

Занятие 5

-1-

Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Диагонализация симметрических матриц ортогонального преобразования.

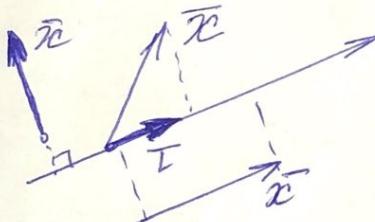
Def. 1. пусть L -лин. пр-во и $A: L \rightarrow L$ - линейный оператор в L .

Ненулевой ($x \neq 0$) вектор $x \in L$ называется собственным вектором линейного оператора $A: L \rightarrow L$, если $Ax = \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Число λ называется собственным числом оператора.

(n1) Найти собств. числа и собств. векторы операторов впр-ве V^3 :

a) (№ 130) $A\bar{x} = (\bar{x}, \bar{z})\bar{t}$ - оператор проектирования на ось Ox



Из геометрических соображений видно, что любой вектор, кроме вектору t будет собственным с $\lambda=1$, т.к. в этом случае он "переходит" в себя при отображении.

\Rightarrow ∀ вектор $\bar{x} = x\bar{t} + \bar{x}$ яв. собственное с $\lambda=1$.
 $(\bar{x} \neq 0)$

Если же вектор $\bar{x} \perp t$, то он также будет собственным с $\lambda=0$, т.к. в этом случае он проецируется в точку.

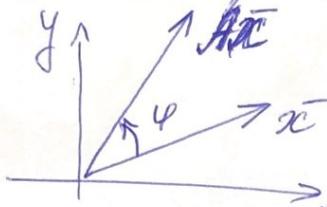
\Rightarrow ∀ вектор $\bar{x} = y\bar{t} + z\bar{k}$ яв. собств. с $\lambda=0$.
 $(\bar{x} \neq 0)$

Отвр: 1) $\bar{x} = x\bar{t}$ - соб. с $\lambda=1$ ($\bar{x} \neq 0$)

2) $\bar{x} = y\bar{t} + z\bar{k}$ - соб. с $\lambda=0$ ($\bar{x} \neq 0$)

δ) (N4.132) A_φ - оператор поворота на угол φ
на полоскости V пл. ($A_\varphi: U^2 \rightarrow V^2$)

Из геометр. соображений:



- 1) при $\varphi = 2\pi k$ любой ненулевой вектор "переходит" сам в себя и будет собственным с $\lambda = 1$.
- 2) при $\varphi = (2k+1)\pi$ любой ненулевой вектор x-bar "переходит" в $Ax-bar = -x-bar$
 \Rightarrow он будет собств. с $\lambda = -1$
- 3) при $\varphi \neq \pi k$ оператор не имеет собств. векторов.

Однако:
 1) $\varphi = 2\pi k \Rightarrow Ax-bar \neq 0$ - собств. с $\lambda = 1$
 2) $\varphi = (2k+1)\pi \Rightarrow Ax-bar \neq 0$ - собств. с $\lambda = -1$
 3) $\varphi \neq \pi k \Rightarrow$ нет собств. векторов.

Если оператор $A: L \rightarrow L$ задан матрицей в некоторой базисе $\{e_i\}$, а $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор лин. нр. вида, заданный своими коорд. В том базисе $\{e_i\}$, то равенство $Ax = \lambda x$ можно переписать в виде: $Ax = \lambda Ex$, где E - ед. матрица $(n \times n)$.

Тогда
$$(A - \lambda E)x = 0 \quad (1)$$
 | матрица запись СЛАУ (однородной) для нахождения x .

Поскольку нас интересуют только $x \neq 0$, то необходимо и достаточное условие существование таких решений является условие вырожденности матрицы $(A - \lambda E)$, т. е.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad (2)$$
 | характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел λ .

таким образом, получаем следующий алгоритм находить собственные числа и собственных векторов:

- 1) Выбрать базис $\{e_1, e_2\}$ и найти матрицу оператора A в этом базисе.
- 2) Составить характеристическое уравнение $(A - \lambda E)^{-1} = 0$ для каждого собственного вектора. Эти числа являются собственными числами оператора A .
- 3) Для каждого собственного числа λ найти ФПР для однородной СЛАУ (1). Столбцы ФПР представляют собой коэф. собств. векторов.

№2 Найти собственное число и собственный вектор линейного оператора $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) Составить характеристическое уравнение (2):

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -4 \\ 2 & -5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3; & -\text{это собственное число} \\ \lambda_2 = 2; & \text{оператора } A. \end{cases}$$

2) Найти собственный вектор, решая систему (1):

a) $\lambda_1 = -3$:

$$(A + 3E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0.$$

ФПР этого вектора: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\lambda_2 = 2$

$$(A - 2E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x_1 - 4x_2 = 0$$

ФПР этого вектора: $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Общий: $\begin{cases} \lambda_1 = -3 \Rightarrow a_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow a_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$

соб. вектор с $\lambda_1 = -3$

соб. вектор с $\lambda_2 = 2$

(N3) Найти собств. числа и собств. векторов
линей. оператора $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданного
матрицей: $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ -4-

1) Найти эп-ые (λ) ищем λ-и:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1; \lambda_3 = 4}_{\text{сост. числа}}$$

2) Найдем собств. векторы:

$$\lambda_1 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 - \frac{1}{2}x_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = 2c_1 \\ x_3 = 2c_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2c_2 \\ x_2 = c_2 \\ x_3 = -2c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_2 = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 4$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2c_3 \\ x_2 = -2c_3 \\ x_3 = c_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Доказательство: } \alpha_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \alpha_2 = C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}; \alpha_3 = C_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Свойства собственных векторов.

наиболее общее доказательство см. теорема:

1. Собств. векторы лин. оператора, отвечающие различным собств. числам, образуют лин. независим. подпространство.
2. Если лин. оператор имеет ровно n лин. независимых собств. векторов, то в базисе из этих векторов матрица лин. оператора имеет диагональный вид. (Обратное также верно)

Проверим эти свойства в задачах №2 и №3.

В №2: Векторы в базисе $\bar{\alpha}_1^o = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\bar{\alpha}_2^o = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Они лин. независимы \Rightarrow могут образовать базис.

$$\begin{cases} A\bar{\alpha}_1 = -3\bar{\alpha}_1^o + 0 \cdot \bar{\alpha}_2^o \\ A\bar{\alpha}_2 = 0 \cdot \bar{\alpha}_1^o + 2\bar{\alpha}_2^o \end{cases}, \text{ т.к. } \bar{\alpha}_1^o \text{ и } \bar{\alpha}_2^o - \text{ собств. в-р} \text{ с } \lambda_1 = -3 \text{ и } \lambda_2 = 2 \text{ соответственно}$$

В базисе $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ матрица лин. опер. имеет вид:

$$A'_{\alpha_1 \alpha_2} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{столбцы матрицы} - \text{коэффициенты в л.ч. векторов})$$

В №3 Векторы $\alpha_1^o = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\alpha_2^o = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ и $\alpha_3^o = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

л.н. не только линейные, но и ортогональные (проверьте!)

$$\Rightarrow \begin{cases} A\alpha_1 = -2\alpha_1 \\ A\alpha_2 = 1 \cdot \alpha_2 \\ A\alpha_3 = 4\alpha_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, что в решении выше не является диагональной строка собств. чисел оператора.

Самосопряженное операторы

Def 2 Лиц. оператор $A: E \rightarrow E$ (E -евак.пр-во)
нас. самосопр., если $(Ax, y) = (x, Ay)$

Th 1 В ортонорм. базисе матрица самосопр.
оператора симметрическ. (обратное также верно)

Th 2 Все корни самосопр. оператора - действ. числа.

Th 3 Собст. векторы самосопр. лиц. оператора,
отвечающие различным собст. значениям,
ортогональны.

Th 4 Если A -самосопр. оператор, то существует
ортонорм. базис из собст. векторов,
в котором матрица линейного оператора
имеет диагональный вид.

След. пример (№3): в этом задаче ортонорм. базис из собст. векторов имеет вид:

$$\left\{ e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad e_2' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}; \quad e_3' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{В этом базисе: } A'_{e_1'e_1'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица перехода от одного ортонорм. базиса к
другому ортонорм. базису является ортогональной,
т.е. $V^{-1} = V^T$, где V -матр. перехода.

$$\Rightarrow A'_{e_1'e_1'} = T^{-1} \cdot A_{e_1e_1} \cdot T_{e_1e_1'} = [T = V] = V^T \cdot A \cdot V_{e_1e_1'}$$

diag. матр.

№4 (№4.131) Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ найти

орт. матрицу A' и ортогон. матрицу V ,
такую, чтобы $A' = V^T A V$.

Решение.

1) Нахождение корней ур-я (1):

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = 0$$

$$-(\lambda-1)^2(\lambda-10) = 0$$

$$\text{Имеем } \lambda_1 = \lambda_2 = 1 ; \lambda_3 = 10.$$

2) Нахождение собственных векторов.

$$\text{а)} \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}$$

У системы (1) имеем $(A - E)x = 0 : (\lambda = 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$

Ранг матрицы $(A - \lambda E)$ (при $\lambda = 1$) равен 1 \Rightarrow
 \Rightarrow ФСР единор. СЛАУ состоит из $n-r=3-1=2$
 имен решений. Нахождение их:

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти векторы лвл. состоят с $\lambda = 1$, они линейно
 но не являются ортогональными.

Применим к ним процесс ортогонализации
 Грама — Шмидта: Покажем:

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } e'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |(e'_i)| = 1$$

Теперь e'_1 и e'_2 — нормированные ортогональные
 собств. векторы, среди которых $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

$$\delta) \underline{A_3 = 10}$$

$$(A - 10E)x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ФОРМУЛА СОСТАВЛЯЕТСЯ ИЗ ВЕКТОРов: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
(нормированные!)

Нормированный вектор A_3 и называется:

$$e_3' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Можно легко убедиться в том, что

$$(e_1', e_2') = 0; (e_1', e_3') = 0; (e_2', e_3') = 0 \text{ и } \|e_3'\| = 1.$$

$\Rightarrow \{e_1', e_2', e_3'\}$ - ортонорм. базис из собст. векторов.

В этом базисе $A_{\text{ней}}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ - ищется разр. вибр.

Матрица перехода $T = U = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

в базисе ортонормированный.

$$\Rightarrow A_{\text{ней}}' = U^T A_{\text{ней}} \cdot U.$$

разр.

Дополнение задачи к занятию 5

1) Учебник „Математическая линейная алгебра“ Канагиников А.Н.,
Красносельский А.Л.
с.п. 158-165. (расширенного приложения)

2) № 4.134, № 4.135, № 4.183