Семинар №1. Дополнение

Краткие теоретические сведения

«Под многообразием или множеством я понимаю всё то многое, что посредством некоторого закона приводится к единству» (Г. Кантор).

Отношение принадлежности: $a \in A$; реже $A \ni a$.

Форма $A = \{x : P(x)\}$.

Словами: A есть множество таких элементов x, для которых истинно утверждение P(x), которое называется **коллективизирующим свойством** или **характеристическим предикатом**.

Примеры: “x – студент МГТУ”, “x – четное целое число”.

Интуиции натурального числа и конечного множества.

Равенство множеств (*принцип экстенсиональности*):

$$A = B \rightleftharpoons (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Множество полностью определяется *составом* элементов. Для конечного множества не имеет значения порядок перечисления элементов, а также число повторений какого-то элемента при перечислении.

$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \ldots = \{1,1,2,2,2,3\} = \ldots$, но $\{1,2,3\} \neq \{\{1,2\},3\}$

Элементом множества может быть другое множество.

Канонически элементы конечного множества перечисляются в каком-то договоренном порядке без повторений элементов.

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{x : x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_n\}$$

Подмножество:

$$A \subseteq B \rightleftharpoons (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Сопоставляя определение равных множеств с определением подмножества, получаем, что

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \,\&\, (B \subseteq A)$$

Это равносильное исходному определение равенства множеств лежит в основе метода доказательства равенства множеств, называемого *методом двух включений*. О нем речь еще пойдет.

Собственное (строгое) подмножество:

$$A \subset B \rightleftharpoons (A \subseteq B) \,\&\, (A \neq B)$$

Пустое множество: $\varnothing = \{x : F(x)\}$, где $F(x)$ - *тождественно ложный предикат*.

По определению принимается, что *пустое множество есть подмножество любого множества*.

Универсальное множество: $U = \{x : T(x)\}$, где $T(x)$ - *тождественно истинный предикат*.

По определению принимается, что *любое множество есть подмножество универсального множества*.

Содержательно под универсальным множеством понимается наиболее широкий род объектов, рассматриваемых в данной теории. Произвольная трактовка этого понятия может привести к противоречиям.

Итак, для любого множества $A \ \varnothing \subseteq A \subseteq U$.

Булеан: $2^A \rightleftharpoons \{X : X \subseteq A\}$.

Пример: $2^{\{a,b,c\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Можно доказать, что если конечное множество состоит из n элементов, то в его булеане 2^n элементов.

Операции

1) *Объединение*: $A \cup B \rightleftharpoons \{x : x \in A \vee x \in B\}$

2) *Пересечение*: $A \cap B \rightleftharpoons \{x : x \in A \,\&\, x \in B\}$

Может оказаться, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда множества A и B называют *непересекающимися*.

3) *Разность*: $A \setminus B \rightleftharpoons \{x : x \in A \,\&\, x \notin B\}$

4) *Дополнение*: $\overline{A} \rightleftharpoons \{x : x \notin A\} = \{x : x \in U \,\&\, x \notin A\} = U \setminus A$

Напомним, что каждый элемент считается элементом универсального множества.

5) *Симметрическая разность*: $A \Delta B \rightleftharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Можно доказать, что $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Выше написано *теоретико-множественное тождество*. Его надо доказать.

Основные тождества

1) $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$
2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4) $A \cup A = A \cap A = A$
5) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$
6) $A \cup \varnothing = A \cap U = A; A \cap \varnothing = \varnothing; A \cup U = U$
7) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (тождества, или законы, Де Моргана)
8) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
9) $\overline{\varnothing} = U; \overline{U} = \varnothing$ (принимается по определению)

10) $A\cap\bar{A}=\varnothing; A\cup\bar{A}=U$
11) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
12) $A\Delta B = B\Delta A$
13) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$
14) $A\Delta A=\varnothing; A\Delta\varnothing = A; A\Delta U = \bar{A}$
15) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Задачи

Доказать тождества (или проверить, что тождество имеет место):

1. $(A\setminus B)\Delta(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(B\cap C)$

Метод характеристических функций (ХФ)

$$\chi_{(A\setminus B)\Delta(B\setminus C)}=\chi_{A\setminus B}+\chi_{B\setminus C}-2\chi_{A\setminus B}\chi_{B\setminus C}=\chi_A(1-\chi_B)+\chi_B(1-\chi_C)-2\chi_A\chi_B(1-\chi_B)(1-\chi_C)=$$
$$=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B-\chi_B\chi_C-2\chi_A\chi_B+2\chi_A\chi_B\chi_C+2\chi_A\chi_B-2\chi_A\chi_B\chi_C=$$
$$=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B-\chi_B\chi_C.$$

$$\chi_{(A\cup B)\setminus(B\cap C)}=(\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B)(1-\chi_B\chi_C)=\chi_A-\chi_A\chi_B\chi_C+\chi_B-\chi_B\chi_C-\chi_A\chi_B+\chi_A\chi_B\chi_C=$$
$$=\chi_A+\chi_B-\chi_A\chi_B-\chi_B\chi_C.$$

Характеристические функции совпали, что и доказывает тождество. Заметим, что в выводе использовалось свойство ХФ: квадрат любой ХФ совпадает с ней самой.

Предлагается самостоятельно доказать это тождество методом эквивалентных преобразований и методом двух включений.

2. $((A\setminus B)\setminus C)\Delta(B\cup C)=(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(B\cup C)$

В данном случае решение методом ХФ будет очень громоздким.

Воспользуемся методом эквивалентных преобразований.

$$((A\setminus B)\setminus C)\Delta(B\cup C)=(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\Delta(B\cup C)=$$
$$=(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\Delta(B\cup C)=(A\cap\overline{(B\cup C)})\Delta(B\cup C).$$

Обозначим $X=B\cup C$. Тогда получим:

$$(A\cap\bar{X})\Delta X=((A\cap\bar{X})\cap\bar{X})\cup(\overline{(A\cap\bar{X})}\cap X)=$$
$$=(A\cap\bar{X})\cup((\bar{A}\cup X)\cap X)=(A\cap\bar{X})\cup X.$$

Во второй скобке использовано тождество поглощения.

Итак, $((A\setminus B)\setminus C)\Delta(B\cup C)=(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(B\cup C)$, что и требовалось доказать.

Дополнительно можно правую часть совсем упростить:

$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$, так как совершенно очевидно, что
$(A \cap \bar{X}) \cup X = (A \cup X) \cap (\bar{X} \cup X) = (A \cup X) \cap U = A \cup X$.

3. $((A \Delta B) \cap (B \Delta C) = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$

   Решаем методом эквивалентных преобразований, для удобства проведения выкладок переобозначив операции: + - «объединение, точка (которая может быть опущена) – пересечение.

   Имеем, сразу раскрывая симметрическую разность:

$$(A\bar{B} + \bar{A}B)(B\bar{C} + \bar{B}C) = A\bar{B}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{B}C + \bar{A}BB\bar{C} + \bar{A}B\bar{B}C =$$
$$= A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} = (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}).$$

4. $(A \cup B)\Delta(A \setminus B) = B$

   Используем метод ХФ:

$$\chi_{(A\cup B)\Delta(A\setminus B)} = \chi_{A\cup B} + \chi_{A\setminus B} - 2\chi_{A\cup B}\chi_{A\setminus B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B + \chi_A(1-\chi_B) -$$
$$-2(\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)\chi_A(1-\chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B + \chi_A - \chi_A\chi_B -$$
$$-2(\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B)(\chi_A - \chi_A\chi_B) = 2\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B -$$
$$-2(\chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_B\chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B) = \chi_B.$$

   Метод двух включений:

$$x \in B \Rightarrow (x \in A \cup B) \,\&\, (x \notin A \setminus B) \Rightarrow x \in (A \cup B)\Delta(A \setminus B).$$
$$x \in (A \cup B)\Delta(A \setminus B) \Rightarrow ((x \in A \cup B) \,\&\, (x \notin A \setminus B)) \vee$$
$$\vee((x \in A \setminus B) \,\&\, (x \notin A \cup B)).$$

   Но вторая альтернатива невозможна, и $x \in B$.

   Метод эквивалентных преобразований (удобно снова использовать альтернативные обозначения операций объединения и пересечения):

$$(A \cup B)\Delta(A \setminus B) = [(A+B)\cdot \overline{A\bar{B}}] + [(\overline{A+B} \cdot A\bar{B}] =$$
$$= [(A+B)(\bar{A}+B)] + [\bar{A}\bar{B} \cdot A\bar{B}] = AB + \bar{A}B + B = B.$$

   Использованы тождества поглощения.

5. $(A \setminus B)\Delta(A \cap B) = A$

   Решаем методом эквивалентных преобразований:

$$(A \cap \bar{B})\Delta(A \cap B) = A \cap (\bar{B}\Delta B) = A.$$

   Использовали дистрибутивность пересечения относительно симметрической разности и то, что $\bar{B}\Delta B = (\bar{B} \cup B) \setminus (\bar{B} \cap B) = U$.