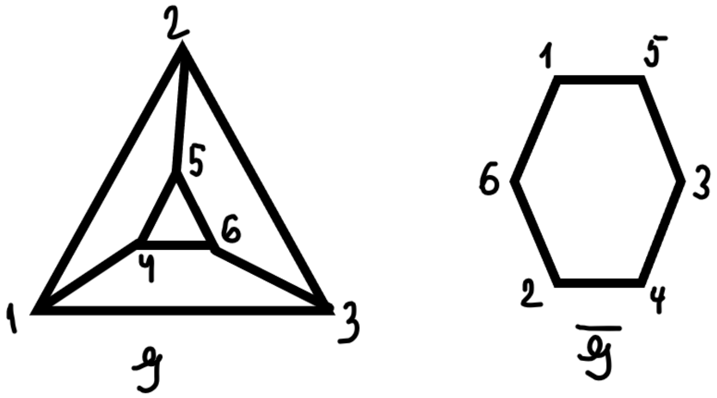
1) Найти число и структурный перечень неэквивалентных двухцветных раскрасок графа:



Орбита $orb(1)=\{1,2,3,4,5,6\}$; стабилизатор $G_1=\{\varepsilon,(23)(56)\}$. Следовательно, $|Aut(G)|=|Aut(\overline{G})|=12.$

Разумно, вычисляя группу, брать смежные классы подгруппы поворотов

$$H=[(153426)]=\{\varepsilon,(153426),(132)(546),(14)(25)(36),(231)(645),(624351)\}$$

Достаточно вычислить смежный класс по отражению $(23)(56)$.

Имеем:

$$(23)(56)H=\{(23)(56)(1)(4),(15)(24)(36),(13)(2)(46)(5),(14)(26)(35),$$
$$(12)(3)(45)(6),(16)(25)(34)\}.$$

Циклический индекс:

$$P_{Aut(G)}=\frac{1}{12}(x_1^6+3x_1^2x_2^2+4x_2^3+2x_3^2+2x_6).$$

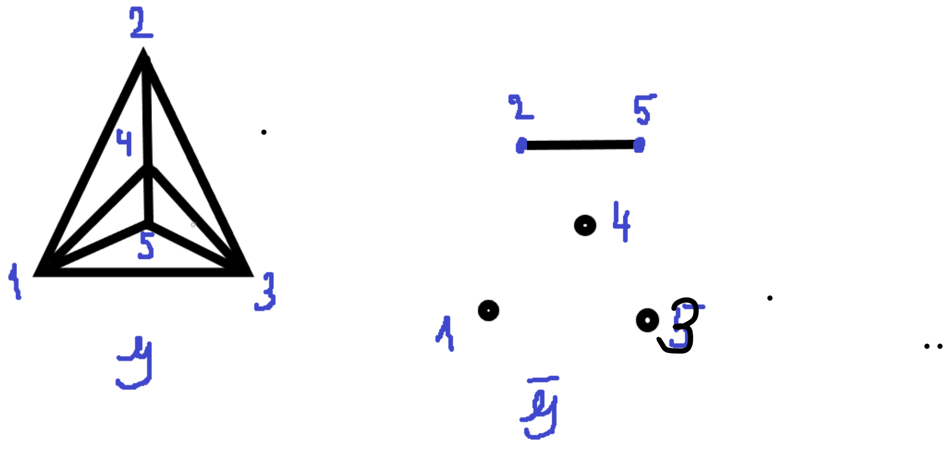
Число неэквивалентных разметок (классов эквивалентности, орбит):

$$N=\frac{1}{12}(2^6+3\cdot 2^2\cdot 2^2+4\cdot 2^3+2\cdot 2^2+2\cdot 2)=\frac{4}{12}(2^4+3\cdot 2^2+4\cdot 2+2+1)=13.$$

Структурный перечень неэквивалентных разметок:

$$Invnt(R^S/\tilde{G})=$$
$$=\frac{1}{12}[(r+b)^6+3(r+b)^2(r^2+b^2)^2+4(r^2+b^2)^3+2(r^3+b^3)^2+2(r^6+b^6)].$$

Еще пример:



$$Aut(G) = Aut(\overline{G}) = S_2^{(2,5)} \times S_3^{(1,3,4)}.$$

Циклический индекс:

$$P_{Aut(G)} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)\frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) = \frac{1}{12}(x_1^5 + 4x_1^3x_2 + 2x_1^2x_3 + 3x_1x_2^2 + 2x_2x_3)$$

Число неэквивалентных разметок (классов эквивалентности)

$$N = \frac{1}{12}[2^5 + 4\cdot 2^3\cdot 2 + 2\cdot 2^2\cdot 2 + 3\cdot 2\cdot 2^2 + 2^3] = \frac{2^3}{12}[2^2 + 4\cdot 2 + 2 + 3 + 1] = \frac{2}{3}\cdot 18 = 12.$$

Перечень неэквивалентных разметок проще получить не подстановкой в этот циклический индекс, а подстановкой в циклические индексы подгрупп, произведение которых дает всю группу:

$$Invt(R^S / \underset{G}{\sim}) = \frac{1}{12}[(r+b)^2 + r^2 + b^2][(r+b)^3 + 3((r+b)(r^2+b^2) + 2(r^3+b^3)] =$$

$$= \frac{1}{12}2\cdot 6(r^2 + rb + b^2)(r^3 + r^2b + rb^2 + b^3) = r^5 + 2r^4b + 3r^3b^2 + 3r^2b^3 + 2rb^4 + b^5.$$

Общее число классов эквивалентности = 1+2+3+3+2+1=12, что совпадает в предыдущим подсчетом.

Понятно, почему получаются две неэквивалентные разметки типа (4,1) (или (1,4)). Единственную (красную или черную) вершину можно выбрать либо как 2-ю или 5-ю, либо как одну из трех изолированных (смотрим на дополнение исходного графа!).

Три неэквивалентные разметки типа (3,2) объясняются так: две вершины одного цвета либо 2 и 5, либо две из трех изолированных, либо 2 (5) и одна из трех изолированных.

Замечание. Для этого графа можно по лемме Бернсайда определить число орбит, рассматривая просто его группу автоморфизмов.

Сразу видно, что есть только две орбиты: {2, 5} и {1, 3, 4}.

Проверим по лемме Бернсайда.

1 способ (через суммирование порядков стабилизаторов):

$$G_1=[(25),(34)],G_3=[(25),(14)],G_4=[(25),(13)];$$
$$|G_1|=|G_3|=|G_4|=4;$$
$$G_2=G_5=S_3;|G_2|=|G_5|=6;$$
$$N=\frac{1}{12}(3\cdot4+2\cdot6)=2.$$

2 способ (через числа $\psi(\sigma)$).

Тождественная подстановка сохраняет 5 вершин.

Каждый цикл длины 3 в S_3 сохраняет две вершины (2 и 5).

Транспозиция (25) сохраняет 3 вершины (1, 3 и 4)

Каждая транспозиция в S_3 сохраняет 3 вершины (2, 5 и одну из трех остальных).

Композиция $(25)(ij),i,j\in S_3$, сохраняет одну вершину.

Складываем:
5+2*2+3+3*3+3=24.
Делим на 12: получаем 2.

Возвращаясь к структурным перечням, можно найти, например, структурный перечень функций разметки (раскрасок), сохраняемых конкретной подстановкой.
Например, для транспозиции (25):

$$t_\sigma=x_1^3x_2;\hat{t}_\sigma=(r+b)^3(r^2+b^2)=(r^3+3r^2b+3rb^2+b^3)(r^2+b^2)=$$
$$=r^5+r^3b^2+3r^4b+3r^2b^3+3r^3b^2+3rb^4+r^2b^3+b^5.$$

После приведения подобных членов получим:

$$\hat{t}_\sigma=r^5+3r^4b+4r^3b^2+4r^2b^3+3rb^4+b^5.$$

Это структурный перечень всех раскрасок, сохраняемых подстановкой (25).
Поскольку 2-я и 5-я вершины должны быть покрашены одинаково, то имеем по три раскраски типа (4, 1) (или (1, 4)), что означает выбор отдельного цвета для одной из изолированных вершин; 4 раскраски типа (3, 2), или (2, 3) получаются так: все изолированные вершины покрашены одинаково (1 раскраска) или одна из них имеет тот же цвет, что 2-я и 5-я (3 раскраски).
Всего транспозиция (25) сохранит 16 раскрасок (что получается подстановкой числа цветов в терм t_σ, и это же сумма коэффициентов в написанном выше перечне).