Лекция №20

04.12.24

3. Линейные рекуррентные соотношения

Основные понятия

Пусть дана числовая последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$, причем она не определена явно как функция натуральной переменной, но всякий ее член выражается через k предыдущих (для фиксированного k) в виде:

$$x_n = \varphi(x_{n-1},...,x_{n-k}) + f(n) \qquad (1)$$

В этом случае соотношение (1) называют ***рекуррентным соотношением*** k***-го порядка***. При $f(n)=0$ соотношение называют ***однородным***.

Всякая последовательность y_n (пишем впредь без фигурных скобок), которая обращает соотношение (1) в тождество, называется ***решением*** этого ***соотношения***.

Поскольку не должно быть отрицательных индексов, то необходимо в (1) положить $n \geq k$. Это значит, что первые k членов последовательности $\{x_n\}_{n\geq 0}$ ($x_0,...,x_{k-1}$) можно выбирать произвольно. Пусть

$$x_0 = \alpha_0,...,x_{k-1} = \alpha_{k-1} \qquad (2)$$

Равенства (2) называются ***начальными условиями***. Тогда может быть поставлена задача отыскания решения соотношения (1) при начальных условиях (2). Это аналог задачи Коши для дифференциального уравнения порядка k.

Если функция φ в (1) линейна по своим аргументам, то такое соотношение называют ***линейным***. Будем, как правило, записывать линейное рекуррентное соотношение в виде:

$$x_n + a_1(n)x_{n-1} + ... + a_k(n)x_{n-k} = f(n) \qquad (3)$$

В соотношении (3) последовательности $a_i(n), i=1,...,k$ называют ***коэффициентами***, а последовательность $f(n)$ - ***правой частью***. В случае нулевой правой части получаем ***однородное линейное рекуррентное соотношение***.

Здесь мы ограничимся рассмотрением только линейных соотношений ***с постоянными коэффициентами***, полагая, что все последовательности $a_i(n), i = 1,...,k$ суть числа (как правило, вещественные).

Однородные линейные рекуррентные соотношения

Общий вид соотношения (k-го порядка):

$$x_n + a_1 x_{n-1} + ... + a_k x_{n-k} = 0 \qquad (4)$$

Теорема 1. Пусть $y_n^{(1)}$ и $y_n^{(2)}$ - решения соотношения (4). Тогда произвольная линейная комбинация их также является решением соотношения (4).

Доказательство. Пусть $\varphi_n = C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)}$. Подставляя φ_n в (4), будем иметь:

$$C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + a_1(C_1 y_{n-1}^{(1)} + C_2 y_{n-1}^{(2)}) + ... + a_k(C_1 y_{n-k}^{(1)} + C_2 y_{n-k}^{(2)}) =$$
$$= C_1(y_n^{(1)} + a_1 y_{n-1}^{(1)} + ... + a_k y_{n-k}^{(1)}) + C_2(y_n^{(2)} + a_1 y_{n-1}^{(2)} + ... + a_k y_{n-k}^{(2)}) \equiv 0,$$

что и требовалось.

Следствие. Множество решений соотношения (4) образует подпространство в пространстве всех последовательностей (над полем комплексных чисел).

В этом месте целесообразно напомнить некоторые положения из курса линейной алгебры. В частности, вернуться к примеру линейного пространства (над полем действительных чисел), элементами которого являются числовые последовательности.

Очевидно, что соотношение (4) всегда имеет тривиальное нулевое решение. Докажем, что существуют (в общем случае) и ненулевые решения.

Будем искать решение (4) в виде $y_n = \lambda^n$ для какого-то (в общем случае, комплексного) числа λ.

Имеем:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_k \lambda^{n-k} = 0,$$

или

$$\lambda^{n-k}(\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + ... + a_{k-1}\lambda + a_k) = 0.$$

Так как нулевое решение уже учтено, то получаем:

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + ... + a_{k-1}\lambda + a_k = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) называется ***характеристическим уравнением*** соотношения (4), а его правая часть – ***характеристическим многочленом*** соотношения (4).

Итак, если λ - корень характеристического уравнения соотношения (4), то последовательность λ^n является решением.

Тем самым доказано существование решения соотношения (4).

Здесь уместно как раз напомнить, в каком виде искалось решение однородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + ... + a_{k-1} y + a_k = 0 .$$

Оно, как хорошо известно, искалось в виде $y = e^{\lambda x}$. Тут и возникает основное структурное соответствие между видом решений дифференциальных уравнений и линейных рекуррентов: *экспоненте* $y = e^{\lambda x}$ *отвечает показательная функция натурального аргумента* λ^n .

Это соответствие играет важную роль, позволяя определять вид частных решений однородных соотношений, а также подбирать частные решения неоднородных соотношений (о чем пойдет речь ниже).

Пример 1. Пусть $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при $n \geq 2$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Тогда обе последовательности $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ и $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ будут решениями исходного соотношения.

Всякую конкретную последовательность, являющуюся решением соотношения (4), называют ***частным решением***.

В следующей теореме важно подчеркнуть, что не только начальные условия определяют частное решение, но и наоборот: заданное частное решение есть решение, полученное при однозначно определенных начальных условиях.

Теорема 2. Существует единственное частное решение соотношения (4), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Наоборот, любое частное решение соотношения (4) однозначно определяет начальные условия, которым оно удовлетворяет.

Перед доказательством заметим, что второе утверждение теоремы весьма важно, но почему-то в литературе ему не уделяется должного внимания.

Доказательство. Пусть выполняются начальные условия вида (2):

$$y_0 = \alpha_0, ..., y_{k-1} = \alpha_{k-1} \tag{6}$$

Тогда, в силу (4) $y_k = -a_1 y_{k-1} - ... - a_k y_0$, и далее для любого $s > 0$ $y_{k+s} = -a_1 y_{k+s-1} - ... - a_k y_s$, и член y_n определен однозначно для любого $n \geq 0$.

Пусть теперь y_n - какое-то частное решение соотношения (4). Покажем, что числа

$\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}$ можно подобрать так, чтобы выполнялось (6).

Имеем:

$$
\begin{aligned}
&y_k + a_1 \alpha_{k-1} + ... + a_k \alpha_0 = 0, \\
&y_{k+1} + a_1 y_k + a_2 \alpha_{k-1} ... + a_k \alpha_1 = 0 \\
&.. \\
&y_{2k-1} + a_1 y_{2k-2} + a_2 y_{2k-3} + ... + a_{k-1} y_k + a_k \alpha_{k-1} = 0.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

или

$$y_{k+j} + a_1 y_{k+j-1} + ... + a_k \alpha_j = 0 (0 \leq j \leq k-1)$$

Система (7) есть система относительно неизвестных $\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}$, заданная в треугольной форме. Из последнего уравнения однозначно определяется α_{k-1}, и далее («обратным ходом» метода Гаусса) все остальные неизвестные до α_0 включительно (при условии, что $a_k \neq 0$, но это в соотношении (4) и предполагается, так как иначе порядок соотношения будет меньше k [1]).

Следствие. Любое частное решение соотношения (4) является решением, удовлетворяющим некоторым, однозначно определенным, начальным условиям вида (2).

В частности, нулевое решение определяет нулевые начальные условия и обратно.

Пример 2. Для решения $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ соотношения примера 1 запишем такую систему:

---

[1] Условие $a_k \neq 0$ влечет, что все корни характеристического уравнения отличны от нуля, так как иначе будет равно нулю и их произведение, равное по теореме Виета, как раз коэффициенту a_k.

$$y_2 = \alpha_0 + \alpha_1$$
$$y_3 = \alpha_1 + y_2,$$

откуда

$$\alpha_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$
$$\alpha_0 = 1.$$

Произвольная линейно независимая система $(y_n^{(1)},\dots,y_n^{(k)})$ решений соотношения (4) называется ***фундаментальной системой решений*** (ФСР), а ее компоненты – ***фундаментальными решениями***.

Теорема 3. Любое решение соотношения (4) является линейной комбинацией фундаментальных решений.

Доказательство. Докажем, что каковы бы ни были начальные условия вида (2), которым должна удовлетворять линейная комбинация $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k} C_i y_n^{(i)}$, ее коэффициенты однозначно определяются этими начальными условиями. Этого достаточно в силу того, что каждое решение однозначно определено начальными условиями и обратно.

Имеем такую систему для определения этих коэффициентов:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{(i)} = \alpha_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{(i)} = \alpha_{k-1} \end{cases} \qquad (8)$$

(то есть $\varphi_j = \alpha_j, 0 \le j \le k-1$).

Главный определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_0^{(1)} \dots y_0^{(k)} \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{k-1}^{(1)} \dots y_{k-1}^{(k)} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

отличен от нуля.

Действительно, если бы он был равен нулю, то *однородная* система, соответствующая системе (8), имела бы ненулевое решение, т.е. нашлись бы коэффициенты $C_i, i = 1,...,k$, не все равные нулю, для которых бы выполнялось

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{(i)} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{(i)} = 0, \end{cases}$$

т.е. решение, являющееся нетривиальной линейной комбинацией фундаментальных решений, удовлетворяет нулевым начальным условиям ($\varphi_j = 0, 0 \le j \le k-1$) и, следовательно, в силу теоремы 2, само является нулевым, то есть $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k} C_i y_n^{(i)} \equiv 0$ и существует нетривиальная линейная комбинация фундаментальных решений, равная нулю тождественно. Но это невозможно в силу линейной независимости фундаментальных решений.

Итак, $\Delta \ne 0$, система (8) имеет единственное решение, и коэффициенты линейной комбинации фундаментальных решений однозначно определяются начальными условиями, которым она должна удовлетворять.

Полезно заметить при доказательстве рассмотренной теоремы, что определитель (9) есть аналог определителя Вронского в теории линейных дифференциальных уравнений.

Форма $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k} C_i y_n^{(i)}$, определяющая произвольную линейную комбинацию фундаментальных решений, называется ***общим решением*** соотношения (4). Это значит, что любое частное решение (4) может быть получено при определенных значениях коэффициентов (произвольных констант) $C_i, i = 1,...,k$ (при заданной ФСР).

Из теоремы 3 следует также, что пространство решений однородного соотношения (4) является конечномерным, и его размерность совпадает с порядком соотношения.

Пример 3. Для соотношения примера 1 зададим начальные условия $x_0 = 0, x_1 = 1$. Тогда $x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 8, \dots$ Эта последовательность, как известно, называется ***последовательностью Фибоначчи***[2]. Можно показать, что последовательности $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ и $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ линейно независимы. Общее решение

$C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Удовлетворяем начальным условиям:

$$\begin{aligned}&C_1+C_2=0\\&C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1\end{aligned},$$

откуда $C_1=\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Теорема 4. Если частные решения $y_n^{(1)},\ldots,y_n^{(k)}$ соотношения (4) линейно зависимы, то определитель (9) равен нулю.

Доказательство. Линейная зависимость указанных в условии теоремы решений означает, что существует их нетривиальная линейная комбинация, обращающаяся в нуль, т.е. для некоторых, не равных нулю одновременно, чисел $C_1,\ldots,C_k$ выполняется:

$$C_1y_n^{(1)}+\ldots+C_ky_n^{(k)}\equiv 0.$$

Поскольку всякое частное решение соотношения (4) есть решение, удовлетворяющее определенным начальным условиям, то для этих условий получим:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{k}C_iy_0^{(i)}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum_{i=1}^{k}C_iy_{k-1}^{(i)}=0,\end{cases}$$

откуда и следует, что главный определитель (9) этой системы равен нулю (так как она имеет ненулевое решение).

---

[2] При *произвольных* начальных условиях соотношение примера 1 определяет последовательность, которая называется ***последовательностью Лукаса***.

Структура ФСР соотношения (4) и вид фундаментальных решений определяются свойствами корней характеристического уравнения (5).

Теорема 5. Если λ_1 и λ_2 различные корни уравнения (5), действительные или комплексные, то решения λ_1^n и λ_2^n линейно независимы.

Доказательство. Определитель (9) из доказательства теоремы 3 в данном случае имеет вид:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, откуда и следует доказываемое.

Этот результат можно обобщить и доказать, что если $\lambda_1, ..., \lambda_k$ - попарно различные корни характеристического уравнения, то система $(\lambda_1^n, ..., \lambda_k^n)$ линейно независима.

Это можно доказать, рассмотрев определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_k \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & ... & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

(*определитель Вандермонда*), являющийся в данном случае определителем (9), и равный, как известно, $\prod_{i>j}(\lambda_i - \lambda_j)$, что при попарно различных λ_i отлично от нуля.

Следовательно, для соотношения (4) в этом случае она может быть взята за ФСР.

Без доказательства сформулируем следующую теорему:

Теорема 6. Если λ - корень уравнения (5), действительный или комплексный, кратности s, то последовательности $\lambda^n, n\lambda^n, ..., n^{s-1}\lambda^n$ являются линейно независимыми решениями соотношения (4).

Это утверждение также обобщается, а именно, если $\lambda_1, ..., \lambda_m$ - корни характеристического уравнения соотношения (4), имеющие кратности $s_1, ..., s_m$ соответственно, причем $s_1 + ... + s_m = k$, то решения $\lambda_1^n, n\lambda_1^n, ..., n^{s_1-1}\lambda_1^n, ..., \lambda_m^n, n\lambda_m^n, ..., n^{s_m-1}\lambda_m^n$ образуют ФСР соотношения (4).

Лекция №21

06.12.24

Комплексные корни характеристического уравнения

В комплексной алгебре доказывается, что алгебраическое уравнение произвольной степени с действительными коэффициентами вместе с каждым комплексным корнем имеет и сопряженное число в качестве корня. То есть в таких уравнениях комплексные корни могут быть только комплексно-сопряженными парами.

Поэтому, если ограничиться только линейными рекуррентами с действительными коэффициентами и линейные комбинации последовательностей брать только с действительными коэффициентами, то каждой паре $re^{\pm i\varphi}$ комплексно-сопряженных корней кратности s характеристического уравнения можно сопоставить $2s$ линейно независимых решений:

$$r^n \cos n\varphi, nr^n \cos n\varphi, \ldots, n^{s-1} r^n \cos n\varphi,$$
$$r^n \sin n\varphi, nr^n \sin n\varphi, \ldots, n^{s-1} r^n \sin n\varphi.$$

Это вытекает из того, что при $\lambda = re^{i\varphi}$ имеем $\lambda^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$, и указанные выше решения соответствуют действительной и мнимой частям *n*-ой степени комплексного корня.

Пример. Рассмотрим соотношение

$$x_n + 2x_{n-4} + x_{n-8} = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^8 + 2\lambda^4 + 1 = 0,$$
$$(\lambda^4 + 1)^2 = 1.$$

Корнями этого уравнения будут все корни 4-й степени из -1, причем каждый корень имеет кратность 2.

Корни 4-й степени из -1 вычисляются так:

$$w = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, k = 0,1,2,3.$$

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} (k=0),$$

$$w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} (k=1),$$

$$w_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} (k=2),$$

$$w_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} (k=3)$$

Эти числа располагаются в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, диагонали которого лежат на биссектрисах координатных углов. Среди них нет ни одного действительного корня.

(См. Дополнение и рисунок ниже.)

Общее решение соотношения будет иметь вид:

$$y_n = C_1\cos\frac{n\pi}{4} + C_2 n\cos\frac{n\pi}{4} + C_3\sin\frac{n\pi}{4} + C_2 n\sin\frac{n\pi}{4} +$$

$$+C_5\cos\frac{3n\pi}{4} + C_6 n\cos\frac{3n\pi}{4} + C_7\sin\frac{3n\pi}{4} + C_8 n\sin\frac{3n\pi}{4}.$$

Примеры из файла «Семинар 8».

Неоднородные линейные рекуррентные соотношения

Теорема 7. Любое решение соотношения

$$x_n + a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} = f(n) \qquad (10)$$

может быть представлено в виде:

$$\varphi_n = y_n^{н} + \sum_{i=1}^{k} C_i y_n^{o,(i)}, \qquad (11)$$

где $y_n^{н}$ - произвольное частное решение неоднородного соотношения (10), $(y_n^{o,(1)},\ldots,y_n^{o,(k)})$ - ФСР однородного соотношения (4), а $C_1,\ldots,C_k$ - произвольные постоянные.

Доказательство.

Во-первых, легко проверить прямой подстановкой, что последовательность (11) является решением соотношения (10).

Во-вторых, нетрудно доказать, что для произвольных начальных условий однозначно определяются константы C_i в выражении (11).

Имеем:

$$y_0^{н} + \sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{o,(i)} = \alpha_0$$

....

$$y_{k-1}^{н} + \sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{o,(i)} = \alpha_{k-1}$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} C_i y_0^{o,(i)} = \alpha_0 - y_0^{н}$$

....

$$\sum_{i=1}^{k} C_i y_{k-1}^{o,(i)} = \alpha_{k-1} - y_{k-1}^{н}$$

Главный определитель этой системы совпадает с главным определителем системы (8) и отличен от нуля в силу линейной независимости элементов ФСР. Таким образом, система имеет единственное решение в виде вектора констант $(C_1,...,C_k)^T$.

Замечание. Можно заметить, что переход от системы (8) к вышенаписанной (и связанным с этим анализом структуры общего решения неоднородного соотношения) эквивалентен изменению начальных условий для однородного соотношения.

Итак, общее решение неоднородного соотношения (10) есть сумма частного решения неоднородного соотношения и общего решения соответствующего однородного соотношения (4).

Следующая теорема определяет ***принцип суперпозиции*** для неоднородных соотношений.

Теорема 8. Пусть правая часть неоднородного соотношения (10) является суммой некоторых последовательностей:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{p} g_i(n),$$

и пусть последовательность $\varphi_n^{(i)}$ есть решение неоднородного соотношения с правой частью $g_i(n), i=1,\ldots,p.$

Тогда сумма $\theta_n=\sum_{i=1}^{p}\varphi_n^{(i)}$ является решением соотношения (10).

Доказательство. Имеем:

$$\theta_n+a_1\theta_{n-1}+\ldots+a_k\theta_{n-k}=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\varphi_n^{(i)}+a_1\sum_{i=1}^{p}\varphi_{n-1}^{(i)}+\ldots+a_k\sum_{i=1}^{p}\varphi_{n-k}^{(i)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}(\varphi_n^{(i)}+a_1\varphi_{n-1}^{(i)}+\ldots+a_k\varphi_{n-k}^{(i)})=\sum_{i=1}^{p}g_i(n)=f(n),$$

что и требовалось.

Методы поиска частного решения неоднородного соотношения

Опишем здесь метод подбора частного решения, вполне аналогичный таковому в теории линейных дифференциальных уравнений.

1) Если правая часть соотношения (10) имеет вид $c^nP^{(k)}(n)$, где $P^{(k)}(n)$ - полином степени k от n, причем c есть действительный корень кратности m характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения следует искать в виде:

$$Q_n=n^mc^nR^{(k)}(n), \tag{12}$$

где $R^{(k)}(n)$ - полином степени k от n с неопределенными коэффициентами.

Если же число c не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищут в виде:

$$Q_n=c^nR^{(k)}(n). \tag{13}$$

2) **Тригонометрическая неоднородность**: если правая часть соотношения имеет вид

$$f(n)=r^n(P^{(m)}(n)\cos n\varphi+Q^{(k)}(n)\sin n\varphi), \tag{14}$$

то, если комплексное число $re^{i\varphi}$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения ищется в виде

$$g(n) = r^n (S^{(l)}(n) \cos n\varphi + T^{(l)}(n) \sin n\varphi), \qquad (15)$$

где $S^{(l)}, T^{(l)}$ - полиномы степени $l = \max(m, k)$ с неопределенными коэффициентами.

Если же число $re^{i\varphi}$ есть корень характеристического уравнения кратности s, то указанное выше выражение (15) для функции $g(n)$ следует умножить на n^s.

Примеры. При рассмотрении тригонометрической неоднородности целесообразно сначала привести такие простые примеры.

Решим соотношение:

$$x_n = -x_{n-2} + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Поскольку корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\frac{\pi}{2}}$, то согласно формуле (15) частное решение следует искать в виде

$$x_n^{ч.н.} = n(A\cos\frac{n\pi}{2} + B\sin\frac{n\pi}{2}),$$

где *A* и *B* – неопределенные константы. Их можно найти, подставляя написанное выше выражение в исходное соотношение при *n* = 2 и при *n* = 3.

Будем иметь: если *n* = 2, то получим уравнение для определения *A*:

2(-*A*) = 0 + (-1), откуда *A* = ½.

При *n* = 3 получим:

3(-*B*) = *B*, т.е. *B* = 0.

Итак, $x_n^{ч.н.} = \frac{1}{2} n \cos\frac{n\pi}{2}$, а общее решение соотношения будет иметь вид:

$$x_n = C_1 \cos\frac{n\pi}{2} + C_2 \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2} n \cos\frac{n\pi}{2}.$$

Вместе с разобранным разумно рассмотреть и такой пример:

$$x_n = x_{n-2} + \cos\frac{n\pi}{2}.$$

В данном случае, поскольку корни характеристического уравнения суть ±1, то частное решение неоднородного соотношения ищем в виде

$$x_n^{ч.н.} = A\cos\frac{n\pi}{2} + B\sin\frac{n\pi}{2}$$

Аналогично предыдущему получим, что *A* = ½, *B* = 0, и общее решение неоднородного соотношения запишется в виде:

$$x_n = C_1 + C_2(-1)^n + \frac{1}{2}n\cos\frac{n\pi}{2}.$$

После этого, обсуждая тригонометрическую неоднородность, интересно рассмотреть вычисление некоторых сумм, например, сумм косинусов или синусов.

Для того, чтобы найти сумму косинусов

$$S_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha,$$

Достаточно решить рекуррентное соотношение

$$S_n - S_{n-1} = \cos n\alpha, n \geq 2$$

при начальном условии

$$S_1 = \cos\alpha,$$

(полагая, что $\alpha \neq 2\pi k, k \in Z)$.

Решение[3] даст следующий результат:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{\alpha}{2} + n\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right).$$

Аналогично можно доказать, что сумма синусов

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{n\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin n\alpha$$

(также при $\alpha \neq 2\pi k, k \in Z)$.

Полученные результаты имеют важное значение, так как из них вытекает, что найденные суммы ограничены в совокупности, то есть, найдется такое конечное

---

[3] См. А.И. Белоусов, П.А. Власов. Элементы комбинаторики: метод. указания к выполнению домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – С. 31-32.

число M, что для любого n $S_n \le M$. Это важно при исследовании числовых знакопеременных рядов.

Дополнение. Краткие сведения о комплексных числах

Формально комплексное число $z = (x, y), x, y \in \mathbb{R}$ есть упорядоченная пара действительных (вещественных) чисел, представляемая как точка декартовой плоскости.

На множестве таких пар вводятся операции:

1) Сложение: $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$;
2) Умножение: $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$.

Доказывается, что по определенным таким образом операциям комплексные числа образуют поле с нулем (0, 0) и единицей (1, 0).

Формы представления комплексных чисел

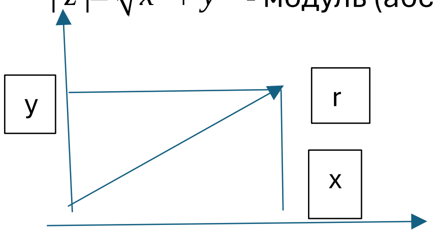
Алгебраическая форма:

$z = (x, y) = (x, 0) + (0,1)(y, 0) = x + iy, i^2 = -1, i = (0,1)$

$x = \operatorname{Re} z$ - *действительная часть* числа z,

$y = \operatorname{Im} z$ - *мнимая часть* числа z.

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль (абсолютная величина) числа z.



При этом число $x - iy$ называется *сопряженным* к z и обозначается $\bar{z}$. Понятно, что точки, соответствующие числу и сопряженному с ним, симметричны относительно действительной оси.

Тригонометрическая форма:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль числа z,

а угол φ - аргумент числа z – есть угол, образованный радиус-вектором точки z с положительным направлением оси абсцисс (действительной оси). Аргумент числа z, обозначаемый $Arg(z)$, является 2π -периодической функцией:

$Arg(z) = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$

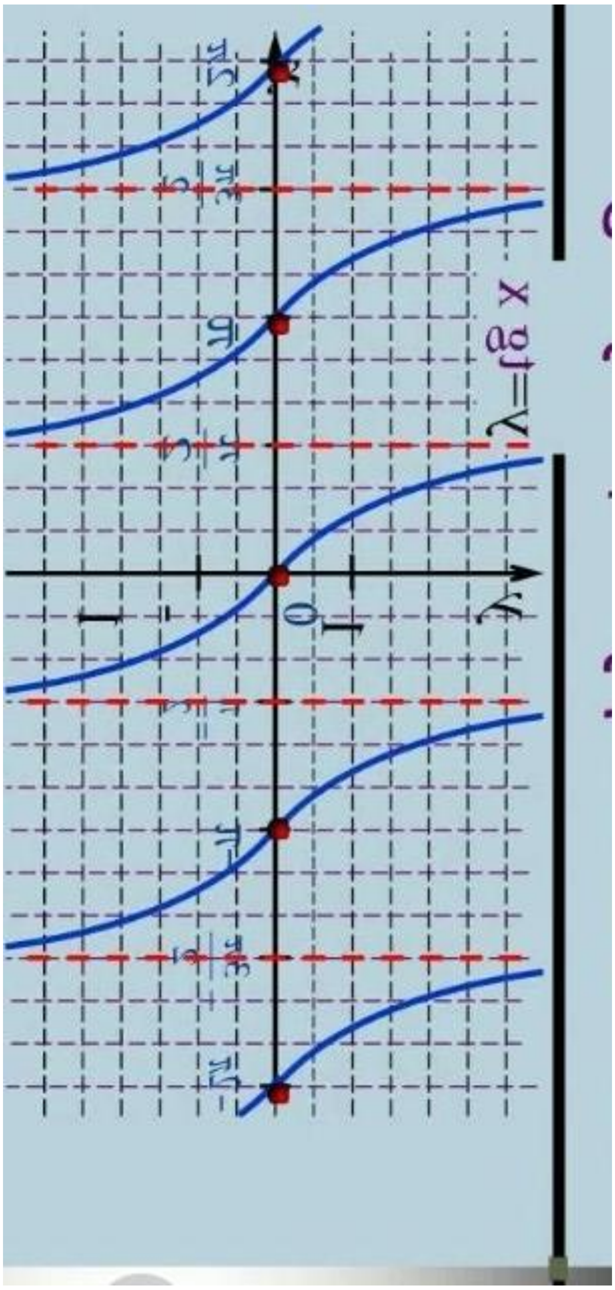
причем

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z},$$

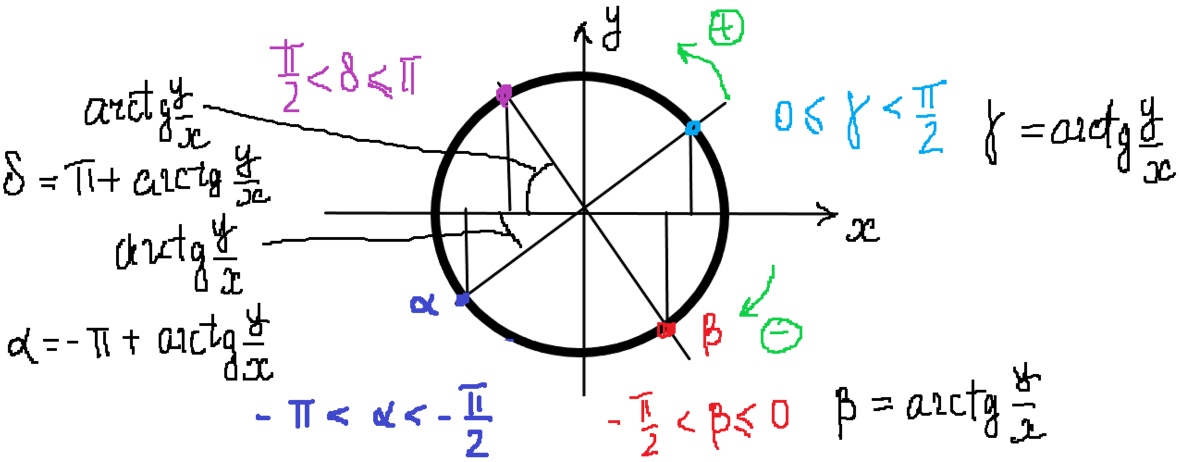
и главное значение аргумента, угла φ, рассматривается в промежутке $(-\pi, \pi]$, обозначается $\arg(z)$ и тогда

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, x > 0 \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, x < 0, y \ge 0 \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, x < 0, y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Эти соотношения легко усматриваются из графика большого арктангенса.



Можно пояснить и на тригонометрическом круге:



Углы α и β отрицательны. Малый арктангенс во втором квадранте отрицателен, а в третьем положителен.

Аргумент комплексного числа можно равносильно определить и так:

$$\arg z = \begin{cases} Arctg\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}, \operatorname{Re} z \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

Задавая комплексное число в тригонометрической форме, мы определяем его, как точку плоскости, в полярных координатах.

Определим теперь экспоненту с комплексным показателем.

Именно, по определению полагаем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Используя это определение, можно тригонометрическую форму преобразовать в показательную, более удобную при выполнении действий над комплексными числами:

$$z = re^{i\varphi} = |z|e^{i\arg z}, -\pi < \arg z \leq \pi .$$

При этом сопряженное число

$$\overline{z} = re^{-i\varphi}$$

Далее заметим, что

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Тогда *по определению* полагают:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Отсюда легко получаются формулы:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$
$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z$$
$$e^{z}=e^{-i(iz)}=\cos iz-i\sin iz.$$

Доказывается, что введенные таким образом элементарные функции комплексной переменной обладают всеми свойствами, которыми они обладали в вещественной области (сохраняются, в частности, вся таблица производных и правила дифференцирования), но появляются, конечно, новые свойства. Например, неограниченность по модулю синуса и косинуса.

Полезно иметь в виду и определения гиперболических функций:

$$shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2},chz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\ .$$

Отсюда получаем:

$$\sin z=-ishiz,$$
$$\cos z=chiz,$$
$$e^z=shz+chz.$$

Для чисел, заданных в показательной форме удобно вычислять произведение: $r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, то есть модули сомножителей перемножаются, а аргументы складываются.

Число, обратное произвольному ненулевому числу:

$$(a+ib)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2},$$
$$(re^{i\varphi})^{-1}=\frac{1}{r}e^{-i\varphi}.$$

Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел является расширением поля действительных чисел, образуемое путем добавления к последнему корней уравнения $x^2+1=0$[4].

Степени и корни

Выражение для произвольной целой степени комплексного числа легко получить, используя показательную форму:

$$z^n=(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),n\in\mathbb{Z}\ .$$

(Доказывается в комплексной алгебре, что все свойства степеней для действительных чисел сохраняются и для комплексных. Равно, как и свойства вещественной экспоненты.)

---

[4] О расширениях полей см. файл «Лекции 7-9», дополнения.

Таким образом, при возведении в целую степень модуль числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени, то есть аргумент ведет себя подобно логарифму.

Пример:

$$i^n = (e^{i\frac{\pi}{2}})^n = e^{i\frac{n\pi}{2}} = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}.$$

В частности, при n=-1 $i^{-1} = -i$, при n = 2 $i^2 = e^{i\pi} = -1$

Функция извлечения корня целой положительной степени определяется как функция, обратная функции возведения в целую положительную степень.

А именно, по определению

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z .$$

Пусть $z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\theta}$, тогда

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{i\varphi} .$$

Это запись равенства двух комплексных чисел. Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы совпадают с точностью до любого слагаемого, кратного 2π .

То есть

$$\rho = \sqrt[n]{r},$$
$$n\theta = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

откуда аргумент числа w определяется в виде:

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} .$$

Эта формула дает ровно n попарно различных значений аргумента при k=0,...,n-1.

Корни n-й степени из комплексного числа $z = re^{i\varphi}$, таким образом, находятся в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\rho = \sqrt[n]{r}$ и повернутого относительно положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки на угол $\frac{\varphi}{n}$.

Примеры.

1) $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}, k = 0,1,2.$

Получаем три числа:

$$w_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(k=0),$$
$$w_2 = e^{i\pi} = -1(k=1),$$
$$w_3 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(k=2)$$

Эти числа располагаются в вершинах правильного треугольника, вписанного в окружность единичного радиуса, одна из вершин которого лежит на оси абсцисс в точке (-1, 0).

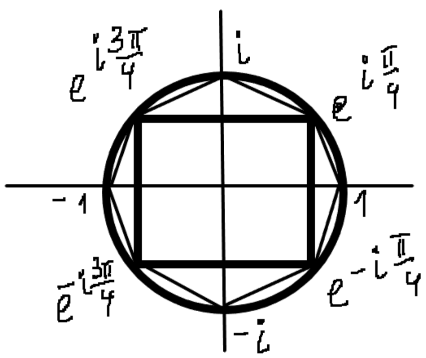
Заметим, что, если аргумент при непосредственном вычислении оказывается по модулю больше π, от полученного значения следует отнять 2π, чтобы попасть в область главных значений аргумента. Например, $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$.

2) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16e^{i\pi}} = 2e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, k = 0,1,2,3$.

Здесь мы имеем 4 корня, расположенные в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2, диагонали которого лежат на биссектрисах координатных углов:

$$w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}(k=0),$$
$$w_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}(k=1),$$
$$w_3 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}(k=2),$$
$$w_4 = 2e^{i\frac{7\pi}{4}} = 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}(k=3)$$

Заметим, что здесь возникают две комплексно-сопряженных пары: $w_3 = \bar{w}_2, w_4 = \bar{w}_1$. И нет ни одного действительного корня.



(На рисунке показаны корни 4-й степени из -1 и корни 8-й степени из +1.)

3) $\sqrt[5]{1+i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{5}} = \sqrt[10]{2}e^{i\frac{\pi+8\pi k}{20}}, k = \overline{0,4}.$

Перечислить явно полученные корни предлагается самостоятельно.

Логарифм

Логарифм определяется, естественно, как функция, обратная экспоненте:

$$w = Lnz \Leftrightarrow e^w = z \ .$$

Положим $z = re^{i\varphi}, w = u + iv$. Тогда

$$e^w = e^u e^{iv} = re^{i\varphi},$$

откуда

$$e^v = r \Rightarrow v = \ln r = \ln |z|,$$
$$v = \varphi + 2\pi k = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

То есть

$$Lnz = \ln |z| + i \arg z + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z} \ .$$

Это значит, что комплексный логарифм есть периодическая функция с чисто мнимым периодом $2\pi i$.

Функция

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

Называется главным значением логарифма.

Областью определения логарифма является вся комплексная плоскость, кроме точки (0, 0).

В комплексной области определен логарифмы отрицательных чисел, например:

$$Ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}; \ln(-1) = i\pi \ .$$

С помощью логарифма можно определить степенную и показательную функции для произвольных комплексных оснований и показателей степени, положив

$$z^a = e^{aLnz}, a^z = e^{zLna}.$$

Примеры

1)

$$(1+i)^i = e^{iLn(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4}+2\pi k))} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k) + i\ln\sqrt{2}} = e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k)} e^{i\ln\sqrt{2}} =$$
$$= e^{-(\frac{\pi}{4}+2\pi k)} (\cos\frac{\ln 2}{2} + i\sin\frac{\ln 2}{2}),$$
$$k \in \mathbb{Z}.$$

Если ограничиться главным значением логарифма, то получим следующее значение степени:

$$(1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\frac{\ln 2}{2} + i\sin\frac{\ln 2}{2}).$$

2) $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln(-1)} = e^{i\sqrt{2}(\pi+2\pi k)}$.

Рассматривая только главное значение, получим:

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln(-1)} = e^{i\sqrt{2}\pi} = \cos\pi\sqrt{2} + i\sin\pi\sqrt{2}.$$