

第一章 算法分析与设计基础

联系方式



任课教师:彭鹏

办公室:软件大楼536

邮箱: hnu16pp@hnu.edu.cn

教材及考核方式



教材:

算法导论,[美] Thomas H.Cormen,[美] Charles E.Leiserson,[美]

Ronald L.Rivest, [美] Clifford Stein 著,殷建平,徐云,王刚 等

译

考核形式:

- (1) 课堂点名 (占5%)
- (2) Leetcode (占45%)
- (3) 期末考试 (占50%)

课程网站:

https://bnu05pp.github.io/AlgorithmCourse/index.html

2023-算法分析...

群号: 239317435



扫一扫二维码,加入群聊

Leetcode考核说明



- ▶ 每周周三8:00到24:00之间,将自己Leetcode截屏发给我学生邮箱 18711230730@163.com,邮件标题格式为"Leetcode截屏-[姓名]-[学号]-[日期]"
- ➤ 每周要求起码做3道题目,题目范围参照课程进度。每周3道题目难度全是简单,当次成绩是及格;有1个中等,当次成绩是良好;有1个困难,当次成绩是优秀。





第一节

背景介绍

第二节

算法基本概念

第三节

算法与数据结 构、程序的关系

第四节

重要问题类型

第五节

算法时间复杂 度分析

第六节

一个算法例子: 文本距离

算法历史



□ "算法"一词的来历

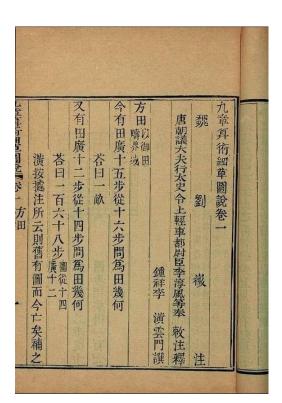
▶中文的"算法":《九章算术》

▶ 英文的"算法" (algorithm): 花拉子米 (al-Khwārizmī)

▶ 图灵机







算法历史



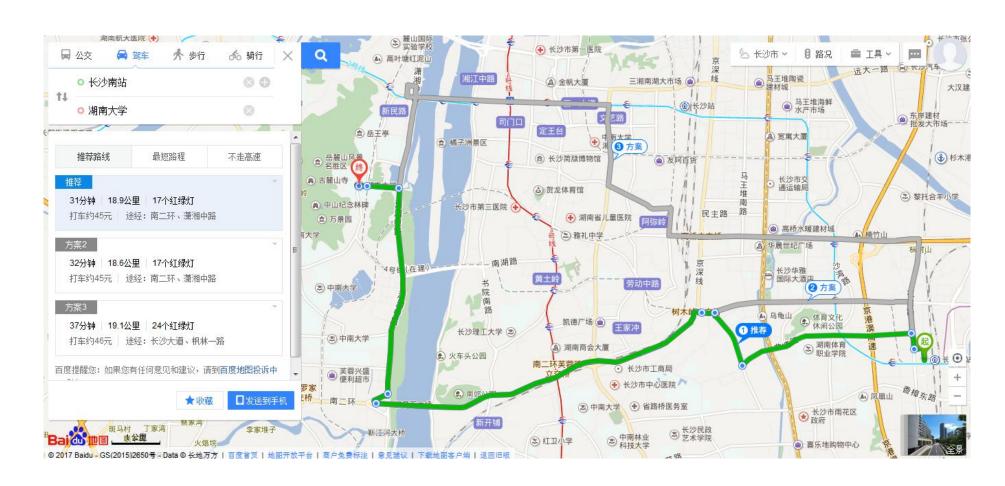
□二十世纪十大著名算法

- ▶ 蒙特卡洛方法: 1946年
- ▶ 单纯形法: 1947 年
- ➤ Krylov子空间迭代法: 1950年
- ▶ 矩阵计算的分解方法: 1951 年
- ➤ 优化的Fortran编译器: 1957年

- ▶ 计算矩阵特征值的QR算法: 1959-61 年
- ▶ 快速排序算法: 1962年
- ▶ 快速傅立叶变换: 1965年
- ▶ 整数关系探测算法: 1977年
- ▶ 快速多极算法: 1987年

算法与生活-导航





算法与生活-导航





算法与生活-导航









第一节

背景介绍

第二节

算法基本概念

第三节

算法与数据结 构、程序的关系

第四节

重要问题类型

第五节

算法时间复杂 度分析

第六节

一个算法例子: 文本距离



- □广义算法
 - ▶算法是解决问题的方法,如一道菜谱、一个安装电脑的操作指南等。
- □狭义算法: 计算机算法
 - ▶计算机算法是对特定问题求解步骤的一种描述,是指令的有限序列。



□算法的五个重要特性

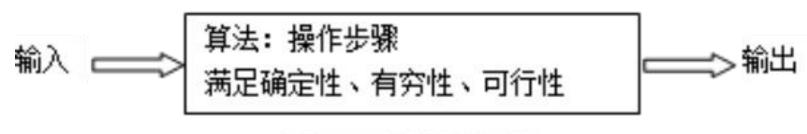


图 1.1 算法的概念



- □ "好"算法的五个其他特性
- > 正确性
- > 健壮性
- > 可理解性
- > 抽象分级
- > 高效性



- □ "好"算法的五个其他特性
- > 正确性
- > 健壮性
- > 可理解性
- > 抽象分级
- > 高效性



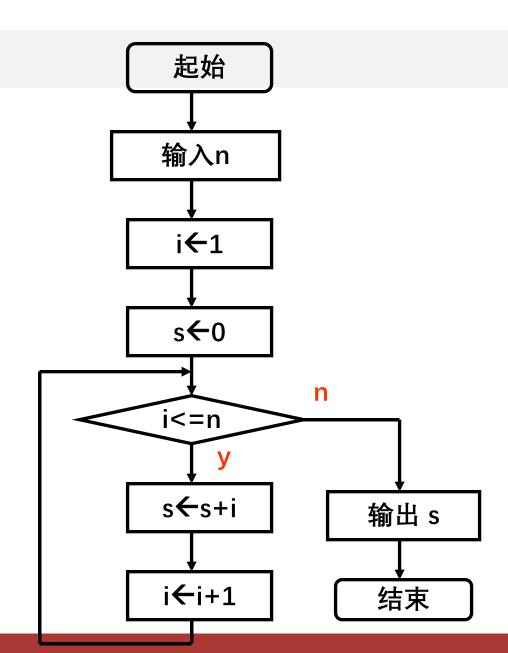
- □算法的描述方法
- > 自然语言
- > 流程图
- > 程序设计语言
- > 伪代码

武松打死老虎 武松/打死老虎 武松/打/死老虎

sum=1+2+3+4+5·····+ (n-1) +n为例

- ① 确定一个n的值;
- ② 假设等号右边的算式项中的初始值i为1;
- ③ 假设sum的初始值为0;
- ④ 如果i≤n时,执行⑤,否则转出执行⑧;
- ⑤ 计算sum加上i的值后,重新赋值给sum;
- ⑥ 计算i加1, 然后将值重新赋值给i;
- ⑦ 转去执行④;
- ⑧ 输出sum 的值,算法结束。

- □算法的描述方法
- > 自然语言
- > 流程图
- > 程序设计语言
- > 伪代码







- □算法的描述方法
- > 自然语言
- > 流程图
- > 程序设计语言
- > 伪代码

| 符号 | 名称 | 作用表示算法的开始和结束符号。 表示算法过程中,从外部获取的信息(输入),然后将处理过的信息输出。 表示算法过程中,需要处理的内容,只有一个入口和一个出口。 表示算法过程中的分支结构。菱形框的4个顶点中,通常用上面的顶点表示入口,根据需要用其余的顶点表示出口。 | | | |
|-------------------|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|--|
| | 开始、结束符 | | | | |
| | 输入、输出框 | | | | |
| | 处理框 | | | | |
| $\langle \rangle$ | 判断框 | | | | |
| - | 流程线 | 算法过程中的指向流程的方向。 | | | |



- □算法的描述方法
- > 自然语言
- > 流程图
- > 程序设计语言(代码)
- > 伪代码



- □算法的描述方法
- > 自然语言
- > 流程图
- > 程序设计语言
- > 伪代码

算法开始

输入n的值;

```
i←1; /*为 i 赋初值*/
```

可以加注解

s**←0**; /*为s 赋初值*/

While(i<=n) /*循环语句*/

/*循环开始*/
s←s+i; /*把i累加到 s*/
i←i+1; /*记数*/

/*循环结束*/

输出 s 的值;

算法结束



□算法设计的一般过程

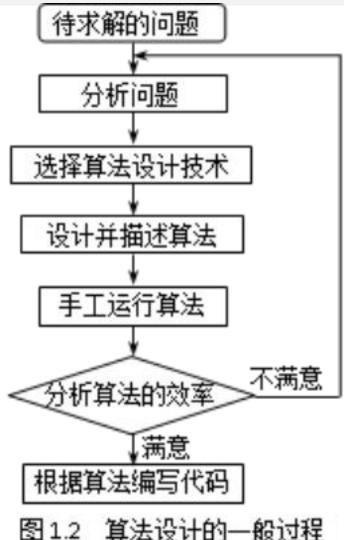


图 1.2 算法设计的一般过程



第一节

背景介绍

第二节

算法基本概念

第三节

算法与数据结 构、程序的关系

第四节

重要问题类型

第五节

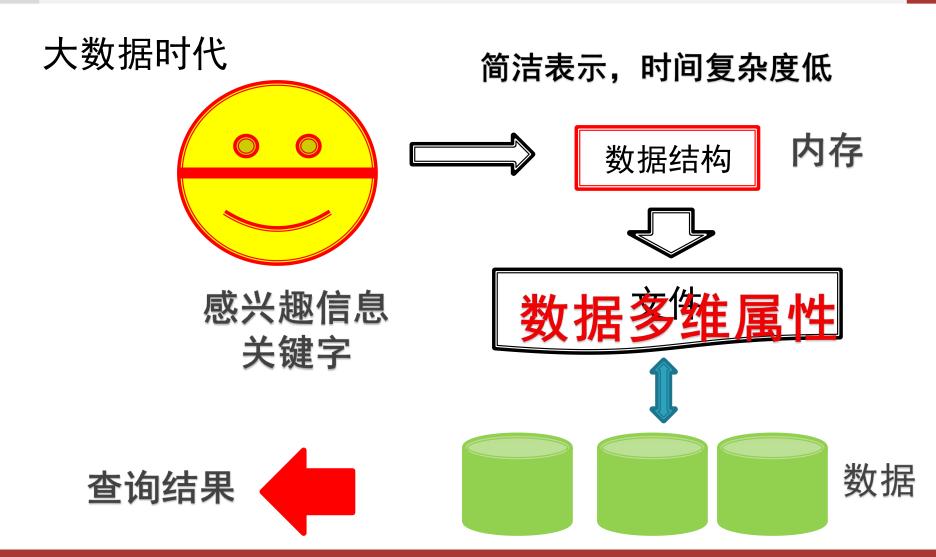
算法时间复杂 度分析

第六节

一个算法例子: 文本距离

算法与数据结构、程序的关系





算法与数据结构、程序的关系



□算法与数据结构

▶数据结构是底层,算法高层。数据结构为算法提供服务。算法 围绕数据结构操作。

□算法与程序

- >程序是某个算法或过程的在计算机上的一个具体的实现。
- >程序是依赖于程序设计语言的, 甚至依赖于计算机结构的。
- > 算法是脱离具体的计算机结构和程序设计语言的。



第一节

背景介绍

第二节

算法基本概念

第三节

算法与数据结 构、程序的关系

第四节

重要问题类型

第五节

算法时间复杂 度分析

第六节

一个算法例子: 文本距离

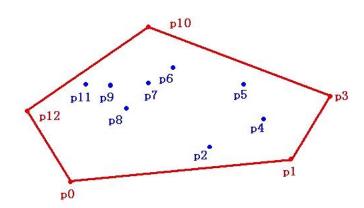
重要问题类型



- □查找问题
- □排序问题
- □图问题
- □组合问题
- □几何问题









第一节 背

背景介绍

第二节

算法基本概念

第三节

算法与数据结 构、程序的关系

第四节

重要问题类型

第五节

算法时间复杂 度分析

第六节

一个算法例子: 文本距离



□影响软件(算法)性能的因素?请同学们列举几项。



10种排序算法的时间效率比较

| 算法\输入 数据 | N=50 K=50 | N=200 K=100 | N=500 K=500 | N=2000 K=2000 | N=5000 K=8000 | N=10000 K=20000 | N=20000 K=20000 | N=20000 K=200000 |
|-------------|--------------|----------------|----------------|------------------|------------------|--------------------|--------------------|---------------------|
| 冒泡排序 | 0ms | 15ms | 89ms | 1493ms | 9363ms | 36951ms | 147817ms | 143457ms |
| 插入排序 | 1ms | 13ms | 82ms | 1402ms | 8698ms | 34731ms | 134817ms | 134836ms |
| 希尔排序 | 0ms | 1ms | 6ms | 30ms | 110ms | 257ms | 599ms | 606ms |
| 选择排序 | 0ms | 5ms | 31ms | 461ms | 2888ms | 11736ms | 45308ms | 44838ms |
| 堆排序 | 0ms | 3ms | 9ms | 40ms | 124ms | 247ms | 525ms | 527ms |
| 归并排序 | 2ms | 6ms | 18ms | 75ms | 199ms | 392ms | 778ms | 793ms |
| 快速排序 | 0ms | 1ms | 2ms | 14ms | 36ms | 84ms | 196ms | 163ms |
| 计数排序 | 0ms | 1ms | 1ms | 5ms | 15ms | 32ms | 51ms | 62ms |
| 基数排序 | 0ms | 1ms | 4ms | 19ms | 47ms | 114ms | 237ms | 226ms |
| 桶排序 | 0ms | 2ms | 6ms | 25ms | 68ms | 126ms | 254ms | 251ms |



□算法的好与坏

▶高斯的故事

$$1+2+3+4+5+6+\cdots+100 = ?$$

$$(1+100) + (2+99) + (50+51) =$$

50×101 (高斯算法)



高斯(数学王子)

高斯: "给我最大快乐的,不是已懂得知识,而是不断的学习;不是已有的东西,而是不断的获取;不是已达到的高度,而是继续不断的攀登。"



□百钱百鸡问题

中国古代数学家张丘建在他的《算经》中提出了他的著名的"百钱百鸡问题":鸡翁一,值钱五;鸡母一,值钱三;鸡雏三,值钱一;百钱买百鸡,翁、母、雏各几何?

意思是公鸡每只5元、母鸡每只3元、小鸡3只1元,用100元钱买100只鸡,求公鸡、母鸡、小鸡的只数。



□百钱百鸡问题

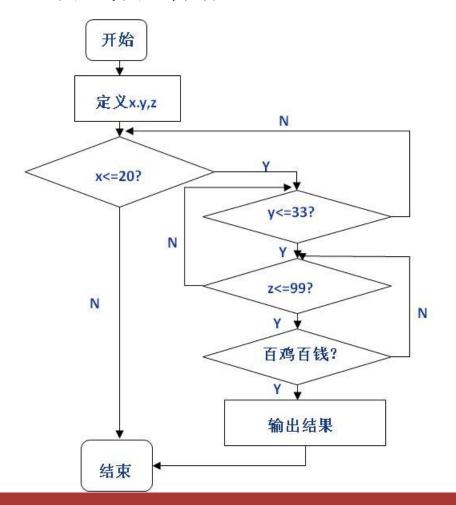
回想算法设计过程

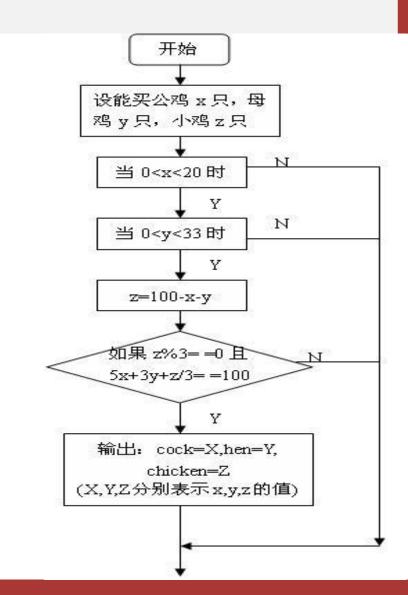
首先分析问题,并建立数学模型

如何建立数学模型?



□百钱百鸡问题







□百钱百鸡问题

```
def chicken question1():
  \# x + y + z = 100
  #5x + 3y + z/3 = 100
  iCount = 0
  for x in range(1, 20):
     for y in range(1, 33):
       for z in range(1,99):
          iCount = iCount + 1
         if z \% 3 == 0 and 5 * x + 3 * y +
z/3 == 100 and x + y + z == 100:
            print('公鸡: ', x, '只', '母鸡:
', y, '只', '小鸡:', z, '只')
  print('iCount:',iCount)
```

```
def chicken question2():
  \# x + y + z = 100
  #5x + 3y + z/3 = 100
  iCount = 0
  for x in range(1, 20):
    for y in range(1, 33):
       iCount = iCount + 1
       z = 100 - y - x
       if z \% 3 == 0 and 5 * x + 3 * y
+z/3 == 100:
          print('公鸡: ', x, '只', '母鸡:
', y, '只', '小鸡: ', z, '只')
  print('iCount:',iCount)
```



□百钱百鸡问题

算法1和算法2,哪个运行快?为什么?



□百钱百鸡问题

```
算法1:
```

公鸡: 4 只 母鸡: 18 只 小鸡: 78 只 公鸡: 8 只 母鸡: 11 只 小鸡: 81 只

公鸡: 12 只 母鸡: 4 只 小鸡: 84 只

iCount: 59584

771 function calls in 0.010 seconds

算法2:

公鸡: 4 只 母鸡: 18 只 小鸡: 78 只

公鸡: 8 只 母鸡: 11 只 小鸡: 81 只

公鸡: 12 只母鸡: 4 只小鸡: 84 只

iCount: 608

771 function calls in 0.001 seconds

算法复杂性分析



- □什么样的算法是高效算法?
 - **Correct**
 - > Fast
 - > Small space
 - > General
 - > Simple
 - > Clever

Cool

算法复杂性分析



□为什么需要高效的算法?

节省时间,存储需求,能源消耗,代价等使用有限的资源解决大规模输入问题 (CPU,内存,硬盘灯) 优化旅行时间,调度冲突等



算法复杂性分析



- □是关于计算机程序性能和资源利用的研究
 - ▶时间复杂度分析
 - >空间复杂度分析



- □算法运行时间的衡量方法1-事后统计
 - >利用计算机内记时功能。
 - >缺点: ①必须先运行依据算法编制的程序;
 - ②所得时间统计量依赖于硬件、软件等环境因素,掩盖算 法本身的优劣;
 - ③算法的测试数据设计困难。



- □算法运行时间的衡量方法2-事前分析估计利用计算机内记时功能。
- >一个高级语言程序在计算机上运行所消耗的时间取决于:
- ①依据的算法选用何种策略
- ②问题的规模
- ③程序语言
- ④编译程序产生机器代码质量
- ⑤机器执行指令速度



□基本概念

- ▶ 问题规模: 指输入量的多少。运行算法所需要的时间T是问题规模n的函数,记作T(n)。
- > 基本语句: 执行次数与整个算法的执行次数成正比的语句。

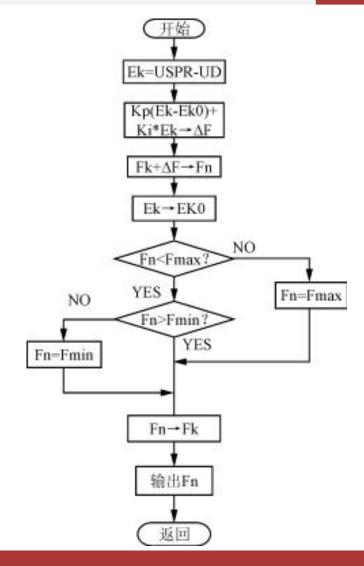


问题规模可控

估算算法运行时间的方法

迭代计数: 计算循环的迭代次数

操作计数:找出关键操作,确定这些关键操作所需要的执行次数





渐进符号——运行时间的上界

定义1-1:

若存在两个正的常数c和 n_0 ,对于任意 $n \ge n_0$,都有 $T(n) \le c f(n)$,则称T(n) = O(f(n))。

大O符号描述增长率的上限,表示T(n)的增长最多像f(n)增长的那样快,换言之,当输入规模为n时,算法消耗时间的最大值,这个上限的阶越低,结果越有价值。

该算法的运行时间至多是O(f(n))。



□渐进分析

表 2-8-1

| 次数 | 算法A(2n+3) | 算法 A' (2n) | 算法B(3n+1) | 算法 B'(3n) |
|---------|------------|-------------|---------------|-----------|
| n = 1 | 5 | 2 | 4 | 3 |
| n = 2 | httn://171 | or ordn not | /cmile from 7 | 15 6 |
| n = 3 | 9 | 6 | 10 | 9 |
| n = 10 | 23 | 20 | 31 | 30 |
| n = 100 | 203 | 200 | 301 | 300 |



□渐进分析

表 2-8-2

| 次数 | 算法 C (4n+8) | 算法 C'(n) | 算法 D (2n ² +1) | 算法 D' (n²) |
|----------|-------------|--------------|----------------------------|------------|
| n = 1 | 12 | 1 | 3 | 1 |
| n = 2 | 16 | 2 | 9 | 4 |
| n = 3 | http://b200 | g. csdn. neg | smile_from ₁₉ (| 15 9 |
| n = 10 | 48 | 10 | 201 | 100 |
| n = 100 | 408 | 100 | 20 001 | 10 000 |
| n = 1000 | . 4 008 | 1 000 | 2 000 001 | 1 000 000 |



渐进符号——运行时间的上界

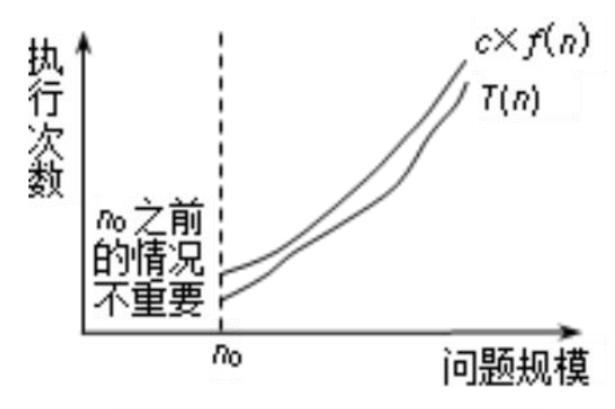


图 2.1 大 0 符号的含义



渐进符号——运行时间的上界

例如:

当有T(n) ≤100n+n

取 n_0 =5,对任意 $n \ge n_0$,有:

 $T(n) \le 100n + n = 101n$

 $T(n) \leq cn = cf(n)$

所以T(n)=O(f(n))=O(n)



渐进符号——运行时间的上界

定义1-2

若存在两个正的常数c和 n_0 ,对于任意 $n \ge n_0$,都有 $T(n) \ge cg(n)$,则称 $T(n) = \Omega(g(n))$ 。

大Ω符号用来描述增长率的下限,也就是说,当输入规模为n时, 算法消耗时间的最小值。与大O符号对称,这个下限的阶越高, 结果就越有价值。

该算法的运行时间至少是 $\Omega(g(n))$ 。



渐进符号——运行时间的上界

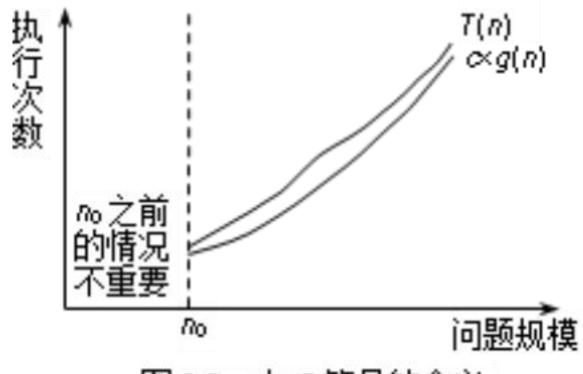


图 2.2 大 Ω符号的含义



渐进符号——运行时间的上界

例如:

当有 $T(n) \ge n^2 + n \ge n^2$

取 $n_0=1$, 任意 $n\geq n_0$, 存在常数c=1, $g(n)=n^2$, 使得: $T(n)\geq n^2=cg(n)$

所以, $T(n)=\Omega(g(n))$



渐进符号——运行时间的上界

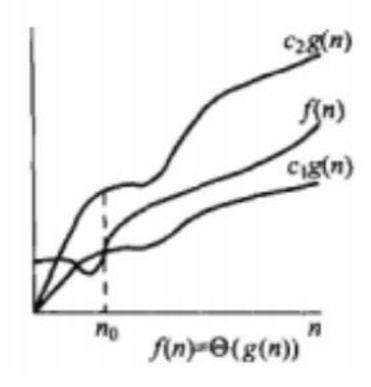
Θ符号(运行时间的准确界)

定义1.3 若存在三个正的常数 c_1 、 c_2 和 n_0 ,对于任意 $n \ge n_0$,都有 $c_1g(n) \ge T(n) \ge c_2 \times g(n)$,则称 $T(n) = \Theta(g(n))$ 。

 Θ 符号意味着T(n)与g(n)同阶,用来表示算法的精确阶。



渐进符号——运行时间的准确界





渐进符号——运行时间的准确界

例1
$$T(n) = 3n-1$$

例2
$$T(n) = 5n^2 + 8n + 1$$



常用的级数公式及复杂度

```
❖ 算数级数:T(n) = 1 + 2 + ... + n = n(n+1)/2 = Ø(n²)
❖ 平方级数:T(n) = 1<sup>2</sup> + 2<sup>2</sup> + ... + n<sup>2</sup> = n(n+1)(2n+1)/6 = Ø(n<sup>3</sup>)
❖幂级数: T<sub>a</sub>(n) = a<sup>0</sup> + a<sup>1</sup> + a<sup>2</sup> + ... + a<sup>n</sup>, a > 0
  最常见: 1+2+4+ ... +2<sup>n</sup> = 2<sup>n+1</sup>-1 = 0(2<sup>n+1</sup>) = 0(2<sup>n</sup>) //总和与末项同阶
❖ 収敛: 1/1/2 + 1/2/3 + 1/3/4 + ... + 1/(n-1)/n = 1 - 1/n = Ø(1)
          1 + 1/2^2 + ... + 1/n^2 < 1 + 1/2^2 + ... = \pi^2/6 = 0(1)
❖ 有必要讨论这类级数吗?难道,基本操作次数、存储单元数可能是分数?
❖ 调和级数:h(n) = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n = Θ(logn)
          // h(n) < 1 + \int_{1 \sim n} 1/x = 1 + lnn = O(logn)
          // h(n) > \int_{1\sim n+1} 1/x = \ln(n+1) = \Omega(\log n)
❖ 对数级数:log1 + log2 + log3 + ... + logn = log(n!) = Θ(nlogn)
```



渐进符号——渐进比较

传递性

$$f(n) = \Theta(g(n))$$
 and $g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$

$$f(n) = O(g(n))$$
 and $g(n) = O(h(n))$ \Rightarrow $f(n) = O(h(n))$

$$f(n) = \Omega(g(n))$$
 and $g(n) = \Omega(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$



渐进符号——渐进比较

自反性

$$f(n) = \Theta(f(n))$$

$$f(n) = O(f(n))$$

$$f(n) = \Omega(f(n))$$



渐进符号——渐进比较

对称性

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$$



- 1.最好情况时间复杂度(best case time complexity)。
- 2.最坏情况时间复杂度(worst case time complexity)。
- 3.平均情况时间复杂度(average case time complexity)。
- 4.均摊时间复杂度(amortized time complexity)。



- □三种情况下的时间复杂性
 - ▶最坏情况

$$T_{\text{max}}(n) = \max\{ T(I) \mid \text{size}(I) = n \}$$

▶最好情况

$$T_{\min}(n) = \min\{ T(I) \mid \text{size}(I) = n \}$$

>平均情况

$$T_{\text{avg}}(n) = \sum_{size(I)=N} P(I)T(I)$$

其中,I是问题的规模为n的实例,p(I)是实例I出现的概率。



表 2-2 输入规模为 100 万个数据元素时的最好、最坏及平均情况排序时间(单位: 亳秒)

| 排序算法 | 平均情况 | 最坏情况 (逆序) | 最好情况(正序) |
|-------------|---------|-----------|----------|
| 冒泡排序 | 549 432 | 1 534 035 | 366 936 |
| 选择排序 | 478 694 | 587 240 | 367-658 |
| 插入排序 | 253 115 | 515 621 | 0.897 |
| 希尔排序/增量3 | 61 | 203 | 35 |
| 堆排序 | 79 | 126 | 74.8 |
| 归并排序 | 70 | 140 | 61 |
| 快速排序 | 39 | 93 | 30 |
| 基数排序/进制 100 | 117 | 118 | 116 |
| 基数排序/进制1000 | 89 | 90 | 88 |



- □非递归算法分析的一般步骤
- 1. 决定用哪个(或哪些)参数作为算法问题规模的度量可以从问题的描述中得到。
- 找出算法中的基本语句
 通常是最内层循环的循环体。
- 3. 检查基本语句的执行次数是否只依赖于问题规模 如果基本语句的执行次数还依赖于其他一些特性,则需要分别研究最好情况、最坏 情况和平均情况的效率。



- □非递归算法分析的一般步骤
- 4. 建立基本语句执行次数的求和表达式 计算基本语句执行的次数,建立一个代表算法运行时间的求和表达式。
- 5. 用渐进符号表示这个求和表达式 计算基本语句执行次数的数量级,用大O符号来描述算法增长率的上限。



□小结:

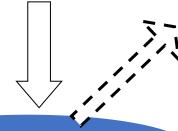
基本技术:

- ◆根据循环统计基本 语句次数
- ◆用递归关系统计基 本语句次数
- ◆用平摊方法统计基 本语句次数

选取基本语句



统计基本语句频数



计算并简化统计结果

渐近复杂度:

 O, Ω, Θ

标准:

- ●平均时间复杂
- ●最坏时间复杂
- ●最好时间复杂度

基本技术:

- ●常用求和公式
- ●定积分近似求和
- ●递归方程求解



第一节 背景

背景介绍

第二节

算法基本概念

第三节

算法与数据结 构、程序的关系

第四节

重要问题类型

第五节

算法时间复杂 度分析

第六节

一个算法例子: 文本距离



- Given two documents, how similar are they?
- Applications:
 - Find similar documents
 - Detect plagiarism /duplicates
 - Web search(one "document" is query)
 - 自动客服











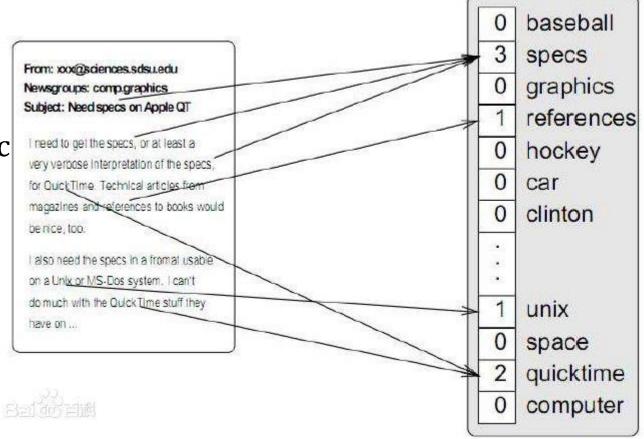


□向量空间模型(Vector Space Model, VSM)

- How to define "document"?
- Word = sequence of alphanumeric

characters

Document = sequence of words –Ignore punctuation & formatting





- □向量空间模型(Vector Space Model, VSM)
- How to define "document"?
- Idea: focus on shared words

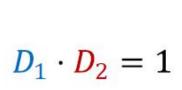
Word frequencies:- $D(W) = \#occurrences \ of \ word \ W$ in document D



- □向量空间模型(Vector Space Model, VSM)
 - Treat each document D as a vector of its words
 - One coordinate D(w) for every possible word w
 - Example:

$$-D_1$$
 = "the cat"

$$-D_2$$
 = "the dog"



'dog'

'the'

- Similarity between vectors?
 - Dot product:

$$\underline{D_1} \cdot \underline{D_2} = \sum \underline{D_1}(w) \cdot \underline{D_2}(w)$$



- Problem: Dot product not scale invariant
- Example 1:

$$-D_1$$
 = "the cat"

$$-D_2$$
 = "the dog"

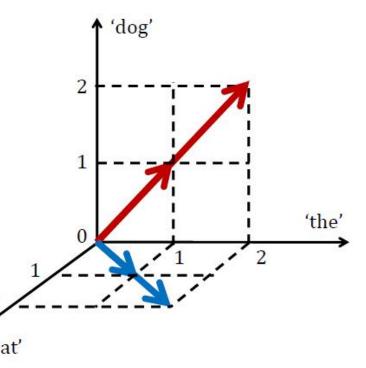
$$-D_1 \cdot D_2 = 1$$

Example 2:

$$-D_1$$
 = "the cat the cat"

 $-D_2$ = "the dog the dog"

$$-D_1 \cdot D_2 = 2$$

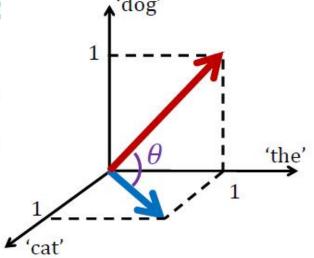




<u>Idea:</u> Normalize by # words:

$$\cos\theta = \frac{D_1 \cdot D_2}{||D_1|| \cdot ||D_2||}$$

 Geometric solution: angle between vectors



$$\theta(D_1, D_2) = \arccos \frac{D_1 \cdot D_2}{||D_1|| \cdot ||D_2||}$$

-0 = "identical", 90° = orthogonal (no shared words)



- Algorithm
 - 1.Read documents
 - 2. Split each document into words
 - 3. Count word frequencies (document vectors)
 - 4. Compute document distance



- Algorithm
 - 1.Read documents
 - 2. Split each document into words
 - re.findall('\w+', doc)
 - But how does this actually work?
 - 3. Count word frequencies (document vectors)
 - 4. Compute document distance



2. Split each document into words

- For each line in document:

For each character in line:

If not alphanumeric: Add previous word

(if any) to list

Start new word



3. Count word frequencies (document vectors)

- a. Sort the word list
- b. For each word in word list:
 - If same as last word: Increment counter
 - Else:

Add last word and its counter to list

Reset counter to 0



- Algorithm
 - 1.Read documents
 - 2. Split each document into words
 - 3. Count word frequencies (document vectors)

4. Compute document distance

Look up frequency in each document

Multiply

Add to total



4. Compute document distance

For every possible word: W_i iterations

Look up frequency in each document $O(W_\alpha)$ Multiply

Add to total



4. Compute document distance

- a. Start at first word of each document (in sorted order)
- b. If words are equal:

Multiply word frequencies

Add to total

- c. In whichever document has lexically lesser word, advance to next word
- d. Repeat until either document out of words

算法是什么? 总结



- □从哲学角度看: 算法是解决一个问题的抽象行为序列。
- □从技术层面上看: 算法是一个计算过程, 它接受一些输入, 并产生某些输出。
- □从抽象层次上看: 算法是一个将输入转化为输出的计算步骤序列。
- □从宏观层面上看: 算法是解决一个精确定义的计算问题的工具。



谢谢观赏