Семинар №5. Вводные задачи по теории графов

1) *Доказать, что не существует неориентированный граф, степени всех вершин которого попарно различны.*

♦Предполагая, что существует n-вершинный неориентированный граф, степени всех вершин которого попарно различны, получим, что эти степени должны быть числами от 0 до n-1 (наибольшая возможная степень вершины в таком графе; петли не допускаются!). Это значит, что в графе есть изолированная вершина нулевой степени и вершина степени n-1, связанная ребрами со всеми остальными, включая изолированную, что невозможно.♦

2) *Найти число всех (отмеченных, не с точностью до изоморфизма!) графов с заданным числом n вершин.*

♦*Неориентированные графы*

Фиксируя число n вершин графа, получим, что конкретный граф определяется множеством ребер, то есть некоторым подмножеством множества всех неупорядоченных пар на n-элементном множестве, число которых есть $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Это значит, что число всех таких графов с n вершинами равно числу всех подмножеств множества из $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов, то есть $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Например, при n=3 это будет 8, а именно: пустой граф (без ребер), три графа с одним ребром ({1, 2}, {1, 3} и {2, 3}), также три графа с двумя ребрами и один полный граф. Заметим, что все графы с одним ребром (а также с двумя) изоморфны, но мы считаем отмеченные графы и различаем их.

Ориентированные графы

Рассуждая аналогично предыдущему, легко показать, что число всех отмеченных орграфов с n вершинами равно 2^{n^2}. Доказать самостоятельно, учитывая, что дуга в орграфе есть *упорядоченная* пара вершин.♦

3) *Доказать, что в связном ациклическом неориентированном графе с n вершинами число ребер равно n-1.*

♦Индукция по n.

Базис (n=1) тривиален (в одновершинном графе 0 ребер).

Предположим, что утверждение верно для всех n, не больших некоторого k.

Рассмотрим граф с числом вершин, равным k+1. Поскольку граф ациклический, то в нем найдется вершина степени 1 (иначе, если предположить, что степень каждой вершины не меньше 2, получим, очевидно, существование циклов). Пусть v – вершина степени 1. Удалим ее из графа вместе с инцидентным ей ребром. После этого получим подграф исходного графа с числом вершин k, который обязан быть ациклическим, так как иначе и исходный граф будет содержать циклы (удаленная вершина, очевидно, не может лежать на цикле). Он также будет связен, так как иначе не был бы связным и исходный граф (удаление вершины v вместе с единственным инцидентным ей ребром не может, очевидно, сказаться на связности возникающего подграфа). По предположению индукции в нем будет k-1 ребер. Возвращая удаленную вершину с инцидентным ей ребром, получим, что число ребер в исходном графе равно k=(k+1)-1, что и требовалось.♦

4) *Доказать, что если в неориентированном графе с* n *вершинами число ребер строго больше* $C_{n-1}^2, n>2$ *, то граф связен.*

♦Используем метод математической индукции. Базис (n=3) тривиален (в трехвершинный граф, у которого больше одного ребра связен). Пусть доказываемое верно для всякого графа, число вершин которого не превосходит n-1. Возьмем граф G_n с n вершинами, число ребер которого $|E_n| > C_{n-1}^2$. Фиксируем в нем произвольно вершину u и рассмотрим подграф G_{n-1}, полученный удалением вершины u со всеми инцидентными ей ребрами. Так как число C_{n-1}^2 есть число ребер в полном (n-1)-вершинном графе, то вершина u имеет степень, не меньшую 1, так как иначе в подграфе G_{n-1} число ребер превысит число ребер полного (n-1)-вершинного графа. Заметим, что если dg(u) = n-1, то граф G_n будет связен: любые две вершины будут соединены цепью, проходящей через вершину u. Таким образом, для доказательства связности графа G_n при 1≤ dg(u) < n-1 достаточно доказать, что связен подграф G_{n-1}. Тогда и выделенная вершина u будет соединена цепью с любой вершиной графа.

Рассмотрим тогда случай наименьшего числа ребер в подграфе G_{n-1}. Он возникнет при условии dg(u) = n-2, причем тогда число ребер в подграфе составит $|E_{n-1}| = |E_n| - (n-2)$. Так как $|E_n| > C_{n-1}^2$, то

$|E_{n-1}| > C_{n-1}^2 - (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) = \frac{(n-2)(n-3)}{2} = C_{n-2}^2$. Итак, наименьшее возможное число ребер в подграфе G_{n-1} при dg(u) < n-1 составит число, большее C_{n-2}^2. Отсюда, по предположению индукции, подграф G_{n-1} связен, что и требовалось.

Второе решение. Предположим, что граф с числом ребер, большим C_{n-1}^2, не связен. Тогда в нем есть по крайней мере две компоненты. Пусть компонента C_1 содержит k вершин, а компонента C_2 - $n-k$ вершин. При этом можно считать, что $n-k>1$, так как при $n-k=1$ и при выполнении условия задачи по крайней мере одно ребро окажется инцидентным единственной вершине компоненты C_2, так как число C_{n-1}^2- число ребер в полном $(n-1)$-вершинном графе. Но это противоречие, так как указанная вершина – изолированная по предположению. Таким образом, граф связен.

Итак, $n-k>1$. Тогда, полагая числа ребер в каждой компоненте максимальными, получим:

$$C_k^2+C_{n-k}^2=\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Преобразуем числитель второй дроби:

$$(n-k)(n-k-1)=[(n-1)+1-k][(n-2)-k+1]=$$
$$=[(n-1)-(k-1)][(n-2)-(k-1)]=$$
$$=(n-1)(n-2)-(2n-3)(k-1)+(k-1)^2=$$
$$=(n-1)(n-2)+(k-1)(k-2n+2).$$

Тогда

$$C_n^2+C_{n-k}^2=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(k-1)(k-2n+2)}{2}=C_{n-1}^2+(k-1)(1-(n-k))$$

Так как $n-k>1$, то второе слагаемое отрицательно, и максимальное число ребер во всем графе меньше C_{n-1}^2.♦

5) *Доказать, что если минимальная степень вершины неориентированного графа с n вершинами не меньше (n-1)/2, то граф связен.*

♦Предположим противное: тогда граф распадается как минимум на две компоненты связности. Пусть в одной компоненте k вершин (а в другой n-k). Тогда для первой компоненты степень любой вершины заключена между (n-1)/2 и k-1, а для второй – между (n-1)/2 и n-k-1, то есть должны выполняться одновременно неравенства: $\frac{n-1}{2}\le k-1$ и $\frac{n-1}{2}\le n-k-1$. Из первого неравенства $k\ge\frac{n+1}{2}$, а из второго $k\le\frac{n-1}{2}$. Очевидное противоречие.

♦

6) *Доказать, что орграф связен тогда и только тогда, когда в нем есть путь, проходящий через все вершины.*

♦Докажем необходимость условия теоремы. Зададим некоторую нумерацию на множестве вершин связного орграфа. Пусть V = $\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$. Очевидно, всегда найдется путь, содержащий вершину v_1. Предположим, что построен путь W = $v_{i1}\to v_{i2}$

$\to\ldots\to v_{im}$, проходящий через какие-то k вершин $u_1,\ldots, u_k$ для некоторого $k < n$ (эти k вершин не обязаны иметь номера с 1 до k, причем вершины в пути могут повторяться, то есть k не обязательно равно m). Берем вершину u_{k+1}. Если $u_{k+1} \Rightarrow^* v_{i1}$ или $v_{im}, \Rightarrow^* u_{k+1,}$ то путь, проходящий через все вершины $u_1,\ldots, u_k$, u_{k+1} построен. Иначе берем наибольший номер s такой, что $v_{is} \Rightarrow^* u_{k+1}$ (такой номер существует, так как иначе ни из одной вершины пути W не достижима вершина u_{k+1}, но тогда, в силу связности орграфа, любая вершина пути W, в том числе его первая вершина v_{i1}, достижима из u_{k+1}, но как раз это по предположению не имеет места). Так как по предположению $s < m$, то из вершин $v_{i,\, s+1},\ldots, v_{im}$ вершина u_{k+1} не достижима. Но тогда из нее достижима любая из указанных вершин и, в частности, выполняется:

$v_{i1} \to v_{i2} \to\ldots\to v_{is} \Rightarrow^* u_{k+1} \Rightarrow^* v_{i,\, s+1}\to\ldots \to v_{im}$, и требуемый путь, проходящий через все вершины $u_1,\ldots, u_k$, u_{k+1} построен.

Достаточность условия доказывается легко. Действительно, если u и v - две произвольные вершины орграфа, то они лежат на пути, проходящем через все вершины. Тогда или из u достижима v, или наоборот.♦

Задачи для самостоятельного решения: 5.2, 5.9, 5.10, 5.11, 5.17 (задачи к гл. 5 учебника «Дискретная математика» Белоусова и Ткачева).

Дополнительная задача (более трудная). 1) Доказать, что в n-вершинном ($n \geq 3$) сильно связном орграфе без петель число дуг (обозначенное через m) удовлетворяет неравенству: $n \leq m \leq n(n-1)$.

2) Доказать, что в n-вершинном ($n \geq 2$) слабо связном орграфе без петель, но не являющимся сильно связным, число дуг (обозначенное через m) удовлетворяет неравенству: $n - 1 \leq m \leq (n-1)^2$.