ЗАДАНИЕ
на лабораторную работу №4

Тема: Программно- алгоритмическая реализация методов решения нелинейных уравнений, в том числе больших систем уравнений разностных схем, аппроксимирующих дифференциальные уравнения при построении вычислительных моделей.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения нелинейных уравнений и систем таких уравнений, в том числе больших систем специального вида с трехдиагональной матрицей.

Постановки задач.

1. Найти решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ 2x^2 + y^2 - 4z = 0, \\ 3x^2 - 4y + z^2 = 0 \end{cases}$$

2. При заданном значении функции Лапласа $\Phi(x)$ найти ее аргумент x

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2)\,dt .$$

Замечание. В данной задаче удобно применить метод половинного деления. Интеграл вычислять численно, например, методом трапеций, средних или Симпсона.

3. Решить численно краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\begin{cases} y'' - y^3 = x^2, \\ \quad 0 \le x \le 1, \\ x = 0, y = 1, \\ x = 1, \ y = 3. \end{cases}$$

Замечание 1. Порядок решения.

Вводим разностную сетку, как множество равноотстоящих точек на оси x (узлов)

$$\omega_h = \{x_n : x_n = nh, n = 0,1,...N, h = 1/N\}$$

Аппроксимируя вторую производную разностным аналогом, получаем разностную схему

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} - y_n^3 = x_n^2, \; n = 1,2...N-1, \\ y_0 = 1, \\ y_N = 3 \end{cases} \qquad (1)$$

Замечание 2. Систему нелинейных уравнений (1) линеаризуем методом Ньютона и решаем методом прогонки . В качестве начального приближения $y_n^{(0)}, \; n = 0,1, N$ целесообразно принять функцию, удовлетворяющую краевым условиям.

Результаты работы.

1. Алгоритмы и реализующие их программы.
2. По п.1 и 2 найденные решения уравнений.
3. По п.3 график зависимости $y(x)$

Вопросы при защите лабораторной работы

1. Можно ли в методе Ньютона для решения системы нелинейных уравнений построить вычислительный процесс так, чтобы не пересчитывать матрицу Якоби на каждой итерации? Какова будет цена такой модификации алгоритма?
Продемонстрировать рассуждения на примере решения одного уравнения $f(x) = 0$.
2. Аппроксимируя производную конечно-разностным аналогом, построить на основе метода Ньютона метод секущих для решения уравнения $f(x) = 0$.
3. Учитывая, что метод Ньютона является одношаговым, метод секущих – двухшаговым, построить трехшаговый метод парабол для решения уравнения $f(x) = 0$. Какие новые возможности открывает метод парабол при решении рассматриваемой задачи.
4. Разработать алгоритм нахождения корней функции, заданной таблично, применяя метод Ньютона (секущих, парабол).

5. Разработать алгоритм нахождения решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона

$$f_1(x,y)=0,$$
$$f_2(x,y)=0,$$

если функции $f_1(x,y),\ f_2(x,y)$ заданы таблично.

6. Составить разностную схему для уравнения из п.3 с краевыми условиями общего вида

$$\begin{cases} y'' - y^3 = x^2, \\ \quad 0 \le x \le 1, \\ x=0,\ y' = \alpha\, y, \\ x=1,\ y' = \beta\, y - \gamma. \end{cases}$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ - заданные числа.

Линеаризовать систему уравнений и разработать алгоритм метода прогонки для её решения.

Замечание.

При построении разностной схемы аппроксимацию краевых условий выполнить с помощью простейших односторонних разностных производных, т.е.

$$x=0,\ \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha\, y_0,$$

$$x=1,\ \frac{y_N - y_{N-1}}{h} = \beta\, y_N - \gamma$$

Методика оценки работы.

Модуль 2, срок - 11-я неделя..

1. Задание полностью выполнено, все графики приведены - 11 баллов (минимум).

2. В дополнение к п.1 даны исчерпывающие ответы на вопросы – до 17 баллов (максимум).