Семинар 8. Линейные рекуррентные соотношения

Примеры на ЛОРС

1) $x_n - 5x_{n-1} + 8x_{n-2} - 4x_{n-3} = 0$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

Раскладываем на множители:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0,$$
$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2$$

Общее решение соотношения:

$$y_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n + C_3 n \cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 n \cdot 2^n.$$

2) $x_n + 2x_{n-3} + x_{n-6} = 0$.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^6 + 2\lambda^3 + 1 = 0,$$
$$(\lambda^3 + 1)^2 = 0$$

Многочлен $\lambda^3 + 1$ имеет три корня, один вещественный и два комплексных:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Характеристический многочлен соотношения имеет эти же корни, но каждый корень имеет кратность 2.

В итоге общее решение соотношения будет иметь вид:

$$y_n = C_1(-1)^n + C_2 n(-1)^n + C_3\cos\frac{n\pi}{3} + C_4 n\cos\frac{n\pi}{3} + C_5\sin\frac{n\pi}{3} + C_6 n\sin\frac{n\pi}{3}$$

Разбор задачи ДЗ

Для соотношения

$$x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = n^2 + n$$

найти:

1) частное решение соответствующего однородного соотношения при начальных условиях

$$x_1 = 3, x_2 = -1;$$

2) общее решение данного неоднородного соотношения.

Замечание. Исходное соотношение могло быть задано и в такой форме:

$$x_n + 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = n^2 + n, n \ge 2$$

при начальных условиях $x_0 = 3, x_1 = -1$.

При этом, однако, частное решение получилось бы иным в силу того, что члены последовательности нумеруются с нуля, а не с единицы.

Решение

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0,$$

то есть

$$(\lambda + 2)^2 = 0,$$

откуда $\lambda_{1,2} = -2$.

Общее решение однородного соотношения:

$$x_n^{oo} = C_1(-2)^n + C_2 n(-2)^n$$

Удовлетворяем начальным условиям:

$$n = 1: -2C_1 - 2C_2 = 3,$$
$$n = 2: 4C_1 + 8C_2 = -1.$$

Умножая 1-е уравнение на 2 и складывая со 2-м, получим $C_2 = \frac{5}{4}$, откуда

$$C_1 = \frac{1}{4}\left(-1 - 8 \cdot \frac{5}{4}\right) = -\frac{11}{4}.$$

Итак, частное решение однородного соотношения при заданных начальных условиях имеет вид:

$$x_n^{ч.о.} = -\frac{11}{4}(-2)^n + \frac{5}{4}n(-2)^n.$$

Методом подбора ищем частное решение неоднородного соотношения. Правая часть есть полином 2 степени, умноженный на тривиальную экспоненту с основанием 1. Это важный момент, так как, если бы среди корней характеристического уравнения была единица, то вид частного решения был бы другим по сравнению с тем, как его следует представить в данном случае, а именно:

$$x_n^{ч.н.} = An^2 + Bn + C$$

Умножать эту функцию ни на какую степень n не нужно, так как единица (основание экспоненты) не является корнем характеристического уравнения.

Неизвестные коэффициенты квадратного трехчлена определяем, подставляя написанное выше выражение в исходное соотношение:

$$A(n+2)^2+B(n+2)+C+4[A(n+1)^2+B(n+1)+C]+4An^2+4Bn+4C=n^2+n$$

Раскрываем скобки:

$$A(n^2+4n+4)+B(n+2)+C+4A(n^2+2n+1)+4B(n+1)+4C+4An^2+4Bn+4C=n^2+n$$

Приравниваем коэффициенты многочленов при одинаковых степенях n:

$$n^2: A+4A+4A=9A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{9};$$

$$n^1: 4A+B+8A+4B+4B=12A+9B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{9}\left(1-\frac{12}{9}\right)=-\frac{1}{27};$$

$$n^0: 4A+2B+C+4A+4B+4C+4C=8A+6B+9C=0 \Rightarrow C=-\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}-\frac{6}{27}\right)=-\frac{2}{27}.$$

Итак, общее решение неоднородного соотношения имеет вид:

$$x_n^{о.н.}=C_1(-2)^n+C_2n(-2)^n+\frac{1}{9}n^2-\frac{1}{27}n-\frac{2}{27}.$$

По поводу рассмотренного решения полезно заметить следующее.

Если бы исходное соотношение имело вид

$$x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=n^2+n,$$

то число 1 было бы двукратным корнем характеристического уравнения, и частное решение неоднородного соотношения пришлось бы искать в виде $n^2(An^2+Bn+C)$.

Дальнейшие примеры

1) Решить ЛОРС при начальных условиях:

$$x_n=7x_{n-1}-12x_{n-2}, n\geq 2; x_0=2, x_1=4$$

Перепишем в виде:

$$x_n-7x_{n-1}+12x_{n-2}=0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2-7\lambda+12=0$$

$$\lambda_{1,2}=3;4.$$

Общее решение:

$$y_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 4^n$$

Система для определения произвольных констант:

$$n = 0: C_1 + C_2 = 2$$
$$n = 1: 3C_1 + 4C_2 = 4$$

Умножая 1-е уравнение на 4 и вычитая из него 2-е, получим:

$$C_1 = 4, C_2 = 2 - C_1 = -2$$

Итак, искомое частное решение:

$$y_n = 4 \cdot 3^n - 2 \cdot 4^n .$$

2) Рассмотрим теперь такой пример: найти общее решение соотношения

$$x_n - 8x_{n-1} + 16x_{n-2} = 2^{2n+1}(n^2 + n), n \geq 2 .$$

Здесь есть одна тонкость: в правой части, к которой применим метод подбора, показатель степени в экспоненте должен быть равен n. Поэтому, правую часть следует преобразовать так:

$$2^{2n+1}(n^2 + n) = 4^n (2n^2 + 2n).$$

Понятно, что число 4 является двукратным корнем характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0 ,$$

и частное решение неоднородного соотношения ищем в виде:

$$x_n^{ч.н.} = n^2 \cdot 4^n (An^2 + Bn + C) .$$

При подстановке в соотношение получим:

$$n^2 \cdot 4^n (An^2 + Bn + C) - 8[(n-1)^2 \cdot 4^{n-1}(A(n-1)^2 + B(n-1) + C)] +$$
$$+16[(n-2)^2 \cdot 4^{n-2}(A(n-2)^2 + B(n-2) + C)] = 4^n 2(n^2 + n).$$

Сокращая на 4^{n-2}, получим:

$$n^2 \cdot 16(An^2 + Bn + C) - 8[(n-1)^2 \cdot 4(A(n-1)^2 + B(n-1) + C)] +$$
$$+16[(n-2)^2 \cdot (A(n-2)^2 + B(n-2) + C)] = 32(n^2 + n).$$

Предлагается закончить решение самостоятельно.

3) Определить вид общего решения неоднородного соотношения:

$$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} + 2x_{n-4} - 4x_{n-5} + 2x_{n-6} = n^3 + 1 + (n-2)\cos\frac{n\pi}{4} + n^2\sin\frac{n\pi}{4} + n^4 2^{\frac{n}{4}}\sin\frac{3n\pi}{4} \ .$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^6 - 2\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \, .$$

Вид правой части таков, что может потребоваться проверка корней 4-й степени из -2, поэтому можно поискать разложение характеристического многочлена на множители таким образом:

$$(\lambda^4 + 2) + \lambda^2(\lambda^4 + 2) - 2\lambda(\lambda^4 + 2) = (\lambda^4 + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda^4 + 2)(\lambda - 1)^2 = 0$$

Таким образом,

$$\lambda_{1,2} = 1,$$

$$\lambda_{3,4,5,6} = \sqrt[4]{-2} = \sqrt[4]{2e^{i\pi}} = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi+2\pi k}{4}}, k = 0,1,2,3.$$

Корни 4-й степени из -2 находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[4]{2}$ с центром в нулевой точке, диагонали которого идут вдоль биссектрис координатных углов. Это две пары комплексно-сопряженных чисел:

$$\sqrt[4]{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2})(k = 0, k = 3)$$ и

$$\sqrt[4]{2}e^{\pm i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4}) = \sqrt[4]{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2})(k = 1, k = 2)$$

Следует заметить, что от значения аргумента, большего π, следует отнять 2π, чтобы попасть в диапазон главных значений аргумента $(-\pi, \pi]$. Например, при $k = 3$ в написанной выше формуле корней получим:

$$\lambda_6 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Общее решение однородного соотношения:

$$x_n^{oo} = C_1 + C_2 n + C_3\sqrt[4]{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} + C_4\sqrt[4]{2^n}\sin\frac{n\pi}{4} + C_5\sqrt[4]{2^n}\cos\frac{3n\pi}{4} + C_6\sqrt[4]{2^n}\sin\frac{3n\pi}{4} \ .$$

Чтобы найти частное решение неоднородного соотношения, разобьем правую часть на три слагаемых и воспользуемся принципом суперпозиции.

Именно, правая часть $f(n) = g_1(n) + g_2(n) + g_3(n)$,

где

$$g_1(n) = n^3 + 1, g_2(n) = (n-2)\cos\frac{n\pi}{4} + n^2 \sin\frac{n\pi}{4},$$

$$g_3(n) = n^4 2^{\frac{n}{4}} \sin\frac{3n\pi}{4} = n^4 \cdot \sqrt[4]{2^n} \sin\frac{3n\pi}{4}$$

Первая функция есть многочлен 3-й степени, умноженный на тривиальную экспоненту с основанием «единица». Так как число 1 является двукратным корнем характеристического уравнения, то соответствующее слагаемое в частном решении будет иметь вид:

$$y_n^{(1)} = n^2(An^3 + Bn^2 + Cn + D).$$

Для функции $g_2(n)$, учитывая, что комплексное число (точнее, комплексно-сопряженная пара) $e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ не является корнем характеристического уравнения, получим такое слагаемое в частном решении:

$$y_n^{(2)} = (A_1 n^2 + B_1 n + C_1)\cos\frac{n\pi}{4} + (A_2 n^2 + B_2 n + C_2)\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Наибольшая степень многочлена при тригонометрических функциях равна 2(!).

И, наконец, для последнего слагаемого правой части ищем частное решение в виде:

$$y_n^{(3)} = n[(A_3 n^4 + B_3 n^3 + C_3 n^2 + D_3 n + E_3)\sqrt[4]{2^n}\cos\frac{3n\pi}{4} + (A_4 n^4 + B_4 n^3 + C_4 n^2 + D_4 n + E_4)\sqrt[4]{2^n}\sin\frac{3n\pi}{4}].$$

Умножение всего квазиполинома на n возникает из-за того, что комплексно-сопряженная пара $\sqrt[4]{2}e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$ - простые корни характеристического уравнения.

В итоге получаем вид общего решения исходного соотношения:

$$x_n^{о.н.} = x_n^{oo} + y_n^{(1)} + y_n^{(2)} + y_n^{(3)}.$$

В частном решении, заметим, содержится 18 неопределенных констант(!).

4) Найти частное решение неоднородного соотношения по начальным условиям:

$$x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3} + 2^n, n \ge 3;$$
$$x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 5.$$

(«Элем. комбинаторики», метод. указ., стр. 32, задача 2б).

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0,$$
$$(\lambda - 2)^3 = 0.$$

Корень $\lambda = 2$ кратности 3.

Общее решение однородного соотношения:

$$x_n^{о.о.} = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n.$$

Методом подбора ищем частное решение неоднородного соотношения:

$$x_n^{ч.н.} = A n^3 2^n.$$

Чтобы найти константу A, подставляем записанную выше функцию в исходное соотношение:

$$A n^3 2^n = 6A(n-1)^3 2^{n-1} - 12A(n-2)^3 2^{n-2} + 8A(n-3)^3 2^{n-3} + 2^n$$

Сокращая на 2^{n-3}, получим:

$$8An^3 = 24A(n-1)^3 - 24A(n-2)^3 + 8A(n-3)^3 + 8.$$

Для определения константы A достаточно приравнять свободные члены:

$$0 = (-24 + 24 \cdot 8 - 27 \cdot 8)A + 8,$$

откуда $A = \dfrac{1}{6}$.

Итак, общее решение исходного неоднородного соотношения имеет вид:

$$x_n^{о.н.} = \frac{1}{6} n^3 \cdot 2^n + C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n = 2^n (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{1}{6} n^3).$$

Теперь, имея общее решение неоднородного соотношения, можно найти константы «интегрирования», удовлетворяя начальным условиям.

$$x_0^{о.н.} = 2^n (C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{1}{6} n^3) = C_1 = 0,$$

$$x_1^{о.н.} = 2(C_2 + C_3 + \frac{1}{6}) = 2 \Rightarrow C_2 + C_3 = \frac{5}{6},$$

$$x_2^{о.н.} = 4(2C_2 + 4C_3 + \frac{4}{3}) = 5 \Rightarrow 8C_2 + 16C_3 = -\frac{1}{3}.$$

Систему проще всего решить методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 5/6 \\ 8 & 16 & | & -1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 5/6 \\ 0 & 8 & | & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow C_3 = -\frac{7}{8};$$

$$C_2 = \frac{5}{6} + \frac{7}{8} = \frac{41}{24}.$$

Итак, получаем частное решение для заданных начальных условий:

$$x_n^{о.н.} = 2^n n(\frac{41}{24} - \frac{7}{8}n + \frac{1}{6}n^2).$$

Следует подчеркнуть, что неверно было бы сначала найти частное решение однородного соотношения по заданным начальным условиям, а потом, найдя методом подбора частное решение неоднородного соотношения, полученные результаты сложить. Получилось бы решение, но, вообще говоря, не то, что удовлетворяет начальным условиям для неоднородного соотношения.

5) Записать в общем виде решение соотношения

$$x_n - 6x_{n-1} + 16x_{n-2} - 24x_{n-3} + 16x_{n-4} = 2^n(n^2+1) + 2^n n \sin\frac{\pi n}{3}$$

(“Элем. Комбинаторики», стр.33, задача 3а).

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 16\lambda^2 - 24\lambda + 16 = 0$$

Вид правой части подсказывает, что имеет смысл испытать 2 как корень.

Выполняя деление (уголком или по схеме Горнера), получим:

$$(\lambda-2)(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda - 8) = 0,$$

то есть 2 есть корень характеристического уравнения.

Многочлен 3-й степени можно разложить на множители группировкой членов:

$$(\lambda^3-8) - 4\lambda(\lambda-2) = (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+4) - 4\lambda(\lambda-2) =$$
$$= (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+4)$$

Итак, имеем:

$$(\lambda-2)^2(\lambda^2-2\lambda+4) = 0$$

Мы получаем вещественный корень $\lambda = 2$ кратности $s = 2$ и два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{3} = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.

Общее решение однородного соотношения будет иметь вид:

$$x_n^{o.o} = C_1 2^n + C_2 n 2^n + 2^n (C_3 \cos\frac{n\pi}{3} + C_4 \sin\frac{n\pi}{3}).$$

Частное решение неоднородного соотношения подбираем, используя принцип суперпозиции.

Для слагаемого $2^n(n^2+1)$ получим решение

$$x_n^{ч.н.(1)} = n^2 2^n (An^2 + Bn + C)$$

(квадратный трехчлен с неопределенными коэффициентами).

Для слагаемого $2^n n \sin\frac{\pi n}{3}$ получим решение

$$x_n^{ч.н.(2)} = n2^n[(A_1 n + B_1)\cos\frac{n\pi}{3} + (A_2 n + B_2)\sin\frac{n\pi}{3}].$$

Собирая всё вместе, получим (в общем виде) общее решение неоднородного соотношения:

$$x_n^{о.н.} = C_1 2^n + C_2 n 2^n + 2^n (C_3 \cos\frac{n\pi}{3} + C_4 \sin\frac{n\pi}{3}) + n^2 2^n (An^2 + Bn + C) +$$

$$+ n2^n[(A_1 n + B_1)\cos\frac{n\pi}{3} + (A_2 n + B_2)\sin\frac{n\pi}{3}]$$

Сумма квадратов

Выведем формулу для суммы квадратов первых n натуральных чисел

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

Имеем рекуррентное соотношение:

$S_n - S_{n-1} = n^2$ при начальном условии $S_1 = 1$.

Характеристическое уравнение:

$$\lambda - 1 = 0.$$

Общее решение однородного соотношения $C_1 \cdot 1^n = C_1$. Это надо учесть при определении вида частного решения неоднородного соотношения, так как в правой части скрыта экспонента с единичным основанием.

Поэтому частное решение неоднородного соотношения ищем в виде

$$y_n^{чн} = n(An^2 + Bn + C) = An^3 + Bn^2 + Cn.$$

Для определения коэффициентов A, B, C подставляем записанное выше выражение в исходное соотношение:

$$An^3 + Bn^2 + Cn - A(n-1)^3 - B(n-1)^2 - C(n-1) = n^2$$

Раскрывая скобки, получим:

$$3An^2 + (2B - 3A)n + (A - B + C) = n^2,$$

откуда

$$A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{6}.$$

Итак, общее решение неоднородного соотношения

$$y_n^{он} = C_1 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Учитывая начальное условие, получаем, что $C_1 = 0$.

Получаем решение:

$$S_n = n\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

Определение числа слов заданной длины в некотором алфавите, которые обладают специальным свойством

Задача. Найти число слов длины n в алфавите $\{a, b\}$, которые не содержат двух букв b подряд.

Решение. Нетрудно догадаться, что множество всех слов с заданным свойством определяется следующим уравнением в полукольце регулярных языков:

$$x = ax + bax + \lambda$$

Это уравнение можно рассматривать, как определение такого множества слов – назовем эти слова правильными - по индукции:

1) пустое слово – правильное;

2) если x - правильное слово, то слова ax и bax - правильные;
3) других правильных слов не существует.

Теперь, если через x_n - число слов длины n с заданным свойством, то по записанному выше уравнению составляется такое рекуррентное соотношение:

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ при начальных условиях $x_0 = 1, x_1 = 2$.

Это надо понимать так.

Слово длины n с заданным свойством может начинаться на букву a или на букву b. В первом случае после буквы a может идти любое правильное слово, длина которого будет равна $n-1$, а во втором после первой буквы должна обязательно идти буква a, после которой может идти любое правильное слово, длина которого будет уже равна $n-2$. Начальные условия означают, что единственное правильное слово нулевой длины – пустое, и существуют два правильных однобуквенных слова: a и b.

Заметим, что полученное рекуррентное соотношение точно такое же, как то, что определяет последовательность Фибоначчи, но с другими начальными условиями. И эта последовательность опережает на один номер последовательность Фибоначчи, то есть n-й член нашей последовательности равен ($n+1$)-му члену последовательности Фибоначчи:

$$\textit{Фиб.}:\quad 0,1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$
$$\textit{Наша}: 1,2,3,5,8,13,21,\ldots$$

Можно последовательно перечислять правильные слова.

$$n = 2: ab, ba, aa;$$
$$n = 3: aba, aab, aaa, baa, bab;$$
$$n = 4: aaba, aaab, aaaa, abaa, abab,$$
$$baab, baba, baaa.$$

И т. д.

Можно вывести и явную формулу, найдя неопределенные константы из начальных условий.

$$C_1 + C_2 = 1$$
$$C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2$$

Отсюда можно получить:

$$C_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}, C_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

Заметим, что решение уравнения с регулярными коэффициентами, записанное в начале решения задачи, имеет вид:

$$x = (a + ba)^*(b + \lambda),$$

что совпадает с результатом анализа соответствующего конечного автомата (см. лекцию № 18).

Полученное решение можно использовать при определении числа слов длины n в том же алфавите, которые содержат две буквы b подряд.

Обозначим число таких слов через y_n. Тогда очевидно, что $y_n = 2^n - x_n$, где x_n - рассмотренная выше последовательность. То есть из числа всех слов длины n в алфавите $\{a,b\}$ надо отнять число слов той же длины, которые не содержат вхождений двух букв b подряд.

Так как $x_n = 2^n - y_n$, то, используя полученное выше рекуррентное соотношение, получим:

$$2^n - y_n = 2^{n-1} - y_{n-1} + 2^{n-2} - y_{n-2},$$

откуда

$$y_n - y_{n-1} - y_{n-2} = 2^{n-2}.$$

Записывая правую часть этого неоднородного соотношения в виде $\frac{1}{4} \cdot 2^n$, методом подбора ищем частное решение в виде $A \cdot 2^n$ (число 2 не является корнем характеристического уравнения, оба корня которого иррациональны).

Имеем:

$$A \cdot 2^n - A \cdot 2^{n-1} - A \cdot 2^{n-2} = \frac{1}{4} 2^n \Rightarrow 4A - 2A - A = A = 1.$$

Итак, общее решение неоднородного соотношения имеет вид:

$$y_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + 2^n.$$

Начальные условия нулевые, то есть $y_0 = y_1 = 0$.

Получается такая система для определения произвольных констант:

$$C_1 + C_2 + 1 = 0$$

$$C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2 = 0$$

Решая систему, получим:

$$C_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}}, C_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{5}}.$$

По самому соотношению также можно вычислять последовательно:

$$n = 2: y_2 = 1 + y_1 + y_0 = 1 = 2^2 - x_2 = 4 - 3; bb$$

$$n = 3: y_3 = 2 + y_2 + y_1 = 3 = 2^3 - x_3 = 8 - 5;$$

$$(a+b)bb + bb(a+b) = abb + bbb + bba$$

$$n = 4: y_4 = 4 + y_3 + y_2 = 8 = 2^4 - x_4 = 16 - 8;$$

$$(a+b)^2 bb + (a+b)bb(a+b) + bb(a+b)^2 =$$
$$= (aa + ab + ba + bb)bb + abba + abbb + bbba + bbbb +$$
$$+ bb(aa + ab + ba + bb) =$$
$$= aabb + babb + abba + abbb + bbba + bbbb + bbaa + bbab.$$

$$n = 5: y_5 = 8 + y_4 + y_3 = 19 = 2^5 - x_5 = 32 - 13,$$

$$n = 6: y_6 = 16 + y_5 + y_4 = 16 + 19 + 8 = 43 = 2^6 - x_6 = 64 - 21.$$

....

Заметим, что последовательность растет существенно быстрее последовательности Фибоначчи.

См. еще примеры в методических указаниях:

А.И. Белоусов, П.А. Власов. Элементы комбинаторики: метод. указания к выполнению домашнего задания. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – С. 17-20.

Рекомендуется самостоятельно решить такую задачу: *составить рекуррентное соотношение для числа слов заданной длины n в алфавите {a, b}, которые не содержат вхождений слова aba.*

Дополнение. Методы поиска частного решения неоднородного соотношения

Опишем здесь метод подбора частного решения, вполне аналогичный таковому в теории линейных дифференциальных уравнений.

1) Если правая часть соотношения (12) имеет вид $c^n P^{(k)}(n)$, где $P^{(k)}(n)$ - полином степени k от n, причем c есть действительный корень кратности m характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения следует искать в виде:

$$Q_n = n^m c^n R^{(k)}(n), \tag{13}$$

где $R^{(k)}(n)$ - полином степени k от n с неопределенными коэффициентами.

Если же число c не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищут в виде:

$$Q_n = c^n R^{(k)}(n). \tag{14}$$

2) **Тригонометрическая неоднородность**: если правая часть соотношения имеет вид

$$f(n) = r^n (P^{(m)}(n)\cos n\varphi + Q^{(k)}(n)\sin n\varphi), \tag{15}$$

то, если комплексное число $re^{i\varphi}$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного соотношения ищется в виде

$$g(n) = r^n (S^{(l)}(n)\cos n\varphi + T^{(l)}(n)\sin n\varphi), \tag{16}$$

где $S^{(l)}, T^{(l)}$ - полиномы степени $l = \max(m,k)$ с неопределенными коэффициентами.

Если же число $re^{i\varphi}$ есть корень характеристического уравнения кратности s, то указанное выше выражение (16) для функции $g(n)$ следует умножить на n^s.