

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
 Диагонализация симметричных матриц
 ортогональными преобразованиями.

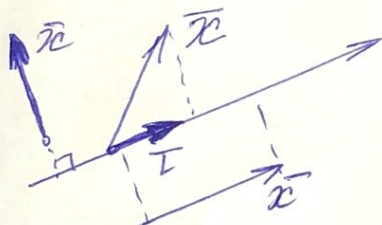
Опр. 1. Пусть L - л.и. пр-во и $A: L \rightarrow L$ - линейного оператора в L .

Не нулевой ($x \neq 0$) вектор $x \in L$ называется собственным вектором линейного оператора $A: L \rightarrow L$, если $Ax = \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{R}$

Число λ называется собственным числом оператора.

(N1) Найти собств. числа и собств. векторы операторов в пр-ве V^3 :

а) (N4.130) $A\bar{x} = (\bar{x}, \bar{l})\bar{l}$ - оператор проектирующий на ось Ox



Из геометрических соображений видим, что любой вектор, колл.н. вектору \bar{l} будет собственным с $\lambda = 1$, т.к. в этом случае он "переходит" в себя при отображении.

$\Rightarrow \forall$ вектор $\bar{x} = x\bar{l}$ (н.н. $\bar{x} \neq 0$) явл. собственным с $\lambda = 1$.

Если же вектор $\bar{x} \perp \bar{l}$, то он также будет собственным с $\lambda = 0$, т.к. в этом случае он проектируется в точку.

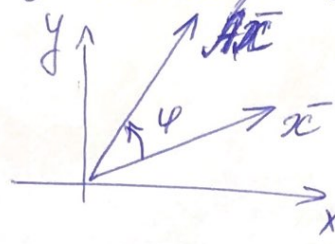
$\Rightarrow \forall$ вектор $\bar{x} = y\bar{j} + z\bar{k}$ (н.н. $\bar{x} \neq 0$) явл. собств. с $\lambda = 0$.

Ответ: 1) $\bar{x} = x\bar{l}$ - соб. с $\lambda = 1$ ($\bar{x} \neq 0$)

2) $\bar{x} = y\bar{j} + z\bar{k}$ - соб. с $\lambda = 0$ ($\bar{x} \neq 0$)

б) (N4.132) A_φ -оператор поворота на угол φ на плоскости Oxy . ($A_\varphi: V^2 \rightarrow V^2$)

из канон. соображений:



- 1) при $\varphi = 2\pi k$ любой ненулевой вектор "перейдет" сам в себя и будет собственным с $\lambda = 1$.
- 2) при $\varphi = (2k+1)\pi$ любой ненулевой вектор \bar{x} "перейдет" в $A\bar{x} = -\bar{x} \Rightarrow$ он будет собств. с $\lambda = -1$
- 3) при $\varphi \neq \pi k$ оператор не будет иметь собств. векторов.

Ответ: 1) $\varphi = 2\pi k \Rightarrow \forall \bar{x} \neq 0$ - собств. с $\lambda = 1$
 2) $\varphi = (2k+1)\pi \Rightarrow \forall \bar{x} \neq 0$ - собств. с $\lambda = -1$
 3) $\varphi \neq \pi k \Rightarrow$ нет собств. вров.

Если оператор $A: L \rightarrow L$ задан матрицей в некотором базисе $\{e_i\}$, а $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор л.и.н.б.а, заданный своими коэфф. в том базисе $\{e_i\}$,

то равенство $Ax = \lambda x$ можно переписать в виде: $Ax = \lambda E x$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ - ед. матрица $(n \times n)$

Тогда $(A - \lambda E)x = 0$ ⁽¹⁾ - матричная запись СЛАУ (одноуровневой) для нахождения x .

Поскольку нас интересуют только $x \neq 0$, то необходимым и достаточным условием существования таких решений является вырожденность матрицы $(A - \lambda E)$, т.е.

$\det(A - \lambda E) = 0$ ⁽²⁾ - характеристическое уравн. для нахождения соб. чисел λ .

Таким образом, получаем следующий алгоритм нахождения собственных чисел и собственных векторов:

- 1) Выбрать базис $\{e_i\}$ и найти матрицу оператора A в этом базисе.
- 2) Составить хар. ур-ие (2) и найти его вещественные корни. Эти числа являются собствен. числами оператора A .
- 3) Для каждого собствен. числа λ найти ФСР для однородной СЛАУ (1). Столбцы ФСР представляют собой коорр. собствен. векторов.

(N2) Найти собствен. числа и собствен. векторы линейного оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$.

- 1) Составим хар. ур-е (2):

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 2 & -5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3; \\ \lambda_2 = 2; \end{cases} \text{ — это собствен. значения оператора } A.$$

- 2) Найдем собствен. векторы, решая систему (1):

а) $\lambda_1 = -3$:

$$(A + 3E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

ФСР этой системы: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $(\lambda_1 = -3)$

б) $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 - 4x_2 = 0$$

ФСР этой системы: $E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $(\lambda_2 = 2)$

Ответ: $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \Rightarrow a_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow a_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

соб. векторы с $\lambda_1 = -3$
соб. векторы с $\lambda_2 = 2$

№3 Найти собств. числа и собств. векторы -4-
 лмч. оператора $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданного
 матрицей: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) Кар. ур-ие (2) имеет вид:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2, \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 4,$$

собств. числа.

2) Найдем собств. векторы:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $a_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; a_2 = C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; a_3 = C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⁻⁵⁻
 $(\lambda_1 = -2) \quad (\lambda_2 = 1) \quad (\lambda_3 = 4)$

Свойства собств. векторов.

на лекции были доказаны след. теоремы:

- 1°. Собств. векторы лин. оператора, отвечающие различным собств. значениям, образуют лин. систему.
- 2°. Если лин. оператор имеет ровно n л.н.н. собств. векторов, то в базисе из этих векторов матрица лин. оператора имеет диагональный вид. (Обратное тоже верно)

Проверим эти свойства в заданиях №2 и №3.

В №2: Возьмем векторы $\bar{a}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{a}_2^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Они л.н.н. \Rightarrow могут образовывать базис.

$$\begin{cases} A\bar{a}_1 = -3\bar{a}_1^0 + 0\bar{a}_2^0 \\ A\bar{a}_2 = 0\bar{a}_1^0 + 2\bar{a}_2^0 \end{cases}, \text{ т.к. } \bar{a}_1^0 \text{ и } \bar{a}_2^0 - \text{собств. в-ры} \\ \text{с } \lambda_1 = -3 \text{ и } \lambda_2 = 2 \text{ соотв-но}$$

В базисе $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ матрица лин. опер. имеет вид:

$$A'_{\{\bar{a}_i\}} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{столбцы матрицы - это} \\ \text{коэфф. образов баз. векторов} \end{array} \right)$$

В №3 Векторы $\bar{a}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \bar{a}_2^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\bar{a}_3^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

явл. не только л.н.н., но и ортогональными (проверьте!) \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{cases} A\bar{a}_1 = -2\bar{a}_1 \\ A\bar{a}_2 = 1\bar{a}_2 \\ A\bar{a}_3 = 4\bar{a}_3 \end{cases} \Rightarrow A'_{\{\bar{a}_i\}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что в диаг. виде по диагонали стоят собств. числа оператора.

Самосопряженные операторы

Опр 2 Лин. оператор $A: E \rightarrow E$ (E -евкл. пр-во) наз. самоспр., если $(Ax, y) = (x, Ay)$

Th 1 В ортонорм. базисе матрица самоспр. оператора симметрична. (обратное тоже верно)

Th 2 Все корни самоспр. оператора - действит. числа.

Th 3 Собств. векторы самоспр. лин. оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Th 4 Если A -самоспр. оператор, то существует ортонорм. базис из собств. векторов, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид.

Сам. пример (N3): в этой задаче ортонорм. базис из собств. векторов имеет вид:

$$\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

В этом базисе: $A'_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Матрица перехода от одного ортонорм. базиса к другому ортонорм. базису является ортогональной, т.е. $V^{-1} = V^T$, где V - матр. перехода.

$$\Rightarrow A'_{\{e_i\}} = \underbrace{V^{-1}}_{\text{квадр. матр.}} \cdot A_{\{e_i\}} \cdot \underbrace{V^T}_{\text{ортон.}} = \underbrace{V^{-1} \cdot V^T}_{\text{ортон.}} = V^T \cdot A \cdot V$$

-4-

14) (14.191) Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ найти
 квар. матрицу A' и орторм. матрицу V ,
 такую, чтобы $A' = V^T \cdot A \cdot V$.

Решение.

1) Составим хар. ур-е (2):

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{aligned} -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 &= 0 \\ -(\lambda-1)^2(\lambda-10) &= 0 \end{aligned}$$

Имеем $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 10$.

2) Найдем собственные векторы.

а) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Из системы (1) имеем $(A - E)x = 0$: ($\lambda = 1$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

Ранг матрицы $(A - \lambda E)$ (при $\lambda = 1$) равен 1 \Rightarrow
 \Rightarrow ФСР орм. СЛЛУ состоит из $n - r = 3 - 1 = 2$
 линейных решений. Найдем их:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти векторы явл. собств. с $\lambda = 1$, они л/кей,
 но не являются ортогональными.

Применим к ним процесс ортогонализации
 Грама — Шмидта; Получим:

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } e_2' = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; (|e_i'| = 1)$$

Теперь e_1' и e_2' — нормированные ортогональные
 собств. векторы, собств. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\delta) \lambda_3 = 10$$

$$(A - 10E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ФСР этой системы имеет вид: $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
(проверьте!)

Нормируем вектор a_3 и получаем:

$$e_3' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Можно легко убедиться в том, что

$$(e_1', e_2') = 0; (e_1', e_3') = 0; (e_2', e_3') = 0 \text{ и } |e_i'| = 1.$$

$\Rightarrow \{e_1', e_2', e_3'\}$ - ортонорм. базис из собств. векторов.

В этом базисе $A'_{\{e_i'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ - имеет диаг. вид.

Матрица перехода $P = U = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{5} & 2/3 \\ 0 & 5/\sqrt{5} & -2/3 \end{pmatrix}$

является ортогональной.

$$\Rightarrow \underbrace{A'_{\{e_i'\}}}_{\text{диаг.}} = U^T \cdot A_{\{e_i\}} \cdot U.$$

Домашнее задание к занятию 5

1) Учебник „Линейная алгебра“ Канатников А.Н.,
Крыженико А.П.
стр. 158-165. (рассмотреть примера)

2) № 4.134, № 4.135, № 4.183