Вариант 3

№1 Пусть X - скорость ветра

$MX = 8$

I 1ое неравенство Чебышева: $P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{MX}{\varepsilon}$

1) $\varepsilon = 20$, $\underline{P\{X > 20\}} \leq P\{X \geq 20\} \leq \frac{8}{20} = \underline{0,4}$

2) $\varepsilon = 50$, $P\{X < 50\} = 1 - P\{X \geq 50\}$

$P\{X \geq 50\} \leq \frac{8}{50} = 0,16$

$1 - P\{X \geq 50\} \geq 1 - 0,16$

$\underline{P\{X < 50\} \geq 0,84}$

II Если $\sigma = \sqrt{DX} = 2$

2ое неравенство Чебышева: $P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

1) $\varepsilon = 20$, если $X > 20$, то $X - MX > 12$, т.е. $\varepsilon_1 = 12$

$\underline{P\{X-8 > 12\}} \leq P\{X-8 \geq 12\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon_1^2} = \frac{4}{144} = \underline{\frac{1}{36}}$

т.е. $P\{X > 20\} \leq \frac{1}{36}$

2) $\varepsilon = 50$, если $X < 50$, то $X - MX < 42$, т.е. $\varepsilon_1 = 42$

$P\{X-8 < 42\} = 1 - P\{X-8 \geq 42\}$

$P\{X-8 \geq 42\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon_1^2} = \frac{4}{42^2} = \frac{1}{441}$

$1 - P\{X-8 \geq 42\} \geq 1 - \frac{1}{441}$

$P\{X-8 < 42\} \geq \frac{440}{441}$

т.е. $P\{X < 50\} \geq \frac{440}{441}$

Ответ: I. 1) $P\{X > 20\} \leq 0,4$

2) $P\{X < 50\} \geq 0,84$

II. 1) $P\{X > 20\} \leq \frac{1}{36}$

2) $P\{X < 50\} \geq \frac{440}{441}$

№2 Метод моментов

$\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ - случайная выборка

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

Закон распределения сл. вел. X зависит от двух параметров - α и λ, поэтому система будет содержать 2 уравнения, записанных относительно 1ого начального и 2ого центрального моментов:

$$\begin{cases} m_1(\alpha,\lambda) = \mu_1(\vec{X}) \\ \mathring{m}_2(\alpha,\lambda) = \nu_2(\vec{X}) \end{cases}$$

где $m_1(\alpha,\lambda) = MX$, $\quad \mu_1(\vec{X}) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$

$\mathring{m}_2(\alpha,\lambda) = DX$, $\quad \nu_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$

Найдем MX:

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx = \{x > 0\} = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda}\int_0^{+\infty} (\lambda x)^\alpha e^{-\lambda x}\, d(\lambda x) = \left\{\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda}\cdot\Gamma(\alpha+1) = \{\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha)\} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

т.е. $MX = \frac{\alpha}{\lambda}$

Найдём DX:

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty}(x - MX)^2 f(x)\, dx = \{x > 0\} = \int_0^{+\infty}\left(x - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left(x^{\alpha+1} - \frac{2\alpha}{\lambda}x^\alpha + \frac{\alpha^2}{\lambda^2}x^{\alpha-1}\right)\cdot e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^{\alpha+1} e^{-\lambda x}\, d(\lambda x) - \frac{2\alpha}{\Gamma(\alpha)\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^\alpha \cdot e^{-\lambda x}\, d(\lambda x) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\Gamma(\alpha)\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, d(\lambda x) =$$

$$= \left\{ \Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^2} \cdot \Gamma(\alpha+2) - \frac{2\alpha}{\Gamma(\alpha)\cdot\lambda^2} \cdot \Gamma(\alpha+1) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} \cdot \Gamma(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha). \\ \Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\cdot\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\cdot\alpha\cdot\Gamma(\alpha) \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha^2+\alpha}{\lambda^2} - \frac{2\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

т. е. $DX = \frac{\alpha}{\lambda^2}$

Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\lambda} = \overline{X} \\ \frac{\alpha}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \overline{X}\cdot\lambda \\ \frac{\overline{X}\cdot\lambda}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \overline{X}\cdot\lambda \\ \lambda(\hat{\sigma}^2(\vec{X})\cdot\lambda - \overline{X}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \overline{X}\cdot\lambda \\ \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{\overline{X}}{\hat{\sigma}^2(\vec{X})} \end{array} \right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha = \frac{\overline{X}^2}{\hat{\sigma}^2(\vec{X})} \\ \lambda = \frac{\overline{X}}{\hat{\sigma}^2(\vec{X})} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $$\alpha = \frac{\overline{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})}$$

$$\lambda = \frac{\overline{X}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})}$$

№3 Метод максимального правдоподобия

Выборка: $\vec{X}_5 = (x_1, \dots, x_5) = (4,2;\ 7,8;\ 16,3;\ 11,6;\ 8,3)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\theta^2}}, \quad x>0$$

Построим функцию правдоподобия:

$$L(\vec{X}_5, \theta) = \prod_{i=1}^{5} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{5} \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi x_i}} \cdot e^{-\frac{x_i}{2\theta^2}} =$$

$$= \frac{1}{\theta^5 \left(\sqrt{2\pi}\right)^5 \sqrt{\prod_{i=1}^{5} x_i}} \cdot e^{\frac{-\sum_{i=1}^{5} x_i}{2\theta^2}}$$

Прологарифмируем:

$$\ln L = -5\ln\theta - \frac{5}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln\prod_{i=1}^{5} x_i + \frac{-\sum_{i=1}^{5} x_i}{2\theta^2}$$

т.к. $y = \ln x$ монотонно возрастает, то переход от ф-ции L к $\ln L$ не изменяет её точки экстремума, найдём их:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{5}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{\theta^3} = 0$$

$$\frac{-5\theta^2 + \sum_{i=1}^{5} x_i}{\theta^3} = 0$$

$$\theta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}; \quad \theta = \pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}}$$

если $\theta = -\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}}$, то $\forall x, x>0: f_X(x) < 0$

но по св-ву $f(x) \geq 0$, значит $\theta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}}$ – единственный экстремум

Проверим, является ли этот экстремум максимумом:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} = \frac{5}{\theta^2} - \frac{3\sum_{i=1}^{5} x_i}{\theta^4}$$; подставим $\theta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}$

$$\frac{25}{\sum_{i=1}^{5} x_i} - \frac{3 \cdot 25}{\sum_{i=1}^{5} x_i} < 0$$, значит точка $\theta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5}}$ является максимумом

Подставив значения выборки, получим:

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 48,2$

$\theta = \sqrt{\frac{48,2}{5}} = \sqrt{9,64}$

Ответ: $\theta = \sqrt{9,64}$

$\boxed{N4}$ $n = 100$, $\bar{X}_n = 10$, $\sigma = 1$

$\mu \in (9,9;\ 10,1)$, μ - неизвестно

Для заданных условий интервал строится следующим образом:

Используется статистика $\frac{\mu - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$$P\left\{ h_{\frac{1-\alpha}{2}} < \frac{\mu - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} < h_{\frac{1+\alpha}{2}} \right\} = \alpha$$

$$P\left\{ \frac{h_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} < \mu < \frac{h_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \right\} = \alpha$$

по условию $\frac{h_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} = 10,1$

$\frac{h_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot 1}{10} + 10 = 10,1$; $h_{\frac{1+\alpha}{2}} = 1$

Из таблицы: $\frac{1+\alpha}{2} \approx 0,84 \Rightarrow \alpha \approx 0,68$

Ответ: $\approx 0,68$