Рубежный контроль
№1
по математической статистике

Белоусова Ю.С.

ИУ7-61Б

Количество листов: 4

14.05.2020

$\boxed{№1}$ $f_X(x) = \frac{2\lambda^2}{x^3}$, $x \geq \lambda$, $\lambda > 0$

$$\hat{\lambda}(\vec{x}) = \frac{2n-1}{2n} \min_{k=\overline{1,n}} \{X_k\}$$

а) $M[\hat{\lambda}(\vec{x})] = \frac{2n-1}{2n} \min_{k=\overline{1,n}} \{X_k\}$

Если $X_i = \min_{k=\overline{1,n}} \{X_k\}$, $i = const$, $i \in [1,n]$

X_k - независимые

$$P\{X_1 \geq X_i, \dots, X_{i-1} \geq X_i, X_{i+1} \geq X_i, \dots, X_n \geq X_i\}$$

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P\{X_j \geq X_i\} = (P\{X \geq X_i\})^n =$$

$$= \left(\int_{X_i}^{\infty} \frac{2\lambda^2}{x^3} dx\right)^n = \left(\lambda^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{X_i}^{\infty}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\lambda^2}{X_i^2}\right)^n$$

$$\Rightarrow F_{X_i}(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{2n}$$

$$\Rightarrow f_{X_i}(x) = F_{X_i}(x)' = -2n \cdot \left(\frac{\lambda}{u}\right)^{2n-1} \cdot \left(-\frac{\lambda}{u^2}\right)$$

$$= 2n \cdot \frac{\lambda^{2n}}{x^{2n+1}}$$

$$\Rightarrow M[X_i] = M[\min_k\{X_k\}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_i}(x)\, dx =$$

$$= \{x \geq \lambda\} = \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{2n\lambda^{2n}}{x^{2n}} dx = -\frac{2n \cdot \lambda^{2n}}{2n-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{x^{2n-1}}\Big|_{\lambda}^{+\infty} = \frac{2n\lambda^{2n}}{(2n-1)\cdot\lambda^{2n-1}} = \frac{2n\lambda}{2n-1}$$

Тогда $M[\hat{\lambda}(\vec{x})] = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n\lambda}{2n-1} = \lambda$

$\Rightarrow$ оценка $\hat{\lambda}(\vec{x})$ явл. несмещенной б) $D\hat{\lambda}(\vec{x}) \geq \frac{1}{n \cdot J}$

Лист 3

$J = M\left[\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln f(x)\right]^2$

$\ln f(x) = \ln 2 + 2\ln\lambda - 3\ln x$

$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \lambda} = \frac{2}{\lambda}$

$\Rightarrow J = M\left[\frac{2}{\lambda}\right]^2 = M\left[\frac{4}{\lambda^2}\right] = \frac{4}{\lambda^2}$

$D\hat{\lambda}(\vec{x}) = M[\hat{\lambda}^2] - (M\hat{\lambda})^2 =$

$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 M\left[\min\{x_i\}^2\right] - \lambda^2 =$

$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_1}(x)\, dx - \lambda^2 =$

$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \cdot \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{2n\lambda^{2n}}{x^{2n-1}} - \lambda^2 =$

$= -\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \cdot \frac{2n\lambda^{2n}}{2n-2} \cdot \left(\frac{1}{x^{2n-2}}\right)\Big|_{\lambda}^{+\infty} - \lambda^2$

$= \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \cdot \frac{2n \cdot \lambda^{2n}}{(2n-2)\lambda^{2n-2}} - \lambda^2$

$\frac{(2n-1)^2 \cdot \lambda^2}{2n(2n-2)} = \lambda^2 \cdot \left(\frac{4n^2 - 2n + 1}{4n^2 - 4n} - 1\right) =$

$= \frac{\lambda^2}{4n^2 - 4n}$

$D\hat{\lambda} \geq \frac{1}{nJ} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{4n^2 - 4n} \geq \frac{\lambda^2}{4n}$

при $n \geq 2$ нер-во не выполняется

значит оценка не эффективна по Рао-Крамеру

Ответ: а) да б) нет

$\boxed{N2}$ $X \sim (m, \sigma^2)$

m и σ^2 - неизвестны

$\gamma = 0,9$

$n = 16$

$\overline{X} = 3,52$

$S^2(\vec{x}) = 1,21$

Для заданных условий интервал строится следующим образом:

Используется статистика:

$$\frac{m - \overline{X}}{S(\vec{X})} \cdot \sqrt{n} \sim St(n-1)$$

$$P\left\{ t_{\frac{1-\gamma}{2}} < \frac{m-\overline{X}}{S(\vec{X})} \cdot \sqrt{n} < t_{\frac{1+\gamma}{2}} \right\} = \gamma$$

$$P\left\{ \frac{t_{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot S(\vec{x}) + \overline{X} < m < \frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot S(\vec{x}) + \overline{X} \right\} = \gamma$$

$$t_{\frac{1+\gamma}{2}} = t_{0,95} = -t_{0,05} = -t_{\frac{1-\gamma}{2}}$$

$n - 1 = 15$

$t_{0,95} = 1,753$ — из таблицы

$$P\left\{ 3,52 - \underbrace{\frac{1,753 \cdot 11}{4}}_{\approx 4,82} < m < \frac{1,753 \cdot 11}{4} + 3,52 \right\} = 0,9$$

$$-1,3 < m < 8,34$$

Ответ: $m \in (-1,3;\ 8,34)$