt{1-x^2-2ixy+y^2}=\sqrt{(1-x^2+y^2)-i\cdot 2xy}$$

Обозначим подкоренное выражение через w. Тогда

$$|w|=\sqrt{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2},$$

$$tg\arg w=\frac{2xy}{1-x^2+y^2}$$

Рассмотрим сначала случай, когда знаменатель последней дроби отличен от нуля.

Тогда

$$\sqrt{1-z^2}=\sqrt{w}=\sqrt[4]{(1-x^2+y^2)^2+4x^2y^2}\,e^{i\frac{\arg w+2\pi k}{2}},k=0,1.$$

Расписывая экспоненту через тригонометрические функции, получим действительную и мнимую части. Однако зависимость их от x и y скрыта в аргументе функции w.

Пусть теперь $1-x^2+y^2=0$ (можно заметить, что это уравнение гиперболы $x^2-y^2=1$, то есть точки, обращающие выражение в нуль, лежат на этой гиперболе) .

Тогда

$$|w|=2|xy|,\arg w=\pm\frac{\pi}{2},$$

и

$$\sqrt{1-z^2}=\begin{cases}\sqrt{2|xy|}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi k)}, \text{ при } xy>0\\ \sqrt{2|xy|}e^{i(-\frac{\pi}{4}+\pi k)}, \text{при } xy<0\end{cases},k=0,1.$$

Эту задачу можно решить иначе, записав аргумент z в показательной форме, то есть

$$\sqrt{1-z^2}=\sqrt{1-r^2e^{2i\varphi}}=\sqrt{1-r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)}=\sqrt{(1-r^2\cos 2\varphi)+ir^2\sin 2\varphi}\ .$$

Опять обозначая подкоренное выражение через w, получим

$$|w| = \sqrt{(1 - r^2 \cos 2\varphi)^2 + r^4 \sin^2 2\varphi} = \sqrt{1 - 2r^2 \cos 2\varphi + r^4},$$
$$tg \arg w = -\frac{r^2 \sin 2\varphi}{1 - r^2 \cos 2\varphi}.$$

Дальше действуем аналогично предыдущему.

Заметим, что действительная и мнимая части функции комплексной переменной могут быть, в случае представления аргумента в тригонометрической или показательной форме, выражены как функции от r и φ:

$$u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$
$$v(x, y) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi).$$

Предлагается самостоятельно найти действительные и мнимые части следующих функций:

1) $\sqrt[3]{z^2 - 4}$

2) $e^{(\bar{z}+i)^2}$

3) $\sin \bar{z}, \cos(\bar{z} + 1)$

4) shz, chz, thz (можно использовать связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями)

5) $(z^2 + 1)^5$.

Области на комплексной плоскости

Наиболее важной для дальнейшего областью является кольцо с внутренним радиусом r и внешним R и центром в точке z_0. Она задается двойным неравенством:

$$r < |z - z_0| < R$$

Если хотя бы одно неравенство нестрогое, то соответствующая граница (окружность) включается в область.

Рассмотрим еще некоторые примеры.

1) $|z - 1| > \operatorname{Re} z$

Полагая, как обычно, $z = x + iy$, получим

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} > x,$$

откуда

$$y^2 > 2x - 1,$$

или

$x < \frac{y^2+1}{2}$.

Это неравенство описывает часть комплексной плоскости строго слева от параболы $y^2 = 2x - 1$.

2) №13.10

$|z-i|+|z+i|<4$

Если неравенство заменить равенством, получим определение эллипса с фокусами в точках $\pm i$. Уравнение этого эллипса можно найти так. Точки пересечения эллипса с мнимой осью и, тем самым, большая полуось эллипса определяется из условия принадлежности эллипсу точки $z = bi, b > 0$:

$|bi-i|+|bi+i| = (b-1)+(b+1) = 2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Так как половина межфокусного расстояния $c = 1$, то малая полуось равна $a = \sqrt{b^2-c^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$

Итак, получаем уравнение эллипса:

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$

Исходное неравенство описывает область, ограниченную эллипсом строго внутри него.

3) №13.12

$|z-5|-|z+5|<6$

Решить самостоятельно, заметив, что замена неравенства равенством дает определение гиперболы с фокусами в точках ± 5.

3) №13.18

Описать неравенством область, ограниченную эллипсом (строго внутри) с фокусами в точках $1+i, 3+i$ и большой полуосью, равной 3.

Центр эллипса находится в точке $2+i$, а эллипс пересекает прямую y=1 в точке 5i. Сумма расстояний от этой точки до фокусов равна 2+4=6. Следовательно, область строго внутри эллипса описывается неравенством

$|z-1-i|+|z-3-i|<6$

Уравнение самого эллипса имеет вид:

$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$

4) №13.11

$$\operatorname{Re}\frac{z-2i}{z+2i}=0(z\neq -2i).$$

Решение

$$\frac{z-2i}{z+2i}=\frac{x+i(y-2)}{x+i(y+2)}=\frac{(x+i(y-2))(x+i(y+2))}{x^2+(y+2)^2}=\frac{x^2+y^2-4+4ix}{x^2+(y+2)^2}.$$

Таким образом, условие задачи дает уравнение окружности

$$x^2+y^2=4, |z|=2$$

Исключается точка -2i, в которой знаменатель обращается в нуль.

5) №13.13

$$\arg\frac{z-z_1}{z-z_2}=0$$

Решение

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}=\frac{(x-x_1)+i(y-y_1)}{(x-x_2)+i(y-y_2)}=\frac{[(x-x_1)+i(y-y_1)][(x-x_2)-i(y-y_2)]}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=$$
$$=\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+i[(x-x_2)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_2)]}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2},$$

причем точка (x_2, y_2) исключается.

Равенство нулю аргумента комплексного числа означает, что мнимая часть равна нулю, а действительная положительна.

То есть

$$(x-x_2)(y-y_1)-(x-x_1)(y-y_2)=0,$$
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)>0$$

Первое условие дает уравнение прямой, проходящей через точки $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$,

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{y-y_1}{y-y_2} ,$$

а по поводу второго надо заметить, что точка (x, y), находящаяся между указанными выше двумя точками дает в каждой паре скобок отрицательное значение, точка (x_1, y_1), как и точка (x_2, y_2), обращает левую часть неравенства в нуль.

Замечание. Раскрыв скобки в первом выражении, уравнение прямой можно записать в виде:

$$x(y_2-y_1)-y(x_2-x_1)=x_1y_2-x_2y_1.$$

Итак, исходное равенство определяет на комплексной плоскости множество точек, лежащих на прямой, проходящей через точки $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, кроме точек отрезка, соединяющего их.