Семинар №3. Полугруппы и группы

Теоретический материал содержится в главе 2: 2.1, 2.2, 2.6.

Задача №1. Доказать, что алгебра $(\mathbb{R}\setminus\{0\},*), x*y = xy^{\operatorname{sgn}(x)}$, где функция знака $\operatorname{sgn}(x) \rightleftharpoons \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, \text{ при } x>0 \\ -1, \text{при } x<0 \end{cases}$, является группой.

Решение

Нужно доказать, что данная операция ассоциативна, имеет нейтральный элемент, и каждый ее элемент обратим.

1) *Ассоциативность операции*

1 случай: $x>0$.

Вычислим $x*(y*z) = x(yz^{\operatorname{sgn}(y)}) = \begin{cases} xyz, \text{ при } y>0 \\ \dfrac{xz}{y}, \text{ при } y<0 \end{cases}$.

Теперь вычислим $(x*y)*z = (xy)z^{\operatorname{sgn}(xy)}) = \begin{cases} xyz, \text{ при } y>0 \\ \dfrac{xz}{y}, \text{ при } y<0 \end{cases}$.

Итак, $x*(y*z) = (x*y)*z$

2 случай: $x<0$.

$$x*(y*z) = \frac{x}{yz^{\operatorname{sgn}(y)}} = \begin{cases} \dfrac{x}{yz}, \text{ при } y>0 \\ \dfrac{xz}{y}, \text{ при } y<0 \end{cases},$$

$$(x*y)*z = (\frac{x}{y})z^{\operatorname{sgn}(x/y)}) = \begin{cases} \dfrac{x}{yz}, \text{ при } y>0 \\ \dfrac{xz}{y}, \text{ при } y<0 \end{cases}.$$

Следовательно, в обоих случаях $x*(y*z) = (x*y)*z$.

Операция ассоциативна.

2) *Нейтральный элемент*

Выясним, существует ли такой элемент ε, что для любого x выполняется

$x*\varepsilon=\varepsilon*x=x$.

Пусть $x*\varepsilon=x$. При $x>0$ получим уравнение относительно ε: $x\varepsilon=x$, откуда $\varepsilon=1$.

При $x<0$ будем иметь уравнение $\frac{x}{\varepsilon}=x$, откуда также $\varepsilon=1$.

Таким образом, единица является правым нейтральным элементом. Простая проверка показывает, что она будет и левым нейтральным: $1*x=1\cdot x=x$.

Мы доказали тем самым, что рассматриваемая алгебра является моноидом.

Проверим, будет ли она группой.

Если элемент x имеет обратный x', то должно выполняться $x*x'=x'*x=1$.

Пусть $x*x'=1$. Тогда $x'=\begin{cases}1/x, x>0\\ x, x<0\end{cases}$.

Тем самым доказано обратимость любого элемента справа. Легко проверить, что найденные правые обратные будут и левыми. Итак, для положительных чисел обратное есть обратное число в обычном смысле слова («обратная дробь»), а для отрицательных - каждое число обратно самому себе.

То есть рассматриваемая алгебра есть группа.

Эта группа не коммутативна, так как, например, при $x<0, y>0$ получим:

$x*y=\frac{x}{y}\neq y*x=yx$.

Решим два уравнения вида $a*x*b=c$ в этой группе.

1) $7*x*(-5)=22$

Решение:

$x=a^{-1}*c*b^{-1}=\frac{1}{7}22(-5)=-\frac{110}{7}$

(каждое отрицательное число обратно самому себе!)

2) $(-5)*x*7=-22$

Решение:

$x=(-5)(-\frac{1}{22})\frac{1}{7}=\frac{5}{154}$

Задача №2. Доказать, что алгебра $(\mathbb{R},*)$, где $x*y=x+y+xy$, коммутативный моноид, но не группа (нейтральный элемент – 0, но обратного для -1 не существует).

Решение

Очевидна коммутативность операции *.

Ассоциативность:

$x*(y*z)=x*(y+z+yz)=x+y+z+yz+x(y+z+yz)=x+y+z+xy+xz+yz+xyz$,

но $(x*y)*z=z*(x*y)=x+y+z+xy+xz+yz+xyz$

(с учетом очевидной однородности полученного выражения относительно вхождений букв).

Итак, данная алгебра есть полугруппа.

Ищем нейтральный элемент.

Пусть для некоторого e имеет место $x*e=x$ (ввиду коммутативности операции достаточно написать одно равенство).

Тогда $x+e+xe=x$, откуда $e=0$.

Таким образом, имеем моноид.

Ищем обратный для произвольного x:

$x+x'+xx'=0$,

откуда

$x'=-\dfrac{x}{1+x}$.

Это означает, что для x=-1 обратный элемент не определен.

Задача №3. Выяснить, есть ли нейтральный элемент, или, возможно, односторонние нейтральные элементы в полугруппе числовых матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

Нетрудно видеть, что множество таких матриц замкнуто по умножению, то есть произведение матриц такого вида есть также матрица такого вида:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Отсюда видно, что любая матрица $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для произвольного m будет левым нейтральным элементом в полугруппе матриц такого вида (то, что это полугруппа, следует из известного свойства ассоциативности матричного умножения в общем случае и указанного выше свойства замкнутости по умножению множество матриц данного специального вида – с нулевой второй строкой). Но этот левый нейтральный элемент не будет, вообще говоря, правым, так как

$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & cm \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ при $cm \neq d$.

Более того, если матрица $\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ такова, что для произвольной матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ имеет место равенство

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

то должно выполняться $ae = a, af = b$,

откуда, при $a \neq 0$ $e = 1,$ $f = \dfrac{b}{a}$. Это значит, что в данной полугруппе нет правого нейтрального элемента как единственного во всей полугруппе.

(Легко показать, что если бы он существовал, то совпал бы с левым нейтральным: действительно, пусть e - левый нейтральный, то есть для любого x $ex = x$, а e' - правый нейтральный, то есть x $xe' = x$. Тогда $ee' = e = e'$. Первое равенство имеет место, так как e' - правый нейтральный, а второе, так как e - левый нейтральный).

А при $a = 0$ искомая правая нейтральная матрица вообще не определена.

Следующая задача связана с группой подстановок.

Краткие сведения о группе подстановок содержатся в примере 2.10 (стр. 131-132 по 4-му или 5-му изд.)

Необходимо далее добавить следующее.

1) Вычисление композиции

Композиция двух подстановок

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ и $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$

вычисляется очень просто по формуле $\sigma \circ \tau(k) = \tau(\sigma(k)), 1 \le k \le n$, то есть это вычисление значения сложной функции. Первая подстановка переводит элемент k в элемент i_k, а вторая полученный элемент i_k переводит в элемент j_{i_k}.

Например:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Схема действий:

1→4→4, 2→3→1, 3→1→3, 4→2→2.

При этом

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \ne \sigma \circ \tau,$$

то есть композиция подстановок некоммутативна.

Теперь о разложении подстановок на попарно независимые циклы.

Два цикла называются независимыми, если они не имеют общих элементов. Важное свойство независимых циклов состоит в том, что они коммутируют по композиции, то есть, если κ_1 и κ_2 - независимые циклы, то $\kappa_1\kappa_2 = \kappa_2\kappa_1$ (значок композиции будем, как правило, опускать).

Доказывается теорема, согласно которой любая подстановка может быть разложена на композицию (иногда говорят – произведение) попарно независимых циклов.

Покажем это на примере.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 8 & 5 & 7 & 1 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix} = (14576)(2389)$$

Чтобы построить такое разложение, нужно проследить «орбиту» каждого элемента под действием данной подстановки. Строим цикл, содержащий 1:

1→4→5→7→6→1 – замкнули первый цикл.

Берем любой элемент, например, 2, не попавший в построенный цикл, и строим цикл, содержащий 2:

2→3→8→9→2.

Так действуем до исчерпания всех элементов, не попавших в очередной цикл. Заметим, что сумма длин всех циклов в этом разложении должна быть равна числу элементов множества, на котором действует подстановка. В этом примере – 9. Заметим также, что в разложении могут быть циклы длины 1. Цикл длины 1 – это тождественная подстановка. Появление цикла длины 1 означает, что исходная подстановка оставляет соответствующий элемент неподвижным (переводит его в себя).

Разложение подстановки на попарно независимые циклы позволяет легко вычислять любые целые степени подстановок. А именно, если $\sigma = \kappa_1\kappa_2...\kappa_m$, где циклы κ_i попарно независимы, то для любого целого s $(\kappa_1\kappa_2...\kappa_m)^s = \kappa_1^s\kappa_2^s...\kappa_m^s$.

При возведении же цикла в целую степень нужно учитывать, что цикл, возведенный в степень, равную его длине, даст тождественную подстановку. Следовательно, при возведении цикла в произвольную целую степень показатель степени нужно взять по модулю длины цикла (то есть вычислить остаток от деления показателя степени на длину цикла). Например, для построенного выше разложения

$$[(14576)(2389)]^{2022} = (14576)^{2022 \bmod 5}(2389)^{2022 \bmod 4} = (14576)^2(2389)^2 = (15647)(28)(39).$$

Схема вычисления положительно целой степени s цикла $(i_1i_2...i_k)$ такова:

$$i_1 \to i_{1+s} \to i_{2+s} \to ...$$

Так, образно говоря, шагаем через s-1 элемент и действуем так до тех пор, пока не получим произведение попарно независимых циклов (в частности, один цикл).

Например:

$$(123456789)^2 = (135792468); (123456789)^3 = (147)(258)(369);$$
$$(123456)^2 = (135)(246); (123456)^3 = (14)(25)(36); (123456)^4 = (153)(264).$$

Полезно заметить и следующее.

Пусть дан цикл длины k, а положительное целое m<k.

Тогда

$$(i_1i_2...i_k)^m = (i_1i_2...i_k)^k(i_1i_2...i_k)^{m-k} = (i_ki_{k-1}...i_1)^{k-m},$$

так как $(i_1i_2...i_k)^k = \varepsilon = \begin{pmatrix} 12...n \\ 12...n \end{pmatrix}$ - тождественная подстановка.

Если число k-m>0 достаточно мало, то удобнее, для вычисления исходной m-й степени, возвести в степень k-m цикл, обратный данному.

Например,

$$(123456789)^7 = (987654321)^2 = (975318642) = (186429753).$$

Последний цикл мы получили бы, если бы «в лоб» шагали через 6 элементов в приведенной выше схеме (напомним, что цикл не меняется при любой циклической перестановке его элементов:
$(i_1i_2...i_k) = (i_2i_3...i_ki_1) = (i_3i_4...i_{k-2}i_1i_2) = ...$
$(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$.
).

В частности, если m=k-1, то m-я степень цикла длины k равна обратному циклу:

$$(i_1 i_2 ... i_k)^{k-1} = (i_1 i_2 ... i_k)^{-1} = (i_k i_{k-1} ... i_1)$$

$$(123456789)^8 = (987654321).$$

Сделаем теперь замечание о разложении в произведение попарно независимых циклов подстановки, представленной в виде произведения (композиции) циклов, не являющихся независимыми.

Поясним это на примере. Пусть в группе S_9 дана подстановка $(123)(23489)(5678)$. Как видно, циклы в этой композиции не являются независимыми.

Действуем так: имеем три подстановки, действующие последовательно. Строим «орбиту» каждого элемента под действием этих трех последовательно применяемых подстановок. Можно начать с 1: первый цикл переводит 1 в 2, второй переводит 2 в 3, а в третьем 3 отсутствует. В итоге 1 перешла в 3. Дальше следим за «судьбой» тройки (3): 3→1, и всё, так как единицы во втором и третьем цикле нет. Значит, мы замкнули цикл (13). Действуя таким же образом, получим цикл, содержащий двойку (2): (2456789).

Итак, $(123)(23489)(5678) = (13)(2456789)$.

(Подробнее -

Орбита двойки (2): 2→3→4; в итоге 2 перейдет в 4, так как 4 в третьем цикле нет.

Орбита 4: 4→8 (2-й цикл), 8→5 (3-й цикл); в итоге 4 переходит в 5.

5→6→7 (эти элементы находятся только в третьем цикле). Далее 7→8, 8 есть во втором цикле, поэтому сначала 8→9, после чего 9→2, и второй цикл в строящемся разложении замыкается.)

Задача №4. В группе S_4 решить уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 4213 \end{pmatrix}^{2021} X \begin{pmatrix} 1234 \\ 3214 \end{pmatrix}^{-2019} = (12)^{829} .$$

Решение

Чтобы решить это уравнение, нужно сначала вычислить все степени указанных подстановок. Для этого надо каждую подстановку разложить на попарно независимые циклы, после чего каждый цикл возвести в степень, взяв показатель степени по модулю длины цикла.

Будем иметь:

$$\begin{pmatrix}1234\\4213\end{pmatrix}^{2021}=[(143)(2)]^{2021}=(143)^2=(341);$$

$$\begin{pmatrix}1234\\3214\end{pmatrix}^{-2019}=[(13)(2)(4)]^{-2019}=(13);$$

$$(12)^{829}=(12).$$

Исходное уравнение примет вид:

$$(341)X(13)=(12).$$

Решение:

$$X=(341)^{-1}(12)(13)^{-1}=(143)(12)(13)=(14)(23).$$

Краткие сведения о конечных группах

Число элементов конечной группы называется ее порядком.

Порядком элемента a конечной группы называется наименьшее положительное число s такое, что $a^s=1$ (это будет порядок порожденной этим элементом циклической подгруппы).

Доказывается, что если G - конечная группа, $a\in G$ и s - порядок a, то

$a^{|G|}=a^s=1$ (где $|G|$ - порядок группы G. Поэтому, чтобы возвести элемент конечной группы в произвольную целую степень, надо показатель степени взять по модулю порядка группы, или по модулю порядка данного элемента (который предварительно надо найти).

Мультипликативная группа вычетов по модулю 7.

На множестве положительных целых чисел $\{1,2,3,4,5,6\}$ определим операцию умножения по модулю 7, полагая $a\odot_7 b=\mathrm{mod}(ab,7)$, то есть берется остаток от деления на 7 обычного произведения. Можно доказать, что такая алгебра есть группа. Она называется мультипликативной группой вычетов по модулю 7.

Таблица Кэли (см. стр. 143, пример 2.14) такой группы выглядит так:

$\odot_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

По этой таблице легко найти пары взаимно обратных элементов. Скажем, надо найти обратный к 3. По строке «3» идем до клетки с «1». Номер соответствующего столбца даст обратный. В данном случае это будет 5.

Дальше будет показано, что такая мультипликативная группа вычетов может быть построена для любого простого числа p. Такую группу называют мультипликативной группой вычетов по модулю p и обозначают $\mathbb{Z}_p^*$. Ее операцию умножения по модулю p, определяемую в общем случае аналогично определению умножения по модулю 7, часто обозначают просто точкой, которую обычно опускают (если это не вредит пониманию).

Задача №5. Решить в группе $\mathbb{Z}_7^*$ уравнение

$$3^{2018} \odot_7 x = 5^{-2017}.$$

Имеем:

$$x = 3^{-2018} \odot_7 5^{-2017} = 3^5 \odot_7 5^6 = 5 \odot_7 1 = 5 .$$

Вычисление степеней с показателями, меньшими порядка группы (равного 6) можно проводить «в лоб», используя формулу $a^n = a^{n-1}a$ (в любой группе; обозначение операции опущено), но можно заметить, что для конечной группы G имеет место равенство $a^n = a^{n-|G|}(n \le |G|)$ и в нашем примере $3^5 = 3^{-1} = 5; 5^6 = 1.$

Задачи для самостоятельного решения:

2.1 (а-в, д), 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7.

Далее (более трудные задачи):

1) В группе S_9 решить уравнение

$$[(123)(23489)(5678)]^{2018} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 4 & 5 & 3 & 7 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-2021} =$$

$$= [(1249)(34978)]^{1453}$$

2) Решить уравнение $axb = c$ в группе:

а) S_7, где $a = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 5627134 \end{pmatrix}^{1997}, b = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7162534 \end{pmatrix}^{-2002}, c = (125)^{1999}$;

б) S_9 где $a = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 567891234 \end{pmatrix}^{-1999}, b = (12789)^{-2006}, c = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 736548921 \end{pmatrix}^{108}$;

в) Z_{23}^*, где $a = 7^{-1998}, b = 5^{115}, c = 21^{21}$;

г) Z_{31}^{*}, где $a=17^{-1998}, b=25^{-115}, c=21^{-2121}$.

Дополнительные задачи

Группа линейных функций

Выясним, при каких условиях алгебра вещественных линейных функций вида $f(x)=ax+b, a,b\in\mathbb{R}$ будет группой по операции композиции.

Пусть $g(x)=cx+d$.

Тогда $(f\circ g)(x)=g(f(x))=c(ax+b)+d=cax+bc+d$,

$(g\circ f)(x)=f(g(x))=a(cx+d)+b=acx+ad+b$, то есть $f\circ g\neq g\circ f$.

Поскольку операция композиции ассоциативная для любых соответствий, она будет ассоциативна и для линейных функций.

Можно получить и явную формулу.

Полагая $h(x)=kx+m$, будем иметь:

$f\circ g\circ h(x)=h(g(f(x))=k(c(ax+b)+d)+m=kcax+kcb+kd+m$.

Таким образом, есть полугруппа.

Выясним наличие нейтрального элемента.

Пусть функция $\varepsilon(x)=\varepsilon_1 x+\varepsilon_2$ такова, что для любой функции $f(x)=ax+b$ имеет место

$f\circ\varepsilon=\varepsilon\circ f=f$.

Имеем:

$(f\circ\varepsilon)(x)=\varepsilon_1(ax+b)+\varepsilon_2=ax+b$.

Отсюда $\varepsilon_1 a=a, \varepsilon_1 b+\varepsilon_2=b$.

Первое равенство должно иметь место *для любого* a,что возможно только при $\varepsilon_1=1$и тогда $\varepsilon_2=0$. Тем самым получаем правый нейтральный элемент в виде функции $\varepsilon(x)=x$.

Нетрудно видеть, что это будет и левый нейтральный элемент, так как $(\varepsilon\circ f)(x)=f(\varepsilon(x))=f(x)=ax+b$. Заметим, что при $a=0$ получим константу b (принимается по определению, что подстановка в константу есть сама эта константа).

Замечание. При $a=0$ параметр ε_1 может принимать произвольное значение, и тогда для каждой постоянной функции b любая функция $\varepsilon(x)=\varepsilon_1 x+b(1-\varepsilon_1)$ будет давать композицию $f\circ\varepsilon=b$, но ее нельзя назвать правой единицей, так как она зависит от той функции (константы), с которой образует композицию.

Впредь будем считать, что $a\neq 0$. Ясно, что множество линейных функций с ненулевым коэффициентом при переменной замкнуто относительно композиции.

Тогда правым нейтральным элементом в этой полугруппе будет тождественная функция $\varepsilon(x)=x$. Очевидно, она будет и левым нейтральным элементом, так как $(\varepsilon\circ f)(x)=f(\varepsilon(x))=f(x)$.

Будем искать теперь обратные элементы.

Пусть функция $f^{-1}(x)=\alpha x+\beta$ такова, что $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=\varepsilon$.

Найдем сначала условия обратимости справа:

$f\circ f^{-1}(x)=f^{-1}(f(x))=\alpha(ax+b)+\beta=x$, откуда

$\alpha a=1,\alpha b+\beta=0$ и $\alpha=\dfrac{1}{a},\beta=-\dfrac{b}{a}$.

Легко проверить, что найденная функция будет и левым обратным:

$f^{-1}\circ f(x)=f(f^{-1}(x))=a(\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a})+b=x$.

Итак, множество всех линейных функций с ненулевым коэффициентом при переменной есть группа по операции композиции.

В общем случае (при включении в множество постоянных функций имеем только моноид.

Нестандартная числовая группа

На множестве всех действительных чисел определим операцию

$a\circ b\rightleftharpoons a+b+\lambda ab,\lambda\in\mathbb{R}$.

Будет ли такой группоид группой?

Сразу понятно, что введенная операция коммутативна и при $\lambda=0$ совпадает с обычным сложением.

Проверим ассоциативность:

$$a\circ(b\circ c)=a+(b\circ c)+\lambda a(b\circ c)=a+b+c+\lambda bc+\lambda a(b+c+\lambda bc)=$$
$$=a+b+c+\lambda(ab+ac+bc)+\lambda^2 abc.$$

Полученное выражение однородно относительно входящих в него букв, поэтому

$$(a \circ b) \circ c = c \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ c).$$

Итак, операция ассоциативна, и мы имеем полугруппу.

Нейтральный элемент ε находим из условия

$a \circ \varepsilon = a$, то есть

$a + \varepsilon + \lambda a \varepsilon = a$, откуда

$\varepsilon(1 + \lambda a) = 0$.

Так как это равенство должно выполняться при любом a, то $\varepsilon = 0$.

Итак, имеем моноид $(\mathbb{R}, \circ, 0)$.

Обратный к a находим из условия

$$a \circ a' = 0,$$
$$a + a' + \lambda a a' = 0,$$

откуда

$$a' = -\frac{a}{1 + \lambda a}.$$

При $\lambda = 0$ получим $a' = -a$, то есть это будет обычная аддитивная группа действительных чисел.

При $\lambda \neq 0$ обратный элемент определен для всех чисел, кроме $a = -\frac{1}{\lambda}$. Причем это число будет нулем в рассматриваемом моноиде, так как

$$a \circ (-\frac{1}{\lambda}) = a - \frac{1}{\lambda} + \lambda a(-\frac{1}{\lambda}) = -\frac{1}{\lambda}.$$

А алгебра $(\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{\lambda}\}, \circ, 0), \lambda \neq 0$ будет коммутативной группой.

В этой группе уравнение

$$a \circ x = b$$

имеет решение

$$x = -\frac{a}{1+\lambda a} \circ b = -\frac{a}{1+\lambda a} + b - \lambda \frac{ab}{1+\lambda a} =$$
$$= \frac{-a + b(1+\lambda a) - \lambda ab}{1+\lambda a} = \frac{b-a}{1+\lambda a}$$

При $a = b$ получаем, естественно, $x = 0$.

Элементы, «кратные» a, описываются выражением

$$\beta \circ a = \beta + a + \lambda \beta a.$$

Например,

$$2 \circ 3 = 5 + 6\lambda.$$

При $\lambda = 1$ «дважды три» будет равно 11, а при $\lambda = -1$ это «произведение» будет равно -1.

Решением уравнения

$$a \circ x = \beta \circ a$$

будет

$$x = \beta.$$

Заметим, что определенная в условии задачи операция не будет дистрибутивна относительно обычного сложения и обычное умножение не будет дистрибутивно относительно указанной операции.

Это легко усматривается из следующих выкладок:

$$a \circ (b+c) = a + b + c + \lambda a(b+c),$$
$$a \circ b + a \circ c = a + b + \lambda ab + a + c + \lambda ac \neq a \circ (b+c)(a + a \neq a).$$

и

$$a(b \circ c) = a(b + c + \lambda bc),$$
$$ab \circ ac = ab + ac + \lambda a^2 bc \neq a(b \circ c)(a^2 \neq a).$$