МОДУЛЬ 1: Множества, отношения, алгебры

Вопросы для подготовки к рубежному контролю

1. Множества, подмножества. Способы определения множеств. Равенство множеств. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение). Методы доказательства теоретико-множественных тождеств.
2. Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, кортеж. Декартово произведение множеств.
3. Отображения: область определения, область значений. Инъективное, сюръективное и биективное отображения. Частичное отображение.
4. Соответствия. График и граф соответствия, область определения, область значения. Сечение соответствия. Сечение соответствия по множеству. Функциональность соответствия по компоненте. Бинарные и n-арные отношения. Связь между отношениями, соответствиями и отображениями.
5. Композиция соответствий, обратное соответствие и их свойства (с доказательством).
6. Специальные свойства бинарных отношений на множестве (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).
7. Классификация бинарных отношений на множестве: эквивалентность, толерантность, порядок, предпорядок, строгий порядок.
8. Отношение эквивалентности. Класс эквивалентности. Фактор-множество. Свойства классов эквивалентности. Эквивалентности и разбиения.
9. Отношения предпорядка и порядка. Наибольший, максимальные, наименьший и минимальные элементы. Точная нижняя и верхняя грани множества.
10. Точная верхняя грань последовательности. Индуктивно упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с доказательством). Пример вычисления неподвижной точки.
11. Операции на множестве. Понятие алгебраической структуры. Свойства операций (ассоциативность, коммутативность, идемпотентность). Нуль и нейтральный элемент (единица) относительно операции. Примеры. Алгебраическая структура, носитель, сигнатура. Примеры. Однотипные алгебры.
12. Группоиды, полугруппы, моноиды. Единственность нейтрального элемента. Обратный элемент. Группа. Единственность обратного элемента в группе.
13. Циклическая полугруппа (группа). Образующий элемент. Примеры конечных и бесконечных циклических полугрупп и групп. Порядок конечной группы. Порядок элемента. Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы.
14. Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Коммутативное кольцо. Кольца вычетов. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности вычитания относительно умножения; с доказательством).
15. Тела и поля. Примеры полей. Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством). Поля вычетов. Решение систем линейных уравнений в поле вычетов.
16. Понятие подгруппы. Примеры. Циклические подгруппы.
17. Смежные классы подгруппы по элементу. Теорема Лагранжа. Примеры.
18. Полукольцо. Идемпотентное полукольцо. Естественный порядок идемпотентного полукольца.
19. Замкнутое полукольцо. Итерация элемента. Примеры вычисления итерации в различных замкнутых полукольцах.
20. Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
21. Квадратные матрицы порядка n над идемпотентным полукольцом. Теорема о полукольце квадратных матриц. Замкнутость полукольца квадратных матриц над

замкнутым полукольцо. Решение систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах.

Типовые задачи рубежного контроля

1. Доказать тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. Доказать тождество $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
3. Доказать тождество $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$.
4. Доказать, что для любой функции f и любых множеств A и B имеют место соотношения: а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; б) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
5. Построить график и граф бинарного отношения φ, заданного на множестве $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, если $x_1 \varphi x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 + 1$.
6. Для бинарного отношения $\rho = \{(x, y) : \ x < y, \ y + x < 1{,}5\}$ на множестве $X = [0,1]$ построить графики отношений ρ^{-1} и ρ^2.
7. Для бинарного отношения $\rho = \{(x, y) : \ x + y \le 1\}$ на множестве $X = [0,1]$ найти $D(\rho)$, $R(\rho)$, ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho$, $\rho \circ \rho^{-1}$.
8. Пусть бинарное отношение υ определено на множестве положительных рациональных чисел следующим образом: $(a/b)\upsilon(c/d)$, если $ad \le bc$. Показать, что υ является отношением порядка.
9. Ассоциативна ли операция $\odot$ на множестве *M*, если $M = \mathbb{N}$, $x \odot y = 2xy$.
10. Решить уравнение $axb = c$ в группе S_7, если $a = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 5627134 \end{pmatrix}^{1997}$, $b = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 7162534 \end{pmatrix}^{-2002}$, $c = (125)^{1999}$.
11. Решить уравнение $axb = c$ в группе Z_{23}^*, где $a = 7^{-1998}, b = 5^{115}, c = 21^{21}$.
12. Найти в Z_{23} решение системы уравнений
$$\begin{cases} x - 5y + z = 1, \\ 21x - 19y + 22z = -21, \\ 5x + 17z = 5. \end{cases}$$
13. Доказать, что если в кольце оба произведения ab и ba обратимы, то оба элемента a и b обратимы. Что изменится в результате, если сохранить обратимость только одного произведения?