计算复杂度理论
Computation Complexity

湖南大学信息科学与工程学院

提 纲

11.1 图灵机的思想与模型简介

图灵是谁？　图灵及其贡献

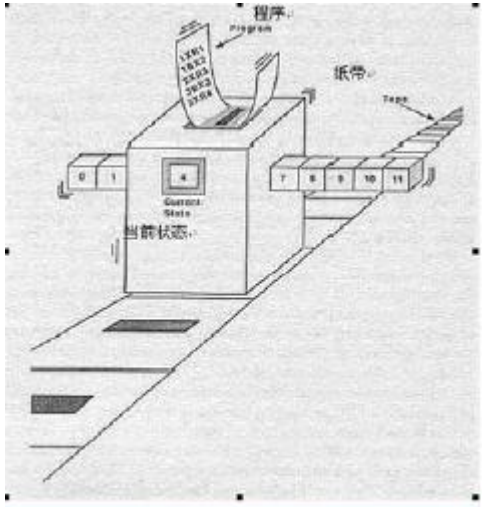
◆图灵(Alan Turing, 1912~1954)，出生于英国伦敦，19 岁入剑桥皇家学院，22 岁当选为皇家学会会员。

◆1937 年，发表了论文《论可计算数及其在判定问题中的应用》，提出了**图灵机模型**，后来，冯·诺依曼根据这个模型设计出历史上第一台电子计算机。

◆1950 年，发表了划时代的文章：《机器能思考吗?》,成为了人工智能的开山之作。

◆计算机界于1966年设立了最高荣誉奖：**ACM 图灵奖**。

你能查阅一下哪些人获得图灵奖了吗？因为什么贡献而获奖呢？

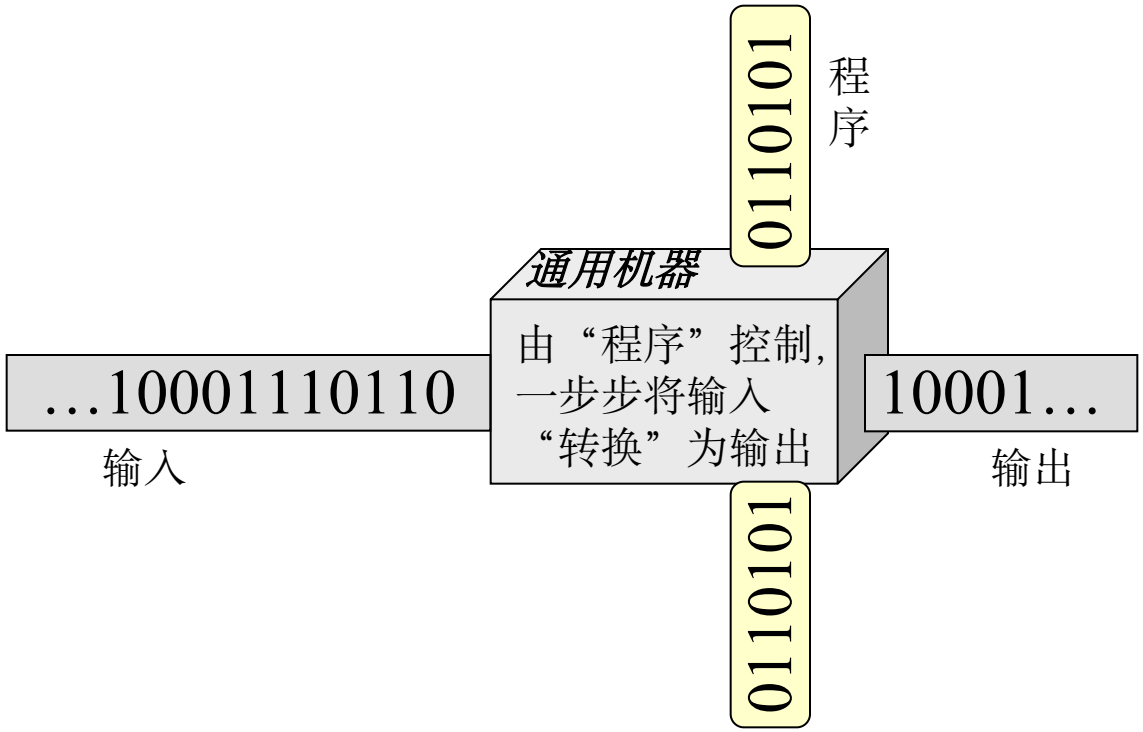


图灵机装置示意图

11.1 图灵机的思想与模型简介

图灵认为什么是计算？ 计算

◆所谓**计算**就是计算者(人或机器)对一条两端可无限延长的纸带上的一串0或1，执行指令一步一步地改变纸带上的0或1，经过有限步骤最后得到一个满足预先规定的符号串的**变换过程**。



11.1 图灵机的思想与模型简介

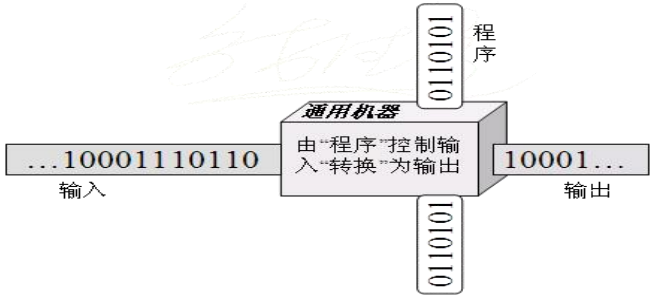
图灵机的思想

是关于数据、指令、程序及程序/指令自动执行的基本思想。

- 输入被制成一串0和1的纸带，送入机器中----数据。如000100001000011…
- 机器可对输入纸带执行的基本动作包括：“翻转0为1”，或“翻转1为0”,“前移一位”,“停止”。
- 对基本动作的控制----指令，机器是按照指令的控制选择执行哪一个动作，指令也可以用0和1来表示：**01**表示“翻转0为1”(当输入为1时不变)，**10**表示“翻转1为0”(当输入0时不变)，**11**表示“前移一位”，**00**表示“停止”。
- 输入如何变为输出的控制可以用指令编写一个程序来完成，如:

01111011011011100…

- 机器能够读取程序，按程序中的指令顺序读取指令，读一条指令执行一条指令。由此实现自动计算。

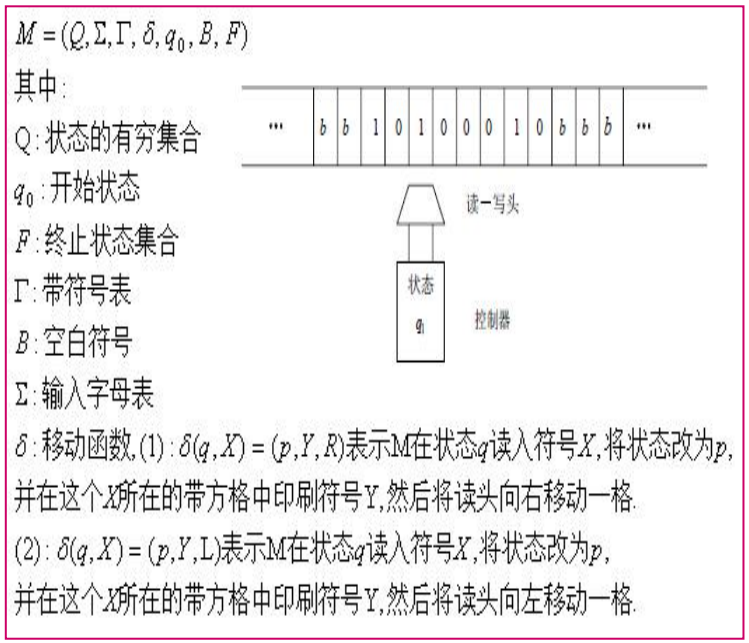


11.1 图灵机的思想与模型简介

图灵机是什么？

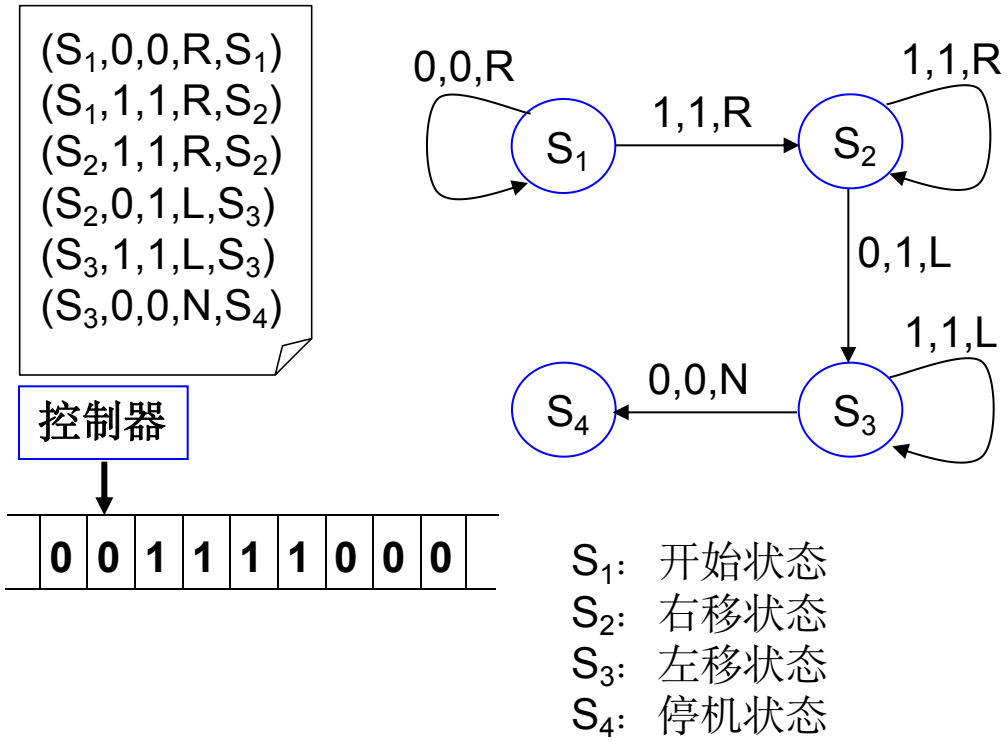
图灵机模型

- 基本的**图灵机模型**为一个七元组,如右图示意
- 几点结论:
- (1) 图灵机是一种思想模型，它由一个控制器(有限状态转换器)，一条可无限延伸的带子和一个在带子上左右移动的读写头构成。
- (2) **程序是五元组<q,X,Y,R(或L或N),p>形式的指令集**。其定义了机器在一个特定状态q下从方格中读入一个特定字符X时所采取的动作为在该方格中写入符号Y, 然后向右移一格R (或向左移一格L或不移动N), 同时将机器状态设为p供下一条指令使用。

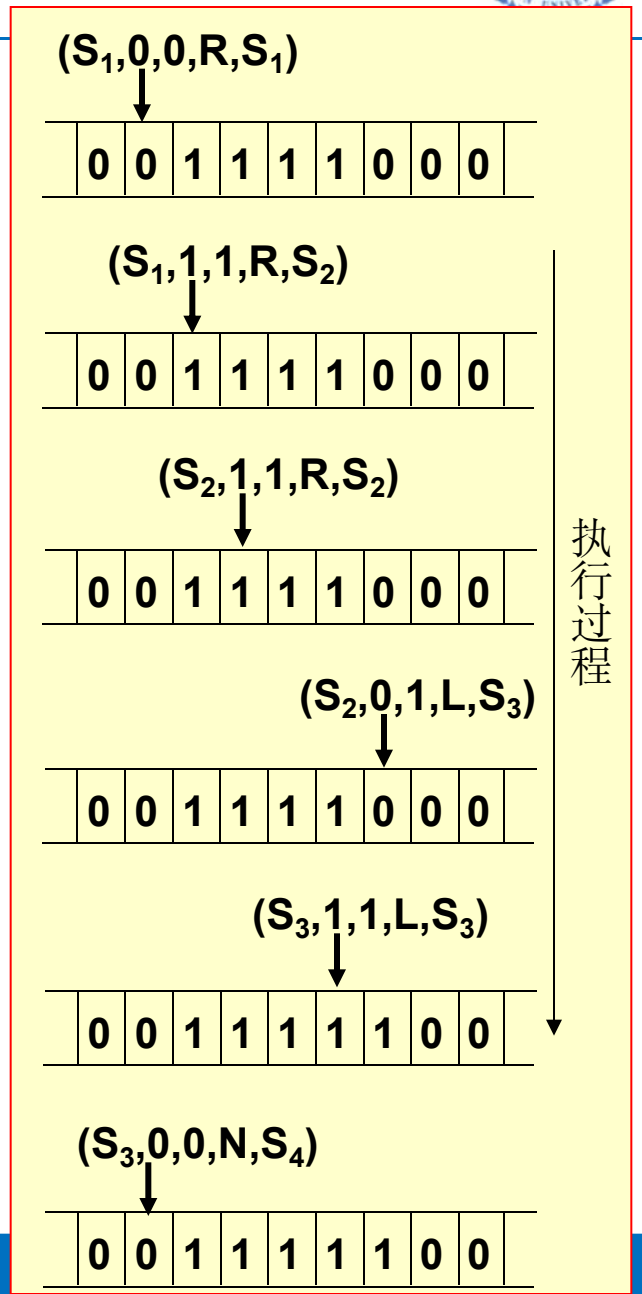


11.1 图灵机的思想与模型简介

图灵机模型示例。 (注:圆圈内的是状态，箭线上的是<X,Y,R>，其含义见前页)



S_1: 开始状态
S_2: 右移状态
S_3: 左移状态
S_4: 停机状态



功能：将一串1的后面再加一位1

11.1 图灵机的思想与模型简介

几点结论(续):

◆(3)**图灵机模型**被认为是计算机的基本理论模型

----计算机是使用相应的程序来完成任何设定好的任务。图灵机是一种离散的、有穷的、构造性的问题求解思路，**一个问题的求解可以通过构造其图灵机(即程序)来解决**。

◆(4)图灵认为：**凡是能用算法方法解决的问题也一定能用图灵机解决**;**凡是图灵机解决不了的问题任何算法也解决不了**----图灵可计算性问题。

提 纲

11.1 图灵机的思想与模型简介

11.2 计算复杂性理论简介

11.3 常见NP完全问题

最优化问题 vs 判定问题

最优化问题：给定问题，找出所有满足条件的解中值最优的那个

判定问题：给定问题，判断是否有满足条件的解

判定问题的形式化描述简单，而且很多优化问题的难度与判定问题的难度相关

示例-最短路径

- 最优化问题：给定一个带权图G=(V, E, W)，计算V中s到V中点t之间的最短路径
- 判定问题：给定一个带权图G=(V, E, W)，计算V中s到V中点t之间是否有一条路径
- 判定问题和最优化问题之间的关系：给定一个带权图G=(V, E, W)，计算V中s到V中点t之间是否有一条长度为k的路径

示例-整数序列

- 最优化形式：求一个整数序列中出现频率最高的数
- 判定形式：一个整数序列中是否存在出现频率为k的数。
- 最优化->判定：枚举k，返回判定有解的最大的一个。

示例-图着色

- 给定一个简单无向图，要给图的每一个顶点着色，要求相邻的顶点着不同的颜色。
- 最优化形式：最少需要多少种颜色
- 判定形式：是否存在最多只需要k种颜色的解
- 最优化->判定：枚举k，返回判定有解的最大的一个。

瓶颈生成树

一个无向图G上的瓶颈生成树是G上一种特殊的生成树。一个瓶颈生成树T上权重最大边的权重是G中所有生成树中最小的。T上最大权重的边的权重称为T的值。

求解算法： 1. 求出边权值的中位数（类似于求nth element一类问题）M，以此将图G的边按权值分成两部分，一部分小于等于M，另一部分大于M；

2. 利用b（P372）提出的方法判断图G瓶颈生成树的T值是否不超过M，也就是看这个T值位于大小哪半边；

3. 若位于小半边，则将大半边里的边删除，并回到步骤1；

4. 若位于大半边，则小半边组成的图必不连通，将其连通分量各收缩成一个点，再和大半边重新组成一个图G2，并回到步骤1。

P类、EXP类和R类问题

P类：在多项式时间可解的判定问题类（$O(n^k)$）

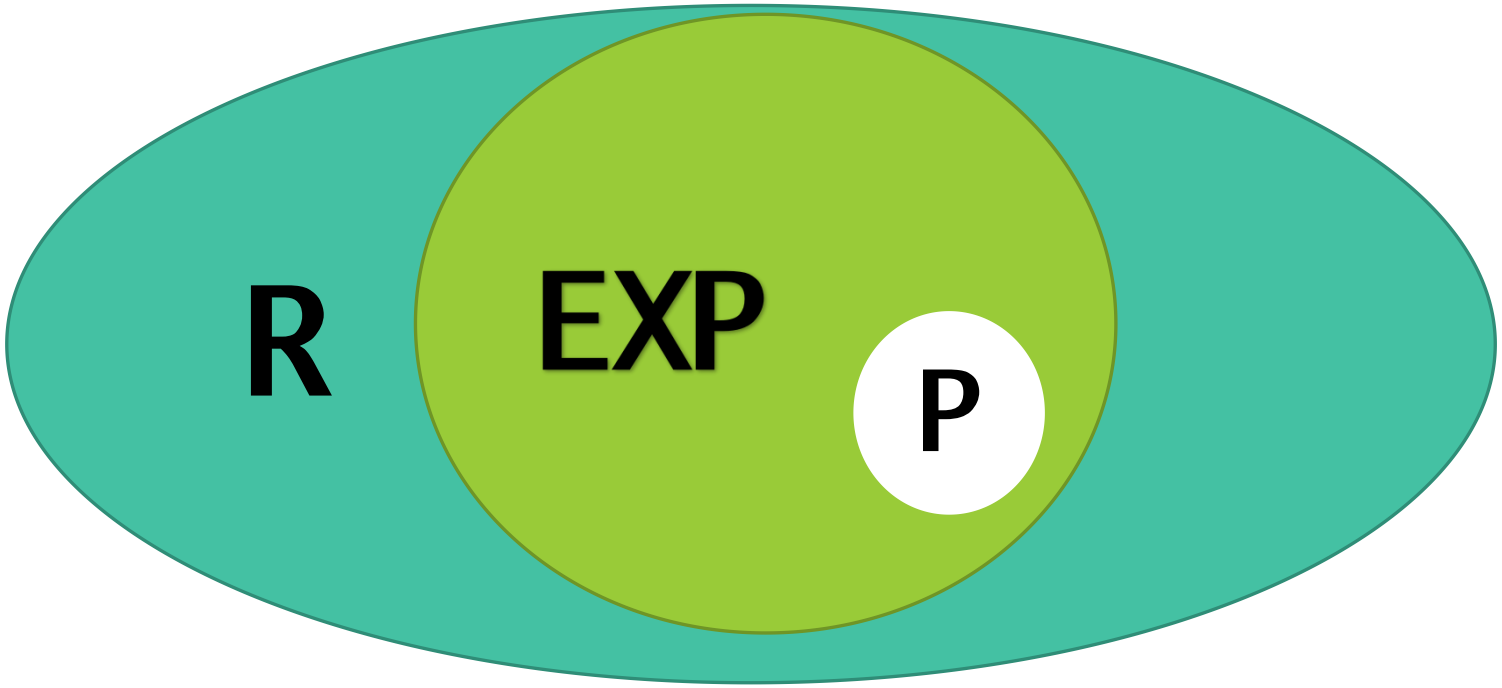
- 最短路径问题

EXP类：在指数级时间可解的判定问题类

- 围棋问题

R类：在有限的时间里可解的判定问题类，即计算机可解的问题

All Problems



NP类问题

定义：每个解可以在多项式时间进行检查的判定问题类

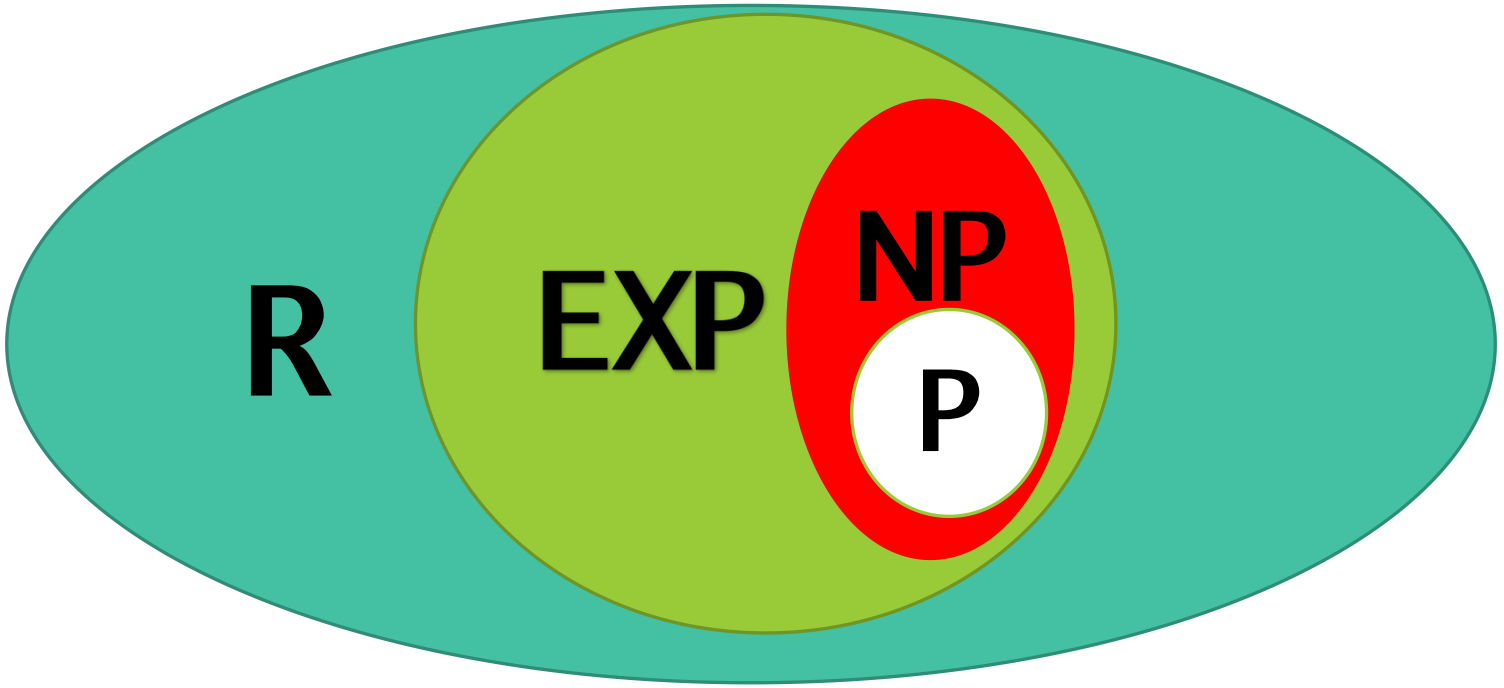
到目前还没有找到多项式时间的确定型算法

是否为难解的问题（目前还不清楚），即P是否等于NP不确定

猜测：$P \neq NP$

练习：NP问题是已经被证明地必须在指数时间内被解决（解决是求解的意思）？

All Problems

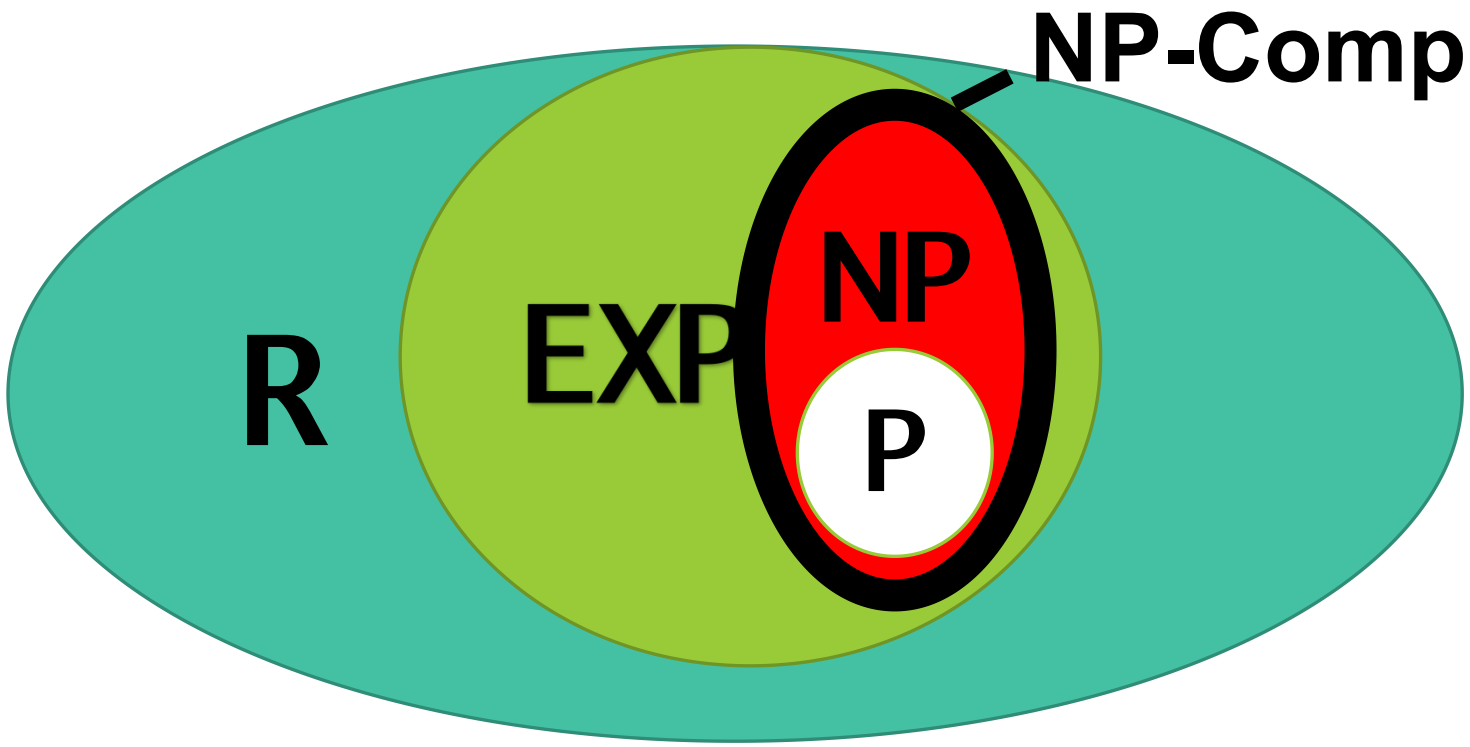


NP-hard类和NP-complete类问题

NP-hard类： 所有不比NP类问题容易的问题

NP-complete类： NP问题 $\cap$ $NP-hard$

All Problems



多项式时间归约

- 多项式时间归约是比较两个问题的相对难度的重要手段。
- 对于两个问题X和Y，用T(X)和T(Y)表示它们的时间复杂度。如果T(Y)=f(T(X))，其中f是一个多项式函数，则写作$Y <=_p X$，即Y可以在多项式时间内归约到X。通俗地讲X至少和Y一样难。
- 定理1：设$Y <=_p X$。如果X存在多项式时间解法，则Y同样存在多项式时间解法。
- 定理2：设$Y <=_p X$。如果Y不存在多项式时间解法，则X同样不存在多项式时间解法。
- 定理3：设$Z <=_p Y$，$Y <=_p X$，则$Z <=_p X$

7.7 0-1背包问题---NPC问题

动态规划算法时间复杂度分析

时间代价$O(n \times S)$，**空间代价**$O(n \times S)$

注意：这是伪多项式时间，因为S是作为一个整数输入

设S的位数是$L = \log_2 S$，**那么相当于时间代价和空间代价是**$O(n2^L)$

提 纲

11.1 图灵机的思想与模型简介

11.2 计算复杂性理论简介

11.3 常见NP完全问题

NPC问题历史

- 1971年，斯蒂芬.库克（Stephen Cook） 发表Cook定理。
- 1972年，理查德.卡普（Richard Karp）提出并证明了21个NP完全问题。

卡普的21个NPC问题

布尔可满足性问题（Satisfiability）

0-1整数规划（0-1 integer programming）

分团问题（Clique，参考独立集）

集合配置问题（Set packing）

最小顶点覆盖问题（Vertex cover）

集合覆盖问题（Set covering）

反馈节点集问题（Feedback node set）

反馈弧集问题（Feedback arc set）

有向哈密顿回路问题（Directed Hamiltonian cycle）

无向哈密顿回路问题（Undirected Hamiltonian cycle）

卡普的21个NPC问题

三元布尔可满足性问题（3-SAT）

图着色问题（Chromatic number）

分团覆盖问题（Clique cover）

精确覆盖问题（Exact cover）

命中集问题（Hitting set）

斯坦纳树问题（Steiner tree）

三维匹配问题（3-dimensional matching）

背包问题（Knapsack）

作业排序（Job sequencing）

划分问题（Partition）

最大割问题（Max cut）

哈密顿回路问题

实例：图G=(V,E)且|V|=n

问：G中是否包含一条哈密顿回路