## Лекция №22

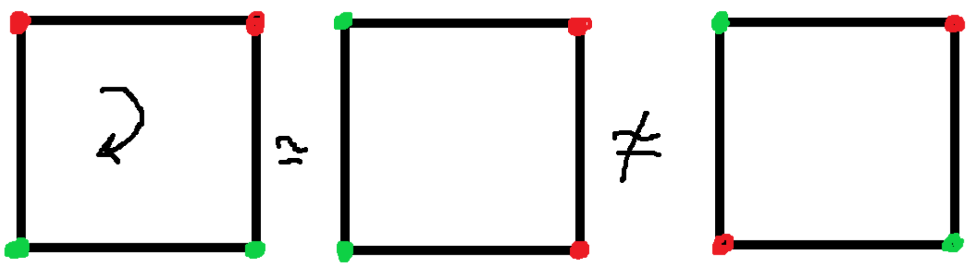
13.12.24

## 4. Элементы теории Пойа

В этом разделе речь пойдет о перечислении неэквивалентных раскрасок (или разметок) разных геометрических фигур: их вершин, ребер, граней. В основном будут рассматриваться разметки вершин неориентированных графов.

Неэквивалентность раскрасок означает невозможность перевести одну в другую посредством какого-нибудь автоморфизма фигуры.

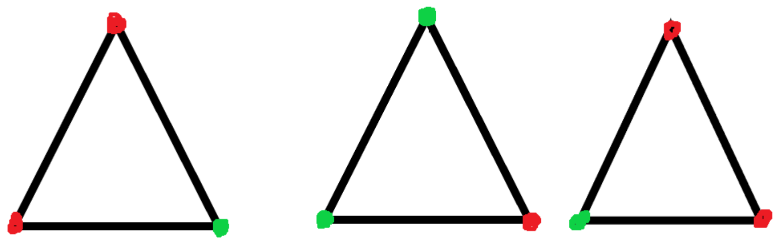
На рисунке ниже изображены раскраски вершин квадрата двумя цветами: красным и зеленым:



$2r^2g^2$

Из простых геометрических соображений видно, что первые две раскраски эквивалентны: вторая получается из первой поворотом квадрата на 90 гр. по часовой стрелке. Но третья раскраска, когда два одинаковых цвета находятся на концах диагонали, никак не может получена из первых двух. Эта ситуация может быть описана в виде многочлена (и даже одночлена) $2r^2g^2$ (где $r$ и $g$ - числовые, точнее, рациональные, переменные), что понимается как существование по крайней мере двух неэквивалентных раскрасок типа (2, 2), то есть две красные вершины и две зеленые.

А для правильного треугольника все раскраски теми же цветами одного и того же типа (1, 2) или (2, 1) будут эквивалентны:



$r^2 g$ или $r g^2$

Необходимо разработать аппарат, позволяющий в общем случае перечислять неэквивалентные раскраски (разметки) всевозможных фигур различными цветами. Это перечисление реализуется в виде многочленов над полем рациональных чисел от нескольких переменных, коэффициенты которых дают число неэквивалентных разметок, а само произведение переменных тип разметки (то есть распределение цветов).

Вообще же такие многочлены называются в комбинаторике ***производящими функциями***, а раздел комбинаторики, в котором изучаются разные производящие функции, называют ***перечислительной комбинаторикой***[1].

Поскольку для решения поставленной выше задачи требуется как-то связать группы автоморфизмов графов (в более общем случае – некоторой геометрической фигуры) с типами разметок, начнем с понятия циклического индекса конечной группы. Это понятие, как мы увидим позже, оказывается ключевым в этом разделе перечислительной комбинаторики, именуемой ***теорией Пойа*** (в честь выдающегося венгерского математика Дьёрдя Пойа (1887-1985)).

https://ru.wikipedia.org/wiki/Пойа,_Дьёрдь

### 4.1. Циклический индекс группы

***Циклическим (или цикловым) индексом*** конечной группы $G$ называется многочлен $P_G(x_1,\dots,x_n)$ над полем рациональных чисел, построенный следующим образом: каждой подстановке $\sigma \in G$, разложенной на независимые циклы: $\sigma = \kappa_1\kappa_2\dots\kappa_{K(\sigma)}$, сопоставляется произведение (мультипликативный терм) $t_\sigma = x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$, где $m_j \geq 0,\ j = 1,\dots,.n,$ есть число всех циклов длины $j$ в подстановке $\sigma$ (предполагается, что $n$ - наибольшая длина цикла в группе $G$, и, конечно, $\sum_{j=1}^{n} m_j = K(\sigma)$); тогда $P_G(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} t_\sigma$ .

[1] Еще пример производящих функций – ладейные полиномы (см. Дополнения к лекции №19).

При этом сумма коэффициентов при всех термах $t_\sigma = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ равна порядку группы, а сумма произведений $\sum_{j=1}^{n} jm_j = n$ - числу элементов множества, на котором действует данная группа подстановок (в общем случае, некоторая подгруппа симметрической группы $S_n$.

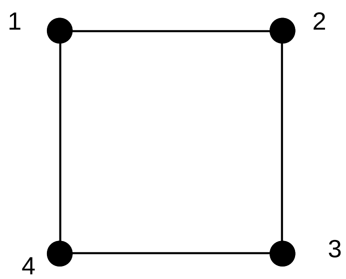
Часто (даже, как правило) терм $t_\sigma$ записывают так:

$$t_\sigma = x_{n_1}^{k_1} x_{n_2}^{k_2} \dots x_{n_m}^{k_m} ,$$

где все числа $k_i, 1 \le i \le m$ отличны от нуля, то есть учитываются только те циклы, которые действительно фигурируют в разложении подстановки $\sigma$. При этом $\sum_{i=1}^{m} n_i k_i = n$ - числу элементов множества, на котором действует данная группа подстановок

Понятие циклического индекса можно проиллюстрировать таким примером.

**Пример**. Рассмотрим группу симметрий квадрата, или, что то же самое, группу автоморфизмов графа, изображенного ниже:




Сведем построение циклового индекса этой группы в следующую таблицу:

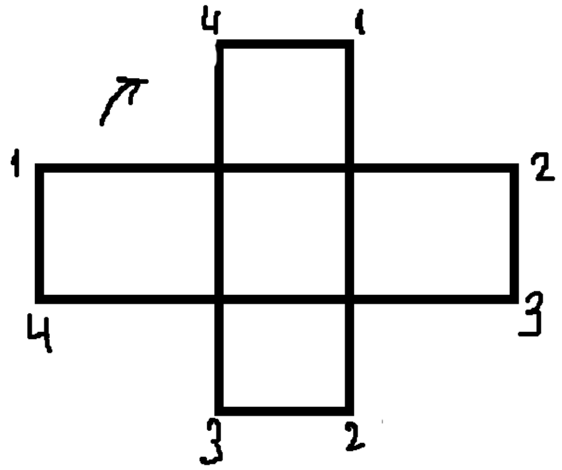
| $\sigma$ | $t_\sigma$ |
|---|---|
| ε=(1)(2)(3)(4) | $x_1^4$ |
| (1234) | $x_4$ |
| (13)(24) | $x_2^2$ |

| | |
|---|---|
| (4321) | $x_4$ |
| (12)(34) | $x_2^2$ |
| (13)(2)(4) | $x_1^2 x_2$ |
| (24)(1)(3) | $x_1^2 x_2$ |
| (14)(23) | $x_2^2$ |

В итоге получаем циклический индекс:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + 2x_4).$$

**Замечания**. 1) Циклический индекс группы автоморфизмов *прямоугольника, не являющегося квадратом*, будет другим, так как такой прямоугольник, в отличие от квадрата, не совпадет с самим собой при повороте.




Группа автоморфизмов такой фигуры порождается двумя отражениями относительно осей симметрии – прямых, проходящих через середины противоположных сторон:

$$G = \{\varepsilon, (12)(34), (14)(23), (13)(24)\}$$

(последняя подстановка есть, как легко проверить, композиция первых двух).

Циклический индекс:

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}(x_1^4 + 3x_2^2)$$

2) Можно вывести *циклический индекс* ***всей*** *группы* $S_n$:

$$P_{S_n}(x_1,...,x_n)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma}\frac{n!}{n_1^{k_1}k_1!n_2^{k_2}k_2!...n_m^{k_m}k_m!}t_\sigma;t_\sigma=x_{n_1}^{k_1}x_{n_2}^{k_2}...x_{n_m}^{k_m},\sum_{i=1}^{m}n_ik_i=n$$

То есть, если подстановка $\sigma\in S_n$ описывается в циклическом индексе термом

$t_\sigma=x_{n_1}^{k_1}x_{n_2}^{k_2}...x_{n_m}^{k_m}$, где $\sum_{i=1}^{m}n_ik_i=n$,

то коэффициент при нем будет иметь вид:

$$\frac{n!}{n_1^{k_1}k_1!n_2^{k_2}k_2!...n_m^{k_m}k_m!}t_\sigma\ . \qquad (*)$$

Другими словами, коэффициент при терме будет числом всех подстановок с такой циклической структурой (во *всей* симметрической группе!).

Например, для терма $x_1x_2^2$ в циклическом индексе группы $S_5$ получим коэффициент

$\frac{120}{1!\cdot 2^2\cdot 2!}=15$, а для терма $x_2^2x_3$ в циклическом индексе группы $S_7$ будем иметь

$\frac{7!}{2^2\cdot 2!\cdot 3}=210$; для терма же $x_1x_2x_4$ также в $S_7$ получим $\frac{7!}{1\cdot 2\cdot 4}=630$.

Это основано на том соображении, что число циклов длины $n$ составит

$\frac{n!}{n}=(n-1)!$ с учетом того, что мы имеем ровно $n$ циклических перестановок элементов цикла, дающих одну и ту же подстановку.

Кроме того, учитывается, что все перестановки циклов одной и той же длины в разложении на попарно независимые циклы дают одну и ту же подстановку.

Можно рассудить и так: если мы имеем попарно независимые циклы, суммарная длина которых равна $n$ и каждый цикл фиксированной длины встречается ровно один раз (то есть терм имеет вид $t_\sigma=x_{n_1}x_{n_2}...x_{n_m}$), то общее число перестановок по всем циклам в совокупности без учета циклических составит $n!$, но по каждому циклу мы имеем число циклических  перестановок, равное его длине. Поэтому $n!$ надо делить на произведение длин циклов в разложении: $\frac{n!}{n_1n_2...n_m}$.

Произведение потому, что на каждую циклическую перестановку в каком-то цикле приходятся все такие перестановки в остальных циклах. Далее надо принять во внимание возможные повторения циклов одинаковой длины и еще делить на факториал числа повторений, и сомножитель $n_i$ в знаменателе записанной выше дроби заменяется на $n_i^{k_i} k_i!$; показатель степени дает число всех циклов длины $n_i$, а факториал – число всех перестановок таких циклов.

3) Наряду с термом $t_\sigma = x_{n_1}^{k_1} x_{n_2}^{k_2} ... x_{n_m}^{k_m}$ циклическая структура подстановки может быть описана кортежем $(\underbrace{n_1,...,n_1}_{k_1}, \underbrace{n_2,...,n_2}_{k_2}, ..., \underbrace{n_m,...,n_m}_{k_m})$, причем принято длины циклов располагать по возрастанию: $n_1 < n_2 < ... < n_m$ [2].

В качестве примера приведем полное описание группы $S_5$, вычисляя коэффициенты в циклическом индексе по записанной выше формуле (*), причем единичные множители опускаются.

- (1, 1, 1, 1, 1) – 5 циклов длины 1 (тождественная подстановка); число таких подстановок равно $\frac{5!}{5!} = 1$ (в знаменателе число всех перестановок 5 циклов длины 1);
- (1, 1, 1, 2) – 3 цикла длины 1 и один цикл длины 2 (транспозиция); число - $\frac{5!}{3! \cdot 2} = 10;$
- (1, 1, 3) – 2 цикла длины 1 и один цикл длины 3; число - $\frac{5!}{2! \cdot 3} = 20;$ ;
- (1, 4) – один цикл длины 1 и один цикл длины 4; число - $\frac{5!}{4} = 30;$
- (1, 2, 2) - один цикл длины 1 и два цикла длины 2; число - $\frac{5!}{2^2 \cdot 2!} = 15;$
- (2, 3) – один цикл длины 2 и один длины 3; число - $\frac{5!}{2 \cdot 3} = 20;$
- (5) – единственный цикл длины 5; число - $\frac{5!}{5} = 24$.

В итоге имеем циклический индекс

$$P_{S_5}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120}(x_1^5 + 10x_1^3 x_2 + 20x_1^2 x_3 + 30x_1 x_4 + 15x_1 x_2^2 + 20x_2 x_3 + 24x_5) \cdot$$

---

[2] Строго говоря, это не кортеж, а так называемое *мультимножество*, в котором каждый элемент повторяется несколько раз (может быть, в частности, и один раз). «Блоки» одинаковых элементов можно как угодно переставлять. Формально мультимножество над произвольным непустым множеством $A$ можно определить как отображение $\nu : A \to \mathbb{N}$, в котором значение $\nu(a)$ равно числу повторений элемента $a$.

## 4.2. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы.

Пусть $S$ - непустое конечное множество, а $G$ - действующая на нем группа, т.е. некоторая подгруппа симметрической группы $S$. В конечном случае это группа подстановок.

Элементы $s, s' \in S$ назовем ***эквивалентными***, если для некоторой подстановки $\sigma \in G$ выполняется $s' = \sigma(s)$.

Легко проверяется, что тем самым действительно определено отношение эквивалентности на $S$. Обозначим его $\underset{G}{\sim}$. Класс эквивалентности элемента $s$ по данному отношению называется *орбитой* этого элемента.

Для произвольно фиксированного $s \in S$ рассмотрим множество $G_s$ всех подстановок в $G$, для которых $s$ является неподвижной точкой, т.е. $G_s = \{\sigma : \sigma(s) = s\}$.

Докажем, что $G_s$ - подгруппа $G$. Действительно, тождественная подстановка $\varepsilon \in G_s$. Далее, если $\rho, \sigma \in G_s$, то $\rho\sigma(s) = \sigma(\rho(s)) = \sigma(s) = s$, откуда $\rho\sigma \in G_s$. Наконец, при $\sigma \in G_s$ получаем: $\sigma^{-1}(s) = \sigma^{-1}(\sigma(s)) = s$, т.е. $\sigma^{-1} \in G_s$. Подгруппа $G_s$ называется ***стабилизатором*** (или ***стационарной подгруппой***) ***элемента*** $s$.

**Утверждение 1.** Множество $G(s,r)$ подстановок, переводящих $s$ в $r$ совпадает с правым смежным классом стабилизатора $s$ по произвольно фиксированной подстановке $\sigma_r$, переводящей $s$ в $r$:

$$G(s,r) = G_s\sigma_r = \{\sigma : \sigma = \rho\sigma_r, \rho \in G_s\}.$$

**Доказательство**. Пусть $\sigma \in G(s,r)$ - какая-то подстановка, переводящая $s$ в $r$. Тогда $\sigma = \sigma(\sigma_r^{-1}\sigma_r) = (\sigma\sigma_r^{-1})\sigma_r \in G_s\sigma_r$, так как $\sigma\sigma_r^{-1} \in G_s$.

$$s \underset{\sigma_r^{-1}}{\overset{\sigma_r,\sigma}{\rightleftarrows}} r$$

$$\sigma\sigma_r^{-1}(s) = \sigma_r^{-1}(\sigma(s)) = \sigma_r^{-1}(r) = s.$$

Если же $\sigma \in G_s\sigma_r$, то $\sigma = \rho\sigma_r, \rho \in G_s$. Тогда $\sigma(s) = \sigma_r(\rho(s)) = \sigma_r(s) = r$, то есть $\sigma \in G(s,r)$.

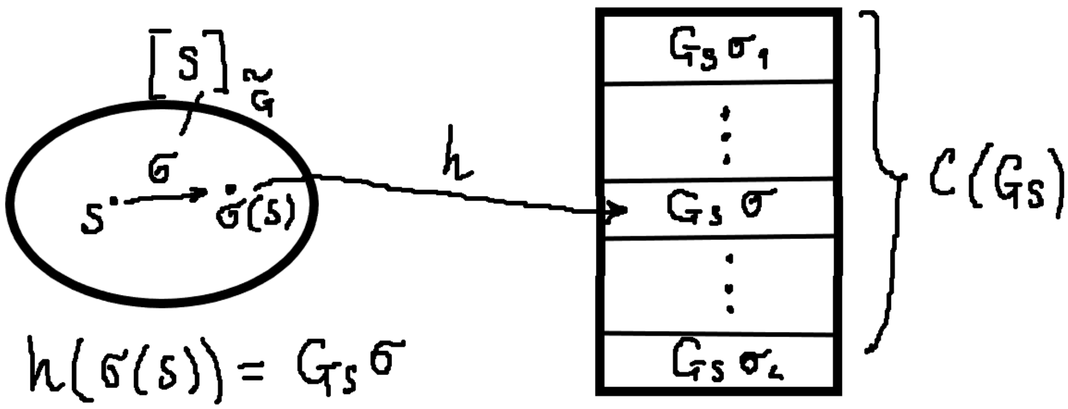
**Следствие**. 1) $|G(s,r)| = |G_s|$; 2) порядки стабилизаторов эквивалентных элементов совпадают.

**Доказательство**. Первый пункт является прямым следствием доказанного утверждения (с учетом доказательства теоремы Лагранжа), а второй вытекает из того, что $|G(s,r)|=|G(r,s)|$, так как на каждую подстановку, переводящую $s$ в $r$ найдется единственная обратная, переводящая $r$ в $s$, и $|G(s,r)|=|G_s|=|G(r,s)|=|G_r|$.

**Утверждение 2**. Индекс подгруппы-стабилизатора произвольного элемента $s$ равен мощности (числу элементов) $\omega(s)$ орбиты этого элемента.

**Доказательство**. Индекс подгруппы есть, как известно, число смежных классов (левых или правых), определяемых этой подгруппой.

Зададим отображение $h$ орбиты $[s]_{\tilde{G}}$ в множество $C(G_s)=\{G_s\sigma : \sigma \in G\}$ правых смежных классов подгруппы $G_s$ следующим образом: какова бы ни была подстановка $\sigma$ и вместе с ней правый смежный класс $G_s\sigma$, полагаем $h(\sigma(s))=G_s\sigma$.




**Замечание**. Отображение $h$ можно определить и так:

$$h(r)=G_s\sigma \rightleftharpoons r=\sigma(s)$$

Смежный класс $G_s\sigma$ является образом такого элемента $r$ орбиты элемента $s$, $r\in[s]_{\hat{G}}$, что $r=\sigma(s)$. Заметим, что в указанный смежный класс попадают *все* подстановки, переводящие $s$ в $r$ - в силу утверждения 1.

Из определения сразу следует, что $h$ - сюръекция.

Докажем, что $h$ и инъекция.

Пусть $r=\sigma_r(s), t=\sigma_t(s)$ и пусть при
$r \neq t$ $h(r)=h(\sigma_r(s))=G_s\sigma_r=h(t)=h(\sigma_t(s))=G_s\sigma_t$, то

любая подстановка $\sigma \in G_s\sigma_r=G_s\sigma_t$, в силу утверждения 1 должна переводить $s$ в $r$ и $t$ одновременно, что невозможно.

То есть орбита элемента $s$ и множество $C(G_s)$ находятся во взаимно однозначном соответствии, откуда и следует доказываемое: $|G:G_s|=\omega(s)$.

Тогда по теореме Лагранжа получаем, что порядок всей группы $|G|=|G:G_s||G_s|=\omega(s)|G_s|$, или $|G|=\sum\limits_{r\in[s]_{\tilde{G}}}|G_r|$,

так как порядки стабилизаторов всех эквивалентных элементов, т.е. всех элементов орбиты $s$, одинаковы. Другими словами, порядок группы можно получить, складывая порядки всех стабилизаторов элементов произвольной орбиты.

**Замечание**. Соотношение $|G|=\omega(s)|G_s|$ интересно и само по себе, так как позволяет найти порядок группы $G$ по известным порядку стабилизатора произвольно выбранного элемента $s$ и числу элементов в орбите $s$. Так, в частности, можно вычислить порядок группы автоморфизмов графа.

## Лекция №23

18.12.24

### 4.3. Лемма Бернсайда

Пусть теперь $N$ - число классов эквивалентности по отношению $\tilde{G}$, и $s_1,\ldots,s_N$ попарно неэквивалентные представители этих классов. Тогда, согласно доказанному выше утверждению 2,

$N\cdot|G|=\omega(s_1)|G_{s_1}|+\ldots+\omega(s_N)|G_{s_N}|$. В этой сумме суммируются порядки стабилизаторов всех элементов множества $S$, разбитого на классы эквивалентности, т.е. $N|G|=\sum\limits_{s\in S}|G_s|$. Отсюда следует, что число классов эквивалентности по отношению $\tilde{G}$ составит $N=\dfrac{1}{|G|}\sum\limits_{s\in S}|G_s|$.

Стоящая в записанном выражении сумма есть число всех элементов группы $G$, принадлежащих каким-либо стабилизаторам, то есть оставляющих неподвижным какой-либо элемент множества $S$. Но это же число можно получить, суммируя по всем подстановкам, оставляющим неподвижными некоторый её элемент $S$ (в указанной выше сумме каждая подстановка учитывается столько раз, сколько элементов множества $S$ она оставляет неподвижными, то есть скольким стабилизаторам она принадлежит). Тогда получим

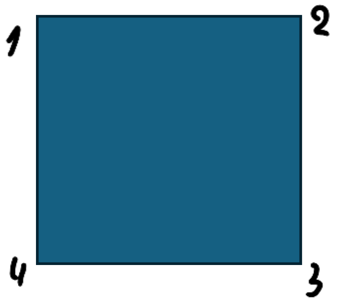
$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma),$$

где через $\psi(\sigma)$ обозначено число всех элементов множества $S$, являющихся неподвижными точками подстановки $\sigma$.

Полученный результат и есть ***лемма Бернсайда о подсчете***. Подводя итог, лемму Бернсайда можно сформулировать так:

**Лемма Бернсайда**. Если на множестве $S$ действует группа $G$, то число $N$ орбит, на которые разбивается множество $S$, составляет $N = \frac{1}{|G|}\sum_{s \in S} |G_s|$, где $G_s$ - стабилизатор элемента $s$, или $N = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma \in G} \psi(\sigma)$, где $\psi(\sigma)$ есть число всех элементов множества $S$, являющихся неподвижными точками подстановки $\sigma$.

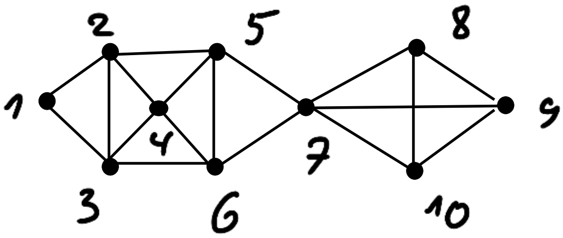
**Примеры**. 1) Группа диагональных отражений вершин квадрата.




$$G = \{\varepsilon, (13), (24), (13)(24)\};$$
$$G_1 = \{\varepsilon, (24)\},$$
$$G_3 = \{\varepsilon, (24)\},$$
$$G_2 = \{\varepsilon, (13)\},$$
$$G_4 = \{\varepsilon, (13)\}.$$
$$\sum_{i=1}^{4} |G_i| = 8; \psi(\varepsilon) + \psi((13)) + \psi((24)) = 4 + 2 + 2 = 8$$

Сумму порядков всех стабилизаторов можно подсчитывать, перечисляя элементы стабилизаторов по очереди: в первом стабилизаторе, во втором и т. д.  А можно для каждой подстановки считать число ее появлений в разных стабилизаторах. Заметим, что в данном примере подстановки (13)(24) нет ни в одном стабилизаторе, так как она ни один элемент не оставляет неподвижным, то есть $\psi((13)(24))=0$.

2)Рассмотрим граф:




Легко видеть, что группа автоморфизмов этого графа может быть представлена как произведение группы, порожденной отражением (23)(56), и группы $S_3$, действующей на множестве {8, 9, 10}:

$$Aut(G)=\{\varepsilon,(23)(56)\}\times S_3^{(8,9,10)}$$

$$|Aut(G)|=12$$

Порядки стабилизаторов:

$|G_1|=|G_4|=|G_7|=12$ - эти вершины всегда неподвижны[3], и стабилизатор – вся группа;

$|G_2|=|G_3|=|G_5|=|G_6|=6$ - эти вершины оставляет неподвижными подгруппа перестановок вершин 8, 9 и 10;

$|G_8|=|G_9|=|G_{10}|=4$ - стабилизатор 8 вершины порождается подстановками (23)(56) и (9 10); для 9 и 10 вершины – (23)(56) и (8 10), (23)(56) и (89) соответственно.

В итоге сумма порядков стабилизаторов составит 3*12+4*6+3*4=72, а число орбит равно 6.

Это {1}, {4}, {7}, {2, 3}, {5, 6}, {8, 9, 10}.

Второй способ подсчета (через вычисление чисел $\psi(\sigma),\sigma\in Aut(G)$):

$$\psi(\varepsilon)=10;$$

$$\psi[(23)(56)]=6;$$

$$\psi[(89)]=\psi[(810)]=\psi[(910)]=8;$$

---

[3] Можно заметить, что вершина 1 – единственная, имеющая степень 2, вершина 4 – единственная со степенью 4, а вершина 7 – единственная со степенью 5.

$\psi[(8910)] = \psi[(1098)] = 7;$

$\psi[(23)(56)(89)] = \psi[(23)(56)(810)] = \psi[(23)(56)(910)] = 4;$

$\psi[(23)(56)(8910)] = \psi[(23)(56)(1098)] = 3.$

Итак,

$$\sum_{\sigma} \psi(\sigma) = 10 + 6 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 72.$$

Циклический индекс:

$$P_{Aut(G)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^7 + x_1^3 x_2^2) \cdot \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3) =$$
$$= \frac{1}{12}(x_1^{10} + 3x_1^8 x_2 + 2x_1^7 x_3 + 3x_1^4 x_2^3 + 2x_1^3 x_2^2 x_3).$$

Если убрать вершину 4 (сохранив диагонали квадрата), то «левая» подгруппа порождается подстановками (23) и (56) и содержит 4 элемента. Поэтому вся группа будет иметь порядок 24.

Циклический индекс примет вид:

$$\frac{1}{4}(x_1^6 + 2x_1^4 x_2 + x_1^2 x_2^2)\frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3) =$$
$$= \frac{1}{24}(x_1^9 + 3x_1^7 x_2 + 2x_1^6 x_3 + 2x_1^7 x_2^2 + 6x_1^5 x_2^2 + 4x_1^4 x_2 x_3 + x_1^5 x_2^2 + 3x_1^3 x_2^3 + 2x_1^2 x_2^2 x_3).$$

Подсчет числа орбит:

$|G_1| = |G_7| = 24$ (номера вершин не изменены);

$|G_2| = |G_3| = |G_5| = |G_6| = 12$ - стабилизатор каждой из этих вершин порождается группой перестановок вершин 8, 9 и 10 и транспозицией двух из 4 данных, которая не содержит выбранную вершину;

$|G_8| = |G_9| = |G_{10}| = 8$ - стабилизатор каждой из этих вершин порождается «левой» подгруппой и транспозицией из группы перестановок 8, 9 и 10, которая не содержит выбранную вершину.

Сумма порядков стабилизаторов = 2*24+4*12+3*8=120.

Число орбит = 5 (исчезает орбита {4}).

### 4.4. Функции разметки

Пусть на множестве $S$ задана функция $f: S \to R$, отображающая $S$ в множество ***меток*** (***красок***, ***цветов***) $R$. Такая функция называется ***функцией***

***разметки***, или ***функцией раскраски*** (или просто ***раскраской***). Действие группы $G$ на множестве $S$ стандартным образом распространяется на множество $R^S$ всех раскрасок: $\sigma(f)(s) = f(\sigma^{-1}(s))$ (для каждого $s \in S$). Эквивалентность раскрасок $f, g$ означает тем самым, что для некоторой подстановки $\sigma$ имеет место равенство $g = \sigma(f)$, т.е. для каждого $s \in S$ выполняется $g(s) = f(\sigma^{-1}(s))$. Число классов эквивалентности на множестве раскрасок определяется по лемме Бернсайда.

**Замечание**. То, что в определении функции $\sigma(f)$ фигурирует не сама подстановка $\sigma$, а обратная к ней, можно объяснить так.

Пусть подстановка $\sigma$ есть цикл $(i_1 i_2 ... i_k)$ и пусть значения функции разметки $f$ на элементах цикла равны $r_1, r_2, ..., r_k$ соответственно. Тогда $f(\sigma(i_j)) = f(i_{j\oplus 1})$, где

$$j \oplus 1 = \begin{cases} j+1, \text{при } j < k \\ 1, \text{ при } j = k \end{cases},$$

и если положить $g(s) = f(\sigma(s))$, то вектор значений функции $g$ на элементах цикла будет иметь вид: $(r_2, r_3, ..., r_k, r_1)$, т.е. цвета элементов сдвигаются (циклически) противоположно самим элементам. Ясно тогда, что, заменяя в определении функции $g$ подстановку $\sigma$ на обратную, мы и цвета элементов, и сами элементы сдвигаем одинаково. Поэтому и разумно определить действие группы на множестве функций так, как записано выше, т.е. через обратную подстановку.

$$\sigma(f)(s) = f(\sigma(s)) : \begin{matrix} i_1 & i_2 & ... & i_{k-1} & i_k \\ r_2 & r_3 & ... & r_k & r_1 \end{matrix}$$

$$f(\sigma(i_1)) = f(i_2) = r_2; f(\sigma(i_2)) = f(i_3) = r_3, ..., f(\sigma(i_k)) = f(i_1) = r_1.$$

$$\sigma(f)(s) = f(\sigma^{-1}(s)) : \begin{matrix} i_1 & i_2 & ... & i_{k-1} & i_k \\ r_k & r_1 & ... & r_{k-2} & r_{k-1} \end{matrix}$$

$$f(\sigma^{-1}(i_1)) = f(i_k) = r_k; f(\sigma^{-1}(i_2)) = f(i_1) = r_2, ..., f(\sigma^{-1}(i_k)) = f(i_{k-1}) = r_{k-1}.$$

Впрочем, в некоторых источниках просто определяется эквивалентность функций (при действии группы $G$ на множестве функций: функции $f$ и $g$ считаются эквивалентными, для найдется такая подстановка $\sigma \in G$, что для любого $s \in S$

$g(s) = f(\sigma(s))$, то есть функция $\sigma(f)$ явно не определяется. С учетом нашего уточнения тогда следует считать в последнем равенстве $g = \sigma^{-1}(f)$.

Каждому элементу множества $r \in R$, называемого ***запасом*** (это, образно говоря, некое множество «красок», или «цветов» - «палитра»), сопоставим ***вес*** $w(r)$ в виде рациональной переменной. Тогда каждой функции разметки $f \in R^S$ может быть также сопоставлен вес в виде произведения

$$w(f) = \prod_{s \in S} w(f(s)) = w(f(s_1))...w(f(s_n)),$$

где мы полагаем, что $S = \{s_1, ..., s_n\}$.

Более простая запись:

$$w(f) = w_{i_1} w_{i_2} ... w_{i_n}; w_{i_j} = w(f(s_j)), 1 \leq j \leq n.$$

То есть вектору значений функции

$$(r_{i_1}, r_{i_2}, ..., r_{i_n}), r_{i_j} = f(s_j), 1 \leq j \leq n$$

сопоставляется произведение рациональных переменных – мультипликативный терм, и тогда порядок компонент вектора значений становится несущественным, так как рациональные переменные коммутируют.

Всему же множеству функций разметки $R^S$ сопоставляется так называемый ***перечень*** в виде полинома над полем рациональных чисел:

$$Invt(R^S) = \sum_{f \in R^S} w(f)$$

(обозначение *Invt* производится от английского слова inventory – перечень, инвентарь).

Можно показать, что перечень множества $R^S$ может быть представлен также в виде:

$$Invt(R^S) = [\sum_{r \in R} w(r)]^{|S|} = (w_1 + ... + w_m)^n,$$

где мы полагаем, что $R = \{r_1, ..., r_m\}$ и через $w_j$ обозначаем вес цвета $r_j$, т.е. $w_j = w(r_j),\ j = 1, ..., m$.

Эта сумма называется ***перечнем запаса***.

Действительно, получаем $n$ одинаковых сомножителей, а после раскрытия скобок каждое слагаемое (произведение $n$ переменных) отвечает некоторому выбору элемента запаса по номеру элемента множества $S$, т.е. номеру сомножителя (скобки), и, тем самым, это слагаемое есть не что иное, как вес некоторой функции разметки.

$$(w_1 + \ldots + w_m)^n = \underbrace{(w_1 + \ldots + w_m)(w_1 + \ldots + w_m)\ldots(w_1 + \ldots + w_m)}_{n} =$$

$$= w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_n} + \ldots$$

(в первой скобке берем слагаемое с номером $i_1$, во второй – с номером $i_2$ и т. д., причем какие-то номера могут совпадать).[4]

Например, при раскраске вершин квадрата двумя цветами получим

$$Invt(R^S) = (r+b)^4 = r^4 + 4r^3b + 6r^2b^2 + 4rb^3 + b^4,$$

где

$$R = \{red, black\},\ S = \{1,2,3,4\},\ w(red) = r, w(black) = b,$$

что отвечает всем возможным способам окраски вершин квадрата двумя цветами (красным (*red*) и черным (*black*)). Например, слагаемое $4r^3b$ означает, что существует четыре функции разметки, при которых три вершины покрашены в черный, а одна – в красный цвет (что очевидно).

**Утверждение 3**. Эквивалентные функции разметки имеют одинаковый вес.

**Доказательство**. Действительно, если некоторая функция $g$ эквивалентна функции $f$, то найдется такая подстановка $\sigma$, что $g(s) = f(\sigma^{-1}(s))$ (для любого $s \in S$) и

$$w(g) = w(g(s_1))\ldots w(g(s_n)) = w(f(\sigma^{-1}(s_1))\ldots w(f(\sigma^{-1}(s_n)).$$

Очевидно, что возникает перестановка элементов $S$ в виде $\sigma^{-1}(s_1) = s_{i_1}, \ldots, \sigma^{-1}(s_n) = s_{i_n}$[5], и тогда $w(g) = w(f(s_{i_1}))\ldots w(f(s_{i_n}))$, но это не что иное, как вес $w(f)$ с переставленными сомножителями, а так как веса, как рациональные переменные, коммутируют, то записанное выше произведение совпадет с произведением $w(f(s_1))\ldots w(f(s_n)) = w(f)$, что и требовалось.

---

[4] Можно вспомнить мультиномиальную формулу (лекция №19):

$$(w_1 + w_2 + \ldots + w_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_m=n,\\ k_i \ge 0}} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} w_1^{k_1} w_2^{k_2} \ldots w_m^{k_m}.$$ Произведение есть вес какой-то функции, а коэффициент при нем показывает число функций с таким весом.

[5] $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ s_{i_1} & s_{i_2} & \ldots & s_{i_n} \end{pmatrix}$

Заметим, что обратное неверно, т.е. могут быть неэквивалентные функции одинакового веса.

Наша задача состоит теперь в том, чтобы найти перечень классов эквивалентности (по отношению $\underset{G}{\sim}$) функций разметки.

Далее будем иногда использовать понятие *типа функции разметки* (или даже типа разметки). Так назовем кортеж, показывающий, сколько элементов имеет тот или иной цвет (при фиксированном множестве цветов). Например, если имеется три цвета – красный, зеленый и черный, то разметка типа (3, 2, 2) красит три элемента красным, и по два – зеленым и черным (имеется в виду разметка 7-элементного множества).

Формально: если вес функции есть произведение $w_{i_1}^{k_1} w_{i_2}^{k_2} \dots w_{i_m}^{k_m}$, то ее тип есть кортеж $(k_1, k_2, \dots, k_m)$, где *m* – число цветов и $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ - числу элементов множества, на котором определена функция разметки. Заметим, что некоторые из чисел $k_i$ могут быть равны нулю. Это значит, что соответствующий цвет в раскраске отсутствует. Например, для упомянутого выше 7-элементного множества тип (4, 3, 0) обозначает раскраску, в которой нет черного цвета, а тип (7, 0, 0) означает, что раскраска монохромна – только красный цвет.

**Пример**. Пусть *S* = {1, 2, 3}, *R* = {*К*, *Ч*} (содержательно, первое множество есть множество вершин треугольника, а второе – множество «цветов», {красное, черное}).

Все 8 функций из $S$ в $R$ опишем в виде такой формальной суммы:

$$\underset{f_1}{(К, К, К)} + \underset{f_2}{(Ч, Ч, Ч)} + \underset{f_3}{(К, К, Ч)} + \underset{f_4}{(К, Ч, К)} +$$
$$+ \underset{f_5}{(Ч, К, К)} + \underset{f_6}{(Ч, Ч, К)} + \underset{f_7}{(Ч, К, Ч)} + \underset{f_8}{(К, Ч, Ч)}.$$

Группа $G$ определяется как симметрическая группа степени 3, т.е. $G = S_3$. Тогда $G_{f_1} = G_{f_2} = G$,
$G_{f_3} = \{\varepsilon, (12)\} = G_{f_6}, G_{f_4} = \{\varepsilon, (13)\} = G_{f_7}, G_{f_5} = \{\varepsilon, (23)\} = G_{f_8}$. Тогда по лемме Бернсайда получается $N = \dfrac{1}{6}(6 + 6 + 12) = 4$. Слагаемое 12 получается из рассмотрения 6 стабилизаторов по 2 элемента в каждом. Классы эквивалентных функций: $\{f_1\}, \{f_2\}, \{f_3, f_4, f_5\}, \{f_6, f_7, f_8\}$. Тогда, например, порядок группы = 6 может быть получен как произведение порядка стабилизатора $G_{f_1}$, равного 6, на число функций, эквивалентных $f_1$, т.е. единицу; или произведение порядка стабилизатора $G_{f_3}$, равного 2, на число функций, эквивалентных $f_3$, т.е. 3, и т.д. Подстановка (23) переводит функцию $f_3$ в функцию $f_4$, а все подстановки,

переводящие $f_3$ в $f_4$, образуют смежный класс $G_{f_3}(23)=\{(23),(132)\}$, а подстановки, переводящие $f_3$ в $f_5$, образуют смежный класс $G_{f_3}(13)=\{(13),(123)\}$.

При анализе этого примера как раз удобно показать, почему при определении действия группы на множестве функций разметки следует использовать обратные подстановки.

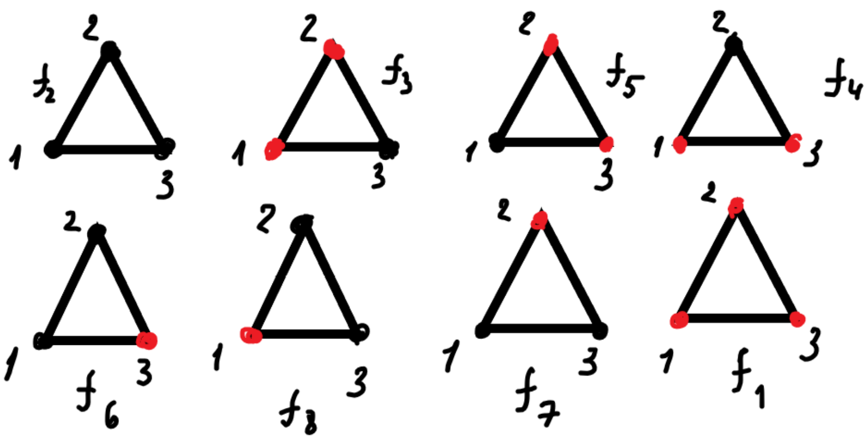
Так функция $(132)(f_3)$ дает следующий вектор цветов:

$(132)(f_3)(1) = f_3((123)(1)) = f_3(2) = К$,

$(132)(f_3)(2) = f_3((123)(2)) = f_3(3) = Ч$,

$(132)(f_3)(3) = f_3((123)(3)) = f_3(1) = К$,

т.е., действительно $f_4=(132)(f_3)$ - синхронный поворот против часовой стрелки на 60 гр. номеров вершин и их цветов.



Если же использовать саму подстановку $(132)$, а не обратную к ней $(123)$, то получим вектор (*Ч, К, К*), т.е. функцию $f_5$. Понятно также, что $(123)(f_3)=f_5$ - поворот на 60 гр. по часовой стрелке номеров и цветов.

Сопоставим каждой «краске» (или «цвету», т.е. элементу множества $R$) ***вес*** в виде рациональной переменной: $К \to r, Ч \to b$. Тогда каждой функции из $R^S$ можно сопоставить вес как произведение весов ее значений. Нетрудно сообразить, что эквивалентными могут быть только функции одинакового веса (обратное неверно, как скоро будет показано!). С учетом этого описание классов эквивалентных функций данного примера может быть представлено таким полиномом: $r^3+b^3+r^2b+rb^2$. Здесь все функции одинакового веса оказались эквивалентными.

Очень важно понять, что функция разметки, представленная сначала вектором значений, в виде своего веса представляется уже мультипликативным термом над полем рациональных чисел – произведением весов своих компонент. Перестановка компонент вектора значений дает вектор значений эквивалентной функции и тот же самый мультипликативный терм. Другими словами, переходя от самих функций (раскрасок) к их весам, мы снимаем зависимость от порядка компонент, рассматривая раскраски с точностью до эквивалентности. И действие группы подстановок на множестве раскрасок сохраняет их вес, то есть группа действует «замкнуто» в рамках заданного веса.

## Лекция №24

20.12.24

Нас интересует теперь, сколько есть попарно ***не****эквивалентных* функций заданного веса. При решении этой задачи важным оказывается понятие ступенчатой функции разметки.

### *Ступенчатые функции разметки*

Рассмотрим частный случай, когда множество $S$ разбито на подмножества $T_1,\ldots,T_k, |T_j| = p_j,\ j = 1,\ldots,k$, и все такие функции разметки, каждая из которых постоянна на любом подмножестве $T_j$. Вес какой-либо из таких функций может быть представлен термом $w_{i_1}^{p_1} w_{i_2}^{p_2} \ldots w_{i_k}^{p_k}$, где через $w_q$ обозначен вес «цвета» $r_q \in R$. Т.е., все элементы множества $T_1$ «покрашены» цветом $w_{i_1}$ (точнее, $r_{i_1}$, но в определенных рамках, если это не вредит пониманию, мы можем отождествить цвет с его весом) и т.д. Тогда структурный перечень множества $D$ всех таких функций может быть представлен произведением

$$Invt(D) = \prod_{j=1}^{k} (w_1^{p_j} + \ldots + w_m^{p_j}), \qquad (**)$$

где предполагается, что $|R| = m$.

Действительно, раскрывая скобки, получим сумму термов указанного выше вида.

Условимся называть такие функции разметки ***ступенчатыми***.

**Пример**. Функция разметки задана так:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ к & к & з & ч & з & ч & к \end{pmatrix}$$

$$w(f) = r^3 g^2 b^2$$

(члены разбиения, или «области монохромности»: {1, 2, 7} – красный цвет, {3, 5} – зеленый цвет, {4, 6} – черный цвет.)

В весе функции порядок компонент вектора значений становится несущественным.

Можно вычислить вектор значений функции $g=\sigma(f), \sigma=(1234)(567)$.

$$g(1)=f(\sigma^{-1}(1))=f(4)=ч; g(2)=f(1)=к; g(3)=f(2)=к; g(4)=f(3)=з;$$
$$g(5)=f(\sigma^{-1}(5))=f(7)=к; g(6)=f(5)=з; g(7)=f(6)=ч.$$

$$g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ ч & к & к & з & к & з & ч \end{pmatrix}; w(g)=r^3g^2b^2=w(f).$$

*В весах функций информация о* ***порядке*** *расположения цветов стирается, но тип разметки сохраняется (в данном случае это (3, 2, 2)*.

(Поэтому и получаются симметрические функции над полем рациональных чисел.)

Имея в виду лемму Бернсайда, примем во внимание следующее соображение. Пусть подстановка $\sigma \in G$ разложена на независимые циклы: $\sigma=\kappa_1\kappa_2...\kappa_{K(\sigma)}$. Нетрудно сообразить, что для того, чтобы цикл сохранял раскраску (т.е. оставлял ее неподвижной), необходимо и достаточно, чтобы все его элементы были одного цвета, т.е., более формально, чтобы функция разметки принимала на нем постоянное значение. Таким образом, эта функция принадлежит как раз классу ступенчатых функций.

Таким образом, каждый цикл сохраняет $|R|$ раскрасок, а вся подстановка $\sigma$ сохранит $|R|^{K(\sigma)}$ раскрасок, т.е. $\psi(\sigma)=|R|^{K(\sigma)}$, причем перечень всех функций разметки, как ступенчатых, сохраняемых подстановкой $\sigma$, будет, в силу формулы (**), иметь вид:

$$\hat{t}_\sigma=(w_1+...+w_m)^{q_1}(w_1{}^2+...+w_m{}^2)^{q_2}...(w_1{}^n+...+w_m{}^n)^{q_n},$$

где $q_j$ - число циклов длины $j$ в разложении $\sigma$, $\sum_{j=1}^{n} q_j=K(\sigma), q_j \geq 0$.

Здесь необходимо подчеркнуть, что терм $\hat{t}_\sigma$ есть не что иное, как структурный перечень определенного множества ступенчатых функций разметки, а именно всех функций, сохраняемых подстановкой $\sigma$. Множество, на котором определены функции разметки, разбивается в данном случае на $q_1$ одноэлементных подмножеств (каждое из которых содержит элемент какого-то цикла длины 1), $q_2$ двухэлементных подмножеств (каждое из которых содержит элементы какого-то цикла длины 2) и т.д. На каждом из этих подмножеств любая функция разметки, представленная термом $\hat{t}_\sigma$, принимает постоянное значение. Видно также, что терм $\hat{t}_\sigma$ получен из терма

$t_\sigma = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_n^{q_n}$, слагаемого в циклическом индексе, подстановкой на место переменной $x_k$ суммы $k$-х степеней весов цветов: $w_1^k + \dots + w_m^k$. Также легко заметить, что при подстановке в терм $t_\sigma$ вместо каждой переменной числа цветов $m$, получим $|R|^{K(\sigma)} = m^{K(\sigma)}$ - число всех функций, сохраняемых подстановкой $\sigma$, то есть число $\psi(\sigma)$ из леммы Бернсайда. То же число получится, если в терм $\hat{t}_\sigma$ вместо каждого веса подставить единицу.

Обратим внимание на то, что в данном случае в терме $t_\sigma$ фигурируют циклы всех возможных длин и некоторые показатели степени могут быть равны нулю.

Раскрывая в терме $\hat{t}_\sigma$ скобки и приводя подобные члены с одинаковыми весами, получим выражение вида

$$\hat{t}_\sigma = \sum_w \psi_w(\sigma) w,$$

где $\psi_w(\sigma)$ - число функций веса $w$, сохраняемых подстановкой $\sigma$, а сумма берется по весам всех функций (но отличными от нуля будут только те слагаемые, которые отвечают функциям, сохраняемым подстановкой $\sigma$).

При анализе терма $\hat{t}_\sigma$ важно подчеркнуть следующее.

Этот терм (в силу свойств ступенчатых функций) перечисляет в виде весов отдельных функций *все* функции разметки (раскраски), которые сохраняет подстановка $\sigma$. Если после раскрытия скобок возникают одинаковые слагаемые (веса функций в виде мультипликативных термов над полем рациональных чисел), то собирая их в одно, получим коэффициент, показывающий число функций именно данного веса, сохраняемых подстановкой $\sigma$. Возникает слагаемое $\psi_w(\sigma)w$, а весь терм $\hat{t}_\sigma$ переписывается в виде:

$$\hat{t}_\sigma = \sum_w \psi_w(\sigma) w.$$

При этом $\sum_w \psi_w(\sigma) = m^{K(\sigma)}$ - число *всех* раскрасок, сохраняемых подстановкой $\sigma$.

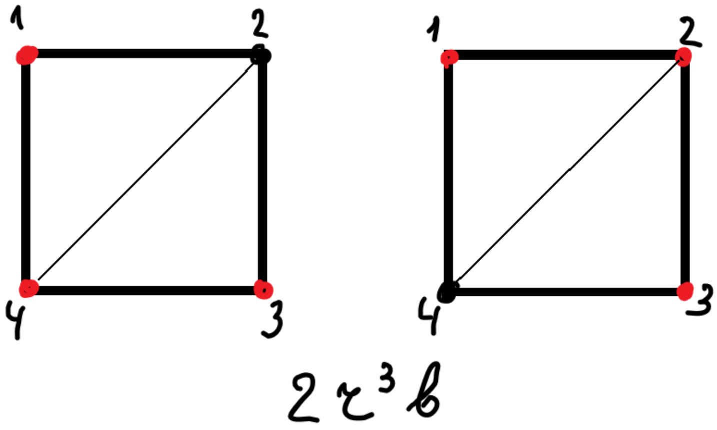
Это число можно объяснить так: каждый цикл должен иметь один цвет, то есть каждому циклу в разложении $\sigma = c_1 c_2 \dots c_{K(\sigma)}$ можно сопоставить любой из m цветов. Следовательно, всех раскрасок, сохраняемых подстановкой $\sigma$, будет $m^{K(\sigma)}$ (число отображений множества циклов в множество цветов).

Можно рассуждать и так: раскрыв все скобки в исходном выражении для терма $\hat{t}_\sigma$, мы получим, что число функций, сохраняемых подстановкой $\sigma$, будет равно числу слагаемых. Само число получим, заменив каждый вес единицей. Тогда, если сделать такую замену в исходном выражении для терма $\hat{t}_\sigma$, мы получим $m^{K(\sigma)}$.

**Пример**. Пусть $\sigma = (13)(2)(4) \in S_4$, число цветов $m = 2, w_1 = r, w_2 = b$, то $t_\sigma = x_1^2 x_2$, а $\hat{t}_\sigma = (r+b)^2(r^2+b^2) = r^4 + 2r^3b + 2r^2b^2 + 2rb^3 + b^4$,

что означает, что среди всех функций, сохраняемых подстановкой $\sigma$, по одной, принимающих постоянное значение, по две, которые красят три элемента одним цветом, а четвертый – другим, и две функции, распределяющие краски по две.

Если иллюстрировать этот пример группой автоморфизмов на множестве вершин квадрата, то исходная подстановка есть отражение относительно диагонали 2-4. Две разметки типа (3, 1) или (1, 3) объясняются так: вершины 1 и 3 в любом случае должны быть покрашены одинаково. Потом тем же цветом можно покрасить 2-ю или 4-ю вершину, а оставшуюся – другим цветом. Остальные слагаемые полученного многочлена объясняются совсем просто.




Следует заметить также, что, подставив в терм $t_\sigma$ вместо каждой переменной число цветов $m$, получим $m^{K(\sigma)}$, что равно записанному выше числу $\psi(\sigma)$ функций, сохраняемых подстановкой $\sigma$.

## 4.4. Основная теорема

Под ***структурным перечнем классов эквивалентности функций разметки*** (или ***перечнем классов эквивалентности раскрасок***, ***перечнем попарно неэквивалентных раскрасок***) будем называть сумму

$$Invt(C) = \sum_w \alpha_w w,$$

где суммирование ведется по весам всех функций, причем коэффициент $\alpha_w$ показывает, сколько имеется попарно неэквивалентных функций веса $w$ (или, что то же самое, сколько классов эквивалентности покрывают функции данного веса).

Основной результат (***теорема Пойа***) состоит в следующем:

**Теорема**. *Перечень классов эквивалентности функций разметки равен*

$$P_G(\sum_{r\in R} w(r), \sum_{r\in R}[w(r)]^2, ..., \sum_{r\in R}[w(r)]^n).$$

*Число неэквивалентных функций разметки составляет*

$$P_G(|R|, |R|, ..., |R|).$$

**Доказательство**. После проведенного выше анализа структуры терма $\hat{t}_\sigma$ остается доказать уже немного.

Ясно, что указанная в условии теоремы первая подстановка в циклический индекс группы даст $\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\hat{t}_\sigma$ .

Тогда, вторая подстановка в циклический индекс даст $\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G} m^{K(\sigma)}$ , но число $m^{K(\sigma)}$, как уже было замечено, составляет число функций, сохраняемых подстановкой $\sigma$, т.е. равно $\psi(\sigma)$. По лемме Бернсайда получаем число классов эквивалентности на множестве функций разметки.

Далее, преобразуя терм $\hat{t}_\sigma$ к сумме по весам функций (см. выше), получим

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\hat{t}_\sigma = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\sum_{w}\psi_w(\sigma)w.$$

Меняя порядок суммирования, получим

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\hat{t}_\sigma = \sum_{w}(\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\psi_w(\sigma))w.$$

Докажем теперь, что коэффициент при весе $w$ есть не что иное, как число классов эквивалентности на множестве функций этого веса. Действительно, так как все эквивалентные функции, как было замечено ранее, имеют одинаковый вес, то группа, действуя на подмножестве функций разметки заданного веса, не выводит за пределы этого подмножества. Тогда мы попадаем в условия применимости леммы Бернсайда к действию группы именно на подмножестве функций заданного веса, и указанный коэффициент действительно дает, в силу доказанной в лемме формулы, число классов эквивалентности на множестве функций этого веса. Следовательно, полученное выражение является структурным перечнем этих классов.

Теорема доказана.

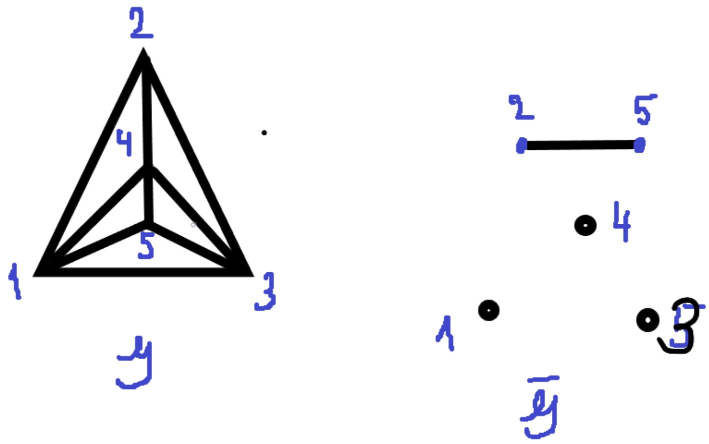
**Замечание**. То, что в приведенных выше выкладках можно изменить порядок суммирования, можно показать, расписав обе суммы явно.

А именно, пусть $L$ - число весов, а $K$ - порядок группы $G$. Тогда записанную выше двойную сумму (без учета множителя $\frac{1}{|G|}$) можно представить так:

$$((\psi_{w_1}(\sigma_1)w_1+\ldots+\psi_{w_L}(\sigma_1)w_L))+\ldots+((\psi_{w_1}(\sigma_K)w_1+\ldots+\psi_{w_L}(\sigma_K)w_L))=$$
$$((\psi_{w_1}(\sigma_1)+\ldots+\psi_{w_1}(\sigma_K))w_1+\ldots+((\psi_{w_L}(\sigma_1)+\ldots+\psi_{w_L}(\sigma_K))w_L$$

Таким образом, производится простая перегруппировка слагаемых.

**Примеры**. 1) Рассмотрим граф:




$$Aut(G)=Aut(\bar{G})=S_2^{(2,5)}\times S_3^{(1,3,4)}.$$

Циклический индекс:

$$P_{Aut(G)}=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2)\frac{1}{6}(x_1^3+3x_1x_2+2x_3)=\frac{1}{12}(x_1^5+4x_1^3x_2+2x_1^2x_3+3x_1x_2^2+2x_2x_3)$$

.

Число неэквивалентных разметок (классов эквивалентности)

$$N=\frac{1}{12}[2^5+4\cdot 2^3\cdot 2+2\cdot 2^2\cdot 2+3\cdot 2\cdot 2^2+2^3]=\frac{2^3}{12}[2^2+4\cdot 2+2+3+1]=\frac{2}{3}\cdot 18=12.$$

Перечень неэквивалентных разметок проще получить не подстановкой в этот циклический индекс, а подстановкой в циклические индексы подгрупп, произведение которых дает всю группу:

$$Invt(R^S/\underset{G}{\sim}) = \frac{1}{12}[(r+b)^2+r^2+b^2][(r+b)^3+3((r+b)(r^2+b^2)+2(r^3+b^3)] =$$
$$= \frac{1}{12}2\cdot 6(r^2+rb+b^2)(r^3+r^2b+rb^2+b^3) = r^5+2r^4b+3r^3b^2+3r^2b^3+2rb^4+b^5.$$

Общее число классов эквивалентности = 1+2+3+3+2+1=12, что совпадает в предыдущим подсчетом.

Понятно, почему получаются две неэквивалентные разметки типа (4,1) (или (1,4)). Единственную (красную или черную) вершину можно выбрать либо как 2-ю или 5-ю, либо как одну из трех изолированных (смотрим на дополнение исходного графа!).

Три неэквивалентные разметки типа (3,2) объясняются так: две вершины одного цвета либо 2 и 5, либо две из трех изолированных, либо 2 (5) и одна из трех изолированных.

**Замечание**. Для этого графа можно по лемме Бернсайда определить число орбит, рассматривая просто его группу автоморфизмов.

Сразу видно, что есть только две орбиты: {2, 5} и {1, 3, 4}.

Проверим по лемме Бернсайда.

1 способ (через суммирование порядков стабилизаторов):

$$G_1 = [(25),(34)], G_3 = [(25),(14)], G_4 = [(25),(13)];$$
$$|G_1| = |G_3| = |G_4| = 4;$$
$$G_2 = G_5 = S_3; |G_2| = |G_5| = 6;$$
$$N = \frac{1}{12}(3\cdot 4 + 2\cdot 6) = 2.$$

2 способ (через числа $\psi(\sigma)$).

Тождественная подстановка сохраняет 5 вершин.

Каждый цикл длины 3 в $S_3$ сохраняет две вершины (2 и 5).

Транспозиция (25) сохраняет 3 вершины (1, 3 и 4)

Каждая транспозиция в $S_3$ сохраняет 3 вершины (2, 5 и одну из трех остальных).

Композиция $(25)(ij), i, j \in S_3$, сохраняет одну вершину.

Складываем:

5+2*2+3+3*3+3=24.

Делим на 12: получаем 2.

---

Возвращаясь к структурным перечням, можно найти, например, структурный перечень функций разметки (раскрасок), сохраняемых конкретной подстановкой.

Например, для транспозиции (25):

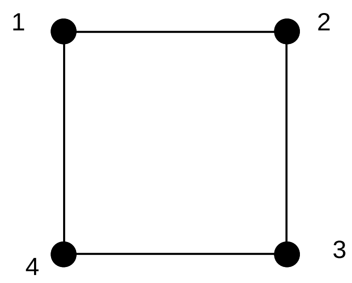
$$t_\sigma = x_1^3x_2; \hat{t}_\sigma = (r+b)^3(r^2+b^2) = (r^3+3r^2b+3rb^2+b^3)(r^2+b^2) =$$
$$= r^5+r^3b^2+3r^4b+3r^2b^3+3r^3b^2+3rb^4+r^2b^3+b^5.$$

После приведения подобных членов получим:

$$\hat{t}_\sigma = r^5 + 3r^4b + 4r^3b^2 + 4r^2b^3 + 3rb^4 + b^5.$$

Это структурный перечень всех раскрасок, сохраняемых подстановкой (25). Поскольку 2-я и 5-я вершины должны быть покрашены одинаково, то имеем по три раскраски типа (4, 1) (или (1, 4)), что означает выбор отдельного цвета для одной из изолированных вершин; 4 раскраски типа (3, 2), или (2, 3) получаются так: все изолированные вершины покрашены одинаково (1 раскраска) или одна из них имеет тот же цвет, что 2-я и 5-я (3 раскраски).
Всего транспозиция (25) сохранит 16 раскрасок (что получается подстановкой числа цветов в терм $t_\sigma$, и это же сумма коэффициентов в написанном выше перечне).

2) Структурный перечень неэквивалентных двухцветных раскрасок квадрата.




$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 2x_4)$$

Структурный перечень:

$$\frac{1}{8}[(r+b)^4 + 2(r+b)^2(r^2+b^2) + 3(r^2+b^2)^2 + 2(r^4+b^4)] =$$

$$= \frac{1}{8}[r^4 + 4r^3b + 6r^2b^2 + 4rb^3 + b^4 + 2(r^2 + 2rb + b^2)(r^2+b^2) + 3(r^4 + 2r^2b^2 + b^4) +$$

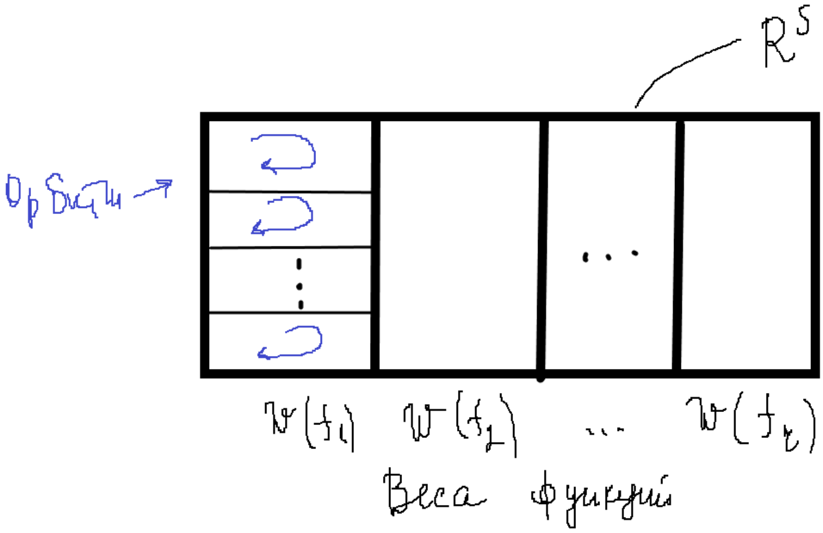
$$+2(r^4+b^4)] = \frac{1}{8}[r^4 + 4r^3b + 6r^2b^2 + 4rb^3 + b^4 + 2r^4 + 2r^2b^2 + 4r^3b + 4rb^3 +$$

$$+2r^2b^2 + 2b^4 + 3(r^4 + 2r^2b^2 + b^4) + 2(r^4+b^4)] = \frac{1}{8}(8r^4 + 8r^3b + 16r^2b^2 + 8rb^3 + 8b^4) =$$

$$= r^4 + r^3b + 2r^2b^2 + rb^3 + b^4.$$

Число неэквивалентных раскрасок = 6.

**Замечание**. Действие группы на множестве раскрасок можно представить в виде такой картинки:




Действуя на всем мн-ве $R^s$, группа действует внутри каждого веса замкнуто по попарно не-пересек. орбитам

Если считать блоком множество функций заданного веса, то группа переводит каждый блок только в себя, а внутри блока перемещает функции по попарно непересекающимся орбитам.