Лекции по ДМ

Основное учебное пособие:

А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев. Дискретная математика. – 7-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021.- 703 с.

Далее – Учебник.

Лекция №1

06.09.24

I. Множества и отношения

1. Множества

Почему *наивная* теория множеств.

«Наивность» в данном случае означает, что исходное понятие множества строго формально не определяется, а поясняется содержательно.

«Под многообразием или множеством я понимаю всё то многое, что посредством некоторого закона приводится к единству» (Г. Кантор).

Отношение принадлежности: $a \in A$; реже $A \ni a$.

Форма $A = \{x : P(x)\}$.

Читается: A есть множество всех таких элементов x, что утверждение $P(x)$ истинно. Это $P(x)$ называется *коллективизирующим свойством* или *характеристическим предикатом*.

Если переменной x придать то или иное значение, получится истинное или ложное высказывание.

Примеры: “x – студент МГТУ”, “x – четное целое число”.

Интуитивно мы будем понимать также, что такое *натуральное число* и *конечное множество*. Хотя, строго говоря, эти понятия следует уже строго определять через исходное понятие множества.

Равенство множеств (*принцип экстенсиональности, или объемности*):

$$A = B \rightleftharpoons (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Множество полностью определяется *составом* элементов. Для конечного множества не имеет значения порядок перечисления элементов, а также число повторений какого-то элемента при перечислении.

$\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \ldots = \{1,1,2,2,2,3\} = \ldots$, но $\{1,2,3\} \neq \{\{1,2\},3\}$

Элементом множества может быть другое множество.

Канонически элементы конечного множества перечисляются в каком-то договоренном порядке без повторений элементов.

$\{a_1, a_2, ..., a_n\} = \{x : x = a_1 \vee x = a_2 \vee ... \vee x = a_n\}$

Подмножество:

$A \subseteq B \rightleftharpoons (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Сопоставляя определение равных множеств с определением подмножества, получаем, что

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \& (B \subseteq A)$

Это равносильное исходному определение равенства множеств лежит в основе метода доказательства равенства множеств, называемого *методом двух включений*. О нем речь еще пойдет.

Собственное (строгое) подмножество:

$A \subset B \rightleftharpoons (A \subseteq B) \& (A \neq B)$

Пустое множество: $\varnothing = \{x : F(x)\}$, где $F(x)$ - *тождественно ложный предикат*.

По определению принимается, что *пустое множество есть подмножество любого множества*.

Универсальное множество: $U = \{x : T(x)\}$, где $T(x)$ - *тождественно истинный предикат*.

По определению принимается, что *любое множество есть подмножество универсального множества*.

Содержательно под универсальным множеством понимается наиболее широкий род объектов, рассматриваемых в данной теории. Произвольная трактовка этого понятия может привести к противоречиям.

Итак, для любого множества A $\varnothing \subseteq A \subseteq U$.

Булеан: $2^A \rightleftharpoons \{X : X \subseteq A\}$.

Пример: $2^{\{a,b,c\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$.

Можно доказать, что если конечное множество состоит из n элементов, то в его булеане 2^n элементов.

Операции

1) *Объединение*: $A \cup B \rightleftharpoons \{x : x \in A \vee x \in B\}$

2) *Пересечение*: $A \cap B \rightleftharpoons \{x : x \in A \& x \in B\}$

Может оказаться, что $A \cap B = \varnothing$. Тогда множества A и B называют *непересекающимися*.

3) *Разность*: $A \setminus B \rightleftharpoons \{x : x \in A \& x \notin B\}$

4) *Дополнение*: $\overline{A} \rightleftharpoons \{x : x \notin A\} = \{x : x \in U \& x \notin A\} = U \setminus A$

Напомним, что каждый элемент считается элементом универсального множества.

5) *Симметрическая разность*: $A\Delta B \rightleftharpoons (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Можно доказать, что $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Выше написано *теоретико-множественное тождество*. Его надо доказать.

Основные тождества

1) $A\cup B=B\cup A; A\cap B=B\cap A$
2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C; A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$ $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
4) $A\cup A=A\cap A=A$
5) $A\cup(A\cap B)=A\cap(A\cup B)=A$
6) $A\cup\varnothing=A\cap U=A; A\cap\varnothing=\varnothing; A\cup U=U$
7) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}; \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ (тождества, или законы, Де Моргана)
8) $A\setminus B=A\cap\overline{B}$
9) $\overline{\varnothing}=U; \overline{U}=\varnothing$ (принимается по определению)
10) $A\cap\overline{A}=\varnothing; A\cup\overline{A}=U$
11) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$
12) $A\Delta B = B\Delta A$
13) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$
14) $A\Delta A=\varnothing; A\Delta\varnothing=A; A\Delta U=\overline{A}$
15) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

Рассмотрим на лекции **метод двух включений**.

Примеры:

1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

2)
$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$
$$\lhd\, x\in A\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A\vee x\in B\cap C\Rightarrow(x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C)\vee$$
$$\vee(x\in B\,\&\,x\in C)\Rightarrow(x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C)\vee(x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C).$$
$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)\Rightarrow x\in A\cup B\,\&\,x\in A\cup C.$$

Далее рассмотрим два случая:

1. $x\in A$

Тогда x принадлежит объединению A с любым множеством, в частности, $x\in A\cup(B\cap C)$.

2. $x\notin A$

Тогда, поскольку x принадлежит написанным выше объединениям, то
$x\in B\,\&\,x\in C\Rightarrow x\in B\cap C\Rightarrow x\in A\cup(B\cap C)$.

Тождество доказано.

2. Неупорядоченная и упорядоченная пары. Кортеж. Декартово произведение

Неупорядоченная пара на множествах A A,B : $\{a,b\}, a \in A, b \in B$.

Заметим, что если $a=b$, то $\{a,b\}=\{a,a\}=\{a\}$.

Равенство неупорядоченных пар: $\{a,b\}=\{c,d\} \Leftrightarrow a=c, b=d \vee a=d, b=c$. Т.е., порядок перечисления неважен: {1,2}={2,1}.

Упорядоченная пара на множествах A,B обозначается (a,b) и определяется не только составом, но порядком перечисления своих элементов, которые в этом случае называются компонентами или проекциями. Зависимость от порядка постулируется в определении равенства упорядоченных пар: принимается, что

$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \,\&\, b=d$,

Т.е. в общем случае $(a,b) \neq (b,a)$.

Точка плоскости как упорядоченная пара действительных чисел.

Факультативное замечание

Упорядоченная пара может быть явно определена как некоторое множество, а именно:

$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$.

Тогда сформулированное выше *определение* равенства упорядоченных пар надо доказать, как *критерий*.

◁ Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость.

Пусть $(a,b)=(c,d)$. Рассмотрим сначала случай, когда $a \neq b$. Тогда, поскольку одноэлементное множество не может быть равно двухэлементному, то $\{a\}=\{c\}, \{a,b\}=\{c,d\}$, причем $c \neq d$, так как иначе одноэлементное множество окажется равным двухэлементному. Отсюда $a=c, b=d$ (b не может совпасть с c , так как тогда получится, что $a=c=b$ в противоречии с неравенством $a \neq b$.

Если же $a=b$, то $(a,b)=(a,a)=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\}$. Тогда из равенства упорядоченных пар получаем, что $c=d$ (иначе опять получим равенство одноэлементного и двухэлементного множества) и $a=b=c=d$.▷

Кортеж, равенство кортежей.

Декартово произведение, декартова степень. Особый случай нулевой декартовой степени, пустой кортеж.

Тождества с декартовым произведением.

(См. Учебник, п. 1.2. Пустой кортеж – пример 2.7д.)

Лекция №2

11.09.24

3. Отношения, соответствия, отображения

n **- арное отношение на множествах** $A_1, A_2, ..., A_n$: $\rho \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

Содержательные примеры.

Строка учебного расписания есть кортеж

(Дисциплина, Преподаватель, Уч.группа, Аудитория, День, Час)

Конкретное расписание есть подмножество множества всех таких кортежей.

Частные случаи: n-арное отношение на множестве (все указанные выше множества совпадают), унарные и бинарные отношения.

Соответствия: область определения и область значений. Сечение по элементу и по множеству.

Соответствие из множества A в множество B: $\rho \subseteq A \times B$. Можно также говорить: *бинарное отношение на множествах A и B*.

Если $A = B$, то говорят о бинарном отношении на множестве A: $\rho \subseteq A^2$.

Примеры:

1) $\rho = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$
2) $\sigma = \{(x, y) : x \le y\}$ - обычное отношение числового порядка
3) $\tau = \{(x, y) : x \text{ - сын } y\}$

Область определения соответствия $\rho \subseteq A \times B$: $D_\rho = \{x : (x, y) \in \rho, y \in B\}$.

Область значений соответствия $R_\rho = \{y : (x, y) \in \rho, x \in A\}$.

Сечение соответствия $\rho \subseteq A \times B$ *по элементу* $x \in A$: $\rho(x) = \{y : (x, y) \in \rho, y \in B\}$.

Сечение соответствия $\rho \subseteq A \times B$ *по множеству* $C \subseteq D_\rho$:
$\rho(C) = \{y : (x, y) \in \rho, x \in C, y \in B\}$.

Замечание. Если множество $C \subseteq A$, то под сечением $\rho(C)$ следует понимать множество $\rho(C \cap D_\rho)$. Если это пересечение пусто, то и множество $\rho(C)$ считается пустым.

Отображения и частичные отображения.

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называется *функциональным по второй компоненте*, если для каждого $x \in D_\rho$ сечение $\rho(x)$ содержит единственный элемент $y \in B$.

Или, что то же самое, для любых двух пар $(x, y), (x', y') \in \rho$ при условии, что $x = x'$ имеет место равенство $y = y'$.

Это значит, что функциональному по второй компоненте соответствию не могут принадлежать пары с одинаковыми первыми компонентами и разными вторыми.

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называется *функциональным по первой компоненте*, если для каждого $y \in R_\rho$ существует единственный элемент $x \in D_\rho$ такой, что $(x, y) \in \rho$.

Или, что то же самое, для любых двух пар $(x, y), (x', y') \in \rho$ при условии, что $y = y'$ имеет место равенство $x = x'$.

Это значит, что функциональному по второй компоненте соответствию не могут принадлежать пары с одинаковыми вторыми компонентами и разными первыми.

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$ называется *всюду* (или *полностью*) *определенным*, если $D_\rho = A$, то есть для любого $x \in A$ существует $y \in B$ (не обязательно единственный!) такой, что $(x, y) \in \rho$.

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$, которое всюду определено и функционально по второй компоненте, называется *отображением множества* A ***в*** *множество* B (обратим внимание на предлог!).

Для нас синонимом термина «отображение» будет термин «функция».

Для отображения $f \subseteq A \times B$ принято обозначение $f : A \to B$. Единственный элемент сечения $f(x)$ называется *образом элемента* $x \in A$ *при отображении* f.

Пишут при этом $y = f(x)$ (вместо записи $(x, y) \in f$).

Тот же элемент $x \in A$, для которого $y = f(x)$, называется *прообразом элемента* y *при отображении* f. Множество всех таких элементов называют *полным* прообразом элемента y при отображении f. Используется обозначение $f^{-1}(y)$, то есть $f^{-1}(y) = \{x : y = f(x)\}$. Иногда именно это множество называют прообразом элемента y при отображении f.

Соответствие $\rho \subseteq A \times B$, которое и только лишь функционально по второй компоненте, но не является всюду определенным, называется *частичным отображением* множества A ***в*** множество B. Можно говорить и «частичная функция».

Мы будем в этом случае использовать обозначение $f : A \underset{\bullet}{\longrightarrow} B$, ставя точку под стрелкой.

Используют также понятие *образа множества* $X \subseteq A$ при отображении f: $f(X) = \{y : y = f(x), x \in X\}$.

Соответственно, *прообраз множества* $Y \subseteq B$ есть множество $f^{-1}(Y) = \{x : f(x) \in Y\}$.

Классификация отображений

- *Инъективное* отображение (или, просто, *инъекция*) – отображение, функциональное по 1-й компоненте, то есть для каждого $y \in R_f$ существует единственный $x \in A$, такой, что $y = f(x)$.

- *Сюръективное* отображение (*сюръекция*) – отображение $f: A \to B$, у которого область значений совпадает со всем множеством B, то есть для каждого $y \in B$ существует элемент $x \in A$ (не обязательно единственный!), для которого $y = f(x)$. Про такое отображение говорят, что оно есть отображение множества A ***на*** множество B.
- *Биективное* отображение (*биекция*) – отображение, которое одновременно инъективно и сюръективно.
  Биекцию называют также *взаимно однозначным соответствием* (иногда (1, 1)-соответствием).
  Для биекции $f: A \to B$ каждый элемент первого множества имеет единственный образ и каждый элемент второго множества имеет единственный прообраз.

Операции над соответствиями

1) Теоретико-множественные операции

2) Композиция

$\rho \circ \sigma \rightleftharpoons \{(x, y) : (\exists z)(x, z) \in \rho \,\&\, (z, y) \in \sigma\} \subseteq A \times D$, где $\rho \subseteq A \times B$, а $\sigma \subseteq C \times D$ - *композиция соответствий* ρ и σ.

Можно доказать, что $\rho \circ \sigma \neq \varnothing \Leftrightarrow R_\mu \cap D_\sigma \neq \varnothing$.

Для отображений $f: A \to B$ и $g: B \to C$ композиция

$$f \circ g \rightleftharpoons \{(x, y) : (\exists z)(x, z) \in f \,\&\, (z, y) \in g\} = \{(x, y) : (\exists z)(z = f(x) \,\&\, y = g(z)\} =$$
$$= \{(x, y) : y = g(f(x))\},$$

то есть $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

Обычная композиция функций, или сложная функция.

3) Обратное соответствие: если $\rho \subseteq A \times B$, то *соответствие* $\rho^{-1} \rightleftharpoons \{(y, x) : (x, y) \in \rho\} \subseteq B \times A$ называется *обратным* к ρ.

4) *Диагональ множества* A
Так называется бинарное отношение $\mathrm{id}_A = \{(x, x) : x \in A\}$.

Ясно, что это не что иное как тождественная функция.

Для бинарного отношения $\rho \subseteq A^2$ композиция его с самим собой называется его *квадратом*, то есть $\rho^2 \rightleftharpoons \rho \circ \rho$.

Доказательство некоторых тождеств для отображений (задачи 1.7 и 1.8).

1. Пусть $f: X \to Y, A, B \subseteq X$. Доказать, что $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

$$\lhd\ y \in f(A \cup B) \Rightarrow (\exists x \in A \cup B)(y = f(x)) \Rightarrow x \in A, y = f(x) \vee$$
$$\vee x \in B, y = f(x) \Rightarrow f(x) = y \in f(A) \vee f(x) = y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B).$$
$$y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A) \vee y \in f(B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \vee$$
$$\vee y = f(x'), x' \in B \Rightarrow (\exists z \in A \cup B)(y = f(z)) \Rightarrow y \in f(A \cup B). \rhd$$

Если объединение заменить пересечением, доказательство обратного включения не пройдет (элементы x и x' не обязаны совпадать), и будет иметь место только включение $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Оно превратится в равенство, если f инъективно (и тогда $x = x'$).

2) В условиях предыдущей задачи доказать, что $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ (но здесь $A, B \subseteq Y$).

$$\triangleleft\, x \in f^{-1}(A \cup B) \Rightarrow f(x) \in A \cup B \Rightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B). \triangleright$$

В данном случае очевидна обратимость каждой стрелки, и тождество доказано. Легко видеть, что оно сохранится и при замене объединения пересечением.

Лекция №3

13.09.24

Алгебраические свойства

1) $\rho \circ (\sigma \circ \tau) = (\rho \circ \sigma) \circ \tau$

2) $\begin{aligned} &\rho \circ (\sigma \cup \tau) = (\rho \circ \sigma) \cup (\rho \circ \tau) \\ &(\sigma \cup \tau) \circ \rho = (\sigma \circ \rho) \cup (\tau \circ \rho) \end{aligned}$

(Доказательство первого тождества см. в Учебнике, стр. 54, после примера 1.10. Все страницы даются по 7-му изданию.)

3) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$

4) Для бинарных отношений $\rho \subseteq A^2$: $\rho \circ id_A = id_A \circ \rho = \rho$.

4. Специальные свойства бинарных отношений

Запись $x\rho y$ далее используется вместо записи $(x, y) \in \rho$.

Отношение $\rho \subseteq A^2$ называется:

1) *рефлексивным*, если $(\forall x \in A)(x\rho x)$, то есть $\mathrm{id}_A \subseteq \rho$ (диагональ полностью содержится в отношении);

2) *иррефлексивным*, если $(\forall x \in A)((x, x) \notin \rho)$, то есть $\mathrm{id}_A \cap \rho = \varnothing$ (диагональ полностью исключается из отношения);

3) *симметричным*, если $(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$, то есть $\rho^{-1} = \rho$;

4) *антисимметричным*, если $(\forall x, y \in A)(x\rho y \,\&\, y\rho x \Rightarrow x = y)$, то есть $\rho^{-1} \cap \rho \subseteq \mathrm{id}_A$, в частности, $\rho^{-1} \cap \rho = \varnothing$;

5) *транзитивным*, если $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \,\&\, y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.

Соответствующие свойства бинарных отношений называются 1) рефлексивностью, 2) иррефлексивностью, 3) симметричностью, 4) антисимметричностью и 5) транзитивностью.

Критерий транзитивности

Теорема. Отношение $\rho \subseteq A^2$ транзитивно тогда и только тогда, когда $\rho^2 \subseteq \rho$.

Доказательство. Пусть $\rho \subseteq A^2$ транзитивно и пусть $x\rho^2 y$. Тогда для некоторого z $x\rho z$ и $z\rho y$. В силу транзитивности это означает, что $x\rho y$, т.е. $\rho^2 \subseteq \rho$.

Обратно: если $\rho^2 \subseteq \rho$, то из $x\rho z$ и $z\rho y$ для произвольных x, y, z , т.е. из $x\rho^2 y$, следует $x\rho y$, т.е. отношение транзитивно.

Замечание. Можно доказать, что рефлексивное и транзитивное отношение *совпадает* со своим квадратом.

«Анкетирование» отношений.

Эквивалентность, порядок, толерантность, предпорядок.

Эквивалентность – отношение рефлексивное, симметричное и транзитивное.

Порядок - отношение рефлексивное, антисимметричное и транзитивное.

Толерантность - отношение рефлексивное и симметричное (но, вообще говоря, не транзитивное).

Предпорядок - отношение рефлексивное и транзитивное.

5. Отношения эквивалентности и фактор-множества

Отношение равенства по модулю k на множестве целых чисел.

На множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел введем отношение равенства по модулю k:

$x \equiv_k y \rightleftharpoons k \mid x-y \rightleftharpoons (x-y) \vdots k$.

Чтобы доказать, что это отношение эквивалентности, покажем, что равенство чисел по модулю k означает равенство их остатков от деления на k:

$x \equiv_k y \Leftrightarrow \mathrm{mod}(x,k) = \mathrm{mod}(y,k)$.

Через $\mathrm{mod}(x,k)$ обозначен остаток от деления числа x на k . При этом $0 \le \mathrm{mod}(x,k) \le k-1$, и $\mathrm{mod}(x,k) = x-[x]_k$, где через $[x]_k$ обозначено наибольшее число, не превосходящее x и делящееся на k.

Пусть тогда $x \equiv_k y$. Отсюда $x-y = [x]_k + \mathrm{mod}(x,k) - [y]_k - \mathrm{mod}(y,k)$.

Так как эта алгебраическая сумма делится на k, то для этого необходимо, чтобы разность остатков $\mathrm{mod}(x,k) - \mathrm{mod}(y,k)$ делилась на k (так как числа $[x]_k$ и $[y]_k$ делятся на k). Но разность остатков на k по модулю меньше k и может делиться на k, только если она равна нулю. Что и означает равенство остатков $\mathrm{mod}(x,k) = \mathrm{mod}(y,k)$.

Итак, если числа равны по модулю k, то остатки их от деления на k равны. Обратное очевидно.

Другое доказательство см. в Учебнике стр. 68-69, пример 1.14. Но нам именно такой способ доказательства нужен, так как позже мы сошлемся на него в алгебре.

Из доказанного сразу следует, что отношение равенства чисел по модулю k является отношением эквивалентности, так как определяется через отношение равенства.

Понятие класса эквивалентности

Класс эквивалентности элемента x по отношению эквивалентности $\rho : [x]_\rho \rightleftharpoons \{y : y\rho x\}$.

Для рассмотренного выше примера $[x]_{\equiv_k} \rightleftharpoons \{y : \mathrm{mod}(y,k) = \mathrm{mod}(x,k)\}$. Это означает, что классов эквивалентности здесь ровно k, каждый класс однозначно определен числом между 0 и k-1.

Теорема. Классы эквивалентности попарно не пересекаются.

Доказательство. Пусть $\rho \subseteq A^2$ - отношение эквивалентности, классы $[x]_\rho$ и $[y]_\rho$ различны, но их пересечение не пусто. Пусть $z \in [x]_\rho \cap [y]_\rho$. Так как классы $[x]_\rho$ и $[y]_\rho$ различны, то найдется элемент $u \in [x]_\rho \setminus [y]_\rho$ или элемент $v \in [y]_\rho \setminus [x]_\rho$. В первом случае получим цепочку эквивалентностей: $z\rho x, u\rho x, z\rho y$, которая в силу симметричности любого отношения эквивалентности может быть переписана так: $u\rho x, x\rho z, z\rho y$, откуда в силу транзитивности отношения получим, что $u\rho y$, что невозможно, так как элемент $u \notin [y]_\rho$ (этот элемент выбран так, что не является эквивалентным элементу y). Случай элемента $v \in [y]_\rho \setminus [x]_\rho$ рассматривается точно так же.

Тем самым доказано, что любые два различных класса эквивалентности не пересекаются.

Другое доказательство теоремы см. в Учебнике (теорема 1.4, стр. 67-68).

Разбиение множества.

Определение. Говорят, что подмножества непустого множества A образуют его *разбиение*, если 1) все они не пусты, 2) каждый элемент A принадлежит какому-то из них и 3) они попарно не пересекаются. Подмножества, образующие разбиение множества A, называются *членами разбиения*.

Теорема. Каждое отношение эквивалентности определяет однозначно разбиение множества, на котором оно задано, причем членами разбиения являются классы эквивалентности.

Наоборот, любое разбиение множества определяет однозначно отношение эквивалентности на нем, и классы эквивалентности совпадают с членами разбиения.

Доказательство. Первое утверждение очевидно в силу ранее доказанного. Заметим только, что каждый элемент множества, на котором определено отношение эквивалентности, принадлежит своему классу эквивалентности в силу свойства рефлексивности.

Пусть теперь подмножества $B, C, ... \subseteq A$ образуют разбиение множества A. Определим отношение $\rho \subseteq A^2$ так: $x\rho y \rightleftharpoons (x \in B)\,\&\,(y \in B)$ для некоторого члена разбиения B.
Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны. Докажем транзитивность.

Пусть $x\rho y, y\rho z$. Тогда для некоторых членов разбиения B, C имеем:
$x, y \in B; y, z \in C \Rightarrow y \in B \cap C \neq \varnothing \Rightarrow B = C \Rightarrow x, y, z \in B \Rightarrow x\rho z$, что и доказывает транзитивность определенного таким образом отношения.

Тривиальные разбиения: это 1) разбиение, единственным членом которого является само множество, а также 2) разбиение на одноэлементные подмножества.

Можно сказать, что в первом случае все элементы множества эквивалентны, а во втором каждый элемент эквивалентен только самому себе.

Фактор-множество.

Множество классов эквивалентности $\{[x]_\rho : x \in A\}$ *называется фактор-множеством множества* A *по отношению эквивалентности* $\rho \subseteq A^2$ *и обозначается* A/ρ.

Примеры. 1) Фактор множество $\mathbb{Z}/\equiv_k = \{[0]_{\equiv_k}, [1]_{\equiv_k}, ..., [k-1]_{\equiv_k}\}$. Это множество конечно (оно состоит из k элементов), хотя каждый его элемент есть бесконечное множество всех чисел, дающих при делении на k остаток 0, 1,..., k-1. Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между фактор-множеством $\mathbb{Z}/\equiv_k$ и множеством чисел $\{0,1,...,k-1\}$.

2) На множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ определим отношение равенства по модулю 1:

$x \equiv_1 y \rightleftharpoons x - y \in \mathbb{Z}$.

Рекомендуется самостоятельно доказать, что это отношение эквивалентности и что фактор множество $\mathbb{R}/\equiv_1$ находится во взаимно однозначном соответствии с полуинтервалом [0, 1).

Также рекомендуется проанализировать отношение

$x \equiv_T y \rightleftharpoons x - y = kT; k \in \mathbb{Z}, T \in \mathbb{R}^+$ (положительное действительное число).

Здесь часто используется случай $T = 2\pi$ (период).

3) На множестве точек плоскости $\mathbb{R}^2$ зададим отношение $(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \rightleftharpoons x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$.

Легко проверяется, что это эквивалентность (проверить!).

Класс эквивалентности точки $[(x_0, y_0)]_\rho = \{(x, y) : x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\}$ - окружность радиуса $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ с центром в начале координат, и исходная точка лежит на этой окружности. Заметим при этом, что класс эквивалентности точки (0, 0) сводится только к этой точке. Фактор-множество есть здесь множество концентрических окружностей $x^2 + y^2 = r^2, r \geq 0$.

Предлагается самостоятельно проанализировать отношение
$(x_1, y_1)\sigma(x_2, y_2) \rightleftharpoons x_1^2 - y_1^2 = x_2^2 - y_2^2$.