PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Estructural y Geotécnica
ICE3031 Mecánica del Continuo
Segundo Semestre 2023

Tarea 5

Fecha de entrega: 09-Noviembre-2023, 23.59hrs.

Nota importante: Las tareas deben ser desarrolladas estrictamente en forma individual. Los conceptos generales de los problemas pueden ser discutidos en grupos, sin embargo los resultados no deben conversarse ni compararse entre alumnos del curso. El informe debe contener todos los desarrollos teóricos, resultados numéricos, figuras y explicaciones pedidas para la tarea, y deberá será redactado en LaTeX. Se considerará como parte de la evaluación de la tarea la correcta diagramación, redacción y presentación del informe, pudiendo descontarse hasta 2 puntos por este concepto. Los códigos desarrollados en `Python` deben ser incluidos en el informe como un anexo, en formato doble columna y tamaño font 9. Todos los códigos generados para la tarea e informe deben ser enviados al correo `ice3031uc@gmail.com` antes de la entrega del informe, y además deben ser subidos a la plataforma de Canvas para la entrega de tareas. **Incluya en su informe el número de horas dedicadas a esta tarea**. No se aceptarán tareas ni códigos después de la fecha de entrega.

Problema 1: Utilice el software *FEniCS* para resolver el problema de elasticidad no-lineal de un prisma sometido a una carga axial. Para esto, considere un prisma compuesto por un material Mooney-Rivlin compresible, cuya energía de deformación es

$$W = C_{10}(\overline{I}_1 - 3) + C_{01}(\overline{I}_2 - 3) + \frac{1}{D_1}(J-1)^2$$

donde C_{10}, C_{01} y D_1 son parámetros del material,

$$\overline{I}_1 = J^{-2/3} I_1 \ ,$$

$$\overline{I}_2 = J^{-4/3} I_2 \ ,$$

con I_1, I_2 los invariantes del tensor derecho de Cauchy-Green y J el campo jacobiano. El dominio a analizar es $B_0 = [0,4] \times [0,2] \times [0,2]$ cuya frontera es particionada como

$$\Gamma_{D_0} = 0 \times (0,2) \times (0,2)$$
$$\Gamma_{D_1} = 4 \times (0,2) \times (0,2)$$
$$\Gamma_N = \partial\Omega \backslash \Gamma_D.$$

Para el problema, utilice las siguientes condiciones de frontera:

- En Γ_{D_1}:
$$u_x = (\alpha \cdot \Delta_{max}, 0, 0)$$
- En Γ_{D_0}:
$$u = (0,0,0)$$
- En Γ_N:
$$T = (0,0,0)$$

Considerando $C_{10} = 0.8$, $C_{01} = 0.5$, $D_1 = 0.34$, $\Delta_{max} = 4$ y ausencia de fuerzas de cuerpo, se pide

i) Escriba una implementación del problema usando el **principio de trabajos virtuales** en *FEniCS*, y resuélvalo. Utilizando $\alpha = 1$, entregue un gráfico donde se muestre la configuración de referencia B_0 y la configuración deformada $\varphi(B_0)$. Además, entregue un gráfico mostrando la magnitud del desplazamiento en el plano XZ.

ii) Para $\alpha = 1$, entregue gráficos 3D mostrando los planos $X = 2$, $X = 4$, $Y = 0$, $Y = 1$ para el jacobiano J y para cada una de las tensiones: σ_{XX}, σ_{YY}, σ_{ZZ}, τ_{XY}, τ_{XZ}.

iii) Entregue una animación (formato AVI) que muestre cómo se deforma el sólido a medida que se incrementa el desplazamiento. Para esto, resuelva el problema con distintos valores de $\alpha \in [0, 1]$ (mínimo 10 valores distintos), y genere la animación utilizando Paraview.

iv) Para $\alpha = 1$, entregue gráficos de los estiramientos principales (mayor y menor) para los planos $X = 2$, $X = 4$, $Y = 0$, $Y = 1$.

v) Para $\alpha = 1$, entregue una curva fuerza-desplazamiento.

Problema 2:

i) Considere un material isotrópico cuya energía de deformación es $W(\boldsymbol{C}) = \tilde{W}(I_1(\boldsymbol{C}), I_2(\boldsymbol{C}), I_3(\boldsymbol{C}))$. Demuestre que para este caso es posible escribir el segundo tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\boldsymbol{S} = \alpha_0(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{I} + \alpha_1(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{C} + \alpha_2(I_1, I_2, I_3)\boldsymbol{C}^2$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha_0(I_1, I_2, I_3) &= 2\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2\frac{\partial W}{\partial I_2} I_1 + 2\frac{\partial W}{\partial I_3} I_2 \\
\alpha_1(I_1, I_2, I_3) &= -2\frac{\partial W}{\partial I_2} - 2\frac{\partial W}{\partial I_3} I_1 \\
\alpha_2(I_1, I_2, I_3) &= 2\frac{\partial W}{\partial I_3}
\end{aligned}$$

ii) Considere un sólido incompresible en configuración de referencia B_0 cuyo Lagrangiano es definido como

$$I[\boldsymbol{\varphi}, p] := \Pi[\boldsymbol{\varphi}] - \int_{B_0} p \left\{\det(\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{\varphi}) - 1\right\}\, dV$$

y donde las configuraciones de equilibrio se obtienen de la condición de estacionariedad

$$\delta I[\boldsymbol{\varphi}, p, \boldsymbol{\eta}, \xi] := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} I[\boldsymbol{\varphi} + \epsilon\boldsymbol{\eta}, p + \epsilon\xi]\Big|_{\epsilon=0} = 0$$

Demuestre que lo anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Div}\bar{\boldsymbol{P}} + R\boldsymbol{B} &= 0 & \boldsymbol{X} &\in B_0 \\
\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{N} &= \bar{\boldsymbol{T}} & \boldsymbol{X} &\in \partial B_2 \\
\det(\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{\varphi}) - 1 &= 0 & \boldsymbol{X} &\in B_0
\end{aligned}$$

donde

$$\bar{\boldsymbol{P}}(\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{\varphi}, p) = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{F}}(\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{\varphi}) - p \det(\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{\varphi})\{\mathrm{Grad}\, \boldsymbol{\varphi}\}^{-T}$$

y ∂B_2 es la frontera de tracciones prescritas.