

Вычитание - это обратная операция к суммированию. Поэтому совершенно естественно желание использовать в реализации вычитателя те же приемы что и в сумматоре, либо по возможности задействовать в выполнении обеих операций один механизм.

Когда мы изучали арифмометры, то могли наблюдать два варианта:

1. вычитание - это то же суммирование, просто надо крутить ручку в обратном направлении.
2. вычитание делается суммированием с дополнением ([дополнительным кодом](#)) вычитаемого (Паскалина).

Сейчас же, когда сумматор состоит из электронных компонентов, прокрутить ручку назад не получится, нужен параллельный механизм. А вот суммирование с дополнением нас вполне устраивает, необходимо только разобраться что это за дополнение такое и как его получить. Отметим, что электронный сумматор работает точно как механический в Паскалине - в каждом разряде увеличивает цифру, при переходе через 0 - добавляет единицу в старший разряд. Система счисления другая - 2 вместо 10, но, как мы увидим, это не важно.

Пусть сумматор имеет ограничение в три десятичные цифры (три колеса с цифрами). В этом случае $999 + 1$ (+1 соответствует вращению на одно деление младшего колеса) приведет к переполнению и если ничего не предпринять, число обратится в 0. Так и должно быть, если мы работаем с беззнаковыми числами. А что в случае отрицательных чисел ?

Что, если мы станем хранить знак в виде дополнительного четвёртого колеса, на котором вместо цифр чередуются знаки $+-\dots$?

Первая проблема, которая бросается в глаза - теперь у нас два ноля, +000 и -000! Вторая - если к -001 прибавить 1, получится -2. Это неприемлемо.

Данные проблемы возникают из-за того, что числа одновременно выступают в двух ролях: во первых - это собственно значение числа, во-вторых - приемлемый для сумматора способ хранения числа. Для отрицательных чисел роли разошлись - сумматор вместо суммирования начал отнимать. Надо договориться о таком способе хранения отрицательных чисел, с которыми он умеет работать.

Если к числу 999 добавить 1, произойдет переполнение и мы увидим на колёсах -000. Было бы логично, если бы код -000 означал самое маленькое отрицательное число. Наоборот, если бы мы могли от 000 отнять 1 (прокрутить младшее колесо назад), получили бы -999, логично обозначить этим кодом число -1.

Теперь противоречие исправлено - если к самому маленькому числу (код -000) добавлять по единице, рано или поздно придём к -1 (код -999). Если добавить еще 1, получим 0, как и ожидали. Круг замкнулся.

Осталось понять что это за самое маленькое число. Чтобы получить -1 (хранится как

-999) из -000 и к нему надо прибавить 999. Или от -1 отнять 999, получим -1000. Вот наше самое маленькое число. Кажется странным, что оно не соответствует самому большому положительному 999. Это плата за отсутствие значения -0. Мы сдвинули весь диапазон отрицательных чисел вперёд на единицу, в результате отрицательных чисел стало больше чем положительных.

Итак, мы придумали способ хранения отрицательных чисел. Это и называется “дополнительным кодом”. Дополнительный код - это то, как придётся хранить число, если его умножить на -1. Но как получить дополнительный код - вот берём число 123, какой у него дополнительный код?

1) Надо каждую цифру заменить на ее дополнение. Дополнением цифры называется ее разность с максимальной цифрой в системе счисления.

В десятичной системе счисления

$$\text{Доп}(A) = 9 - A.$$

После этого число 123 превращается в 876.

2) Сменим знак 876 превратится в -876. Это так называемое простое дополнение.

Теперь если 123 (или любое другое число) сложить со своим простым дополнением, получим -999, это простое дополнение 0, фактически -0.

3) Отнимаем единицу, чтобы сдвинуть диапазон чисел и избавиться от значения -0.

-876 превратится в -877. Вот мы и получили расширенное дополнение. Теперь если сложить 123 (или любое другое число) со своим расширенным дополнением, получим 0. Что и требовалось.

Обычно, когда говорят просто дополнительный код или дополнение, имеют ввиду именно расширенное дополнение.

Число	Простое дополнение	Расширенное дополнение
1000	-----	-000
999	-000	-001
100	-899	-900
010	-989	-990
001	-998	-999
000	000	000
-000	-999	000

Как насчет двоичной системы счисления? Всё то же самое с учетом того, что дополнения цифр считаются не от 9, но от 1.

Приятный бонус в двоичной системе то, что одноразрядный флаг переполнения естественным образом вписывается в двоичное же представление значащих цифр. Построим таблицу кодов для восьмиразрядных чисел.

Число	Двоичное представление	Простое дополнение	Расширенное дополнение
128	-----	-----	1000 0000 ₂
127	0111 1111 ₂	1000 0000 ₂	1000 0001 ₂
80	0101 0000 ₂	1010 1111 ₂	1011 0000 ₂
20	0001 0100 ₂	1110 1011 ₂	1110 1100 ₂
2	0000 0010 ₂	1111 1101 ₂	1111 1110 ₂
1	0000 0001 ₂	1111 1110 ₂	1111 1111 ₂
0	0000 0000 ₂	0000 0000 ₂	0000 0000 ₂

Итого: в восьми разрядах кодируются знаковые числа от -128 до +127.

Обратите внимание, как естественно и логично старший - знаковый разряд вписался в формат хранения знаковых целых чисел.

А также не пропустите тот факт, что простое дополнение числа получается инверсией разрядов. В самом деле дополнением для двоичной системы счисления будет

Для 0: $1 - 0 = 1$

Для 1: $1 - 1 = 0$

Иными словами, умножение целого знакового числа *val* на -1 равносильно выражению $val * -1 = \text{negate}(val) + 1$

Проверим, умножим -20 на -1:

$-20 = 1110\ 1100_2$

$\text{negate}(1110\ 1100_2) = 0001\ 0011_2$

$0001\ 0011_2 + 1 = 0001\ 0100_2 = 2^4 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

И, наконец, последнее, на что стоит обратить внимание, знак числа определяется по значению самого старшего разряда, для положительных чисел (включая 0) этот разряд нулевой, для отрицательных чисел, равен единице.

Собственно, поэтому он и называется - знаковый разряд.