Формулы включения и исключения

Вывод формулы для числа элементов объединения множеств

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}|.$$

Заметим, что внутренняя сумма для заданного p содержит C_n^p слагаемых.
В частности:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|;$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -$$
$$-(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Знак при внутренней сумме «минус» для четного p и «плюс» для нечетного.

Первый вывод

Индукция по n.
Базис (нетривиальный) при $n = 2$ - см. выше.
Далее (с учетом индукционного предположения):

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}| + |A_n| -$$
$$-|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1}) \cap A_n| =$$
$$= \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + |A_n| -$$
$$-|(A_1 \cap A_n) \cup (A_2 \cap A_n) \cup \ldots \cup (A_{n-1} \cap A_n)| =$$
$$= \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + |A_n| -$$
$$-\sum_{p=2}^{n} (-1)^{p} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_{p-1}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n| =$$
$$= \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}| + |A_n| +$$
$$+\sum_{p=2}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_{p-1}} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{p-1}} \cap A_n|.$$

Во втором и третьем слагаемых учтены все новые наборы из p множеств ($1 \le p \le n-1$), содержащие множество A_n. Поэтому вся написанная выше сумма будет равна

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_p}|,$$

что и требовалось.

Второй вывод

Достаточно доказать, что каждый элемент рассматриваемого объединения учтен в правой части равенства ровно один раз.

Пусть элемент a принадлежит в точности k множествам из n. Тогда в сумме $\sum\limits_{i_1<i_2<\ldots<i_p}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_p}|$ этот элемент фигурирует C_k^p раз (выбраны какие-то p подмножеств из k, содержащих a). Следовательно, во всей правой части этот элемент фигурирует $\sum\limits_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}C_k^p$ раз.

Но

$0=(1-1)^k=\sum\limits_{p=0}^{k}(-1)^p C_k^p=1-\sum\limits_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}C_k^p$, откуда $\sum\limits_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}C_k^p=1$, что и требовалось.

Формула для пересечения дополнений множеств

Подсчет числа элементов в объединении множеств позволяет находить число элементов, обладающих хотя одним из n свойств. Следующая формула позволяет находить число элементов, не обладающих ни одним из n свойств. Если обозначить через A_i множество всех тех элементов, которые обладают свойством P_i (при $i=1,\ldots,n$), то множество всех тех элементов, которые не обладают ни одним из указанных свойств, есть пересечение дополнений $\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n$.

Тогда

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_n|=|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}|=$$
$$=|U|-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n|=$$
$$=|U|-\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p+1}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_p}|=$$
$$=|U|+\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p}\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_p}|.$$

(Здесь U - универсальное множество, т.е. «высший род» в заданном классе элементов.)

Пример. 1) Найти, сколько чисел, не больших 100, взаимно просты с 30.

Найдем, сколь много чисел, не больших 100, которые имеют с 30 общий делитель, больший 1. Для этого достаточно определить, сколь много чисел в указанном диапазоне, которые кратны 2, 3 или 5. Множества чисел, кратных другим делителям 30, будут подмножествами указанных.

Пусть A_1, A_2, A_3 - множества чисел, кратных 2, 3 и 5 соответственно. Тогда

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

, что составит

50+33+20 – (16+10+6)+3 = 74, откуда искомое число будет равно 100-74=26, а без учета единицы составит 25.

2) Сколько чисел, не больших 1000, взаимно простых с 420?

Так как 420 = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, то аналогично предыдущему имеем для искомого числа:

1000- ([1000/2]+[1000/3]+[1000/5]+[1000/7]) +
([1000/6]+[1000/10]+[1000/14]+[1000/15]+[1000/21]+[1000/35]) –
([1000/30]+[1000/42])+[1000/105])+[1000/70])+[1000/210]=1000-772=228.

Без учета единицы – 227.

Беспорядки

Беспорядком (или **разупорядочиванием**) на множестве M называется подстановка множества M , не имеющая неподвижных элементов.

Число беспорядков на n-элементном множестве можно подсчитать следующим образом. Всякая подстановка, не являющаяся беспорядком, оставляет неподвижными какие-то k из n элементов. При фиксированных k элементах число таких подстановок составит $(n-k)!$, а всего для различных выбранных k элементах будет $C_n^k (n-k)! = \dfrac{n!}{k!}$.

Если обозначить A_j множество всех подстановок, оставляющих неподвижным элемент j, то из предыдущих рассуждений следует, что

$$\sum_{i_1 < i_2 \ldots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = \frac{n!}{k!}.$$

Множество беспорядков есть множество $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n$. Следовательно, число D_n на n-элементном множестве составит

$$D_n = n! - (\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^k \frac{n!}{k!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}) =$$

$$= n!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$$

Вспомним теперь формулу Тейлора для функций e^x и e^{-x} :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Тогда при больших n число $D_n \approx n!e^{-1}$.

Подстановки с запрещенными позициями

Матрицы подстановок

Каждой подстановке $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ в симметрической группе степени n однозначно сопоставляется квадратная матрица n-го порядка $A_\sigma = (a_{ij})_{n \times n}$, в которой $a_{ij} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(i) \\ 0, & j \neq \sigma(i) \end{cases}$. Очевидно, что в матрице A_σ никакие две единицы не находятся в одной строке или в одном столбце, а также нет ни одной нулевой строки и ни одного нулевого столбца. С другой стороны, всякой матрице, обладающей таким свойством, может быть однозначно сопоставлена некоторая подстановка из группы S_n. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между множеством матриц указанного вида и группой S_n. Более того, это соответствие является изоморфизмом, так как можно показать, что для любых σ, τ имеет место $A_{\sigma\tau} = A_\sigma A_\tau$.
Будем называть такие матрицы ***матрицами подстановок***.

Доски

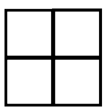
Матрицу подстановок n-го порядка нам будет удобно изображать в виде таблицы $n \times n$ клеток, а, в свою очередь, эту таблицу рассматривать как «шахматную» доску, полагая, что в клетке, соответствующей единичному элементу матрицы, стоит ладья. Таким образом, каждой матрице подстановок соответствует доска, на которой находится n ладей, ни одна из которых не может бить другую. Будем говорить, что такие ладьи находятся в ***неатакующих позициях***. Части доски $n \times n$ также будем называть досками. Будем рассматривать также объединения и пересечения досок. Доски будем называть ***дизъюнктными***, если они не имеют ни общих строк, ни общих столбцов.

Ладейный полином

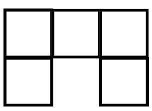
Доске C с m клетками, которая является частью квадратной доски $n \times n$, сопоставляется полином

$$R(x, C) = \sum_{k=0}^{m} r_k(C) x^k ,$$

коэффициент $r_k(C)$ которого равен числу способов, которым на доске C можно разместить k ладей в неатакующих позициях.



C1



C2

Для изображенных выше досок имеем:

$R(x, C_1) = 1 + 4x + 2x^2$,

$R(x, C_2) = 1 + 5x + 4x^2$

То, что коэффициент при нулевой степени x означает, что существует 1 способ оставить доску пустой, т.е. разместить 0 ладей.

Теорема 1. Если доски C_1 и C_2 дизъюнктны, то $R(x, C_1 \cup C_2) = R(x, C_1)R(x, C_2)$.

Доказательство. Рассмотрим коэффициент $r_k(C_1 \cup C_2)$. Если на доске $C = C_1 \cup C_2$ размещено k ладей[1], то можно выбрать l ладей на доске C_1 и $k - l$ ладей на доске C_2. Тем самым при заданном l существует $r_l(C_1)r_{k-l}(C_2)$ способов разместить k ладей на объединенной доске (заметим, что если бы доски не были дизъюнктны, то это было бы неверно). Рассматривая все возможные значения l от нуля до k, получим

$$r_k(C) = \sum_{l=0}^{k} r_l(C_1)r_{k-l}(C_2),$$

что и является коэффициентом при x^k в произведении $R(x, C_1)R(x, C_2)$.

Рассмотрим теперь более сложную комбинацию досок.

Теорема 2. Пусть C - доска с m клетками, а s - клетка (квадрат) этой доски; пусть C_s - доска, полученная из доски C удалением клетки s, и пусть $C_s^{\#}$, полученная из доски C удалением строки и столбца, содержащих клетку s.

Тогда $R(x, C) = xR(x, C_s^{\#}) + R(x, C_s)$.

Доказательство. Определим число способов, которыми можно разместить k ладей на доске C.

Возможны два случая: 1) в клетке s есть ладья и 2) в клетке s ладьи нет.

В первом случае остальные $k - 1$ ладей можно разместить на доске $C_s^{\#}$ $r_{k-1}(C_s^{\#})$ способами, а во втором размещение всех k ладей производится на доске C_s, и число способов составит $r_k(C_s)$. Следовательно, всего существует $r_{k-1}(C_s^{\#}) + r_k(C_s)$ способов разместить k ладей, т.е. $r_k(C) = r_{k-1}(C_s^{\#}) + r_k(C_s)$.

---

[1] Везде в дальнейшем, говоря о размещении ладей, мы, естественно, имеем в виду размещение в неатакующих позициях.

Теперь преобразуем ладейный полином для всей доски:

$$R(x,C)=\sum_{k=1}^{m} r_{k-1}(C_s^{\#})x^k+\sum_{k=0}^{m} r_k(C_s)x^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1} r_k(C_s^{\#})x^{k+1}+\sum_{k=0}^{m} r_k(C_s)x^k=$$

$$=x\sum_{k=0}^{m} r_k(C_s^{\#})x^k+\sum_{k=0}^{m} r_k(C_s)x^k,$$

так как $r_m(C_s^{\#})=0$ (на этой доске меньше m клеток).

Для доски C_2 на рисунке выше, выбирая в качестве клетки s среднюю, получим:

$$R(x,C_{2,s}^{\#})=1+2x, R(x,C_{2,s})=1+4x+2x^2,$$

$$R(x,C_2)=1+5x+4x^2.$$

Число подстановок с запрещенными позициями

Рассмотрим снова группу подстановок S_n множества $M=\{1,2,...,n\}$. Пусть для каждого $i=\overline{1,n}$ определено множество F_i ***запрещенных значений***, т.е. из группы S_n исключаются все такие подстановки σ, для которых $\sigma(i)\in F_i$. Упорядоченная пара $(i,\sigma(i))$ при $\sigma(i)\in F_i$ называется ***запрещенной парой***. Множество

$$F=\bigcup_{i=1}^{n}\{(i,\sigma(i)):\sigma(i)\in F_i\}$$

называется ***запрещенной областью***.

На доске, соответствующей матрице подстановок, клетки запрещенной области закрашиваются.

Заметим, что для беспорядков запрещенной областью является главная диагональ.

Чтобы определить число подстановок, которые не принимают значений в запрещенной области, введем для фиксированного $i\in\{1,...,n\}$ множество A_i как множество всех таких подстановок σ, для которых $\sigma(i)\in F_i$.

Тогда число всех подстановок, значения которых не являются запрещенными, равно

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap...\cap\bar{A}_n|=|U|-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{i_1<i_2<...<i_k}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap...\cap A_{i_p}|=$$

$$=|U|+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\sum_{i_1<i_2<...<i_k}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap...\cap A_{i_k}|.$$

Определим значение $|A_i|$ при фиксированном i. Это будет число всех подстановок, у которых все элементы, кроме i-го переставляются как угодно, а i-й обязан попасть в одну из закрашенных клеток, т.е. значение подстановки на этом элементе должно принадлежать множеству F_i. Очевидно, существует $n_i = |F_i|$ способов это сделать.

Таким образом, $|A_i| = n_i(n-1)!$, а $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = (\sum_{i=1}^{n} n_i)(n-1)! = r_1(F)(n-1)!$.

Далее, при фиксированных i и j число $|A_i \cap A_j|$ равно числу всех перестановок из $n-2$ элементов, помноженному на число всех способов, которыми можно значения i-го и j-го элементов задать так, чтобы они попали в множества F_i и F_j соответственно. Это число способов равно, как нетрудно видеть, числу способов, которыми можно разместить две ладьи в той части запрещенной области, которая соответствует множествам F_i и F_j. Обозначим это последнее через n_{ij}. Суммируя по i и по j, получим

$$\sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = (\sum_{i<j} n_{ij})(n-2)! = r_2(F)(n-2)!.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = r_k(F)(n-k)!.$$

Итак, число допустимых подстановок составит

$$L_n = n! - (R(x,F)-1)\big|_{x^k=(-1)^{k+1}(n-k)!} = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} r_k(F)(n-k)!,$$

т.е. из числа всех подстановок надо вычесть значение ладейного полинома запрещенной области (без единицы) при подстановке вместо k-ой степени переменной числа $(-1)^{k+1}(n-k)!$.

Формула может быть, очевидно, переписана и в таком виде:

$$L_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k(F)(n-k)!$$

В частности, для беспорядков $r_k(F) = C_n^k$ - число способов размещения k ладей на главной диагонали.

Число сюръекций

Формулы включения-исключения можно применить для подсчета числа сюръективных отображений одного конечного множества на другое.

Пусть $A = \{a_1, \ldots a_m\}, B = \{b_1, \ldots, b_n\}$; пусть $W_i = \{f : f \in B^A, b_i \notin R(f)\}$ - множество всех таких отображений A в B, в область значений которых не попадает элемент b_i. Тогда для фиксированных $i_1, \ldots, i_k$ имеем $|W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_k}| = (n-k)^m$, а

$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} |W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_k}| = C_n^k (n-k)^m.$$

Следовательно,

$$|W_1 \cup \ldots \cup W_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k (n-k)^m$$

(число всех отображений, не являющихся сюръекциями).

Тогда число $S(m,n)$ всех сюръекций A на B составит

$$S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k (n-k)^m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m .$$

Число $S(m,n)$ может быть получено и по другой формуле:

$$S(m,n) = \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m,\\ k_i>0}} \frac{m!}{k_1!\ldots k_n!},$$

где суммирование идет по всем векторам $(k_1,\ldots,k_n)$ с ненулевыми компонентами таким, что сумма компонент равна m.

Например, $S(3,2) = 2^3 - 2\cdot 1 = 6$ по первой формуле, тогда как по второй

$$S(3,2) = \frac{3!}{2!1!} + \frac{3!}{1!2!} = 6.$$

Аналогично $S(4,2) = 2^4 - 2\cdot 1 = 14 = \dfrac{4!}{2!2!} + 2\cdot\dfrac{4!}{3!1!}$.

Замечание. Так как $S(n,n) = n!$, то получаем такое представление для факториала:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^n ,$$

то есть

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)^n ,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} (n-k)^n = 1$$

На основании полученных результатов можно вывести формулу для числа всех возможных разбиений m-элементного множества на n подмножеств. Оно будет, как нетрудно показать, равно $\dfrac{1}{n!}S(m,n)$ [Сачков, с. 44][2]. При этом число разбиений при фиксированных ненулевых числах $k_1, k_2, \ldots, k_n$ будет равно $\dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\substack{k_1+\ldots+k_n=m,\\ k_i\ \text{фиксированы}}} \dfrac{m!}{k_1!\ldots k_n!}$,

[2] Числа $\dfrac{1}{n!}S(m,n)$ называются ***числами Стирлинга 2-го рода***. [Андерсон, с. 553.]

т.е. суммирование ведется по всем *различным* векторам, компоненты которых суть числа k_i. Например, при $m = 4, n = 2, k_1 = k_2 = 1, k_3 = 2$ получим $\frac{1}{3!}(\frac{4!}{1!1!2!} + \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{4!}{2!1!1!}) = \frac{1}{6} 3 \frac{4!}{1!1!2!} = 6$, т.е. существует 6 способов разбить 4-элементное множество на 2 одноэлементных и одно двухэлементное. Вот эти разбиения: **1**-{1}, {2}, {3,4}, **2**-{1}, {3}, {2,4},**3**-{1}, {4}, {2,3}, **4**-{2}, {3}, {1,4}, **5**-{2}, {4}, {1,3}, **6**-{3}, {4}, {1,2}.

Если в выше написанной формуле для числа сюръекций допустить, что некоторые из чисел k_i могут быть равны нулю, то получим формулу для числа ***всех*** отображений m-элементного множества в n-элементное.

По индукции может быть доказана такая формула:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^m = \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_n=m, \\ k_i \geq 0}} \frac{m!}{k_1!k_2!...k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_n^{k_n}$$

([Сачков, с. 39]).

Тогда при $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$ получаем $n^m = \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_n=m, \\ k_i \geq 0}} \frac{m!}{k_1!k_2!...k_n!}$, что и равно числу всех отображений m-элементного множества в n-элементное.

Дополнения

Числа Стирлинга 1-го рода

Числа Стирлинга 1-го рода со знаком – коэффициенты в разложении функции убывающего факториала

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

по степеням x, то есть

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k .$$

Можно показать, что эти числа имеют чередующийся знак (ситуация такая же, как при раскрытии скобок в двучлене $(x-a)^n, a > 0$). Их модули называют числами Стирлинга 1-го рода без знака и обозначают $c(n,k)$.

Нетрудно видеть, что они являются коэффициентами при степенях x в разложении возрастающего факториала:

$$[x]_n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} c(n,k) x^k .$$

При этом $s(n,k) = (-1)^{n-k} c(n,k)$.

По определению принимается, что $s(0,0) = c(0,0) = 1$(подобно тому, как по определению 0!=1).

Понятно также, что $s(n,0)=c(n,0)=0$ при $n>0$(свободный член в разложении обеих функций равен нулю); и $s(0,k)=c(0,k)=0$ при $k>0$ (это можно считать принятым по определению).
Чтобы вывести рекуррентные соотношения для чисел $s(n,k)$ и $c(n,k)$, запишем:

$$(x)_n = s(n,1)x + \ldots + s(n,k-1)x^{k-1} + s(n,k)x^k + \ldots + s(n,n)x^n,$$
$$(x)_{n-1} = s(n-1,1)x + \ldots + s(n-1,k-1)x^{k-1} + s(n-1,k)x^k + \ldots + s(n-1,n-1)x^{n-1}.$$

Так как $(x)_n = (x)_{n-1}(x-n+1)$, то

$$s(n-1,k-1)x^{k-1}(x-n+1) + s(n-1,k)x^k(x-n+1) =$$
$$= s(n-1,k-1)x^k - (n-1)s(n-1,k-1)x^{k-1} + s(n-1,k)x^{k+1} - (n-1)s(n-1,k)x^k,$$

откуда

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k).$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k). \qquad (*)$$

Заметим, что $s(n,1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, а $s(n,n) = c(n,n) = 1$.
Можно показать, что число $c(n,k)$ равно числу всех подстановок в группе S_n с k циклами (имеется в виду разложение любой подстановки на попарно независимые циклы).
Это можно понять так.
Обозначим через $S(n,k)$ множество всех подстановок группы S_n с k циклами (тем самым $c(n,k) = |S(n,k)|$.
Можно предложить такую схему перехода от множеств $S(n-1,k-1)$ и $S(n-1,k)$ к множеству $S(n,k)$.
К каждой подстановке первого множества припишем цикл (n). Количество циклов тогда в подстановке станет равным k, но число полученных таким способом подстановок останется равным $|S(n-1,k-1)| = c(n-1,k-1)$.
Далее, в каждую подстановку множества $S(n-1,k)$ вставим новый, n-й, элемент после фиксированного элемента множества $\{1,2,\ldots,n-1\}$. Новый элемент тогда окажется внутри некоторого цикла, и число циклов в подстановке не будет изменено. При этом длина цикла, в который вставляется новый элемент, увеличится на единицу, а сумма длин циклов станет равна *n*. Таким способом получается $c(n-1,k)$ циклов. Поскольку вариантов вставки нового элемента ровно $n-1$, получаем формулу (*). Эта схема перехода к циклам множества $S(n,k)$ полна, так как обратный переход осуществляется следующим образом: фиксируем некоторый элемент из n. Его можно удалить, удалив все циклы длины 1, которые его содержат, или удалив его из всех циклов длины, большей единицы.

Пример.

$S(4,2)=\{(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1)(234),(1)(432),(2)(134),(2)(431),$
$(3)(124),(3)(421),(4)(123),(4)(321)\}$

$c(4,2)=11$ (это коэффициент при x^2 в разложении

$[x]_4=[x]_3(x+3)=(x+3x^2+2x)(x+3)=x^4+6x^3+11x^2+6x$).

$S(3,2)=\{(12)(3),(13)(2),(1)(23)\}$,

$S(3,1)=\{(123),(321)\}$

Переход от $S(3,1)$ и $S(3,2)$ к $S(4,2)$:
Подстановки с циклом (4): (123)(4) и (321)(4).

Подстановки, полученные вставкой 4 после 1:
(142)(3), (143)(2), (14)(23).
Подстановки, полученные вставкой 4 после 2:
(124)(3), (13)(24), (1)(243).

Подстановки, полученные вставкой 4 после 3:
(12)(34), (134)(2), (1)(234).
Итого 2+9=11.

Числа Стирлинга первого и второго рода связаны таким соотношением:

$x^n=\sum_{k=0}^{n}\tilde{S}(n,k)(x)_k$, где $\tilde{S}(n,k)=\frac{1}{k!}S(n,k)$

Числа Белла:

$$\sum_{k=0}^{n}\tilde{S}(n,k)=B_n$$