

# Sesiunea 3

---

## Agenda

- Recapitulare concepte din sesiunile anterioare
- Recapitulare exercitii de antrenament din sesiunile anterioare
- Exerciții cu funcții recursive bacalaureat
- Exerciții de antrenament

## Exerciții cu funcții recursive bacalaureat

- Mai jos o să găsești subiecte extrase din variantele de BAC ce au fost date în anii trecuți, începând cu anul 2010.
- Nu îți face griji că sunt variante vechi, ideea este să înțelegi cât mai bine acest tip de probleme, întrucât o să vezi că sunt identice, prin natura lor, cu ce a fost dat în edițiile de bacalaureat mai recente.
- De asemenea, în folderul [subiecte](#), o să găsești fiecare variantă din care am extras subiectele.

1.

- **Enunț:** Se consideră subprogramul  $p$ , definit alături. Valoarea lui  $p(210, 49)$  este:
- **Sursa:** BAC 2010 Iunie - Subiectul III, exercitiul 1

```
int p(int m, int n)
{ if(n==0) return 1;
  return 1+p(n, m%n);
}
```

- **Variante:**
  - a -> 1
  - b -> 2
  - c -> 3
  - d -> 4 [Correct]
- **Soluție:**

```
= 1 + p(49, 14) =
  = 1 + (1 + p(14, 7))
    = 1 + (1 + (1 + p(7, 0)))
      = 1 + (1 + (1 + 1))
```

2.

- **Enunț:** Se consideră subprogramul  $f$ , definit alături. Scrieți două numere naturale din intervalul deschis  $(20, 30)$ , care pot fi memorate în variabilele întregi  $x1$ , și respectiv  $x2$ , astfel încât valoarea

lui  $f(x1, 3)$  să fie 29, iar valoarea lui  $f(3, x2)$  să fie 1.

- **Sursa:** BAC 2010 August - Subiectul III, exercitiul 2

```
int f(int a, int b)
{ if(a>=b)
  return (a-b)+f(a/b,b);
  return 1;
}
```

- **Solutie:**

- Incercam sa dam valori lui  $x1$  din intervalul specificat
- Incepem cu 21

$$\begin{aligned} f(21, 3) &= \\ &= 18 + f(7, 3) \\ &= 18 + (4 + f(2, 3)) \\ &= 18 + (4 + 1) = 23 \end{aligned}$$

- obtinem 23, ceea ce nu ne satisface, mergem mai departe
- Incercam cu 29, ultima valoare posibila

$$\begin{aligned} f(29, 3) &= \\ &= 26 + f(9, 3) \\ &= 26 + 6 + f(3, 3) \\ &= 26 + 6 + 0 + f(1, 3) \\ &= 26 + 6 + 0 + 1 \\ &= 33 \end{aligned}$$

- obtinem 33, care din nou nu este ceea ce cautam noi, chiar mai mare.
- Incercam cu 25, un numar care e cu 4 mai mic decat valoarea incercata la pasul anterior

$$\begin{aligned} f(25, 3) &= \\ &= 22 + f(8, 3) \\ &= 22 + 5 + f(2, 3) \\ &= 22 + 5 + 1 = 28 \end{aligned}$$

- Acum suntem foarte aproape de numarul dorit
- Incercam cu 26:

$$\begin{aligned} f(26, 3) &= \\ &= 23 + f(8, 3) \\ &= 23 + 5 + f(2, 3) \end{aligned}$$

$$= 23 + 5 + 1$$

$$= 29$$

- si am obtinut ce am dorit. Deci  $x1 = 26$
- Pentru  $x2$  este foarte simplu deoarece conform functiei noastre, putem alege orice valoare, din intervalul specificat intrucat toate sunt mai mari decat 3 (care reprezinta parametrul  $a$ ) lucru ce inseamna ca vom sari direct la conditia de oprire.
  - deci  $x2$  poate fi orice numar din intervalul (20, 30), sa zicem 21

3.

- **Enunt:** Se consideră subprogramele recursive C1 și C2, definite mai jos.

```
int C1 (int a, int b)
{ if(a==b) return a;
  else if(a>b) return C1(a-b,b);
    else return C1(a,b-a);
}

int C2 (int a, int b)
{ if(b==0) return a;
  else return C2(b,a%b);
}
```

La apel, returnează valoarea celui mai mare divizor comun al celor două numere naturale nenule primite ca parametri:

- **Sursa:** BAC 2011 Iunie - Subiectul III, Exercitiul 1.

- **Variante:**

- a. numai C1
- b. numai C2
- c. atât C1 cât și C2 [**Corect**]
- d. nici C1 nici C2

- **Solutie**

- Ne alegem doua numere arbitrare, 28 si 49, unde stim ca cmmdc al lor este 7. Apelam ambele functii cu aceste valori:

```
c1(28, 49)
  = c1(28, 21)
    = c1(7, 21)
      = c(7, 14)
        = c(7, 7)
          = 7
```

```

c2(28, 49)
  = c2(49, 28)
    = c2(28, 21)
      = c2(21, 7)
        = c2(7, 0)
          = 7

```

- Rezulta ca ambele functii intorc cmmdc

4.

- **Enunt:** Scrieti ce se afișează în urma apelului de mai jos pentru subprogramul `f`, definit alăturat.  
`f(12345);`

```

void f (int x)
{ cout<<"*"; | printf("*");
  if(x>0) {
    cout<<x; | printf("%d",x);
    f(x/100);
    cout<<"*"; | printf("*");
  }
}

```

- **Sursa:** BAC 2011 August - Subiectul III, Exercițiul 2
- **Solutie:**

```

f(12345)
= se afiseaza *12345 (deoarece x > 0) si se calculeaza f(123) [Sa
nu uitam ca ne-a ramas o steluta de afisat imediat ce calculam f(123)]
  = se afiseaza *123 (deoarece x > 0) si se calculeaza f(1) [Sa
nu uitam ca ne-a ramas o steluta de afisat imediat ce calculam f(1)]
    = se afiseaza *1 (deoarece x > 0) si se calculeaza f(0)
    [Sa nu uitam ca ne-a ramas o steluta de afisat imediat ce calculam
    f(0)]
      = se afiseaza * si ne oprim deoarece 0 > 0 este falsa
      = se afiseaza *
      = se afiseaza *
      = se afiseaza *
Deci programul va afisa: *12345*123*1****

```

5.

- **Enunt:** Se consideră subprogramul `f`, definit alăturat. Scrieți ce se afișează în urma apelului de mai jos. `f(9)`

```

void f(int x)
{ cout<<x; | printf("%d",x);

```

```

    if(x>0)
    { if(x%2==0)
      cout<<'*'; | printf("*");
      f(x/2);
    }
  }
}

```

- **Sursa:** BAC 2012 Iunie - Subiectul III, Exercițiul 2
- **Soluție:**

```

f(9)=
= se afiseaza `9` si deoarece `9` nu este par doar se va calcula `f(4)`
= se afiseaza `4` si deoarece `4` este par se va afisa `*` urmat de un apel la `f(2)`
= se afiseaza `2` si deoarece `2` este par se va afisa `*` urmat de un apel la `f(1)`
= se afiseaza `1` si deoarece `1` este impar, doar se va calcula `f(0)`
= se afiseaza `0` si se va opri functia recursiva.
= rezulta ca in final, `f(9)` va afisa `94*2*10`

```

6.

- **Enunt:** Se consideră subprogramul `f`, definit alăturat. Scrieți valorile `f(3,4)` și `f(2,20)`.

```

int f(int x,int y)
{   if(x*2>y)
    return x;
    return f(x*2,y);
}

```

- **Sursa:** BAC 2012 August - Subiectul III, Exercițiul 2
- **Soluție:**

```

f(3,4)= Deoarece 3*2 > 4 functia va intoarce 3 si se va opri
f(2, 20)=
= Deoarece 2*2 < 20 functia va intoarce f(4, 20)
= Deoarece 4*2 < 20 functia va intoarce f(8, 20)
= Deoarece 8*2 < 20 functia va intoarce f(16, 20)
= Deoarece 16*2 > 20 functia va intoarce 16 si se va opri

```

7.

- **Enunt:** Se consideră subprogramele `f1` și `f2`, definite mai jos.

```

int f1 (int x, int y)
{
    return x*y;
}

int f2 (int x, int y)
{ if (y==1) return x;
  else return x*f2(x, y-1);
}

```

La apel, pentru parametrii  $x=2$  și  $y=3$ , returnează  $x$  la puterea  $y$ :

- **Sursa:** BAC 2013 Iunie - Subiectul III, Exercițiul 1.
- **Variante:**
  - a. atât f1, cât și f2
  - b. numai f1
  - c. numai f2 [Corect]
  - d. nici f1, nici f2
- **Soluție:**

```

f2(2,3) =
    = deoarece 3 != 1 se va intoarce 2 * f2(2, 2)
      = deoarece 2 != 1 se va intoarce 2 * f2(2, 1)
        = deoarece 1 == 1 se va intoarce 2 si revenim pentru
calculul final
      = Acum la intoarcere avem 2 * 2 = 4
    = 2 * 4
  = 8

```

8.

- **Enunt:** Se consideră subprogramul f, definit alăturat. Indicați ce se afișează în urma apelului de mai jos. f(3);

```

void f (int n)
{ if (n!=0)
  { f (n-1);
    cout<<n; | printf("%d",n);
  }
}

```

- **Sursa:** BAC 2013 August - Subiectul III, Exercițiul 1.
- **Variante:**
  - a. 12

- b. 123
- c. 321
- d. 3210

- **Solutie:**

```

f(3)=
    = Deoarece 3!= 0 se va calcula f(2) [Sa nu uitam ca la
    intoarcere avem de afisat n adica 3, in pasul curent]
    = Deoarece 2!=0 se va calcula f(1) [Sa nu uitam ca la
    intoarcere avem de afisat n adica 2, in pasul curent]
    = Deoarece 1!=0 se va calcula f(0) [Sa nu uitam ca la
    intoarcere avem de afisat n adica 1, in pasul curent]
    = Deoarece 0 == 0 Ne oprim si ne intoarcem sa
afisam
    = Afisam 1
    = Afisam 2
    = Afisam 3
    = Deci programul va afisa 123

```

9.

- **Enunt:** Se consideră subprogramul f, definit alăturat. Scrieți valorile  $f(5,5)$  și  $f(10,21)$ .

```

int f(int a, int b)
{
    if (a==b) return 0;
    if (b/a==0) return a+b;
    return f(a+2,b-3);
}

```

- **Sursa:** BAC 2014 Editia Speciala - Subiectul III, Exercițiul 2
- **Solutie:**

```

f(5,5) = Deoarece 5 == 5 functia va intoarce direct 0 si se va
opri

f(10, 21) =
    = Deoarece 10 != 21 si 21 / 10 != 0 se va intoarce f(12, 18)
    = Deoarece 12 != 18 si 18 / 12 != 0 se va intoarce f(14,
15)
    = Deoarece 14 != 15 si 15/14 != 0 se va intoarce f(16,
12)
    = Deoarece 16 != 12 insa 12/16 == 0, se va
intoarce 28 si se va opri.

Deci f(5,5) => 0 si f(10, 21) => 28

```

10.

- **Enunt:** Se consideră subprogramul `f`, definit alăturat. Indicați ce valoare are `f(15)`.

```
int f(int n)
{   if (n<10) return f(n+1)+3;
    else if (n==10) return 7;
        else return f(n-2)-1;
}
```

- **Sursa:** BAC 2014 Iunie - Subiectul III, Exercițiul 1
- **Variante:**
  - a. 1
  - b. 7 [Corect]
  - c. 8
  - d. 10
- **Solutie:**

```
f(15)  =
= Deoarece 15 > 10 se va intoarce f(13) [Si dupa ce avem
rezultatul, avem de scazut un -1]
    = Deoarece 13 > 10 se va intoarce f(11) [Si dupa ce avem
rezultatul, avem de scazut un -1]
        = Deoarece 11 > 10 se va intoarce f(9) [Si dupa ce avem
rezultatul, avem de scazut un -1]
            = Deoarece 9 < 10 se va intoarce f(10) [Si dupa ce
avem rezultatul avem de adunat 3]
                = Deoarece 10 == 10, am atins conditia de oprire
si se va return 7
                    = Se va intoarce 7 + 3 = 10
                        = Se va intoarce 10-1 = 9
                            = Se va intoarce 9-1= 8
                                = Se va intoarce 8 - 1 = 7 si ne vom opri

Deci f(15) => 7
```

## Exercitii de antrenament

1. Se consideră subprogramul `f`, definit alăturat. Scrieți două valori naturale distincte din intervalul `[1,50]` pe care le poate avea variabila întreagă `x`, astfel încât `f(30,x)` să aibă valoarea 5.

```
int f(int a,int b)
{   if (b==0) return a;
    else return f(b,a%b);
}
```



- Sursa: BAC 2014 August - Subiectul III, exercitiul 2

2. Subprogramul F este definit alăturat. Scrieți ce se afișează în urma apelului de mai jos. F('d');

```
void F(char c)
{ if(c>='a')
  { cout<<c; | printf("%c",c);
    F(c-1);
  }
}
```

- Sursa BAC 2015 Iunie - Subiectul III, exercitiul 2

3. Subprogramul F este definit alăturat. Scrieți instrucțiunea prin care se poate apela subprogramul pentru a afișa, în ordine strict descrescătoare, toți divizorii pozitivi proprii ai numărului 2015 (divizori naturali diferiți de 1 și de 2015)

```
void F (int n, int d)
{ if(d<n/2) F(n, d+1);
  if(n%d==0)
    cout<<d<<' '; | printf("%d ",d);
}
```

- Sursa BAC 2015 August - Subiectul III, exercitiul 2

4. Subprogramul F este definit alăturat. Scrieți ce se afișează în urma apelului de mai jos. F(154678,3);

```
void F (long a, int b)
{ if(a*b!=0)
  if(a%2==0)
  { cout<<a%10; | printf("%d",a%10);
    F(a/10,b-1);
  }
  else
  { F(a/10,b+1);
    cout<<a%10; | printf("%d",a%10);
  }
}
```

- Sursa BAC 2015 Speciala - Subiectul III, exercitiul 2

5. Subprogramul F este definit alăturat. Scrieți ce valori au F(105,105) respectiv F(105,42).

```
int F(int x, int y)
{ if(x==y) return 1;
  else
```

```
    {    if(x<y)
        {    x=x+y;
              y=x-y;
              x=x-y;
            }
        return 1+F(x-y,y);
    }
}
```

- Sursa: BAC 2015 Simulare - Subiectul III, exercitiul 2.