Лекция №25 (22.12.23)

Утверждение. *Веса эквивалентных функций равны, но обратное неверно*.

Доказательство. Векторы значений эквивалентных функций получаются друг из друга перестановкой своих компонент. Следовательно, веса таких функций получаются перестановкой переменных - весов цветов – в их произведении. Но рациональные переменные коммутируют, откуда и следует доказываемое.

Очень важно понять, что функция разметки, представленная сначала вектором значений, в виде своего веса представляется уже мультипликативным термом над полем рациональных чисел – произведением весов своих компонент. Перестановка компонент вектора значений дает вектор значений эквивалентной функции и тот же самый мультипликативный терм. Другими словами, переходя от самих функций (раскрасок) к их весам, мы снимаем зависимость от порядка компонент, рассматривая раскраски с точностью до эквивалентности. И действие группы подстановок на множестве раскрасок сохраняет их вес, то есть группа действует «замкнуто» в рамках заданного веса.

Нас интересует теперь, сколько есть попарно ***не****эквивалентных* функций заданного веса.

Ступенчатые функции разметки

Пример:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ к & к & з & ч & з & ч & к \end{pmatrix}$$

$$w(f) = r^3 g^2 b^2$$

(члены разбиения: {1, 2, 7}, {3, 5}, {4, 6}.)

В весе функции порядок компонент вектора значений становится несущественным.

Можно вычислить вектор значений функции $g = \sigma(f), \sigma = (1234)(567)$.

$$g(1) = f(\sigma^{-1}(1)) = f(4) = ч; g(2) = f(1) = к; g(3) = f(2) = к; g(4) = f(3) = з;$$
$$g(5) = f(\sigma^{-1}(5)) = f(7) = к; g(6) = f(5) = з; g(7) = f(6) = ч.$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ ч & к & к & з & к & з & ч \end{pmatrix}; w(g) = r^3 g^2 b^2 = w(f).$$

В весах функций информация о ***порядке*** *расположения цветов стирается*.

(Поэтому и получаются симметрические функции над полем рациональных чисел.)

Если множество $S = \bigcup_{i=1}^{l} T_i, |T_i| = p_i, \sum_{i=1}^{l} p_i = n = |S|$, то каждая ступенчатая функция (при таком разбиении исходного множества) имеет вес

$w_{i_1}^{p_1} w_{i_2}^{p_2} \dots w_{i_l}^{p_l}$, а перечень таких функций будет выражаться формулой:

$$Invt(Step) = (w_1^{p_1} + \ldots + w_m^{p_1})\ldots(w_1^{p_l} + \ldots + w_m^{p_l}) = \prod_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} w_j^{p_j} .$$

При анализе терма $\hat{t}_\sigma$ важно подчеркнуть следующее.

Этот терм (в силу свойств ступенчатых функций) перечисляет в виде весов отдельных функций *все* функции разметки (раскраски), которые сохраняет подстановка σ. Если после раскрытия скобок возникают одинаковые слагаемые (веса функций в виде мультипликативных термов над полем рациональных чисел), то собирая их в одно, получим коэффициент, показывающий число функций именно данного веса, сохраняемых подстановкой σ. Возникает слагаемое $\psi_w W$, а весь терм $\hat{t}_\sigma$ переписывается в виде:

$$\hat{t}_\sigma = \sum_w \psi_w(\sigma) w.$$

При этом $\sum_w \psi_w(\sigma) = m^{K(\sigma)}$ - число *всех* раскрасок, сохраняемых подстановкой σ.

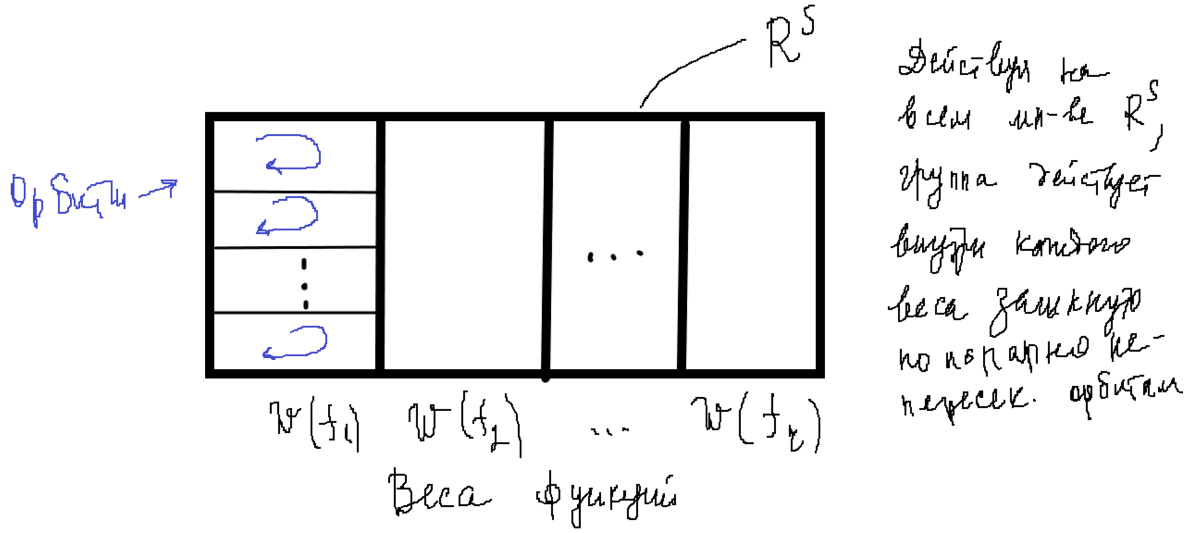
Это число можно объяснить так: каждый цикл должен иметь один цвет, то есть каждому циклу в разложении $\sigma = c_1 c_2 \ldots c_{K(\sigma)}$ можно сопоставить любой из m цветов. Следовательно, всех раскрасок, сохраняемых подстановкой σ, будет $m^{K(\sigma)}$ (число отображений множества циклов в множество цветов).

Можно рассуждать и так: раскрыв все скобки в исходном выражении для терма $\hat{t}_\sigma$, мы получим, что число функций, сохраняемых подстановкой σ, будет равно числу слагаемых. Само число получим, заменив каждый вес единицей. Тогда, если сделать такую замену в исходном выражении для терма $\hat{t}_\sigma$, мы получим $m^{K(\sigma)}$.

В примере надо обратить особое внимание на приведение подобных членов(см. файл «Структурный перечень неэквивалентных раскрасок графа»).

4.4. Основная теорема

Действие группы на множестве раскрасок можно представить в виде такой картинки:



Если считать блоком множество функций заданного веса, то группа переводит каждый блок только в себя, а внутри блока перемещает функции по попарно непересекающимся орбитам.