

图搜索

湖南大学信息科学与工程学院

提纲

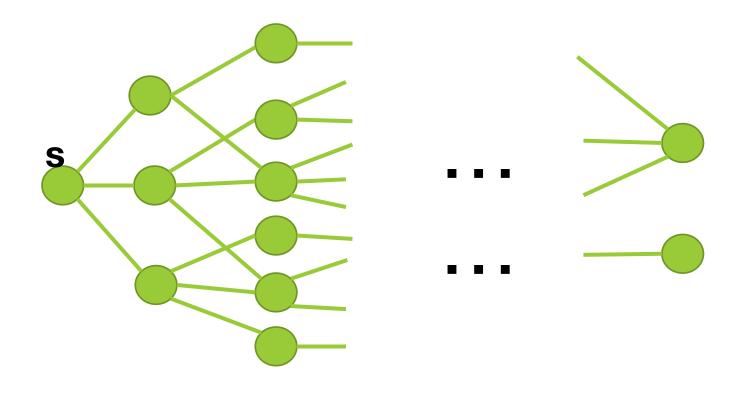


- 1广度优先搜索
- 2 深度优先搜索
- 3 深度优先搜索应用

1广(宽)度优先搜索



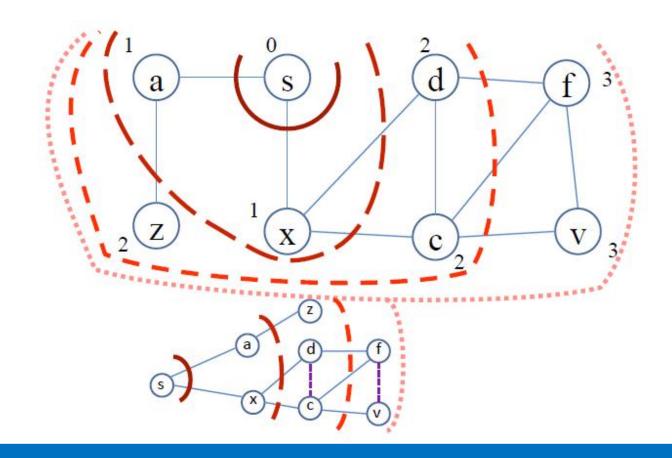
图搜索 (Graph Search) ,求图上从源点出发到其他点的路径。



1广(宽)度优先搜索



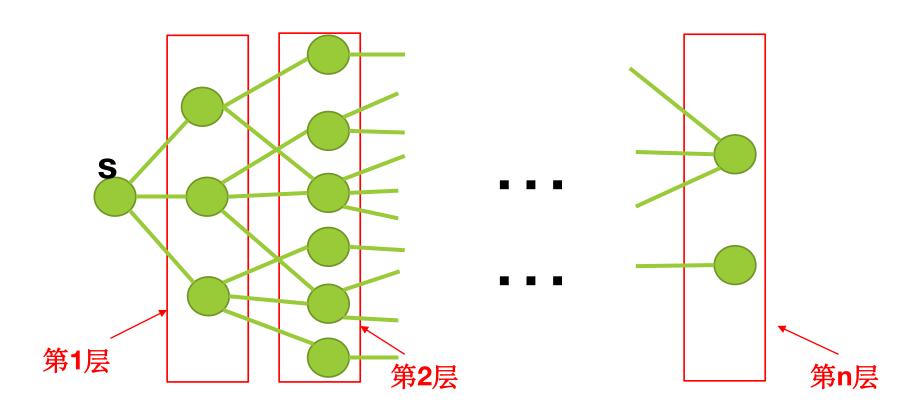
广度优先搜索 (BFS,Breadth First Search) , 从初始点开始,逐 层向前搜索,即第n层搜索未完成,不得进入下一层搜索。



1广(宽)度优先搜索



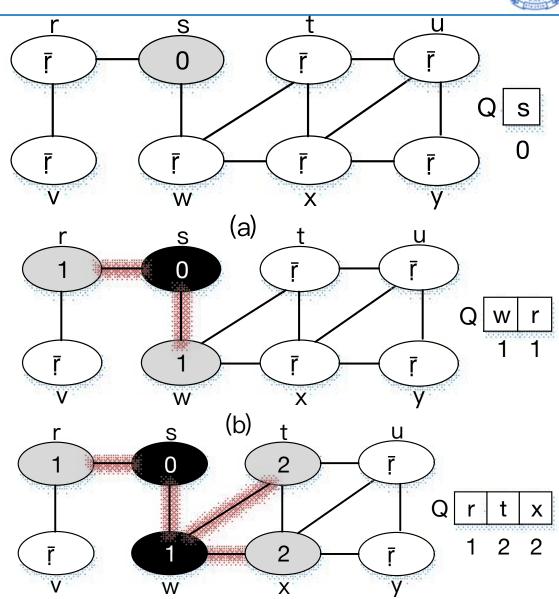
广度优先搜索 (BFS,Breadth First Search) ,从初始点开始,逐 层向前搜索,即第n层搜索未完成,不得进入下一层搜索。



1广度优先搜索-BFS实现过程



```
BFS(G,s)
    for each vertex u \in G.V - \{s\}
         u.color = WHITE
        u.d = \infty
        u.\pi = NIL
    s.color = GRAY
    s.d = 0
    s.\pi = NIL
    O = \emptyset
     ENQUEUE(Q, s)
     while Q \neq \emptyset
10
         u = \text{DEQUEUE}(Q)
11
         for each v \in G.Adj[u]
12
13
             if v.color == WHITE
14
                 v.color = GRAY
15
                 v.d = u.d + 1
16
                  \nu.\pi = u
                  ENQUEUE(Q, v)
17
18
         u.color = BLACK
```



1广度优先搜索-BFS实现过程



```
BFS(G,s)
    for each vertex u \in G.V - \{s\}
        u.color = WHITE
     u.d = \infty
       u.\pi = NIL
    s.color = GRAY
   s.d = 0
    s.\pi = NIL
    O = \emptyset
    ENQUEUE(Q, s)
    while Q \neq \emptyset
10
        u = \text{DEQUEUE}(Q)
11
12
         for each v \in G. Adj[u]
13
             if v.color == WHITE
14
                 v.color = GRAY
15
                 v.d = u.d + 1
16
                 \nu.\pi = u
17
                 ENQUEUE(Q, v)
18
        u.color = BLACK
```

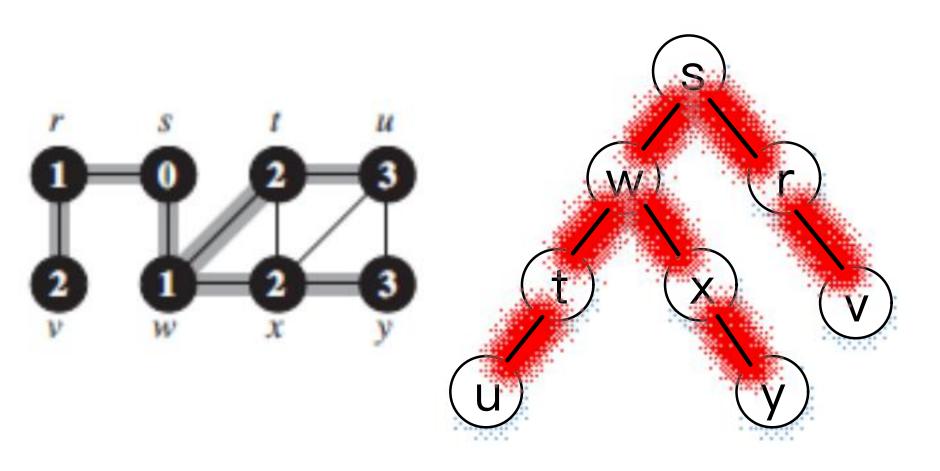
1广度优先搜索-BFS实现过程



```
BFS(G,s)
                                                                              3
     for each vertex u \in G.V - \{s\}
         u.color = WHITE
                                                                                         3
        u.d = \infty
        u.\pi = NIL
                                                      W
    s.color = GRAY
                                                           (g)
    s.d = 0
                                                                               3
    s.\pi = NIL
    O = \emptyset
    Enqueue(Q,s)
     while Q \neq \emptyset
10
         u = \text{DEQUEUE}(Q)
11
                                                      W
                                                                   X
         for each v \in G.Adj[u]
12
                                                            (h)
13
             if v.color == WHITE
                                                        S
14
                                                                               3
                 v.color = GRAY
                                                        0
15
                 v.d = u.d + 1
                                                                                   Q
16
                 \nu.\pi = u
                 ENQUEUE(Q, v)
17
                                                                   2
                                                                               3
18
         u.color = BLACK
                                                                   X
                                                       W
                                                             (i)
```

1广度优先搜索-广度优先树





1广度优先搜索-算法时间复杂度分析



```
BFS(G,s)
    for each vertex u \in G.V - \{s\}
         u.color = WHITE
     u.d = \infty
      u.\pi = NIL
 5 \quad s.color = GRAY
 6 \, s.d = 0
 7 s.\pi = NIL
 8 Q = \emptyset
    Enqueue(Q,s)
    while Q \neq \emptyset
10
11
         u = \text{DEQUEUE}(Q)
         for each v \in G. Adj[u]
12
13
             if v.color == WHITE
14
                 v.color = GRAY
15
                 v.d = u.d + 1
16
                 \nu.\pi = u
17
                 ENQUEUE(Q, v)
18
         u.color = BLACK
```

每个点在queue中最多出现一次

○时间代价为O(|V|)

邻接表Adj也只会被扫描一次

•时间代价为

$$\sum_{v \in V} |Adj[v]| = O(|E|)$$

总时间代价为O(|V|+|E|)



可以证明,对于一个图G=(V,E),广度优先搜索算法可以得到从已知源结点s ∈ V到每个可达结点的距离

引理1

设G=(V,E)是一个有向图或无向图,s ∈ V为G的任意一个结点,则对任意边(u,v) ∈ E, δ (s,v)≤ δ (s,u)+1

证明: 如果从顶点s可达顶点u,则从s也可达v。在这种情况下从s到v的最短路径不可能比从s到u的最短路径加上边(u,v)更长,因此不等式成立;如果从s不可达顶点u,则 δ (s,v)= ∞ ,不等式仍然成立。



下面我们首先证明v.d是 $\delta(s,v)$ 的上界

引理2

设G=(V,E)是一个有向或无向图,并假设算法BFS从 $G中一已知源结点<math>s \in V$ 开始执行,在执行终止时,对每个顶点 $v \in V$,变量v.d的值满足: $v.d \geq \delta(s,v)$ 。

证明: 利用数学归纳法,对s到v的BFS路径长度L进行归纳

L=0时,只有s这个点L=0,首先被放入queue,此时v.d=0;

L<=n时,假设所有点v都成立;当L=n+1时,假设s到v路径为s $e_1v_1e_2$... $e_nv_ne_{n+1}v_{n+1}$,根据归纳假设 v_n 加入queue的时候 v_n .d等于或大于n,同时边 e_{n+1} 的存在保证了 v_{n+1} 加入的时候 v_{n+1} .d= v_n .d+1>=n+1



本引理的目的在于证明,队列中最多只有两个不同值

引理3

假设过程BFS在图G=(V,E)之上的执行过程中,队列Q包含如下结点 $<v_1,v_2,...,v_r>$,其中 v_1 是队列Q的头, v_r 是队列的尾。那么 v_r .d $\le v_1$.d+1且 v_i .d $\le v_{i+1}$.d,i=1,2,...,r-1。

证明:

证明过程是对队列操作的次数进行归纳。初始时,队列仅包含顶点s,引理自然正确。

下面进行归纳,我们必须证明在压入和弹出一个顶点后引理仍然成立。如果队列的头 v_1 被弹出队列,新的队头为 v_2 (如果此时队列为空,引理无疑成立),所以有 v_r . $d \le v_1$. $d + 1 \le v_2$.d + 1,余下的不等式依然成立,因此 v_2 为队头时引理成立



上面引理证明了队列中d的值在不断增加,同时算法伪代码显示该算法每个点只会入队列一次

引理4

设G=(V,E)是一个有向图或无向图,并假设过程BFS从G上某顶点s \in V开始执行,则在执行过程中,BFS可以发现源结点s可达的每一个结点v \in V,在运行终止时,对任意v \in V,v.d= δ (s,v)。此外,对任意从s可达的节点v \neq s,从s到v的最短路径之一是从s到v. π 的最短路径再加上边(v. π , v)。



引理4证明:

设反证,假设存在v,v.d不等于 $\delta(s,v)$,且 $\delta(s,v)$ 最小。显然,v不是s

根据引理2, $v.d \ge \delta(s,v)$, 于是v.d大于 $\delta(s,v)$, 注意v必然可达,否则 $\delta(s,v)$ 为无穷了,那么v.d不可能更大了

假设u是s到v最短路径上v前面一个点,所以 $\delta(s,v)=\delta(s,u)+1$ 。同时, $\delta(s,v)$ 最小,所以 $\delta(s,u)=u.d$ 。于是,我们有 $v.d>\delta(s,v)=\delta(s,u)+1=u.d+1$ 。

这个不可能的

提纲



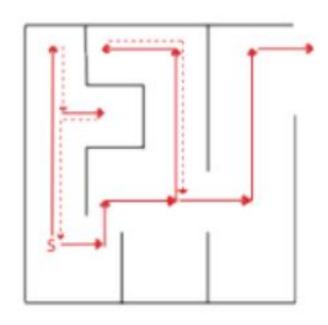
16

- 1广度优先搜索
- 2 深度优先搜索
- 3 深度优先搜索应用

2深度优先搜索



深度优先搜索(Depth First Search),从初始点开始,对每一个可能的分支路径深入到不能再深入为止,而且每个节点只能访问一次.



2深度优先搜索



- $\circ \circ G = (V, E)$ 是一个有向图或无向图,搜索时沿着树的深 度遍历树的结点, 尽可能深的搜索树的分支。
- ○当结点u的所有边都已被搜索过,搜索将回溯到发现结点 u的那条边的起始结点。这一过程一直进行到已发现从源 结点可达的所有结点为止。
- ○如果还存在未被发现的结点,则选择其中一个作为源结 点并重复以上过程,整个进程反复进行直到所有结点都 被访问为止。

算法伪代码



```
DFS(V, Adj, s)
  level = {s:0}; parent = {s: None};
  stack=[s];
  while stack
     cur = stack[len(stack)-1]; tag = 0;
     for v in Adj[cur]
       if v not in level #not yet seen
          level[v] = level[cur] + 1; parent[v] = cur;
stack.append(v); tag = 1
        if tag == 0
          stack.pop();
```

2深度优先搜索-DFS实现过程: 递归



20

```
DFS(G)
   for each vertex u \in G.V
       u.color = WHITE
       u.\pi = NIL
   time = 0
   for each vertex u \in G.V
                                              (a)
                                                                               (b)
6
       if u.color == WHITE
            DFS-VISIT(G, u)
DFS-Visit(G, u)
    time = time + 1
    u.d = time
    u.color = GRAY
    for each v \in G.Adj[u]
        if v.color == WHITE
            \nu.\pi = u
            DFS-VISIT(G, v)
    u.color = BLACK
    time = time + 1
                                              (e)
    u.f = time
```

2深度优先搜索-DFS实现过程: 递归

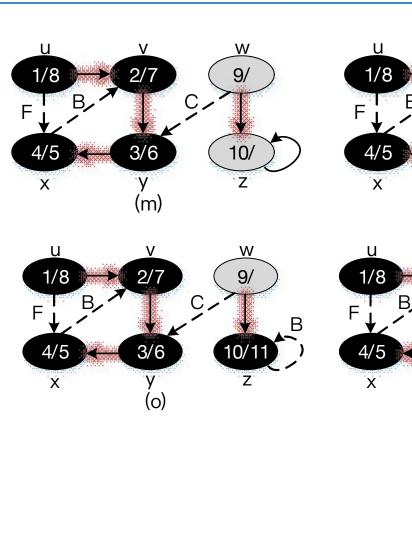


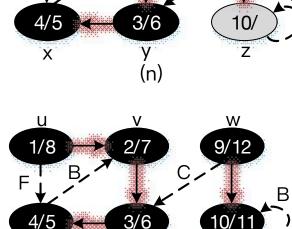
```
DFS(G)
   for each vertex u \in G.V
       u.color = WHITE
                                              3/6
                                                                                  3/6
       u.\pi = NIL
   time = 0
                                                                                   (h)
   for each vertex u \in G.V
       if u.color == WHITE
           DFS-VISIT(G, u)
                                                                                  2/7
DFS-Visit(G, u)
                                                                                  3/6
                                              3/6
    time = time + 1
    u.d = time
    u.color = GRAY
    for each v \in G.Adj[u]
                                     u
                                                                         u
        if v.color == WHITE
                                               2/7
                                                                                   2/7
                                                          9/
                                                                                              9/
            \nu.\pi = u
            DFS-VISIT(G, v)
                                               3/6
                                                                                   3/6
    u.color = BLACK
    time = time + 1
                                               (k)
    u.f = time
```

2深度优先搜索-DFS实现过程: 递归



```
DFS(G)
   for each vertex u \in G.V
       u.color = WHITE
       u.\pi = NIL
   time = 0
   for each vertex u \in G.V
       if u.color == WHITE
           DFS-VISIT(G, u)
DFS-Visit(G, u)
    time = time + 1
    u.d = time
    u.color = GRAY
    for each v \in G.Adj[u]
        if v.color == WHITE
            \nu.\pi = u
            DFS-VISIT(G, v)
    u.color = BLACK
    time = time + 1
    u.f = time
```





(p)

2深度优先搜索-DFS时间复杂度分析



```
DFS(G)
```

```
for each vertex u \in G.V
       u.color = WHITE
       u.\pi = NIL
 time = 0
  for each vertex u \in G.V
       if u.color == WHITE
           DFS-VISIT(G, u)
DFS-Visit(G, u)
   time = time + 1
   u.d = time
    u.color = GRAY
    for each v \in G.Adj[u]
        if v.color == WHITE
            \nu.\pi = u
            DFS-VISIT(G, \nu)
    u.color = BLACK
    time = time + 1
10 u.f = time
```

第1-3行和5-7行的循环占用时间为O(V)

DFS_Visit(v)第4-7行的循环要执行|Adj[v]|次

 $\sum v \in V|Adj[v]| = \theta(E)$

DFS_Visit中第4-7行语句占用的整个时间应为θ(E)

DFS的运行时间为 θ (V+E)

2深度优先搜索-DFS实现: 栈





- 栈初始化;
- 2. 输出起始顶点,起始顶点改为"已访问"标志,将起始顶点进栈,
- 3. 重复下列操作直到栈为空:
 - 3.1 取栈顶元素顶点;(注意不出栈)
 - 3.2 栈顶元素顶点存在未被访问过的邻接点 w,则
 - 3.2.1 输出顶点 w
 - 3.2.2 将顶点 w 改为 "已访问"标志;
 - 3.2.3 将顶点 w进栈;
 - 3.3 否则, 当前顶点退栈;

BFS vs DFS



相似点

都维护了一个任务列表来 不断地插入和推出未处理 的点 不同点

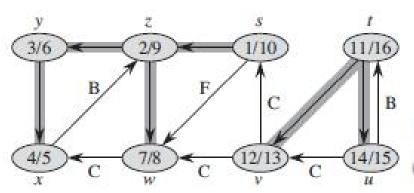
BFS使用队列; DFS使用栈

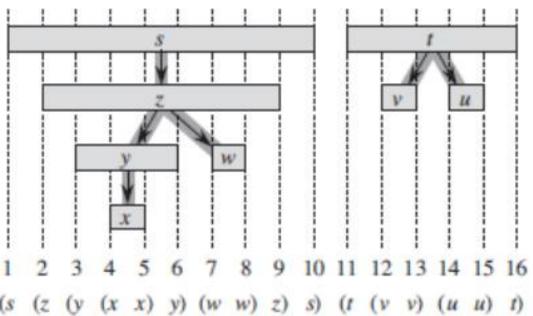
BFS按层遍历图; DFS贪心 地搜索

3/27/2023 25



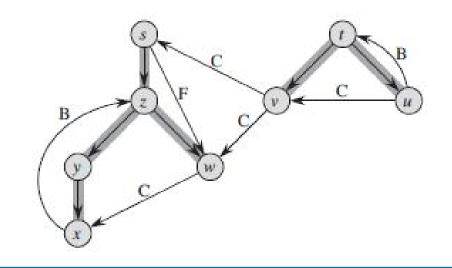
从不同的点出发或者沿着不同点深优,会得到不同深度 优先搜索森林。





每个连通分支对应一棵树。

强连通,只有一个连通分支,深度优先搜索森林中只有一颗树,弱连通则多颗树。





注意: 有向图中, 沿不同的点出发或者沿着不同点深优, 会得到不同深度优先搜索森林。如果是强连通, 则都只有一棵树。如果是弱连通, 则不同的点出发或者沿着不同点深优, 得到深度优先搜索森林中树的个数可能不同。

注意:无向图中,沿不同的点出发或者沿着不同点深优,会得到不同深度优先搜索森林。

练习: 无向图中, 沿不同的点出发或者沿着不同点深优, 会得到不同深度优先搜索森林, 那森林中含有树的数量 相同吗?



定理1括号定理

在对有向图或无向图G=(V,E)的任何深度优先搜索中,对于图中任意两结点u和v,下述三个条件中有且仅有一条成立:

- 区间[u.d,u.f]和区间[v.d,v.f]完全分离,在深度优先森林中,结点u不是结点v的后代,结点v也不是u的后代;
- 区间[u.d,u.f]完全包含于区间[v.d,v.f]中, 在深度优先树中u 是v的后代;
- 区间[v.d,v.f]完全包含于区间[u.d,u.f]中, 在深度优先树中u 是v的祖先。

证明: 先讨论u.d<v.d的情形,根据v.d是否小于u.d又可分为两种情况:第一种情况,若v.d<u.f,这样v已被发现时u结点依然是灰色,这就说明v是u的后裔,再者,因为结点v比u发现得较晚,所以在搜索返回结点u并完成之前,所有从v出发的边都已被探寻并已完成,所以在这种条件下区间[v.d,v.f]必然完全包含于区间[u.d, u.f]。第二种情况,若u.f<v.d,则根据不等式(1),区间[u.d,u.f]和区间[v.d,v.f]必然是分离的。对于v.d<u.d的情形类似可证,只要把上述证明中u和v对调即可。



推论1 后代区间的嵌套

在有向或无向图G的深度优先森林中,结节v是结点u的后裔当且仅当u.d<v.d<v.f<u.f。



定理2白色路径定理

在一个有向或无向图G=(V,E)的深度优先森林中,结点v是结点u的后代当且仅当在搜索发现u的时刻u.d,从结点u出发经一条仅由白色结点组成的路径可达v。

证明:

→: 假设v是u的后裔, w是深度优先树中u和v之间的通路上的任意结点, 则w必然是u的后裔, 由推论1可知u.d<w.d, 因此在时刻u.d, w应为白色。

←: 设在时刻u.d,从u到v有一条仅由白色结点组成的通路,但在深度优先树中v还没有成为u的后裔。不失一般性,我们假定该通路上的其他顶点都是u的后裔(否则可设v是该通路中最接近u的结点,且不为u的后裔),设w为该通路上v的祖先,使w是u的后裔(实际上w和u可以是同一个结点)。根据推论1得w.f≤u.f,因为v∈Adj[w],对DFS_Visit(w)的调用保证完成w之前先完成v,因此v.f<w.f≤u.f。因为在时刻u.d结点v为白色,所以有u.d<v.d。由推论1可知在深度优先树中v必然是u的后裔。(证毕)

提纲



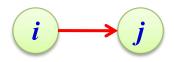
31

- 1广度优先搜索
- 2 深度优先搜索
- 3 深度优先搜索应用



设G=(V, E)是一个具有n个顶点的有向无环图, V中顶点序列 v_1 , v_2 , ..., v_n 称为一个拓扑序列, 当且仅当该顶点序列满足下列条件:

若<i, j>是图中的边(或从顶点i ⇒ j有一条路径):



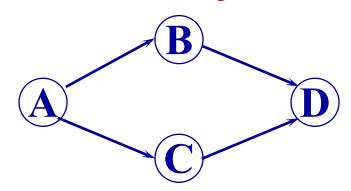


则在拓扑序列中顶点i必须排在顶点j之前。

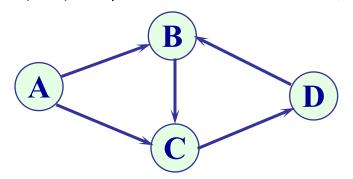
在一个有向图中找一个拓扑序列的过程称为拓扑排序。



有向无环图(DAG: Directed Acyclic Graph)



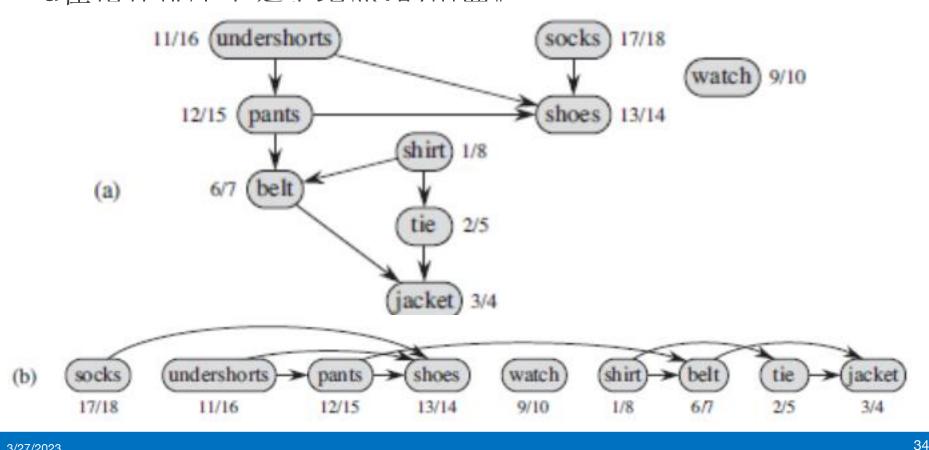
可求得拓扑有序序列: ABCD 或 ACBD



不能求得它的拓扑有序序列。 因为存在回路 {B, C, D}



对于有向无环图G=(V,E),其拓扑排序是G中所有结点的一种 线性次序, 该次序满足如下条件: 如果G包含边(u, v), 则结点 u在拓扑排序中处于结点v的前面。





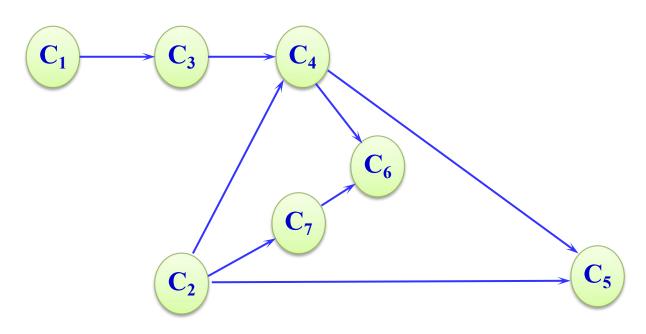
例如, 计算机专业的学生必须完成一系列规定的课程才能毕业, 假设这些课程的名称与相应代号有如下关系:

课程代号	课程名称	先修课程
\mathbb{C}_1	高等数学	无
\mathbb{C}_2	程序设计	无
C ₃	离散数学	C ₁
C ₄	数据结构	C ₂ , C ₃
C ₅	编译原理	C ₂ , C ₄
C ₆	操作系统	C ₄ , C ₇
C ₇	计算机组成原理	C ₂

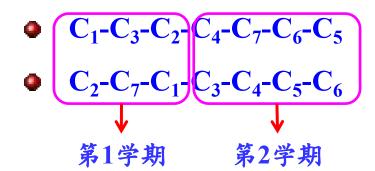


36

课程之间的先后关系可用有向图表示:



可以这样排课:





拓扑排序方法1:根据结点入度

- (1) 从有向图中选择一个没有前驱 (即入度为0) 的顶点并且输出它。
 - (2) 从图中删去该顶点,并且删去从该顶点发出的全部有向边。
- (3) 重复上述两步,直到剩余的图中不再存在没有前驱的顶点为止。

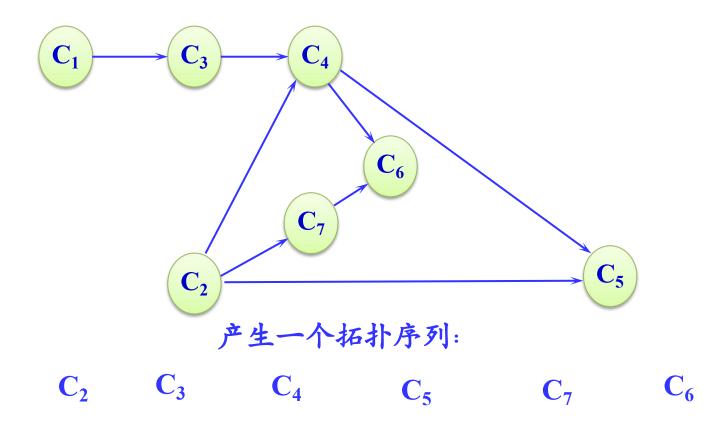
37

 \mathbf{C}_1



38

拓扑排序方法1演示



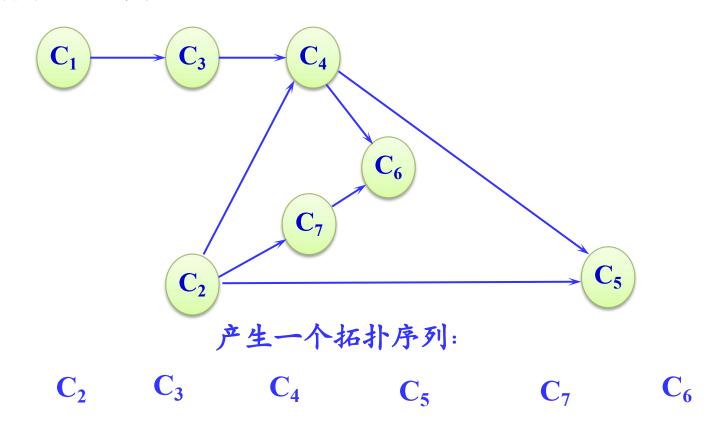
排序完成

 \mathbf{C}_1



39

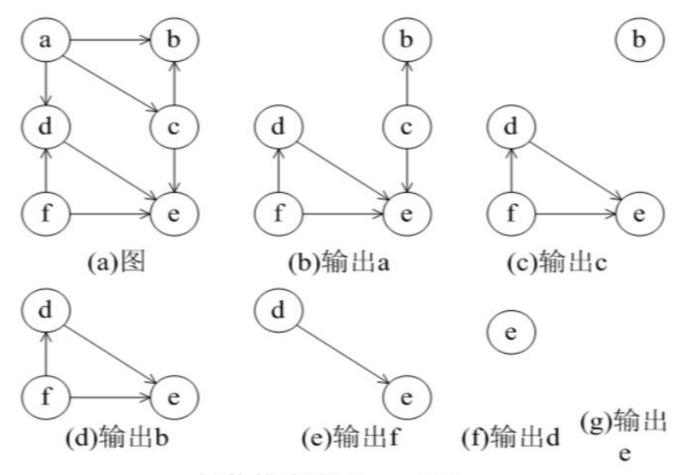
拓扑排序方法1演示



排序完成



拓扑排序方法1 演示



拓扑排序序列: acbfde



拓扑排序方法2:基于DFS

```
DFS(G)

1 for each vertex u \in G.V

2 u.color = WHITE

3 u.\pi = NIL

4 time = 0

5 for each vertex u \in G.V

6 if u.color == WHITE

7 DFS-VISIT(G, u)
```

```
DFS-VISIT (G, u)

1  time = time + 1

2  u.d = time

3  u.color = GRAY

4  for each v \in G.Adj[u]

5  if v.color == WHITE

6  v.\pi = u

7  DFS-VISIT (G, v)

8  u.color = BLACK

9  time = time + 1
```

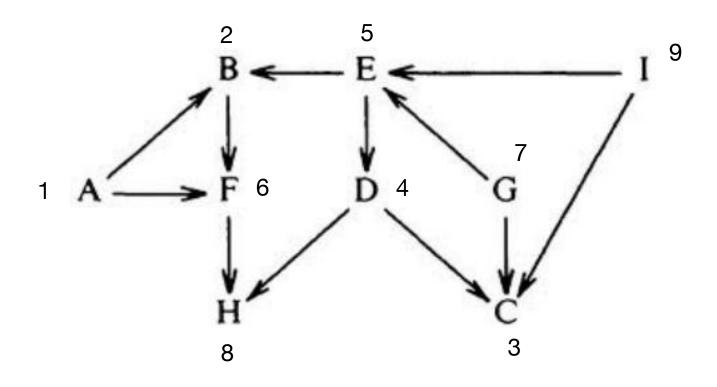
10 u.f = time

TOPOLOGICAL-SORT(G)

- 1 call DFS(G) to compute finishing times ν . f for each vertex ν
- 2 as each vertex is finished, insert it onto the front of a linked list
- 3 return the linked list of vertices



拓扑排序方法2: 基于DFS

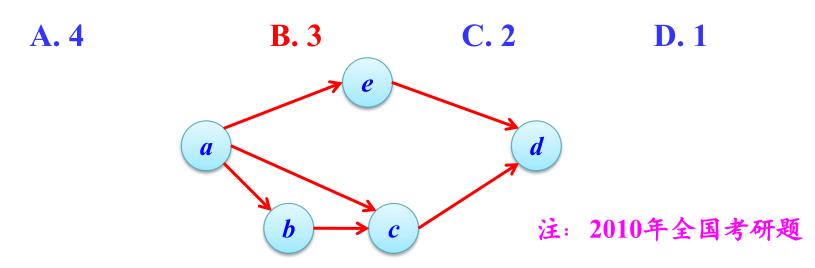


3/27/2023 42



【练习】对如图所示的图进行拓扑排序,可以得到不同

的拓扑序列个数是____。



解:不同的拓扑序列有: aebcd、abecd、abced。答案为B。



Nicolas Bruno, Nick Koudas, Divesh Srivastava. Holistic twig joins: optimal XML pattern matching. SIGMOD Conference 2002: 310-321



XML 指可扩展标记语言 (EXtensible Markup Language) ,用以表示数据以方便传输

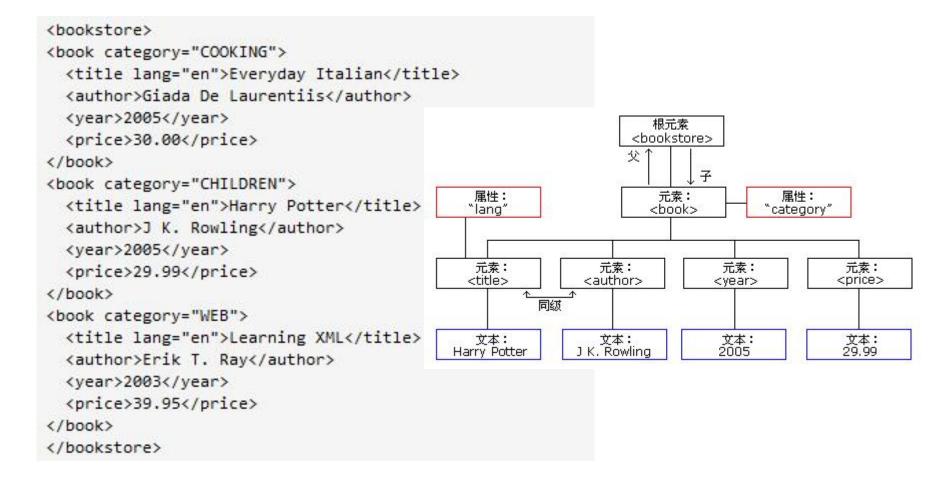
XML 文档形成了一种树结构, 它从"根部"开始, 然后扩展到"枝叶"

XML数据库就是多个XML 文档组成的一个数据库



46

XML文档树示例





XPath 简介

XPath 是一门在 XML 文档中查找信息的语言。XPath 用于在 XML 文档中通过元素和属性进行导航。

Xpath查询: //a//b//c

▶Xpath查询的路径表示:

a || || b || || c

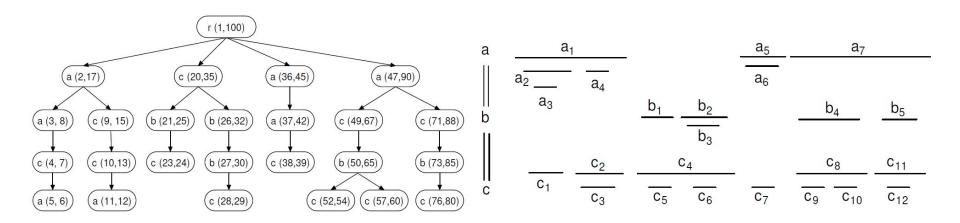
47



48

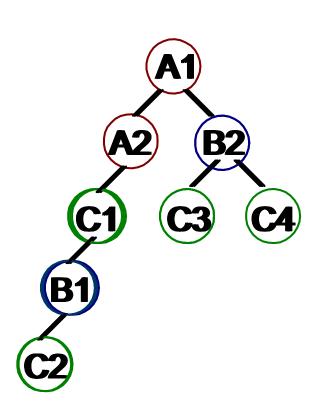
DFS编码

每个查询点的候选流 (按照发现时间排序) 、针对每个查询变量的栈





PathStack示例



时间复杂度 O(|input|+|output|)



