

Примеры на лемму о разрастании

$$1) L_1 = \{a^n b^n : n \geq 0\}$$

$$2) L_2 = \{x : x \in \{a, b\}^*, n_a(x) = n_b(x)\}, \\ L_2 \cap a^* b^* = L_1$$

aababb, abababab

$$3) L_3 = \{x \in V^* : x = x^R, |V| > 1\}, \\ L_3 \cap a^* b a^* = \{a^n b a^n : n \geq 0\}, a \neq b$$

Шалаш, шабаш

SATOR

AREPO

TENET

OPERA

ROTAS

$$4) L_4 = (\{a^n b^n : n > 0\})^*, \\ L_4 \cap a^* b^* = \{a^n b^n : n > 0\}$$

$$L_{41} = \{a^n b^n : n > 0\}$$

$$5) L_5 = \{a^{n^2} : n \geq 0\}$$

$$6) L_6 = L_{41}^2 L_{41}^*, \\ L_6 \cap a^+ b^+ a^+ b^+ = \{a^n b^n a^m b^m : n, m > 0\}$$

7) Язык двойных слов в алфавите, содержащем не менее 2-х букв:

$$L_7 = \{ww : w \in V^*, |V| > 1\}.$$

Рассмотрим пересечение

$$L_7 \cap a^* b^* a^* b^* = \{a^m b^n a^m b^n : m, n \geq 0\}$$

Очевидно, что расположение накачиваемой цепочки v целиком в любой из зон символа a или b невозможно.

Если $v = a^s b^r$ ($0 < s \leq m, 0 < r \leq n$), то $v^2 = a^s b^r a^s b^r$, и возникнет второе вхождение цепочки ba , что недопустимо по определению языка.

Если же $v = b^r a^s$ ($0 < s \leq m, 0 < r \leq n$) и $v^2 = b^r a^s b^r a^s$, то возникнет третье вхождение цепочки ab , что также недопустимо.

Расположение же накачиваемой цепочки «в обхват» какой-либо зоны невозможно из-за ограничений на длину накачиваемой цепочки: всегда можно выбрать «длины» зон так, чтобы они превосходили предполагаемую константу из леммы о разрастании, которая в силу предположения о регулярности языка где-то фиксирована на числовой прямой.

Следовательно, указанное пересечение нерегулярно, и язык L_7 нерегулярен.

$$8) L_8 = \{xcy : x, y \in \{a, b\}^*, c \notin \{a, b\}, |x| \geq |y|\}$$

Нужно рассмотреть пересечение

$$L_8 \cap a^*cb^* = \{a^mcb^n : m, n \geq 0, m \geq n\}$$

Расположение накачиваемой цепочки в зоне символов a отвергается рассмотрением цепочки вида $a^ncb^n, n \geq 0$. В таком случае выбрасывание накачиваемой цепочки приведет к выходу за пределы данного языка.

$$9) L_9 = \{xcy : x, y \in \{a, b\}^*, c \notin \{a, b\}, |x| \neq |y| + k, k > 0\}$$

Самостоятельно.

10) Задача 7.35 в), д), з).