Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Математическое моделирование»

А.Н. Канатников, А.П. Крищенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Электронное учебное издание

Учебное пособие по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»
для студентов всех специальностей

Москва

Лекция 1

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Аксиомы и примеры линейных пространств. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Критерий линейной зависимости, его следствия. Определение базиса и размерности линейного пространства. Теоремы о базисе и размерности (без док-ва). Теорема о единственности разложения по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в базисе. Матрица перехода к новому базису. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

1.1. Определение линейного пространства

Центральное место в линейной алгебре занимает следующее понятие.

Определение 1.1. Множество $\mathcal{L}$ элементов $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, ... любой природы называют ***линейным пространством***, если выполнены три условия:

1) задано ***сложение элементов*** $\mathcal{L}$, т.е. закон, по которому любым элементам $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, называемый ***суммой элементов*** $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначаемый $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$;

2) задано ***умножение элемента на число***, т.е. закон, по которому любому элементу $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и любому числу $\lambda \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент $\boldsymbol{z} \in \mathcal{L}$, называемый ***произведением элемента*** $\boldsymbol{x}$ ***на*** (действительное) ***число*** и обозначаемый $\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{x}$;

3) указанные законы (***линейные операции***) подчиняются следующим ***аксиомам линейного пространства***:

а) сложение коммутативно: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$;

б) сложение ассоциативно: $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$;

в) существует такой элемент $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$, что $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$ для любого $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$;

г) для каждого элемента $\boldsymbol{x}$ множества $\mathcal{L}$ существует такой элемент $(-\boldsymbol{x}) \in \mathcal{L}$, что $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$;

д) произведение любого элемента $\boldsymbol{x}$ из $\mathcal{L}$ на единицу равно этому элементу: $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$;

е) умножение на число ассоциативно: $\lambda(\mu\boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}$;

ж) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по числам: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}$;

з) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по элементам: $\lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}$.

Элементы линейного пространства принято называть ***векторами***. Элемент $\mathbf{0}$, существование которого постулируется аксиомой в), называют ***нулевым вектором***, а элемент $(-\boldsymbol{x})$ — вектором, ***противоположным*** к вектору $\boldsymbol{x}$.

В понятии «линейное пространство» важно не только рассматриваемое множество $\mathcal{L}$, но и заданные операции сложения элементов и умножения на число. Одно и то же множество $\mathcal{L}$ при одних операциях может быть линейным пространством, а при других — нет. Фактически линейным пространством является совокупность $(\mathcal{L}, +, \cdot)$ из множества элементов и двух операций, которая удовлетворяет условиям определения 1.1. В этой тройке объектов базовым все-таки является множество $\mathcal{L}$, так как операции вводятся именно на этом множестве. Поэтому понятие линейного пространства обычно ассоциируют с множеством элементов $\mathcal{L}$ и говорят, что $\mathcal{L}$ — линейное пространство. При этом, как правило, очевидно, что понимается под операциями линейного пространства. Если же требуется явно указать используемые операции, то говорят: множество $\mathcal{L}$ — линейное пространство относительно таких-то операций.

Согласно определению 1.1 линейного пространства $\mathcal{L}$ сумма определена для любых элементов из $\mathcal{L}$ и всегда является элементом множества $\mathcal{L}$. Подчеркивая последнее, говорят, что ***множество $\mathcal{L}$ замкнуто относительно операции*** сложения. Аналогично, согласно тому же определению, множество $\mathcal{L}$ замкнуто относительно операции умножения его элементов на действительные числа.

Пример 1.1. Приведем примеры линейных пространств:

1) множество V_3 (V_2) всех *свободных векторов* в пространстве (на плоскости) с линейными операциями над векторами — линейное пространство, так как верны все аксиомы линейного пространства;

2) множество всех *геометрических векторов* в пространстве с началом в данной точке и параллельных данной плоскости (рис. 1.1) с линейными операциями над векторами является линейным пространством;

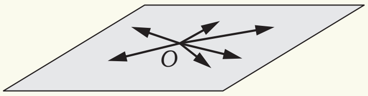

Рис. 1.1

3) множество $M_{mn}(\mathbb{R})$ матриц типа $m{\times}n$, элементами которых являются действительные числа, с линейными операциями над матрицами также удовлетворяет всем аксиомам линейного пространства;

4) множество матриц-строк (матриц-столбцов) длины (высоты) n является линейным пространством относительно матричных операций сложения и умножения на число (это частный случай предыдущего примера);

5) множество $K_n[x]$ многочленов переменного x степени, не превышающей n, которые как функции можно складывать и умножать на действительные числа;

6) множество всех решений данной однородной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решения можно рассматривать как матрицы-столбцы, складывать и умножать на числа по законам матричных операций. Столбец, получаемый в результате сложения решений или умножения решения на число, снова будет решением системы. Поэтому определены операции, о которых говорится в определении 1.1, подчиняющиеся аксиомам линейного пространства;

7) множество функций, непрерывных на отрезке, с обычными операциями сложения функций и умножения функции на число. При сложении непрерывных функций получаем непрерывную функцию, при умножении непрерывной функции на число также получаем непрерывную функцию. Поэтому сложение функций и умножение функции на число, не выводящие за пределы множества непрерывных на отрезке функций, можно рассматривать как операции линейного пространства. Легко убедиться, что для этих операций верны все аксиомы линейного пространства.

Пример 1.2. На множестве $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)\}$, элементами которого являются упорядоченные совокупности n произвольных действительных чисел, введем операции

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1,\ \ldots,\ x_n + y_n), \quad \lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1,\ \ldots,\ \lambda x_n), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Тогда получим линейное пространство, так как все аксиомы линейного пространства для данных операций выполняются. Это линейное пространство, по сути, есть линейное пространство матриц-строк. Отличие лишь формальное, так как первое определено как множество упорядоченных наборов чисел, а второе как множество матриц. Но элементы матрицы всегда записывают в определенном порядке. Линейное пространство $\mathbb{R}^n$ называют ***линейным арифметическим пространством***.

1.2. Свойства линейного пространства

Непосредственно из *аксиом линейного пространства* можно получить ряд простейших свойств.

Свойство 1.1. Любое линейное пространство имеет только один *нулевой вектор.*

◀ В аксиоме в) линейного пространства не утверждается, что нулевой вектор должен быть единственным. Но из аксиом а) и в) в совокупности это вытекает. Пусть существуют два нулевых вектора $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$. Тогда

$$\mathbf{0} = \boxed{\text{аксиома в)}} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \boxed{\text{аксиома а)}} = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \boxed{\text{аксиома в)}} = \mathbf{0}'.$$

Здесь в роли нулевого элемента сначала выступает вектор $\mathbf{0}'$, а затем $\mathbf{0}$. Видим, что векторы $\mathbf{0}$ и $\mathbf{0}'$ совпадают. ▶

Свойство 1.2. Каждый вектор линейного пространства имеет только один *противоположный вектор.*

◀ Пусть для вектора $\boldsymbol{x}$ существуют два противоположных вектора $(-\boldsymbol{x})$ и $(-\boldsymbol{x})'$. Согласно аксиоме г) линейного пространства это означает, что $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})' = \mathbf{0}$. Рассмотрим двойную *сумму* $(-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})'$ *элементов* линейного пространства. Согласно аксиоме б) эта сумма не зависит от порядка выполнения двух операций сложения. Меняя порядок сложения, получаем:

$$(-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})' = (-\boldsymbol{x}) + \bigl(\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})'\bigr) = (-\boldsymbol{x}) + \mathbf{0} = \boxed{\text{аксиома в)}} = (-\boldsymbol{x}),$$

$$(-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})' = \bigl((-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}\bigr) + (-\boldsymbol{x})' = \boxed{\text{аксиома а)}} = \bigl(\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})\bigr) + (-\boldsymbol{x})' = \mathbf{0} + (-\boldsymbol{x})' =$$
$$= \boxed{\text{аксиома а)}} = (-\boldsymbol{x})' + \mathbf{0} = \boxed{\text{аксиома в)}} = (-\boldsymbol{x})'. \quad ▶$$

Свойство 1.3. Если вектор $(-\boldsymbol{x})$ противоположен вектору $\boldsymbol{x}$, то вектор $\boldsymbol{x}$ противоположен вектору $(-\boldsymbol{x})$.

◀ Утверждение опирается на коммутативность сложения. Действительно,

$$\begin{array}{lcl} \text{«}(-\boldsymbol{x}) \text{ противоположен } \boldsymbol{x}\text{»} & \iff & \boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \\ \text{«}\boldsymbol{x} \text{ противоположен } (-\boldsymbol{x})\text{»} & \iff & (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \end{array}$$

Справа стоят эквивалентные равенства (в силу аксиомы а)). Значит, и утверждения слева равносильны. ▶

Свойство 1.4. Для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ уравнение $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ относительно $\boldsymbol{x}$ имеет решение, и притом единственное.

◀ С у щ е с т в о в а н и е. Решением уравнения $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ является вектор $(-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$, так как

$$\boldsymbol{a} + \bigl((-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}\bigr) = \bigl(\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})\bigr) + \boldsymbol{b} = \mathbf{0} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Е д и н с т в е н н о с т ь. Пусть $\boldsymbol{x}$ — какое-либо решение указанного уравнения, т.е. выполнено равенство $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\boldsymbol{a})$, получим $(-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}+\boldsymbol{x} = (-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$, откуда $\boldsymbol{x} = (-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}$. Видим, что вектор $\boldsymbol{x}$ совпал с указанным выше решением $(-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$. Значит, других решений нет. ▶

Последнее свойство позволяет ввести еще одну операцию в линейном пространстве, которая является противоположной *сложению.* ***Разностью*** двух ***векторов*** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ называют вектор $\boldsymbol{x}$, являющийся решением уравнения $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ (вспомним, что разностью двух чисел $b-a$ называют такое число, которое в сумме с вычитаемым a дает уменьшаемое b). Из доказательства свойства 1.4 вытекает, что

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{b}-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

Свойство 1.5. *Произведение* произвольного *элемента* линейного пространства *на число* 0 равно нулевому вектору: $0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

◀ Отметим, что решением уравнения $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ относительно неизвестного $\boldsymbol{y}$ является нулевой вектор (аксиома в)). Покажем, что в качестве решения этого уравнения можно взять и вектор $0\cdot\boldsymbol{x}$, который тогда, в силу единственности решения, будет совпадать с $\mathbf{0}$. Итак, проверяем:

$$\boldsymbol{x}+0\cdot\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}+0\cdot\boldsymbol{x}=\boxed{\text{аксиома ж)}}=(1+0)\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}=\boxed{\text{аксиома д)}}=\boldsymbol{x}. \qquad ▶$$

Свойство 1.6. Вектор, противоположный данному вектору $\boldsymbol{x}$, равен произведению $\boldsymbol{x}$ на число -1: $(-\boldsymbol{x})=(-1)\boldsymbol{x}$.

◀ Благодаря единственности противоположного вектора (свойство 1.2) достаточно доказать, что вектор $(-1)\boldsymbol{x}$ удовлетворяет аксиоме г) линейного пространства. Для этого используем аксиому дистрибутивности ж) и только что доказанное свойство 1.5:

$$\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=\big(1+(-1)\big)\boldsymbol{x}=0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}. \qquad ▶$$

Замечание 1.1. Эквивалентность равенств $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ можно трактовать как правило, согласно которому слагаемое, которое переносят в другую часть равенства, меняет свой знак. Ясно также, что для $\alpha\in\mathbb{R}$ из равенства $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ следует равенство $\alpha\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{b}$ и наоборот (при $\alpha\neq 0$), так как

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{a})=\Big(\frac{1}{\alpha}\alpha\Big)\boldsymbol{a}=1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

и аналогично

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}.$$

Свойство 1.7. Произведение нулевого вектора на любое число есть нулевой вектор: $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

◀ Мы теперь знаем, что нулевой вектор можно представить как произведение произвольного вектора (того же $\mathbf{0}$) на число 0 (свойство 1.5). Используя это, получаем:

$$\lambda\mathbf{0}=\lambda(0\cdot\mathbf{0})=(\lambda\cdot 0)\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}. \qquad ▶$$

1.3. Линейная зависимость

Из данного набора *векторов* $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ *линейного пространства* $\mathcal{L}$ при помощи *линейных операций* можно составить выражение вида

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{x}_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольный набор действительных чисел. Такое выражение называют ***линейной комбинацией*** векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$, а действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — ***коэффициентами линейной комбинации***. Если все коэффициенты линейной комбинации равны нулю, то такую линейную комбинацию называют ***тривиальной***, а в противном случае — ***нетривиальной***.

Конкретный (неупорядоченный) набор векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ линейного пространства будем называть ***системой векторов***, а любую его часть — ***подсистемой***.

Определение 1.2. Систему векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называют ***линейно зависимой***, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная *нулевому вектору*. Если же линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору только лишь в случае, когда она тривиальна, систему векторов называют ***линейно независимой***. Опуская слово «система», часто говорят: векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ ***линейно зависимы*** или соответственно ***линейно независимы***.

Линейная зависимость системы векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ означает, что существуют такие коэффициенты α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in \mathbb{R}$, одновременно не равные нулю, для которых выполнено равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}. \tag{1.1}$$

Векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ линейно независимы, если из равенства

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$$

вытекает, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. В такой интерпретации понятия линейной зависимости и независимости мы будем использовать в различных доказательствах.

Следующее утверждение дает простой критерий линейной зависимости векторов.

Теорема 1.1. Для того чтобы система векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ $(k \geqslant 2)$ была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы являлся линейной комбинацией остальных.

◀ Необходимость. Пусть векторы $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ линейно зависимы. Согласно определению 1.2, это означает, что существуют коэффициенты α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in \mathbb{R}$, одновременно не равные нулю, для которых выполнено равенство (1.1). Не теряя общности, мы можем считать, что $\alpha_1 \neq 0$, так как этого всегда можно добиться изменением нумерации векторов в системе. Из равенства (1.1), используя обычные правила преобразования выражений (см. замечание 1.1), находим

$$\boldsymbol{x}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_k.$$

Следовательно, вектор $\boldsymbol{x}_1$ является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Достаточность. Теперь предположим, что один из векторов системы является линейной комбинацией остальных. Как и выше, можно, не теряя общности, считать, что таковым является вектор $\boldsymbol{x}_1$. Согласно этому предположению, существуют такие коэффициенты α_2, α_3, ..., α_k, что

$$\boldsymbol{x}_1 = \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k.$$

Преобразуя очевидным образом записанное выражение, получаем

$$1 \cdot \boldsymbol{x}_1 - \alpha_2\boldsymbol{x}_2 - \ldots - \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}.$$

В левой части этого равенства стоит линейная комбинация векторов системы. Она равна нулевому вектору, но не все ее коэффициенты равны нулю (например, коэффициент при векторе $\boldsymbol{x}_1$ равен единице). Согласно определению 1.2, это означает, что система векторов $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_k$ линейно зависима. ▶

Пример 1.3. В линейном пространстве $C[0, 2\pi]$ функций, непрерывных на отрезке $[0,\ 2\pi]$, рассмотрим функции 1, $\sin^2 x$, $\cos 2x$. Система из этих трех элементов линейного пространства линейно зависима, поскольку в силу известной формулы тригонометрии функция $\sin^2 x$ является линейной комбинацией двух других функций:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

1.4. Свойства систем векторов

Непосредственно из *аксиом линейного пространства* можно получить ряд простейших свойств *систем векторов* произвольного линейного пространства $\mathcal{L}$.

1°. Если среди векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathcal{L}$ есть *нулевой вектор*, то эта *система векторов линейно зависима.*

◄ Пусть, например, $\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$. Тогда *линейная комбинация* $1 \cdot \boldsymbol{x}_1 + 0 \cdot \boldsymbol{x}_2 + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k$ является *нетривиальной*, так как первый ее *коэффициент* равен единице. В то же время указанная линейная комбинация равна $\mathbf{0}$, потому что все ее слагаемые равны нулевому вектору. ►

2°. Если система векторов содержит линейно зависимую *подсистему*, то она линейно зависима.

◄ Подсистема состоит из части векторов исходной системы. Пусть, например, в системе векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ подсистема $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$, $m < k$, линейно зависима. Это значит, что можно указать коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, одновременно не равные нулю, для которых

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m = \mathbf{0}.$$

Введя дополнительные коэффициенты $\alpha_{m+1} = \ldots = \alpha_k = 0$, получим линейную комбинацию системы векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. С одной стороны, она не является тривиальной, так как среди первых ее m коэффициентов есть ненулевые, а с другой стороны,

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{x}_m + \alpha_{m+1}\boldsymbol{x}_{m+1} + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{x}_{m+1} + \ldots + 0 \cdot \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}.$$

Следовательно, исходная система векторов линейно зависима. ►

3°. Если *система векторов линейно независима*, то и любая ее подсистема тоже линейно независима.

◄ Это свойство является переформулировкой предыдущего. В самом деле, по свойству 2° система, имеющая линейно зависимую подсистему, не может быть сама линейно независимой. Поэтому у линейно независимой системы вообще не может быть линейно зависимых подсистем. ►

4°. Если векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ линейного пространства $\mathcal{L}$ линейно независимы и вектор $\boldsymbol{y} \in \mathcal{L}$ не является их линейной комбинацией, то расширенная система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{y}$ является линейно независимой.

◄ Действительно, пусть

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m\boldsymbol{e}_m + \beta\boldsymbol{y} = \mathbf{0}.$$

Тогда коэффициент β должен быть нулевым, так как в противном случае мы можем выразить вектор $\boldsymbol{y}$ через остальные. Но слагаемое $\beta\boldsymbol{y}$ в равенстве слева можно при $\beta = 0$ опустить, и мы получаем линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k$, равную нулевому вектору. В силу линейной независимости этих векторов все коэффициенты линейной комбинации равны нулю. Значит, исходная линейная комбинация является *тривиальной* и поэтому система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{y}$ линейно независима. ►

Пример 1.4. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ рассмотрим n векторов

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0), \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}_n &= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1). \end{aligned}$$

Докажем, что система из этих векторов линейно независима. Так как для любых коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n),$$

то ясно, что эта линейная комбинация векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ может быть равна нулевому вектору $\mathbf{0} = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$ только лишь при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Это и означает, что эта система векторов линейно независима.

Отметим, что если из векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, рассматривая их как строки одинаковой длины, составить матрицу

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то ее ранг будет максимальным ($\operatorname{Rg} E = n$), а ее строки будут линейно независимы (например, согласно теореме о базисном миноре). Таким образом, понятие линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ линейного арифметического пространства в данном случае согласуется с понятием линейной независимости строк единичной матрицы E.

Пример 1.5. Любые два коллинеарных вектора на плоскости (в V_2) и любые три компланарных вектора в пространстве (в V_3) линейно зависимы. И в том, и в другом случае один из векторов можно представить в виде линейной комбинации другого (других). По этой же причине в пространстве линейно зависима любая система из четырех векторов.

Пример 1.6. Пусть в произвольном линейном пространстве $\mathcal{L}$ даны два вектора $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$ и пусть $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{d}_1 - 2\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{d}_1 + 3\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d}_1 + 5\boldsymbol{d}_2$. Тогда система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима.

В самом деле, составим линейную комбинацию системы векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с произвольными коэффициентами x, y, z и приравняем ее нулевому вектору: $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$. В этой линейной комбинации заменим векторы их представлениями через $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$:

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = x(3\boldsymbol{d}_1 - 2\boldsymbol{d}_2) + y(2\boldsymbol{d}_1 + 3\boldsymbol{d}_2) + z(\boldsymbol{d}_1 + 5\boldsymbol{d}_2) = (3x + 2y + z)\boldsymbol{d}_1 + (-2x + 3y + 5z)\boldsymbol{d}_2.$$

Теперь достаточно приравнять нулю коэффициенты при $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$, чтобы получить нулевую линейную комбинацию. Значит, если коэффициенты x, y, z удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ -2x + 3y + 5z = 0, \end{cases}$$

то линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с коэффициентами x, y, z равна нулевому вектору. Как следует из теории систем линейных алгебраических уравнений, указанная система всегда имеет ненулевое решение, поскольку ранг ее матрицы равен двум и меньше трех — количества неизвестных. Например, ненулевым решением является $x = 7$, $y = -17$, $z = 13$. Значит, существуют такие x, y, z, одновременно не равные нулю, что линейная комбинация векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ с этими коэффициентами равна нулевому вектору, т.е. система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависима.

1.5. Базис линейного пространства

В *линейном пространстве* наибольший интерес представляют *системы векторов*, в виде *линейной комбинации* которых можно представить любой вектор, причем единственным образом. Если зафиксировать такую систему векторов, то любой вектор можно будет однозначно представить набором чисел, являющихся *коэффициентами* соответствующей *линейной комбинации*, а всевозможные векторные соотношения превратить в соотношения числовые.

Этот подход применялся уже в аналитической геометрии. В пространстве V_2 векторов на плоскости любые два неколлинеарных вектора образуют базис, так как через такую пару векторов любой вектор плоскости выражается однозначно в виде линейной комбинации. Аналогично в V_3 (множестве векторов в пространстве) базис образуют любые три некомпланарных вектора. Для матриц использовалось понятие базисных строк и базисных столбцов. По теореме о базисном миноре базисные строки (столбцы) линейно независимы, а любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Определение 1.3. ***Базисом линейного пространства*** $\mathcal{L}$ называют любую упорядоченную систему векторов, для которой выполнены два условия:

1) эта *система векторов линейно независима*;

2) каждый вектор в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Пусть $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ — базис в $\mathcal{L}$. Определение 1.3 говорит о том, что любой вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ может быть записан следующим образом:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n.$$

Такую запись называют ***разложением вектора*** $\boldsymbol{x}$ ***по базису*** (или в базисе) $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$.

Данное нами определение базиса согласовывается с понятием базиса в пространстве *свободных векторов* в V_1, V_2 или V_3. Например, в V_3 базисом была названа любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Такая тройка векторов является линейно независимой, так как представление одного ее вектора в виде линейной комбинации двух других равносильно компланарности трех векторов. Но, кроме того, из курса векторной алгебры мы знаем, что любой вектор в пространстве можно выразить через произвольные три некомпланараных вектора в виде их линейной комбинации. Три компланарных вектора не могут быть базисом в V_3, так как такие векторы линейно зависимы.

Теорема 1.2 (о единственности разложения). В линейном пространстве разложение любого вектора по данному базису единственно.

◀ Выберем в линейном пространстве $\mathcal{L}$ произвольный базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ и предположим, что вектор $\boldsymbol{x}$ имеет в этом базисе два разложения

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n, \quad \boldsymbol{x} = x'_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x'_n\boldsymbol{b}_n.$$

Воспользуемся тем, что *аксиомы линейного пространства* позволяют преобразовывать линейные комбинации так же, как и обычные алгебраические выражения. Вычитая из первого равенства второе почленно, получим

$$(x_1 - x'_1)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (x_n - x'_n)\boldsymbol{b}_n = \mathbf{0}.$$

Так как базис — это линейно независимая система векторов, ее линейная комбинация равна $\mathbf{0}$, лишь если она *тривиальная* (см. определение 1.2). Значит, все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю: $x_1 - x'_1 = 0, \ldots, x_n - x'_n = 0$. Таким образом, $x_1 = x'_1, \ldots, x_n = x'_n$ и два разложения вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ совпадают. ▶

Замечание 1.2. Условие линейной независимости векторов базиса означает, что *нулевой вектор* имеет в этом базисе единственное разложение, а именно тривиальное: все коэффициенты этого разложения равны нулю. Из доказательства теоремы 1.2 следует, что из единственности разложения нулевого вектора по данной системе векторов вытекает единственность разложения любого другого вектора. #

Согласно определению 1.3, базис является упорядоченной системой векторов. Это значит, что, изменив порядок векторов в системе, мы получим другой базис. Порядок векторов в базисе фиксируют для того, чтобы задать определенный порядок коэффициентов разложения произвольного вектора. Это позволяет заменить линейную комбинацию, представляющую вектор, упорядоченным набором ее коэффициентов и тем самым упростить запись. Порядок векторов в базисе определяется их нумерацией.

Определение 1.4. Коэффициенты разложения вектора по базису линейного пространства, записанные в соответствии с порядком векторов в базисе, называют ***координатами вектора в*** этом ***базисе***.

Пример 1.7. В линейном пространстве $K_2[x]$ многочленов переменного x степени не выше 2 (см. пример 1.1) элементы x и x^2 линейно независимы: их линейная комбинация $\alpha x + \beta x^2$ есть многочлен, который равен нулю (нулевому многочлену) лишь при $\alpha = \beta = 0$. В то же время пара этих элементов не образует базиса. Действительно, многочлен 1 нулевой степени, являющийся элементом $K_2[x]$, нельзя представить в виде линейной комбинации многочленов x и x^2. Дело в том, что линейная комбинация $\alpha x + \beta x^2$ многочленов x и x^2 есть либо многочлен второй степени (при $\beta \neq 0$), либо многочлен первой степени ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$), либо нулевой многочлен ($\alpha = \beta = 0$). Значит, равенство $1 = \alpha x + \beta x^2$ двух многочленов невозможно ни при каких значениях коэффициентов.

В то же время три многочлена 1, x, x^2 образуют базис линейного пространства $K_2[x]$. Докажем это.

Во-первых, система многочленов 1, x, x^2 линейно независима. Составим их линейную комбинацию с произвольными коэффициентами α, β, γ и приравняем нулю: $\alpha \cdot 1 + \beta x + \gamma x^2 = 0$. Это равенство есть равенство двух многочленов, и оно возможно только в случае, когда коэффициенты этих двух многочленов совпадают. Значит, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Во-вторых, через многочлены 1, x, x^2 можно выразить любой многочлен второй степени, т.е. любой элемент линейного пространства $K_2[x]$ можно представить в виде линейной комбинации указанных трех элементов. Возьмем произвольный многочлен

$$p(x) = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^2.$$

Его запись можно рассматривать как линейную комбинацию многочленов 1, x, x^2:

$$p(x) = \alpha \cdot 1 + \beta x^2 + \gamma x^2,$$

причем коэффициенты многочлена в то же время являются коэффициентами линейной комбинации.

Итак, система трех многочленов 1, x, x^2 линейно независима, а любой элемент линейного пространства $K_2[x]$ является линейной комбинацией указанной системы. Согласно определению 1.3, система многочленов 1, x, x^2 есть базис в $K_2[x]$.

1.6. Линейные операции в координатной форме

Фиксация порядка *векторов* в *базисе* преследует еще одну цель — ввести матричные способы записи векторных соотношений. Базис $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ в данном *линейном пространстве* $\mathcal{L}$ удобно записывать как матрицу-строку

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1 \ \ \boldsymbol{b}_2 \ \ \ldots \ \ \boldsymbol{b}_n),$$

а *координаты вектора* $\boldsymbol{x}$ в этом базисе — как матрицу-столбец:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (1.2)$$

Тогда *разложение* $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n$ *вектора* $\boldsymbol{x}$ *по базису* $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ можно записать как произведение матрицы-строки на матрицу-столбец:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}x. \tag{1.3}$$

Пример 1.8. Векторы ортонормированного базиса в V_3 имеют стандартное обозначение и порядок: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. В матричной записи это будет выглядеть так: $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})$. Вектор, например, с координатами -1, 2, 2 может быть представлен в виде*

$$\boldsymbol{x} = \{-1; 2; 2\} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} = (\boldsymbol{i}\ \ \boldsymbol{j}\ \ \boldsymbol{k})\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}x,$$

где $x = (-1\ \ 2\ \ 2)^{\mathrm{T}}$ — столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$. #

Запись линейных операций над свободными векторами в координатной форме обобщается на случай произвольного линейного пространства.

Теорема 1.3. При *сложении* любых двух векторов в линейном пространстве их координаты в одном и том же базисе складываются, а при *умножении вектора на число* его координаты умножаются на это число.

◀ Рассмотрим в линейном пространстве $\mathcal{L}$ базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n)$. Пусть даны разложения векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в этом базисе:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{b}_n.$$

В силу *аксиом линейного пространства*

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) + (y_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{b}_n) = (x_1 + y_1)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (x_n + y_n)\boldsymbol{b}_n.$$

Таким образом, при сложении двух векторов их координаты, отвечающие одному базисному вектору, складываются. В матричной записи координат этому соответствует матричная сумма столбцов координат.

Аналогично для произвольного действительного числа λ

$$\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(x_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{b}_n) = (\lambda x_1)\boldsymbol{b}_1 + \ldots + (\lambda x_n)\boldsymbol{b}_n,$$

т.е. при умножении вектора на число каждая из его координат умножается на это число. ▶

Запись координат векторов в матричной форме снимает вопрос о том, что понимать, например, под сложением координат: координаты складываются как матрицы-столбцы. Аналогично столбец координат умножается на число по правилам умножения матрицы на число. Запись утверждения теоремы 1.3 в матричной форме

$$\boldsymbol{b}x + \boldsymbol{b}y = \boldsymbol{b}(x + y), \qquad \lambda\boldsymbol{b}x = \boldsymbol{b}(\lambda x)$$

соответствует свойствам матричных операций: дистрибутивности сложения относительно умножения и ассоциативности умножения.

Следствие 1.1. Линейная независимость (зависимость) векторов линейного пространства эквивалентна линейной независимости (зависимости) их столбцов координат в одном и том же базисе этого линейного пространства.

---

*Напомним, что в векторной алгебре мы записывали координаты вектора в строку, ограничивая ее фигурными скобками. Для упрощения выкладок мы отождествляли вектор с набором его координат, хотя, вообще говоря, эти объекты имеют различную природу. В линейной алгебре принято координаты записывать не в строку, а в столбец.

◄ Если вектор $\boldsymbol{a}$ равен *линейной комбинации* векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, т.е.

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k,$$

то его столбец координат a в заданном базисе $\boldsymbol{b}$ равен такой же линейной комбинации столбцов координат $a_1, \ldots, a_k$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ в этом же базисе:

$$a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k.$$

Это следует из равенств

$$\boldsymbol{b}a = \boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \alpha_1(\boldsymbol{b}a_1) + \ldots + \alpha_k(\boldsymbol{b}a_k) = \boldsymbol{b}(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k).$$

Из совпадения коэффициентов двух линейных комбинаций вытекает, что линейная зависимость (независимость) векторов эквивалентна линейной зависимости (независимости) их столбцов координат. ►

Пример 1.9. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0), \quad \boldsymbol{e}_2 = (0,\ 1,\ \ldots,\ 0), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = (0,\ 0,\ \ldots,\ 1) \tag{1.4}$$

образуют базис $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{e}_n)$, так как они линейно независимы (см. пример 1.4) и любой вектор $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ представи́м в виде $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$. #

Базис (1.4) в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют ***стандартным***.

Замечание 1.3. В линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ для произвольного вектора $\boldsymbol{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$ его столбец координат x в стандартном базисе совпадает с $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$. Как и в аналитической геометрии, удобно при фиксированном базисе отождествлять вектор с его координатами. Для стандартного базиса это равносильно записи вектора не как матрицы-строки, а как матрицы-столбца. Отметим, что запись элементов арифметического пространства в виде столбца не противоречит определению арифметического пространства, понимаемого как множество упорядоченных совокупностей чисел. Порядок же элементов можно указывать как при помощи записи в строку, так и при помощи записи в столбец.

Пример 1.10. Покажем, что в $\mathbb{R}^3$ система векторов

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,\ -1,\ 2), \quad \boldsymbol{a}_2 = (2,\ 1,\ 0), \quad \boldsymbol{a}_3 = (4,\ -1,\ 1)$$

образует базис и найдем в этом базисе координаты вектора $\boldsymbol{c} = (2,\ 1,\ 3)$.

Для того чтобы доказать, что система векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ образует базис, надо убедиться в линейной независимости этих векторов и в том, что любой вектор $\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3) \in \mathbb{R}^3$ является их линейной комбинацией.

В стандартном базисе $\boldsymbol{e}$ в $\mathbb{R}^3$ векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ имеют следующие столбцы координат:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Из столбцов координат векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим квадратную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax = b$, где $x = (x_1\ x_2\ x_3)^{\mathrm{T}}$. Так как $\det A = -9$, то матрица A невырожденная, ее ранг равен 3 и все ее столбцы являются базисными. Поэтому, во-первых, согласно теореме о базисном миноре, эти столбцы линейно независимы, что, согласно следствию 1.1, означает линейную независимость векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, а во-вторых, СЛАУ $Ax = b$ при любом столбце b правых частей имеет решение $x = (x_1' \; x_2' \; x_3')^{\mathrm{T}}$, что после записи этой СЛАУ в векторной форме

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

позволяет сделать вывод о выполнении равенства

$$x_1'\boldsymbol{a}_1 + x_2'\boldsymbol{a}_2 + x_3'\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{b}.$$

В частности, решив СЛАУ $Ax = c$, которая в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 = 3, \end{cases}$$

находим координаты вектора $\boldsymbol{c}$ в базисе $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

1.7. Размерность линейного пространства

Эта важнейшая характеристика *линейного пространства* связана со свойствами систем векторов в этом пространстве.

Определение 1.5. Максимальное количество *линейно независимых векторов* в данном линейном пространстве называют ***размерностью линейного пространства***.

Если размерность линейного пространства $\mathcal{L}$ равна n, т.е. существует линейно независимая система из n векторов, а любая *система векторов*, содержащая $n+1$ вектор или более, *линейно зависима*, то говорят, что это линейное пространство ***n-мерно***. Размерность такого линейного пространства обозначают $n = \dim \mathcal{L}$.

Существуют линейные пространства, в которых можно выбрать линейно независимую систему, содержащую сколь угодно большое количество векторов. Такие линейные пространства называют ***бесконечномерными***. В отличие от них, n-мерные линейные пространства называют ***конечномерными***. В этом курсе рассматриваются конечномерные линейные пространства.

Пример 1.11. Линейное пространство $C[0, 1]$ функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ (см. **1.1**), является бесконечномерным, так как для любого натурального n система многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^n$, являющихся элементами этого линейного пространства, линейно независима. В самом деле, *линейная комбинация* этих многочленов, отвечающая набору коэффициентов α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, есть многочлен

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n,$$

который является нулевым (т.е. равен постоянной функции 0), только если все его коэффициенты (они же *коэффициенты линейной комбинации*) равны нулю. #

Оказывается, что размерность линейного пространства тесно связана с количеством векторов, которое может иметь *базис* линейного пространства.

Теорема 1.4. Если линейное пространство $\mathcal{L}$ n-мерно, то любая упорядоченная линейно независимая система из n векторов является его базисом.

Теорема 1.5. Если в линейном пространстве $\mathcal{L}$ существует базис из n векторов, то $\dim \mathcal{L} = n$. #

Из теорем 1.4 и 1.5 следует, что в каждом линейном пространстве любые два базиса содержат одно и то же количество векторов, и это количество равно размерности линейного пространства.

Пример 1.12. В *линейном арифметическом пространстве* $\mathbb{R}^n$ *стандартный базис* (1.4) состоит из n векторов, поэтому $\dim \mathbb{R}^n = n$, что и отражено в обозначении этого линейного пространства.

Пример 1.13. Рассмотрим однородную СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$$

множество решений которой образует линейное пространство. Найдем размерность этого линейного пространства и какой-либо базис в нем.

Решим эту систему, определив ее *фундаментальную систему решений*. Для этого запишем матрицу системы и при помощи *элементарных преобразований строк* приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из полученного вида находим, что ранг матрицы системы равен 2, в качестве свободных неизвестных можно взять x_3 и x_4, а в качестве базисных неизвестных — x_1 и x_2. Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - \ \ x_4 = 0, \\ \qquad\ \ x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, находим $x_2 = -1$, $x_1 = -4$, а при $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ имеем $x_2 = -3$, $x_1 = -5$. Записав найденные решения в виде столбцов, получим фундаментальную систему решений:

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теории систем линейных алгебраических уравнений, эти два решения линейно независимы, а любое другое решение СЛАУ представляется в виде линейной комбинации $\boldsymbol{x}^{(1)}$ и $\boldsymbol{x}^{(2)}$. Другими словами, столбцы $\boldsymbol{x}^{(1)}$ и $\boldsymbol{x}^{(2)}$ образуют базис в линейном пространстве решений рассматриваемой однородной СЛАУ. Размерность этого линейного пространства равна двум — количеству векторов в базисе.

1.8. Преобразование координат вектора при замене базиса

В *линейном пространстве* все *базисы* равноправны. Тот или иной базис выбирают исходя из конкретных обстоятельств, а может быть, и вообще произвольно. Иногда удобно использовать для представления элементов линейного пространства несколько базисов, но тогда естественным образом возникает задача преобразования *координат векторов*, которое связано с изменением базиса.

Пусть в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ заданы два базиса: старый $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{b}_n)$ и новый $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1,\ \boldsymbol{c}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{c}_n)$. Любой вектор можно разложить по базису $\boldsymbol{b}$. В частности, каждый вектор из базиса $\boldsymbol{c}$ может быть представлен в виде *линейной комбинации* векторов базиса $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c}_i = \alpha_{1i}\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \alpha_{ni}\boldsymbol{b}_n, \qquad i = \overline{1,\, n}.$$

Запишем эти представления в матричной форме:

$$\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots \\ \alpha_{ni}\end{pmatrix}, \qquad i = \overline{1,\,n},$$

или

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U,$$

где

$$U = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Определение 1.6. Матрицу (1.5) называют ***матрицей перехода*** от старого базиса $\boldsymbol{b}$ к новому базису $\boldsymbol{c}$.

Согласно данному определению, i-й столбец матрицы перехода есть столбец координат i-го вектора нового базиса в старом. Поэтому говорят, что матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам.

Обсудим некоторые свойства матрицы перехода.

1°. Матрица перехода невырождена и всегда имеет обратную.

◀ Действительно, столбцы матрицы перехода — это столбцы координат векторов нового базиса в старом. Следовательно, они, как и векторы базиса, *линейно независимы*. Значит, матрица U невырожденная и имеет обратную матрицу U^{-1}. ▶

2°. Если в n-мерном линейном пространстве задан базис $\boldsymbol{b}$, то для любой невырожденной квадратной матрицы U порядка n существует такой базис $\boldsymbol{c}$ в этом линейном пространстве, что U будет матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{c}$.

◀ Из невырожденности матрицы U следует, что ее ранг равен n, и поэтому ее столбцы, будучи базисными, линейно независимы. Эти столбцы являются столбцами координат векторов системы $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$. Линейная независимость столбцов матрицы U равносильна линейной независимости системы векторов $\boldsymbol{c}$. Так как система $\boldsymbol{c}$ содержит n векторов, причем линейное пространство n-мерно, то, согласно теореме 1.4, эта система является базисом. ▶

Пример 1.14. Пусть $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1,\, \boldsymbol{b}_2,\, \boldsymbol{b}_3)$ — базис линейного пространства. Тогда система векторов $\boldsymbol{c}_1 = 2\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_2 = -\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{b}_3$ тоже является базисом в этом линейном пространстве. Это следует из того, что

$$(\boldsymbol{c}_1\ \ \boldsymbol{c}_2\ \ \boldsymbol{c}_3) = (\boldsymbol{b}_1\ \ \boldsymbol{b}_2\ \ \boldsymbol{b}_3)\,U,$$

где диагональная матрица $U = \operatorname{diag}(2,\ -1,\ 1)$ невырождена.

3°. Если U — матрица перехода от старого базиса $\boldsymbol{b}$ к новому базису $\boldsymbol{c}$ линейного пространства, то U^{-1} — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{c}$ к базису $\boldsymbol{b}$.

◀ Матрица U невырождена, и поэтому из равенства $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$ следует, что $\boldsymbol{c}U^{-1} = \boldsymbol{b}$. Последнее равенство означает, что столбцы матрицы U^{-1} являются столбцами координат векторов базиса $\boldsymbol{b}$ относительно базиса $\boldsymbol{c}$, т.е., согласно определению 1.6, U^{-1} — это матрица перехода от базиса $\boldsymbol{c}$ к базису $\boldsymbol{b}$. ▶

4°. Если в линейном пространстве заданы базисы $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, причем U — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{c}$, а V — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{c}$ к базису $\boldsymbol{d}$, то произведение этих матриц UV — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{d}$.

◀ Согласно определению 1.6 матрицы перехода, имеем равенства

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U, \quad \boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}V,$$

откуда

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{c}V = (\boldsymbol{b}U)V = \boldsymbol{b}(UV),$$

т.е. UV — матрица перехода от базиса $\boldsymbol{b}$ к базису $\boldsymbol{d}$. ▶

Рассмотрим теперь, как преобразуются координаты произвольного вектора в линейном пространстве при переходе от старого базиса к новому. Выберем произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathcal{L}$ и разложим его в старом базисе:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}x, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Разложение того же вектора в новом базисе имеет вид

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}x', \qquad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Найдем связь между старыми координатами x вектора $\boldsymbol{x}$ и новыми его координатами x'. Из соотношений (1.6), (1.7) следует, что $\boldsymbol{b}x = \boldsymbol{c}x'$. Учитывая, что $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}U$, получаем $\boldsymbol{b}x = (\boldsymbol{b}U)x'$, или $\boldsymbol{b}x = \boldsymbol{b}(Ux')$. Последнее равенство можно рассматривать как запись двух разложений одного и того же вектора $\boldsymbol{x}$ в данном базисе $\boldsymbol{b}$. Разложениям соответствуют столбцы координат x и Ux', которые, согласно теореме 1.2 о единственности разложения вектора по базису, должны быть равны:

$$x = Ux', \qquad \text{или} \qquad x' = U^{-1}x.$$

Итак, чтобы получить координаты вектора в старом базисе, необходимо столбец координат этого вектора в новом базисе умножить слева на матрицу перехода из старого базиса в новый. Матрица перехода из старого базиса в новый позволяет пересчитывать новые координаты в старые.

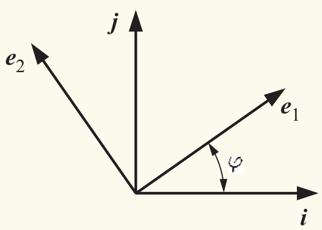

Рис. 1.2

Пример 1.15. Рассмотрим в V_2 ортонормированный базис $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j})$ из векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$. Обозначим через $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2)$ новый базис, который получается поворотом старого базиса $\boldsymbol{b}$ на заданный угол φ. Исходя из заданного угла поворота мы можем найти координаты векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ нового базиса относительно старого (рис. 1.2):

$$e_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Эти разложения позволяют составить матрицу перехода U из старого базиса $\boldsymbol{b}$ в новый $\boldsymbol{e}$, а также обратную матрицу:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Найденные матрицы перехода U (из старого базиса в новый) и U^{-1} (из нового базиса в старый) позволяют записать соотношения между старыми x_1, x_2 и новыми x'_1, x'_2 координатами произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ из V_2:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, & \qquad x_1 &= x'_1\cos\varphi - x'_2\sin\varphi, \\ x'_2 &= -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi, & \qquad x_2 &= x'_1\sin\varphi + x'_2\cos\varphi. \end{aligned}$$

Например, вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ в старом базисе имеет координаты $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, а в новом базисе его координатами являются $x'_1 = \cos\varphi + \sin\varphi$, $x'_2 = -\sin\varphi + \cos\varphi$.

Пример 1.16. Пусть в линейном пространстве V_3 заданы два правых ортонормированных базиса: старый $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$ и новый $(\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}')$. Тогда старый базис можно преобразовать в новый при помощи трех поворотов вокруг координатных осей прямоугольной системы координат, определяемой ортонормированным базисом.

Рассмотрим единичный вектор $\boldsymbol{s}$, который одновременно лежит в плоскостях пар векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$. Повернем базис $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$ вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}$ на некоторый угол ψ так, что вектор $\boldsymbol{i}$ совпадет с вектором $\boldsymbol{s}$. Отметим, что вектор $\boldsymbol{s}$ ортогонален и вектору $\boldsymbol{k}$, и вектору $\boldsymbol{k}'$, так как является линейной комбинацией и пары $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, и пары $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$. Значит, поворотом вокруг оси вектора $\boldsymbol{s}$ на некоторый угол ϑ можно добиться совмещения вектора $\boldsymbol{k}$ с вектором $\boldsymbol{k}'$. Наконец, поворотом вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}'$ на некоторый угол φ совместим вектор $\boldsymbol{s}$ с вектором $\boldsymbol{i}'$ (рис. 1.3).

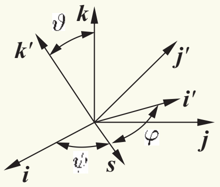

Рис. 1.3

Матрица перехода, соответствующая первому повороту вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}$, имеет вид

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода A_2, соответствующая повороту уже нового базиса вокруг оси вектора $\boldsymbol{s}$ на угол ϑ, похожа на предыдущую:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Наконец, матрица перехода, соответствующая третьему повороту вокруг оси вектора $\boldsymbol{k}'$ имеет вид

$$U_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству 4°, матрица перехода U из старого базиса $(\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$ в новый $(\boldsymbol{i}',\ \boldsymbol{j}',\ \boldsymbol{k}')$ равна $U = U_1U_2U_3$ и может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ