图

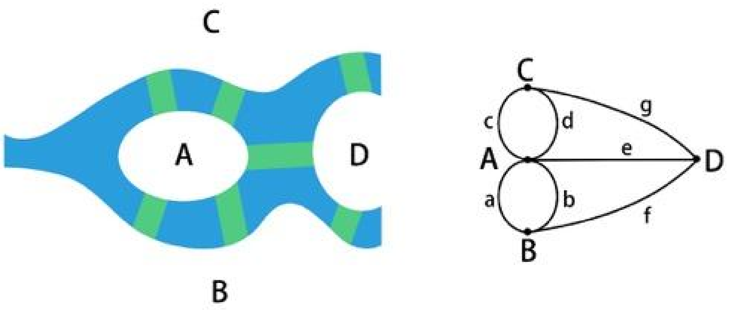
湖南大学信息科学与工程学院

图论的起源

18世纪哥尼斯堡城的普莱格尔河上有七座桥，能否一次走遍七座桥，并且每座桥只允许通过一次，最后仍可以回到起始地点？

1736年，欧拉运用数学抽象法将其转换为一笔画问题，并论述和证明了该过程是绝对不可能实现的。由此图论诞生。欧拉也成为图论的创始人。

哥尼斯堡七桥图



欧拉

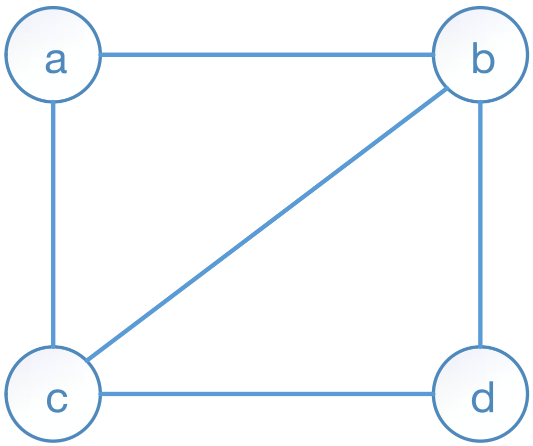
图的定义

这里所说的图，是以一种抽象的形式来表示若干对象结合以及这些对象之间的关系

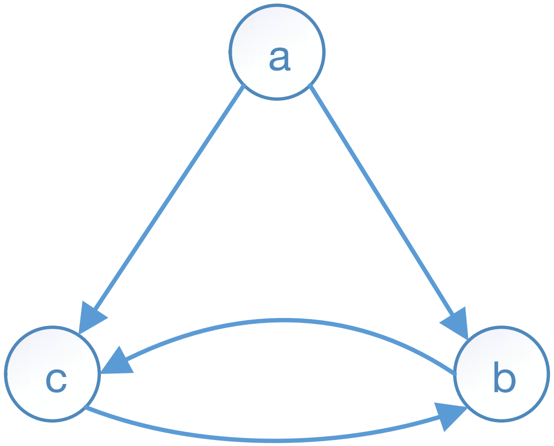
图可以表示成一个二元组$G=<V,E>$，其中V是点集合，$E\subseteq V\times V$表示边集合，其中每条边由V中两个点相连接所构成

无向图和有向图

- 如果图中的边都没有方向，那么G 被称为无向图



- 如果图中的边有方向，那么G 被称为有向图



图上的路径

给定一个无向图$G = (V,E)$，G 中顶点与边的交替序列$\Gamma = v_0e_1v_1e_2 \ldots e_lv_l$称为点$v_0$ 到点v_l 的**路径**，其中v_{r-1} 和v_r 是e_r 的端点（$1 \le r \le l$）

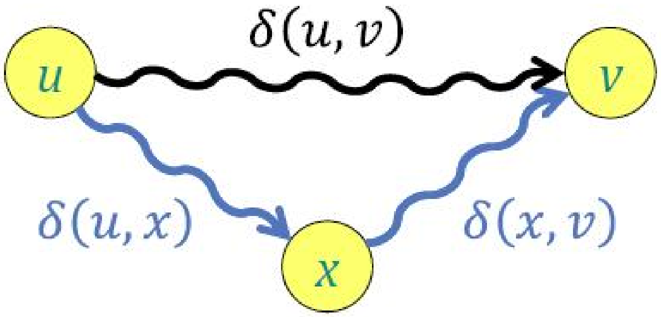
有向图中**路径**的定义与无向图中定义类似，只是要注意在有向图中通路和回路中边的方向的一致性，即v_{r-1} 必须是e_r 的起点且v_r 是e_r 的终点（$1 \le r \le l$）

所有v_0 和点v_l 之间的路径中最短的那条路径称为**最短路径**，最短路径的长度被称为v_0 到点v_l 的**距离**，记为$\delta(v_0, v_l)$

如果不存在的v_0 到v_l路径，那么$\delta(v_0, v_l)$记为∞

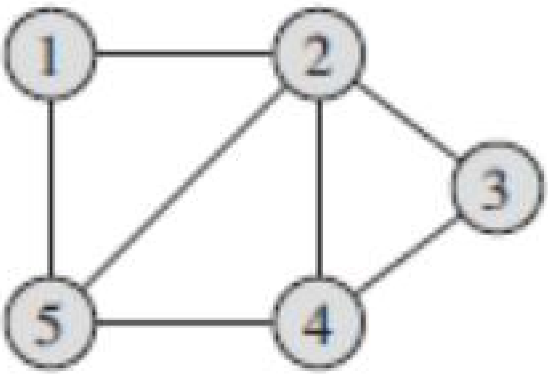
三角不等式

对于图上任意三个点u、v和x而言，$\delta(u,v) \leq \delta(u,x)+\delta(x,v)$

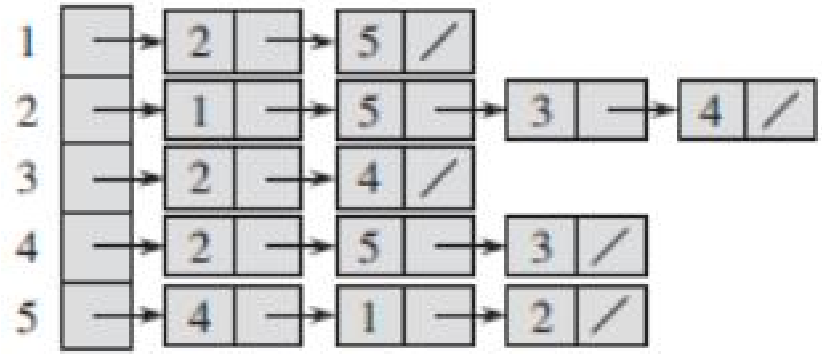


推论：对于图上任意三个点u、v和x且存在边(x,v)而言，$\delta(u,v) \leq \delta(u,x)+1$

无向图的表示



(a)



(b)

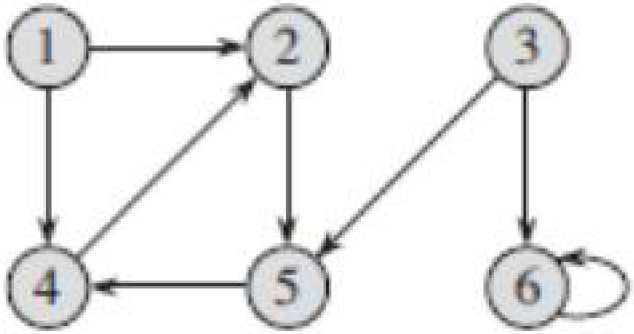
邻接表

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

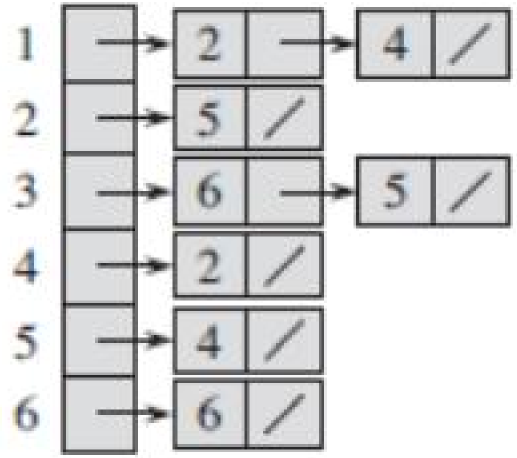
(c)

邻接矩阵

有向图的表示



(a)



(b)

邻接表

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

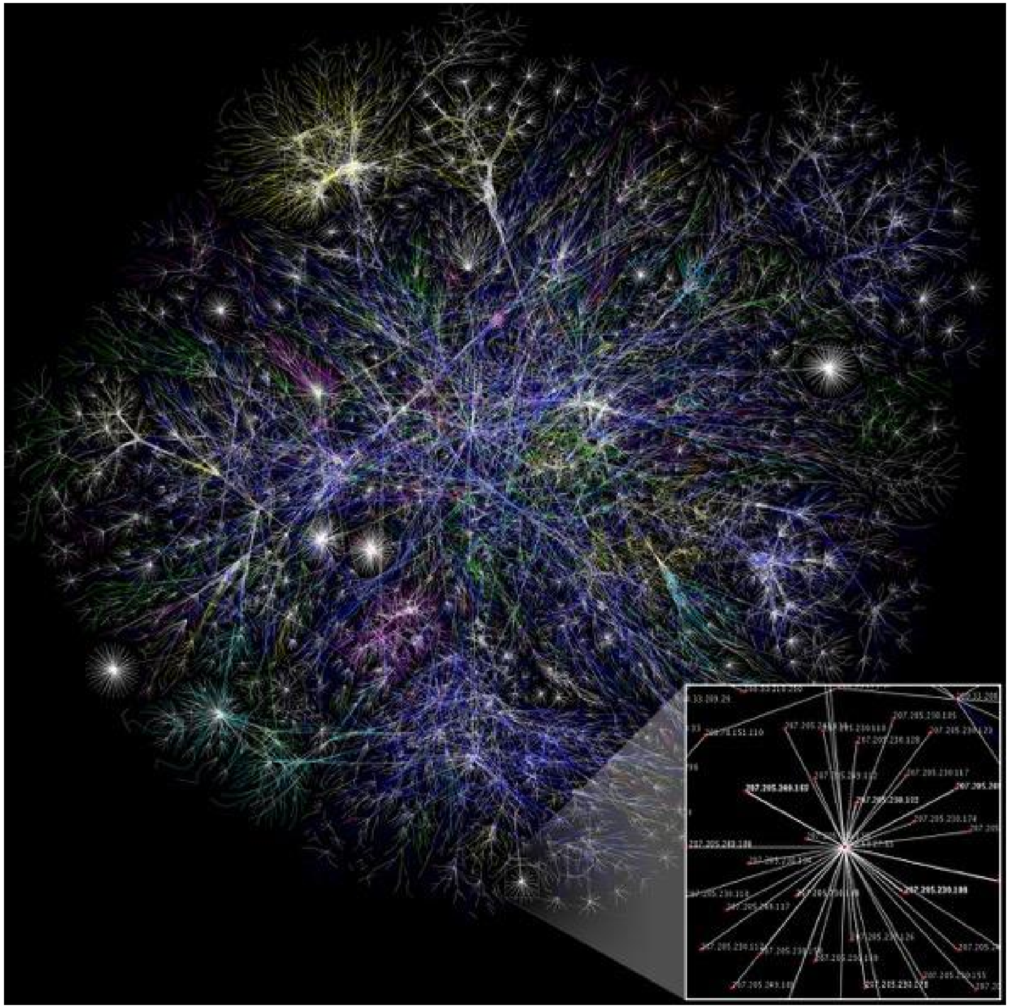
(c)

邻接矩阵

图的应用：网页分析

网页分析

- 有向网络
- 节点：Web页面
- 边：超链接



2003年，Barrett Lyon将400多万个网页绘制成互联网图

图的应用：交通网络

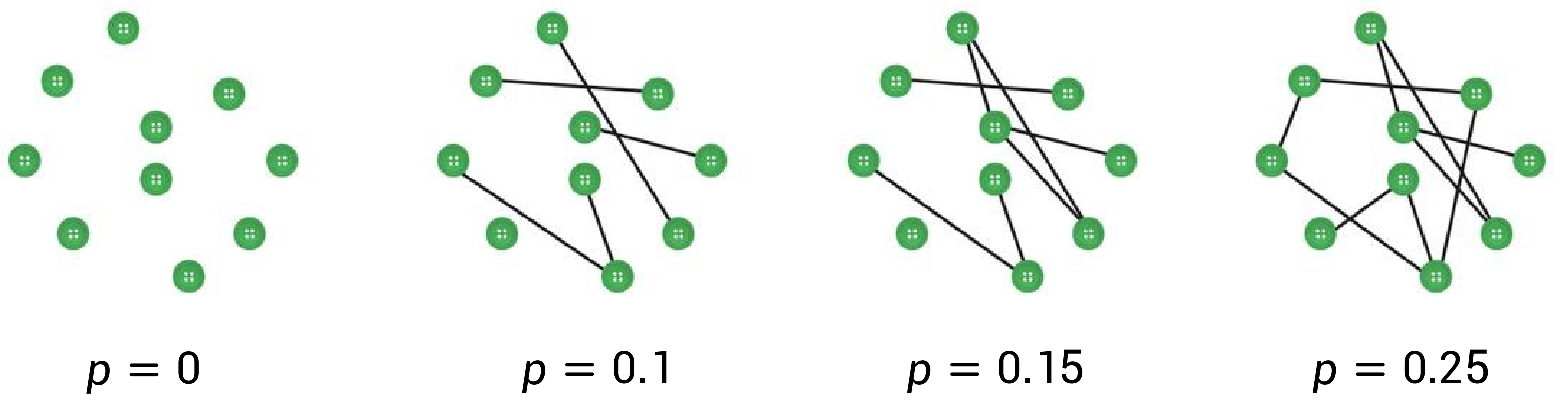
交通网络（美国航线）

如何从一个城市到另一个城市?

图的应用：随机图

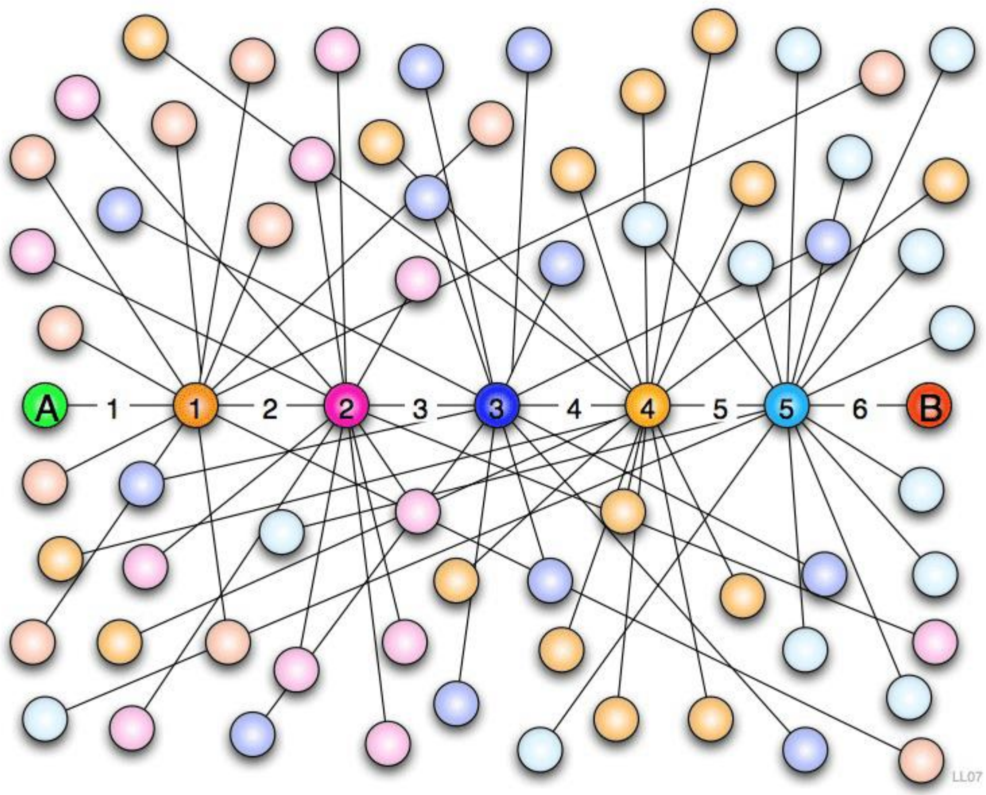
著名的匈牙利数学家Renyi和Erdos在20世纪60年代提出了随机图理论（random graph theory）。

他们提出了ER随机图模型：在给定N个顶点后，规定每两个顶点之间都有p的概率连起来（0≤p≤1）,而且这些判定之间两两无关。



图的应用：小世界理论

六度分离哈佛大学著名的社会心理学家Stanley Mailgrams在20世纪60年代给出推断：在地球上的任意两个人的平均距离是6。即平均只要通过中间的5个人，你就可以与地球上任意一个人发生联系。



弱连接的强度

斯坦福大学社会学教授 Mark Granovetter 在1973年发现：在找工作、找对象等等机会的面前，与我们交情比较浅的人（具有弱连接性），往往能给我们带来最大的转变。