



湖南大學
HUNAN UNIVERSITY

第十章 基本图算法

—— 湖南大学信息科学与工程学院 ——



目录

- 第一节 图的基本概念
- 第二节 广度优先搜索
- 第三节 深度优先搜索
- 第四节 深度优先搜索应用

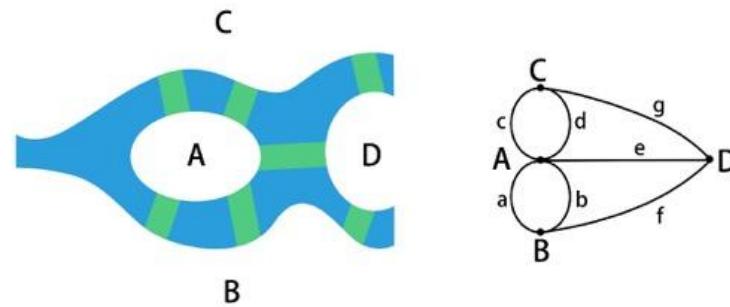


图论的起源

18世纪哥尼斯堡城的普莱格尔河上有七座桥，能否一次走遍七座桥，并且每座桥只允许通过一次，最后仍可以回到起始地点？

1736年，欧拉运用数学抽象法将其转换为一笔画问题，并论述和证明了该过程是绝对不可能实现的。由此图论诞生。欧拉也成为图论的创始人。

哥尼斯堡七桥图



欧拉





图的定义

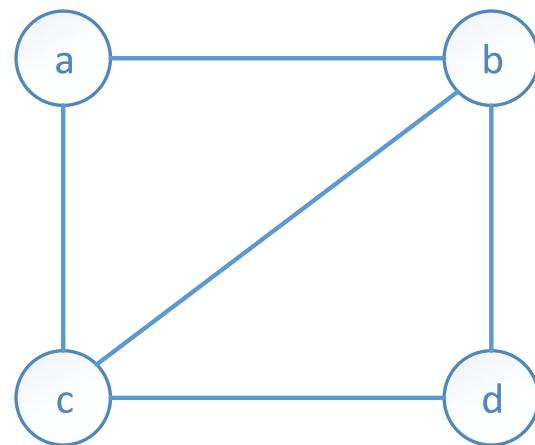
这里所说的图，是以一种抽象的形式来表示若干对象结合以及这些对象之间的关系

图可以表示成一个二元组 $G = \langle V, E \rangle$ ，其中 V 是点集合， $E \subseteq V \times V$ 表示边集合，其中每条边由 V 中两个点相连接所构成

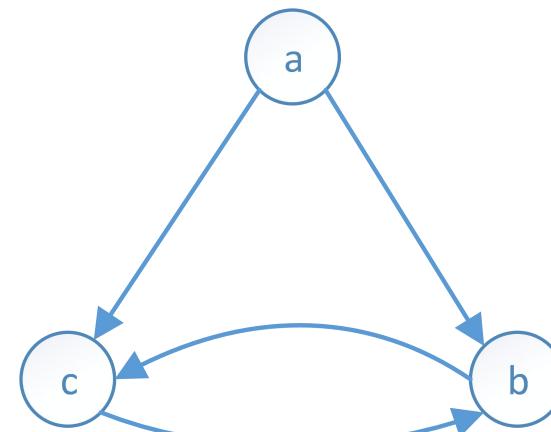


无向图和有向图

□ 如果图中的边都没有方向，
那么G被称为无向图



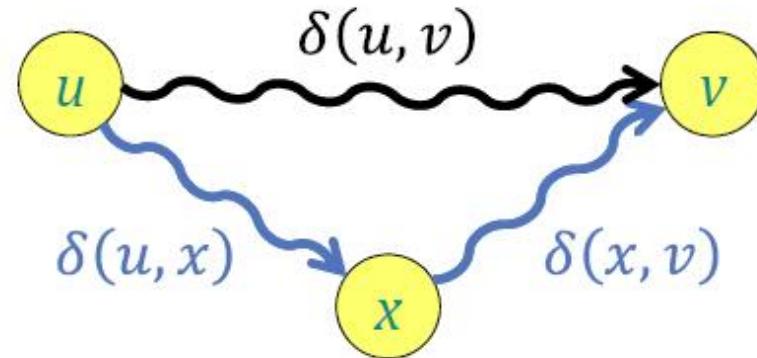
□ 如果图中的边有方向，那
么G被称为有向图





三角不等式

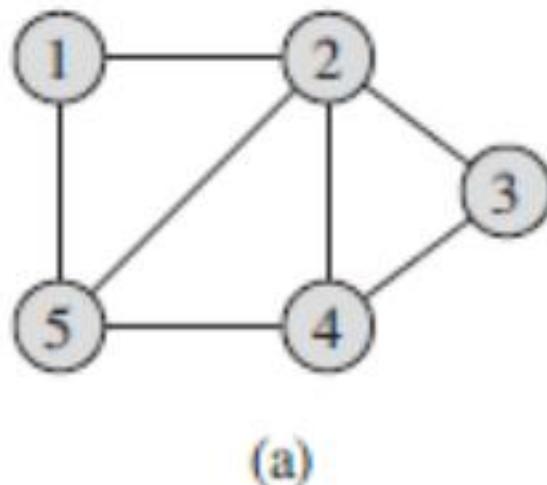
对于图上任意三个点 u 、 v 和 x 而言， $\delta(u,v) \leq \delta(u,x) + \delta(x,v)$ 。



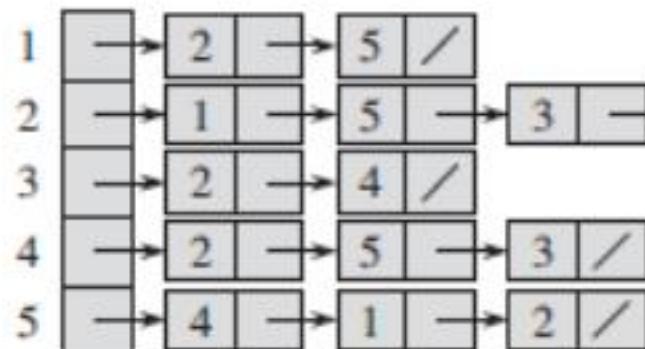
推论：对于图上任意三个点 u 、 v 和 x 且存在边 (x,v) 而言， $\delta(u,v) \leq \delta(u,x) + w(x,v)$ 。



无向图的表示



• 邻接表



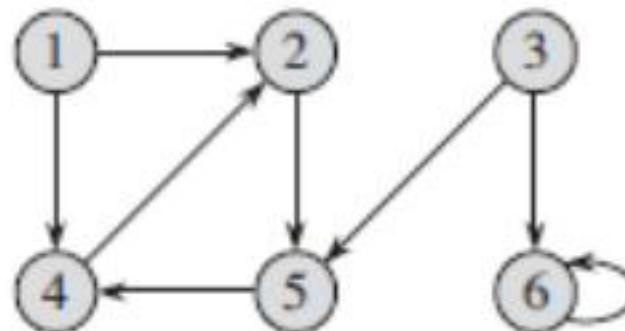
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

邻接矩阵

(c)

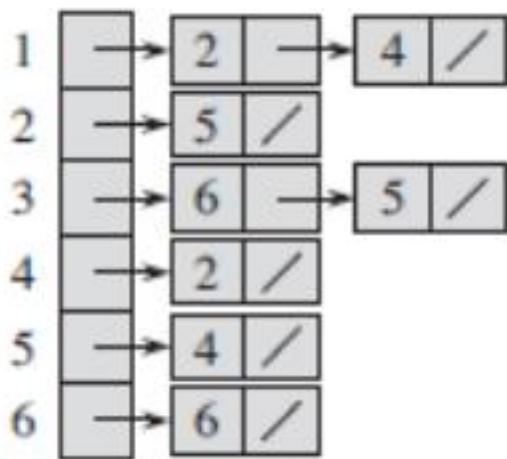


有向图的表示



(a)

• 邻接表



(b)

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

(c)

邻接矩阵

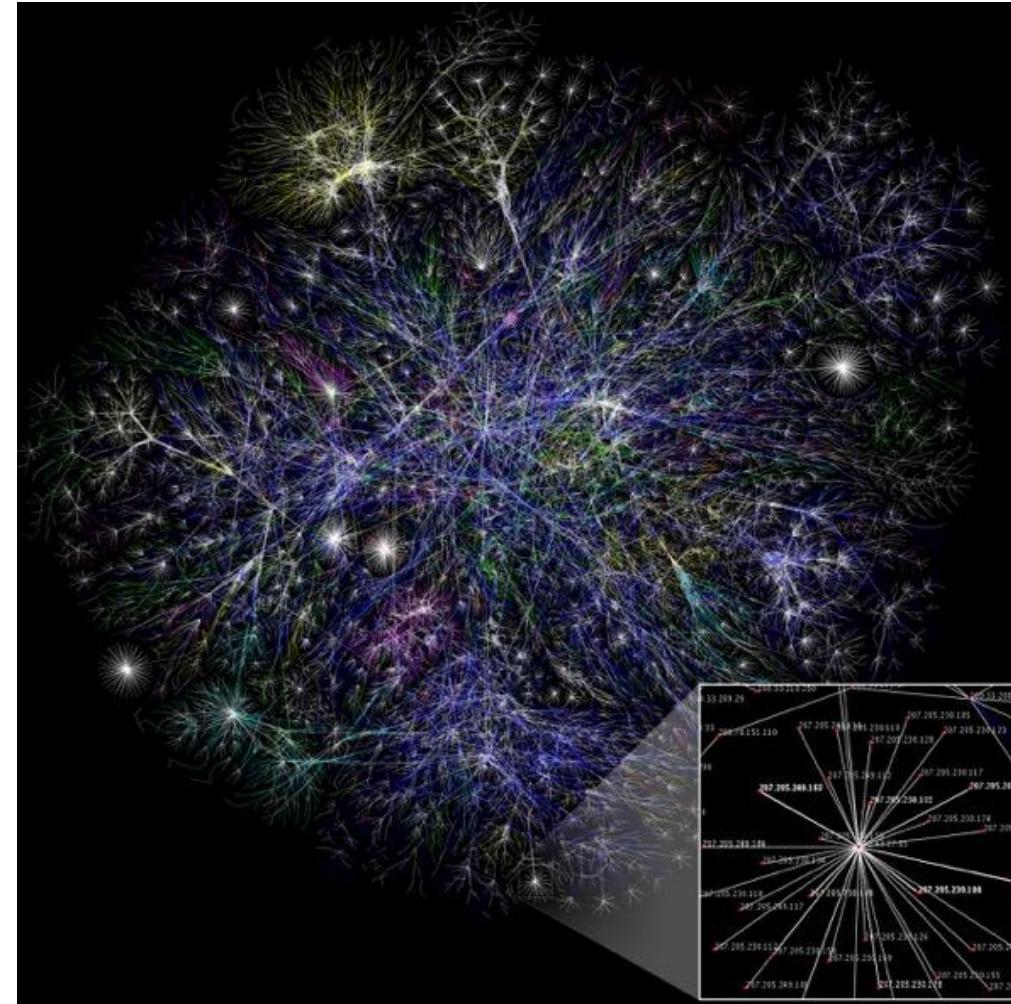
图的应用：网页分析



网页分析

- 有向网络
 - 节点：Web页面
 - 边：超链接

2003年，Barrett Lyon将400多万个网页绘制成互联网图





图的应用：交通网络

交通网络（美国航线）

如何从一个城市到另一个城市？





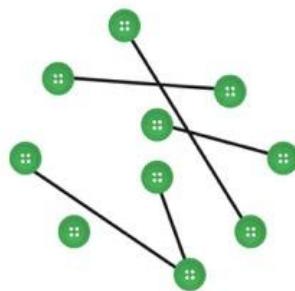
图的应用：随机图

著名的匈牙利数学家Renyi和Erdos在20世纪60年代提出了随机图理论（random graph theory）。

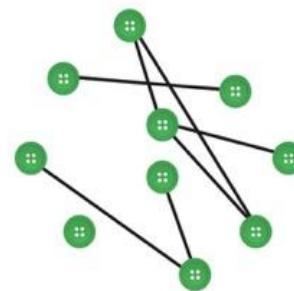
他们提出了ER随机图模型：在给定 N 个顶点后，规定每两个顶点之间都有 p 的概率连起来 ($0 \leq p \leq 1$) ,而且这些判定之间两两无关。



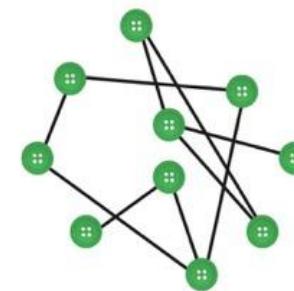
$$p = 0$$



$$p = 0.1$$



$$p = 0.15$$

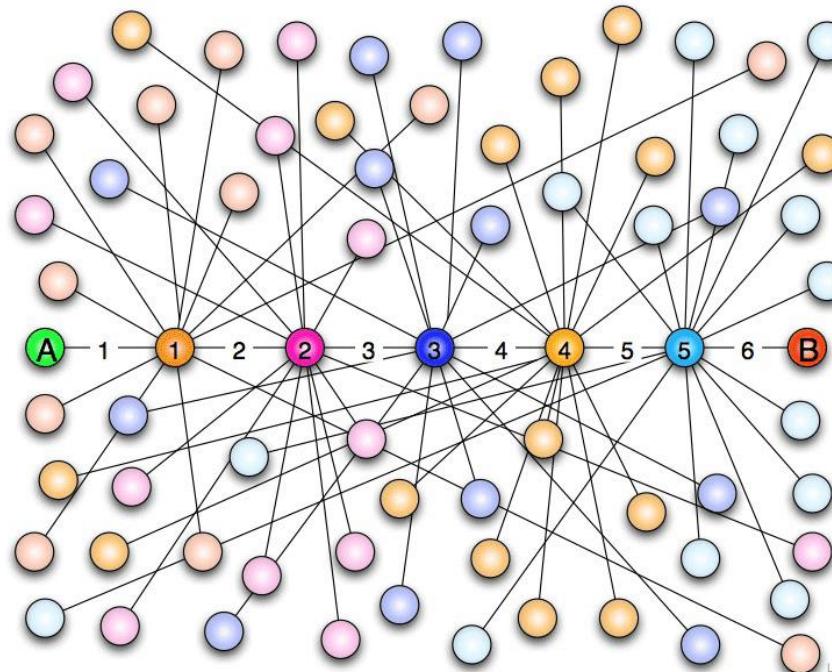


$$p = 0.25$$



图的应用：小世界理论

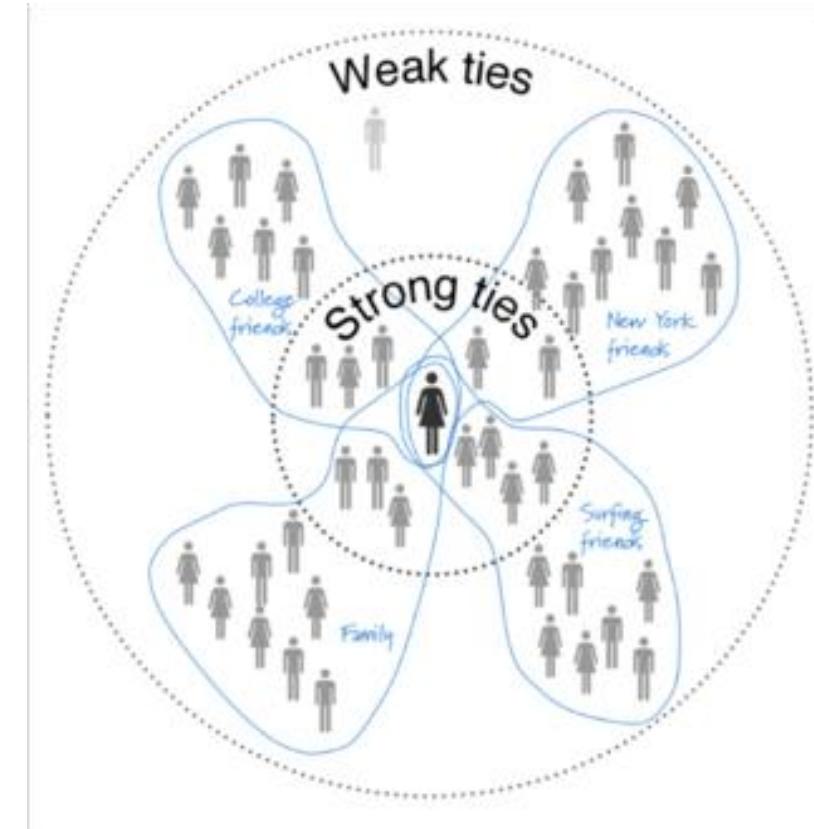
六度分离哈佛大学著名的社会心理学家Stanley Mailgrams在20世纪60年代给出推断：在地球上的任意两个人的平均距离是6。即平均只要通过中间的5个人，你就可以与地球上任意一个人发生联系。





弱连接的强度

斯坦福大学社会学教授 Mark Granovetter 在1973年发现：在找工作、找对象等等机会的面前，与我们交情比较浅的人（具有弱连接性），往往能给我们带来最大的转变。





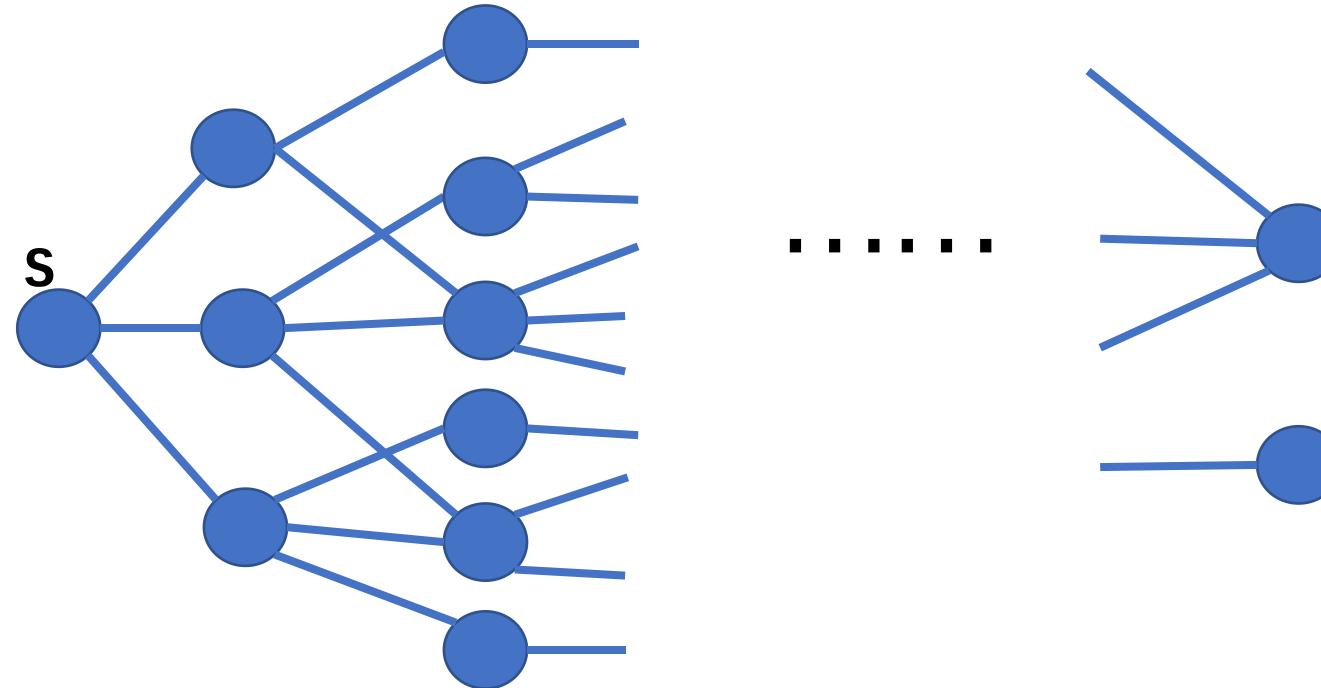
目录

- 第一节 图的基本概念
- 第二节 广度优先搜索
- 第三节 深度优先搜索
- 第四节 深度优先搜索应用



广度优先搜索

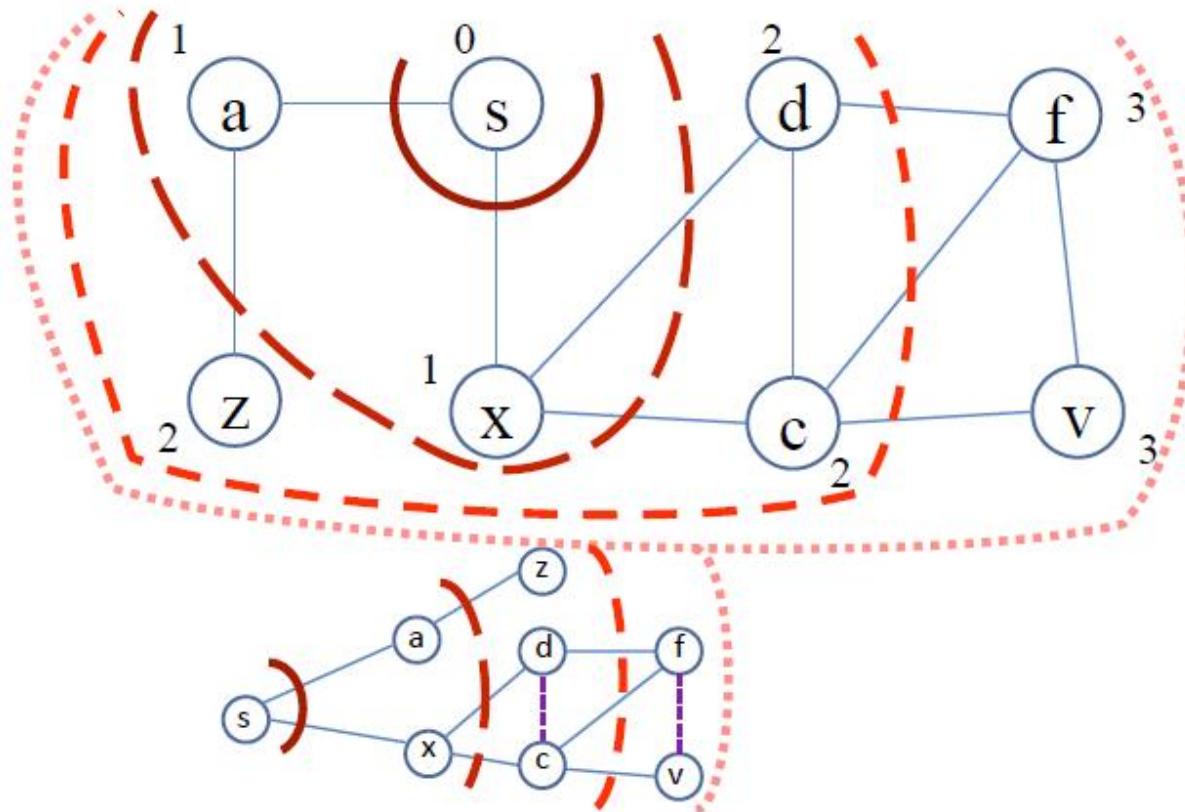
图搜索（Graph Search），求图上从源点出发到其他点的路径。





广度优先搜索

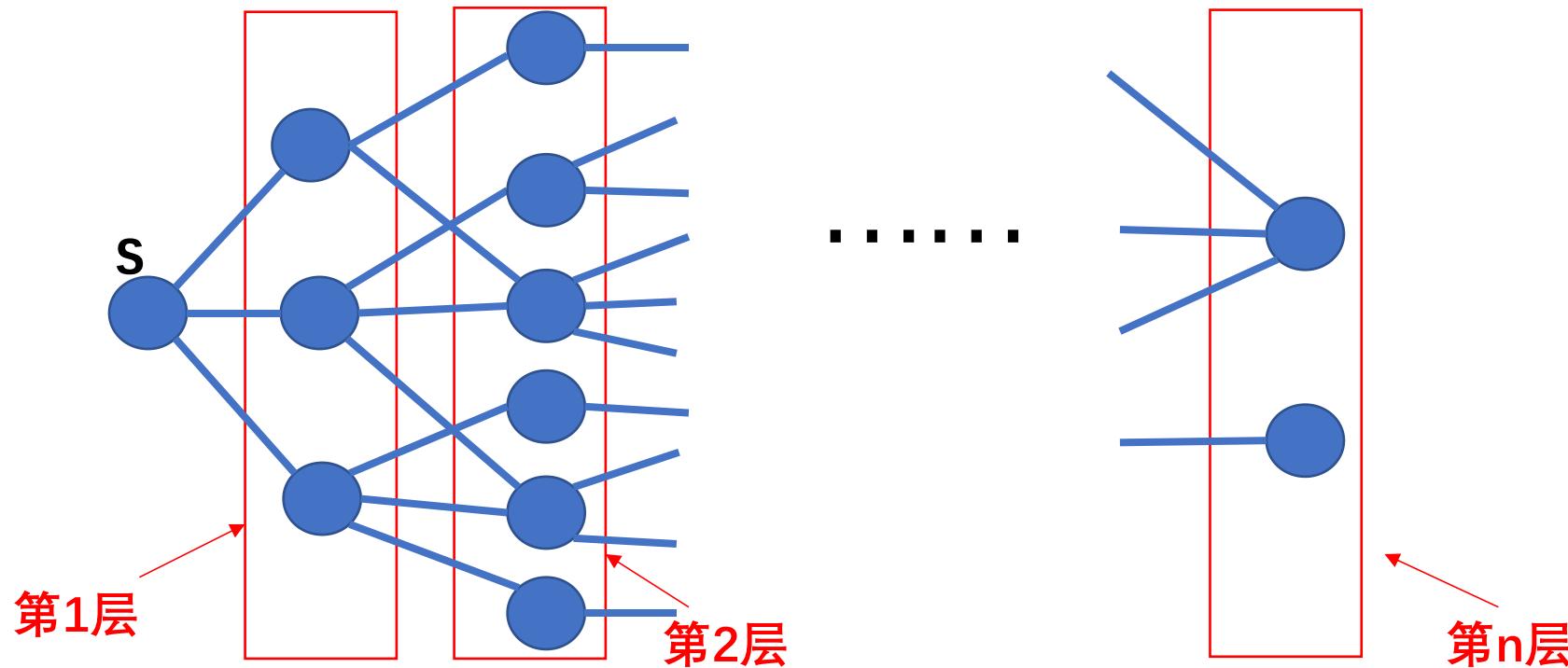
广度优先搜索（BFS,Breadth First Search），从初始点开始，逐层向前搜索，即第n层搜索未完成，不得进入下一层搜索。





广度优先搜索

广度优先搜索（BFS,Breadth First Search），从初始点开始，逐层向前搜索，即第n层搜索未完成，不得进入下一层搜索。



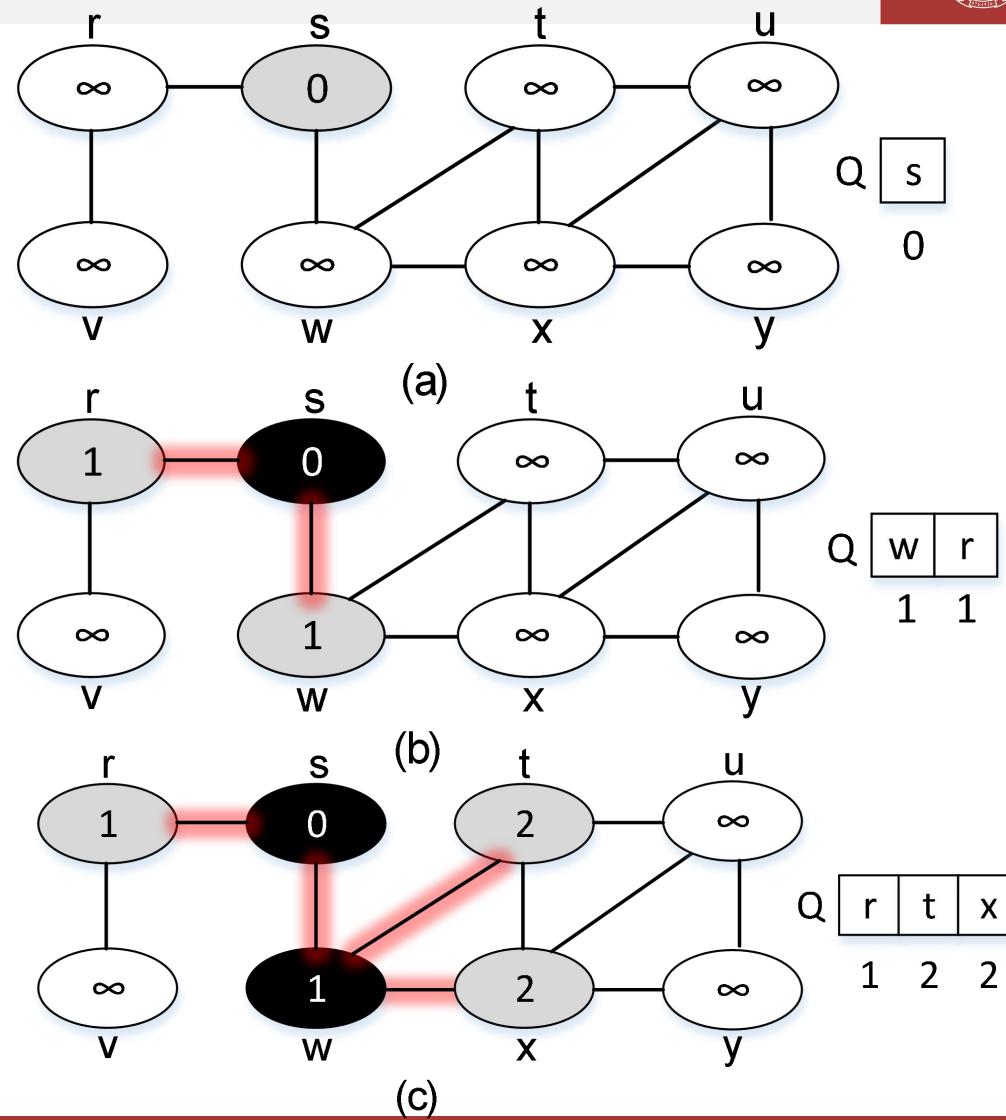


广度优先搜索-BFS实现过程

BFS(G, s)

```

1 for each vertex  $u \in G.V - \{s\}$ 
2    $u.color = WHITE$ 
3    $u.d = \infty$ 
4    $u.\pi = NIL$ 
5    $s.color = GRAY$ 
6    $s.d = 0$ 
7    $s.\pi = NIL$ 
8    $Q = \emptyset$ 
9   ENQUEUE( $Q, s$ )
10  While  $Q \neq \emptyset$ 
11     $u = DEQUEUE(Q)$ 
12    for each  $v \in G.Adj[u]$ 
13      if  $v.color == WHITE$ 
14         $v.color = GARY$ 
15         $v.d = u.d + 1$ 
16         $v.\pi = u$ 
17        ENQUEUE( $Q, v$ )
18     $u.color = BLACK$ 
```

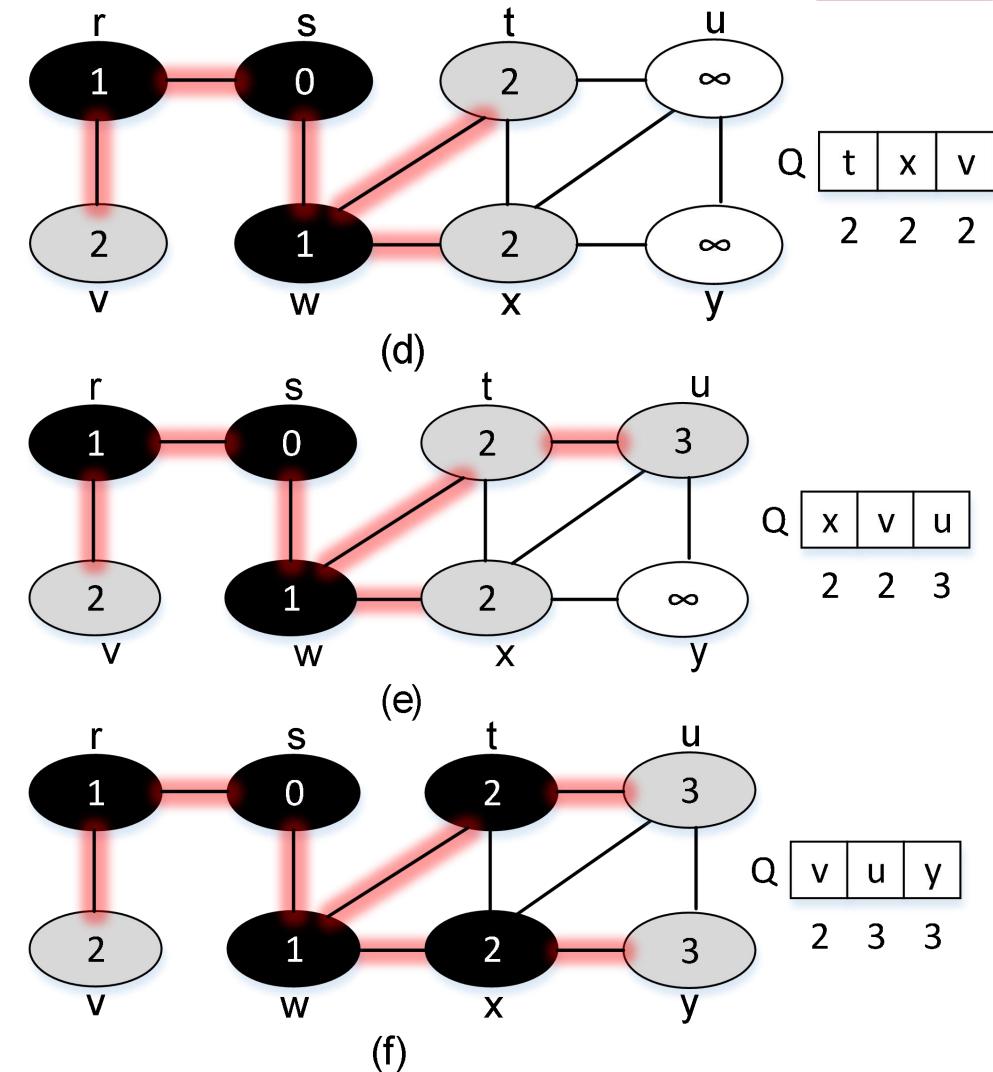




广度优先搜索-BFS实现过程

BFS(G, s)

```
1 for each vertex  $u \in G.V - \{s\}$ 
2    $u.color = WHITE$ 
3    $u.d = \infty$ 
4    $u.\pi = NIL$ 
5    $s.color = GRAY$ 
6    $s.d = 0$ 
7    $s.\pi = NIL$ 
8    $Q = \emptyset$ 
9   ENQUEUE( $Q, s$ )
10  While  $Q \neq \emptyset$ 
11     $u = DEQUEUE(Q)$ 
12    for each  $v \in G.Adj[u]$ 
13      if  $v.color == WHITE$ 
14         $v.color = GARY$ 
15         $v.d = u.d + 1$ 
16         $v.\pi = u$ 
17        ENQUEUE( $Q, v$ )
18     $u.color = BLACK$ 
```

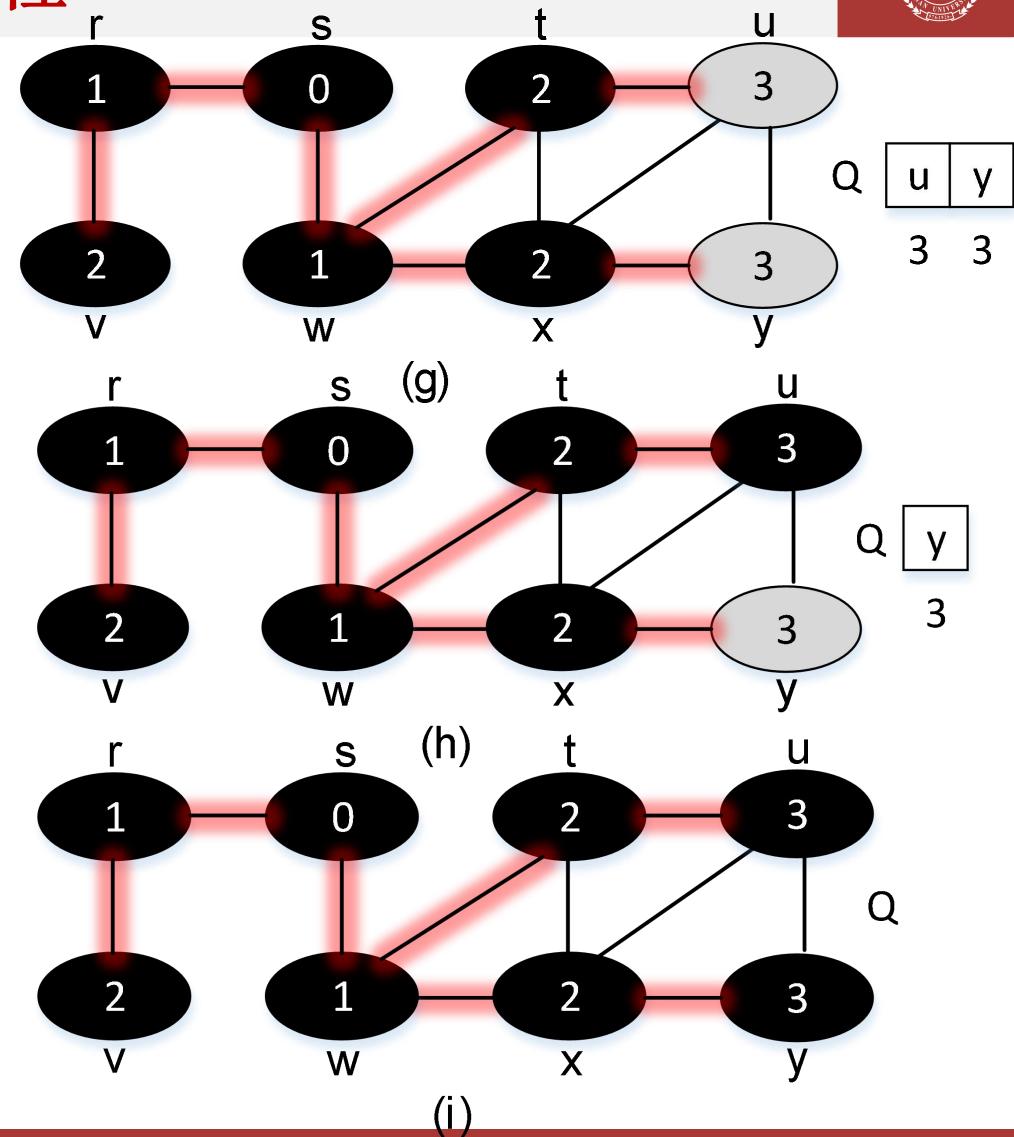




广度优先搜索-BFS实现过程

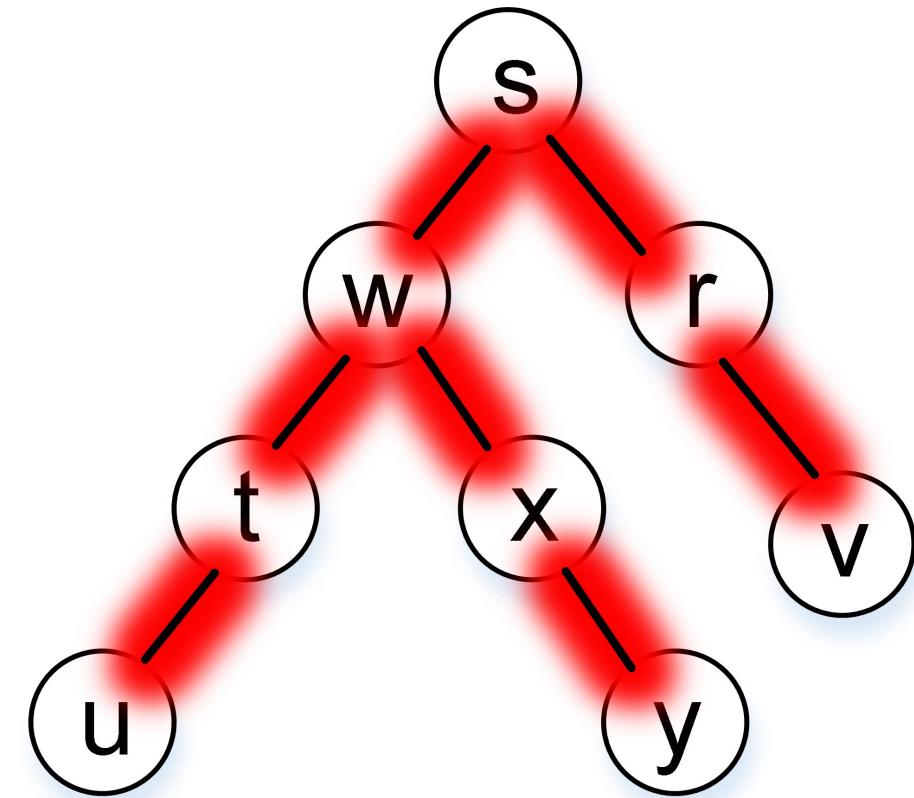
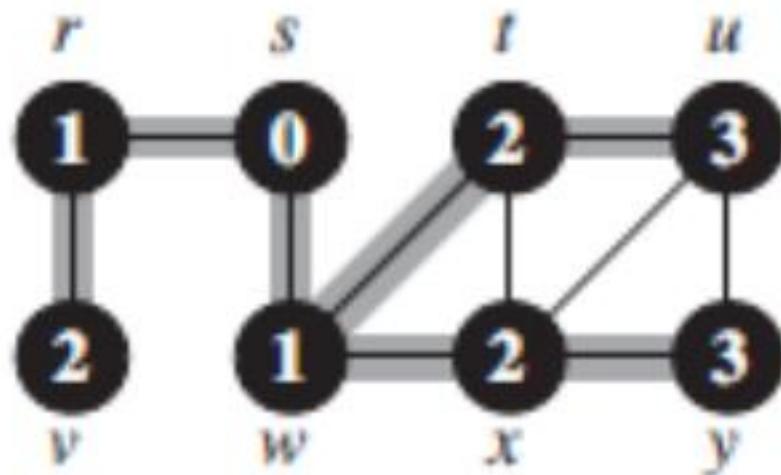
BFS(G, s)

```
1 for each vertex  $u \in G.V - \{s\}$ 
2    $u.color = \text{WHITE}$ 
3    $u.d = \infty$ 
4    $u.\pi = \text{NIL}$ 
5    $s.color = \text{GRAY}$ 
6    $s.d = 0$ 
7    $s.\pi = \text{NIL}$ 
8    $Q = \emptyset$ 
9   ENQUEUE( $Q, s$ )
10  While  $Q \neq \emptyset$ 
11     $u = \text{DEQUEUE}(Q)$ 
12    for each  $v \in G.\text{Adj}[u]$ 
13      if  $v.color == \text{WHITE}$ 
14         $v.color = \text{GARY}$ 
15         $v.d = u.d + 1$ 
16         $v.\pi = u$ 
17        ENQUEUE( $Q, v$ )
18     $u.color = \text{BLACK}$ 
```





广度优先搜索-广度优先树





广度优先搜索-BFS实现过程

BFS(G, s)

```
1 for each vertex  $u \in G.V - \{s\}$ 
2    $u.color = WHITE$ 
3    $u.d = \infty$ 
4    $u.\pi = NIL$ 
5    $s.color = GRAY$ 
6    $s.d = 0$ 
7    $s.\pi = NIL$ 
8    $Q = \emptyset$ 
9   ENQUEUE( $Q, s$ )
10  While  $Q \neq \emptyset$ 
11     $u = DEQUEUE(Q)$ 
12    for each  $v \in G.Adj[u]$ 
13      if  $v.color == WHITE$ 
14         $v.color = GARY$ 
15         $v.d = u.d + 1$ 
16         $v.\pi = u$ 
17        ENQUEUE( $Q, v$ )
18     $u.color = BLACK$ 
```

每个点在queue中最多出现一次

- 时间代价为 $O(|V|)$

邻接表Adj也只会被扫描一次

- 时间代价 $\sum_{v \in V} |Adj[v]| = O(|E|)$

总时间代价为 $O(|V|+|E|)$



广度优先搜索-最短路径 $\delta(s,v)$

可以证明，对于一个图 $G=(V,E)$ ，广度优先搜索算法可以得到从已知源结点 $s \in V$ 到每个可达结点的距离

引理1

设 $G=(V,E)$ 是一个有向图或无向图， $s \in V$ 为 G 的任意一个结点，则对任意边 $(u,v) \in E$ ， $\delta(s,v) \leq \delta(s,u)+1$

证明：如果从顶点 s 可达顶点 u ，则从 s 也可达 v 。在这种情况下从 s 到 v 的最短路径不可能比从 s 到 u 的最短路径加上边 (u,v) 更长，因此不等式成立；如果从 s 不可达顶点 u ，则 $\delta(s,v)=\infty$ ，不等式仍然成立。



广度优先搜索-最短路径 $\delta(s,v)$

下面我们首先证明 $v.d$ 是 $\delta(s,v)$ 的上界：

引理2

设 $G=(V,E)$ 是一个有向或无向图，并假设计算法BFS从 G 中一已知源结点 $s \in V$ 开始执行，在执行终止时，对每个顶点 $v \in V$ ，变量 $v.d$ 的值满足： $v.d \geq \delta(s,v)$ 。

证明：利用数学归纳法，对 s 到 v 的BFS路径长度 L 进行归纳

$L=0$ 时，只有 s 这个点 $L=0$ ，首先被放入queue，此时 $v.d=0$ ；

$L \leq n$ 时，假设所有点 v 都成立；当 $L=n+1$ 时，假设 s 到 v 路径为 $s e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n e_{n+1} v_{n+1}$ ，根据归纳假设 v_n 加入queue的时候 $v_n.d$ 等于或大于 n ，同时边 e_{n+1} 的存在保证了 v_{n+1} 加入的时候 $v_{n+1}.d = v_n.d + 1 \geq n + 1$



广度优先搜索-最短路径 $\delta(s,v)$

本引理的目的在于证明，队列中最多只有两个不同值

引理3

假设过程BFS在图 $G=(V,E)$ 之上的执行过程中，队列 Q 包含如下结点

$\langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$ ，其中 v_1 是队列 Q 的头， v_r 是队列的尾。那么 $v_r.d \leq v_1.d + 1$ 且

$v_i.d \leq v_{i+1}.d$, $i=1,2,\dots,r-1$ 。

证明：证明过程是对队列操作的次数进行归纳。初始时，队列仅包含顶点 s ，引理自然正确。下面进行归纳，我们必须证明在压入和弹出一个顶点后引理仍然成立。如果队列的头 v_1 被弹出队列，新的队头为 v_2 (如果此时队列为空，引理无疑成立)，所以有 $v_r.d \leq v_1.d + 1 \leq v_2.d + 1$ ，余下的不等式依然成立，因此 v_2 为队头时引理成立



广度优先搜索-最短路径 $\delta(s,v)$

上面引理证明了队列中 d 的值在不断增加，同时算法伪代码显示该算法每个点只会入队列一次

引理4

设 $G=(V,E)$ 是一个有向图或无向图，并假设过程BFS从 G 上某顶点 $s \in V$ 开始执行，则在执行过程中，BFS可以发现源结点 s 可达的每一个结点 $v \in V$ ，在运行终止时，对任意 $v \in V$, $v.d = \delta(s,v)$ 。此外，对任意从 s 可达的节点 $v \neq s$ ，从 s 到 v 的最短路径之一是从 s 到 v . π 的最短路径再加上边 (v, π, v) 。



广度优先搜索-最短路径 $\delta(s,v)$

引理4证明：

设反证，假设存在 v , $v.d$ 不等于 $\delta(s,v)$, 且 $\delta(s,v)$ 最小。显然, v 不是 s

根据引理2, $v.d \geq \delta(s,v)$, 于是 $v.d$ 大于 $\delta(s,v)$, 注意 v 必然可达, 否则 $\delta(s,v)$ 为无穷了, 那么 $v.d$ 不可能更大了

假设 u 是 s 到 v 最短路径上 v 前面一个点, 所以 $\delta(s,v)=\delta(s,u)+1$ 。同时, $\delta(s,v)$ 最小, 所以 $\delta(s,u)=u.d$ 。于是, 我们有 $v.d > \delta(s,v) = \delta(s,u)+1 = u.d+1$ 。

这个不可能的。



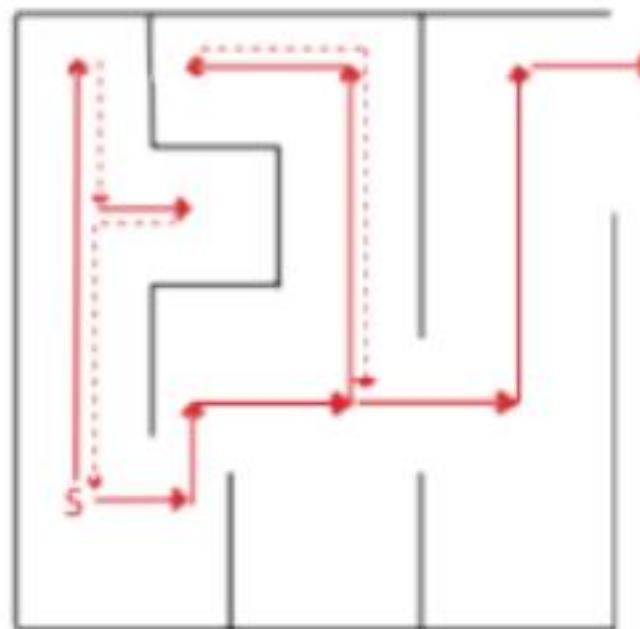
目录

- 第一节 图的基本概念
- 第二节 广度优先搜索
- 第三节 深度优先搜索
- 第四节 深度优先搜索应用



深度优先搜索

深度优先搜索（Depth First Search），从初始点开始，对每一个可能的分支路径深入到不能再深入为止，而且每个节点只能访问一次。





深度优先搜索

- 令 $G=(V, E)$ 是一个有向图或无向图， 搜索时沿着树的深度遍历树的结点， 尽可能深的搜索树的分支。
- 当结点 u 的所有边都已被搜索过， 搜索将回溯到发现结点 u 的那条边的起始结点。这一过程一直进行到已发现从源结点可达的所有结点为止。
- 如果还存在未被发现的结点，则选择其中一个作为源结点并重复以上过程， 整个进程反复进行直到所有结点都被访问为止。



算法伪代码

DFS(V, Adj, s)

```
1 level = {s:0}; parent = {s: None};  
2 stack=[s];  
3 while stack  
4     cur = stack[len(stack)-1]; tag = 0;  
5     for v in Adj[cur]  
6         if v not in level #not yet seen  
7             level[v] = level[cur] + 1; parent[v] = cur; stack.append(v); tag = 1  
8         if tag == 0  
9             stack.pop();
```



深度优先搜索-DFS实现过程：递归

DFS(G)

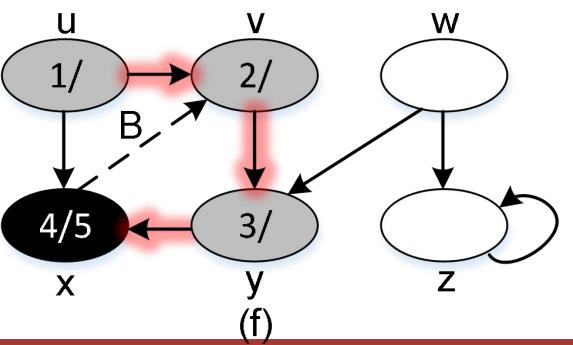
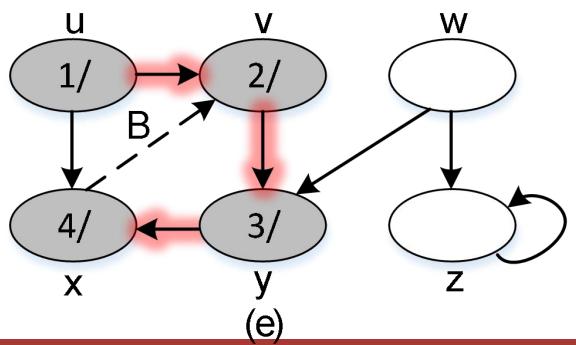
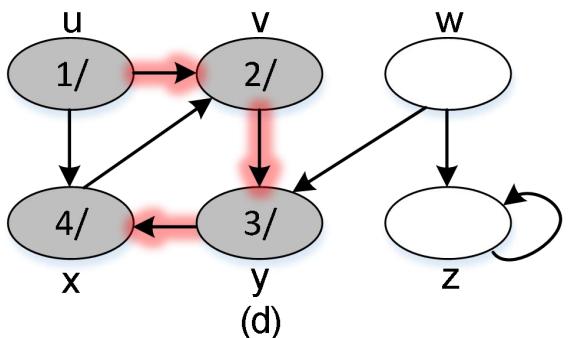
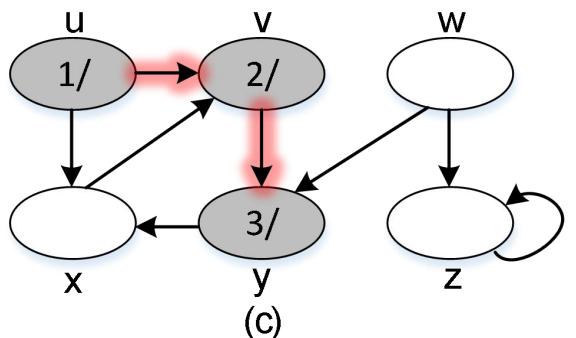
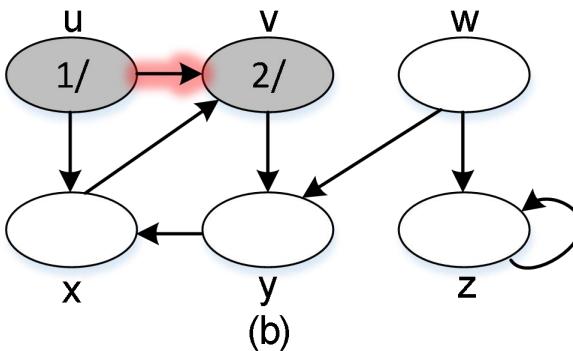
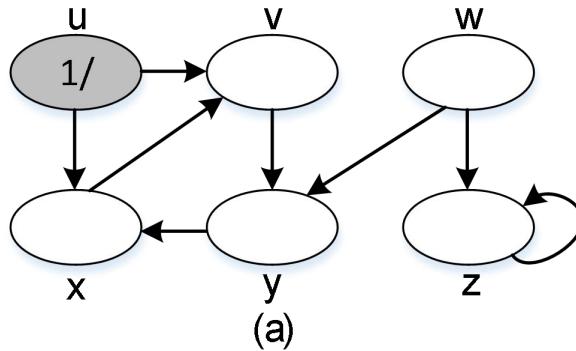
- 1 for each vertex $u \in G.V$
- 2 $u.color = \text{WHITE}$
- 3 $u.\pi = \text{NIL}$
- 4 $\text{time} = 0$
- 5 for each vertex $u \in G.V$
- 6 if $u.color == \text{WHITE}$
- 7 DFS-Visit(G, u)

DFS-Visit(G, u)

- 1 $\text{time} = \text{time} + 1$
- 2 $u.d = \text{time}$
- 3 $u.color = \text{GRAY}$
- 4 for each $v \in G.\text{Adj}[u]$
- 5 if $v.color == \text{WHITE}$
- 6 $v.\pi = u$
- 7 DFS-Visit(G, v)
- 8 $u.color = \text{BLACK}$
- 9 $\text{time} = \text{time} + 1$
- 10 $u.f = \text{time}$

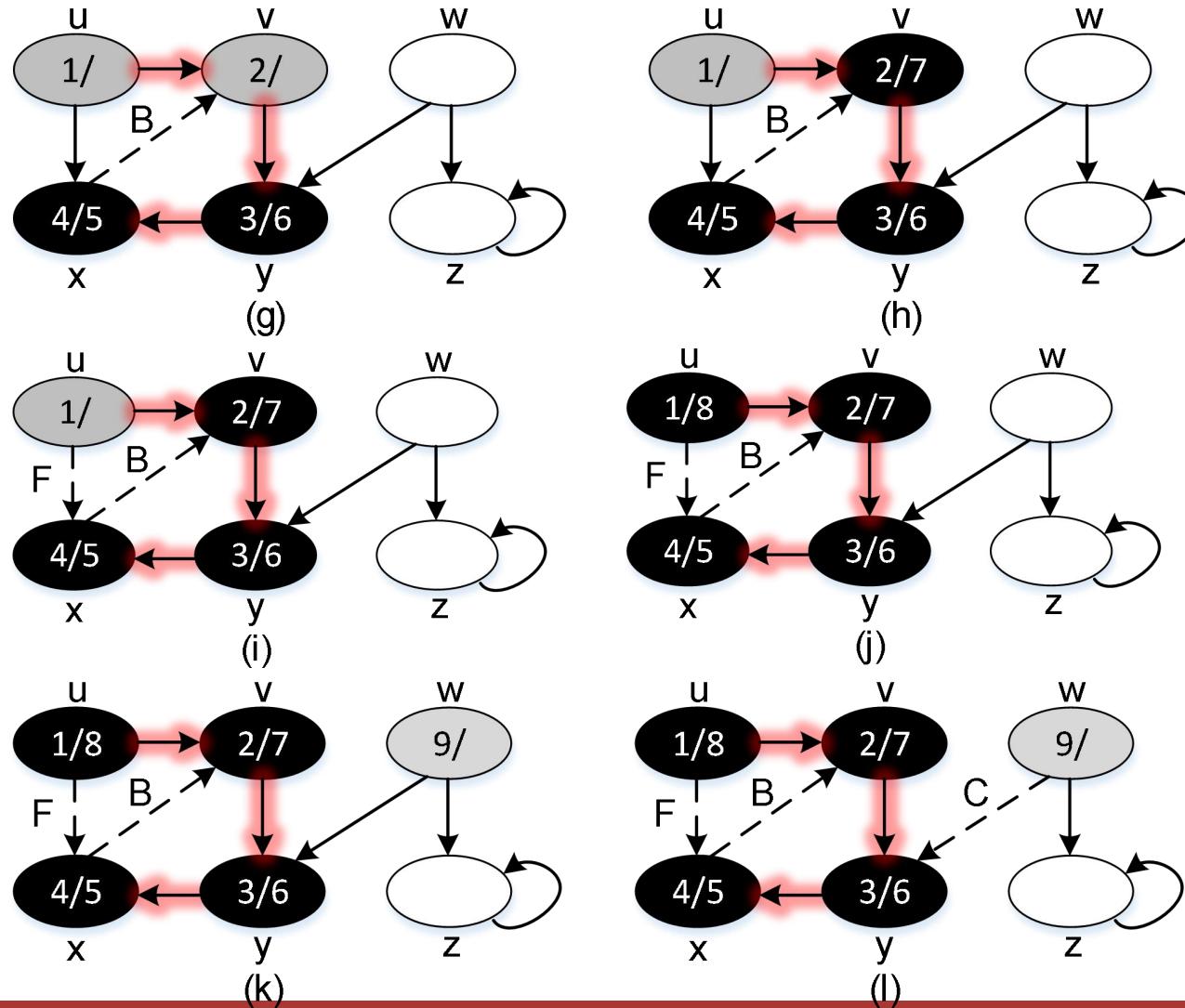


深度优先搜索-DFS实现过程：递归





深度优先搜索-DFS实现过程：递归





深度优先搜索-DFS实现过程：递归

DFS(G)

1 for each vertex $u \in G.V$

2 $u.color = \text{WHITE}$

3 $u.\pi = \text{NIL}$

4 $\text{time} = 0$

5 for each vertex $u \in G.V$

6 if $u.color == \text{WHITE}$

7 DFS-Visit(G, u)

DFS-Visit(G, u)

1 $\text{time} = \text{time} + 1$

2 $u.d = \text{time}$

3 $u.color = \text{GRAY}$

4 for each $v \in G.\text{Adj}[u]$

5 if $v.color == \text{WHITE}$

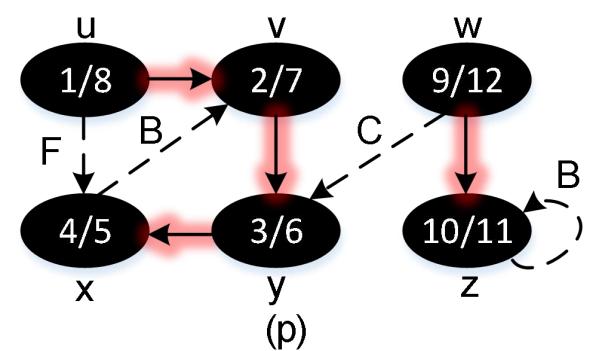
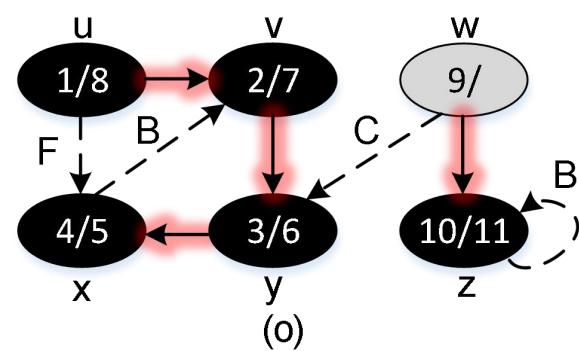
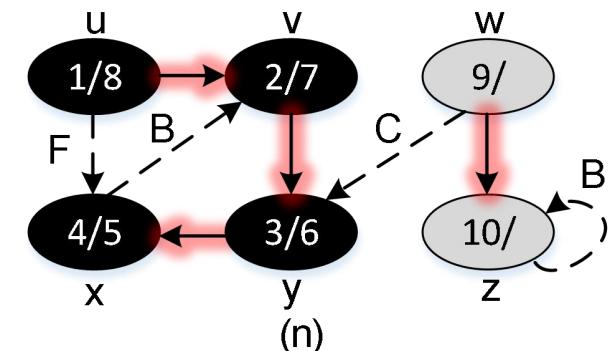
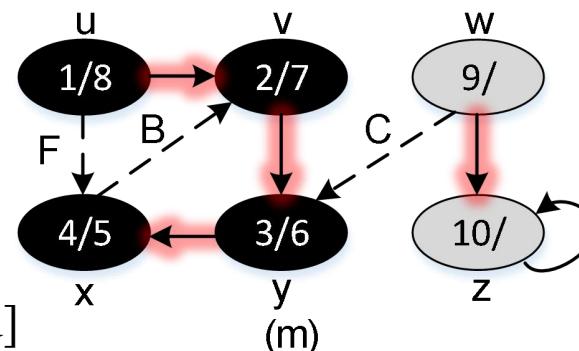
6 $v.\pi = u$

7 DFS-Visit(G, v)

8 $u.color = \text{BLACK}$

9 $\text{time} = \text{time} + 1$

10 $u.f = \text{time}$





深度优先搜索-DFS实现过程：递归

DFS(G)

```
1 for each vertex u ∈ G.V  
2     u.color = WHITE  
3     u.π = NIL  
4     time = 0  
5 for each vertex u ∈ G.V  
6     if u.color == WHITE  
7         DFS-Visit(G,u)
```

$$\sum_{v \in V} |Adj[v]| = \theta(E)$$

第1-3行和5-7行的循环占用时间为 $O(V)$

DFS_Visit(v)第4-7行的循环要执行 $|Adj[v]|$ 次

DFS-Visit(G,u)

```
1 time = time + 1  
2 u.d = time  
3 u.color = GRAY  
4 for each v ∈ G.Adj[u]  
5     if v.color == WHITE  
6         v.π = u  
7         DFS-Visit(G,v)  
8     u.color = BLACK  
9     time = time + 1  
10    u.f = time
```

DFS_Visit中第4-7行语句占用的整个时间应为 $\theta(E)$

DFS的运行时间为 $\theta(V+E)$



深度优先搜索-DFS实现：栈

代码解

1. 栈初始化；
2. 输出起始顶点；起始顶点改为“已访问”标志；将起始顶点进栈；
3. 重复下列操作直到栈为空：
 - 3.1 取栈顶元素顶点；（注意不出栈）
 - 3.2 栈顶元素顶点存在未被访问过的邻接点 w，则
 - 3.2.1 输出顶点 w
 - 3.2.2 将顶点 w 改为“已访问”标志；
 - 3.2.3 将顶点 w 进栈；
 - 3.3 否则，当前顶点退栈；



BFS vs DFS

相似点

都维护了一个任务列表来不断
地插入和推出未处理的点

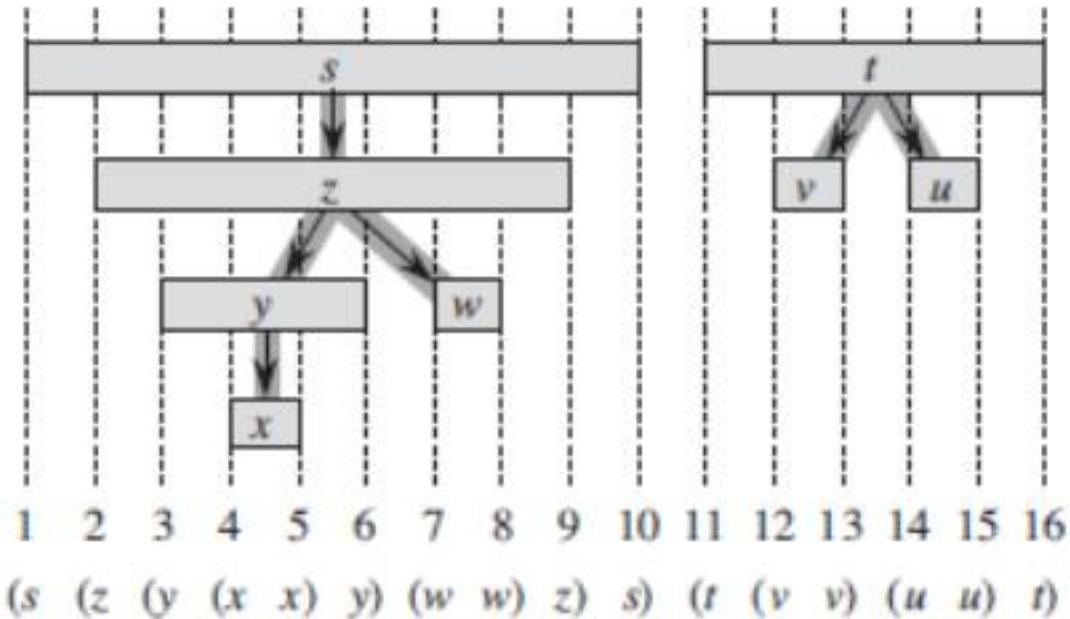
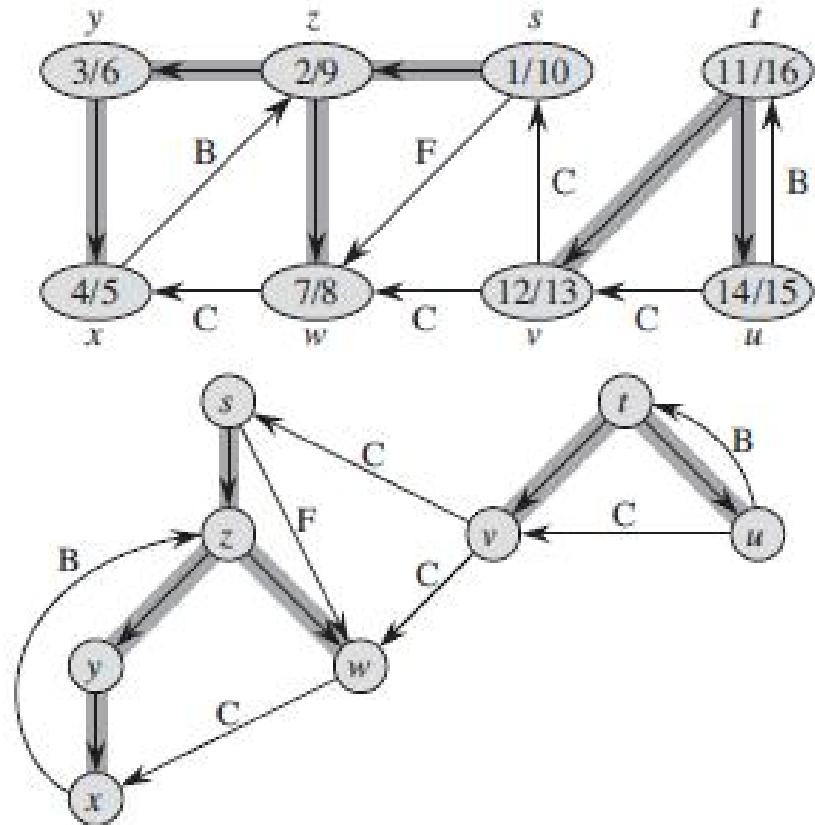
不同点

BFS使用队列；DFS使用栈
BFS按层遍历图；DFS贪心地
搜索

深度优先搜索-性质



从不同的点出发或者沿着不同点深优，会得到不同深度优先搜索森林。



每个连通分支对应一棵树。

强连通，只有一个连通分支，深度优先搜索森林中只有一棵树，弱连通则多棵树。



深度优先搜索-性质

注意：有向图中，沿不同的点出发或者沿着不同点深优，会得到不同深度优先搜索森林。如果是强连通，则都只有一棵树。如果是弱连通，则不同的点出发或者沿着不同点深优，得到深度优先搜索森林中树的个数可能不同。

注意：无向图中，沿不同的点出发或者沿着不同点深优，会得到不同深度优先搜索森林。

练习：无向图中，沿不同的点出发或者沿着不同点深优，会得到不同深度优先搜索森林，那森林中含有树的数量相同吗？



深度优先搜索-性质

定理1 括号定理

在对有向图或无向图 $G=(V,E)$ 的任何深度优先搜索中，对于图中任意两结点 u 和 v ，下述三个条件中有且仅有一条成立：

- 区间 $[u.d, u.f]$ 和区间 $[v.d, v.f]$ 完全分离，在深度优先森林中，结点 u 不是结点 v 的后代，结点 v 也不是 u 的后代；
- 区间 $[u.d, u.f]$ 完全包含于区间 $[v.d, v.f]$ 中，在深度优先树中 u 是 v 的后代；
- 区间 $[v.d, v.f]$ 完全包含于区间 $[u.d, u.f]$ 中，在深度优先树中 u 是 v 的祖先。



括号定理证明

证明: 先讨论 $u.d < v.d$ 的情形, 根据 $v.d$ 是否小于 $u.d$ 又可分为两种情况: 第一种情况, 若 $v.d < u.f$, 这样 v 已被发现时 u 结点依然是灰色, 这就说明 v 是 u 的后裔, 再者, 因为结点 v 比 u 发现得较晚, 所以在搜索返回结点 u 并完成之前, 所有从 v 出发的边都已被探寻并已完成, 所以在这种条件下区间 $[v.d, v.f]$ 必然完全包含于区间 $[u.d, u.f]$ 。第二种情况, 若 $u.f < v.d$, 则根据不等式(1), 区间 $[u.d, u.f]$ 和区间 $[v.d, v.f]$ 必然分离的。对于 $v.d < u.d$ 的情形类似可证, 只要把上述证明中 u 和 v 对调即可。

深度优先搜索-性质



推论1 后代区间的嵌套

在有向或无向图G的深度优先森林中，结点v是结点u的后裔当且仅当
 $u.d < v.d < v.f < u.f$ 。



深度优先搜索-性质

定理2 白色路径定理

在一个有向或无向图 $G=(V,E)$ 的深度优先森林中，结点 v 是结点 u 的后代当且仅当在搜索发现 u 的时刻 $u.d$ ，从结点 u 出发经一条仅由白色结点组成的路径可达 v 。



白色路径定理证明

证明：

→：假设 v 是 u 的后裔， w 是深度优先树中 u 和 v 之间的通路上的任意结点，则 w 必然是 u 的后裔，由推论1可知 $u.d < w.d$ ，因此在时刻 $u.d$ ， w 应为白色。

←：设在时刻 $u.d$ ，从 u 到 v 有一条仅由白色结点组成的通路，但在深度优先树中 v 还没有成为 u 的后裔。不失一般性，我们假定该通路上的其他顶点都是 u 的后裔(否则可设 v 是该通路中最接近 u 的结点，且不为 u 的后裔)，设 w 为该通路上 v 的祖先，使 w 是 u 的后裔(实际上 w 和 u 可以是同一个结点)。根据推论1得 $w.f \leq u.f$ ，因为 $v \in \text{Adj}[w]$ ，对 $\text{DFS_Visit}(w)$ 的调用保证完成 w 之前先完成 v ，因此 $v.f < w.f \leq u.f$ 。因为在时刻 $u.d$ 结点 v 为白色，所以有 $u.d < v.d$ 。由推论1可知在深度优先树中 v 必然是 u 的后裔。(证毕)



目录

- 第一节 图的基本概念
- 第二节 广度优先搜索
- 第三节 深度优先搜索
- 第四节 深度优先搜索应用



拓扑排序

设 $G=(V, E)$ 是一个具有 n 个顶点的有向无环图， V 中顶点序列 v_1, v_2, \dots, v_n 称为一个**拓扑序列**，当且仅当该顶点序列满足下列条件：

若 $\langle i, j \rangle$ 是图中的边（或从顶点 $i \Rightarrow j$ 有一条路径）：



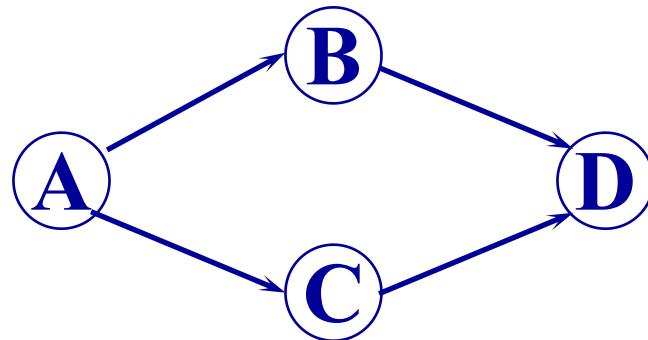
则在拓扑序列中顶点 \$i\$ 必须排在顶点 \$j\$ 之前。

在一个有向图中找一个拓扑序列的过程称为拓扑排序。

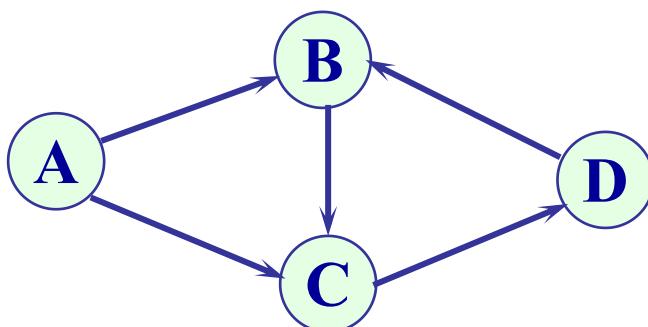


拓扑排序

有向无环图(DAG: Directed Acyclic Graph)



可求得拓扑有序序列: A B C D 或 A C B D



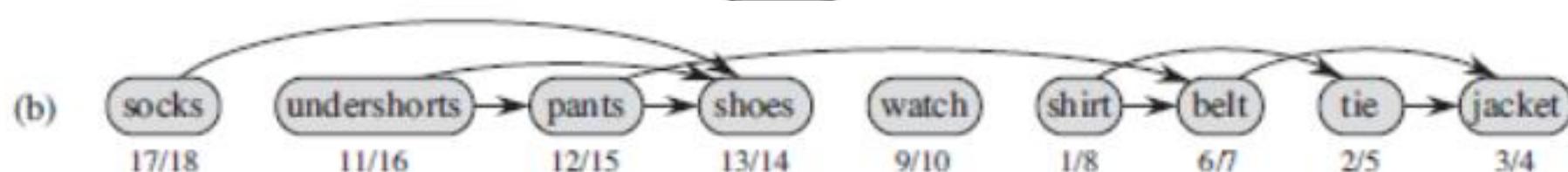
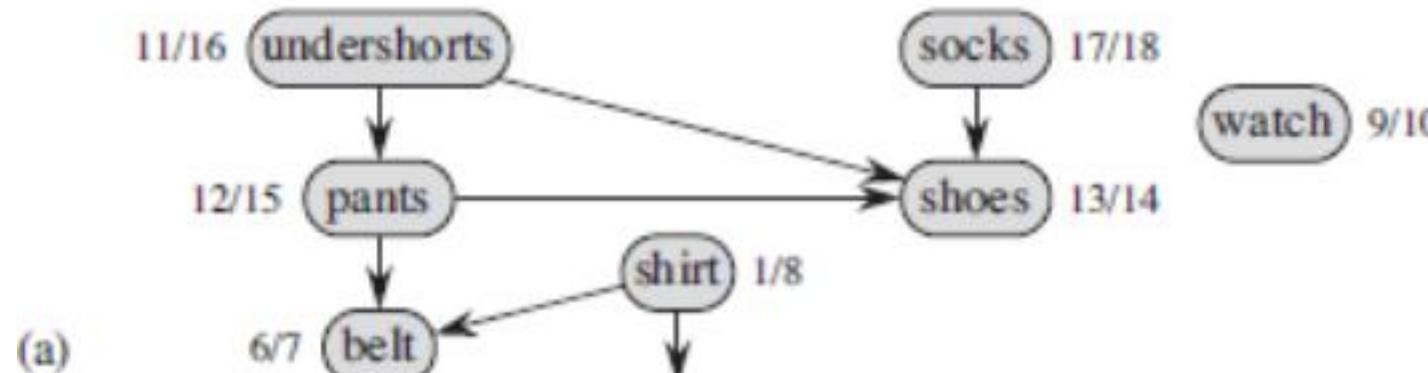
不能求得它的拓扑有序序列。

因为存在回路 {B, C, D}



拓扑排序

对于有向无环图 $G=(V,E)$ ，其拓扑排序是 G 中所有结点的一种线性次序，该次序满足如下条件：如果 G 包含边 (u, v) ，则结点 u 在拓扑排序中处于结点 v 的前面。





拓扑排序

例如，计算机专业的学生必须完成一系列规定的课程才能毕业，假设这些课程的名称与相应代号有如下关系：

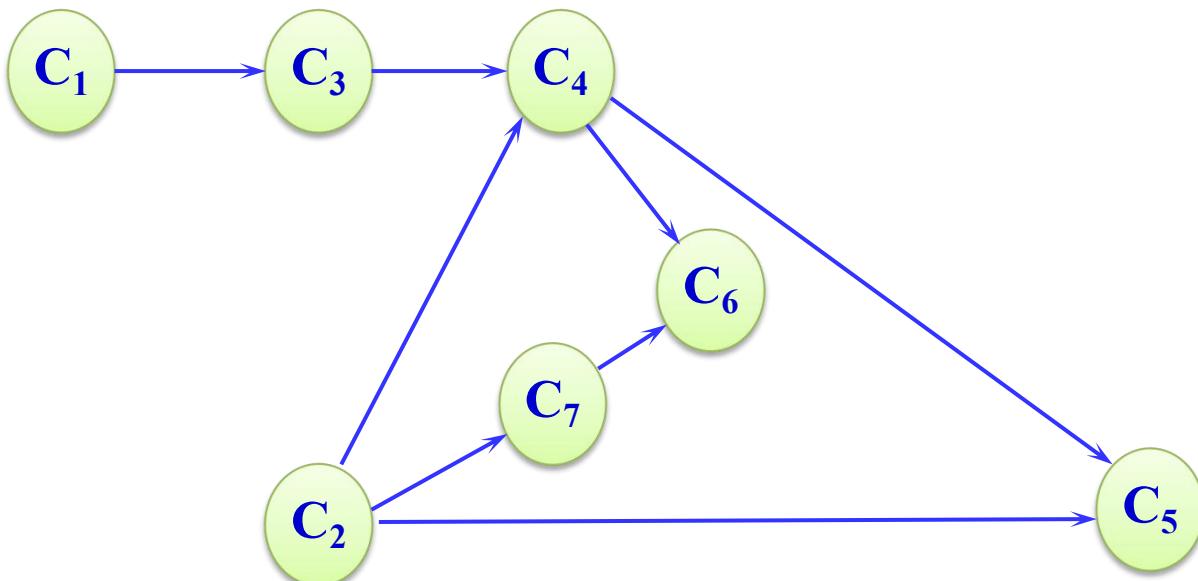
课程代号	课程名称	先修课程
C ₁	高等数学	无
C ₂	程序设计	无
C ₃	离散数学	C ₁
C ₄	数据结构	C ₂ , C ₃
C ₅	编译原理	C ₂ , C ₄
C ₆	操作系统	C ₄ , C ₇
C ₇	计算机组成原理	C ₂

拓扑排序



课程之间的先后关系可用有向图表示：

可以这样排课：



- C₁-C₃-C₂-C₄-C₇-C₆-C₅
● C₂-C₇-C₁-C₃-C₄-C₅-C₆

↓ 第1学期 ↓ 第2学期



拓扑排序

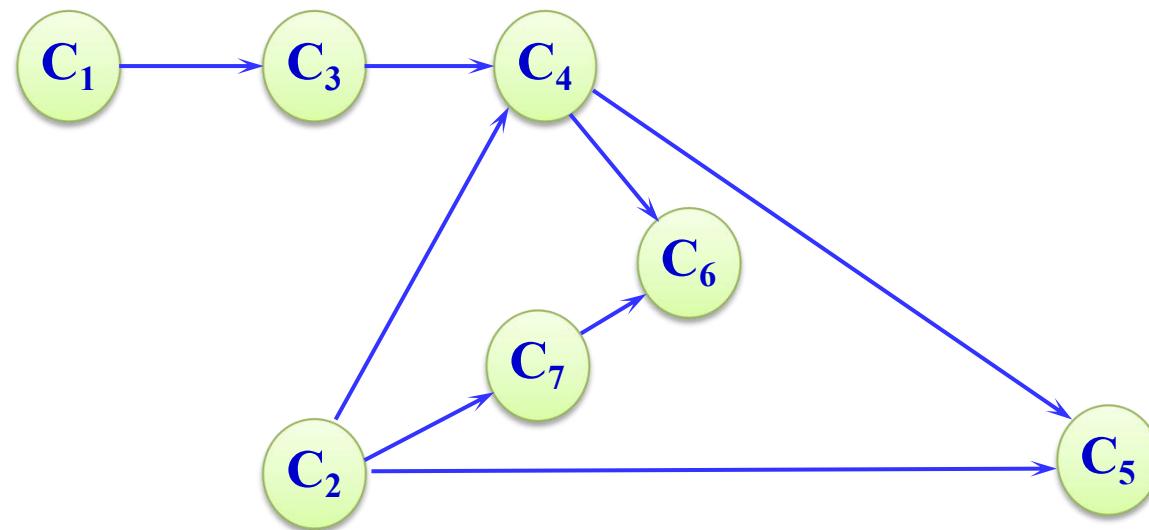
拓扑排序方法1：根据结点入度

- (1) 从有向图中选择一个没有前驱（即入度为0）的顶点并且输出它。
- (2) 从图中删去该顶点，并且删去从该顶点发出的全部有向边。
- (3) 重复上述两步，直到剩余的图中不再存在没有前驱的顶点为止。



拓扑排序

拓扑排序方法1演示



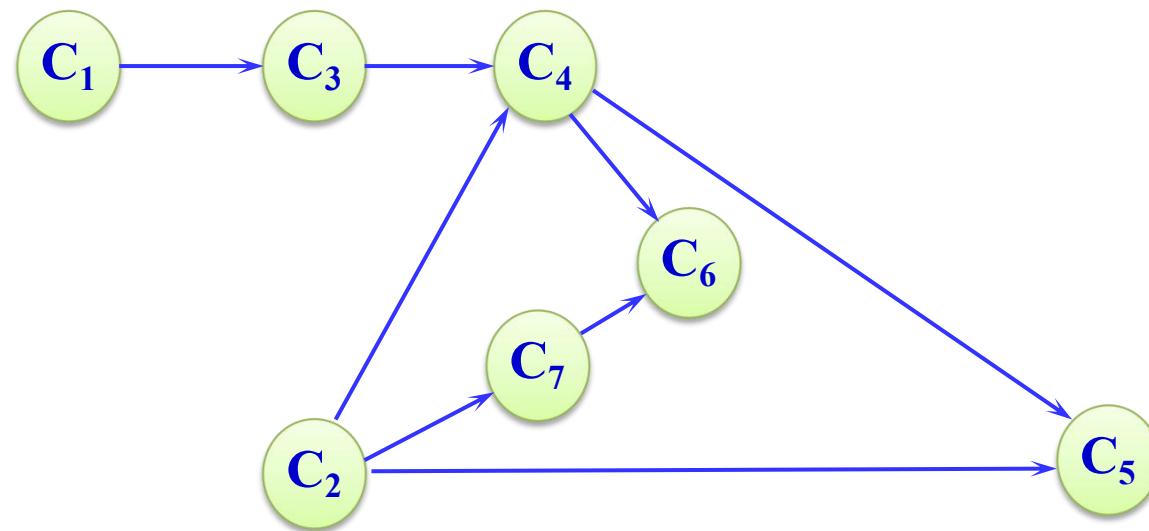
产生一个拓扑序列: C₁ C₂ C₃ C₄ C₅ C₇ C₆

排序完成



拓扑排序

拓扑排序方法1演示

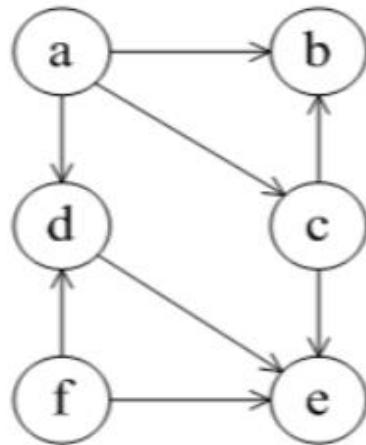


产生一个拓扑序列: C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_7 C_6

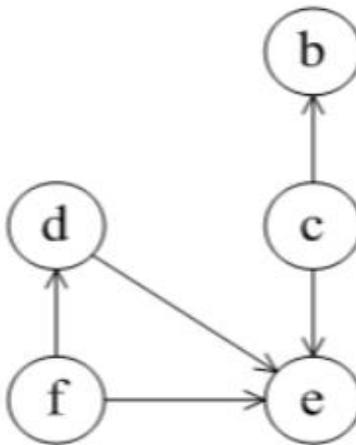
排序完成



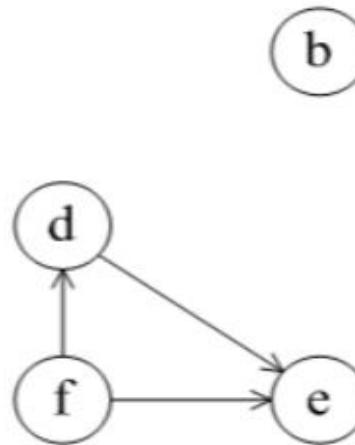
拓扑排序方法1 演示



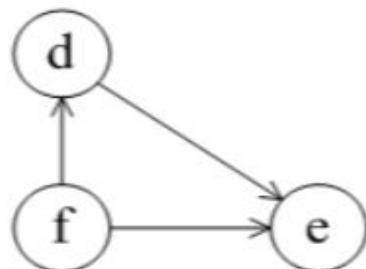
(a)图



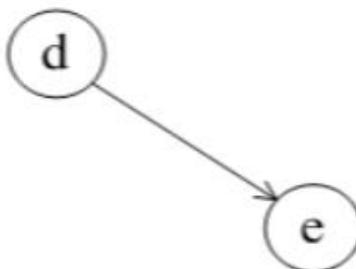
(b)输出a



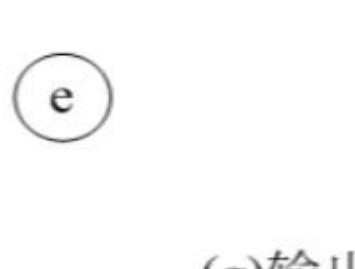
(c)输出c



(d)输出b



(e)输出f



(f)输出d
(g)输出e

拓扑排序序列： acbfde



拓扑排序方法2：基于DFS

DFS(G)

```
1 for each vertex u ∈ G.V  
2   u.color = WHITE  
3   u.π = NIL  
4 time = 0  
5 for each vertex u ∈ G.V  
6   if u.color == WHITE  
7     DFS-Visit(G,u)
```

DFS-Visit(G,u)

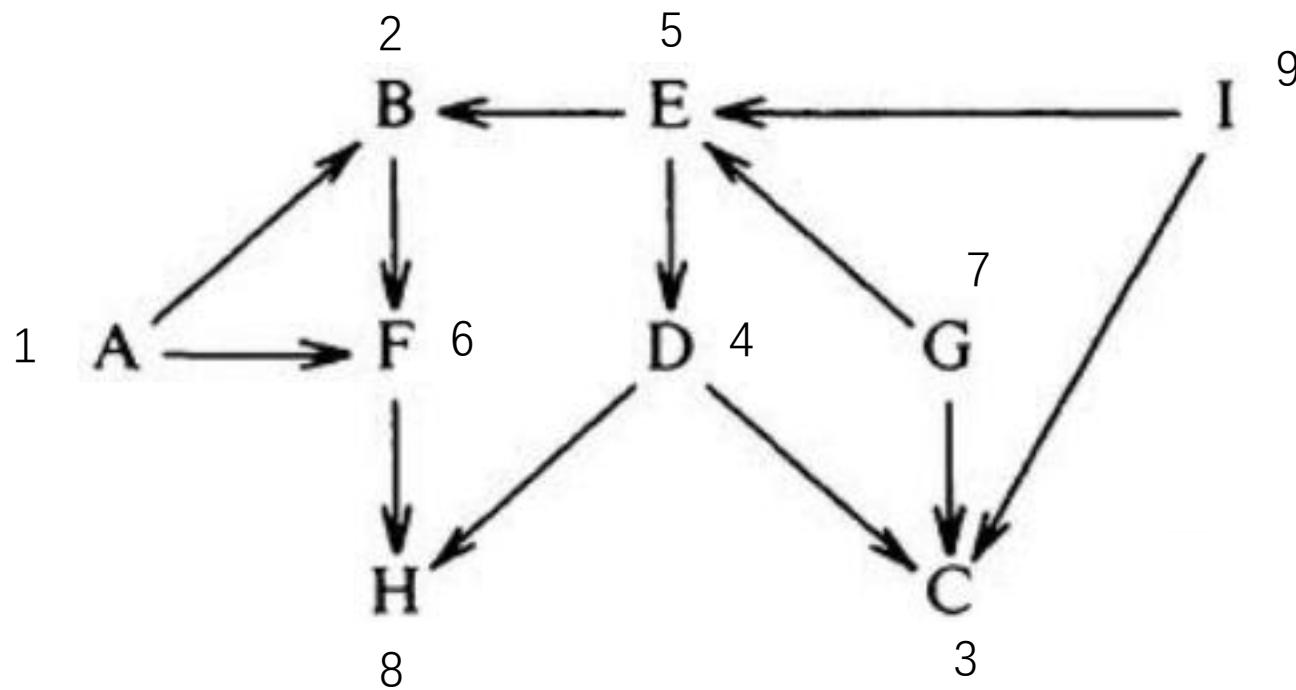
```
1 time = time + 1  
2   u.d = time  
3   u.color = GRAY  
4   for each v ∈ G.Adj[u]  
5     if v.color == WHITE  
6       v.π = u  
7       DFS-Visit(G,v)  
8   u.color = BLACK  
9   time = time + 1  
10  u.f = time
```

TOPOLOGICAL-SORT(G)

```
1 call DFS(G) to compute finishing  
times v.f for each vertex v  
2 as each vertex is finished,insert it  
onto the front of a linked list  
3 return the linked list of vertices
```



拓扑排序方法2：基于DFS





拓扑排序

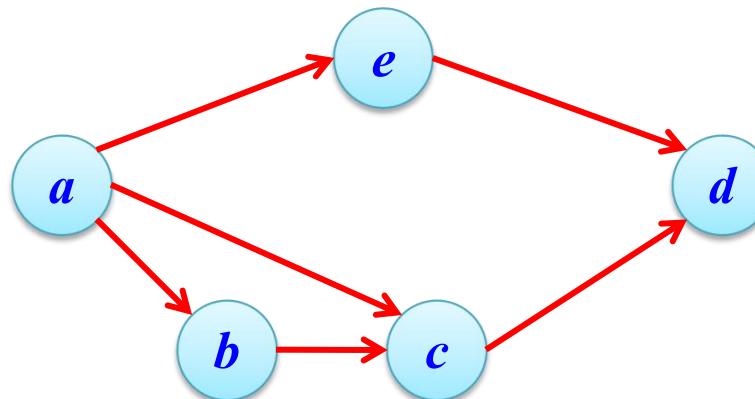
【练习】对如图所示的图进行拓扑排序，可以得到不同的拓扑序列个数是_____。

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1





拓扑排序

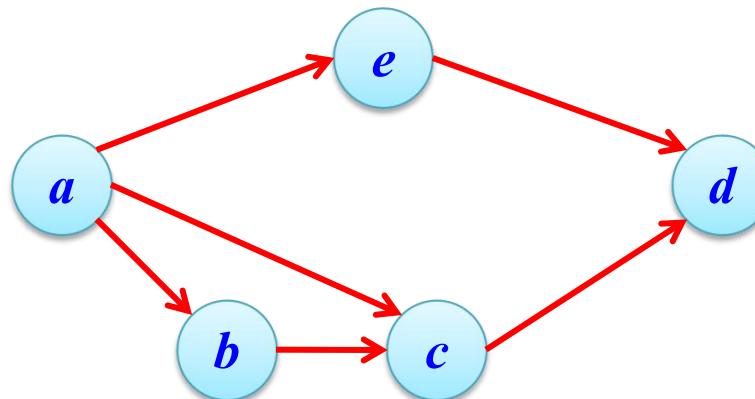
【练习】对如图所示的图进行拓扑排序，可以得到不同的拓扑序列个数是_____。

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1



解：不同的拓扑序列有：*aebcd*、*abecd*、*abced*。答案为B。

XPath查询处理



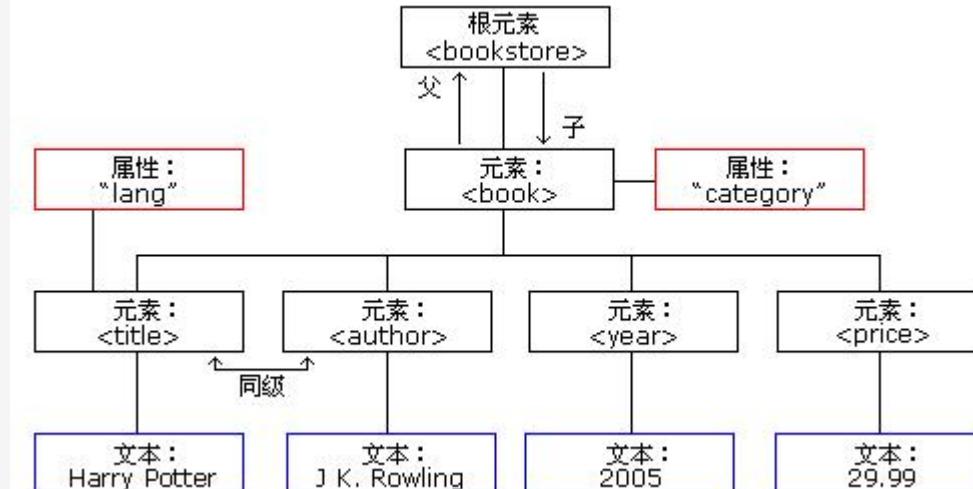
Nicolas Bruno, Nick Koudas, Divesh Srivastava. Holistic twig joins:
optimal XML pattern matching. SIGMOD Conference 2002: 310-
321



XPath查询处理

XML文档树示例

```
<bookstore>
  <book category="COOKING">
    <title lang="en">Everyday Italian</title>
    <author>Giada De Laurentiis</author>
    <year>2005</year>
    <price>30.00</price>
  </book>
  <book category="CHILDREN">
    <title lang="en">Harry Potter</title>
    <author>J. K. Rowling</author>
    <year>2005</year>
    <price>29.99</price>
  </book>
  <book category="WEB">
    <title lang="en">Learning XML</title>
    <author>Erik T. Ray</author>
    <year>2003</year>
    <price>39.95</price>
  </book>
</bookstore>
```





XPath 简介

XPath 是一门在 XML 文档中查找信息的语言。XPath 用于在 XML 文档中通过元素和属性进行导航。

Xpath查询: //a//b//c

➤Xpath查询的路径表示:

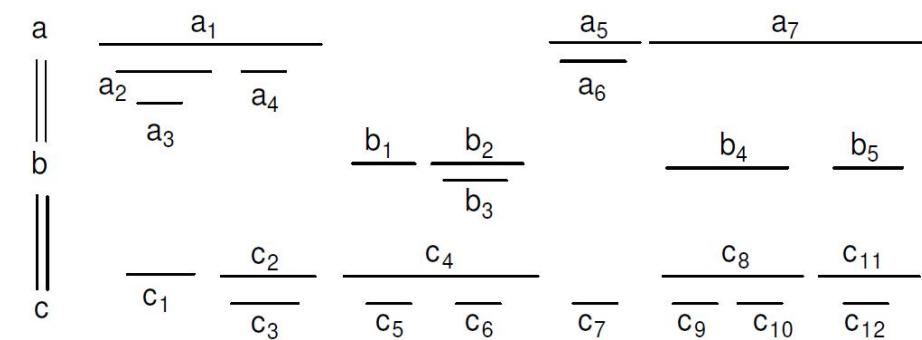
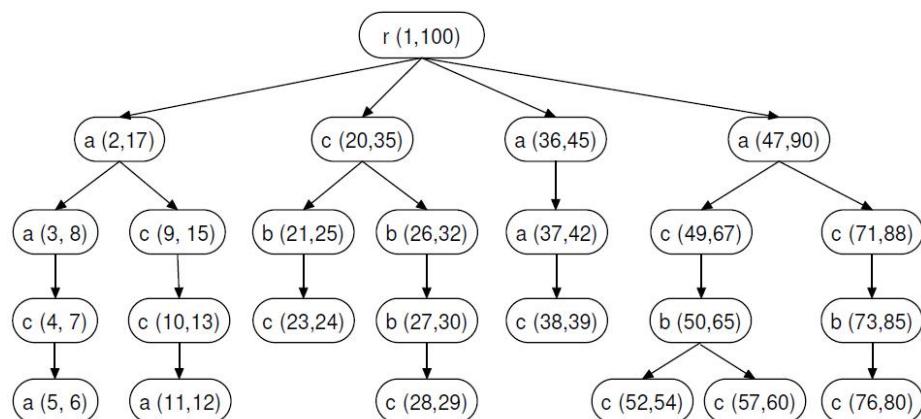
a
||
b
||
c



XPath查询处理

DFS编码

每个查询点的候选流（按照**发现时间**排序）、针对每个查询变量的栈





湖南大學
HUNAN UNIVERSITY

感谢观赏

—— 实事求是 敢为人先 ——