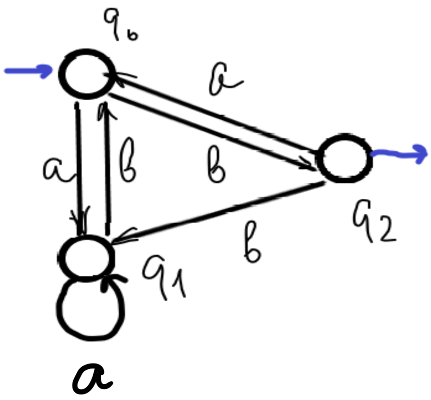
Некоторые задачи по конечным автоматам

1. Найти язык, допускаемый следующим конечным автоматом:



Система уравнений:

$$\begin{cases} x_0 = ax_1 + bx_2 \\ x_1 = bx_0 + ax_1 \\ x_2 = ax_0 + bx_1 + \lambda \end{cases}$$

Разумно на первой итерации исключить x_2, поскольку это неизвестное уже выражено через остальные. Получаем:

$$\begin{cases} x_0 = ax_1 + b(ax_0 + bx_1 + \lambda) \\ x_1 = bx_0 + ax_1 \end{cases}$$

Приведем подобные члены в правой части первого уравнения:

$$\begin{cases} x_0 = bax_0 + (a + b^2)x_1 + b \\ x_1 = bx_0 + ax_1 \end{cases}$$

Из 2-го уравнения выражаем x_1:

$$x_1 = a^* bx_0 .$$

Подставляя это выражение в первое уравнение, получим:

$$\left\{ x_0 = bax_0 + (a + b^2)a^* bx_0 + b \right. .$$

Окончательно:

$$x_0 = (ba + a^+b + b^2a^*b)x_0 + b,$$

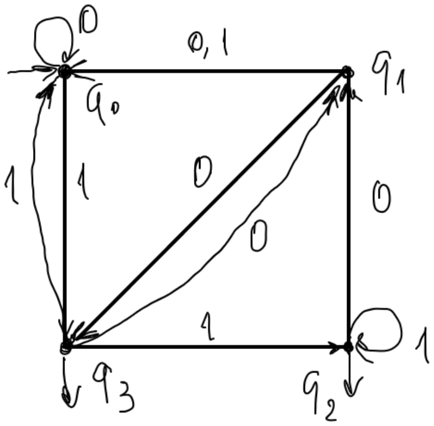
Откуда получаем регулярное выражение для языка:

$$L = x_0 = (ba + a^+b + b^2a^*b)^*b$$

Выражение в скобках описывает метки всех возможных замкнутых путей, проходящих через начальное состояние.

Рекомендуется сравнить это решение с приведенным в Учебнике на стр. 491 (по 7-му изд.).

2. Найти язык, допускаемый следующим КА:



Система уравнений:

$$\begin{cases} x_0 = 0x_0 + 1x_3 \\ x_1 = (0+1)x_0 + 0x_3 \\ x_2 = 0x_1 + 1x_2 + \lambda \\ x_3 = 1x_0 + 0x_1 + 1x_2 + \lambda \end{cases}$$

Ноль и единица понимаются, конечно, как символы, цифры, но никак не числа.

Мы видим, что в системе x_1 и x_3 выражены через остальные неизвестные. Проще исключить x_1.

Перепишем систему:

$$\begin{cases} x_0 = 0x_0 + 1x_3 \\ x_2 = 0((0+1)x_0 + 0x_3) + 1x_2 + \lambda \\ x_3 = 1x_0 + 0((0+1)x_0 + 0x_3) + 1x_2 + \lambda \end{cases}$$

Приводим подобные:

$$\begin{cases} x_0 = 0x_0 + 1x_3 \\ x_2 = 0(0+1)x_0 + 1x_2 + 00x_3 + \lambda \\ x_3 = (1+0(0+1))x_0 + 1x_2 + 00x_3 + \lambda \end{cases}$$

Теперь исключаем x_2:

$$x_2 = 1*\left(0(0+1)x_0 + 00x_3 + \lambda\right)$$

Преобразуем теперь уравнение для x_3:

$$x_3 = (1+0(0+1))x_0 + 1\cdot 1*\left(0(0+1)x_0 + 00x_3 + \lambda\right) + 00x_3 + \lambda;$$

$$x_3 = (1+0(0+1)+1^+0(0+1))x_0 + (1^+00+00)x_3 + 1^+ + \lambda.$$

Выносся в коэффициентах при неизвестных общие множители (справа!) и учитывая, что для любого a итерация $a^* = \lambda + a^+$, получим:

$$x_3 = (1+(\lambda+1^+)0(0+1))x_0 + (1^+ + \lambda)00x_3 + 1*,$$

$$x_3 = (1+1*0(0+1))x_0 + 1*00x_3 + 1*$$

Полезно заметить, что выражения 1*0(0+1) и 1*00 дают метки соответствующих путей как через вершину q2, так и минуя ее (когда итерация замещается пустой цепочкой). Точно также свободный член 1* показывает, что из вершины q3 можно выйти сразу или пройти по 1 в q2 и, покрутившись там по петле сколько угодно раз, или ни разу, выйти из нее.

Выражаем x_3 через x_0:

$$x_3 = (1*00)*((1+1*0(0+1))x_0 + 1*)$$

В итоге получаем уравнение для x_0:

$$x_0 = 0x_0 + 1(1*00)*((1+1*0(0+1))x_0 + 1*),$$

$$x_0 = (0+1(1*00)*(1+1*0(0+1)))x_0 + 1(1*00)*1*'$$

откуда получаем выражение для языка:

$$L = x_0 = (0+1(1*00)*(1+1*0(0+1)))*1(1*00)*1*$$

Выражение в скобках, подвергаемое итерации, описывает все возможные «кручения» в начальном состоянии. Можно крутиться по петле (метка 0), или пройти по 1 в q3, пройти там по контурам q3→q1→q3 или q3→q2→q1→q3, и вернуться в начало либо сразу по 1, либо опять-таки через q1 или q2 и q1. Выражение 1(1*00)*1* описывает все возможности выхода: либо сразу по 1 перейти в q3 и выйти, либо, снова покрутившись там по указанным контурам, выйти, либо выйти из q2, перейдя в эту вершину по 1.

3. Регулярен ли язык в алфавите $V = \{a,b\}$, состоящий из всех слов, содержащих ровно два вхождения слова aba?

Решение. Введем языки:

$L_1 = \overline{(a+b)*aba(a+b)*}$ - множество всех слов, не содержащих вхождения слова aba;

$L_2 = \overline{ba(a+b)*}$ - множество всех слов, не начинающихся на ba;

$L_3 = \overline{(a+b)*ab}$ - множество всех слов, не оканчивающихся на ab.

Тогда искомый язык описывается следующим расширенным регулярным выражением:

$$L = (L_1 \cap L_3)ababa(L_1 \cap L_2) + (L_1 \cap L_3)aba(L_1 \cap L_2 \cap L_3)aba(L_1 \cap L_2).$$

Для сравнения запишем схему нормального алгорифма, распознающего этот язык:

$$A_L : \begin{cases} \$aba \to \cdot aba \\ \$\xi \to \xi\$ \\ \xi\$ \to \$ \\ \$ \to \cdot \\ \#aba \to ab\$a \\ \#\xi \to \xi\# \\ \# \to \cdot \\ aba \to ab\#a \\ \xi \to \cdot\xi \\ \to \cdot @ \end{cases}$$

В этой схеме $@, \#, \$ \notin \{a, b\}$, параметр ξ пробегает алфавит $V = \{a, b\}$.

Понятно, что

$$A_L(x) = \begin{cases} \lambda, \text{ если слово } x \text{ обладает указанным свойством} \\ x, \text{ если слово } x \text{ непусто и не обладает указанным свойством} \\ @, \text{ если } x = \lambda \end{cases}$$

«Не обладает указанным свойством» означает, что слово содержит менее двух вхождений слова aba (в частности, ни одного) или более двух вхождений.