Белоусов А.И.

УДК 519.101+372.851

О методике изложения некоторых разделов комбинаторики: линейные рекуррентные соотношения

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

al_belous@bk.ru

Статья посвящена методике изложения теоретического материала по линейным рекуррентным соотношениям. Теория линейных рекуррентных соотношений излагается в курсе дискретной математики, читаемом в МГТУ им. Н.Э. Баумана студентам программистских специальностей в разделе элементов комбинаторного анализа. Рассматриваются два уровня изложения: базовый (для бакалавров) и повышенной трудности, где рассматриваются доказательства некоторых теорем, формулируемых (без доказательства) в базовом курсе. Для некоторых утверждений даны новые доказательства.

Введение

Методы комбинаторного анализа имеют исключительно большое значение во многих областях теоретического и системного программирования, в разработке эффективных методов защиты информации, при проектировании и разработке алгоритмов (сортировка и поиск в том числе).

В числе методов комбинаторного анализа большое значение имеет теория рекуррентных соотношений. На базе этой теории можно получать оценки числа определенных конструктивных объектов (деревьев, слов в конечных алфавитах, удовлетворяющих некоторым ограничениям и т.п.), получать оценки сумм и произведений, что имеет значение при оценке сложности алгоритмов и вычислений.

В этой статье будет рассмотрена методика изложения одного из разделов комбинаторного анализа – теории линейных рекуррентных соотношений. Основная методическая идея – последовательное проведение аналогии с теорией линейных дифференциальных уравнений, излагаемой ранее во втором семестре. Это способствует преемственности и единству в построении всего курса математики.

Надо отметить, что в учебной литературе не всегда ясно и последовательно проводится идея структурного соответствия между видом решений линейного рекуррентного соотношения и линейного дифференциального уравнения [1 - 4]. Так практически неосвещенной оказывается проблема подбора частного решения неоднородного соотношения в случае «тригонометрической неоднородности», т.е. когда правая часть имеет вид квазиполинома. Здесь этому вопросу будет уделено особое внимание (см. также [5]). Кроме того, в свете основной методической идеи пересматриваются доказательства некоторых теорем.

Нелишне заметить также, что комбинаторика является одним из синтетических разделов математики, использующем аппарат ее самых разных областей. Так, соотнесение теории рекуррентных соотношений и теории дифференциальных уравнений затрагивает и другие области математики: линейную алгебру, теорию рядов, теорию разностных уравнений. Тогда последовательная демонстрация структурного соответствия между различными ветвями математики позволяет выявить для студентов единство этой науки, что с пропедевтической точки зрения представляется очень важным.

Рассматривается исключительно план изложения теоретического материала, поскольку достаточно подробный разбор задач содержится в пособии [5]. Но некоторые необходимые для уяснения сути дела примеры разбираются.

Предлагается двухуровневое изложение: базовый курс (читаемый бакалаврам) и курс повышенной трудности (который может быть включен в математическую программу магистратуры).

Переходим к системе изложения.

1. Базовый курс

Предлагаемая ниже последовательность изложения позволяет при достаточном уровне строгости обеспечить доходчивость и ясность доказательств.

Основные понятия

Пусть дана числовая последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$, причем она не определена явно как функция натуральной переменной, но всякий ее член выражается через k предыдущих (для фиксированного k) в виде:

$$x_n = \varphi(x_{n-1},...,x_{n-k}) + f(n) \qquad (1)$$

В этом случае соотношение (1) называют ***рекуррентным соотношением*** k***-го порядка***. При $f(n)=0$ соотношение называют ***однородным***.

Всякая последовательность y_n (пишем впредь без фигурных скобок), которая обращает соотношение (1) в тождество, называется ***решением*** этого ***соотношения***.

Поскольку не должно быть отрицательных индексов, то необходимо в (1) положить $n \geq k$. Это значит, что первые k членов последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ($x_0,...,x_{k-1}$) можно выбирать произвольно. Пусть

$$x_0 = \alpha_0,...,x_{k-1} = \alpha_{k-1} \qquad (2)$$

Равенства (2) называются ***начальными условиями***. Тогда может быть поставлена задача отыскания решения соотношения (1) при начальных условиях (2). Это аналог задачи Коши для дифференциального уравнения порядка k.

Если функция φ в (1) линейна по своим аргументам, то такое соотношение называют ***линейным***. Будем, как правило, записывать линейное рекуррентное соотношение в виде:

$$x_n + a_1(n)x_{n-1} + \ldots + a_k(n)x_{n-k} = f(n) \qquad (3)$$

В соотношении (3) последовательности $a_i(n), i = 1,\ldots,k$ называют ***коэффициентами***, а последовательность $f(n)$ - ***правой частью***. В случае нулевой правой части получаем ***однородное линейное рекуррентное соотношение***.

Здесь мы ограничимся рассмотрением только линейных соотношений ***с постоянными коэффициентами***, полагая, что все последовательности $a_i(n), i = 1,\ldots,k$ суть числа (как правило, вещественные).

Однородные линейные рекуррентные соотношения

Общий вид соотношения (k-го порядка):

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = 0 \qquad (4)$$

Теорема 1. Пусть $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ - решения соотношения (4). Тогда произвольная линейная комбинация их также является решением соотношения (4).

Доказательство. Пусть $\varphi_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)}$. Подставляя φ_n в (4), будем иметь:

$$C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + a_1(C_1 y_{n-1}^{(1)} + C_2 y_{n-1}^{(2)}) + \ldots + a_k(C_1 y_{n-k}^{(1)} + C_2 y_{n-k}^{(2)}) =$$
$$= C_1(y_n^{(1)} + a_1 y_{n-1}^{(1)} + \ldots + a_k y_{n-k}^{(1)}) + C_2(y_n^{(2)} + a_1 y_{n-1}^{(2)} + \ldots + a_k y_{n-k}^{(2)}) \equiv 0,$$

что и требовалось.

Следствие. Множество решений соотношения (4) образует подпространство в пространстве всех последовательностей (над полем комплексных чисел).

В этом месте целесообразно напомнить некоторые положения из курса линейной алгебры. В частности, вернуться к примеру линейного пространства (над полем действительных чисел), элементами которого являются числовые последовательности.

Очевидно, что соотношение (4) всегда имеет тривиальное нулевое решение. Докажем, что существуют (в общем случае) и ненулевые решения.

Будем искать решение (4) в виде $y_n = \lambda^n$ для какого-то (в общем случае, комплексного) числа λ.

Имеем:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_k\lambda^{n-k} = 0,$$

или

$$\lambda^{n-k}(\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k) = 0.$$

Так как нулевое решение уже учтено, то получаем:

$$\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется ***характеристическим уравнением*** соотношения (4), а его правая часть – ***характеристическим многочленом*** соотношения (4).

Итак, если λ - корень характеристического уравнения соотношения (4), то последовательность λ^n является решением.

Тем самым доказано существование решения соотношения (4).

Здесь уместно как раз напомнить, в каком виде искалось решение однородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \ldots + a_{k-1}y + a_k = 0.$$

Оно, как хорошо известно, искалось в виде $y = e^{\lambda x}$. Тут и возникает основное структурное соответствие между видом решений дифференциальных уравнений и линейных рекуррентов: *экспоненте* $y = e^{\lambda x}$ *отвечает показательная функция натурального аргумента* λ^n.

Это соответствие играет важную роль, позволяя определять вид частных решений однородных соотношений, а также подбирать частные решения неоднородных соотношений (о чем пойдет речь ниже).

Пример 1. Пусть $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n \geq 2$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Тогда обе последовательности $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ и $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ будут решениями исходного соотношения.

Всякую конкретную последовательность, являющуюся решением соотношения (4), называют ***частным решением***.

В следующей теореме важно подчеркнуть, что не только начальные условия определяют частное решение, но и наоборот: заданное частное решение есть решение, полученное при однозначно определенных начальных условиях.

Теорема 2. Существует единственное частное решение соотношения (4), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Наоборот, любое частное решение соотношения (4) однозначно определяет начальные условия, которым оно удовлетворяет.

Перед доказательством заметим, что второе утверждение теоремы весьма важно, но почему-то в литературе ему не уделяется должного внимания.

Доказательство. Пусть выполняются начальные условия вида (2):

$$y_0 = \alpha_0, \ldots, y_{k-1} = \alpha_{k-1} \qquad (6)$$

Тогда, в силу (4) $y_k = -a_1 y_{k-1} - \ldots - a_k y_0$, и далее для любого $s > 0$ $y_{k+s} = -a_1 y_{k+s-1} - \ldots - a_k y_s$, и член y_n определен однозначно для любого $n \geq 0$.

Пусть теперь y_n - какое-то частное решение соотношения (4). Покажем, что числа

$\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$ можно подобрать так, чтобы выполнялось (6).

Имеем:

$$
\begin{aligned}
&y_k + a_1\alpha_{k-1} + \ldots + a_k\alpha_0 = 0,\\
&y_{k+1} + a_1 y_k + a_2\alpha_{k-1}\ldots + a_k\alpha_1 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_{2k-1} + a_1 y_{2k-2} + a_2 y_{2k-3} + \ldots + a_{k-1} y_k + a_k\alpha_{k-1} = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

или

$$y_{k+j} + a_1 y_{k+j-1} + \ldots + a_k\alpha_j = 0 (0 \le j \le k-1)$$

Система (7) есть система относительно неизвестных $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}$, заданная в треугольной форме. Из последнего уравнения однозначно определяется α_{k-1}, и далее («обратным ходом» метода Гаусса) все остальные неизвестные до α_0 включительно (при условии, что $a_k \ne 0$, но это в соотношении (4) и предполагается, так как иначе порядок соотношения будет меньше k [1]).

Следствие. Любое частное решение соотношения (4) является решением, удовлетворяющим некоторым, однозначно определенным, начальным условиям вида (2).

В частности, нулевое решение определяет нулевые начальные условия и обратно.

Пример 2. Для решения $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ соотношения примера 1 запишем такую систему:

$$
\begin{aligned}
&y_2 = \alpha_0 + \alpha_1\\
&y_3 = \alpha_1 + y_2,
\end{aligned}
$$

откуда

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\\
&\alpha_0 = 1.
\end{aligned}
$$

[1] Условие $a_k \ne 0$ влечет, что все корни характеристического уравнения отличны от нуля, так как иначе будет равно нулю и их произведение, равное по теореме Виета, как раз коэффициенту a_k.

Произвольная линейно независимая система $\left(y_n^{(1)},\dots,y_n^{(k)}\right)$ решений соотношения (4) называется ***фундаментальной системой решений*** (ФСР), а ее компоненты – ***фундаментальными решениями***.

Теорема 3. Любое решение соотношения (4) является линейной комбинацией фундаментальных решений.

Доказательство. Докажем, что каковы бы ни были начальные условия вида (2), которым должна удовлетворять линейная комбинация $\sum_{i=1}^{k} C_i y_n^{(i)}$, ее коэффициенты однозначно определяются этими начальными условиями. Этого достаточно в силу того, что каждое решение однозначно определено начальными условиями и обратно.

Имеем такую систему для определения этих коэффициентов:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{(i)} = \alpha_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{(i)} = \alpha_{k-1} \end{cases} \tag{8}$$

Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_0^{(1)} \dots y_0^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{k-1}^{(1)} \dots y_{k-1}^{(k)} \end{vmatrix} \tag{9}$$

отличен от нуля.

Действительно, если бы он был равен нулю, то *однородная* система, соответствующая системе (8), имела бы ненулевое решение, т.е. нашлись бы коэффициенты $C_i, i = 1,\dots,k$, не все равные нулю, для которых бы выполнялось

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{(i)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{(i)} = 0, \end{cases}$$

т.е. решение, являющееся нетривиальной линейной комбинацией фундаментальных решений, удовлетворяет нулевым начальным условиям и, следовательно, в силу теоремы 2, само является нулевым. Но это невозможно в силу линейной независимости фундаментальных решений.

Итак, $\Delta \neq 0$, система (8) имеет единственное решение, и коэффициенты линейной комбинации фундаментальных решений однозначно определяются начальными условиями, которым она должна удовлетворять.

Полезно заметить при доказательстве рассмотренной теоремы , что определитель (9) есть аналог определителя Вронского в теории линейных дифференциальных уравнений.

Форма $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k} C_i y_n^{(i)}$ называется ***общим решением*** соотношения (4). Это значит, что любое частное решение (4) может быть получено при определенных значениях коэффициентов (произвольных констант) $C_i, i = 1, \ldots, k$ (при заданной ФСР).

Из теоремы 3 следует также, что пространство решений однородного соотношения (4) является конечномерным, и его размерность совпадает с порядком соотношения.

Пример 3. Для соотношения примера 1 зададим начальные условия $x_0 = 0, x_1 = 1$. Тогда $x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 8, \ldots$ Эта последовательность, как известно, называется ***последовательностью Фибоначчи***[2]. Можно показать, что последовательности $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ и $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ линейно независимы. Общее решение

$C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$. Удовлетворяем начальным условиям:

[2] При *произвольных* начальных условиях соотношение примера 1 определяет последовательность, которая называется ***последовательностью Лукаса***.

$$C_1 + C_2 = 0$$
$$C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1,$$

откуда $C_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Теорема 4. Если частные решения $y_n^{(1)},\dots,y_n^{(k)}$ соотношения (4) линейно зависимы, то определитель (9) равен нулю.

Доказательство. Линейная зависимость указанных в условии теоремы решений означает, что существует их нетривиальная линейная комбинация, обращающаяся в нуль, т.е. для некоторых, не равных нулю одновременно, чисел $C_1,\dots,C_k$ выполняется:

$$C_1 y_n^{(1)} + \ldots + C_k y_n^{(k)} \equiv 0.$$

Поскольку всякое частное решение соотношения (4) есть решение, удовлетворяющее определенным начальным условиям, то для этих условий получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{(i)} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{(i)} = 0, \end{cases}$$

откуда и следует, что главный определитель (9) этой системы равен нулю (так как она имеет ненулевое решение).

Структура ФСР соотношения (4) и вид фундаментальных решений определяются свойствами корней характеристического уравнения (5).

Теорема 5. Если λ_1 и λ_2 различные корни уравнения (5), действительные или комплексные, то решения λ_1^n и λ_2^n линейно независимы.

Доказательство. Составим определитель 2-го порядка ($k = 2$):

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, откуда и следует доказываемое.

Этот результат можно обобщить и доказать, что если $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ - попарно различные корни характеристического уравнения, то система $(\lambda_1^n,\dots,\lambda_k^n)$ линейно независима. Доказательство этого общего результата будет дано ниже при обсуждении курса повышенной трудности.

Следовательно, для соотношения (4) в этом случае она может быть взята за ФСР.

Теорема 6. Если λ - корень уравнения (5), действительный или комплексный, кратности s, то последовательности $\lambda^n, n\lambda^n,\dots,n^{s-1}\lambda^n$ являются линейно независимыми решениями соотношения (4).

В базовом курсе эта теорема формулируется без доказательства. Ее доказательство может быть дано в курсе повышенной трудности.

Это утверждение также обобщается, а именно, если $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ - корни характеристического уравнения соотношения (4), имеющие кратности $s_1,\dots,s_m$ соответственно, причем $s_1+\dots+s_m=k$, то решения $\lambda_1{}^n, n\lambda_1{}^n,\dots,n^{s_1-1}\lambda_1{}^n,\dots,\lambda_m{}^n, n\lambda_m{}^n,\dots,n^{s_m-1}\lambda_m{}^n$ образуют ФСР соотношения (4).

Если ограничиться только линейными рекуррентами с действительными коэффициентами и линейные комбинации последовательностей брать только с действительными коэффициентами, то каждой паре $re^{\pm i\varphi}$ комплексно сопряженных корней кратности s характеристического уравнения можно сопоставить $2s$ линейно независимых решений:

$$
\begin{aligned}
&r^n\cos n\varphi, nr^n\cos n\varphi,\dots,n^{s-1}r^n\cos n\varphi,\\
&r^n\sin n\varphi, nr^n\sin n\varphi,\dots,n^{s-1}r^n\sin n\varphi.
\end{aligned}
$$

Это вытекает из того, что при $\lambda = re^{i\varphi}$ имеем $\lambda^n = r^n e^{in\phi} = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$, и указанные выше решения соответствуют действительной и мнимой частям *n*-ой степени комплексного корня.

Неоднородные линейные рекуррентные соотношения

Теорема 7. Любое решение соотношения

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f(n) \qquad (12)$$

может быть представлено в виде:

$$\varphi_n = y_n^{н} + \sum_{i=1}^{k} C_i y_n^{o,(i)}, \qquad (13)$$

где $y_n^{н}$ - произвольное частное решение неоднородного соотношения (12), $(y_n^{o,(1)}, \ldots, y_n^{o,(k)})$ - ФСР однородного соотношения (4), а $C_1, \ldots, C_k$ - произвольные постоянные.

Доказательство.

Во-первых, легко проверить прямой подстановкой, что последовательность (13) является решением соотношения (12).

Во-вторых, нетрудно доказать, что для произвольных начальных условий однозначно определяются константы C_i в выражении (13).

Имеем:

$$y_0^{н} + \sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{o,(i)} = \alpha_0$$

....

$$y_{k-1}^{н} + \sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{o,(i)} = \alpha_{k-1}$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{o,(i)} = \alpha_0 - y_0^{н}$$

....

$$\sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{o,(i)} = \alpha_{k-1} - y_{k-1}^{н}$$

Главный определитель этой системы совпадает с главным определителем системы (8) и отличен от нуля в силу линейной независимости элементов ФСР. Таким образом, система имеет единственное решение в виде вектора констант $(C_1, \ldots, C_k)^T$.

Замечание. Можно заметить, что переход от системы (8) к вышенаписанной (и связанным с этим анализом структуры общего решения неоднородного соотношения) эквивалентен изменению начальных условий для однородного соотношения.

Итак, общее решение неоднородного соотношения (10) есть сумма частного решения неоднородного соотношения и общего решения соответствующего однородного соотношения (4).

Следующая теорема определяет ***принцип суперпозиции*** для неоднородных соотношений.

Теорема 8. Пусть правая часть неоднородного соотношения (12) является суммой некоторых последовательностей:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{p} g_i(n),$$

и пусть последовательность $\varphi_n^{(i)}$ есть решение неоднородного соотношения с правой частью $g_i(n), i = 1,\dots, p.$

Тогда сумма $\theta_n = \sum_{i=1}^{p} \varphi_n^{(i)}$ является решением соотношения (12).

Доказательство. Имеем:

$$\theta_n + a_1\theta_{n-1} + \dots + a_k\theta_{n-k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \varphi_n^{(i)} + a_1 \sum_{i=1}^{p} \varphi_{n-1}^{(i)} + \dots + a_k \sum_{i=1}^{p} \varphi_{n-k}^{(i)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\varphi_n^{(i)} + a_1\varphi_{n-1}^{(i)} + \dots + a_k\varphi_{n-k}^{(i)}) = \sum_{i=1}^{p} g_i(n) = f(n),$$

что и требовалось.

Методы поиска частного решения неоднородного соотношения

Опишем здесь метод подбора частного решения, вполне аналогичный таковому в теории линейных дифференциальных уравнений.

1) Если правая часть соотношения (12) имеет вид $c^n P^{(k)}(n)$, где $P^{(k)}(n)$ - полином степени k от n, причем c есть действительный корень кратности m характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения следует искать в виде:

$$Q_n = n^m c^n R^{(k)}(n), \qquad (13)$$

где $R^{(k)}(n)$ - полином степени k от n с неопределенными коэффициентами.

Если же число c не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищут в виде:

$$Q_n = c^n R^{(k)}(n). \qquad (14)$$

2) **Тригонометрическая неоднородность**: если правая часть соотношения имеет вид

$$f(n) = r^n (P^{(m)}(n)\cos n\varphi + Q^{(k)}(n)\sin n\varphi), \qquad (15)$$

то, если комплексное число $re^{i\varphi}$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения ищется в виде

$$g(n) = r^n (S^{(l)}(n)\cos n\varphi + T^{(l)}(n)\sin n\varphi), \qquad (16)$$

где $S^{(l)}, T^{(l)}$ - полиномы степени $l = \max(m, k)$ с неопределенными коэффициентами.

Если же число $re^{i\varphi}$ есть корень характеристического уравнения кратности s, то указанное выше выражение (16) для функции $g(n)$ следует умножить на n^s.

Примеры. При рассмотрении тригонометрической неоднородности целесообразно сначала привести такие простые примеры.

Решим соотношение:

$$x_n = -x_{n-2} + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Поскольку корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, то согласно формуле (16) частное решение следует искать в виде

$$x_n^{ч.н.} = n(A\cos\frac{n\pi}{2} + B\sin\frac{n\pi}{2}),$$

где A и B – неопределенные константы. Их можно найти, подставляя написанное выше выражение в исходное соотношение при $n = 2$ и при $n = 3$.

Будем иметь: если $n = 2$, то получим уравнение для определения A:

$2(-A) = 0 + (-1)$, откуда $A = ½$.

При $n = 3$ получим:

$3(-B) = B$, т.е. $B = 0$.

Итак, $x_n^{ч.н.} = \frac{1}{2} n \cos\frac{n\pi}{2}$, а общее решение соотношения будет иметь вид:

$$x_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{2} + C_2 \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} n \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Вместе с разобранным разумно рассмотреть и такой пример:

$$x_n = x_{n-2} + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

В данном случае, поскольку корни характеристического уравнения суть ± 1, то частное решение неоднородного соотношения ищем в виде

$$x_n^{ч.н.} = A \cos\frac{n\pi}{2} + B \sin\frac{n\pi}{2}$$

Аналогично предыдущему получим, что $A = ½$, $B = 0$, и общее решение неоднородного соотношения запишется в виде:

$$x_n = C_1 + C_2 (-1)^n + \frac{1}{2} n \cos\frac{n\pi}{2}.$$

После этого, обсуждая тригонометрическую неоднородность, интересно рассмотреть вычисление некоторых сумм, например, сумм косинусов или синусов.

Для того, чтобы найти сумму косинусов

$$S_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha,$$

Достаточно решить рекуррентное соотношение

$$S_n - S_{n-1} = \cos n\alpha, n \geq 2$$

при начальном условии

$$S_1 = \cos\alpha,$$

(полагая, что $\alpha \neq 2\pi k, k \in Z)$.

Решение (подробно изложенное в [5]) даст следующий результат:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + n\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right).$$

Аналогично можно доказать, что сумма синусов

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + ... + \sin n\alpha = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{n\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin n\alpha$$

(также при $\alpha \neq 2\pi k, k \in Z)$.

Полученные результаты имеют важное значение, так как из них вытекает, что найденные суммы ограничены в совокупности, то есть, найдется такое конечное число *M*, что для любого n $S_n \leq M$. Это важно при исследовании числовых знакопеременных рядов с использованием признака Абеля-Дирихле [6]. Таким образом, мы имеем возможность и здесь демонстрировать единство всех разделов курса математики.

2. Курс повышенной трудности

В рамках этого курса можно дать подробные доказательства теорем, сформулированных выше без доказательства. Некоторые доказательства этого раздела заимствованы из [7], некоторые являются оригинальными.

Разностные операторы

Прежде всего необходимо установить связь между *разностным оператором*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

и *оператором сдвига*

$$f(x) \mapsto f(x+n),$$

что позволит связать линейные рекуррентные соотношения с разностными уравнениями.

Докажем, что

$$f(x+n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x) \tag{17}$$

Замечание. В общем случае разностный оператор определяется так:

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

где h – приращение аргумента. Мы тут всюду полагаем $h = 1$.

Операторы высших разностей определяются согласно формуле

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)).$$

Нелишне напомнить в этом месте об основных свойствах разностного оператора, которые вполне аналогичны свойствам оператора дифференцирования. В частности, для дальнейшего важно отметить, что применение разностного оператора к полиному понижает степень полинома на единицу. Это основано на простой формуле

$$\Delta x^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k}.$$

Переходим к выводу формулы (17).

Индукция по n: при $n = 1$ имеем $f(x+1) = f(x) + \Delta f(x)$.

Ссылаясь на индукционное предположение, выведем формулу для $f(x+n+1)$:

$$f(x+n+1)= f(x+n)+\Delta f(x+n)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x)+\Delta(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^k f(x))=$$
$$= f(x)+n\Delta f(x)+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots+\Delta^n f(x)+$$
$$+\Delta f(x)+n\Delta^2 f(x)+\frac{n(n-1)}{2}\Delta^3 f(x)+\ldots+\Delta^{n+1} f(x)=$$
$$= f(x)+(n+1)\Delta f(x)+\frac{n(n+1)}{2}\Delta^2 f(x)+\ldots+\Delta^{n+1} f(x).$$

Коэффициент при $\Delta^k f(x)$ будет равен (в силу известного свойства биномиальных коэффициентов) $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, что и требовалось.

Аналогично можно показать, что

$$\Delta^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x+n-k). \qquad (18)$$

Таким образом, разностные уравнения и рекуррентные соотношения взаимно сводимы. Этот результат проливает дополнительный свет на связь между линейными рекуррентами и линейными дифференциальными уравнениями. Кроме того, формула (17) будет существенно использована далее при определении вида частного решения однородного соотношения в случае кратных корней характеристического уравнения.

Доказательство линейной независимости решений линейного однородного рекуррентного соотношения

1) *Попарно различные корни характеристического уравнения*

Индукцией по k докажем, что система последовательностей $(\lambda_1^n,\ldots,\lambda_k^n)$ линейно независима.

Базис тривиален. Пусть для любого $k \le m-1$ для некоторого фиксированного m система $(\lambda_1^n,\ldots,\lambda_k^n)$ линейно независима. Положим $k=m$ и предположим, что существует нетривиальная линейная комбинация

$$\alpha_1\lambda_1^n + \ldots + \alpha_m\lambda_m^n \equiv 0 \qquad (19)$$

Заменим в (19) n на $n-1$ и, умножив полученное тождество на λ_m, вычтем его из тождества (19); получим

$$\alpha_1\lambda_1^{n-1}(\lambda_1 - \lambda_m) + \ldots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1}^{n-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) \equiv 0. \qquad (20)$$

Так как по предположению индукции последовательности $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_{m-1}^n$ линейно независимы, то в линейной комбинации (4) все коэффициенты должны быть равны нулю, но поскольку все $\lambda_j - \lambda_m \neq 0, j = \overline{1, m-1}$, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$. Тогда из (19) получаем $\alpha_m\lambda_m^n = 0$, откуда, так как все корни отличны от нуля, $\alpha_m = 0$, и линейная комбинация (3) тривиальна вопреки предположению.

Итак, система $(\lambda_1^n, \ldots, \lambda_k^n)$ линейно независима для любого k.

Замечание. Можно доказать тот же результат, рассмотрев определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

(*определитель Вандермонда*), равный, как известно, $\prod\limits_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$, что при попарно различных λ_i отлично от нуля.

2) Кратные корни характеристического уравнения

Пусть λ - корень кратности s. Докажем, что последовательности $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{s-1}\lambda^n$ линейно независимы. Пусть для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ имеет место $\alpha_1\lambda^n + \alpha_2 n\lambda^n \ldots + \alpha_s n^{s-1}\lambda^n \equiv 0$. Деля на λ^n, получим $\alpha_1 + \alpha_2 n \ldots + \alpha_s n^{s-1} \equiv 0$, что, очевидно, может иметь место только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$.

Предположим, что доказана линейная независимость последовательностей $\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \ldots, n^{s_1-1}\lambda_1^n, \ldots, \lambda_m^n, n\lambda_m^n, \ldots, n^{s_m-1}\lambda_m^n$ для любого числа $m \leq p-1$ попарно различных кратных корней кратностей $s_1,\ldots,s_m$ соответственно. Полагая $m = p$, составим линейную комбинацию $\alpha_1^{(1)}\lambda_1^n + \alpha_2^{(1)} n\lambda_1^n + \ldots + \alpha_{s_1}^{(1)} n^{s_1-1}\lambda_1^n + \ldots + \alpha_1^{(p)}\lambda_p^n + \alpha_2^{(p)} n\lambda_p^n + \ldots + \alpha_{s_p}^{(p)} n^{s_p-1}\lambda_p^n \equiv 0$,

что можно записать в виде

$$R_1^{(s_1-1)}(n)\lambda_1^n + \ldots + R_p^{(s_p-1)}(n)\lambda_p^n \equiv 0, \tag{21}$$

где $R_1^{(s_1-1)}(n),\ldots,R_p^{(s_p-1)}(n)$ - многочлены от n степеней $s_1-1,\ldots,s_p-1$ соответственно.

Разделив (21) на λ_p^n и применив к полученному тождеству s_p раз разностный оператор Δ (т.е., подействуем оператором Δ^{s_p}). Тогда многочлен $R_p^{(s_p-1)}(n)$ исчезнет. Теперь рассмотрим действие разностного оператора на произведение многочлена и показательной функции. Именно, применим к выражению $P^{(l)}(x)\lambda^x$, где $P^{(l)}$- многочлен степени l от x, а число $\lambda \neq 1$, разностный оператор Δ. Согласно известному правилу применения разностного оператора к произведению функций, а именно, $\Delta(fg) = f\Delta g + g(x+1)\Delta f$, будем иметь:

$$\Delta(P^{(l)}(x)\lambda^x) = P^{(l)}(x)\lambda^x(\lambda-1) + \lambda^{x+1}\Delta P^{(l)}(x), \tag{22}$$

откуда видно, что применение разностного оператора к произведению многочлена и экспоненты, отличной от единицы, сохраняет степень многочлена, и формулу (22) можно переписать в виде:

$$\Delta(P^{(l)}(x)\lambda^x) = Q^{(l)}(x)\lambda^x, \tag{22a}$$

где $Q^{(l)}(x)$ - некоторый многочлен степени l от x, в котором сохранены также все коэффициенты исходного многочлена $P^{(l)}(x)$ (некоторые из них умножаются на λ).

Тогда применение разностного оператора к формуле (5), разделенной на λ_p^n даст для некоторых многочленов $Q_1^{(s_1-1)}(n),\ldots,Q_{p-1}^{(s_{p-1}-1)}(n)$ тождество

$$Q_1^{(s_1-1)}(n)\mu_1^n + \ldots + Q_{p-1}^{(s_{p-1}-1)}(n)\mu_{p-1}^n \equiv 0, \tag{23}$$

где $\mu_j = \dfrac{\lambda_j}{\lambda_p}$, $j = \overline{1, p-1}$. Заметим, что все μ_j отличны от единицы.

По предположению индукции из тождества (23) следует, что все многочлены $Q_1^{(s_1-1)}(n), \dots, Q_{p-1}^{(s_{p-1}-1)}(n)$ тождественно равны нулю. Остается показать, что тогда все коэффициенты $\alpha_j^{(i)}, i = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, s_i}$, равны нулю. Но в силу формул (22) и (22а) тождественное равенство фигурирующего в них многочлена нулю означает, что все коэффициенты многочлена $P^{(l)}$ обращаются в нуль.

Итак, все коэффициенты $\alpha_j^{(i)}, i = \overline{1, p-1}, j = \overline{1, s_i}$, равны нулю, и тогда

$\alpha_1^{(p)}\lambda_p^n + \alpha_2^{(p)} n\lambda_p^n + \dots + \alpha_{s_p}^{(p)} n^{s_p-1}\lambda_p^n \equiv 0$, откуда $\alpha_1^{(p)} = \alpha_2^{(p)} = \dots = \alpha_{s_p}^{(p)} = 0$, что и завершает доказательство.

Определение вида решения однородного соотношения при кратных корнях характеристического уравнения

Пусть λ - корень кратности s характеристического уравнения линейного однородного соотношения (4).

Будем искать решение в виде $\varphi(n)\lambda^n$, где $\varphi(n)$ - некоторая (неизвестная) последовательность.

Перепишем исходное соотношение (4) в виде

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n = 0 \qquad (24)$$

и подставим в него искомое решение:

$$\varphi(n+k)\lambda^{n+k} + a_1\varphi(n+k-1)\lambda^{n+k-1} + \dots + a_k\varphi(n)\lambda^n = 0. \qquad (25)$$

Сокращая на λ^n, получим

$$\varphi(n+k)\lambda^k + a_1\varphi(n+k-1)\lambda^{k-1} + \dots + a_k\varphi(n) = 0 \qquad (26)$$

Используя формулу (17), запишем:

$$\varphi(n+k)=\sum_{l=0}^{k}C_k^l\Delta^l\varphi(n)=\varphi(n)+k\Delta\varphi(n)+\frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2\varphi(n)+...+\Delta^k\varphi(n),$$

$$\varphi(n+k-1)=\sum_{l=0}^{k-1}C_k^l\Delta^l\varphi(n)=\varphi(n)+(k-1)\Delta\varphi(n)+\frac{(k-1)(k-2)}{2!}\Delta^2\varphi(n)+...+\Delta^{k-1}\varphi(n),$$

$$\varphi(n+k-2)=\sum_{l=0}^{k-2}C_k^l\Delta^l\varphi(n)=\varphi(n)+(k-2)\Delta\varphi(n)+\frac{(k-2)(k-3)}{2!}\Delta^2\varphi(n)+...+\Delta^{k-2}\varphi(n),$$

…………………………………………………………………………………..

$$\varphi(n+2)=\varphi(n)+2\Delta\varphi(n)+\Delta^2\varphi(n),$$

$$\varphi(n+1)=\varphi(n)+\Delta\varphi(n),$$

$$\varphi(n)=\varphi(n).$$

Умножая первое из этих тождеств на λ^k, второе – на $a_1\lambda^{k-1}$, третье – на $a_2\lambda^{k-2}$ и т. д., последнее – на a_k, и складывая почленно, получим в силу (26):

$$\begin{aligned}&(\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+...+a_k)\varphi(n)+\\&+(k\lambda^k+a_1(k-1)\lambda^{k-1}+...+a_{k-1}\lambda)\Delta\varphi(n)+\\&+(\frac{k(k-1)}{2!}\lambda^k+a_1\frac{(k-1)(k-2)}{2!}\lambda^{k-1}+...+a_{k-2}\lambda^2)\Delta^2\varphi(n)+...+\\&+(C_k^l\lambda^k+a_1C_{k-1}^l\lambda^{k-1}+...+a_{k-l}\lambda^l)\Delta^l\varphi(n)+...+\lambda^k\Delta^k\varphi(n)=0.\end{aligned}\qquad(27)$$

Нетрудно понять, что множитель при $\Delta^l\varphi(n)$ может быть представлен в виде $\frac{\lambda^l}{l!}\frac{d^l}{d\lambda^l}P(\lambda)$, где $P(\lambda)$ - характеристический полином. Следовательно, тождество (27) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}&P(\lambda)\varphi(n)+\lambda^kP'(\lambda)\Delta\varphi(n)+\frac{\lambda^2}{2!}P''(\lambda)\Delta^2\varphi(n)+...+\\&+\frac{\lambda^l}{l!}\frac{d^l}{d\lambda^l}P(\lambda)\Delta^l\varphi(n)+...+\frac{\lambda^k}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}P(\lambda)\Delta^k\varphi(n)=0.\end{aligned}\qquad(28)$$

Поскольку λ - корень кратности s, все производные характеристического полинома до $(s-1)$-го порядка включительно обратятся в нуль, и мы получим

$$\frac{\lambda^s}{s!}\frac{d^s}{d\lambda^s}P(\lambda)\Delta^s\varphi(n)+...+\frac{\lambda^k}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}P(\lambda)\Delta^k\varphi(n)=0. \qquad (29)$$

Понятно тогда, что соотношению (29) удовлетворяет любой многочлен степени не выше $s-1$, и можно в качестве $\varphi(n)$ взять любую из степеней $n: 1, n, n^2, ..., n^{s-1}$.

Следовательно, каждый корень кратности s позволяет получить s линейно независимых решений в виде $\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, ..., n^{s-1}\lambda^n$ при условии вещественности λ и соответственно $2s$ линейно независимых решений при комплексном λ.

Заключение

Рассмотренная в статье методика изложения теоретического материала в разделе комбинаторного анализа, посвященного линейным рекуррентным соотношениям, при сравнительной простоте доказательств (в базовой части) позволяет с единой точки зрения осмыслить разные разделы курса математики, прослеживая структурную аналогию между теорией рекуррентных соотношений и теорией дифференциальных уравнений, чему в известной нам учебной литературе не уделяется должного внимания.

Кроме того, предлагаемое разделение курса на две части, базовую (для бакалавров) и повышенной трудности (для магистров) позволяет лектору обеспечить такое изложение материала, когда на базовом уровне дается четкое общее представление о структуре предмета, а переход к более сложным вопросам дает возможность углубить понимание некоторых важных деталей доказательств.

Рассмотренная в статье система изложения опробована на многолетнем опыте преподавания курса дискретной математики в МГТУ им. Н.Э. Баумана студентам программистских специальностей.

Литература

1. Дж. Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003. – 960 с.

2. В.Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики.- 2-е изд., испр. И доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 424 с.

3. Н.Я. Виленкин. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

4. С.Д. Шапорев. Дискретная математика Курс лекций и практических занятий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 400 с.

5. А.И. Белоусов, П.А. Власов. Элементы комбинаторики: метод. указания к выполнению домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 53 с.
6. Е.А. Власова. Ряды. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 612 с.
7. А.О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1959. – 400 с.