Семинар №1. Методы доказательства теоретико-множественных тождеств

Метод двух включений

Докажем тождество

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

выражающее свойство дистрибутивности пересечения относительно объединения.

Имеем, слева направо:

$$x\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow x\in A\,\&\,x\in B\cup C\Rightarrow(x\in A)\,\&\,((x\in B)\vee$$
$$\vee(x\in C))\Rightarrow(x\in A\,\&\,x\in B)\vee(x\in A\,\&\,x\in C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)\Rightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

Справа налево:

$$x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Rightarrow(x\in A\cap B)\vee(x\in A\cap C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x\in A\,\&\,x\in B)\vee(x\in A\,\&\,x\in C)\Rightarrow(x\in A)\,\&\,((x\in B)\vee$$
$$\vee(x\in C))\Rightarrow x\in A\,\&\,x\in B\cup C\Rightarrow x\in A\cap(B\cup C)$$

Видно, что запись второго доказательства является точной инверсией записи первого (хотя их словесные выражения различаются). Так бывает часто, но не всегда.

Рассмотрим доказательство тождества, выражающего свойство дистрибутивности объединения относительно пересечения:

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$\lhd\, x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A\vee x\in B\cap C\Rightarrow(x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C)\vee$$
$$\vee(x\in B\,\&\,x\in C)\Rightarrow(x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C)\vee(x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C)\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

Включение «слева направо» доказано. Использовано то очевидное соображение, что если элемент принадлежит какому-то множеству, то он принадлежит объединению этого множества с любым другим.

Обратно:

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow(x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C).$$

Далее рассмотрим два случая:

1. $x\in A$

Тогда x принадлежит объединению *A* с любым множеством, в частности, $x\in A\cup(B\cap C)$.

2. $x\notin A$

Тогда, поскольку x принадлежит написанным выше объединениям, то
$x \in B \,\&\, x \in C \Rightarrow x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$.

Тождество доказано.

Метод характеристических функций

Характеристическая функция множества:

$$\chi_A(x) \rightleftharpoons \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}; x \in U, A \subseteq U$$

Очевидно, что множества равны тогда и только тогда, когда равны их характеристические функции, то есть они принимают одинаковые значения при любом значении аргумента.

Характеристические функции основных операций:

1) $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$
2) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$
   В частности, $\chi_{A \cap A} = \chi_A^2 = \chi_A$. То есть *квадрат любой характеристической функции равен ей самой*. Но следует понимать, что это относится исключительно к самим функциям, а не к каким-либо выражениям, содержащим их.
3) $\chi_{A \setminus B} = \chi_{A \cap \bar{B}} = \chi_A (1 - \chi_B)$
4) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$
   Эта формула требует более подробного обоснования. Нужно доказать, что для любого значения аргумента $x \in U$ выполняется
   $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cup B$.
   Действительно, если выражение слева равно единице, то имеет место ровно один случай из трех: 1) $\chi_A(x) = 1, \chi_B(x) = 0$, 2) $\chi_A(x) = 0, \chi_B(x) = 1$, 3) $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$, что и означает, что $x \in A \cup B$.
   Обратно, если $x \in A \cup B$, то этот $x \in U$ принадлежит либо в точности одному множеству, либо их пересечению, то есть имеет место одно из трех записанных выше условий, и $\chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) = 1$.

В частности, если множества *A* и *B* не пересекаются, то характеристическая функция их объединения просто равна сумме их характеристических функций.

5) $\chi_{A \Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$.
   Действительно, $\chi_{A \Delta B} = \chi_{A \setminus B} + \chi_{B \setminus A} = \chi_A(1 - \chi_B) + \chi_B(1 - \chi_A) = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$.
   Очевидно, что $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Докажем свойство ассоциативности операции симметрической разности:

$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.

Выведем характеристическую функцию левой части:

$$\chi_{A\Delta(B\Delta C)} = \chi_A + \chi_{B\Delta C} - 2\chi_A\chi_{B\Delta C} = \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C - 2\chi_A(\chi_B + \chi_C - 2\chi_B\chi_C) =$$
$$= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C.$$

Мы видим, что в полученное выражение характеристические функции всех трех множества входят равноправно, и для получения характеристической функции правой части достаточно заметить следующее:

$$\chi_{(A\Delta B)\Delta C} = \chi_{C\Delta(A\Delta B)} = \chi_{A\Delta(B\Delta C)}.$$

Первое равенство имеет место в силу очевидной коммутативности операции симметрической разности, а второе – в силу указанной выше равноправности вхождений характеристических функций множеств в выражение для характеристической функции левой части (одинаковая расстановка скобок во втором и третьем членах двойного равенства).

Самостоятельно предлагается доказать таким методом доказанную выше методом двух включений дистрибутивность объединения относительно пересечения.

Используя метод характеристических функций, можно доказать, что тождество не имеет места.

Выясним, обладает ли операция разности свойством ассоциативности, то есть имеет ли место тождество

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

Найдем ХФ левой части:

$$\chi_{A\setminus(B\setminus C)} = \chi_A(1 - \chi_B(1 - \chi_C)) = \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B\chi_C.$$

ХФ правой части:

$$\chi_{(A\setminus B)\setminus C} = \chi_A(1 - \chi_B)(1 - \chi_C) = \chi_A - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C + \chi_A\chi_B\chi_C.$$

Выражения получились разные, но нужно доказать, что найдется такое значение аргумента $x \in U$, при котором эти выражения дадут разные значения соответствующих функций. Понятно, что при непустом пересечении множеств А и С найдется $x \in U$ такой, что $\chi_A(x)\chi_C(x) \neq 0$ и, стало быть, $\chi_{A\setminus(B\setminus C)}(x) \neq \chi_{(A\setminus B)\setminus C}(x)$, то есть в общем случае тождество не имеет места. Отсюда же понятно, что при $A \cap C = \varnothing$ тождество выполняется и $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus B$.

Метод эквивалентных преобразований

Используя этот метод, можно преобразовывать левую и правую части тождества к одному и тому же выражению.

Докажем таким способом свойство дистрибутивности пересечения относительно симметрической разности (ср. с доказательством на стр. 37 Учебника):

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

Преобразуем левую часть:

$$A\cap(B\Delta C)=A\cap[(B\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{B})]=(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C).$$

Использовали также свойство ассоциативности пересечения, записав двойные пересечения без внутренних скобок.

Правая часть преобразуется с учетом тождеств (законов) Де Моргана (формулы (7) и (8) на стр. 35):

$$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=[(A\cap B)\cap\overline{(A\cap C)}]\cup[(A\cap C)\cap\overline{(A\cap B)}]=$$
$$=[(A\cap B)\cap(\bar{A}\cup\bar{C})]\cup[(A\cap C)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})].$$

В каждой квадратной скобке раскрываем скобку с операцией объединения, пользуясь дистрибутивностью пересечения относительно объединения и опять-таки ассоциативностью пересечения:

$$[(A\cap B\cap\bar{A})\cup(A\cap B\cap\bar{C})]\cup[(A\cap C\cap\bar{A})\cup(A\cap C\cap\bar{B})].$$

Поскольку пересечение множества со своим дополнением пусто, то в итоге получим то же выражение, что и для левой части:

$$(A\cap B)\Delta(A\cap C)=(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C).$$

Тождество доказано.

Самостоятельно предлагается доказать таким же методом свойство ассоциативности симметрической разности, доказанное выше методом характеристических функций.

Тождества с декартовым произведением

1) Докажем тождество $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$, выражающее свойство дистрибутивности декартова умножения относительно пересечения.

Используем метод двух включений.

$$(x,y)\in A\times(B\cap C)\Rightarrow(x\in A)\,\&\,(y\in B\cap C)\Rightarrow(x\in A)\,\&\,(y\in B)\,\&\,y\in C)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x,y)\in A\times B\,\&\,(x,y)\in A\times C\Rightarrow(x,y)\in(A\times B)\cap(A\times C).$$

Легко проверяется обратимость каждой стрелки, что и доказывает тождество.

2) Опираясь на легко проверяемое тождество

$$\overline{A\times B}=(\bar{A}\times B)\cup(A\times\bar{B})\cup(\bar{A}\times\bar{B}),$$

методом эквивалентных преобразований докажем тождество

$$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C),$$

Выражающее свойство дистрибутивности операции декартова умножения относительно операции разности (ср. с задачей 1.6).

Используя тождество

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C),$$

доказанное выше, преобразуем левую часть:

$$A\times(B\setminus C)=A\times(B\cap\bar{C})=(A\times B)\cap(A\times\bar{C}).$$

Преобразование правой части:

$$(A\times B)\setminus(A\times C)=(A\times B)\cap(\overline{A\times C})=(A\times B)\cap[(\bar{A}\times C)\cup(A\times\bar{C})\cup(\bar{A}\times\bar{C})]=$$
$$=[(A\times B)\cap(\bar{A}\times C)]\cup[(A\times B)\cap(A\times\bar{C})]\cup[(A\times B)\cap(\bar{A}\times\bar{C})]=$$
$$=(A\times B)\cap(A\times\bar{C}).$$

Выражения в первой и третьей квадратных скобках дают, очевидно, пустое множество, и мы получили то же самое выражение, что и для левой части.

Тождества, содержащие функции (отображения)

Доказательство некоторых тождеств для отображений (задачи 1.7 и 1.8).

1. Пусть $f:X\to Y, A,B\subseteq X$. Доказать, что $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

$$\lhd\ y\in f(A\cup B)\Rightarrow(\exists x\in A\cup B)(y=f(x))\Rightarrow x\in A, y=f(x)\vee$$
$$\vee x\in B, y=f(x)\Rightarrow f(x)=y\in f(A)\vee f(x)=y\in f(B)\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B).$$
$$y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)\vee y\in f(B)\Rightarrow y=f(x), x\in A\vee$$
$$\vee y=f(x'), x'\in B\Rightarrow(\exists z\in A\cup B)(y=f(z))\Rightarrow y\in f(A\cup B).\rhd$$

Если объединение заменить пересечением, доказательство обратного включения не пройдет (элементы x и x' не обязаны совпадать), и будет иметь место только включение $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$. Оно превратится в равенство, если f инъективно (и тогда $x=x'$).

2) В условиях предыдущей задачи доказать, что $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ (но здесь $A,B\subseteq Y$).

$$\lhd\ x\in f^{-1}(A\cup B)\Rightarrow f(x)\in A\cup B\Rightarrow f(x)\in A\vee f(x)\in B\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\in f^{-1}(A)\vee x\in f^{-1}(B)\Rightarrow x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B).\rhd$$

В данном случае очевидна обратимость каждой стрелки, и тождество доказано. Легко видеть, что оно сохранится и при замене объединения пересечением.

Факультативный пример: решение уравнения $X=(A\cap X)\cup B$ с использованием критерия равенства множеств

$A = B \Leftrightarrow A \Delta B = \varnothing$.

Имеем:

$$X \Delta ((A \cap X) \cup B) = \varnothing ,$$

откуда

$$\begin{array}{l} X \cap \overline{((A \cap X) \cup B)} = \varnothing, \\ \bar{X} \cap ((A \cap X) \cup B) = \varnothing \end{array} .$$

Преобразуем 1-е пересечение:

$$X \cap (\overline{(A \cap X)} \cap \bar{B}) = X \cap (\bar{A} \cup \bar{X}) \cap \bar{B} = X \cap \bar{A} \cap \bar{B} = X \cap \overline{A \cup B} = \varnothing,$$

откуда $X \subseteq A \cup B$.

Далее:

$$\bar{X} \cap ((A \cap X) \cup B) = \bar{X} \cap B = \varnothing,$$

откуда $B \subseteq X$.

Итак, $B \subseteq X \subseteq A \cup B$. Это значит, что любое множество X, удовлетворяющее такому условию (и только такое), будет решением исходного уравнения.