动态规划法
Dynamic Programming

湖南大学信息科学与工程学院

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

10.5 适用动态规划法的场景

10.6 最长公共子序列

10.7 0–1背包问题

10.8矩阵乘法

10.1 兔子的故事

一个故事:

一对兔子饲养在围墙中，如果它们每个月生一对兔子，且新生的兔子在第二个月后的每个月生一对兔子。假设所有兔子都不会死去，能够一直活下去，那么n个月以后这对兔子可以繁殖多少对兔子呢?（不包括开始的那对兔子)

如何建立数学模型呢?

数学模型

$$
\mathrm{F}(n)=\begin{cases} 0 & n=0 \\ 1 & n=1 \\ F(n-1)+F(n-2) & n\geq 2 \end{cases}
$$

斐波那契(Fibonacci)序列

程序代码

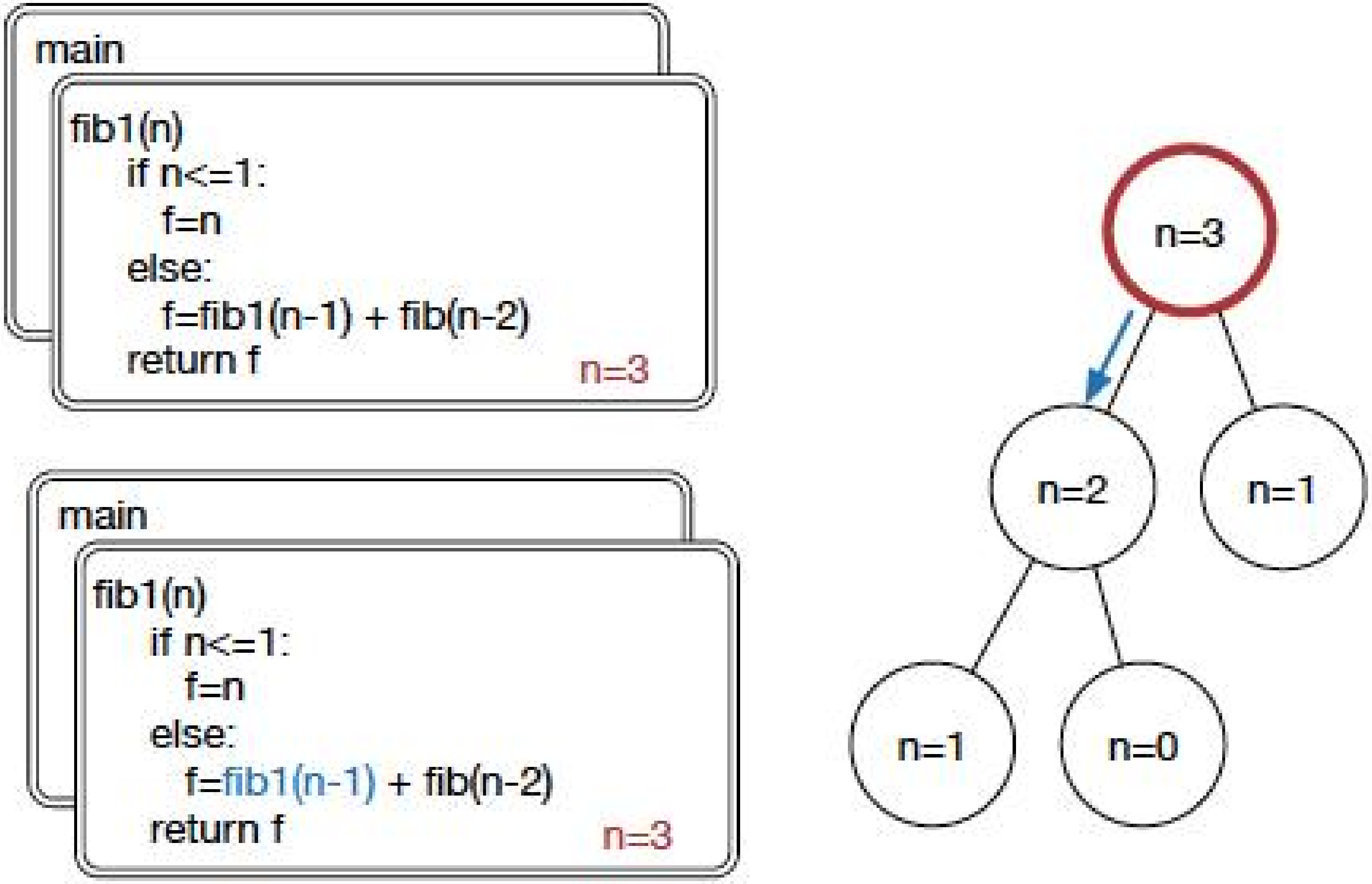
```python
def fib_rec(n):
    if n <= 1:
        f=n
    else:
        f=fib_rec(n-1)+fib_rec(n-2)
    return f


def main():
    num = 5
    print('{0:5}==>{1:10d}'.format('fib('+str(num)+')', fib_rec(num)))


if __name__ == "__main__":
    main()
```

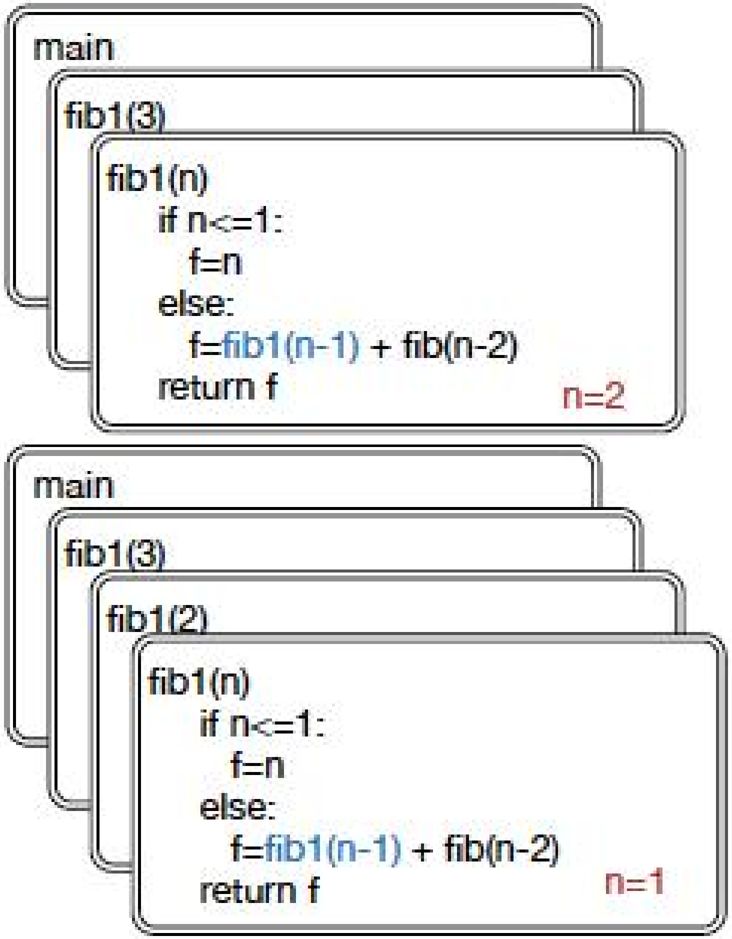
10.1 兔子的故事

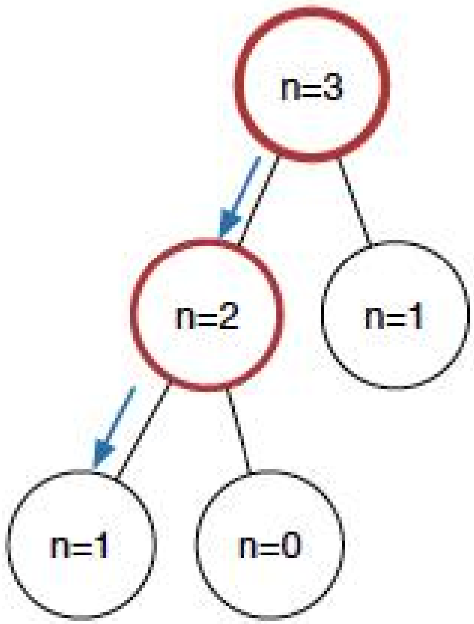
跟踪递归函数的执行过程



10.1 兔子的故事

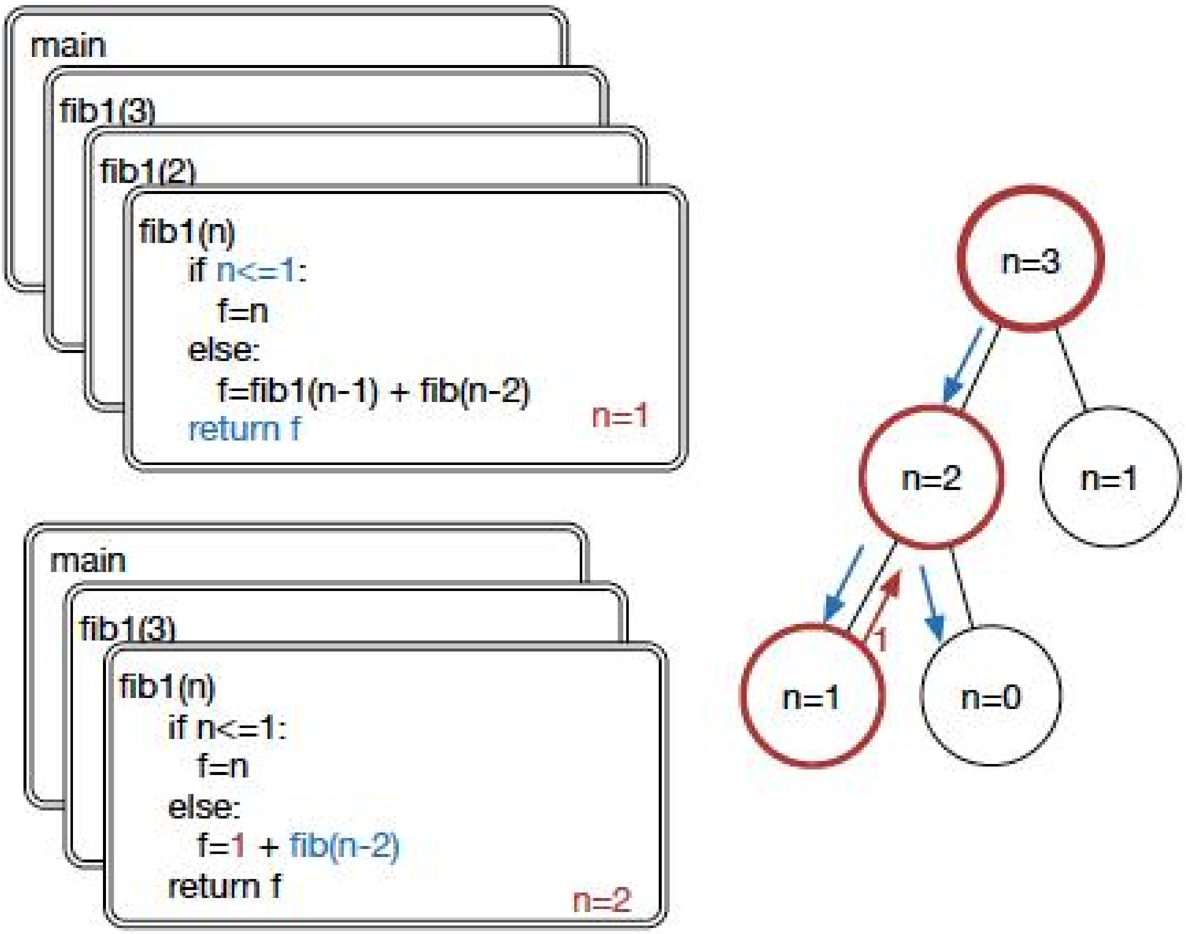
跟踪递归函数的执行过程





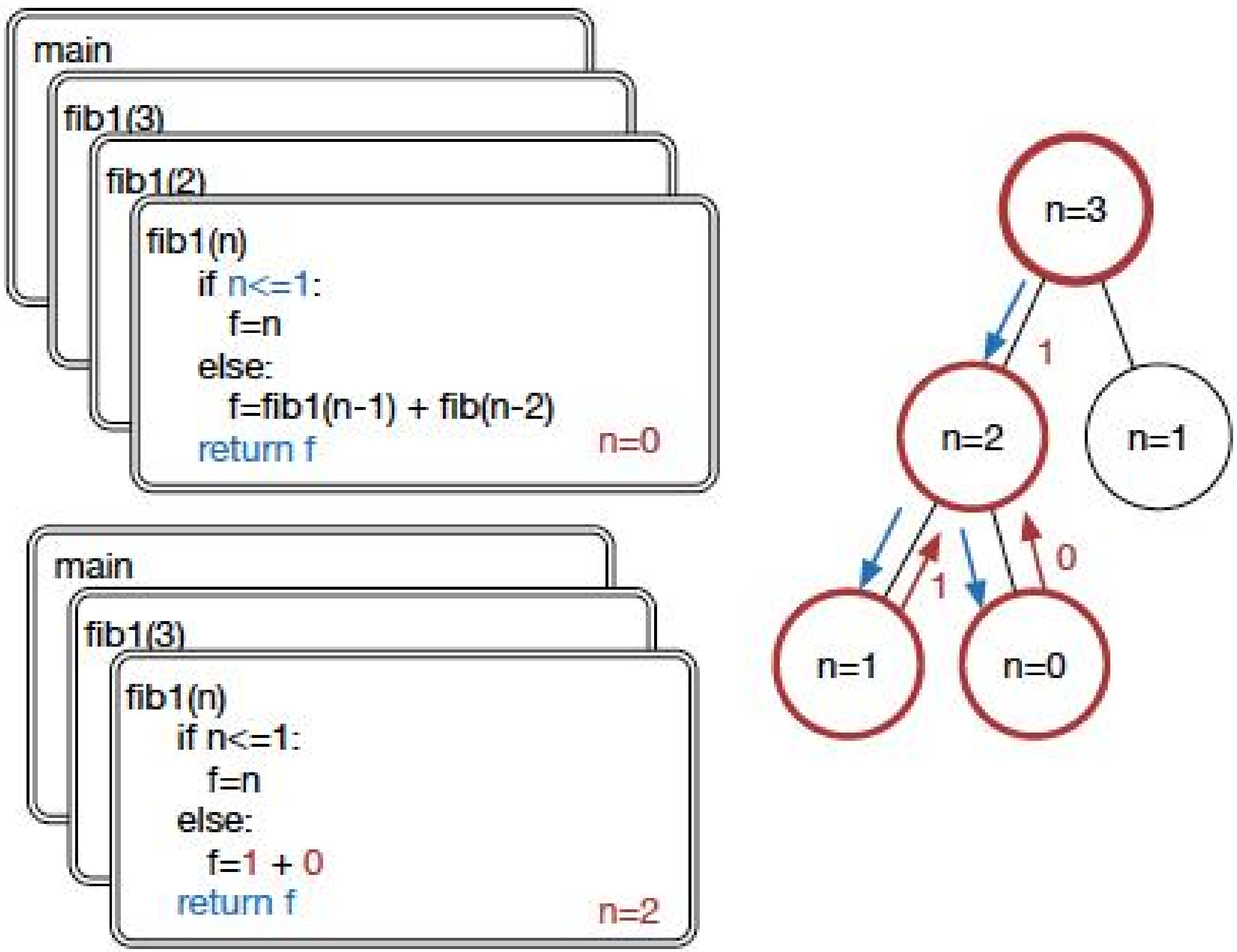
10.1 兔子的故事

跟踪递归函数的执行过程



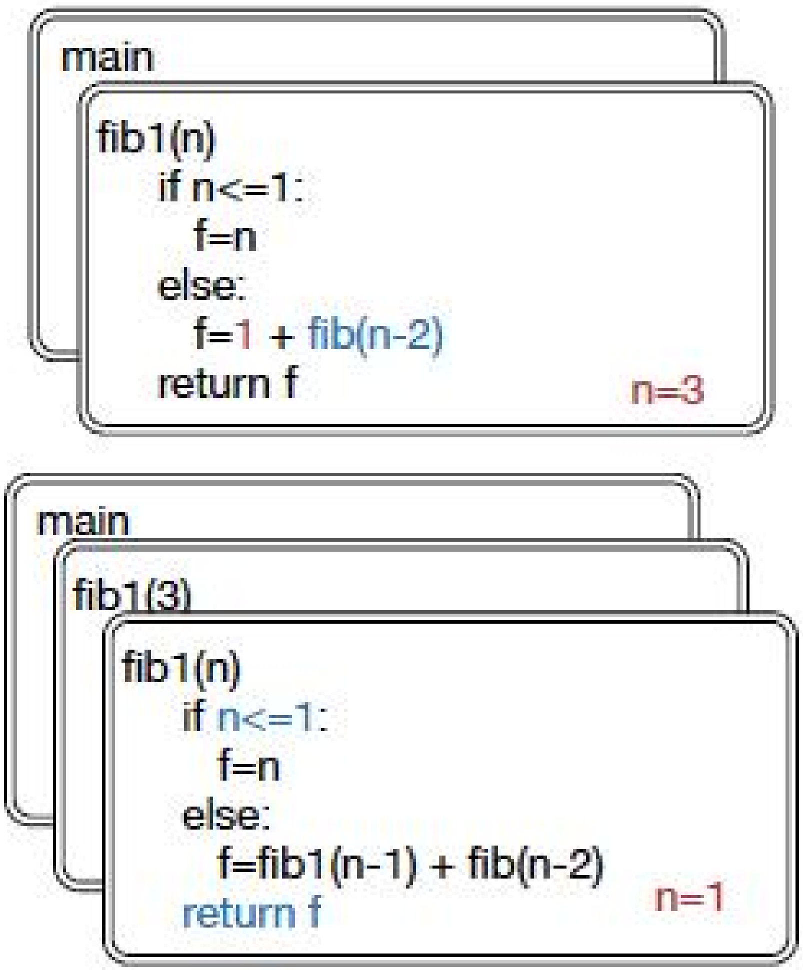
10.1 兔子的故事

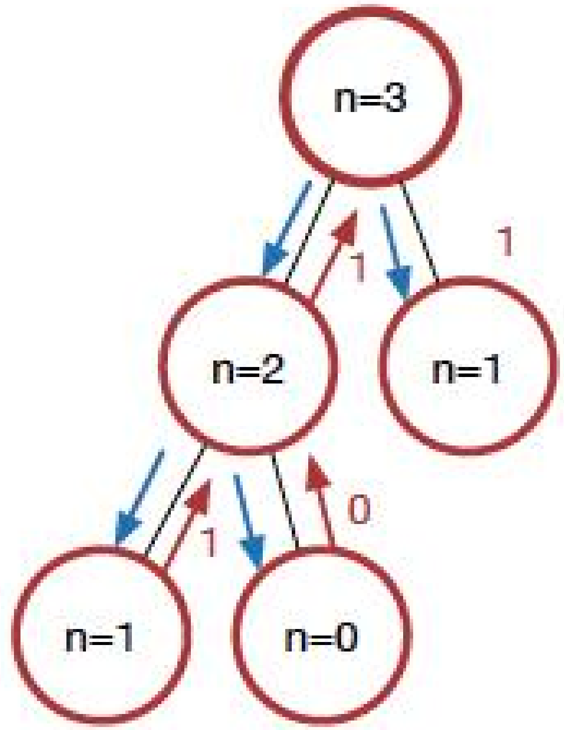
跟踪递归函数的执行过程



10.1 兔子的故事

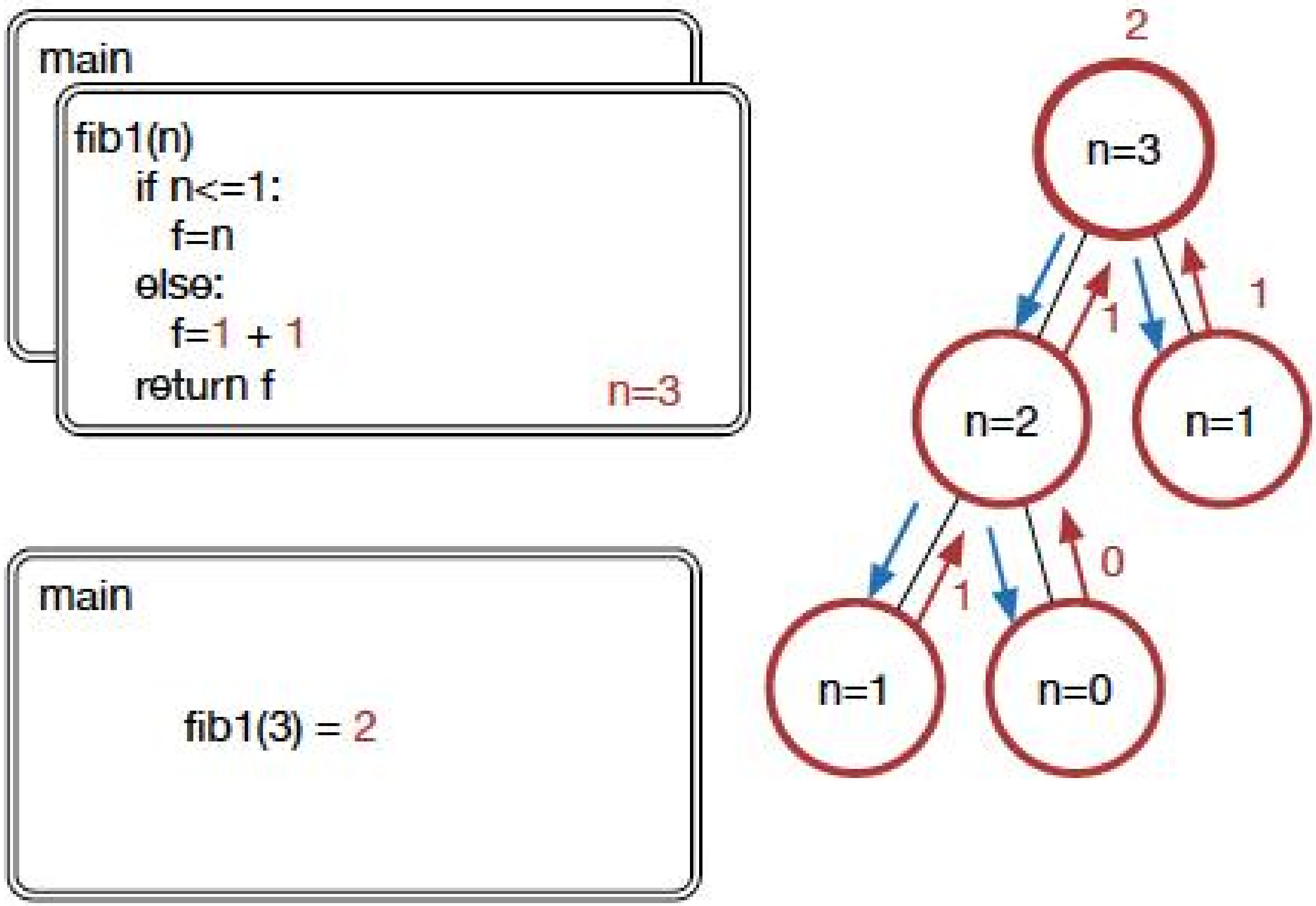
跟踪递归函数的执行过程





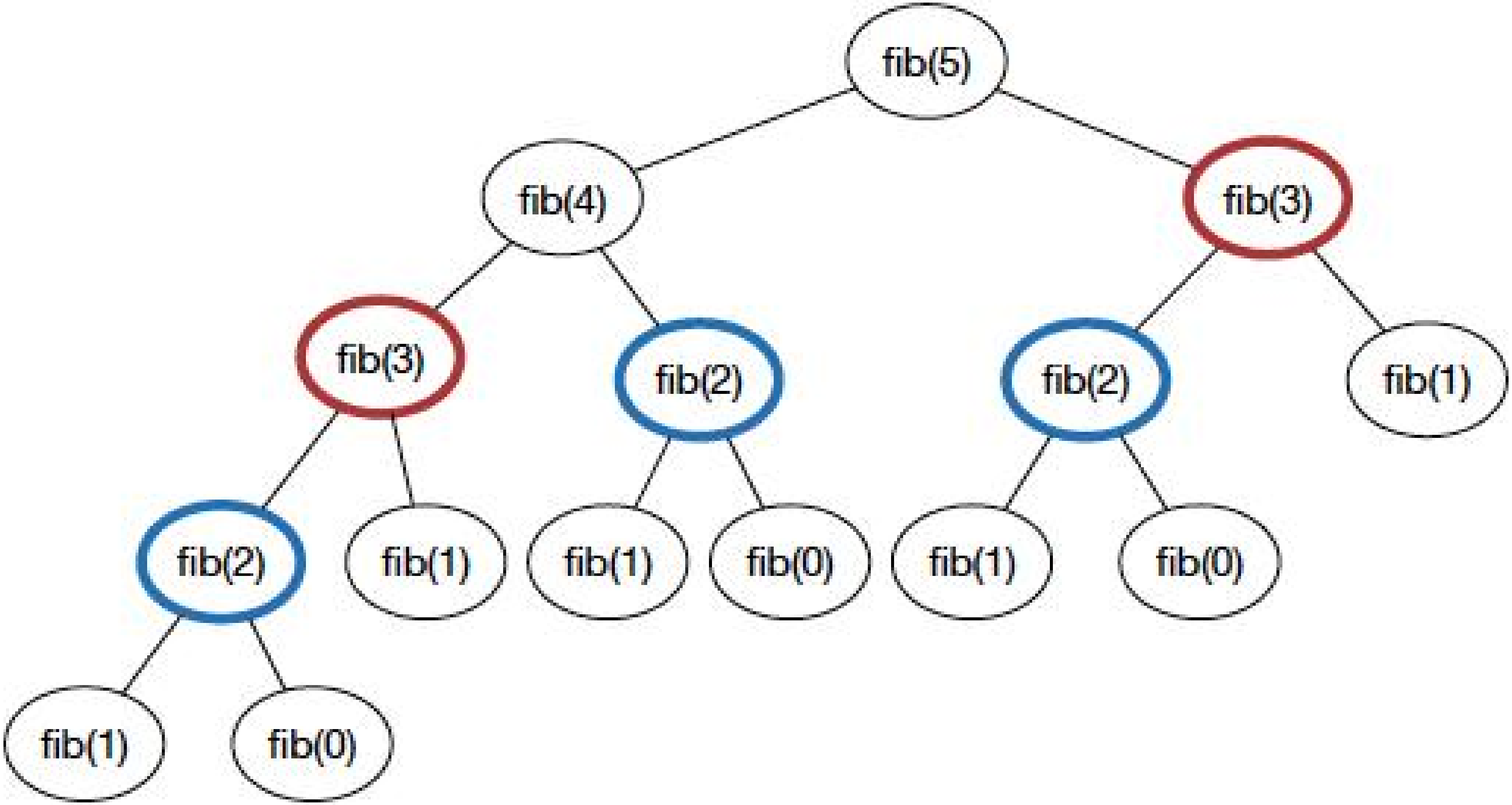
10.1 兔子的故事

跟踪递归函数的执行过程



10.1 兔子的故事

求斐波那契序列算法的时间复杂度：O(n^2)



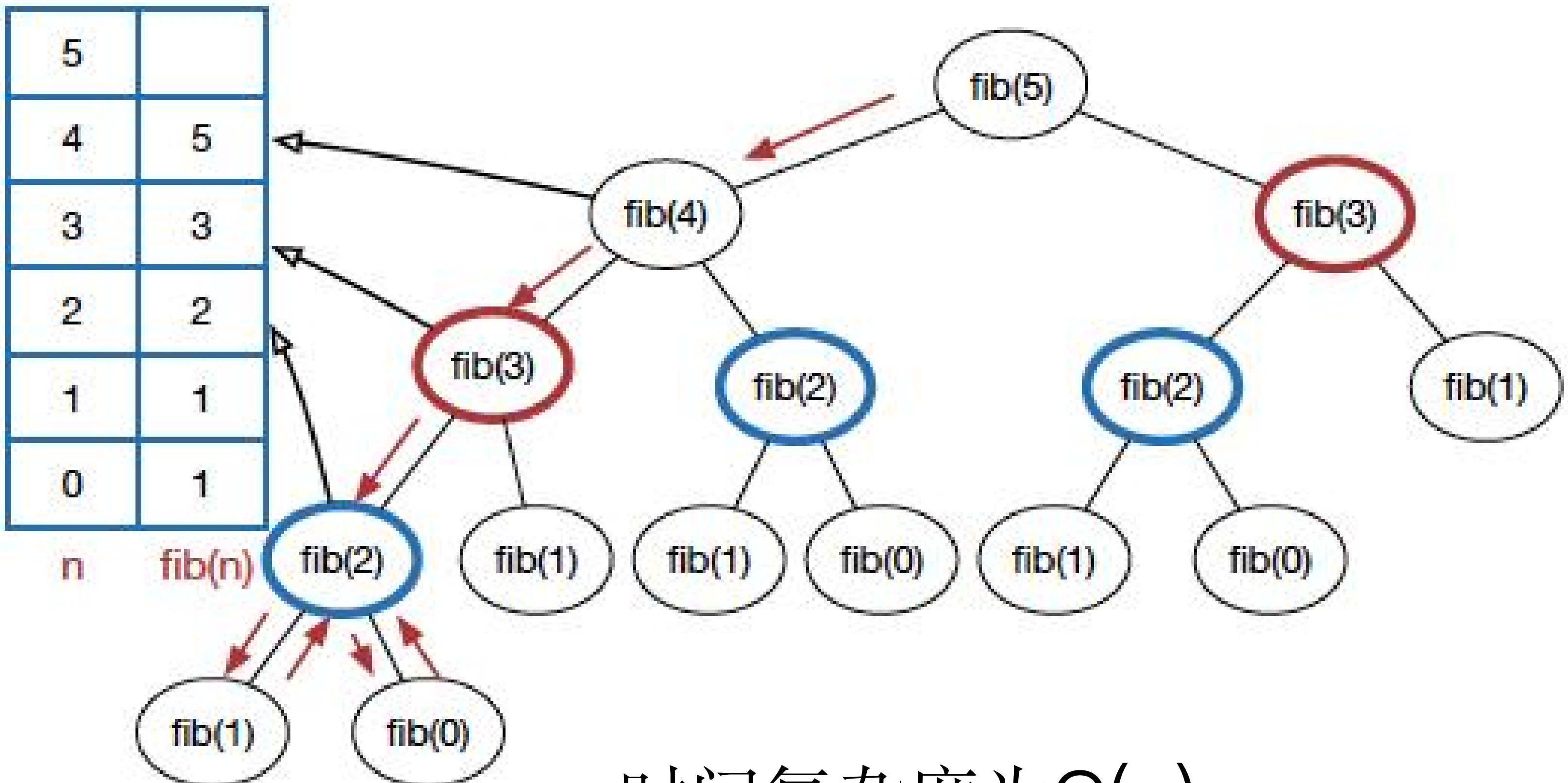
10.1 兔子的故事

采用“记忆”减少递归调用

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

10.1 兔子的故事

采用“记忆”减少递归调用



时间复杂度为O(n)

10.1 兔子的故事

采用“记忆”减少递归调用

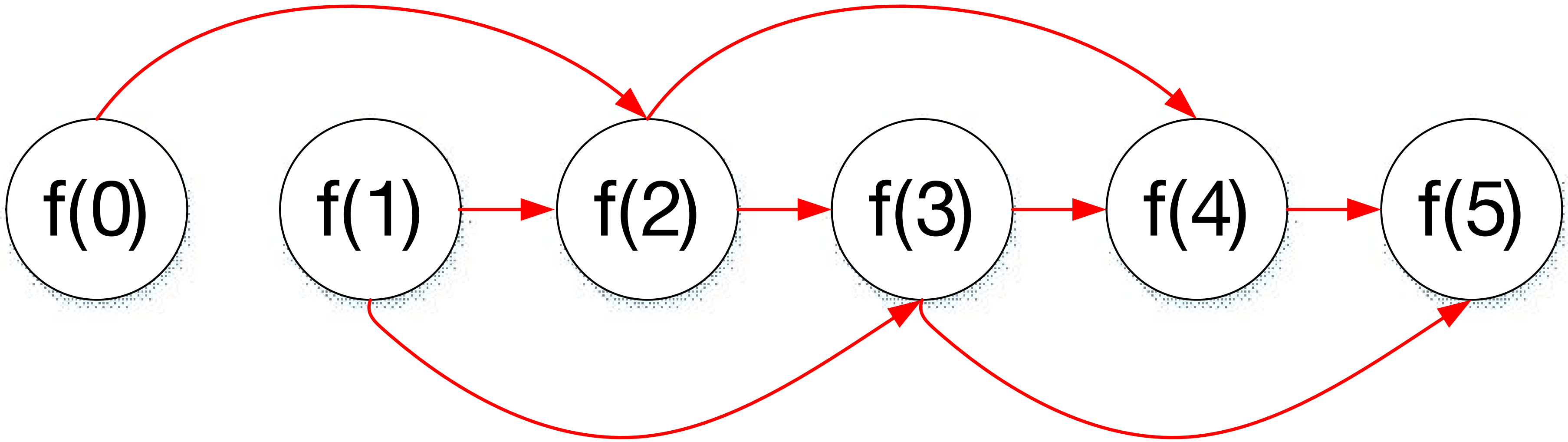
自上而下的实现

```
memo = {}
def fib2(n):
    if n in memo:                              # 查表
        return memo[n]
    else:
        if n <= 1:                             # 边界条件
            f = n
        else:
            f = fib2(n-1) + fib2(n-2)          # 递归调用
        memo[n] = f                            # 将结果存储于表中
        return f
```

10.1 兔子的故事

采用“记忆”传递信息

自底向上的实现



时间复杂度为O(n)

10.1 兔子的故事

采用“记忆”传递信息

自底向上的实现

```
def fib_bottom_up(n):
    fib = {}                          # 存储结果的字典
    for k in range(n+1):
        if k<=2:                      # 边界条件
            f = 1
        else:
            f = fib[k-1]+fib[k-2]     # 自底向上填表
        fib[k] = f
    return fib[n]
```

时间复杂度为O(n)

10.1 兔子的故事

求解斐波那契数列问题可以转变为求解矩阵幂运算问题:

$$\begin{bmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \times \begin{bmatrix} F(1) \\ F(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

快速幂下，可以将复杂度将为O(log n)

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

10.5 适用动态规划法的场景

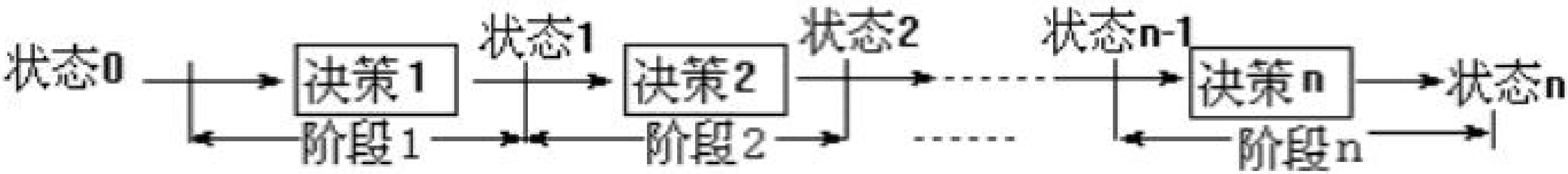
10.6 最长公共子序列

10.7 0–1背包问题

10.8矩阵乘法

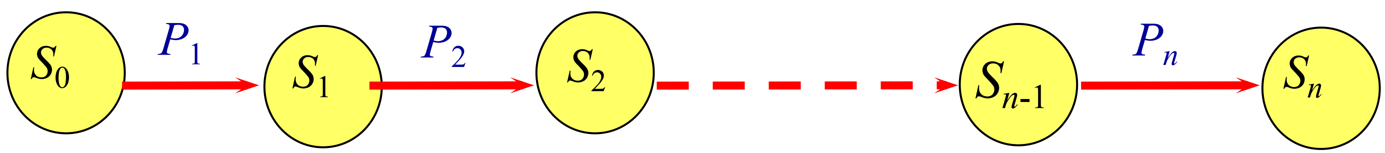
10.2 动态规划法的设计思想

10.2.2 最优化问题求解：多阶段决策过程



具有n个输入的最优化问题，其求解过程划分为若干个阶段，每一阶段的决策仅依赖于前一阶段的状态，由决策所采取的动作使状态发生转移，成为下一阶段决策的依据。

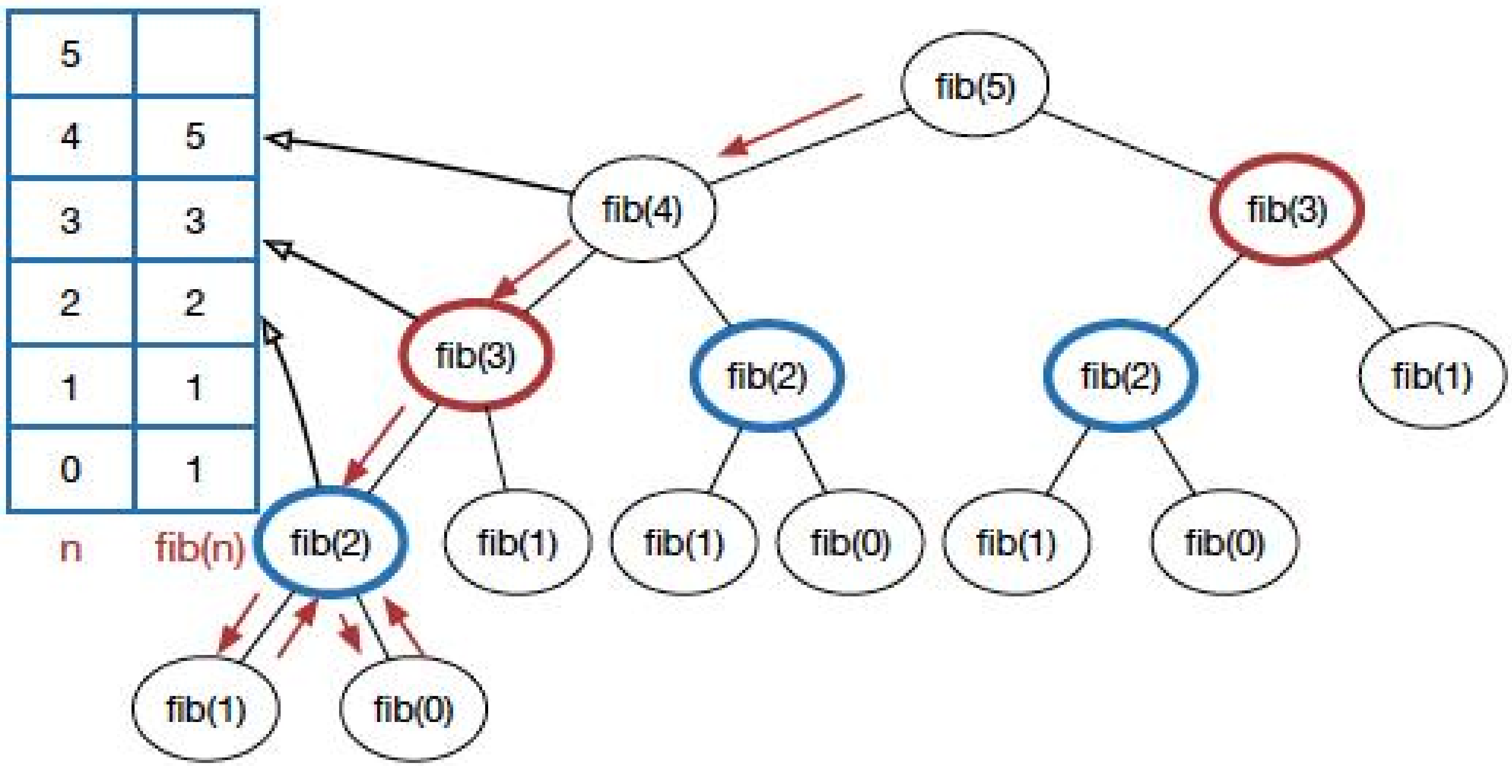
一个决策序列在不断变化的状态中产生。这个决策序列产生的过程称为多阶段决策过程。



10.2 动态规划法的设计思想

10.2.1 Dynamic Programming

Programming如何翻译?



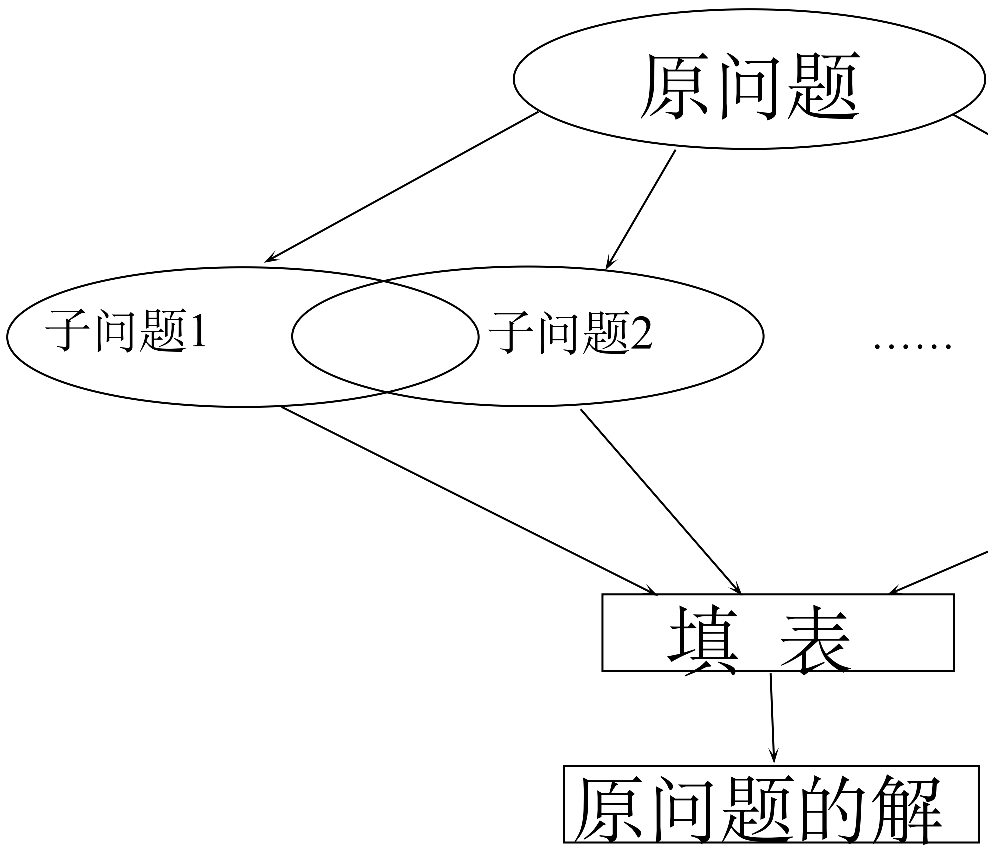
10.2 动态规划法的设计思想

10.2.2 动态规划法概念

动态规划是运筹学的一个分支，20世纪50年代初美国数学家Bellman等人在研究多阶段决策过程的优化问题时，提出了著名的最优性原理，创立了解决这类过程优化问题的新方法——动态规划法。

10.2 动态规划法的设计思想

10.2.2 动态规划法概念



10.2 动态规划法的设计思想

10.2.2 动态规划法概念

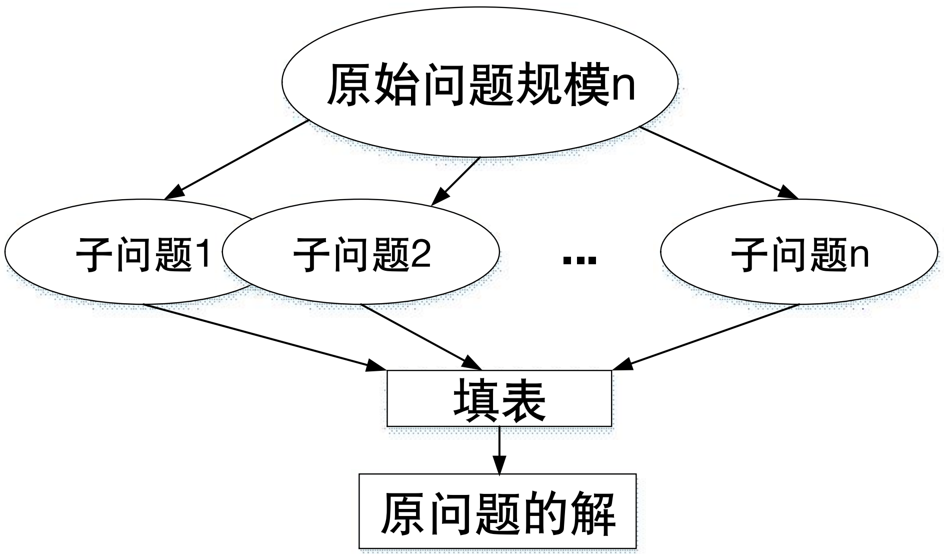
$$\mathrm{F}(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ 1 & n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & n\geq 2\end{cases}$$

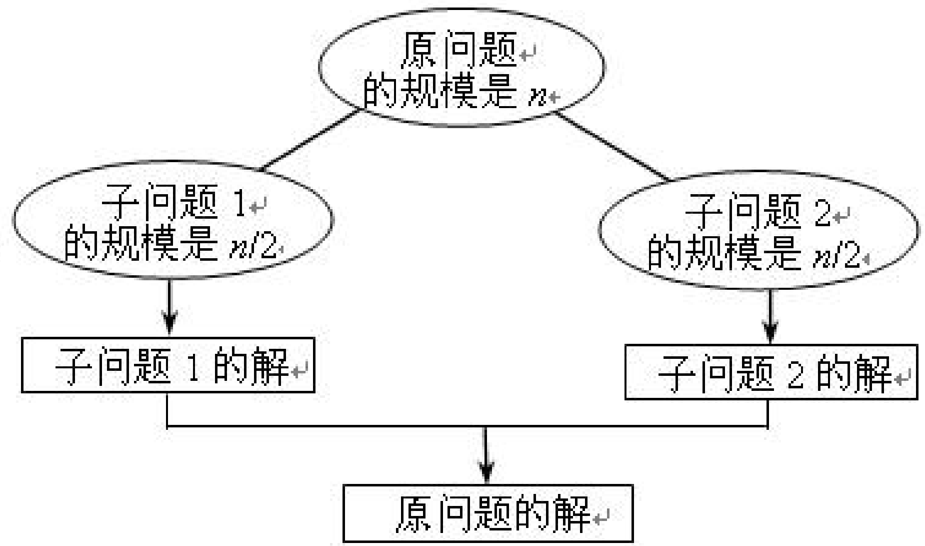
斐波那契(Fibonacci)序列

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

10.2 动态规划法的设计思想

10.2.3 动态规划法vs 分治法





10.2 动态规划法的设计思想

10.2.4 动态规划求解问题的5个步骤

1. 定义子问题

2. 建立各个子问题之间的递归关系（动态规划函数，数学模型）

3. 自底向上的求解递归式（或自顶向下）

4. 组合所有子问题的解从而获得原问题的解

10.2 动态规划法的设计思想

10.2.5 动态规划算法时间复杂度分析

子问题数×每个子问题的单次求解时间

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

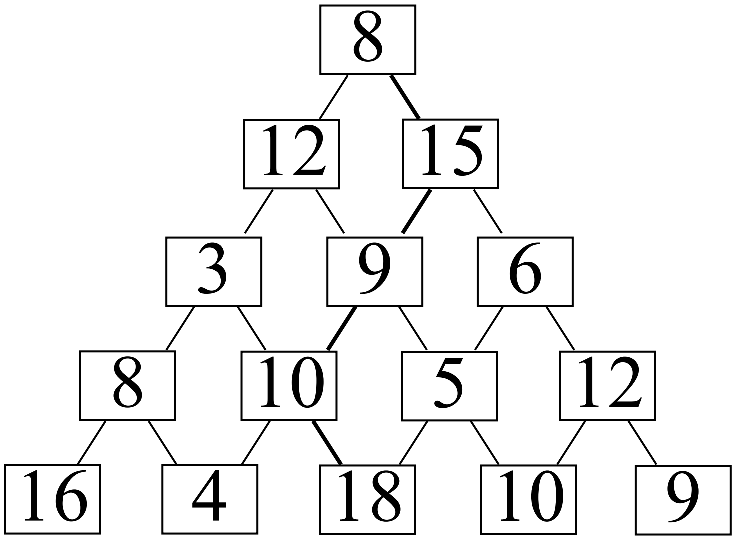
10.5 适用动态规划法的场景

10.6 最长公共子序列

10.7 0-1背包问题

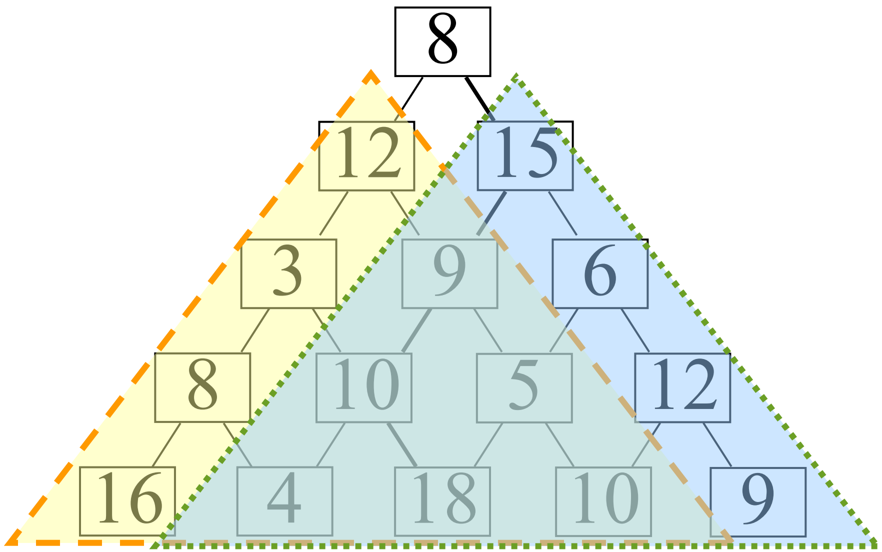
10.8矩阵乘法

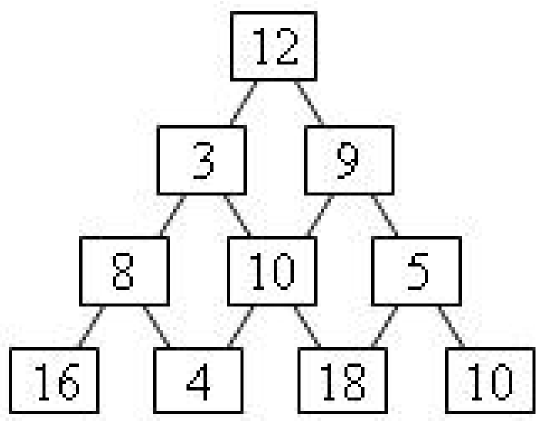
10.3子问题重叠的例子：三角数塔问题

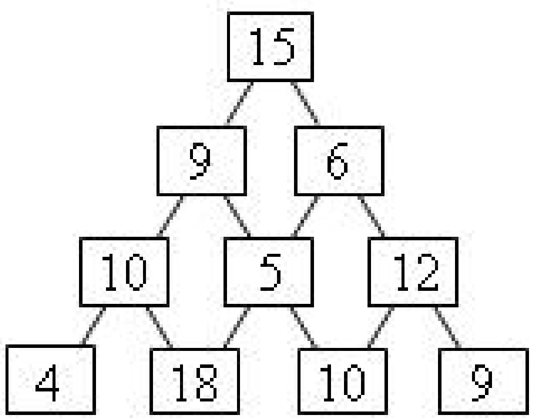


10.3子问题重叠的例子：三角数塔问题

想法





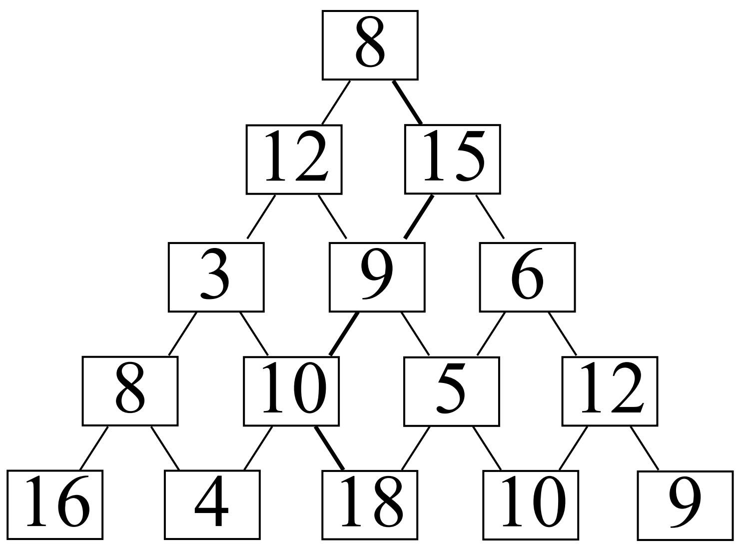


10.3子问题重叠的例子：三角数塔问题

三角数塔决策过程

第 1 层的决策	8+max{49,52} = 60				
第 2 层的决策	12+max{31,37} = 49	15+max{37,29} = 52			
第 3 层的决策	3+max{24, 28} = 31	9+max{28,23} = 37	6+max{23,22} = 29		
第 4 层的决策	8+max{16,4} = 24	10+max{4,18} = 28	5+max{18,10} = 23	12+ max{10,9} = 22	
初始化	16	4	18	10	9

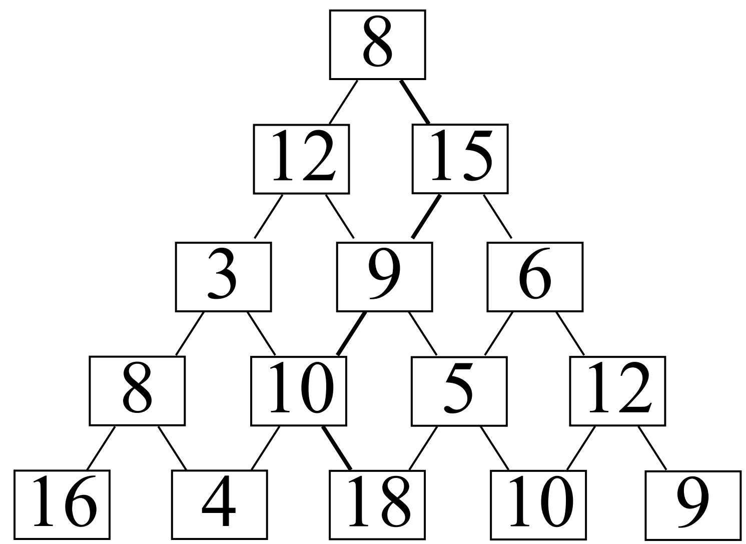
自底向上填写



10.3子问题重叠的例子：数塔问题

数据结构设计

$$data[5][5]=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 6 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 5 & 12 & 0 \\ 16 & 4 & 18 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$



10.3子问题重叠的例子：数塔问题

数据结构设计

$$\text{maxAdd}[n][n]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 4 & 18 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

10.3子问题重叠的例子：数塔问题

动态规划函数:

$$
\begin{cases}
\text{maxAdd}[n-1][j] = \text{data}[n-1][j] \quad (0 \le j \le n-1) \\
\text{maxAdd}[i][j] = \text{data}[i][j] + \max(\text{maxAdd}[i+1][j], \text{maxAdd}[i+1][j+1]) \\
(0 \le i \le n-2, 0 \le j \le i)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\text{path}[i][j] = j \quad \text{maxAdd}[i+1][j] > \text{maxAdd}[i+1][j+1] \\
(0 \le i \le \text{n}-2, 0 \le j \le i) \\
\text{path}[i][j] = j+1 \quad \text{maxAdd}[i+1][j] \le \text{maxAdd}[i+1][j+1] \\
(0 \le i \le n-2, 0 \le j \le i)
\end{cases}
$$

10.3子问题重叠的例子：数塔问题

伪代码

1. 初始化数组maxAdd的最后一行为数塔的底层数据：

```
for (j = 0; j < n; j++)
    maxAdd[n-1][j] = d[n-1][j];
```

2. 从第n-1层开始直到第1层对下三角元素maxAdd[i][j]执行下述操作：
   2.1 maxAdd[i][j]= d[i][j] + max{maxAdd[i+1][j], maxAdd[i+1][j+1]}；
   2.2 如果选择下标j的元素，则path[i][j] = j,
       否则path[i][j] = j+1；

3. 输出最大数值和maxAdd[0][0]；

4. 根据path数组确定每一层决策的列下标，输出路径信息。

10.3子问题重叠的例子：数塔问题

时间复杂度分析：$O(n^2)$

10.3子问题重叠的例子：数塔问题

代码实现

```python
import numpy as np
def DataTower1(data):
    maxAdd = np.zeros(np.array(data).shape) #初始化
    path = np.zeros(np.array(data).shape) #初始化
    n,m = np.array(data).shape #n为行数，在这里相当于塔数
    #下面这个循环相当于把data的最后一行付给了maxAdd的最后一行，就是从最后一行向上递归
    for i in range(n):
        maxAdd[n-1][i] = data[n-1][i]
    print(maxAdd)
    for i in range(n-2,-1,-1):   #进行第i层的决策
        #填写addMax[i][j],只填写下三角
        for j in range(i+1):
            if maxAdd[i+1][j] > maxAdd[i+1][j+1] :
                maxAdd[i][j] = data[i][j] + maxAdd[i+1][j]
                path[i][j] = j  #本次决策选择下标j的元素
            else :
                maxAdd[i][j] = data[i][j] + maxAdd[i+1][j+1]
                path[i][j] = j + 1   #本次决策选择下标j+1的元素
    print('path:%d'%data[0][0])  #输出顶层数字
    j=int(path[0][0])  #顶层决策试选择下一层列下标伪path[0][0]的元素
    for i in range(1,n):
        print('-> %d'%data[i][j])
        j=int(path[i][j])   #本层决策试选择下一层列下标伪path[i]][j]的元素
    return maxAdd[0][0]
```

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

10.5 适用动态规划法的场景

10.6 最长公共子序列

10.7 0–1背包问题

10.8矩阵乘法

10.4 最大子段和（最大子数组）

最大字段和问题或最大子数组问题

给定由n个整数（可能有负整数）组成的序列$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，最大子段和问题要求该序列形如 的最大值（$1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$），当序列中所有整数均为负整数时，其最大子段和为0。例如，序列$(-20, 11, -4, 13, -5, -2)$的最大子段和为 $\sum_{k=2}^{4} a_k = 20$

10.4 最大子段和（最大子数组）

蛮力法：时间复杂度

- $O(n^2)$

分治算法：时间复杂度

- $O(n \log n)$

10.4 最大子段和（最大子数组）

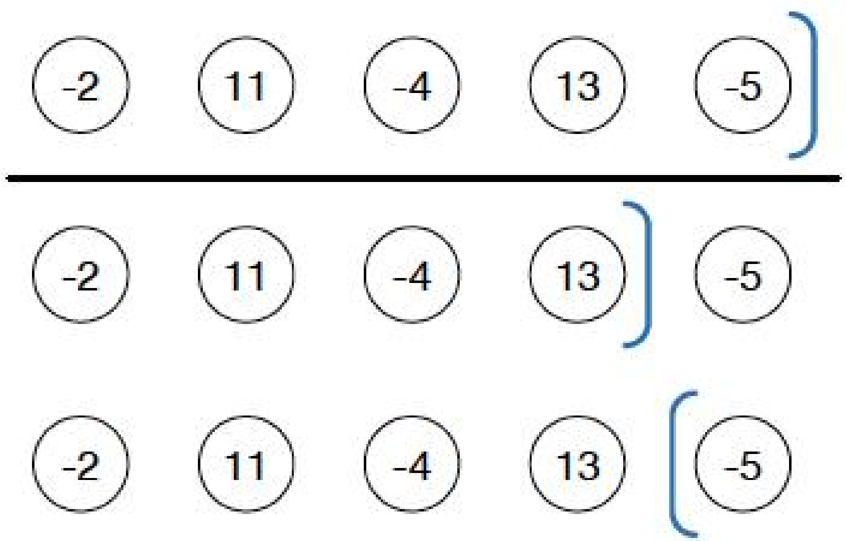
动态规划: Step1 定义子问题

- 该问题输入的是一个有n 个元素的序列A，不妨设P(i) 为直到第i 个元素的最大和
  – 将输入序列的前缀作为子问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

动态规划: Step2 猜测部分解

- 子问题P(i) 的解包括第i 个元素，此时有P(i)=P(i –1)+A[i]
- 子问题P(i) 的解不包括第i 个元素，意味着需要从第i 个元素开始重新计算值，即P(i)=A[i]



10.4 最大子段和（最大子数组）

动态规划： Step3 建立各个子问题之间的动态规划函数

$$P(i) = \max\{P(i-1) + A[i], A[i]\}$$

初始条件为

$$P(0) = 0$$

10.4 最大子段和（最大子数组）

动态规划: Step4 自底向上的求解递归式

```python
def bottom_up_cont_subseq(alist):
    table = [None] * (len(alist) + 1)
    table[0] = 0
    for i in range(1, len(alist)+1):
        table[i] = max(table[i-1] + alist[i-1], alist[i-1])
    return table
```

A=[–2, 11, –4, 13, –5, 2]

i	0	1	2	3	4	5	6
table[i]	0	-2	11	7	20	15	17

时间复杂度:　O(n)

10.4 最大子段和（最大子数组）

动态规划: Step4 自底向上的求解递归式

```python
def track_back_subseq(alist, table):
    select = []
    ind_max = np.argmax(table)  # 得到table中最大值索引
    print('ind_max=',ind_max)
    while ind_max >= 1:
        if table[ind_max] == alist[ind_max-1]+table[ind_max-1]:
            print('alist:',alist[ind_max-1])
            select.append(alist[ind_max-1])
            ind_max -= 1
        else:
            select.append(alist[ind_max-1])
            print('alist-break:',alist[ind_max-1])
            break
    return select
```

i	0	1	2	3	4	5	6
A[i]	-2	11	-4	13	-5	2	
table[i]	0	-2	11	7	20	15	17

```
[-2, 11, -4, 13, -5, 2]
[None, None, None, None, None, None, None]
[0, -2, 11, 7, 20, 15, 17]
ind_max= 4
alist: 13
alist: -4
alist-break: 11
[13, -4, 11]
```

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

10.5 适用动态规划法的场景

10.6 最长公共子序列

10.7 0–1背包问题

10.8矩阵乘法

10.5 适用动态规划法的场景

什么情况下可以采用动态规划方法求解最优问题呢?

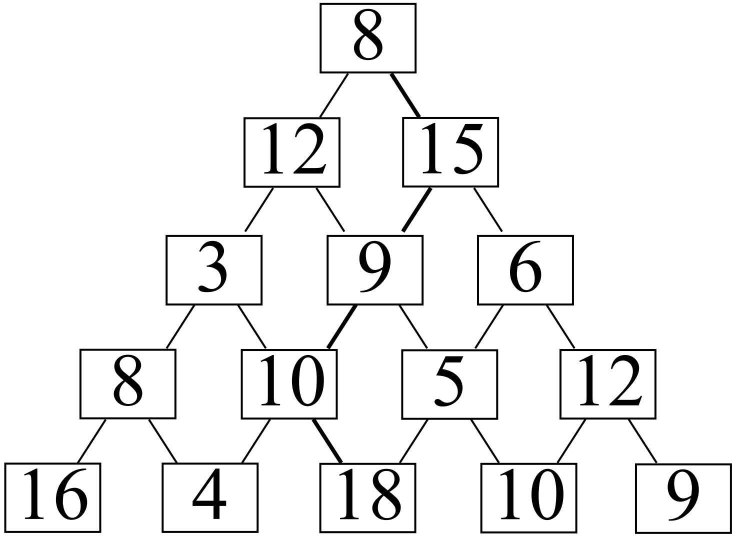
具备两个要素:

(1) 最优子结构

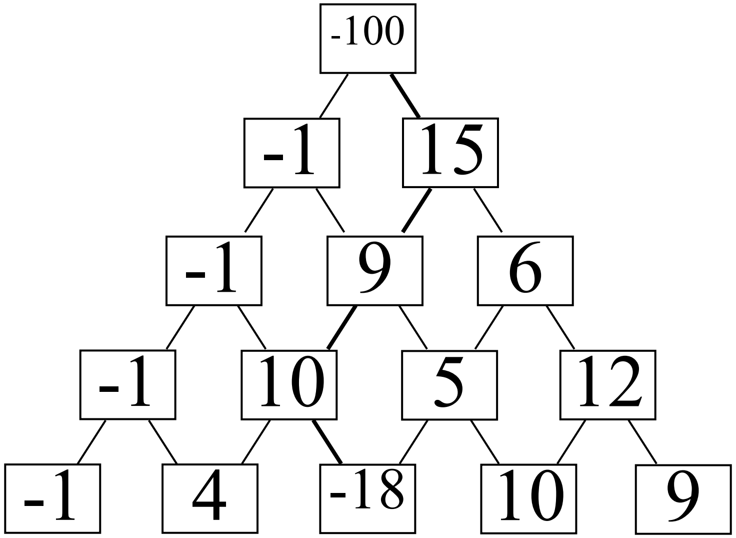
(2) 子问题重叠

10.5 适用动态规划法的场景

最优子结构的反例：数塔问题



路径上的数值和最大



路径上的数值和的绝对值最大

10.5 适用动态规划法的场景

最优子结构的反例：数塔问题

$$\begin{cases} \text{maxAdd}[n-1][j] = \text{data}[n-1][j] \ \ (0 \le j \le n-1) \\ \text{maxAdd}[i][j] = \text{data}[i][j] + \max(\text{maxAdd}[i+1][j], \text{maxAdd}[i+1][j+1]) \\ (0 \le i \le n-2, 0 \le j \le i) \end{cases}$$

maxAdd[n–1][i] = abs(data[n–1][i])
maxAdd[i][j]=abs(data[i][j])+max(maxAdd[i+1][j],
maxAdd[i+1][j+1])

10.5 适用动态规划法的场景

动态规划求解问题的5个步骤

1. 定义子问题
2. 猜测部分解（刻画问题的最优子结构）
3. 建立各个子问题之间的递归关系（动态规划函数，数学模型）
4. 自底向上的求解递归式（或自顶向下）
5. 组合所有子问题的解从而获得原问题的解

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

10.5 适用动态规划法的场景

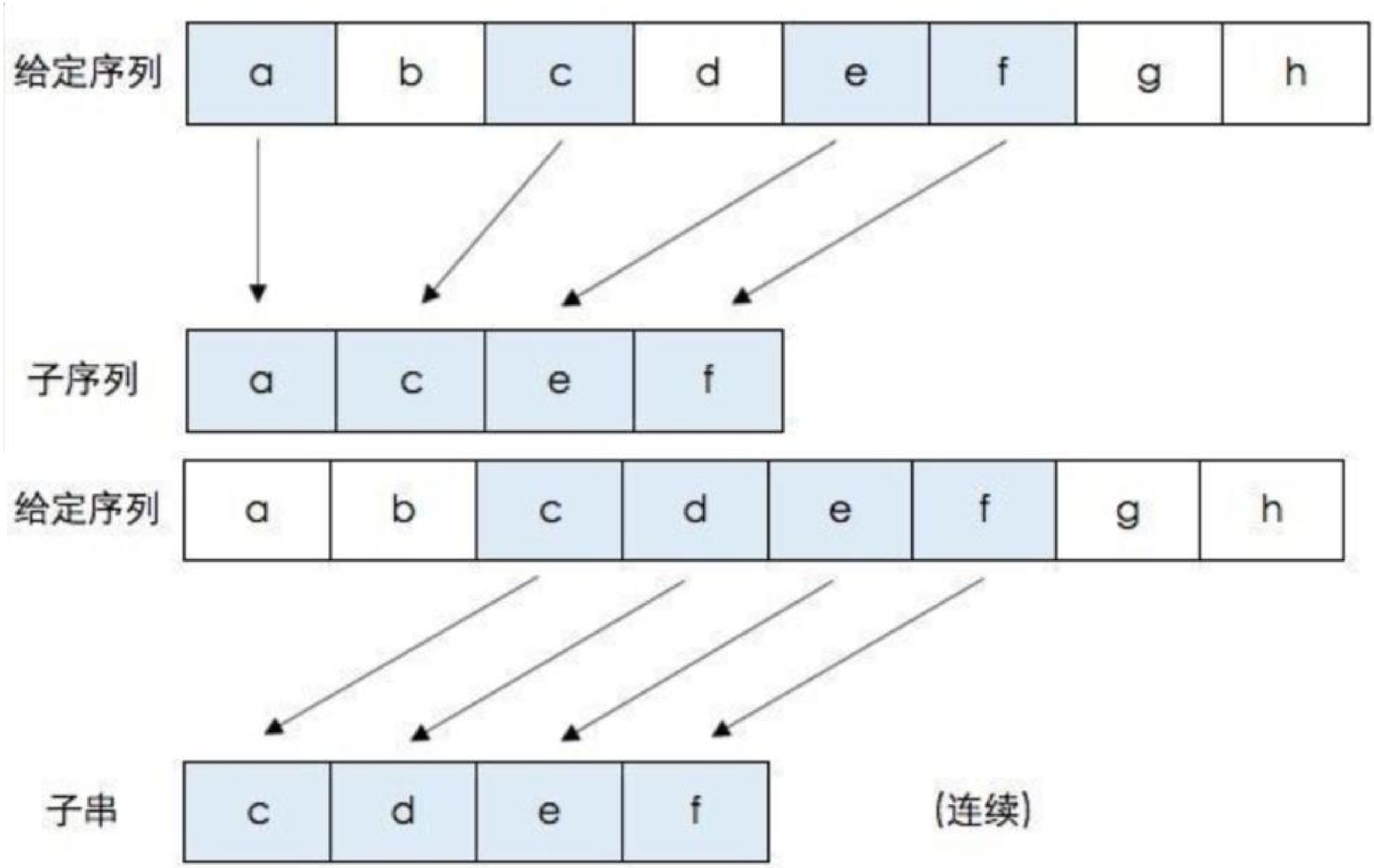
10.6 最长公共子序列

10.7 0–1背包问题

10.8矩阵乘法

10.6 最长公共子序列

子序列与子串



10.6 最长公共子序列

问题描述：

对给定序列$X=(x_1, x_2,\ldots, x_m)$和序列$Z=(z_1, z_2,\ldots, z_k)$，Z是X的子序列当且仅当存在一个递增下标序列$(i_1, i_2,\ldots, i_k)$，使得对于所有$j=1, 2, \ldots, k$，有$x_{i_j} = z_j$（$1\le i_j\le m$）。

给定两个序列X和Y，当序列Z既是X的子序列又是Y的子序列时，称Z是序列X和Y的公共子序列。最长公共子序列问题就是在序列X和Y中查找最长的公共子序列。 Longest-common-subsequence:LCS

10.6 最长公共子序列

应用场景:

- 基因工程DNA
- 软件版本管理
- 软件自动测试
- 检查论文抄袭率
- 程序代码量相似度度量
- 视频段匹配

10.6 最长公共子序列

例子

X:

A	B	C	B	D	A	B

Y:

B	D	C	A	B	A

Z_1:

B	D	A	B

Z_3:

B	C	B	A

Z_2:

B	C	A	B

10.6 最长公共子序列

暴力搜索方法求解LCS问题

对于此问题，可以采用暴力求解的方式来比对，即穷举出X的所有子序列，用每个子序列与y做一一比较。假如X序列共有m个元素，对每个元素可以决定选或不选，则X的子序列个数共有2^m个，可见与长度m呈指数阶，这种方法效率会很低。

10.6 最长公共子序列

问题步骤

第一步、给定序列$X=<x_1,x_2,\ldots,x_m>$和$Y=<y_1,y_2,\ldots,y_n>$，求X 和Y 的最长公共子序列**长度**

第二步、给定序列$X=<x_1,x_2,\ldots,x_m>$和$Y=<y_1,y_2,\ldots,y_n>$，求X 和Y 的最长公共子序列

10.6 最长公共子序列

动态规划: Step1 定义子问题

给定序列$X=<x_1,x_2,...,x_m>$和$Y=<y_1,y_2,...,y_n>$，考虑

X和Y的前缀，定义C[i, j]为$X_i=<x_1,x_2,...,x_i>$与$Y_j=<$

$y_1,y_2,...,y_j>$的最长公共子序列的长度

于是，C[m, n]就是X和Y的最长公共子序列的长度

10.6 最长公共子序列

Step2:刻画最长公共子序列问题的最优子结构（猜测部分解）

定理15.1（LCS的最优子结构）

设$X=x_1x_2\ldots x_m$和$Y=y_1y_2\ldots y_n$是两个序列，$Z_k=z_1z_2\ldots z_k$是这两个序列的一个最长公共子序列。

1.如果$x_m=y_n$，那么$z_k=x_m=y_n$，且Z_{k-1}是X_{m-1}，Y_{n-1}的一个最长公共子序列；

2.如果$x_m\neq y_n$，那么Z_k是X_{m-1}，Y_n的一个最长公共子序列或者Z_k是X_m，Y_{n-1}的一个最长公共子序列。

从上面三种情况可以看出，两个序列的LCS包含两个序列的前缀的LCS。因此，LCS问题具有最优子结构特征。

10.6 最长公共子序列

Step2:刻画最长公共子序列问题的最优子结构（猜测部分解）

定理15.1（LCS的最优子结构）

1.对 X = "AGTGATG",Y = "GTTAG",则Z = "GTAG"，此时m = 7，n = 5，k = 4（从1开始）。

比较X和Y最后一位，x7 = y5，同时删去，Xm−1 = "AGTGAT"，Yn−1 = "GTTA"，Zk−1 = "GTA"。我们可以发现，Zk−1就是Xm−1和Yn−1的一个LCS。

2.对 X = "AGTGAT",Y = "GTTA",则Z = "GTA"，此时m = 6，n = 4，k = 3（从1开始）。

比较最后一位，x6 ≠ y4，z3 ≠ x6，Xm−1 = "AGTGA"，Z是Xm−1和Yn的一个LCS。

3.将2的X和Y互换即可

对 Y = "AGTGAT",X = "GTTA",则Z = "GTA"，此时n = 6，m = 4，k = 3（从1开始）。

比较最后一位，x4 ≠ y6，z3 ≠ x4，Yn−1 = "AGTGA"，Z是Xm和Yn−1的一个LCS。

此 定理说明两个序列的一个LCS也包含两个序列的前缀的一个LCS，即LCS问题具有最优子结构性质。

10.6 最长公共子序列

动态规划： Step3 建立各个子问题之间的动态规划函数

$$
C[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{若 } i = 0 \text{ 或 } j = 0 \\ C[i-1, j-1] + 1 & \text{若 } i,j > 0 \text{ 且} x_i = y_j \\ \max(C[i, j-1], C[i-1, j]) & \text{若 } i,j > 0 \text{ 且} x_i \neq y_j \end{cases}
$$

10.6 最长公共子序列

动态规划: Step4 自底向上的求解递归式(伪代码，计算LCS长度)

```
LCS-LENGTH(X, Y)
m = X.length
n = Y.length
let b[1..m, 1..n] and c[0..m, 0..n] be new tables
for i = 1 to m
    c[i, 0] = 0
for j = 0 to n
    c[0, j] = 0
for i = 1 to m
    for j = 1 to n
        if x_i == y_j
            c[i, j] = c[i − 1, j − 1] + 1
            b[i, j] = "↖"
        elseif c[i − 1, j] ≥ c[i, j − 1]
            c[i, j] = c[i − 1, j]
            b[i, j] = "↑"
        else c[i, j] = c[i, j − 1]
            b[i, j] = "←"
return c and b
```

i \ j		0	1	2	3	4	5	6
		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
2	B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
3	C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
4	B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
5	D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
6	A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
7	B	0	↖1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

10.6 最长公共子序列

动态规划: Step4 自底向上的求解递归式(伪代码，计算LCS长度)

		A	B	C	B	D	A	B
	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	1	1				
D	0	0	1	1				
C	0	0	1	2				
A	0							
B	0							
A	0							

10.6 最长公共子序列

动态规划: Step4 自底向上的求解递归式(伪代码，计算LCS长度)

		A	B	C	B	D	A	B
	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	1	1	1	1	1	1
D	0	0	1	1	1	2	2	2
C	0	0	1	2	2	2	2	2
A	0	1	1	2	2	2	3	3
B	0	1	2	2	3	3	3	4
A	0	1	2	2	3	3	4	4

10.6 最长公共子序列

代码实现

```
def LCS_LENGTH2(X,Y):
    m = len(X)
    n = len(Y)
    c = [[0 for i in range(n+1)] for j in range(m+1)]
    #print(c)
    b = [[0 for i in range(n+1)] for j in range(m+1)]
    for i in range(1,m+1):
        for j in range(1,n+1):
            if X[i-1]==Y[j-1]:
                c[i][j]=c[i-1][j-1]+1
                b[i][j]='x'
            elif c[i-1][j]>=c[i][j-1]:
                c[i][j]=c[i-1][j]
                b[i][j]='u'
            else:
                c[i][j]=c[i][j-1]
                b[i][j]='l'
    return c,b
```

10.6 最长公共子序列

动态规划: Step4 自底向上的求解递归式(伪代码， 构造LCS)

```
PRINT-LCS(b, X, i, j)
if i == 0 or j == 0
    return
if b[i, j] == "↖"
    PRINT-LCS(b, X, i − 1, j − 1)
    print x_i
elseif b[i, j] == "↑"
    PRINT-LCS(b, X, i − 1, j)
else PRINT-LCS(b, X, i, j − 1)
```

	j	0	1	2	3	4	5	6
i		y_j	B	D	C	A	B	A
0	x_i	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑ 0	↑ 0	↑ 0	↖ 1	← 1	↖ 1
2	B	0	↖ 1	← 1	← 1	↑ 1	↖ 2	← 2
3	C	0	↑ 1	↑ 1	↖ 2	← 2	↑ 2	↑ 2
4	B	0	↖ 1	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	← 3
5	D	0	↑ 1	↖ 2	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↑ 3
6	A	0	↑ 1	↑ 2	↑ 2	↖ 3	↑ 3	↖ 4
7	B	0	↖ 1	↑ 2	↑ 2	↑ 3	↖ 4	↑ 4

10.6 最长公共子序列

代码实现

```python
def PRINT_LCS2(b,X,i,j):
  if i == 0 or j == 0:
    return
  if b[i][j] == 'x':
    PRINT_LCS2(b,X,i-1,j-1)
    print(X[i-1],end='')
  elif b[i][j] == 'u':
    PRINT_LCS2(b,X,i-1,j)
  else:
    PRINT_LCS2(b,X,i,j-1)
```

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

10.5 适用动态规划法的场景

10.6 最长公共子序列

10.7 0-1背包问题

10.8矩阵乘法

10.7 0–1背包问题

- 假设有n 个物品，每个物品i 的价值为vi，大小为si。包的容量为S，要求从这n 个物品中挑选若干物品装进包中，在所有装进包中物品的大小小于等于包容量S 的前提下，包中物品总价值最大
- 例 ($s0 = 3$; $v0 = 4$); ($s1 = 4$; $v1 = 5$); ($s2 = 5$; $v2 = 6$)
  - 包的容量S = 10。那么，应该选择物品($s1 = 4$; $v1 = 5$); ($s2 = 5$; $v2 =6$)
  - $s1 +s2 = 9 \leqslant S = 10$，且这种选择的情况下总价值$v1 +v2 = 11$ 最大

10.7 0–1背包问题

贪心解法

- 迭代地选取v_i/s_i最大的物品
- 这个算法无法得到最优解
- 反例：$s_1 = 1$，$v_1 = 2$；$s_2 = S$，$v_2 = S$

10.7 0–1背包问题

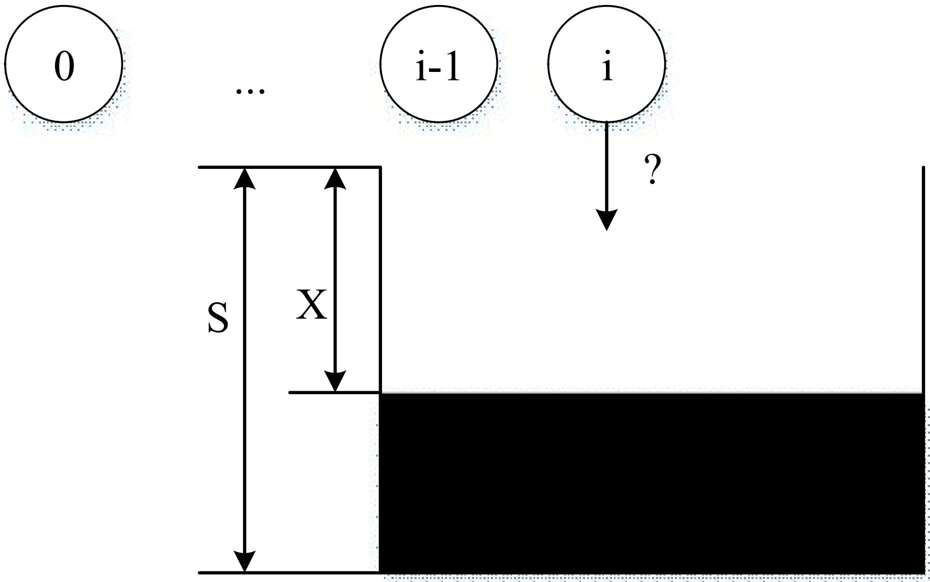
step1. 定义子问题

- 可以定义子问题从物品0; …… ; i – 1; i 中选取若干物品置于包中，这些物品的重量(容量)为X，且获取了最佳收益。

- 假设该子问题可以经由策略Knapsack 来求解，该策略此时的输入参数为Knapsack(i;X)。

10.7 0-1背包问题

step2. 刻画最优子结构



- 物品 i 不放入包中。那么 Knapsack(i, X) 的解等于从物品 $0, \cdots, i-1$ 选取容量为 X 的物品价值，也就是 Knapsack(i, X)=Knapsack$(i-1, X)$；
- 物品 i 放入包中。那么 Knapsack(i, X) 的解应该等于剩余物品 $0, \cdots, i-1$ 放入容量为 $X - s_i$ 的包中物品价值再加上物品 i 的价值 v_i，也就是 Knapsack(i, X)=Knapsack$(i-1, X-s_i)$+v_i。

10.7 0-1背包问题

step3. 建立各个子问题之间的递归关系（动态规划函数）

1. $X<s_i$时，
   Knapsack(i, X)=Knapsack(i-1, X)

2. $X>=s_i$时，
   Knapsack(i, X)=max{Knapsack(i-1, $X-s_i$)+v_i, Knapsack(i-1, X)}

https://www.cnblogs.com/Christal-R/p/Dynamic_programming.html

10.7 0–1背包问题

自底向上的求解递归式：填表

(0, 0)	(0,1)	…	(0,S-1)	(0,S)
(1, 0)	(1,1)	…	(1,S-1)	(1,S)
…	…	(i, j)	…	…
(n, 0)	(n,1)	…	(n,S-1)	$\boxed{(n,S)}$

10.7 0-1背包问题

step3. 建立各个子问题之间的递归关系（动态规划函数）

程序代码中的符号

1) j(or X)<s(i)　　V(i,j)=V(i-1,j)

2) j(or X)>=s(i)　　V(i,j)=max｛V(i-1,j)，V(i-1,j-s(i))+v(i)｝

V(i, 0)= V(0, j)=0

10.7 0–1背包问题

第一阶段，只装入前1个物品，确定在各种情况下的背包能够得到的最大价值；

第二阶段，只装入前2个物品，确定在各种情况下的背包能够得到的最大价值；依此类推，直到第n个阶段。

最后，$V(n,C)$便是在容量为C的背包中装入n个物品时取得的最大价值。为了确定装入背包的具体物品，从$V(n,C)$的值向前推，如果$V(n,C)>V(n-1,C)$，表明第n个物品被装入背包，前$n-1$个物品被装入容量为$C-w_n$的背包中；否则，第n个物品没有被装入背包，前$n-1$个物品被装入容量为C的背包中。依此类推，直到确定第1个物品是否被装入背包中为止。由此，得到如下函数：

$$x_i = \begin{cases} 0 & V(i,j) = V(i-1,j) \\ 1, \quad j = j - w_i & V(i,j) > V(i-1,j) \end{cases}$$

10.7 0-1背包问题

例子

eg： number = 4， capacity = 8

i	1	2	3	4
s(大小)	2	3	4	5
v(价值)	3	4	5	6

10.7 0-1背包问题

自底向上的求解递归式：填表

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0								
2	0								
3	0								
4	0								

i	1	2	3	4
s(大小)	2	3	4	5
v(价值)	3	4	5	6

number = 4
capacity = 8

10.7 0–1背包问题

自底向上的求解递归式：填表

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7	7	7	7
3	0	0	3	4	5	7	8	9	9
4	0	0	3	4	5	7	8	9	10

i	1	2	3	4
s(大小)	2	3	4	5
v(价值)	3	4	5	6

number = 4
capacity = 8

3/27/2023

10.7 0–1背包问题

代码实现

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	3	3	3	3	3	3	3
2	0	0	3	4	4	7	7	7	7
3	0	0	3	4	5	7	8	9	9
4	0	0	3	4	5	7	8	9	10

V(i,j)=V(i–1,j)时，说明没有选择第i 个商品，则回到V(i–1,j)；
V(i,j)=V(i–1,j–w(i))+v(i)时，说明装了第i个商品，该商品是最优解组成的一部分，随后我们得回到装该商品之前，即回到V(i–1,j–w(i))；一直遍历到i＝0结束为止，所有解的组成都会找到。

10.7 0–1背包问题

算法时间复杂度分析

时间代价$O(n \times S)$，空间代价$O(n \times S)$

注意：这个不是多项式时间，因为S是作为一个整数输入

设S的位数是$L = \log_2 S$，那么相当于时间代价和空间代价是$O(n2^L)$

练习：0–1背包问题的动态规划算法的时间复杂度是输入规模的多项式时间吗？

提纲

10.1 兔子的故事

10.2 动态规划法的设计思想

10.3 子问题重叠的例子：三角数塔问题

10.4 最大子段和（最大子数组）

10.5 适用动态规划法的场景

10.6 最长公共子序列

10.7 0–1背包问题

10.8矩阵乘法

矩阵乘法

设A_1, A_2, …, A_n为矩阵序列，A_i为$P_{i-1} \times P_i$维矩阵，$i = 1,2,\ldots,n$，确定乘法顺序使得元素相乘的总次数最少

总的搜索空间大小为Catalan数，即$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \Omega(4^n/n^{3/2})$

子问题定义

输入A=< A_0, A_1, …, A_n> , $A_{i..j}$ 表示乘积$A_iA_{i+1}\ldots A_j$ 的结果，其最后一次相乘是$A_{i..j}$ = $A_{i..k}$ $A_{k+1..j}$

m[i,j] 表示得到$A_{i..j}$ 的最少的相乘次数，于是有如下等式

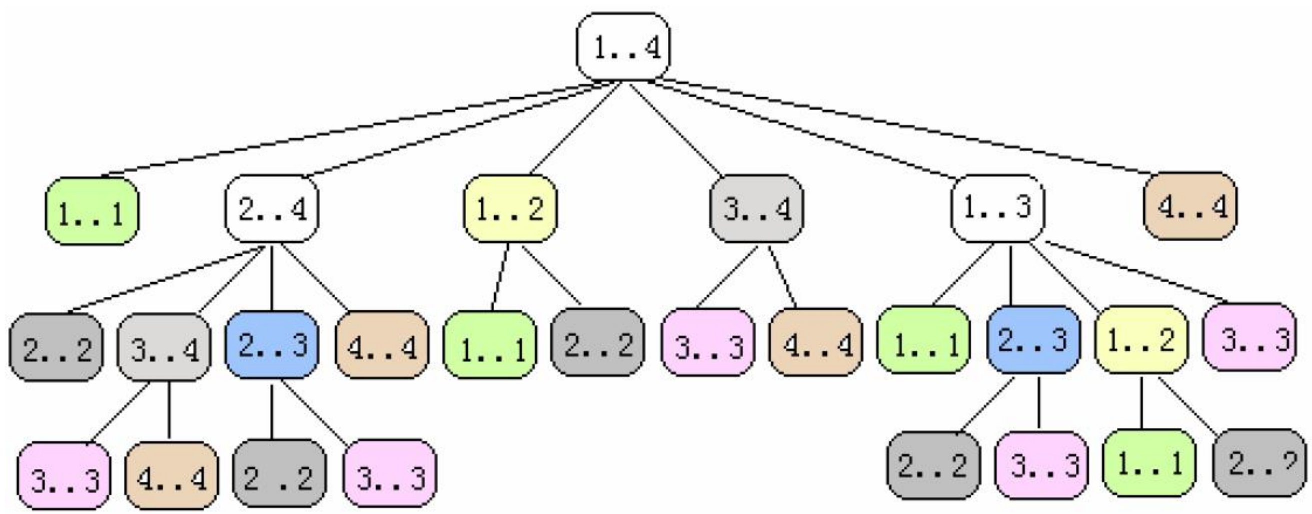
$$m[i,j] = \begin{cases} 0, & if \ \ i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{m[i,k] + m[k+1,j] + A_{i-1}A_kA_j\}, & if \ \ i < j \end{cases}$$

基本递归算法

```
RecurMatrixChain(P,i,j)
  m[i,j]=∞
  for k=i to j−1 do
      q= RecurMatrixChain(P,i,k)+ RecurMatrixChain(P,k+1,j) +
p_{i−1} p_k p_j
      if q<m[i,j] then m[i,j]=q
  return m[i,j]
```

时间复杂度$O(2^n)$

子问题重复程度高

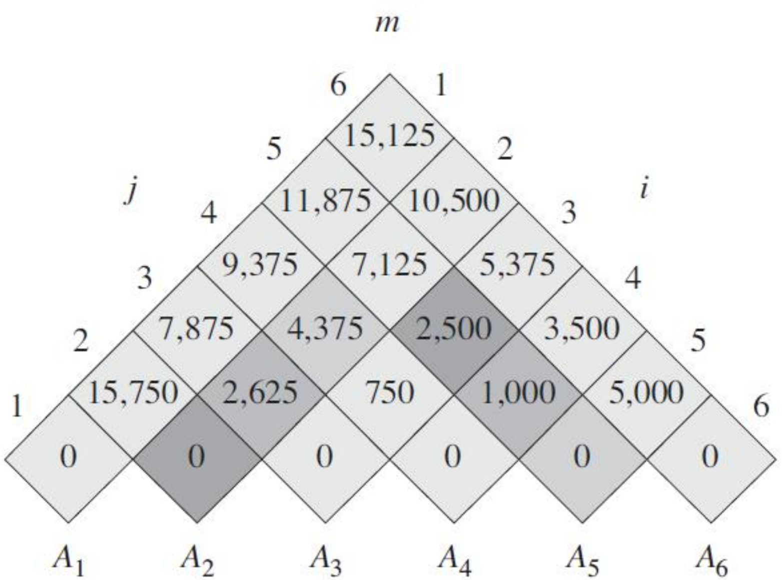

1..4
1..1
2..4
1..2
3..4
1..3
4..4
2..2
3..4
2..3
4..4
1..1
2..2
3..3
4..4
1..1
2..3
1..2
3..3
3..3
4..4
2 .2
3..3
2..2
3..3
1..1

基于动态规划的矩阵乘法

```
MatrixChain(P,n)
  for r=2 to n do // r为计算的矩阵链长度
     for i =1 to n−r+1 do //n−r+1为最后r链的始位置
        j =i+r−1 // 计算链i到j
        m[i,j] = m[i+1,j] + p_{i−1}*p_i*p_j
        for k =i+1 to j−1 do
            t =m[i,k]+m[k+1,j]+ p_{i−1}*p_k*p_j
            if t<m[i,j] then m[i,j]=t
```

时间复杂度$O(n^3)$

示例



matrix	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
dimension	30×35	35×15	15×5	5×10	10×20	20×25