MŰSZAKI RENDSZEREK INFORMÁCIÓTECHNOLÓGIÁJA

Záróvizsgakérdések kidolgozva

2015. MÁJUS 31.

1. Rendszerek jellemzése, leírási módjaik. Jelek osztályozása. Vezérlés és szabályozás. A szabályozási kör felépítése. A szabályozással szemben támasztott követelmények. 4
REnszerek jellemzése, leírási módjaik. 4
Jelek osztályozása. 5
Vezérlés 6
Szabályozás 6
A szabályozási kör felépítése 6
A szabályozással szemben támasztott követelmények. 6
2. Modellalkotási elvek. Modelltípusok. Matematikai modellek osztályozása. Linearizálás jelentősége, módszerei és korlátai. 7
Modellalkotási elvek. 7
Modelltípusok 7
Matematikai modellek osztályozása. 7
Linearizálás jelentősége, módszerei és korlátai. 8
3. Lineáris rendszermodellek: bemenet/kimenet modellek és tulajdonságaik. Vizsgáló jelek és tulajdonságaik. Nevezetes válaszfüggvények. Az átviteli függvény. Rendszervizsgálat idő- és operátortartományban. 9
bemenet/kimenet modellek és tulajdonságaik 9
Vizsgáló jelek és tulajdonságaik. 10
Nevezetes válaszfüggvények 11
Az átviteli függvény. 11
Rendszervizsgálat idő- és operátortartományban. 11
4. Fourier-sor, Fourier-integrál. A Fourier- és Laplace-transzformáció alkalmazhatósága, azonosságai. Inverz-transzformációk 13
Fourier-sor 13
Fourier-integrál 14
A Fourier- és Laplace-transzformáció alkalmazhatósága, AZONOSSÁGAI. 14
INVERZ-TRANSZFORMÁCIÓK 15
5. Tipikus dinamikus tagok (Nullad-, első- és másodrendű tag, tiszta integráló és egytárolós integráló tag, tiszta deriváló és közelítő deriváló tag) és jellemzésük. Paraméterek hatásának bemutatása az átmeneti, illetve a súlyfüggvény segítségével. Pólusok hatása a tranziensre. 17
NULLADRENDŰ/ ARÁNYOS TAG 17
ELSŐRENDŰ TAG 17
MÁSODRENDŰ TAG 18
INTEGRÁLÓ TAG 18
EGYTÁROLÓS INTEGRÁLÓ TAG 19
DIFFERENCIÁLÓ TAG 19
KÖZELÍTŐ D TAG/ DT1 19

6. Rendszervizsgálat frekvenciatartományban. Frekvenciafüggvény (átviteli karakterisztika) származtatása és ábrázolási módjai. A Nyquist- és Bode-diagram sajátosságai. Tipikus dinamikus tagok (Nullad-, első- és másodrendű tag, tiszta integráló és egytárolós integráló tag, tiszta deriváló és közelítő deriváló tag) frekvenciafüggvényei. 20
Rendszervizsgálat frekvenciatartományban. 20
Frekvenciafüggvény (átviteli karakterisztika) származtatása és ábrázolási módjai. 21
A Nyquist- és Bode-diagram sajátosságai. 22
Tipikus dinamikus tagok (Nullad-, első- és másodrendű tag, tiszta integráló és egytárolós integráló tag, tiszta deriváló és közelítő deriváló tag) frekvenciafüggvényei. 24
7. Rendszerek stabilitásvizsgálata. Stabilitási kritériumok. Stabilitásvizsgálat Nyquist- és Bode-diagramokkal. 26
Rendszerek stabilitásvizsgálata. 26
Stabilitási kritériumok. 27
Stabilitásvizsgálat Nyquist- és Bode-diagramokkal. 28
8. Folytonos idejű rendszerek szabályozása. Eredő átviteli függvény meghatározása. A hurokátviteli függvény. Szabályozások típusszám szerinti csoportosítása. Arányos, integráló és deriváló tag szerepe a szabályozóban. 29
Folytonos idejű rendszerek szabályozása. 29
Eredő átviteli függvény meghatározása. 30
A hurokátviteli függvény. 31
Szabályozások típusszám szerinti csoportosítása. 31
Arányos, integráló és deriváló tag szerepe a szabályozóban. 33
9. P-, PI-, PD- és PID-szabályozók jellemzése. A PID-szabályozó paraméter beállítási módszerei. 33
P-, PI-, PD- és PID-szabályozók jellemzése. 33
A PID-szabályozó paraméter beállítási módszerei 35
10. Minőségjavító szabályozások: zavarkompenzáció, arányszabályozás, kaszkádszabályozás, kaszkád-arányszabályozás. 36
zavarkompenzáció 36
arányszabályozáS 36
kaszkádszabályozás 37
kaszkád-arányszabályozás 37
11. Diszkrétidejű rendszerek. Mintavételezés típusai, fizikai és matematikai mintavételezés fogalma, Shannon-tétel. A z- és inverz z-transzformáció fogalma és tulajdonságai, elvégzésének lehetőségei. 37
Diszkrétidejű rendszerek. 37
Mintavételezés típusai, fizikai és matematikai mintavételezés fogalma 37
Shannon-tétel. 38
A z- és inverz z-transzformáció fogalma és tulajdonságai, elvégzésének lehetőségei 39
12. Impulzus átviteli függvény fogalma és tulajdonságai. Eredő impulzus átviteli függvény meghatározása sorba, párhuzamosan kapcsolt tagok és a visszacsatolt rendszerek esetén. 40

Impulzus átviteli függvény fogalma és tulajdonságai..40
Eredő impulzus átviteli függvény meghatározása, Sorba, párhuzamosan kapcsolt tagok és a visszacsatolt rendszerek esetén 41
13. Diszkrét idejű rendszerek szabályozása. Folytonos idejű PID-algoritmus diszkretizálása, pozíció- és sebességalgoritmus. Szabályozó beállítási módszerek. Tartószerv fogalma, működésének értelmezése...43
Diszkrét idejű rendszerek szabályozása. 43
Folytonos idejű PID-algoritmus diszkretizálása, pozíció- és sebességalgoritmus. 44
Szabályozó beállítási módszerek. 45
Tartószerv fogalma, működésének értelmezése 45
14. Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek állapottér modellje. Kapcsolat a klasszikus leírási módokkal. Állapot transzformációk, kanonikus alakok. 46
Folytonos idejű lineáris időinvariáns rendszerek állapottér modellje. 46
Kapcsolat a klasszikus leírási módokkal. 46
Állapot transzformációk, kanonikus alakok 47
15. Folytonos idejű, lineáris időinvariáns állapottér modellek analízise: stabilitás, irányíthatóság, megfigyelhetőség. 47
Folytonos idejű, lineáris időinvariáns állapottér modellek analízise: 47
stabilitás...47
irányíthatóság...48
megfigyelhetőség 48
Tulajdonságok..48

1. RENDSZEREK JELLEMZÉSE, LEÍRÁSI MÓDJAIK. JELEK OSZTÁLYOZÁSA. VEZÉRLÉS ÉS SZABÁLYOZÁS. A SZABÁLYOZÁSI KÖR FELÉPÍTÉSE. A SZABÁLYOZÁSSAL SZEMBEN TÁMASZTOTT KÖVETELMÉNYEK.

RENSZEREK JELLEMZÉSE, LEÍRÁSI MÓDJAIK.

A rendszer olyan jelenségek vagy objektumok összessége, melyeket kölcsönhatások és kölcsönös összefüggések kapcsolnak össze.

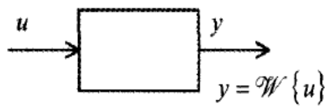
A rendszer egy fizikai objektum egy modellje, ami fizikai változókkal leírható. Segítségével modellezhetjük, matematikailag leírhatjuk a működését.

Lényege, matematikai formába önteni a folyamatot, amely szimulációját el akarjuk végezni, hogy megtudjuk, az hogyan fog viselkedni, ha különböző hatások érik. Ezek a külső hatások a rendszer bemenetei (gerjesztések), a rendszer a gerjesztésekre válaszokkal reagál (rendszer kimenetei).

SISO: EGY-GERJESZTÉSŰ, EGY-VÁLASZÚ RENDSZER.

Egy-egy kapcsolatot jelent, ami adott $u(t)$ gerjesztéshez egy $y(t)$, választ rendel.

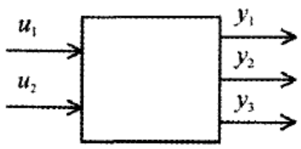
$$y = W\{u\}$$

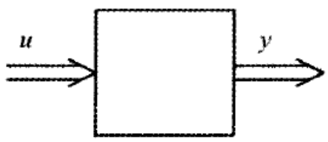


MIMO: multiple input multiple output:

Egy rendszernek lehet sok gerjesztése és sok válasza. Rendszert Q számú explicit gerjesztés-válasz kapcsolat írja le:

$$\left.\begin{matrix} y_1 = W_1\{s_1, s_2, \dots, s_I\} \\ y_2 = W_2\{s_1, s_2, \dots, s_I\} \\ \dots \\ y_o = W_O\{s_1, s_2, \dots, s_I\} \end{matrix}\right\} y = W\{s\}$$





A GERJESZTÉS ÉS A VÁLASZ FOLYTONOS IDEJŰ VAGY DISZKRÉT IDEJŰ, EZ ALAPJÁN EGY RENDSZER LEHET:

- FI folytonos idejű gerjesztés és folytonos idejű válasz
- DI diszkrét idejű gerjesztés és diszkrét idejű válasz
- A/D folytonos idejű gerjesztés, diszkrét idejű válasz
- D/A diszkrét idejű gerjesztés, folytonos idejű válasz

RENDSZER TÍPUSOK:

Lineáris rendszerek: egy rendszer (folytonos idejű, vagy diszkrét idejű) lineáris, ha a gerjesztés-válasz kapcsolatot kifejező W operátor lineáris, vagyis ha a rendszerre érvényes a szuperpozíció elve (vagyis a rendszer homogén és additív). Ha ez nem teljesül, akkor nem lineáris.

Lineáris elemek pl.: kondenzátor, ellenállás.

Nemlineáris: tranzisztor, dióda.

Invariáns rendszer: gerjesztés időbeli eltolása azt eredményezi, hogy a válaszban csak egy ugyanekkora időbeli eltolás következik be. Időtől való függőségre utal. Ellenkező esetben a rendszer variáns pl.: Ellenállás

Kauzális rendszer: a válasz adott időpontbeli értéke nem függ a gerjesztés jövőbeli értékétől. Minden fizikai rendszer ilyen, mert nincs olyan rendszer, aminek a jelen állapota függne a jövőtől.

Stabil rendszerek: Egy rendszer akkor gerjesztés válasz stabil, ha bármely korlátos gerjesztésre korlátos választ kap. BIBO stabilitásnak hívjuk.

Determinisztikus rendszer: adott kezdőállapot és bemenőjel esetén egyértelműen meghatározható a végállapot és kimenő jel értéke.

Sztochasztikus: a végállapotra és kimenő jelre csak valószínűségi elosztást tudunk megadni

JELEK OSZTÁLYOZÁSA.

ÉRTELMEZÉSI TARTOMÁNY ÉS AZ ÉRTÉKKÉSZLET ALAPJÁN NÉGY TÍPUSBA SOROLHATÓAK:

1. **Folytonos idejű jel:**
   Ha a jel az idő argumentum minden valós értékére értelmezett. legismertebb az analóg jel, melynél a jel értéke is folytonos.
2. **Diszkrét idejű jel:**
   Ha az analóg jelből adott (egyenletes osztású) időpillanatokban mintákat veszünk, így időben diszkrét, értékkészletben folytonos jelet kapunk.
3. **Időben folytonos, de értékkészletében diszkrét:** csak bizonyos értékeket vehet fel egy számhalmaz elemeiből.
4. **Digitális jel:** a számítástechnika minden műszaki területén nagy jelentősége van. Időben is és értékkészletben is diszkrét.

ÉRTÉK MEGHATÁROZOTTSÁGA SZERINT A JEL LEHET:

- **Determinisztikus:**
  Értéke minden időpillanatban ismert vagy meghatározható, kielégítő pontossággal mérhető, s megismételhető folyamatot ír le. Értéke meghatározott időfüggvénnyel egyértelműen megadható.
- **Sztochasztikus:**
  Ha véletlen lefolyású és csak valószínűség számítási módszerekkel írható le. Sztochasztikus jelmodellt használunk, ha a jelet létrehozó kölcsönhatások kimenetele a megfigyelő számára véletlennek tűnik elsősorban abból adódóan, hogy a kölcsönhatások létrejöttének okát azok nagy száma és bonyolultsága miatt nem ismeri, vagy a jelenség fizikai természetéből adódóan nem ismerheti.

PÁROS ÉS PÁRATLAN JELEK:

- Párosnak nevezzünk egy jelet, ha a jel a függőleges koordináta tengelyre szimmetrikus. $x(t) = 1, cos(x)$
- Páratlannak nevezünk egy jelet, ha a jel az origóra szimmetrikus.

PERIODICITÁS

Egy $x(t)$ folytonos idejű jel periodikus a T periódusidővel, ah $x(t + T) = x(t)$.

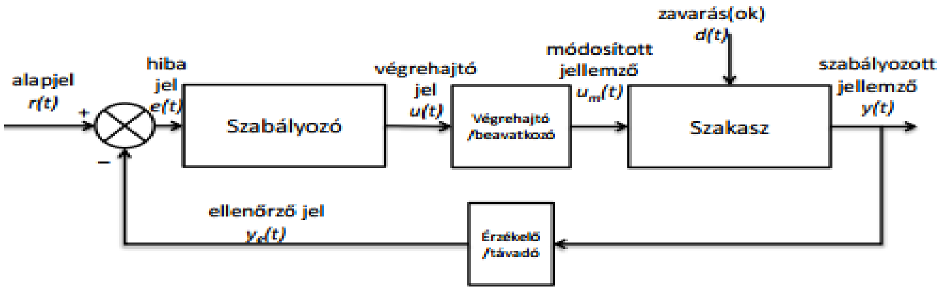
VEZÉRLÉS

Nyílt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző nincs (közvetlen) hatással az irányítási folyamatra. A vezérlést úgy kell kialakítani, hogy az irányítási rendszert érő zavaró hatások ne befolyásolhassák jelentősen az irányított szakaszt.

SZABÁLYOZÁS

Zárt hatásláncú irányítás, ahol az irányított jellemző célkitűzéstől való eltérését használjuk fel magának az eltérésnek a csökkentésére, megszüntetésére.

A SZABÁLYOZÁSI KÖR FELÉPÍTÉSE



A SZABÁLYOZÁSSAL SZEMBEN TÁMASZTOTT KÖVETELMÉNYEK.

1. **Stabilitás**
   - véges gerjesztő jelre véges kimenőjel
   - A szabályozási kör stabilitása legyen aszimptotikus stabil!
   - A magára hagyott rendszer térjen vissza az eredeti egyensúlyi helyzetébe
   - A tranziens 0-hoz tart
2. **Megfelelő statikus pontosság zavarelhárításra / alapjel követésre**
   - A statikus komponens legyen egyenlő az alapjellel!
   - Ugrásszerű bemenő jelváltozásra a maradandó hiba nélküli jelkövetés legyen!
3. **Előírt dinamikus viselkedés**
   - Maximális túllendülés
     $\sigma = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} 100\%$ (0 – 10 – max. 20 %)
   - Dinamikus pontosság sávja: a szabályozott jellemző új egyensúlyi helyzete körüli (±Δ) sáv. (±1, ±2, vagy ±5% körüli értéket szokás megadni)
   - Szabályozási idő: megadja, hogy a gerjesztés kezdetétől számítva mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a szabályozott jellemző bekerüljön a dinamikus pontosság sávjába
     $$y(\infty) - \Delta < y\,(t \geq T_{szab}) < y(\infty) + \Delta$$
   - Lengések száma: a szabályozási idő alatt az új egyensúlyi helyzet fölé- és alálendülések száma (minél kevesebb, annál jobb)
   - Felfutási idő: 90%-os idő: megadja, hogy a gerjesztés kezdetétől számítva mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a szabályozott jellemző elérjen („felfusson”) az új egyensúlyi helyzet ($y(\infty)$) 90%-ára.
   - Maradó szabályozási eltérés, statikus hiba: $e(\infty)$ (lehetőleg =0, de minél kisebb, annál jobb a szabályozás)
4. Érzéketlenség a paraméter változásokra (Robosztusság)
   - kvalititatív mérték: pl. 60°fázistartalékú rendszer robosztusabb, mint a 30°.
   - kvantitatív meghatározás: érzékenység vizsgálat a modellparaméterek változására

2. MODELLALKOTÁSI ELVEK. MODELLTÍPUSOK. MATEMATIKAI MODELLEK OSZTÁLYOZÁSA. LINEARIZÁLÁS JELENTŐSÉGE, MÓDSZEREI ÉS KORLÁTAI.

MODELLALKOTÁSI ELVEK.

DEDUKTÍV MODELLALKOTÁS

A deduktív modellezésnél **általános érvényű törvényszerűségekből kiindulva** egy konkrét, ismert jelenség leírására törekszünk. Az e célból végzett elméleti analízis során meghatározzuk a vizsgált rendszer határait, felbontjuk azt különálló elemekre, egy-egy **részrendszerre alkalmazzuk a megfelelő megmaradási és folytonossági törvényeket, rögzítjük a határfeltételeket és a részrendszerek közötti kölcsönhatásokat**. Mivel a jelenség belső felépítése ismert vagy hozzáférhető, a rendszer átlátszó a modellező számára, így ezt az esetet a "fehér doboz" névvel illetik. **A fizikai megfontolások** elsősorban **extenzív jellemzőkre felírt mérlegegyenleteket,** továbbá az **extenzív és intenzív jellemzők között kapcsolatot teremtő áram-hajtóerő összefüggéseket eredményeznek.**

INDUKTÍV MODELLALKOTÁS

A kísérletek során végzett megfigyelések információt tartalmaznak a jelenség és annak környezete között érvényesülő kölcsönhatásokról, azaz a rendszer bemenő és kimenő jeleiről. **A kísérleti vizsgálatok célja a jelenség olyan modelljének felállítása, mely utánozni képes a jelenség tényleges lefolyását**, reprodukálva **a rendszer kimenő jeleinek változását.** Tiszta induktív módszert alkalmazva nem rendelkezünk a rendszer belsejére vonatkozó, strukturális ismerettel, a rendszert mintegy "átláthatatlan" ún. "fekete doboz"-nak tekintjük. Az **induktív modellezési módszer elvben végtelen sok lehetséges modellt eredményezhet**.

MODELLTÍPUSOK

Egy **jelenség modellje eltérő formákban valósulhat meg**, tehát különböző lehet a modell megadásánál használt formalizmus, elsősorban attól függően, hogy milyenek a modellező által kitűzött célok és melyek az általa lényegesnek vélt, ill. megválasztott rendszerjellemzők. A következőkben különböző modellcsoportokat különböztetünk meg:

FUNKCIONÁLIS, KONCEPCIONÁLIS MODELL

A vizsgált rendszer részeit a rendszerben betöltött idealizált funkciójuk alapján definiáljuk (pl. funkcionális blokkvázlat, folyamatábra).

FIZIKAI MODELL

A vizsgált jelenséget rögzített tulajdonságú fizikai objektumokkal írjuk le analógiák, ill. hasonlósági törvények alapján.

MATEMATIKAI MODELL

A modellezendő **rendszer fizikai változói közötti kapcsolatokat egy bizonyos matematikai struktúrába képezzük le**

MATEMATIKAI MODELLEK OSZTÁLYOZÁSA.

TÖRVÉNYEK

A **törvények** azok az alapvető fizikai törvények, melyek a matematikai modellt jellemző **egyenletek általános alakját határozzák meg**. A jelenséget lehetőleg minél szűkebb fizikai területen kell tárgyalnunk, hogy a környezettől való elhatárolás, a különféle kölcsönhatások elhanyagolása lehetővé váljék. A vizsgált **jelenség leírása** az érintett területhez tartozó, **anyagra** és **energiára vonatkozó megmaradási és folytonossági törvények** és a belőlük levezetett **alaptörvények** (Kirchhoff-, Newton-, Fourier-, Maxwell-, Navier-, Stokes-féle törvények stb.) **alkalmazásán alapul**.

Az egyensúlyi egyenletek felírása és a peremfeltételek rögzítése jelenti a jelenség matematikai modelljének felállítását.

STRUKTÚRA

Struktúra a jelenség belső tagozódását, a részek kapcsolatát jellemzi. A jelenség vizsgálatánál magát a jelenséget nemcsak a környezetétől különítjük el, hanem különválasztjuk egyes elemeit és rögzítjük az elemek kölcsönhatását. Ez különösen hasznos számítógépes módszerek, modellezési technikák használatánál. A **részelemek** egymással való **kapcsolata rögzíti** a jelenségen belül az **anyag és energia terjedési útjait**, **az elemek típusa** pedig az **anyagnak** és az **energiának**, a jelenségen belül lezajló **átalakulását jellemzi**. A strukturális ismeret azt jelenti, hogy a matematikai modellekben szereplő egyenletek számát (kölcsönhatások) és típusát (elemek) meghatároztuk.

PARAMÉTEREK

A matematikai modell paramétereinek az egyes egyenletekben szereplő együtthatók konkrét értékeit tekintjük. Az **együtthatók kapcsolatosak** az egyes elemekre jellemző **fizikai mennyiségekkel**, **a határ- és a kezdeti feltételekkel**. **A paraméterértékek meghatározása** a modellalkotás legfontosabb gyakorlati, **a jelenség megfigyeléséhez kötött tevékenysége**. A paraméterek konkrét értékei általában kezdetben ismeretlenek, viszont a matematikai modell megadása csak akkor teljes, ha a struktúra mellett a paraméterek is ismertek.

ÁLLAPOT

Az állapot olyan változó, amely a jelenséget érő külső hatásokkal együttesen írja le a jelenség lefolyását. Állapotváltozóként általában a jelenség elemeinek viselkedésére jellemző fizikai mennyiségek pillanatértékei szerepelnek.

LINEARIZÁLÁS JELENTŐSÉGE, MÓDSZEREI ÉS KORLÁTAI.

Nemlineáris rendszerek vizsgálatára, jellemzésére szolgáló módszerek lényegében két fő csoportba sorolhatók:

- A lineáristól kevéssé eltérő viselkedést mutató rendszerek (rendszerelemek) jellemzésénél különböző linearizálási eljárásokkal (munkaponti, harmonikus, statisztikus stb. linearizálás) **visszavezetik a vizsgálatot lineáris módszerekre**.
- A lineáristól nagymértékben eltérő rendszereknél az előbbi linearizálási eljárások nem jelentenek megoldást, ezeknél **sajátos módszerek (grafikus, numerikus, analitikus sorbafejtéssel, illetve iterációval, állapot -, és fázistérmódszer stb.) kerülnek alkalmazásra**.

MUNKAPONTI LINEARIZÁLÁS

A korábbiakban megismertük, hogy lineáris tagok statikus jelleggörbéje (állandósult állapotban a kimenőjel és a bemenőjel, vagy azok differenciálhányadosai közötti kapcsolatra utal) egyenes, s ennek meredeksége jelenti a jelátviteli tag átviteli tényezőjét. Nemlineáris tagoknál a statikus jelleggörbe nem egyenes, de ha e jelleggörbe folytonos, a nemlineáris tag viselkedése a teljes működési tartományban (vagy a munkapont kis környezetében) linearizálható. Ha nemlineáris jelátviteli tagként működő rendszerelemnek több munkapontja van, megoldást jelent a statikus jelleggörbe e munkapontok környezetében történő szakazonkénti linearizálása (szakaszonkénti linearizálás) is.

HARMONIKUS LINEARIZÁLÁS

Az előbbi alfejezetben az időtartománybeli linearizálás lehetőségeit elemeztük, további lehetőséget jelenthet, ha a linearizált rendszert a frekvenciatartományban vizsgáljuk. A munkaponti linearizálási eljárásra (mind az idő-, mind a frekvenciatartományban alkalmazva) azonban jellemző, hogy a felállított modellek csak a munkapont szűk környezetében írják le megfelelően a tényleges viselkedést. Az eljárás további korlátját jelenti, hogy bár folytonos és differenciálható jelleggörbék, kis kitérések esetén alkalmazható, azonban nem differenciálható, szakadásos és többértékű függvényekre, nagy kitérésekre nem vezet eredményre. Ez utóbbi esetében jelenthet megoldást a frekvenciatartománybeli harmonikus linearizálási eljárás, melynek egyik kitüntetett esetét, a leírófüggvény módszert ismertetjük a következőkben.

3. LINEÁRIS RENDSZERMODELLEK: BEMENET/KIMENET MODELLEK ÉS TULAJDONSÁGAIK. VIZSGÁLÓ JELEK ÉS TULAJDONSÁGAIK. NEVEZETES VÁLASZFÜGGVÉNYEK. AZ ÁTVITELI FÜGGVÉNY. RENDSZERVIZSGÁLAT IDŐ- ÉS OPERÁTORTARTOMÁNYBAN.

BEMENET/KIMENET MODELLEK ÉS TULAJDONSÁGAIK

Az anyag- és energiaáram-hálózatok, mint összetett technológiai folyamatok bontásával nyert hálózatelemek, **műveleti egységek, az irányítási rendszerek** önállóan, s technológiákra telepítve az előzőekben említett egyszerűsítő feltételek alkalmazása esetén olyan **egyváltozós, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlettel jellemezhetők** (helyettesíthetők) **melynek általános alakja**:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 u(t)$$

ahol

- $y(t)$ a rendszer kimenőjele,
- $u(t)$ a rendszer bemenőjele,
- $a_0, a_1, \ldots, a_n \; ill. b_0, b_1, \ldots, b_m$ a rendszer állandó együtthatói.

Az egyenlet **összegzett alakban** felírva:

$$\sum_{i=i_0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{k=k_0}^{m} b_k u^{(k)}(t)$$

Az egyenlet jobb oldalán a rendszertől független bemenőjel, az ún. gerjesztőfüggvény (ennek lehetséges változatai), a bal oldalán a kimenőjel, a rendszert jellemző állapotváltozó(k) szerepel(nek). **A következő jelátviteli esetek különböztethetők meg** az összegzés kezdetei alapján, nevezetesen

- a rendszer **arányos** jellegű, ha: $i_0 = 0;$ $k_0 = 0$
- a rendszer **differenciáló** jellegű, ha: $i_0 = 0;$ $k_0 > 0$
- a rendszer **integráló** jellegű, ha: $i_0 > 0;$ $k_0 = 0$

Fizikailag megvalósítható rendszerekre, rendszerelemekre $m < n$. Ha ugyanis az $m > n$ eset is fennállhatna, pl. egységugrás bemenőjelre a kimeneten végtelenül kis idő alatt végtelen nagy amplitúdójú jel jelenne meg, ami a valóságban lehetetlen.

A rendszertechnikában a differenciálegyenlet állandó együtthatói helyett olykor **időállandók kerülnek bevezetésre**. A lineáris rendszer általános differenciálegyenletét ($i_0 = k_0 = 0$ feltételezésével) az alábbiak szerint átalakítva:

$$\frac{a_n}{a_0} y^{(n)}(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) + \cdots + y(t) = \frac{b_0}{a_0}\left(\frac{b_m}{b_0} u^{(m)}(t) + \frac{b_{m-1}}{b_m} u^{(m-1)}(t) + \cdots + u(t)\right)$$

a rendszer időállandóira, s az arányossági átviteli tényezőjére az alábbi kapcsolatokat rögzítve:

$$T_i = \sqrt[i]{\frac{a_i}{a_0}};\ T_k = \sqrt[k]{\frac{b_k}{b_0}}; K = \frac{b_0}{a_0} = \frac{y(t=\infty)}{u(t=\infty)}$$

a következő időállandós alak adódik:

$$T_n^n y^{(n)}(t) + \cdots + T_1 y^{(1)}(t) + y(t) = K\left(T_m^m u^{(m)}(t) + \cdots + T_1 u^{(1)}(t) + u(t)\right)$$

Az előbbi összegzett alakban:

$$y(t) + \sum_{i=1}^{n} T_i^i y^{(i)}(t) = K\left(u(t) + \sum_{k=1}^{m} T_k^k u^{(k)}(t)\right)$$

Az időállandók idő dimenziójúak, a rendszer átviteli tényezője mely megadja a kimenőjel és a bemenőjel viszonyát állandósult állapotban **a jelek hányadosának megfelelő dimenziójú.** Az A átviteli tényező előbbi értelmezése természetesen csak akkor érvényes, ha a_0 és b_0 zérustól különböző számok (továbbá $i_0 = k_0 = 0$).

Az előbbi ***n***-edrendű differenciálegyenlet egyértelmű megoldásához *n* kezdeti feltétel megadása szükséges. A differenciálegyenlet megoldása az $\boldsymbol{y(t)}$ kimenőjel időbeli lefolyását szolgáltatja a feltételezett $\boldsymbol{u(t)}$ bemenőjelre (peremfeltétel) és az adott kezdeti feltételekre. A kezdeti feltételek megadása a mérnöki gyakorlatban többnyire a kimenőjel, illetve deriváltjai t Ž 0 időpillanathoz tartozó értékeinek rögzítését jelenti.

A differenciálegyenlet-módszer alkalmas folyamatos-folytonos működtetésű, (munka-pontja közelében) lineáris viselkedésű műszaki-technológiai objektumok, az ezekben végbemenő változások, folyamatok dinamikájának jellemzésére. Bármilyen alakú is legyen az *n*-ed rendű differenciálegyenlet, egyértelmű megoldásához *n* kezdeti feltétel megadása szükséges. A differenciálegyenlet megoldása adott peremfeltétel (az bemenőjel jellege) és a kezdeti feltételek rögzítése esetén a kimenőjel időbeli lefolyását szolgáltatja. A differenciálegyenlet megoldása különösen bonyolultabb gerjesztő függvényekre (bemenő jelekre) hosszadalmas lehet, továbbá a jelátviteli tagok kapcsolódásának kifejezése az időtartományban nehézkes. Ezeket a hátrányokat küszöböli ki az operátortartományban és a frekvenciatartományban történő vizsgálat.

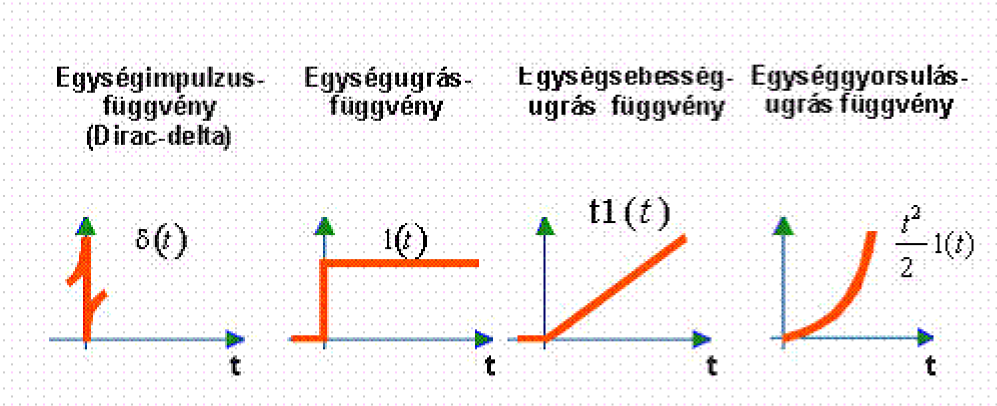
VIZSGÁLÓ JELEK ÉS TULAJDONSÁGAIK.

Lineáris rendszerek determinisztikus vizsgálatakor a rendszer bemenetére ún. tipikus vizsgálójelet juttatunk (minden kezdeti feltétel zérussal egyenlő). A válasz-időfüggvény valamely tipikus bemenőjel hatására a kimeneten létrejövő jel (kimenőjel) időbeli változását írja le. A válasz-időfüggvények két $w(t)$ leggyakoribb változata a súlyfüggvény és az átmeneti függvény ($v(t)$).

Gyakorlati szempontból a legfontosabb **tipikus vizsgálójelek** a következők:

- az egységimpulzus-függvény (Dirac-delta): $\delta(t)$,
- az egységugrás-függvény: $1(t) = \varepsilon(t)$,
- a egységsebességugrás-függvény: $t * 1(t) = t * \varepsilon(t)$
- az egységgyorsulásugrás-függvény: $\frac{t^2}{2} * 1(t) = \frac{t^2}{2}\varepsilon(t)$

A tipikus jelek **időbeli lefutását** tüntettük fel. A szomszédos vizsgálójelek egymásnak deriváltjai, illetve integráljai.



1. Ábra Tipikus vizsgálójelek

NEVEZETES VÁLASZFÜGGVÉNYEK

- Az egységimpulzus-függvény olyan egységnyi területű impulzus, amelynek értéke a $t = 0$ időpontban, $t < 0$ és $t > 0$ esetekben pedig egyaránt zérus.
  Az egységimpulzus-függvény bemenőjel hatására a tag, vagy a rendszer kimenetén megjelenő jelet súlyfüggvénynek nevezzük. A súlyfüggvény $\left(w(t)\right)$ jellemző a rendszerre, ismeretében következtethetünk a rendszer szerkezetére.
- Az egységugrás-függvény értéke $t < 0$-ra zérus, $t \geq 0$-ra egységnyi. Egységugrás alakú bemenőjel hatására a rendszer (rendszerelem) kimenetén megjelenő jelet átmeneti függvénynek nevezzük. Az átmeneti függvény $\left(v(t)\right)$ ugyancsak jellemző a vizsgált rendszerre.
- **Az egységsebességugrás-függvény értéke $t < 0$-ra zérus, $t \geq 0$-ra pedig t.** Hatására a rendszer kimenetén az egységsebesség-ugrásra vonatkozó átmeneti függvény $\left(v_t(t)\right)$ lép fel.
- **Az egységgyorsulásugrás-függvény értéke $t < 0$-ra zérus, $t \geq 0$-ra pedig $t^2/2$.** A rendszer kimenetén hatására az egységgyorsulás-ugrásra vonatkozó átmeneti függvény $\left(v_{t^2/2}(t)\right)$jelentkezik.

AZ ÁTVITELI FÜGGVÉNY.

A kimenő jel Laplace transzformáltja és a bemenő jel Laplace transzformáltjának hányadosa, zérus kezdeti feltételek mellett, az átviteli függvénynek nevezzük.

$$G(s) = \left.\frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}\right|_{z.k.f} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Tulajdonságai:

- lineáris, idő invariáns rendszereket jellemzünk vele
- kapcsolatot teremt a bemenet-kimenet típusú modellek és állapottér modellek között.
- A számláló gyökei a zérus helyek, nevező gyökei a pólusok.

RENDSZERVIZSGÁLAT IDŐ- ÉS OPERÁTORTARTOMÁNYBAN.

RENDSZERVIZSGÁLAT IDŐTARTOMÁNYBAN:

$$\boldsymbol{y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2\varepsilon(t);\; y(-0) = 0, y'(-0) = 0}$$

KARAKTERISZTIKUS EGYENLET

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 * 3}^2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Mivel a sajátértékek valós részei negatívak ezért a rendszer G-V stabil.

TRANZIENS ÖSSZETEVŐ

$y_{tr}(t) = M_1 e^{-t} + M_2 e^{-3t}$

STACIONER ÖSSZETEVŐ

$\underbrace{A"}_{\emptyset} + \underbrace{4A'}_{\emptyset} + 3A = 2$

$3A = 2$

$A = \frac{2}{3}$

$y_{str}(t) = \frac{2}{3}$

SZABADVÁLASZ

$y(t) = M_1 e^{-t} + M_2 e^{-3t} + \frac{2}{3}$

KEZDETI FELTÉTELT KIELÉGÍTŐ VÁLASZ

$y(-0) = y(+0) = 0$

$y'(-0) = y'(+) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1) \;\; M_1 e^0 + M_2 e^0 + \frac{2}{3} = y(+0) = 0 \\ 2) -M_1 e^0 + -3M_2 e^0 = y'(+0) = 0 \end{array}\right\} +$$

$-2M_2 + \frac{2}{3} = 0$

$-2M_2 = -\frac{2}{3}$

$M_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

1) $M_1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0 \rightarrow M_1 = -1$

$\boldsymbol{y(t) = \varepsilon(t)\left(-e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}\right)}$

RENDSZERVIZSGÁLAT OPERÁTOR TARTOMÁNYBAN

$\boldsymbol{y"(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 2\varepsilon(t)}$; u(t) $=$ $\boldsymbol{\varepsilon(t)e^{-2t} y(-0) = 0, y'(-0) = 0}$

LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ

$Y(s)s^2 + 4Y(s)s + 3Y(s) = 2U(s)$

$Y(s)(s^2 + 4s + 3) = U(s)(2)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} = \frac{2}{(s+3)(s+1)}$$

u(t) $=$ $\boldsymbol{\varepsilon(t)e^{-2t}} \rightarrow U(s) = \frac{1}{s+2}$

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{2}{(s+3)(s+1)}\frac{1}{s+2}=\frac{2}{(s+1)(s+2)(s+3)}=\left\|\begin{matrix}p_1=-1\\p_2=-2\\p_3=-3\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+3}=\left\|\begin{matrix}A_{p_1=-1}=\frac{2}{(-1+2)(-1+3)}=1\\A_{p_2=-2}=\frac{2}{(-2+1)(-2+3)}=-2\\A_{p_3=-3}=\frac{2}{(-3+1)(-3+2)}=1\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}+\frac{1}{s+3}\overrightarrow{L^{-1}}\boldsymbol{y(t)=\varepsilon(t)e^{-t}-2\varepsilon(t)e^{-2t}+\varepsilon(t)e^{-3t}}$$

Sok fontos függvénynek nincs Fourier-transzformáltja, ezért a frekvenciafüggvény módszerrel bajba juthatunk.

A problémán segít a Laplace-transzformáció (mert így a Fourier-transzformáció módszer majdnem minden időegységre kibővíthető).

A számítások egyszerűbben lesznek megoldhatók, 3 lépésben:

- a kiindulási adatok Laplace transzformációja;
- operátor tartományban a megfelelő műveletek elvégzése;
- ezen eredmények visszatranszformálása időtartományba.

4. FOURIER-SOR, FOURIER-INTEGRÁL. A FOURIER- ÉS LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZHATÓSÁGA, AZONOSSÁGAI. INVERZ-TRANSZFORMÁCIÓK

T Periódusidő

FOURIER-SOR

Tetszőleges periodikus jel előállítható harmonikus jelek szuperpozíciójaként.

Minden $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$ körfrekvenciájú periodikus függvény felírható $k\omega_0$ $(k=1,2,\dots)$ körfrekvenciájú szinuszos és koszinuszos függvények végtelen összegeként:

$$f(t,T)=S_0+\sum_{k=0}^{\infty}(A_K\cos(k\omega t)+B_K\sin(k\omega t))$$

$$S_0=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t,T)\,dt \qquad A_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t,T)\cos \mathrm{k\omega t}\,\mathrm{dt} \qquad B_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t,T)\sin \mathrm{k\omega t}\,\mathrm{dt}$$

FOURIER SOR KOMPLEX ALAKJA:

$$f(t,T)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t,T)\, e^{-jk\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}}\, dt \qquad\qquad C_k = \frac{A_k - jB_k}{2}$$

FOURIER-INTEGRÁL.

A gyakorlatban egy rendszer bemenetére legtöbbször nem periodikus, hanem aperiodikus lefolyású jelek kerülnek. Ezek a jelek a Fourier-sorból a $T \to \infty$ határátmenettel kapható Fourier-integrál alakjában írhatók fel.

Az olyan nem periodikus jel, amely abszolút integrálható, vagyis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt = véges$$

szintén előállítható harmonikus jelek szuperpozíciójával.

VALÓS ALAKBAN:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t))$$

ahol:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cos(\omega t) dt\,, \qquad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\cos(\omega t) dt$$

KOMPLEX ALAKBAN:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega\right)$$

ahol:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt$$

A FOURIER- ÉS LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ ALKALMAZHATÓSÁGA, AZONOSSÁGAI.

Fourier-integrálban az összes frekvencia megtalálható. Mivel az amplitúdó spektrum ω-ban folytonos, nem adható meg egyetlen értéke, csak valamely ω körfrekvencia $d\,\omega$ sávra számított sűrűsége. Ezért aperiodikus jeleknél amplitúdósűrűség-spektrumról beszélünk.

A Fourier-transzformáció csak abszolút integrálható jelekre alkalmazhattuk, ami nagyon behatárolta a használhatóságát. Ha a rendszerben előforduló jeleket olyan mértékben összenyomnánk, hogy abszolút integrálhatók legyenek (tehát az abszolút értékük alatti terület véges nagyságúvá csökkenjen), a Fourier-transzformálás teljes eszköztára bevethető lenne. Pontosan ezt teszi a Laplace-transzformáció.

A legtöbb előforduló jelet abszolút integrálhatóvá teszi az $e^{-\sigma t}$ függvénnyel való szorzás, amennyiben $\sigma > \alpha > 0$, α a bármilyen kicsi lehet. Ez csak $t > 0$ időpontokra igaz, így a számítás csak a pozitív időtartományban belépő függvényekre alkalmazható! Az összenyomott jel Fourier-transzformáltja:

$$\mathcal{F}\{y(t)e^{\omega t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}e^{-\sigma t}dt = \int_{0}^{\infty} y(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$$

$s = \sigma + j\omega$ helyettesítéssel:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = \int_{0}^{\infty} y(t)e^{-st}dt$$

Ez a Laplace-transzformáció alapösszefüggése.

INVERZ-TRANSZFORMÁCIÓK

FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ TÉTELEI:

LINEARITÁS
C_1, C_2 konstansok esetén.

$$\mathcal{F}\{C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t)\} = C_1\mathcal{F}\{s_1(t)\} + C_2\mathcal{F}\{s_2\,(t)\}$$

ELTOLÁSI TÉTEL
Ha az $s(t)$ jel spektruma $S(j\omega)$, akkor az $s(t-\tau)$ eltol jelre.

$$\mathcal{F}\{s_2(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}S(j\omega)$$

azaz az időbeli eltolás $\tau - val, e^{-j\omega\tau}$-val való szorzást jelent,azaz $\omega\tau$ értékű fázisforgatást jelent a spektrumban.

KONVOLÚCIÓ SPEKTRUMA
Az időtartományban végzett konvolúció

$$y(t) = w(t) * s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w(t-\tau)d\tau,$$

a frekvenciatartományban szorzássá egyszerűsödik.

$$Y(j\omega) = W(j\omega)S(j\omega)$$

DERIVÁLT JEL SPEKTRUMA
Ha az $s(t)$ jel spektruma $S(\omega)$, akkor az $s'(t)$ derivált jelre

$$\mathcal{F}\{s'(t)\} = j\omega S(j\omega),$$

tehát az időtartománybeli deriválás $j\omega$-val való szorzást, azaz az eredeti amplitúdó spektrum ωval szorzását és a fázissprektrum $\frac{\pi}{2}$-vel való forgatását jelenti.

MODULÁCIÓS TÉTEL

$$\mathcal{F}\{s(t)e^{j\omega_0 t}\} = S\big(j(\omega-\omega_0)\big),$$

szinuszos jellel való szorzás esetén

$$\mathcal{F}\{s(t)cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\Big[S\Big(j(\omega-\omega_0) + S\big(j(\omega+\omega_0)\big)\Big)\Big]$$

azaz az eredeti $S(j\omega)$ spektrum az ω_0 és a $-\omega_0$ körfrekvenciákon jelenik meg az eredeti amplitúdó felével.

LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ TÉTELEI:

LINEARITÁS

C_1, C_2 konstansok esetén.

$$\mathcal{L}\{C_1 f(t) + C_2 g(t)\} = C_1 \mathcal{L}\{f(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{g\ (t)\} = C_1 F(s) + C_2 G(s)$$

ELTOLÁSI TÉTEL

Ha az $\varepsilon(t)s(t)$ belépő jelet $\tau > 0$ idővel eltoljuk, → $\varepsilon(t-\tau)s(t-\tau)$ jelet kapjuk, melynek Laplace transzformációja:

$$\mathcal{L}\{\varepsilon\varepsilon(t-\tau)s(t-\tau)\} = \int_{\tau-0}^{\infty} s(t-\tau)e^{-st}dt = \int_{\tau-0}^{\infty} s(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau}dt$$

Vagyis az időbeli $\tau > 0$ eltolás a komplexum frekvenciatartományában $e^{-s\tau}$ komplex exponenciális függvénnyel való szorzásnak felel meg.

DERIVÁLÁS

Ha $s(t)$ jel szakaszonként folytonos és differenciáltató, és létezik $S(s)$ Laplace transzformáltja, akkor $s'(t)$ Laplace transzformáltja:

$$\mathcal{L}\{s'(t)\} = sS(s) - s(-0)$$

INTEGRÁLÁS

Ha létezik $\varepsilon(t)s(t)$ jel $S(s)$ Laplace transzformáltja, akkor a jel integráljának a Laplace transzformáltja:

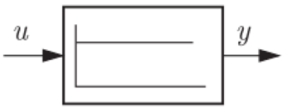
$$\mathcal{L}\left\{\int_{-0}^{t} s(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{2}S(s)$$

MEGJEGYZÉS

Mivel a differenciálásnak illetve integrálásnak s-el való szorzás illetve osztás felel meg, a differenciál egyenletek helyébe a transzformált tartományban algebrai egyenletek lépnek. Így a feladatok megoldása lényegesen egyszerűsödik.

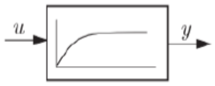
5. TIPIKUS DINAMIKUS TAGOK (NULLAD-, ELSŐ- ÉS MÁSODRENDŰ TAG, TISZTA INTEGRÁLÓ ÉS EGYTÁROLÓS INTEGRÁLÓ TAG, TISZTA DERIVÁLÓ ÉS KÖZELÍTŐ DERIVÁLÓ TAG) ÉS JELLEMZÉSÜK. PARAMÉTEREK HATÁSÁNAK BEMUTATÁSA AZ ÁTMENETI, ILLETVE A SÚLYFÜGGVÉNY SEGÍTSÉGÉVEL. PÓLUSOK HATÁSA A TRANZIENSRE.

NULLADRENDŰ/ ARÁNYOS TAG

jelátviteli tag	P **(arányos)**
jelölés	
differenciálegyenlet	$y(t) = k\,u(t)$
átmeneti függvény	$v(t) = k$
állandósult rész	k
tranziens rész	-
súlyfüggvény	$(\delta(t))$
átviteli függvény	k

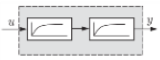
- Jellemző paraméter
  - k átviteli tényező (vagy ha nincs mértékegysége, erősítési tényező)
- Paraméterek hatása
  - Egységnyi, ugrásszerű bemenőjel változásra a kimenőjel k

ELSŐRENDŰ TAG

jelátviteli tag	PT_1 **(arányos, elsőrendű időkésleltetéses)**
jelölés	
differenciálegyenlet	$T_1\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)\ \ , y(0) = y_0$
jellemző paraméter	T_1: időállanó, k: átviteli tényező
átmeneti függvény	$v(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$
átmeneti függvény állandósult rész	$k\varepsilon(t)$
átmeneti függvény tranziens rész	$-ke^{-\frac{t}{T_1}}$
súlyfüggvény	$\frac{k}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}$
átviteli függvény	$G(s) = \frac{k}{T_1 s + 1}$

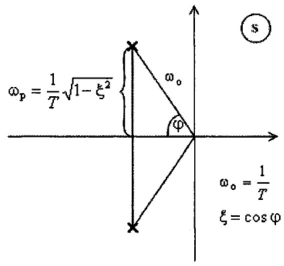
- Paraméterek hatása
  - Egységnyi, ugrásszerű bemenőjel változásra a kimenőjel k
  - T_1 növelésével kevésbé meredek felfutás, lassabban kerül az új egyensúlyi helyzet közelébe.

MÁSODRENDŰ TAG

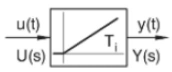
jelátviteli tag	PT_2 (arányos, másodrendű időkésleltetéses)
jelölés	
differenciálegyenlet (valós pólusok)	$\boldsymbol{T_2T_1\ddot{y}(t) + (T_2 + T_1)\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)}$
jellemző paraméter T_1, T_2 időállandók, k : átviteli tényező (erősítés)	
átmeneti függvény, ha $T_1 \neq T_2$	$v(t) = k(1 - \frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}})$
állandósult rész	$v_{st}(t) = k\varepsilon(t)$
tranziens rész	$v_{tr}(t) = -k(\frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}})$
súlyfüggvény	$w(t) = \frac{k}{T_1 - T_2}(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}})$
átviteli függvény	$G(s) = \frac{k}{(T_2s + 1)(T_1s + 1)}$

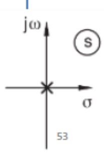
jelölés	
Diff.egyenlet (komplex pólusok)	$T^2\ddot{y}(t) + 2\xi T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$
jellemző paraméterek	T=1/ω_0 : időállandó; ω_0 :sajátfrekvencia; ξ : csillapítási tényező; k : átviteli tényező
átmeneti függvény ILT-val	$v(t) = k\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi}{T}t}\left(\sqrt{1-\xi^2}\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \xi\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right)$
állandósult rész	$v_{st}(t) = k\varepsilon(t)$
tranziens rész	$v_{tr}(t) = k\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi}{T}t}\left(\sqrt{1-\xi^2}\cos\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t + \xi\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right)\right)$
súlyfüggvény	$w(t) = \frac{k}{T\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\frac{\xi}{T}t}\sin\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t$
átviteli függvény	$G(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi T\ s + 1}$

- Paraméterek hatása
  - Egységnyi, ugrásszerű bemenőjel változásra a kimenőjel k
  - T növelése „széthúzza” a tranzienst, a lengési hajlamot nem befolyásolja.
  - ha $0 \leq \xi < 1$ átmeneti függvény csillapodó lengéssel
  - ha $\xi = 0$ állandó amplitúdójú lengés
  - ha ξ aperiódikus átmeneti függvény: két db sorba kapcsolt PT1 jelátviteli tag eredő viselkedése
- Pólusok hatása a tranziensre
  - Negatív pólusok ($T_1 \neq T_2$)
    - ξnövelésével az inflexiós pont jobbra tolódik.
  - Negatív pólusok ($T_1 = T_2$)
    - $\xi = 1$ aperiodikus határeset
  - Komlpex pólusok



INTEGRÁLÓ TAG

jelátviteli tag	I (integráló)
jelölés	
differenciálegyenlet	$T_I\dot{y}(t) = u(t), \quad y(0) = y_0$ $\frac{dy(t)}{dt} = K_I u(t) \qquad K_I = 1/T_I$ $y(t) = \frac{1}{T_I}\int_0^t u(t)dt + c$
átmeneti függvény	$v(t) = \frac{1}{T_i}t$, *t>=0, y(0)=0*
állandósult rész	*v(t)*
	Nem vesz fel újabb egyensúlyi helyzetet. *Zérus bemenőjel esetén korábbi állapotának kimenőjelét tartja.*
súlyfüggvény	ugrásfüggvény
átviteli függvény	$G(s) = \frac{1}{T_Is}, vagy\ G(s) = \frac{K_I}{s}$



- Jellemző paraméter

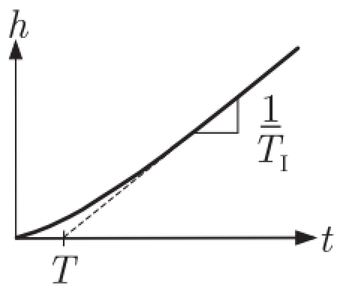
- T_i integrálási idő

- Paraméterek hatása
  - Integrálási idő: az az időtartam, amely alatt a kimenőjel értéke eléri a bemenőjel értékét.

EGYTÁROLÓS INTEGRÁLÓ TAG

jelátviteli tag	IT_1 (integráló, időkésleltetéses)
jelölés	
differenciálegyenlet	$T_i T\ddot{y}(t) + T_i\dot{y}(t) = u(t)$ $y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = 0$
átmeneti függvény	$v(t) = \frac{1}{T_i}t - \frac{T}{T_i}\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$
állandósult rész	$v_{st}(t) = \frac{1}{T_i}t - \frac{T}{T_i} = \frac{1}{T_i}(t - T)$
tranziens rész	$v_{tr}(t) = \frac{T}{T_i}e^{-\frac{t}{T}}$
súlyfüggvény	$w(t) = \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$
átviteli függvény	$G(s) = \frac{1}{T_I s(Ts + 1)}$ 31

- Jellemző paraméter
  - T_i integrálási idő
  - T időállandó
- Paraméterek hatása

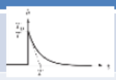


DIFFERENCIÁLÓ TAG

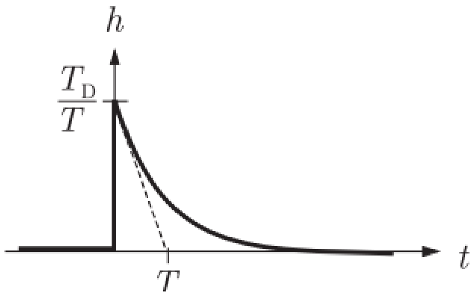
jelátviteli tag	D (differenciáló)
jelölés	
differenciálegyenlet	$y(t) = T_D\frac{du}{dt}$
jellemző paraméter	T_D : differenciálási idő
átmeneti függvény	$T_D\delta(t)$
állandósult rész	$y_s(t) \sim \frac{du}{dt}$
	Differenciáló jellegű tagok a valóságban mindig csak olyan rendszerben fordulnak elő, amely kizárja impulzus vagy ugrás alakú bemenőjel alkalmazhatóságát. *állandó értékű bemenőjelre zérus kimenőjelet ad*
súlyfüggvény	két azonos területű és ellentétes irányú DIRAC delta
átviteli függvény	$G(s) = T_D s$

- A differenciáló tag állandó értékű bemenőjelre zérus kimenőjelet ad.

KÖZELÍTŐ D TAG/ DT1

jelátviteli tag	DT_1 (differenciáló, időkésleltetéses)
jelölés	
Differenciál-egyenlet	$T_1\dot{y}(t) + y(t) = T_D\dot{u}(t) \quad y(0) = 0$
átmeneti függvény	$v(t) = \frac{T_D}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$
állandósult rész	$v(\infty) = 0$
tranziens rész	$v(t)$
átviteli függvény	$G(s) = \frac{T_D s}{(T \ \ s + 1)}$

- Jellemző paraméter
  - T_D deriválási idő
  - T időállandó
- Paraméterek hatása



6. RENDSZERVIZSGÁLAT FREKVENCIATARTOMÁNYBAN. FREKVENCIAFÜGGVÉNY (ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA) SZÁRMAZTATÁSA ÉS ÁBRÁZOLÁSI MÓDJAI. A NYQUIST- ÉS BODE-DIAGRAM SAJÁTOSSÁGAI. TIPIKUS DINAMIKUS TAGOK (NULLAD-, ELSŐ- ÉS MÁSODRENDŰ TAG, TISZTA INTEGRÁLÓ ÉS EGYTÁROLÓS INTEGRÁLÓ TAG, TISZTA DERIVÁLÓ ÉS KÖZELÍTŐ DERIVÁLÓ TAG) FREKVENCIAFÜGGVÉNYEI.

RENDSZERVIZSGÁLAT FREKVENCIATARTOMÁNYBAN.

A lineáris rendszereket jellemző differenciálegyenlet (egyenletrendszer) megoldásának nehézségei, illetve a konvolúciós integrállal kapcsolatban felmerülő számítástechnikai problémák pl. a frekvenciatartományba való transzformálással küszöbölhetők ki. A frekvenciatartományban történő műveletvégzés eredményeiből a visszatranszformálás után következtetünk a rendszer időbeli viselkedésére.

E módszer nagy előnye, hogy a Fourier-transzformációval a differenciálegyenletek algebrai egyenletté alakíthatók át. Összetett, bonyolult felépítésű, sokelemű rendszerek esetén – az elemek kapcsolódását ismerve – az eredő jelátviteli viselkedés meghatározása a frekvenciatartományban algebrai műveletvégzés eredménye. **A visszatranszformálás után a keresett kimenőjel időfüggvénye már a teljes rendszer viselkedésével kapcsolatos információkat hordozza.**

FREKVENCIAFÜGGVÉNY (ÁTVITELI KARAKTERISZTIKA) SZÁRMAZTATÁSA ÉS ÁBRÁZOLÁSI MÓDJAI.

Lineáris rendszer esetén **a rendszer bemenetére adott ω körfrekvenciájú szinuszos gerjesztőjel** a kvázistacionárius állapot beállása után **a kimeneten ugyancsak ω körfrekvenciájú szinuszos válaszjelet eredményez**, amely a bemenőjeltől amplitúdóban és fázisban különbözhet.

Legyen a bemenet R amplitúdójú ω_0 frekvenciájú szinuszos jel:

$$u(t) = R\, sin\omega_0 t$$

az „állandósult” állapotbeli kimenet:

$$y(t) = C\, sin(\omega_0 t + \varphi)$$

ahol C a kimenet amplitúdója, a φ fázissietés vagy fáziskésés.

az $u(t)$ bemenet általános alakja frekvenciatartományban :

$$u(t) = R(\omega) sin\left(\omega t + \varphi_b\right) = Im\left(R(\omega)e^{j\varphi_b(\omega)}\ e^{j\omega t}\right) = Im\left(U(j\omega)e^{j\omega t}\right)$$

- ahol $R(\omega)$ bemenet konstans vagy frekvenciafüggő amplitúdója
- $U(j\omega) = R(\omega)e^{j\varphi_b(\omega)}$ az amplitúdót és a kezdeti fáziseltolás szöget tartalmazó komplex kifejezés, a bemenő jel $t = 0$ időpillanathoz tartozó komplex vektora

Kimenet általános alakja:

$$y(t) = C(\omega) sin\left(\omega t + \varphi_k\right) = Im\left(C(\omega)e^{j\varphi_k(\omega)}\ e^{j\omega t}\right) = Im\left(Y(j\omega)\, e^{j\omega t}\right)$$

Legyen $G(s)$ a tag átviteli függvénye, ekkor:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \to Y(s) = G(s)U(s)$$

Analóg módon képezzük a szinuszos kimenő és bemenő jel exponenciális alakban felírt hányadosát:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)e^{j\omega t}}{U(j\omega)e^{j\omega t}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

- ahol $A(\omega) = \frac{C(\omega)}{R(\omega)}$az amplitúdóviszonyt kifejező abszolút érték
- $\varphi(\omega) = \varphi_k(\omega) - \varphi_b(\omega)$ a fáziseltolások különbségét megadó fázisszög

Frekvenciatartomány bevezetése az $s = j\omega$ kifejezés behelyettesítésével:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$$

A frekvenciafüggvények szokásos felírása:

$$Y(j\omega) = |Y(j\omega)| \angle Y(j\omega)$$

ahol $|Y(j\omega)|$ a jel amplitúdója $\angle Y(j\omega)$ a jel fázisa.

A kimenet meghatározása

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

a összefüggés alapján:

- A kimenőjel amplitúdója:

$$|Y(j\omega)| = |G(j\omega)||U(j\omega)| \rightarrow C(\omega) = A(\omega)R(\omega)$$

- fázisa

$$\angle Y(j\omega) = \angle G(j\omega) + \angle U(j\omega) \rightarrow \varphi_k(\omega) = \varphi(\omega) + \varphi_b(\omega)$$

ÁBRÁZOLÁSI MÓDOK

AMPLITÚDÓ-FÁZIS GÖRBE, NYQUIST-DIAGRAM

Frekvenciát $0 \leq \omega < \infty$ tartományban változtatva minden ω értékhez meghatározzuk és a komplex síkon ábrázoljuk a $G\,(j\omega) = Re\big(G\,(j\omega)\big) + jIm\big(G\,(j\omega)\big)$ képletben szereplő $A(\omega)$ abszolút értéket és $\varphi(\omega)$ fáziseltolási szöget.

BODE-DIAGRAM

Az amplitúdó logaritmusát és a fázisszöget a frekvencia függvényében ábrázolva kapjuk a Bode-diagramot.

$$G\,(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = |G\,(j\omega)|\,e^{j\varphi(\omega)}$$

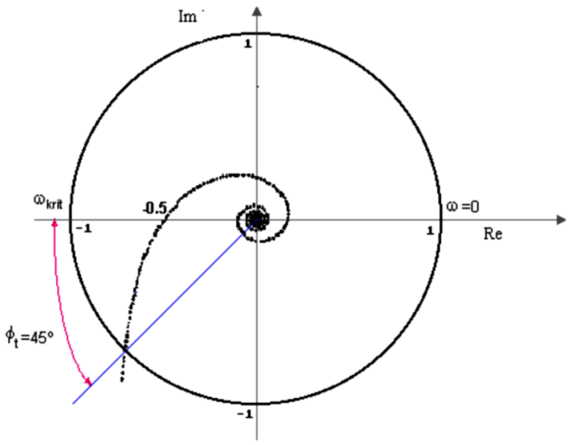
$$lnG(j\omega) = ln|G(j\omega)| + j\varphi(\omega)$$

Gyakorlatban az amplitúdóviszonyt decibelben adjuk meg: $A(\omega)[dB] = 20lg|G(j\omega)|$

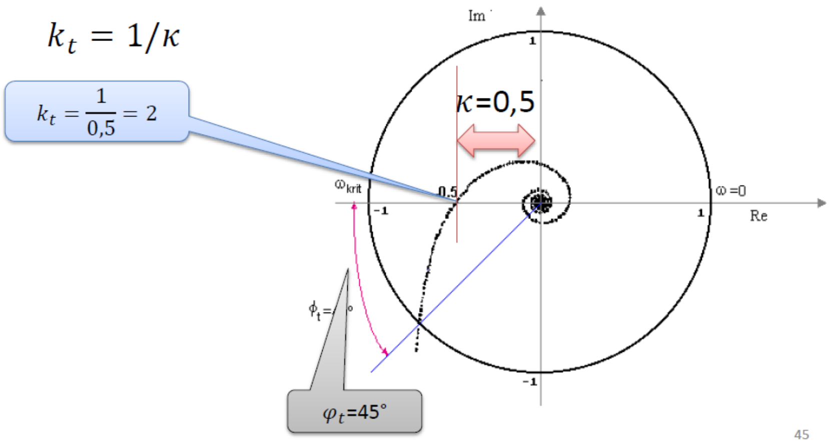
A NYQUIST- ÉS BODE-DIAGRAM SAJÁTOSSÁGAI.

NYQUIST

- **Stabilitás**
  - Ha a felnyitott kör frekvencia függvénye a Nyquist-diagramban balról kerüli meg a -1+j0 pontot, a rendszer labilis
  - Ha a felnyitott kör frekvencia függvénye a Nyquist-diagramban jobbról halad el a -1+j0 pont mellett, a rendszer stabil
  - Ha a felnyitott kör frekvencia függvénye a Nyquist-diagramban áthalad a -1+j0 ponton, a rendszer a stabilitás határán van
- **Fázistartalék**
  - Azon a frekvencián, amelyen az amplitúdó viszony = 1, $A(\omega_{stab}) = 1$ és a fáziskésés kisebb, mint 180° $|\varphi(\omega_{stab})| < 180°$ ill. $|\varphi(\omega_{stab})| < \pi\ [rad]$
  - $\varphi_t = 180° - |\varphi(\omega_{stab})|$ ill. $\varphi_t = \pi - |\varphi(\omega_{stab})|\ [rad]$
  - A fázistartalék azt adja meg, hogy a vágási körfrekvenciánál a rendszer fázisszögét még mennyivel lehet megnövelni, hogy a rendszer a stabilitás határhelyzetébe $(-180°)$ kerüljön

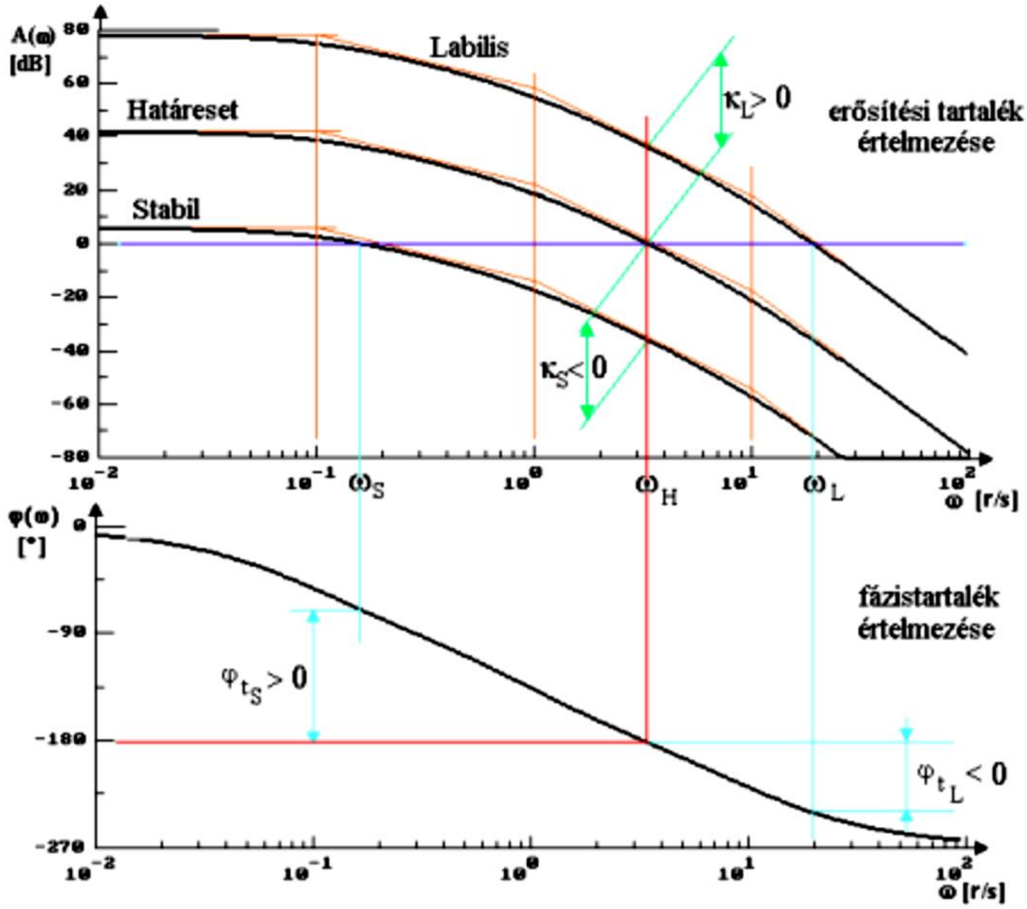


- **Erősítési tartalék**
  - Azon a frekvencián, amelyen a fáziskésés -180°, az amplitúdó viszony <1,
    $$A(\omega_{\varphi=180°}) = \kappa < 1$$
  - Erősítési tartalék: $k_t = \frac{1}{\kappa}$
  - Az erősítési tartalékkal a rendszer erősítését megszorozva a rendszer a stabilitás határhelyzetébe kerül.



BODE

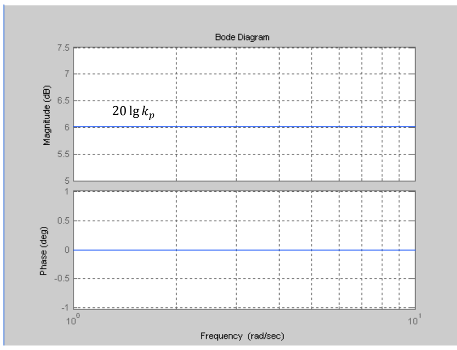
- **Stabilitás**
  - Ha az amplitúdó görbe és a $0\ dB$-es tengely metszéspontjához tartozó φ fázisszög
    - $\varphi > 180°$ a rendszer instabil
    - $\varphi = 180°$ a rendszer a stabilitás határán van
    - $\varphi < 180°$ a rendszer stabil.
- **Fázistartalék, Erősítési tartalék** (ábra)
  - S-stabil
  - H-határeset
  - L-labilis



TIPIKUS DINAMIKUS TAGOK (NULLAD-, ELSŐ- ÉS MÁSODRENDŰ TAG, TISZTA INTEGRÁLÓ ÉS EGYTÁROLÓS INTEGRÁLÓ TAG, TISZTA DERIVÁLÓ ÉS KÖZELÍTŐ DERIVÁLÓ TAG) FREKVENCIAFÜGGVÉNYEI.

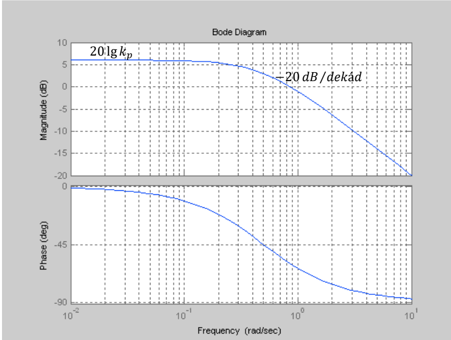
NULLAD (P)

- $G(s) = k_p$



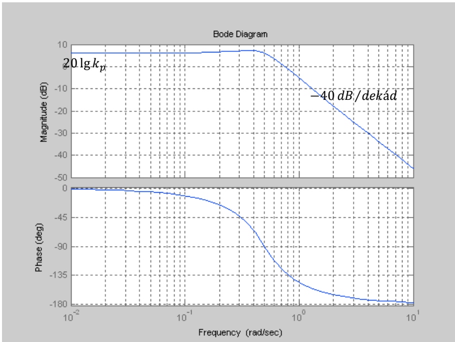
ELSŐRENDŰ IDŐKÉSLELTETÉSES (PT1)

- $G(j\omega) = \frac{k_p}{1+T_1 j\omega}$



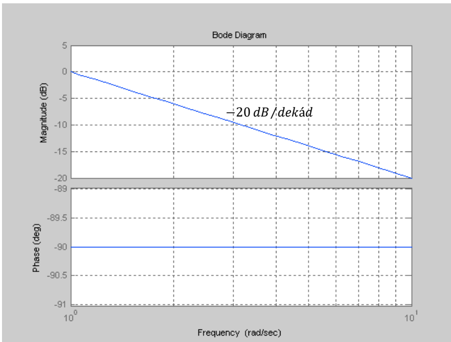
MÁSODRENDŰ TAG (PT2)

- $G(j\omega) = \frac{k_p}{T_2^2(j\omega)^2+2\xi T j\omega+1}$



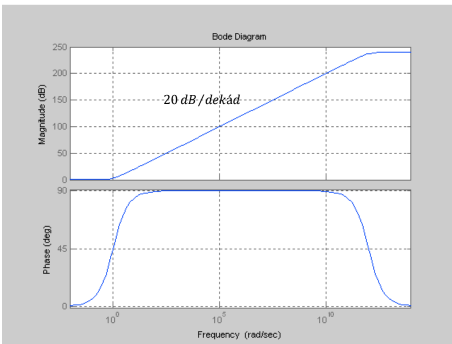
TISZTA INTEGRÁLÓ (I)

- $G(j\omega) = \frac{1}{T_i j\omega}$



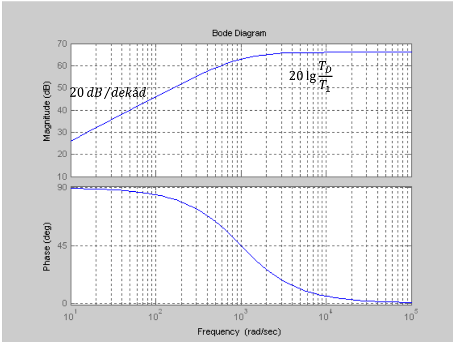
TISZTA DERIVÁLÓ (D)

- $G(j\omega) = T_D j\omega$



KÖZELÍTŐ DERIVÁLÓ (DT1)

- $G(j\omega) = \frac{T_D j\omega}{(1+T_1 j\omega)}$



7. RENDSZEREK STABILITÁSVIZSGÁLATA. STABILITÁSI KRITÉRIUMOK. STABILITÁSVIZSGÁLAT NYQUIST- ÉS BODE-DIAGRAMOKKAL.

RENDSZEREK STABILITÁSVIZSGÁLATA.

Szabályozásnál alapvető követelmény a stabilitás rendszernek ki kell küszöbölnie a zavarásokat vagy csökkenteni azokat.

HOMOGÉN EGYENLET ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSA

IDŐTARTOMÁNYBAN

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{p_k t}$$

ahol $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ a homogén egyenletnek megfelelő karakterisztikus egyenlet gyökei, c_i konstansok.

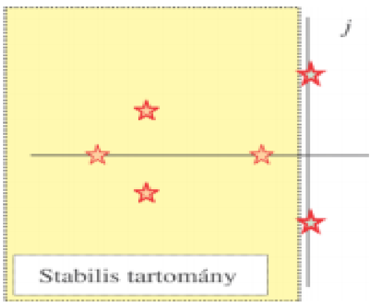
Aszimptotikus stabilitás $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ teljesül, ha ezek a gyökök negatív valósak vagy negatív valós részű komplex gyökpárok.

$$Re\{p_i\} < 0, \forall p_i, i = 1, \ldots, n$$

OPERÁTOR TARTOMÁNYBAN

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \frac{(s - z_1) \ldots (s - z_m)}{(s - p_1) \ldots (s - p_n)}$$

ahol a $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gyökök a nevező polinomjának gyökei, azaz a pólusok, és megfelelnek a homogén differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökeinek. Így a rendszer stabilitáshoz ezeknek a gyököknek az előjelét kell ellenőrizni, hogy a komplex sík baloldali félsíkjára esnek-e.



BIBO STABILITÁS

Egy rendszert BIBO stabilnak nevezünk, ha korlátos bemenet, azaz $|\mathrm{u(t)}| < \mathrm{M1}$, valamely $-\infty < \mathrm{t_0} \leq \mathrm{t} < \infty$ időintervallum esetén, a kimenete is korlátos: $|\mathrm{y(t)}| < \mathrm{M2}$, a $\mathrm{t_0} \leq \mathrm{t} < \infty$ időintervallumon (ahol $\mathrm{M1}, \mathrm{M2} < \infty$, és $\mathrm{t_0}$ a kezdőidőpont).

Egy rendszer akkor és csak akkor BIBO stabil, ha azaz a súlyfüggvény abszolút integrálja korlátos.

$$\int_0^\infty |h(t)|dt < M < \infty$$

NULLA BEMENETI STABILITÁS (ASZIMPTOTIKUS)

Ha egy rendszerben konstans nulla bemenet és adott, legalább egy esetben nem zérus kezdeti feltételek esetén a kimenet nullához tart tetszőlegesen nagy idő eltelte után, akkor ezt a rendszert nulla bemeneti stabilitásúnak (vagy aszimptotikusan stabilnak) nevezzük. Egyébként a rendszer instabil.

A Stabilitás vizsgálat módszerei lehetnek algebrai módszerekkel (Routh-Hurwitz módszer), frekvenciatartomány vizsgálatával (Nyquist-vagy Bode-kritérium) és geometriai vizsgálattal (gyökhelygörbe módszer).

HOMOGÉN EGYENLET ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSA

IDŐTARTOMÁNYBAN

$$y(t) = c_1 e^{p_1 t} + c_2 e^{p_2 t} + \cdots + c_n e^{p_n t} = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{p_k t}$$

ahol $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ a homogén egyenletnek megfelelő karakterisztikus egyenlet gyökei, c_i konstansok.

Aszimptotikus stabilitás $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ teljesül, ha ezek a gyökök negatív valósak vagy negatív valós részű komplex gyökpárok.

$$Re\{p_i\} < 0, \forall p_i, i = 1, \dots, n$$

OPERÁTOR TARTOMÁNYBAN

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \frac{(s - z_1) \dots (s - z_m)}{(s - p_1) \dots (s - p_n)}$$

ahol a $p_1, p_2, \dots, p_n$ gyökök a nevező polinomjának gyökei, azaz a pólusok, és megfelelnek a homogén differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet gyökeinek. Így a rendszer stabilitáshoz ezeknek a gyököknek az előjelét kell ellenőrizni, hogy a komplex sík baloldali félsíkjára esnek-e.

STABILITÁSI KRITÉRIUMOK.

ROUTH-HURWITZ KRITÉRIUM

Egy tag átviteli függvénye:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_0}, K(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

Sorba kapcsolt tagok eredője:

$$G_e(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

ennek a karakterisztikus polinomja:

$$K(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

vagy legyen visszacsatolt rendszer:

$$G_e(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_m(s)}$$

az ehhez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$K(s) = 1 + G_0(s)G_m(s)$$

illetve polinom alakban:

$$K(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

A stabilitás szükséges és elégséges feltétele:

I. Minden együttható legyen pozitív $\forall a_i > 0, i = 1 \dots n$

II. A H Hurwitz-determináns valamennyi főátlóra támaszkodó aldeterminánsa legyen pozitív:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & & \Delta_n \end{array}$$
$$H_{n\times n} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix} \qquad \Delta_i > 0, \ i = 1,\dots,n$$

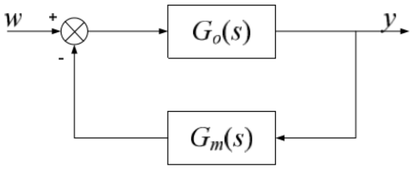
PARAMÉTERES STABILITÁS VIZSGÁLAT

A vizsgálatot a tag vagy a tagcsoport valamelyik paraméterének (pl.: erősítés, időállandó, csillapítási tényező) tetszőleges értéke mellett végezzük el. A paramétert tartalmazó együtthatót változóként hagyjuk. Meghatározzuk, hogy milyen intervallumban teljesülhet a Hurwitz kritériumban megszabott feltétel.

STABILITÁSVIZSGÁLAT NYQUIST- ÉS BODE-DIAGRAMOKKAL.

NYQUIST-KRITÉRIUM

Alapelve hogy, a felnyitott kör helygörbéjéből következtetünk a zárt rendszer stabilitási viszonyaira.



Az átviteli függvény:

$$G_e(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)G_m(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G(s)}$$

A karakterisztikus egyenlet: $1 + G(s) = 0$ melyből a pólusokat megkapjuk

Áttérve frekvenciatartományba $1 + G(j\omega) = 0$

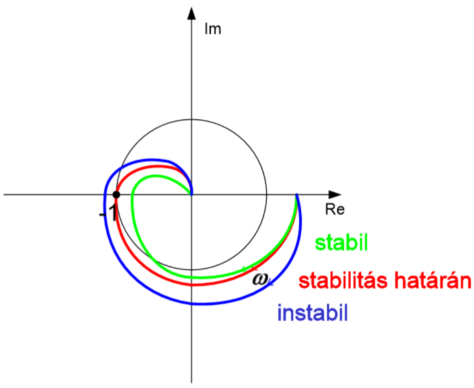
Az összefüggés fizikai értelme:

- van-e a zárt rendszernek csillapítatlan szinuszos rezgésű állandósult megoldása, azaz $\exists\omega_0 : G(j\omega) = -1$
- ha igen: akkor ezzel az ω_0 frekvenciával gerjesztve a zárt rendszert, csillapítatlan rezgéseket kapunk

A STABILITÁSI KRITÉRIUM

Ha a felnyitott kör $G(j\omega)$ amplitúdó-fázis görbéje – miközben frekvencia $0 \leq \omega < \infty$ tartományon változik.

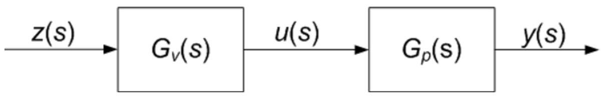
- Ha a felnyitott kör frekvencia függvénye a Nyquist-diagramban balról kerüli meg a -1+j0 pontot, a rendszer labilis.
- Ha a felnyitott kör frekvencia függvénye a Nyquist-diagramban jobbról halad el a -1+j0 pont mellett, a rendszer stabil
- Ha a felnyitott kör frekvencia függvénye a Nyquist-diagramban áthalad a -1+j0 ponton, a rendszer a stabilitás határán van



8. FOLYTONOS IDEJŰ RENDSZEREK SZABÁLYOZÁSA. EREDŐ ÁTVITELI FÜGGVÉNY MEGHATÁROZÁSA. A HUROKÁTVITELI FÜGGVÉNY. SZABÁLYOZÁSOK TÍPUSSZÁM SZERINTI CSOPORTOSÍTÁSA. ARÁNYOS, INTEGRÁLÓ ÉS DERIVÁLÓ TAG SZEREPE A SZABÁLYOZÓBAN.

FOLYTONOS IDEJŰ RENDSZEREK SZABÁLYOZÁSA.

NYÍLT HATÁSLÁNCÚ RENDSZEREK



ahol:

- $z(s)$ – zavarás / vezérlő bemenő jele
- $u(s)$ – irányított bemenet / vezérlő kimenő jele

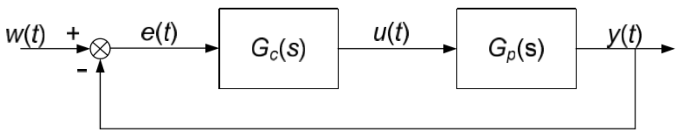
- $G_v(s)$ – vezérlő rendszer átviteli függvénye
- $G_p(s)$ – irányított folyamat átviteli függvénye
- $y(s)$ – folyamat kimenő jele

Vezérlő rendszer leírása:

$$u(s) = G_v(s)z(s)$$

Az irányított bemenetet a zavarás értéke és az irányító rendszer tulajdonságai határozzák meg. Be nem tervezett zavarásokra, illetve a saját paramétereinek változásaira az irányító rendszer nem tud reagálni, azaz a rendszer csak a tervezési körülmények mellett működik megfelelően

VISSZACSATOLT RENDSZEREK



Az irányító rendszer folyamatosan ellenőrzi a szabályozott kimenetet – szabályzó rendszerek:

ahol

- $w(t)$ – bemenő változó / előírt érték
- $e(t)$ – a hiba jel / szabályzási eltérés
- $G_c(s)$ – szabályzó átviteli függvénye
- $u(t)$ – a beavatkozó jel
- $G_p(s)$ – szabályozott szakasz átviteli függvénye
- $y(t)$ – kimenő változó / szabályozott kimenet

A visszacsatolt rendszer eredő átviteli függvénye

$$G_e(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}, ahol\ G(s) = G_c(s)G_p(s)$$

a kimenet meghatározása:

$$y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} w(s) = G_e(s)w(s)$$

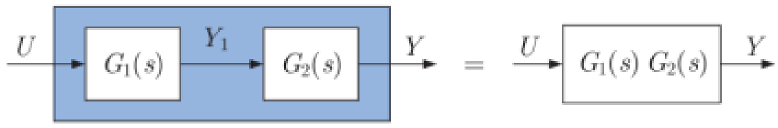
A kimenet itt is a bemenet értékétől és az irányított rendszer tulajdonságaitól függ, de a $G(s)$-beli zavarások hatása a nyitott rendszerhez képest kisebb, illetve $G(s)$ alkalmas megválasztásával eltüntethető.

A visszacsatolás hatására a rendszer elvileg kompenzálja a zavarásokból, paraméterváltozásokból fellépő eltérést, de a rendszer eredő erősítése csökken. Ha 1-nél kisebb lesz az állandósult állapotbeli hibához vezet. Az egyes tagok késleltető hatása miatt, az információ késleltetve jut a rendszer tudomására, és így nem megfelelő a beavatkozás, ami instabilitáshoz vezethet.

EREDŐ ÁTVITELI FÜGGVÉNY MEGHATÁROZÁSA.

SOROS KAPCSOLÁS

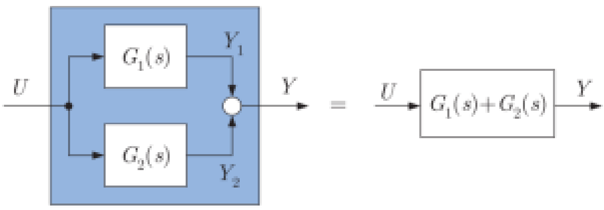
- Az eredő átviteli függvény az egyes átviteli függvények szorzata



$$G_e(s) = G_1(s)G_2(s)$$

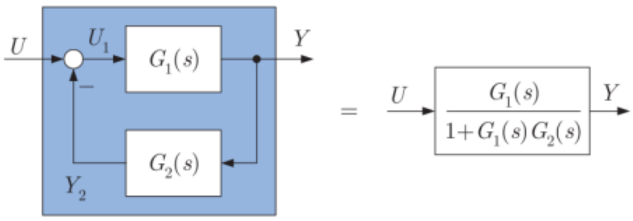
PÁRHUZAMOS KAPCSOLÁS

- A tagok bemenőjele azonos, kimenőjeleik összegződnek
- Az eredő átviteli függvény tehát az egyes átviteli függvények összege.



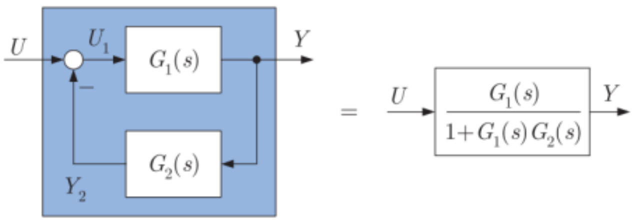
$$G_e(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

VISSZACSATOLÁS



$$G_e = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

A HUROKÁTVITELI FÜGGVÉNY.



$$G_O = G_1(s)G_2(s)$$

SZABÁLYOZÁSOK TÍPUSSZÁM SZERINTI CSOPORTOSÍTÁSA.

A hurokátviteli függvény általános egyszerűsített polinomos alakjából.

$$C(s)P(s) = G_O(s) = \frac{k_0}{s^i} L_{tranziens}(s)$$

i: a nyitott körben lévő integrátorok száma. Értéke: 0,1,2

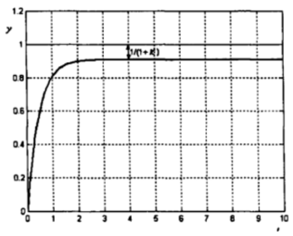
k_0 a körerősítés vagy hurokerősítés.

$L_{tranziens}(s)$ A felnyitott kör tranziens viselkedését befolyásoló tényező (állandósult állapotra nincs hatással).

0-típusú szabályozás

- Egység ugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{1+k_0 L_{tranziens}(s)} = \frac{1}{1+k_0}$
  - A 0-típusú szabályozás az ugrásalakú alapjelet állandósult hibával követi, amely annál kisebb, minél nagyobb a szabályozási kör hurokerősítése. Nagy erősítés azonban a szabályozás labilitását eredményezheti.
- Sebességugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+k_0 L_{tranziens}(s)} = \infty$
- Gyorsulásugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^3}\frac{1}{1+k_0 L_{tranziens}(s)} = \infty$
  - A 0-típusú szabályozás nem képes a sebesség- és gyorsulásugrás alapjelek követésére.

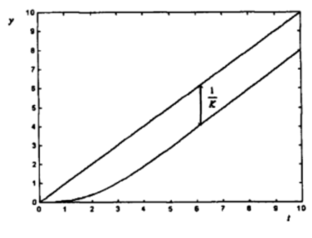
0-típusú szabályozás pl.: PTn-szakasz P-vagy PDszabályozóval.



1-típusú szabályozás

- Egység ugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{s+k_0 L_{tranziens}(s)} = 0$
  - Az 1-típusú szabályozás állandósult hiba nélkül követi az ugrásalakú alapjelet.
- Sebességugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{1}{s+k_0 L_{tranziens}(s)} = \frac{1}{k_0}$
  - A sebességugrás alapjelet állandósult hibával képes követni.
- Gyorsulásugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^3}\frac{1}{s+k_0 L_{tranziens}(s)} = \infty$
  - A 0-típusú szabályozás nem képes a sebesség- és gyorsulásugrás alapjelek követésére.

1-típusú szabályozás pl.: PTn-szakasz I- vagy PI-szabályozóval, ITn szakasz P-, PDszabályozóval

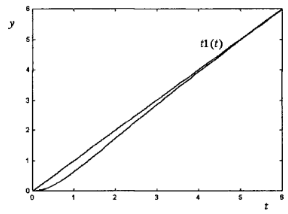


2-típusú szabályozás

- Egység ugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+k_0 L_{tranziens}(s)} = 0$
- Sebességugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{1}{s^2+k_0 L_{tranziens}(s)} = 0$
  - A két integrátort tartalmazó 2-típusú szabályozás állandósult hiba nélkül követi az ugrás- és sebességugrás alakú alapjeleket

- Gyorsulásugrás alapjelre: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^3}\frac{1}{s^2+k_0 L_{tranziens}(s)} = \frac{1}{k_0}$
    - A gyorsulásugrás alakú alapjel követésére is képes állandósult hibával.

2-típusú szabályozás pl.: ITn-szakasz PI- vagy PID-szabályozóval



Statikus hiba (maradó szabályozási eltérés táblázatosan)

Típusszám	0	1	2
Egységugrás alapjel	$\frac{1}{1+k_0}$	0	0
Sebességugrás alapjel	∞	$\frac{1}{k_0}$	0
Gyorsulásugrás alapjel	∞	∞	$\frac{1}{k_0}$

Ha a szakasz nem tartalmazza a kívánt statikus pontosság eléréséhez szükséges integrátorok számát, a szabályozóba kell beiktatni az integráló hatásokat!

ARÁNYOS, INTEGRÁLÓ ÉS DERIVÁLÓ TAG SZEREPE A SZABÁLYOZÓBAN.

- **A P-rész működési elve:** „minél nagyobb a hibajel, annál nagyobb legyen a végrehajtójel” (ezzel a szabállyal gyorsan felépül a végrehajtójel, de a maradó hibát nem képes kiküszöbölni)
- **Az I-rész működési elve:** „Amíg van hibajel, addig a végrehajtójelet változtatni kell.” Amint a hibajel e(t)=0, a végrehajtójel változtatása megszűnik, és azon az értéken marad, amivel a hibát sikerült megszüntetni.
- **A D-rész csak működési elve:** „Minél gyorsabb a hibajel változása, annál nagyobb legyen a szabályozó végrehajtójele.” A D-rész tehát akkor is nagy beavatkozást kíván alkalmazni, amikor a hibajel nem túl nagy, de gyorsan változik. Ha nincs változás, nincs D-hatás.

9. P-, PI-, PD- ÉS PID-SZABÁLYOZÓK JELLEMZÉSE. A PID-SZABÁLYOZÓ PARAMÉTER BEÁLLÍTÁSI MÓDSZEREI.

P-, PI-, PD- ÉS PID-SZABÁLYOZÓK JELLEMZÉSE.

P-SZABÁLYZÓ

IDŐTARTOMÁNYBAN

- diff. egyenlet: $u(t) = k_p e(t)$
    - Ha a hibajel nulla, a szabályzó kimenőjele munkaponti érték!
- A tényleges végrehajtójel: $u = u(t) + u_0$
- Átmeneti függvénye: $v(t) = k_p$

FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

- $C(s) = k_p$
- A fázisgörbét nem módosítja, az amplitúdó-viszony görbét minden frekvencián megemeli $20lg(k_p)$ értékkel

PI-SZABÁLYZÓ

IDŐTARTOMÁNYBAN

- diff. egyenlet: $u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t)dt$
- Átmeneti függvénye: $v(t) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i}t\right) = k_p + k_i t$

FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

- $C(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$
- Kisfrekvenciákon $\left(\omega \; < \frac{1}{T_i}\right)$ az I-hatás érvényesül:
    - megemeli az amplitúdóviszony görbét, megnövelve a meredekséget -20db/dekáddal
    - A fázisgörbét -90°-al csökkenti (ez tartalékcsökkentő hatás)
- Nagyfrekvenciákon a P-hatás lesz a domináns:
    - Az amplitúdóviszony görbe meredekségét változatlanul hagyja, de megemeli az erősítésnek megfelelő mértékben
    - A fázisgörbét itt már nem módosítja
- $\frac{1}{T_i}$ frekvenciánál van a PI-szabályozó fázisgörbe inflexiós pontja (-45°-os fáziseltolás)

PD-SZABÁLYZÓ

IDŐTARTOMÁNYBAN

- diff. egyenlet: $u(t) = k_p e(t) + k_d \dot{e}(t)$
- Átmeneti függvénye: $v(t) = k_d \delta(t) + k_p$

FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

- $C(s) = k_p + k_d s$
- Kisfrekvenciákon a P-rész hat:
    - Az amplitúdó viszonyt az erősítésnek megfelelően párhuzamosan eltolja,
    - a fázist nem módosítja
- Nagyfrekvenciákon a D-rész érvényesül:
    - Az amplitúdó viszony görbe meredekségét megváltoztatja: +20dB/dekáddal megemeli,
    - a fázist megemeli max 90°-al
- Fázis siettető hatás, elébe vágó hatás

PID-SZABÁLYZÓ

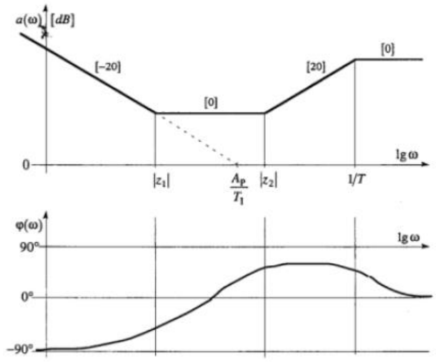
IDŐTARTOMÁNYBAN

- diff. egyenlet: $u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t)dt + k_d \dot{e}(t)$
- Átmeneti függvénye: $v(t) = \; k_p + k_i t + k_d \delta(t)$

FREKVENCIATARTOMÁNYBAN

- $C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$

- P-, I-, és D-hatás különböző frekvenciatartományokban domináns.
- A tartományokat $\frac{1}{T_i}$ ill $\frac{1}{T_d}$ választja el.
- A megfelelő PID jelátviteli tulajdonság kialakításához szükséges feltétel:
    - $T_i > T_d$ (azaz $\frac{1}{T_i} < \frac{1}{T_d}$)
- $\frac{1}{T_i}$ alatti frekvencia tartományban I-hatás
- $\frac{1}{T_i}$ és $\frac{1}{T_d}$ közötti frekvencia tartományban P-hatás
- $\frac{1}{T_d}$ feletti frekvenciákra D-hatás



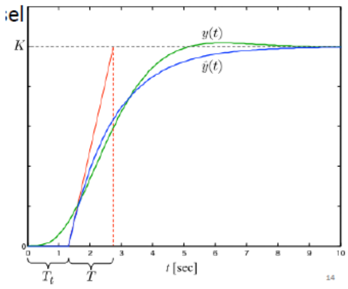
A PID-SZABÁLYOZÓ PARAMÉTER BEÁLLÍTÁSI MÓDSZEREI

INTEGRÁLKRITÉRIUMOK

- Abszolút érték kritérium
    - Lehetséges célfüggvények (minimalizálás)
    - potitív és negatív területek!
    - Ismert szakasz és szabályzó modell
    - számtógépez szabályzó paraméter optimum keresés.
    - $J = \int_0^{Tsim} |e(t)| dt \to min$
- Négyzetes integrálkritérium
    - A nagymértékű eltéréseket jobban hangsúlyozza
    - $J = \int_0^{Tsim} |e^2(t)| dt \to min$
- ITAE kritérium
    - Idővel szorzott abszolútérték
    - Az eltérés ideje is számít
    - $J = \int_0^{Tsim} t * |e(t)| dt \to min$

A SZAKASZ ÁTMENETI FÜGGVÉNY KIMÉRÉSÉN ALAPULÓ MÓDSZEREK JELLEMZÉSE.

- Feltétel:
    - A rendszer átmeneti függvénye aperiodikus
    - A rendszer dtabil
- Kivitlelezés:
    - A végrehajtójel ugrásszerű megváltozásával felvesszük a szakasz átmeneti függvényét.
    - Grafikus kirtékeléssel meghatározzuk a szakasz közelítő jelátviteli függvény paramétereit, PT1Th jelátvitellel közelítve.



- A k, T1, Th adatokból táblázatból kiolvasható a választott szabályozó ajánlott beállítása.

Szabályozó típusa	kp	Ti	Td
P-	$\frac{1}{k}\frac{T}{T_t}$		
PI-	$\frac{0{,}9}{k}\frac{T}{T_t}$	$3{,}33T_t$	
PID-	$\frac{1{,}2}{k}\frac{T}{T_t}$	$2T_t$	$0{,}5T_t$

ZIEGLER-NICHOLS II. A SZABÁLYOZÁSI KÖR KRITIKUS LENGÉSÉNEK KIÉRTÉKELÉSE.

- Feltétel: A szabályozandó rendszer feltételesen stabil legyen.
- Kivitelezés:
  - P-szabályozóval zárt szabályozási körben a szabályozó erősítéso átviteli tényezőjét addig növeljük, amíg a szabályozott jellemző állandó amplitúdójú lengéseket nem végez (kpkrit). (Azaz P-szabályozóval kritikus állapotba hozzuk a zárt kört.)
  - Meghatározzuk a kritikus lengés periódusidejét (Tkrit)
  - a Kpkrit és Tkrit-ból táblázat segítségével meghatározható a kezdeti beállítás.

Ziegler és Nicholas mintegy 0.25-ös csillapítási tényezőt tervezett. (Elég magas, kb. 40%-os túllendülésnek felel meg.)

10. MINŐSÉGJAVÍTÓ SZABÁLYOZÁSOK: ZAVARKOMPENZÁCIÓ, ARÁNYSZABÁLYOZÁS, KASZKÁDSZABÁLYOZÁS, KASZKÁD-ARÁNYSZABÁLYOZÁS.

ZAVARKOMPENZÁCIÓ

A zavaró jellemzőknek a szabályozott jellemzőre gyakorolt hatása nagymértékben csökkenthető, ha lehetőség szerint a legnagyobb mértékű zavarást jelentő jellemzőt is bevonjuk a szabályozásba. E zavarást – a szabályozott jellemzőhöz hasonlóan – távadóval ellenőrizzük és a szabályozási rendszer megfelelő helyén szuperponáljuk valamelyik jelre, pl. a végrehajtó jelre. Így a szabályozó már a zavarás megjelenésekor beavatkozik a folyamatba, s ezzel megakadályozza, hogy a zavarás jelentős szabályozott jellemző változást okozzon.

ARÁNYSZABÁLYOZÁS

z arányszabályozás gyártási, termelési folyamatoknál gyakorta használt, összetett szabályozási rendszer. Elegyítési, keverési folyamatoknál, reakciók lejátszásánál már az egyes összetevők (komponensek) elegyítése, a reakciók lejátszódása előtt ugyanis **biztosítandó bizonyos tömegarányok állandósága**. Megfelelő minőségi termék folyamatos előállítása ugyanis csak így érhető el.

KASZKÁDSZABÁLYOZÁS

A műszaki gyakorlatban gyakoriak az olyan szabályozandó szakaszok, melyek zavaró jellemzői – időbeli lefutásukat tekintve – igen eltérőek. Ez azt jelenti, hogy a szabályozandó szakaszt időben gyorsan és lassan változó zavaró hatások is befolyásolják.

Ebben az esetben egyetlen szabályozóval a különböző frekvenciájú zavarások kompenzálását nem lehet megoldani. Célszerűnek látszik tehát két, vagy több szabályozó beépítése, melyek paramétereit úgy kell beállítani, hogy az egyik szabályozó a kis időállandójú, gyorsan változó, a másik szabályozó pedig a nagy időállandójú, lassan változó zavarásokat kompenzálja.

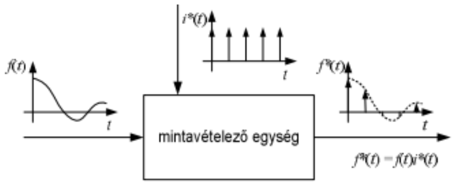
KASZKÁD-ARÁNYSZABÁLYOZÁS

A kaszkád-arányszabályozási kör ugyancsak gyakorta alkalmazott összetett szabályozási rendszer a műszaki-technológiai gyakorlatban tulajdonképpen az arányszabályozási kör kibővítésével jön létre.

11. DISZKRÉTIDEJŰ RENDSZEREK. MINTAVÉTELEZÉS TÍPUSAI, FIZIKAI ÉS MATEMATIKAI MINTAVÉTELEZÉS FOGALMA, SHANNON-TÉTEL. A Z- ÉS INVERZ Z-TRANSZFORMÁCIÓ FOGALMA ÉS TULAJDONSÁGAI, ELVÉGZÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI.

DISZKRÉTIDEJŰ RENDSZEREK.

A mintavételező eljárást impulzussorozat amplitúdó modulációjának tekinthetjük. A mintavételező egység egyik bemenetére a mintavételezendő jel kerül, a másik bemenetre pedig az $i^*(t)$ egységimpulzus sorozat.



7.1. ábra. A mintavételezés elvi folyamatábrája

A kimeneten olyan impulzusok jelennek meg, melyek területe arányos a bemenő folytonos jel mintavételezési időpontokban felvett értékeivel.

MINTAVÉTELEZÉS TÍPUSAI, FIZIKAI ÉS MATEMATIKAI MINTAVÉTELEZÉS FOGALMA

FIZIKAI MINTAVÉTELEZÉS

Legyen adott egy $f(t)$ folytonos-folyamatos jel, melyet állandó, T_0 periódusidővel mintavételezünk. Tételezzük fel, hogy maga a mintavételezés Θ ideig tart. A mintavételező egységből kijövő jel az ún. fizikai mintavételezés eredménye, mely a mintavételezés Θ időtartama alatt követi az eredeti folytonos-folyamatos $f(t)$ jelet, majd a következő mintavételezés kezdetéig nulla lesz az értéke.

Alakítsuk át a fizikai mintavételezés eredményeként kapott szabálytalan négyszög impulzusnak tekinthető jelsorozatot úgy, hogy vegyük állandónak a jel értékét a mintavételezés időtartama alatt. Ennek megfelelően tekintsünk el a jel Θ időtartam alatti változásától, azaz legyen ez időtartam alatt a jelértéke egyenlő a mintavételezés kezdetekor felvett értékkel. Így egy szabályos, a mintavételezés időpontjában felvett jelértéktől függő amplitúdójú négyszögimpulzus függvényt kapunk.

MATEMATIKAI MINTAVÉTELEZÉS

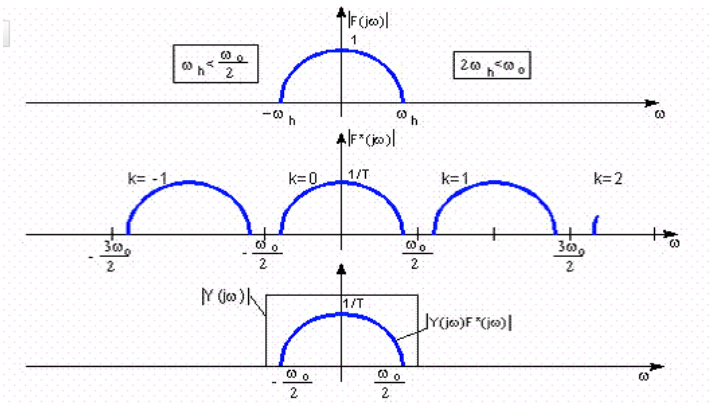
Noha az egyes négyszögimpulzusok amplitúdója arányos a mintavételezési időpontokhoz tartozó jelek értékével, de ez az arányosság megmarad akkor is, ha a négyszögimpulzusok területét vesszük figyelembe, hiszen a mintavételezés Θ időtartama minden egyes esetben azonos. Ha azonban a jelet a matematikai kezelhetőség érdekében impulzusszerű jellé alakítjuk át, tehát feltételezzük, hogy a mintavételezés időtartama minden határon túl csökkenthető, akkor a terület csak úgy maradhat állandó, ha ennek az impulzusszerű jelnek az amplitúdója viszont a végtelenbe tart. Ezt az eljárást matematikai mintavételezésnek nevezzük.

SHANNON-TÉTEL.

A Shannon-féle mintavételezési törvény értelmében akkor beszélhetünk megfelelő mintavételezésről, ha a folytonos, folyamatos jel ω_k határfrekvenciájának legalább kétszerese az ω_0 mintavételi körfrekvencia:

$$\omega_0 > 2\omega_k$$

Ekkor a mintavételezett jel amplitúdósűrűség-spektrumát különböző frekvenciatartományban jellemző összetevők jól elkülönülnek, s az ideális aluláteresztő szűrővel különválasztott $|Y(j\omega)\ F^*(j\omega)|$ amplitúdósűrűség-spektrum T-szeres erősítés után megegyezik az eredeti jel információkészletével.

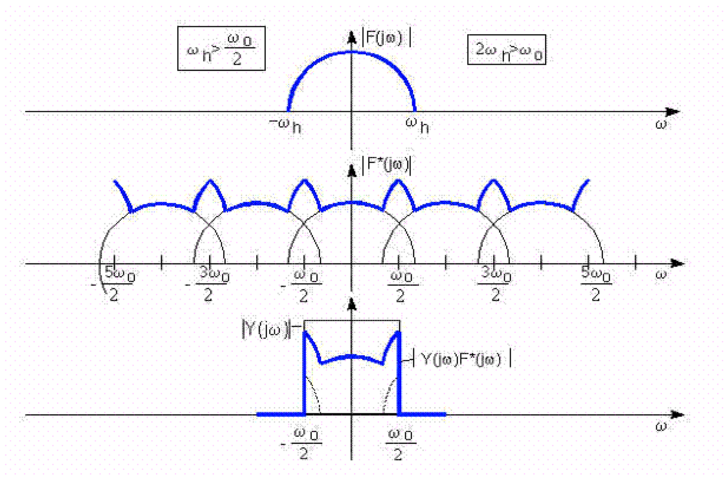


2. ÁBRA JÓ BEÁLLÍTOTT ÉRTÉKEKKEL

Ha nem megfelelően megválasztott nem megfelelően megválasztott mintavételi frekvencia információtorzulást okoz. Ugyanis ebben az esetben

$$\omega_0 < 2\omega_k$$

s az $\frac{\omega_0}{2}$ sávszélességű ideális aluláteresztő szűrő alkalmazásával nyert amplitúdósűrűség-spektrum az összetevők közötti átfedések miatt sem hasonlíthat az eredeti jel információtartalmához.



3. ÁBRA ROSSZUL BEÁLLÍTOTT ÉRTÉKEKKEL

A Z- ÉS INVERZ Z-TRANSZFORMÁCIÓ FOGALMA ÉS TULAJDONSÁGAI, ELVÉGZÉSÉNEK LEHETŐSÉGEI

Az egyik bemenő jel tehát a folytonos-folyamatos $f(t)$ függvény, melyről feltesszük, hogy a vizsgálat kezdete előtt zérus volt az értéke:

$$f(t), f(t) = 0, ha\ t < 0$$

a másik bemenet a moduláló jel, vagyis az egységimpulzus sorozat:

$$i^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$

A mintavételező egység kimenetén pedig a modulált impulzussorozat jelenik meg:

$$f^*(t) = f(t) \cdot i^*(t)$$

A mintavételezett jelre kapott összefüggés a következő módon írhatjuk át:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) = f(t)\, \delta(t - 0T_0) + f(t)\, \delta(t - 1T_0) + \cdots + f(t)\, \delta(t - nT_0) + \cdots.$$

Miután az egységimpulzus a t - nT0 időpont kivételével mindenhol zérus, így a kifejezés a következő alakra írható át:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0)\delta(t - nT_0)$$

Következő lépésként Laplace transzformáljuk a kapott kifejezést:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) e^{-nT_0 s}$$

A kapott képlet az $f(t)$ függvény ún. diszkrét Laplace transzformáltját meghatározó kifejezés.

Vezessük be a komplex s változó helyett az ugyancsak komplex z változót, és így megkapjuk a mintavételezett függvény z-transzformálját:

$$z = e^{Ts} \rightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT_0) z^{-n}$$

A transzformálhatóság feltétele:

$$|f(nT_0)| \leq Me^{-\alpha n T_0} \quad n \geq n_0 \quad M, \alpha, n_0 > 0$$

A levezetés eredményeként kapott képlet egyszerű alakú, de végtelen sort tartalmaz, és az összegképlet felírása nem mindig könnyű. Léteznek más transzformációs képletek is, mint például a komplex függvénytani levezetés eredményeként kapott általános képlet, vagy az alábbi, csak egyszeres pólusokat tartalmazó rendszerek esetében alkalmazható összefüggés:

$$F(z) = \sum_{i=1}^{P} \frac{F_z(p_i)}{F_p'(p_i)} \cdot \frac{z}{z - e^{p_i T_0}}$$

ahol

- $F(s) = \frac{F_z(s)}{F_p(s)}$ a jel Laplace transzformáltja racionális tört alakban.
- P a pólusok száma,
- p_i az i-edik pólus $(i = 0,1,2, \dots, P)$,
- $F_z(p_i) = F_z(s)|_{s=p_i}$ a számláló polinomjának értéke az $s = p_i$ helyen,
- $F_p'(p_i) = \left.\frac{dF_p(s)}{ds}\right|_{s=p_i}$ a nevező polinomja deriváltjának értéke az $s = p_i$ helyen.

Fontos megjegyezni, hogy a z-transzformáció elvégzéséhez felhasznált definiáló képlettől függetlenül, a kapott összefüggés csak a mintavételezési időpontokban van kapcsolatban az eredeti függvénnyel. Ennek következményeként előfordulhat, hogy a mintavételezési időpontokban azonos értéket felvevő függvényeknek azonos lesz a z-transzformáltja, másrészt az inverz z-transzformáció csak a mintavételezési időpontokhoz tartozó értékeket adja vissza.

Az inverz z-transzformáció képlete:

$$f(nT_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz$$

A gyakorlatban az invertálást a következő módokon hajthatjuk végre:

Az egyik lehetőség, hogy az átalakítandó átviteli függvényt olyan egyszerű alakokra, részlettörtekre bontjuk fel, amelyeknek az inverzét már megtaláljuk táblázatban. A módszer előnye, hogy zárt alakú képletet szolgáltat, így tetszőleges mintavételezési időponthoz tartozó érték azonnal meghatározható. Hátránya, hogy a racionális törtfüggvény alakra hozás nem mindig egyszerű.:

12. IMPULZUS ÁTVITELI FÜGGVÉNY FOGALMA ÉS TULAJDONSÁGAI. EREDŐ IMPULZUS ÁTVITELI FÜGGVÉNY MEGHATÁROZÁSA SORBA, PÁRHUZAMOSAN KAPCSOLT TAGOK ÉS A VISSZACSATOLT RENDSZEREK ESETÉN.

IMPULZUS ÁTVITELI FÜGGVÉNY FOGALMA ÉS TULAJDONSÁGAI.

$$G(z) = \left.\frac{Y(z)}{U(z)}\right|_{z.k.f} = \left.\frac{z\big(y^*(t)\big)}{z\big(u^*(t)\big)}\right|_{z.k.f}$$

Az impulzus-átviteli függvény a mintavételezett kimenet és bemenet z-transzformáltjainak hányadosa zérus kezdeti feltételek mellett. Az impulzus-átviteli függvény csak a mintavételezési időpontokban lesz a rendszer modellje, miután csak ezekben a pontokban van kapcsolatban az eredeti folytonos idejű modellel.

Hasonlóan az átviteli függvényhez, az impulzus-átviteli függvényt is racionális törtfüggvény alakban adhatjuk meg, de ahogy a bemenet – kimenet modellnél is felírtuk az előre és visszafelé vett alakot, itt is használhatunk pozitív és negatív kitevős polinomokat

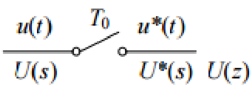
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$
$$= \frac{b_0 z^{-d} + b_1 z^{-d-1} + \cdots + b_{m-1} z^{-m-d+1} + b_0 z^{-m-d}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n-1} z^{-n+1} + a_n z^{-n}}$$

A negatív kitevős alaknak a differenciaegyenletek iteratív úton történő megoldásánál van fontos szerepe.

EREDŐ IMPULZUS ÁTVITELI FÜGGVÉNY MEGHATÁROZÁSA, SORBA, PÁRHUZAMOSAN KAPCSOLT TAGOK ÉS A VISSZACSATOLT RENDSZEREK ESETÉN

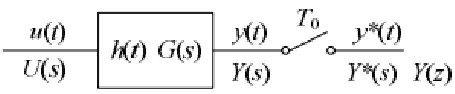
Tagcsoportot tartalmazó mintavételes rendszerek eredő impulzus-átviteli függvényének meghatározásánál figyelembe kell venni, hogy a mintavételező szervek mely tagok között helyezkednek el. Ennek figyelembe vételével a következőkben megvizsgáljuk, hogy a jelformáló tagok és a mintavételezők különböző sorrendű kapcsolásának milyen hatása van az eredő impulzus-átviteli függvényre. Az egyes esetekben feltételezzük, hogy a tagok folyamatos működésűek, így egyaránt jellemezhetőek a $G(s)$ átviteli függvénnyel, illetve a $h(t)$ súlyfüggvénnyel, és a kimenetükön kapott $y(t)$ jel is folyamatos.

MINTAVÉTELEZŐ ELŐTTI ÉS UTÁNI JELEK:



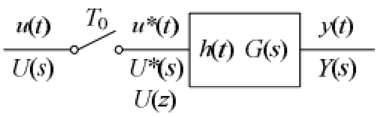
$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}\,, \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u^*(t)\}\,.$$

KIMENŐ JEL MINTAVÉTELEZÉSE:



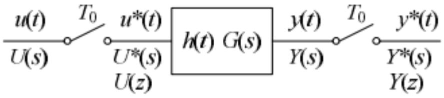
$$Y(s) = G(s)U(s)\,, \quad Y(z) = \mathcal{Z}\{G(s)U(s)\} \triangleq GU(z)\,.$$

BEMENŐ JEL MINTAVÉTELEZÉSE:



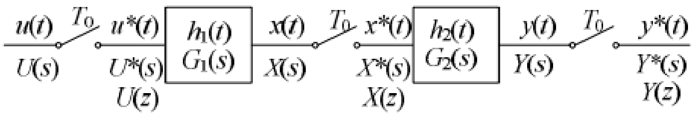
$$Y(s) = G(s)U^*(s)\,.$$

BEMENŐ ÉS KIMENŐ JEL EGYIDEJŰ MINTAVÉTELEZÉSE:



$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)\,,\quad Y(z) = G(z)U(z)\ .$$

SORBA KAPCSOT TAGOK, MINDEN TAG ELŐTT ÉS UTÁN VAN MINTAVÉTELEZŐ:



$$X^*(s) = G_1^*(s)U^*(s)\ ,\qquad Y^*(s) = G_2^*(s)X^*(s)\ ,$$

$$X(z) = G_1(z)U(z)\ ,\qquad Y(z) = G_2(z)X(z)\ ,$$

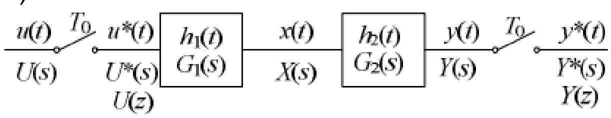
$$Y^*(s) = G_1^*(s)G_2^*(s)U^*(s)\ ,$$

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)U(z)\ ,$$

$$G_e(z) = G_1(z)G_2(z)\ .$$

A levezetésnek megfelelően, ha mindenegyes sorba kapcsolt tag előtt és után van mintavételező, akkor az eredő impulzus-átviteli függvény kiszámítása nagyon hasonló a folytonos idejű rendszerek operátortartománybeli eredőjének meghatározásához: az eredő impulzus-átviteli függvényt az egyes tagok impulzus-átviteli függvényeinek szorzataként kapjuk meg.

SORBA KAPCSOT TAGOK, DE A TAGOK KÖZÖTT NINCS MINTAVÉTELEZŐ:



$$Y(s) = G_2(s)X(s) = G_1(s)G_2(s)U(s)\ ,$$

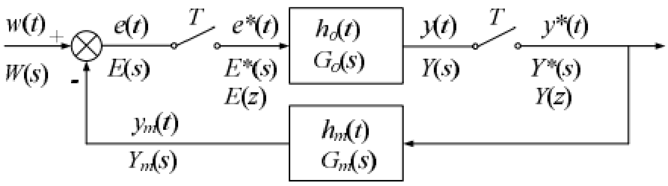
$$Y^*(s) = \mathcal{L}^*\{G_1(s)G_2(s)\}U^*(s)\ ,$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\}U(z) \triangleq G_1G_2(z)U(z)\ ,$$

$$G_e(z) = \mathcal{Z}\{G_1(s)G_2(s)\} \triangleq G_1G_2(z)\ .$$

Ha sorba kapcsolt tagok között nincs mintavételező, akkor az eredő impulzus-átviteli függvényt a tagok átviteli függvényeinek szorzatát z-transzformálva kapjuk meg.

VISSZACSATOLT KÖR TAGOK ELŐTT ÉS UTÁN MINTAVÉTELEZŐVEL:



$$E(s) = W(s) - Y_m(s) = W(s) - G_m(s)Y^*(s)\,,$$

$$Y(s) = G_o(s)E^*(s)\,,\qquad Y^*(s) = G_o^*(s)E^*(s)\ ,$$

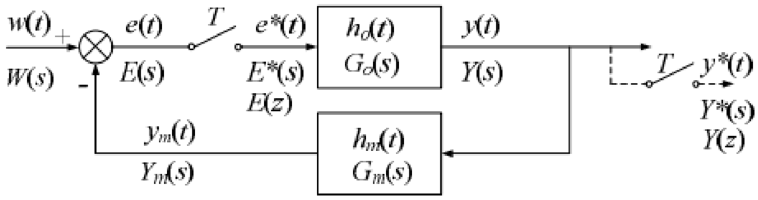
$$Y^*(s) = G_o^*(s)E^*(s) = G_o^*(s)W^*(s) - G_o^*(s)G_m^*(s)Y^*(s)\ ,$$

$$G_e^*(s) = \frac{Y^*(s)}{W^*(s)} = \frac{G_o^*(s)}{1 + G_o^*(s)G_m^*(s)}\ ,$$

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_o(z)}{1 + G_o(z)G_m(z)}\ .$$

Ha a visszacsatolt kör minden jelformáló tagja előtt és után van mintavételező, akkor az eredő átviteli függvényt a folytonos esethez hasonlóan határozzuk meg. Tehát az előremenő ág eredő impulzus-átviteli függvényét elosztjuk az előremenő ág eredő impulzus-átviteli és a visszatérő ág eredő impulzus-átviteli függvénye szorzatának 1- gyel növelt értékével.

VISSZACSATOLT KÖR, DE A VISSZACSATOLÁSNÁL NINCS MINTAVÉTELEZÉS:



$$E(s) = W(s) - Y_m(s) = W(s) - G_m(s)Y(s) = W(s) - G_0(s)G_m(s)E^*(s)$$

Diszkrét Laplace transzformálva a kapott kifejezést, majd kifejezve $E^*(s)$-t:

$$E^*(s) = W^*(s) - \mathcal{L}\{G_0(s)G_m(s)\}E^*(s)$$

$$E^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + \mathcal{L}\{G_0(s)G_m(s)\}}$$

Fejezzük ki $Y^*(s)$-t, a kimenet diszkrét Laplace-transzformáltját, majd helyettesítsük be az $E^*(s)$-re kapott kifejezést, és rendezzük át az átviteli függvények kapcsán megszokott alakra:

$$Y^*(s) = G_0^*(s)E^*(s) = G_0^*(s)\frac{W^*(s)}{1 + \mathcal{L}\{G_0(s)G_m(s)\}}$$

$$\frac{Y^*(s)}{W^*(s)} = \frac{G_0^*(s)}{1 + \mathcal{L}\{G_0(s)G_m(s)\}}$$

A z-transzformáció elvégzése után megkapjuk az eredő impulzus-átviteli függvényt:

$$Y(z) = G_0(z)E(z) = G_0(z)\frac{W(z)}{1 + \mathcal{Z}\{G_0(s)G_m(s)\}} = \frac{G_0(z)}{1 + G_0G_m(z)}W(z)$$

$$G_e(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{G_0(z)}{1 + G_OG_m(z)}$$

13. DISZKRÉT IDEJŰ RENDSZEREK SZABÁLYOZÁSA. FOLYTONOS IDEJŰ PID-ALGORITMUS DISZKRETIZÁLÁSA, POZÍCIÓ- ÉS SEBESSÉGALGORITMUS. SZABÁLYOZÓ BEÁLLÍTÁSI MÓDSZEREK. TARTÓSZERV FOGALMA, MŰKÖDÉSÉNEK ÉRTELMEZÉSE.

DISZKRÉT IDEJŰ RENDSZEREK SZABÁLYOZÁSA.

A mintavételezést elsősorban a jelformálás műveletét digitális elven végző szabályozó berendezés (számítógép) igényli, továbbá mintavételezett jelek modulációs jelátvitel révén is kerülhetnek a szabályozási rendszerbe

FOLYTONOS IDEJŰ PID-ALGORITMUS DISZKRETIZÁLÁSA, POZÍCIÓ- ÉS SEBESSÉGALGORITMUS.

I/O MODELL

$$u(t) = K\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau + T_d\frac{de(t)}{dt}\right)$$

A diszkretizálás a folytonos algoritmus tagonkénti transzformációjával történik.

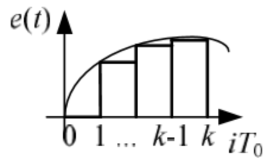
ARÁNYOS TAG

$$e(t) \to e(kT_0)$$

Azaz a hibajel értéke az adott mintavételezési időpontban.

INTEGRÁLÓ TAG

$$\frac{1}{T_I}\int_0^t e(\tau)d\tau \to \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(i)$$



4. ÁBRA TÉGLALAP MÓDSZER

Azaz az integrálást a téglány szabály alapján summázással közelítjük Szabályozó beállítási módszerek.

DERIVÁLÓ TAG

$$T_D\frac{de(t)}{dt} \to T_D\frac{e(kT_0) - e\big((k-1)T_0\big)}{T_0}$$

Azaz a deriválást két pontos különbségképzéssel közelítjük.

Léteznek más, pontosabb, de bonyolultabb megoldások az integráló illetve a deriváló tagok közelítésére.

DISZKRÉT I/O MODELL

$$u(kT_0) = K\left(e(kT_0) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(iT_0) + T_D\frac{e(kT_0) - e\big((k-1)T_0\big)}{T_0}\right)$$

POZÍCIÓ ALGORITMUS

$$u(kT_0) = K\left(e(kT_0) + \frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1} e(iT_0) + T_D\frac{e(kT_0) - e\big((k-1)T_0\big)}{T_0}\right)$$

Pozíció algoritmus, mely megadja, hogy hova álljon be a végrehajtó szerv.

SEBESSÉGALGORITMUS

Vannak olyan beavatkozó szervek, amelyek bemenetére a pillanatnyi helyzethez képesti megváltozást kell bemenő adatként megadni. Ezt szolgáltatja a sebesség algoritmus.

Levezetéshez írjuk fel a pozíció algoritmust a k-dik és a $k-1$-dik mintavételezési időpontra:

$$u(k)=K\left(e(k)+\frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-1}e(i)+T_D\frac{e(k)-e(k-1)}{T_0}\right)$$

$$u(k-1)=K\left(e(k-1)+\frac{T_0}{T_I}\sum_{i=0}^{k-2}e(i)+T_D\frac{e(k-1)-e(k-2)}{T_0}\right)$$

Kivonva egymásból a két egyenletet:

$$u(k)-u(k-1)=K\left(e(k)-e(k-1)+\frac{T_0}{T_I}e(k-1)+\frac{T_D}{T_0}\big(e(k)-2e(k-1)+e(k-2)\big)\right)$$

Az egyenletet a következő alakban szokás megadni:

$$u(k)-u(k-1)=q_0e(k)+q_1e(k-1)+q_2e(k-2)$$

ahol:

$$q_0=K\left(1+\frac{T_D}{T_0}\right),q_1=-K\left(1-\frac{T_0}{T_I}+2\frac{T_D}{T_0}\right),q_2=K\frac{T_D}{T_0}$$

SZABÁLYOZÓ BEÁLLÍTÁSI MÓDSZEREK.

Takahashi mindkét ismert Ziegler-Nichols módszert átültette mintavételes szabályozásokra. Az optimalizálási eljárásnál az erősítés, az integrálási időállandó és a deriválási időállandó paraméterek értékét határozza meg úgy, hogy jó vezetési és zavarkompenzálási tulajdonságú szabályozási köröket kapjunk.

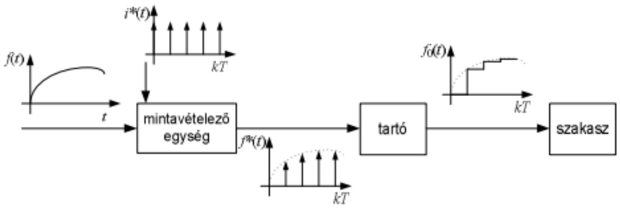
A szabályzó típusa	K	$\frac{T_0}{T_I}$	$\frac{T_D}{T}$
PID	$\frac{1.2T}{T_h+T_0}-\frac{0{,}3T\,T_0}{\left(T_h+\frac{T_0}{2}\right)^2}$	$\frac{0.6T\,T_0}{K\left(T_h+\frac{T_0}{2}\right)^2}$	$\frac{0.5T}{KT_0}$

TARTÓSZERV FOGALMA, MŰKÖDÉSÉNEK ÉRTELMEZÉSE

A mintavételezés értelmezésénél leírtaknak megfelelően a bemenő jel impulzusok formájában kerül a jelformáló tag bemenetére. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy például egy szabályzási körben a szabályozó által meghatározott beavatkozó jel, mint impulzus kerül kiküldésre az irányított szakasz felé az adott mintavételi időpontban. Ezután, a következő mintavételi időpontig nincs újabb információ a beavatkozó jel értékére, azaz a kiküldött jel értéke nulla.

A gyakorlatban léteznek olyan rendszerek, melyeket ilyen impulzusok segítségével lehet irányítani, de általában nem ez a jellemző. Azokban az esetekben, ahol ez az impulzusok kiküldésén alapuló eljárás nem megfelelő, célszerű egy olyan egységet beépíteni, amely az előző mintavételi időponthoz tartozó információt vagy megőrzi a következő mintavételezési időintervallumon, vagy korábbi jelértékeket is figyelembe véve becslés alapján határozza meg a jel értékének esetleges változását erre az intervallumra. Ezeket az egységeket tartószerveknek nevezzük.

A legegyszerűbb esetben a tartószerv feladata, hogy őrizze meg az utolsó mintavételi időponthoz tartozó jel értékét mindaddig, amíg újabb információ nem érkezik.



14. FOLYTONOS IDEJŰ LINEÁRIS IDŐINVARIÁNS RENDSZEREK ÁLLAPOTTÉR MODELLJE. KAPCSOLAT A KLASSZIKUS LEÍRÁSI MÓDOKKAL. ÁLLAPOT TRANSZFORMÁCIÓK, KANONIKUS ALAKOK.

FOLYTONOS IDEJŰ LINEÁRIS IDŐINVARIÁNS RENDSZEREK ÁLLAPOTTÉR MODELLJE.

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\underline{u}(t)$$

ahol:

- $\underline{x}$ – a belső állapotok vektora
- $\underline{u}$ – a bemeneti vektor
- $\underline{y}$ – a kimeneti vektor
- A – az állapotátmeneti mátrix
- B – a bemeneti mátrix
- C – a kimeneti mátrix
- D – a segédmátrix

Az állapottér reprezentáció alapján a rendszer átviteli függvényét a Laplace transzformáció alkalmazásával kapjuk meg:

$$sX(s) - x(0) = \underline{\underline{A}}X(s) + \underline{b}U(s)$$

ebből az állapot Laplace transzformáltja:

$$X(s) = \left(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{b}U(s) + \left(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} x(s)$$

ahol x_0 a kezdő állapot a $t = 0$ időpontban. Az $x(0) = 0$ feltétel mellett

$$Y(s) = \underline{c}^T X(s) = \underline{c}^T \left(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{b}U(s).$$

A $G(s)$ átviteli függvény:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \underline{c}^T \left(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{b}$$

Az átviteli függvény pólusai tehát az alábbi egyenlet gyökei.

$$\det\left(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right) = 0$$

KAPCSOLAT A KLASSZIKUS LEÍRÁSI MÓDOKKAL.

???

ÁLLAPOT TRANSZFORMÁCIÓK, KANONIKUS ALAKOK

???

15. FOLYTONOS IDEJŰ, LINEÁRIS IDŐINVARIÁNS ÁLLAPOTTÉR MODELLEK ANALÍZISE: STABILITÁS, IRÁNYÍTHATÓSÁG, MEGFIGYELHETŐSÉG.

FOLYTONOS IDEJŰ, LINEÁRIS IDŐINVARIÁNS ÁLLAPOTTÉR MODELLEK ANALÍZISE:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \underline{\underline{A}}\underline{x}(t) + \underline{\underline{B}}\underline{u}(t)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{\underline{C}}\underline{x}(t) + \underline{\underline{D}}\underline{u}(t)$$

ahol:

- $\underline{x}$ – a belső állapotok vektora
- $\underline{u}$ – a bemeneti vektor
- $\underline{y}$ – a kimeneti vektor
- A – az állapotátmeneti mátrix
- B – a bemeneti mátrix
- C – a kimeneti mátrix
- D – a segédmátrix

STABILITÁS

BELSŐ STABILITÁS

$$\dot{x}(t) = \underline{\underline{A}}x(t)$$

$$x(t_0) = x_0 \neq 0, t > t_0$$

azaz legyen a bemenet zérus, a kezdőfeltételek pedig nullától különbözőek. Akkor nevezzük ezt a modellt belső stabilitásúnak, ha az $x(t)$ megoldás kielégíti az alábbi feltételt:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

TÉTEL

Egy adott állapottér modell akkor és csak akkor belső stabilitású, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix stabilitási mátrix.

STABILITÁSI MÁTIX

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot stabilitási mátrixnak nevezünk, ha valamennyi saját értéke negatív valós vagy negatív valós részű komplex szám:

$$Re\{\lambda_i(A)\} < 0, \forall i$$

Egy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix sajátértékei a $\left|\lambda\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\right| = 0$ egyenlet gyökei. Az $n \times n$-es mátrixnak n db sajátértéke van.

STABILITÁSI TÉTELEK

A BELSŐ STABILITÁS TELJESÜLÉSE

Egy adott állapottér modell akkor és csak akkor belső stabilitású, ha az $\underline{\underline{A}}$ mátrix stabilitási mátrix.

BELSŐ STABILITÁS ÉS A BIBO STABILITÁS KAPCSOLATA

A belső stabilitás magában foglalja a BIBO stabilitást. (Ha egy modell belső stabilitású, akkor BIBO stabil is, de fordítva nem igaz.)

IRÁNYÍTHATÓSÁG

$$\dot{x}(t) = \underline{\underline{A}}x(t) + \underline{\underline{B}}u(t)$$

$$y(t) = \underline{\underline{C}}x(t)$$

A modellel leírt rendszert egy adott $(t_0, t_1]$ időintervallumon teljesen állapotirányíthatónak nevezzük, ha tetszőleges $x(t_0)$ kezdőállapothoz és tetszőleges $x(t_1)$ végállapothoz létezik olyan $u(t)$ bemenő jel, ami a rendszert a kezdőállapotból a végállapotba átviszi.

TELJESÜLÉSE A KÁLMÁN-FÉLE RANGFELTÉTEL (GYAKORLATBAN EZT HASZNÁLJUK)

$$\dot{x}(t) = \underline{\underline{A}}x(t) + \underline{\underline{B}}u(t)$$

$$y(t) = \underline{\underline{C}}x(t)$$

Az állapottér modellel leírt rendszer akkor és csak akkor állapotirányítható, ha az állapottér modell együtthatóiból képzett $\underline{\underline{C}}$ irányíthatósági mátrix

$$C_{n-1} = [B\ AB\ A^2B \ldots\ A^{n-1}B]$$

teljes rangú: $r(C_{n-1}) = n$

MEGFIGYELHETŐSÉG

$$\dot{x}(t) = \underline{\underline{A}}x(t) + \underline{\underline{B}}u(t)$$

$$y(t) = \underline{\underline{C}}x(t)$$

A modellel leírt rendszert akkor nevezzük teljesen megfigyelhetőnek, ha tetszőleges t_0 időponthoz tartozó $x(t_0)$ kezdőállapothoz és $u(t) = 0$ bemenethez létezik olyan $t_1 > t_0$ időpont, hogy $y(t)|\ t \in (t_0, t_1]$ kimenet ismerete elegendő $x(t_0)$ kezdőállapot megadásához.

TELJESÜLÉSE A KÁLMÁN-FÉLE RANGFELTÉTEL (GYAKORLATBAN EZT HASZNÁLJUK)

$$\dot{x}(t) = \underline{\underline{A}}x(t) + \underline{\underline{B}}u(t)$$

$$y(t) = \underline{\underline{C}}x(t)$$

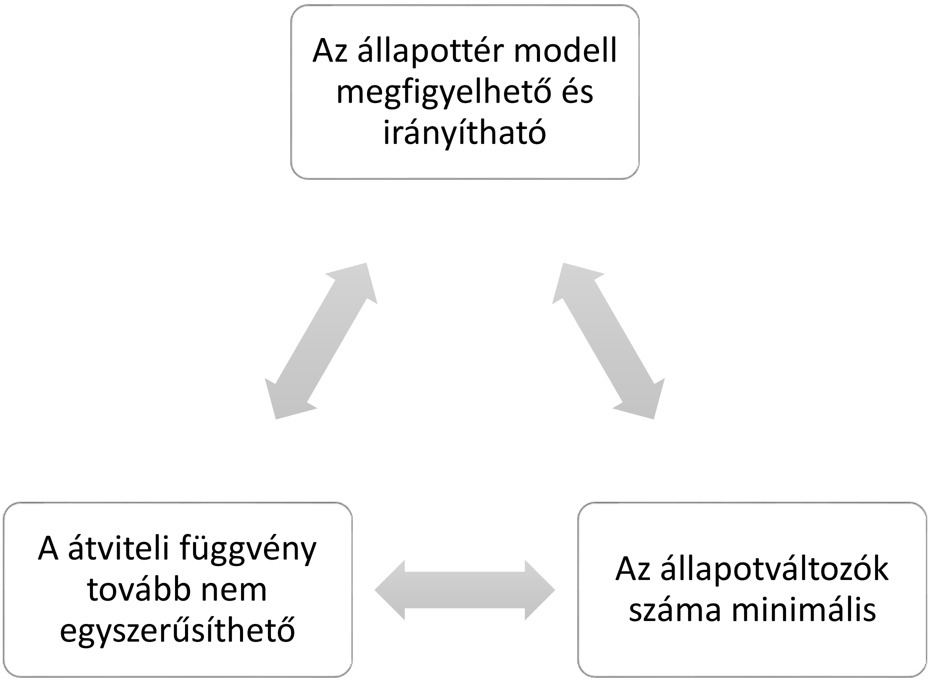
Modellel megadott rendszer akkor és csak akkor megfigyelhet ő, ha az állapottér modell együtthatóiból képzett $\underline{\underline{O}}$ megfigyelhet őségi mátrix:

$$O_{n-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

teljes rangú: $r(O_{n-1}) = n$

TULAJDONSÁGOK

A megfigyelhetőség és az irányíthatóság együttes teljesülése nagyon fontos, illetve kapcsolatba hozható más állapottér tulajdonságokkal


Az állapottér modell megfigyelhető és irányítható
A átviteli függvény tovább nem egyszerűsíthető
Az állapotváltozók száma minimális