Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Лабораторная работа № 2

Тема Интервальные оценки

Студент Белоусова Ю.С.

Группа ИУ7-61Б

Оценка (баллы) _______________

Преподаватель Саркисян П.С.

Москва, 2020

Определение

X - случайная величина, закон распределения которой $F(x,\vec{\theta})$ известен с точностью до $\vec{\theta}=(\theta_1,\dots,\theta_r)$ - вектора неизвестных параметров; требуется оценить значение вектора $\vec{\theta}$. (далее считаем $r=1$: $\vec{\theta}=(\theta_1)=(\theta)$)

Интервальной оценкой с коэффициентом доверия γ параметра θ называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\underline{\theta}(\vec{X})<\theta<\overline{\theta}(\vec{X})\}=\gamma.$$

γ-доверительным интервалом называют интервал $(\underline{\theta}(\vec{x});\overline{\theta}(\vec{x}))$, отвечающий выборочным значениям статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для мат. ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

$N(m,\sigma^2)$

Оценить m

1. σ^2 - известна => центр. статистика : $\frac{m-\overline{X}}{\sigma}\sqrt{n}\sim N(0,1)$

=> границы : $\underline{m}=\overline{X}-\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$; $\overline{m}=\overline{X}+\frac{u_{\frac{1+\gamma}{2}}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$

2. σ^2 - неизвестна => центр. статистика : $\frac{m-\overline{X}}{S(\vec{X}_n)}\sqrt{n}\sim St(n-1)$

=> границы : $\boxed{\underline{m}=\overline{X}-\frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}\cdot S(\vec{X})}{\sqrt{n}}\ ;\ \overline{m}=\overline{X}+\frac{t_{\frac{1+\gamma}{2}}\cdot S(\vec{X})}{\sqrt{n}}}$

Оценить σ центральная статистика : $\frac{S^2(\vec{X}_n)}{\sigma^2}(n-1)\sim\chi^2(n-1)$

границы: $\boxed{\underline{\sigma}^2=\frac{S^2(\vec{X}_n)(n-1)}{h_{\frac{1+\gamma}{2}}}\ ;\ \overline{\sigma}^2=\frac{S^2(\vec{X}_n)\cdot(n-1)}{h_{\frac{1-\gamma}{2}}}}$

В ЛР будем использовать выделенные зелёным формулы.

Текст программы

```
function lab2()
    x = importdata('data1.txt');
    N = length(x);

    mu = find_expected_value(x);
    fprintf("mu = %.4f \n", mu);

    S2 = find_dispersion(x);
    fprintf("S2 = %.4f \n", S2);

    gamma = 0.9;

    [lm, hm] = find_exp_v_interval(gamma, S2, mu, N);
    fprintf("MX interval for gamma=%.1f: (%.4f ; %.4f)\n", gamma, lm, hm);

    [lsigma, hsigma] = find_dispersion_interval(gamma, S2, N);
    fprintf("DX interval for gamma=%.1f: (%.4f ; %.4f)\n", gamma, lsigma, hsigma);

    figure(1);
    hold on;
    expected_value_graph(x, N, gamma);

    figure(2);
    hold on;
    dispersion_graph(x, N, gamma);
end

% оценка мат ожидания
function mu = find_expected_value(x)
    n = length(x);
    mu = sum(x)/n;
end
```

```
% оценка дисперсии
function S2 = find_dispersion(x)
    n = length(x);
    mu = find_expected_value(x);
    if n > 1
        S2 = sum((x - mu).^2) / (n-1);
    else
        S2 = 0;
    end
end
% вычисление границ гамма доверительного интервала для MX
function [lsigma, hsigma] = find_exp_v_interval(gamma, S2, mu, n)
    quantile = tinv((1 + gamma)/2, n-1);
    lsigma = mu - quantile * sqrt(S2) / sqrt(n);
    hsigma = mu + quantile * sqrt(S2) / sqrt(n);
end
% вычисление границ гамма доверительного интервала для DX
function [ld, hd] = find_dispersion_interval(gamma, S2, n)
    quantilel = chi2inv((1 + gamma)/2, n-1);
    quantileh = chi2inv((1 - gamma)/2, n-1);
    ld = S2*(n-1)/quantilel;
    hd = S2*(n-1)/quantileh;
end
% построение прямой и графиков для мат ожидания
function expected_value_graph(x, N, gamma)
    mu = zeros(N,1);
    S2 = zeros(N,1);
    lmu = zeros(N,1);
    hmu = zeros(N,1);
    start = 1;
    for n = start:N
        newx = x(1:n);
        mu(n) = find_expected_value(newx);
        S2(n) = find_dispersion(newx);
        [lmu(n), hmu(n)] = find_exp_v_interval(gamma, S2(n), mu(n), n);
```

```
    end

    mu_line = zeros(N,1);
    mu_line(1:N) = mu(N);

    plot((start:N),mu_line(start:N), 'r');
    plot((start:N),lmu(start:N), 'b');
    plot((start:N),hmu(start:N), 'g');
    plot((start:N),mu(start:N), 'm');
    grid on;
    xlabel('n');
    ylabel('\mu');
    legend('\mu\^(x_N)','_{--}\mu^(x_n)', '^{--}\mu^(x_n)', '\mu\^(x_n)');
end
% построение прямой и графиков для дисперсии
function dispersion_graph(x, N, gamma)
    S2 = zeros(N,1);
    lsigma = zeros(N,1);
    hsigma = zeros(N,1);
    start = 1;
    for n = start:N
        newx = x(1:n);
        S2(n) = find_dispersion(newx);
        [lsigma(n), hsigma(n)] = find_dispersion_interval(gamma, S2(n), n);
    end

    S2_line = zeros(N,1);
    S2_line(start:N) = S2(N);

    plot((start:N), S2_line(start:N), 'r');
    plot((start:N), lsigma(start:N), 'b');
    plot((start:N), hsigma(start:N), 'g');
    plot((start:N), S2(start:N), 'm');
    grid on;
    xlabel('n');
```

```
ylabel('\sigma');
legend('S^2(x_N)','_{--}\sigma^2(x_n)', '^{--}\sigma^2(x_n)',
'S^2(x_n)');
end
```

Результаты расчетов

$\widehat{\mu} = 0.2322$

$S^2 = 1.0406$

$(\underline{\mu}\,;\ \overline{\mu}) = (0.0779\ ;\ 0.3866)$

$(\underline{\sigma^2}\,;\ \overline{\sigma^2}) = (0.8513\ ;\ 1.3061)$

Графики

На координатной плоскости Oyn построить прямую y = $\widehat{\mu}(\vec{x}_N)$, также графики функций y = $\widehat{\mu}(\vec{x}_n)$, y = $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и y = $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

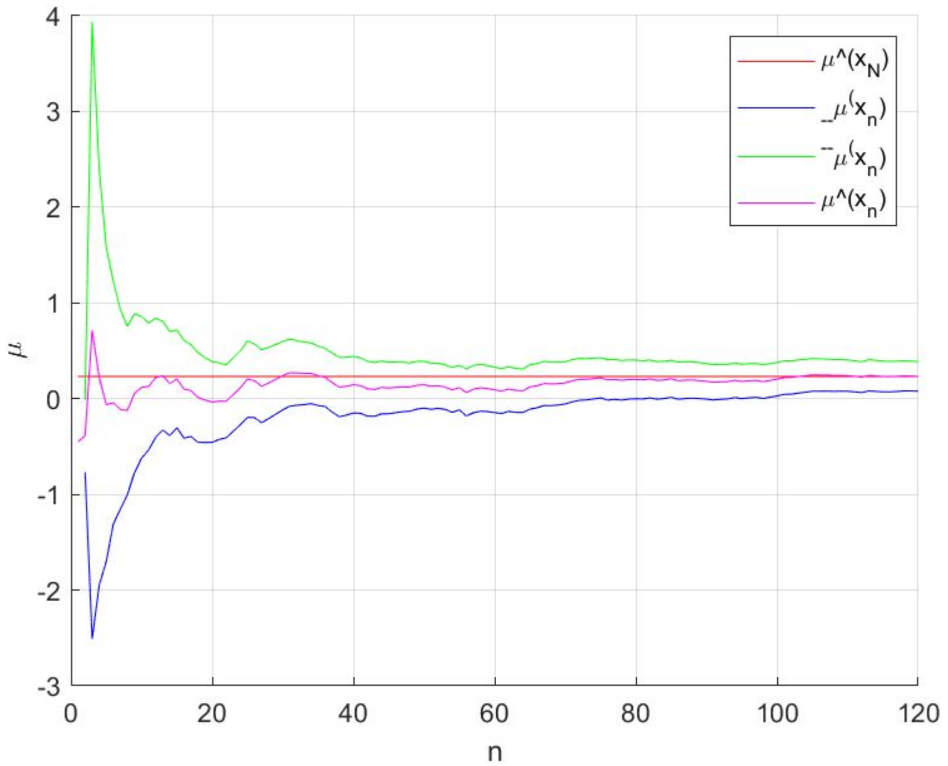
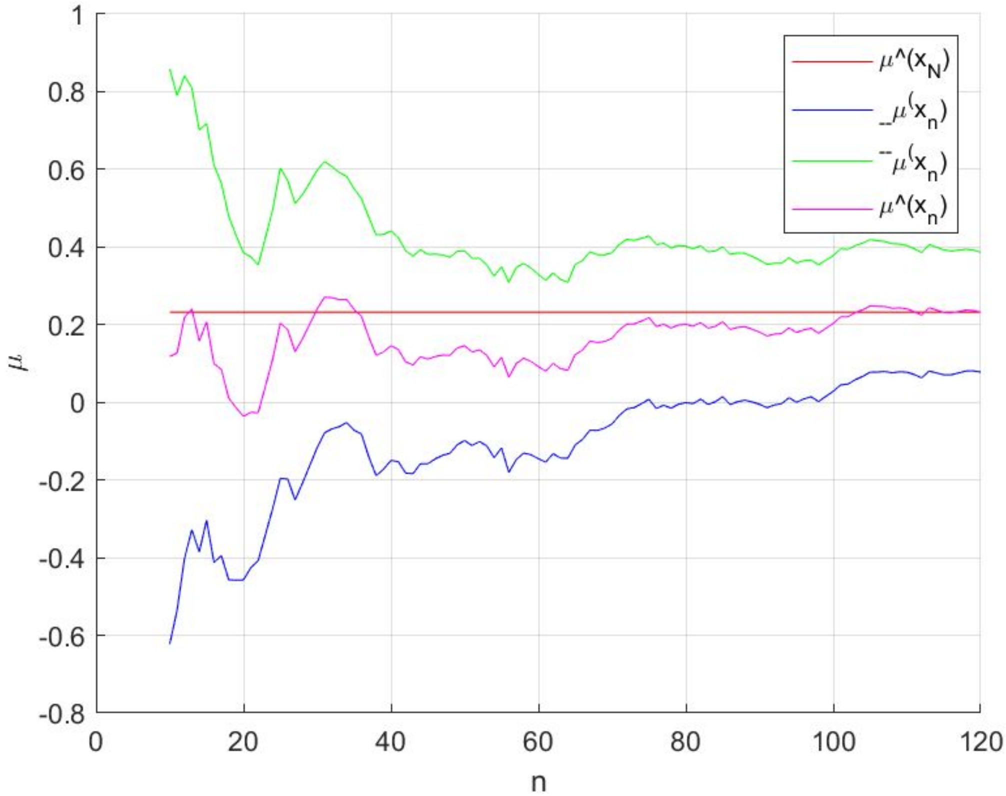


График становится более наглядным, если изменять значение n от 10 до N:



На другой координатной плоскости Ozn построить прямую z = $S^2(\vec{x}_N)$, также графики функций z = $S^2(\vec{x}_n)$, z = $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и z = $\overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

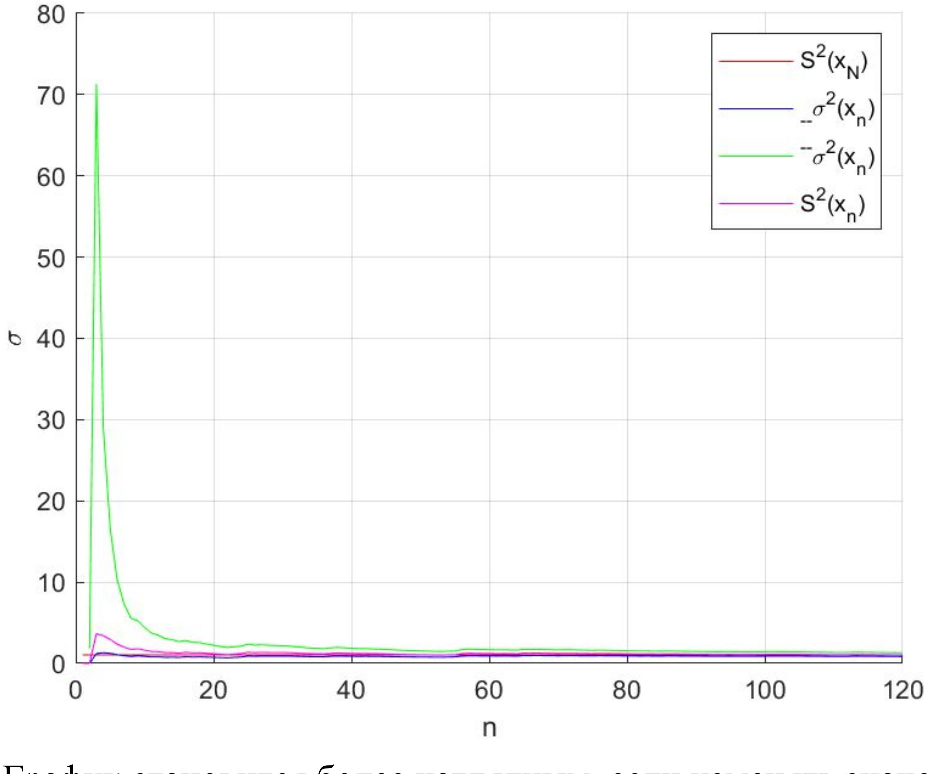
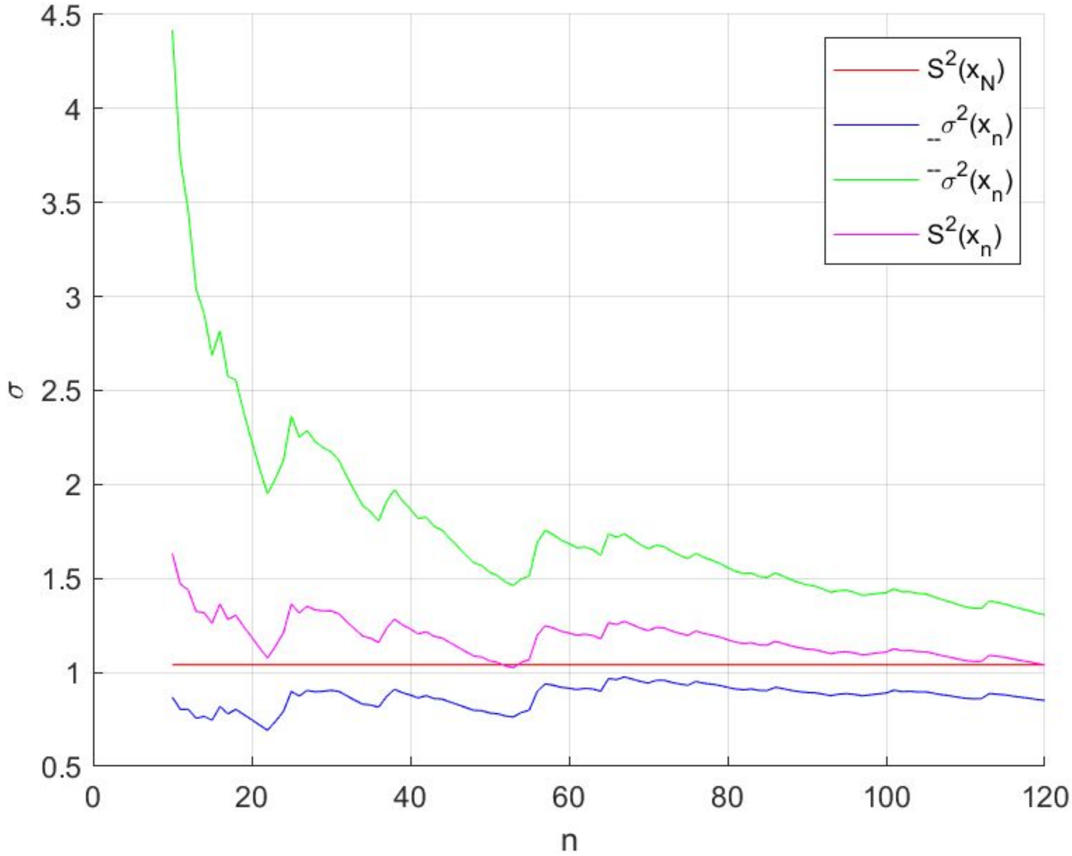


График становится более наглядным, если изменять значение n от 10 до N:



4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
20
40
60
80
100
120
σ
n
S²(x_N)
σ²(x_n)
σ²(x_n)
S²(x_n)