

## Типы примеров в теоретических вопросах РК

1. Для соответствия на множестве точек плоскости, задаваемого как  $\rho = \{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$  найдите область определения, область значений и сечение в точке  $a/2$ .

2. Существует ли нуль для операции на множестве действительных чисел, определяемой как  $a \circ b = a + b - ab$  ?

3. Приведите пример конечного упорядоченного множества, у которого несколько верхних граней, но нет точной верхней грани. Это множество должно быть подмножеством другого конечного множества.

4. Приведите пример отношения толерантности, не являющегося отношением эквивалентности.

5. Приведите пример идемпотентного полукольца, состоящего из 64 элементов.

*Указание.* Это полукольцо делителей некоторого натурального числа, которое нужно найти.

6. Что будет фактор-множеством множества действительных чисел по отношению эквивалентности  $x \equiv_2 y \iff x - y \in 2\mathbb{Z}$ , то есть разность этих чисел есть четное целое число?

Укажите попарно различные классы эквивалентности.

7. На множестве  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  найдите итерацию отношения  $\rho = \{(x, y) : |x - y| \leq 2\}$ .

*Указание.* Отношение рассматривается как элемент полукольца бинарных отношений на конечном множестве. Представьте отношение матрицей и вычисляйте степени этой матрицы до «насыщения», то есть до того момента, когда перестанут появляться новые матрицы (это обязательно произойдет). После этого сложите все матрицы, как матрицы над полукольцом  $B = (\{0, 1\}, +, *, 0, 1)$ .

Необходимо учесть и нулевую степень, то есть единичную матрицу, соответствующую диагонали множества.

8. Существует ли наибольший (наименьший) элемент у множества точек квадрата  $[0, 1] \times [0, 1]$ , ограниченного прямыми  $y = 2x$  и  $y = 2(1 - x)$  ? (Отношение порядка на множестве точек плоскости определяется как покомпонентный числовой порядок.)

9. Является ли группой множество числовых функций вида  $f(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}$  относительно операции композиции?

10. Будет ли полем множество квадратных матриц 2-го порядка, элементы которых взяты из поля вычетов по модулю 3 (операции сложения и умножения матриц понимаются стандартно, но все арифметические операции выполняются по модулю 3)?

11. Опишите минимальные и максимальные элементы множества точек плоскости, ограниченного кривыми  $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$  и  $x^2 + y^2 = 1$ . Будет ли у этого множества наибольший, наименьший элементы? Каковы точные верхняя и нижняя грани? Порядок на множестве точек плоскости определяется по координатам, то есть  $(a,b) \leq (c,d) \iff a \leq c, b \leq d$ .

12. Докажите, что отношение  $\sigma$  на множестве точек плоскости, определенное как  $(x,y)\sigma(u,v) \iff y - x^2 = v - u^2$  есть эквивалентность и опишите соответствующее фактор-множество.

13. Является ли полем множество матриц вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}$  относительно стандартных матричных операций?

14. Будет ли моноидом множество  $\{0, 1\}$ , где операция  $|$  определена так, что  $a|b=0$  тогда и только тогда, когда  $a=b=1$ ?