

第7章 有限脉冲响应数字滤波器的设计

7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器

7.2 利用窗函数法设计FIR滤波器

7.2.1 窗函数法设计原理

设希望逼近的滤波器频率响应函数为 $H_d(e^{j\omega})$ ，其单位脉冲响应是 $h_d(n)$ 。

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-j\omega n}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

如果能够由已知的 $H_d(e^{j\omega})$ 求出 $h_d(n)$ ，经过Z变换可得到滤波器的系统函数。但通常以理想滤波器作为 $H_d(e^{j\omega})$ ，其幅度特性逐段恒定，在边界频率处有不连续点，因而 $h_d(n)$ 是无限时宽的，且是非因果序列。例如，线性相位理想低通滤波器的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\alpha} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$

其单位脉冲响应 $h_d(n)$ 为

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\alpha} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin[\omega_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)}$$

可以看到，理想低通滤波器的单位脉冲响应 $h_d(n)$ 是无限长，且是非因果序列。

为了构造一个长度为 N 的第一类线性相位FIR滤波器，只有将 $h_d(n)$ 截取一段，并保证截取的一段关于 $n=(N-1)/2$ 偶对称。设截取的一段用 $h(n)$ 表示，即

$$h(n) = h_d(n)R_N(n)$$

式中， $R_N(n)$ 是一个矩形序列，长度为 N ，波形如图7.2.1（b）所示。由该图可知，当 α 取值为 $(N-1)/2$ 时，截取的一段 $h(n)$ 关于 $n=(N-1)/2$ 偶对称，保证所设计的滤波器具有线性相位。

实际设计的滤波器的单位脉冲响应为 $h(n)$ ，长度为 N ，其系统函数为 $H(z)$ ，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

这样用一个有限长的序列 $h(n)$ 去代替 $h_d(n)$ ，肯定会引起误差，表现在频域就是通常所说的吉布斯（Gibbs）效应。该效应引起过渡带加宽以及通带和阻带内的波动，尤其使阻带的衰减减小，从而满足不了技术上的要求，如图7.2.2所示。

吉布斯效应是由于将 $h_d(n)$ 直接截断引起的，因此，也称为截断效应。

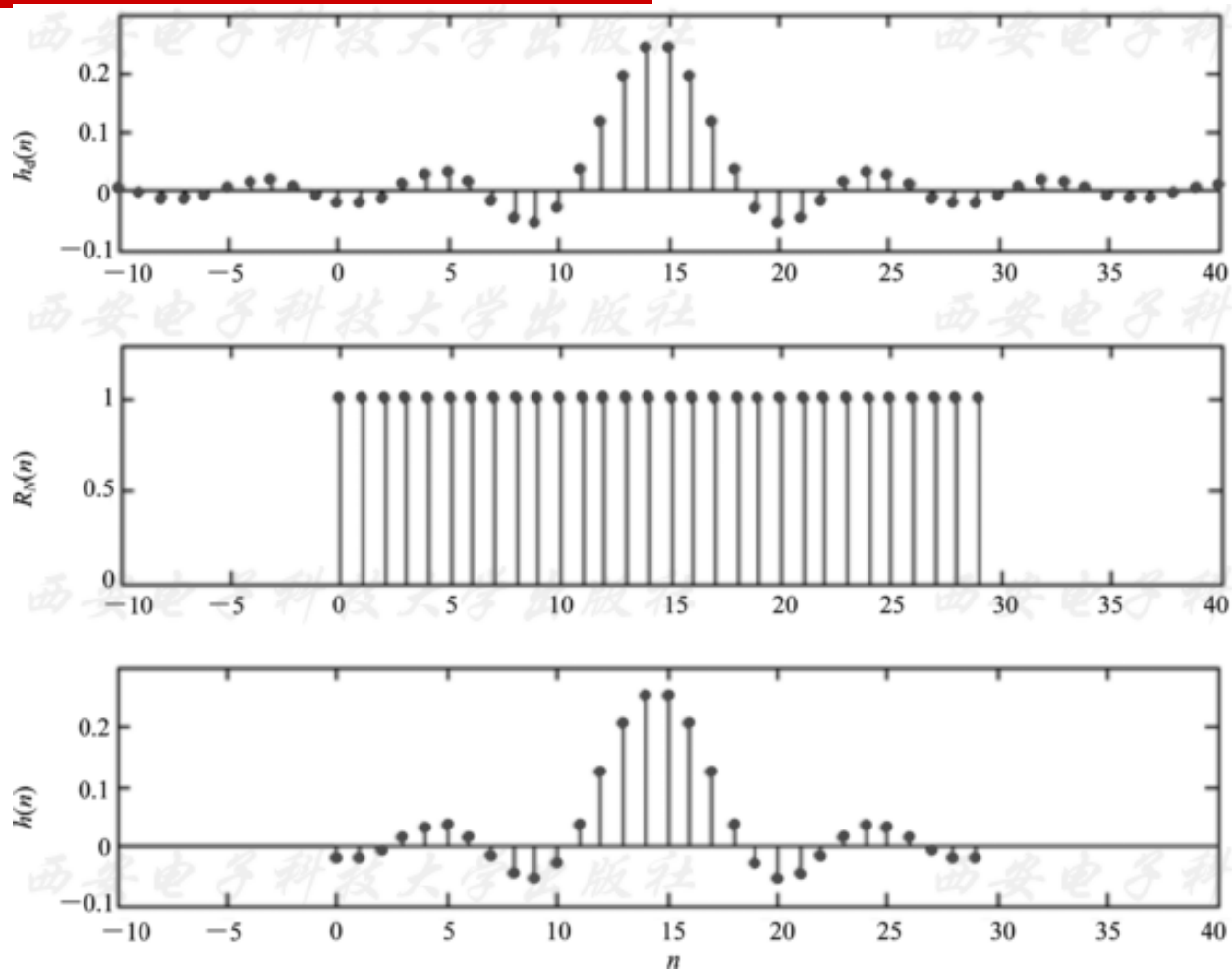
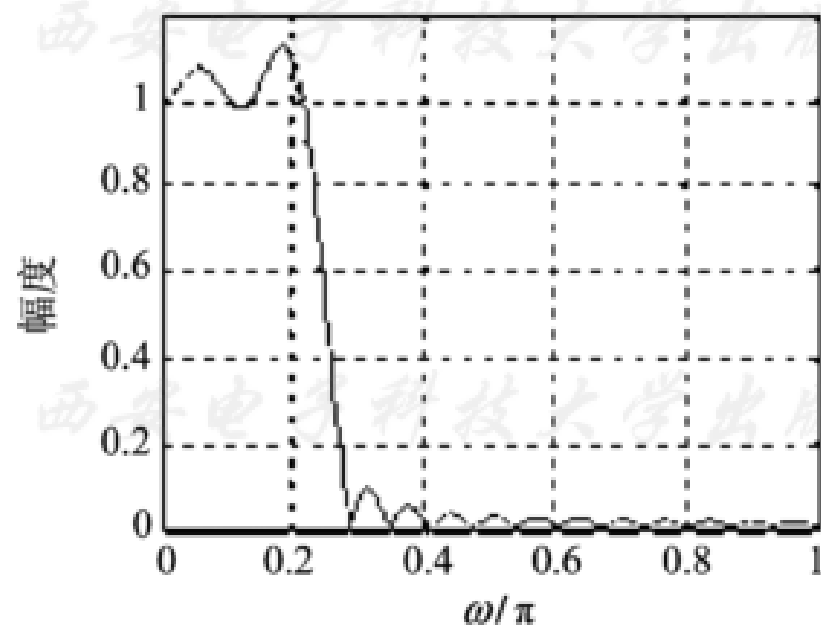
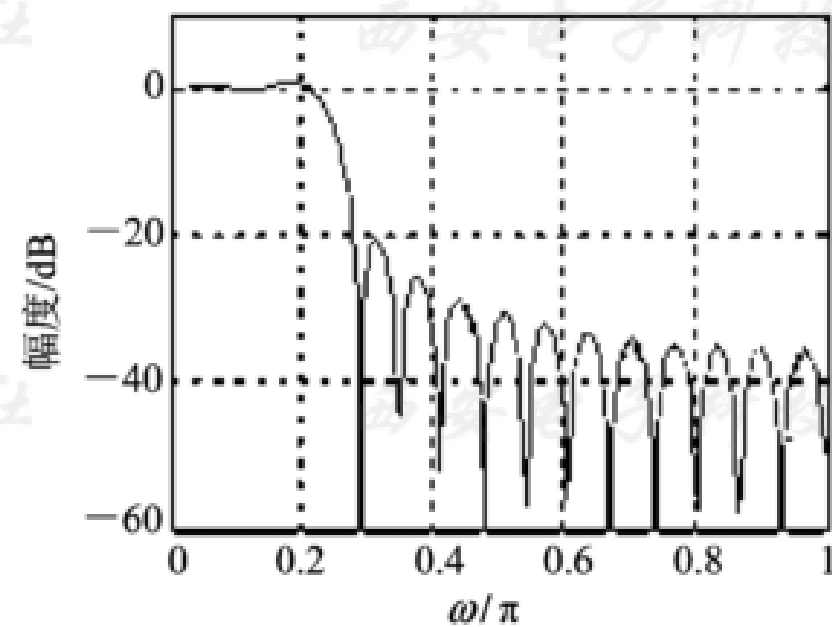


图7.2.1 窗函数设计法的时域波形（矩形窗， $N=30$ ）



(a) 幅频响应函数曲线



(b) 损耗函数曲线

图7.2.2 吉普斯效应

$H_d(e^{j\omega})$ 是一个以 2π 为周期的函数，可以展为傅里叶级数，即

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-j\omega n}$$

傅里叶级数的系数为 $h_d(n)$ ，当然就是 $H_d(e^{j\omega})$ 对应的单位脉冲响应。设计FIR滤波器就是根据要求找到 N 个傅里叶级数系数 $h(n)$ ， $n=1, 2, \dots, N-1$ ，以 N 项傅氏级数去近似代替无限项傅氏级数，这样在一些频率不连续点附近会引起较大误差，这种误差就是前面说的截断效应。

因此，从这一角度来说，窗函数法也称为傅氏级数法。显然，选取傅氏级数的项数愈多，引起的误差就愈小，但项数增多即 $h(n)$ 长度增加，也使成本和滤波计算量加大，应在满足技术要求的条件下，尽量减小 $h(n)$ 的长度。

$R_N(n)$ （矩形序列）就是起对无限长序列的截断作用，可以形象地把 $R_N(n)$ 看做一个窗口， $h(n)$ 则是从窗口看到的一段 $h_d(n)$ 序列，所以称 $h(n)=h_d(n)R_N(n)$ 为用矩形窗对 $h_d(n)$ 进行加窗处理。下面分析用矩形窗截断的影响和改进的措施。为了叙述方便，用 $w(n)$ 表示窗函数，用下标表示窗函数类型，矩形窗记为 $w_R(n)$ 。用 N 表示窗函数长度。

根据傅里叶变换的时域卷积定理，得到 (7.2.3) 式的傅里叶变换：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\theta}) W_R(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (7.2.4)$$

式中， $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 分别是 $h_d(n)$ 和 $R_N(n)$ 的傅里叶变换，即

$$\begin{aligned} W_R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{N-1} W_R(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} w_R e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\frac{1}{2}(N-1)\omega} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} = W_{Rg}(\omega) e^{-j\alpha\omega} \end{aligned}$$

式中

$$W_{\text{Rg}}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}, \quad \alpha = \frac{N-1}{2}$$

$W_{\text{Rg}}(\omega)$ 称为矩形窗的幅度函数，如图7.2.3（b）所示，将图中 $[-2\pi/N, 2\pi/N]$ 区间上的一段波形称为 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 的主瓣，其余较小的波动称为旁瓣。将 $H_{\text{d}}(\text{e}^{\text{j}\omega})$ 写成 $H_{\text{d}}(\text{e}^{\text{j}\omega})=H_{\text{dg}}(\omega)\text{e}^{-\text{j}\omega\alpha}$ ，则按照（7.2.1）式，理想低通滤波器的幅度特性函数（如图7.2.3（a）所示）为

$$H_{\text{dg}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_{\text{c}} \\ 0, & \omega_{\text{c}} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

将 $H_d(e^{j\omega})$ 和 $W_R(e^{j\omega})$ 代入 (7.2.4) 式, 得到:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) e^{-j\theta\alpha} W_{Rg}(\omega - \theta) e^{-j(\omega - \theta)\alpha} d\theta \\ &= e^{-j\omega\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta \end{aligned}$$

将 $H(e^{j\omega})$ 写成 $H(e^{j\omega}) = H_g(\omega) e^{-j\omega\alpha}$, 则

$$H_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{dg}(\theta) W_{Rg}(\omega - \theta) d\theta$$

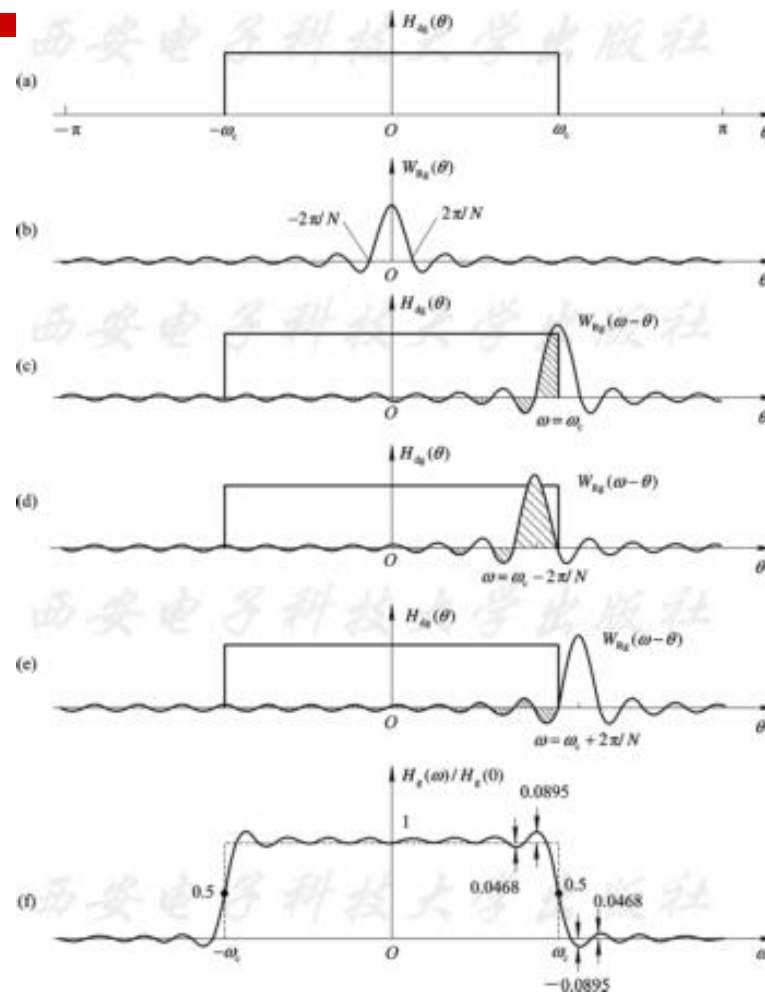


图7.2.3 矩形窗加窗效应

式中 $H_g(\omega)$ 是 $H(e^{j\omega})$ 的幅度特性。该式说明加窗后的滤波器的幅度特性等于理想低通滤波器的幅度特性 $H_{dg}(\omega)$ 与矩形窗幅度特性 $W_{Rg}(\omega)$ 的卷积。

对 $h_d(n)$ 加矩形窗处理后， $H_g(\omega)$ 与原理想低通 $H_{dg}(\omega)$ 的差别有以下两点：

(1) 在理想特性不连续点 $\omega=\omega_c$ 附近形成过渡带。过渡带的宽度近似等于 $W_{Rg}(\omega)$ 主瓣宽度 $4\pi/N$ 。

(2) 通带内产生了波纹，最大的峰值在 $\omega_c-2\pi/N$ 处。阻带内产生了余振，最大的负峰在 $\omega_c+2\pi/N$ 处。通带与阻带中波纹的情况与窗函数的幅度谱有关， $W_{Rg}(\omega)$ 旁瓣幅度的大小直接影响 $H_g(\omega)$ 波纹幅度的大小。

以上两点就是对 $h_d(n)$ 用矩形窗截断后，在频域的反映，称为吉布斯效应。这种效应直接影响滤波器的性能。

通带内的波纹影响滤波器通带的平稳性，阻带内的波纹影响阻带内的衰减，可能使最小衰减不满足技术指标要求。

当然，一般滤波器都要求过渡带愈窄愈好。

直观上，好像增加矩形窗的长度，即加大 N ，就可以减少吉布斯效应的影响。只要分析一下 N 加大时 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 的变化，就可以看到这一结论不是完全正确。我们讨论在主瓣附近的情况。在主瓣附近，按照式（7.2.5）， $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 可近似为

$$W_{\text{Rg}}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\omega / 2} \approx N \frac{\sin x}{x}$$

该函数的性质是随 x 加大（ N 加大），主瓣幅度加高，同时旁瓣也加高，保持主瓣和旁瓣幅度相对值不变；另一方面， N 加大时， $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 的主瓣和旁瓣宽度变窄，波动的频率加快。三种不同长度的矩形窗函数的幅度特性 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 曲线如图7.2.4(a)、(b)、(c)所示。

用这三种窗函数设计的FIR滤波器的幅度特性 $H_g(\omega)$ 曲线如图7.2.4(d)、(e)、(f) 所示。因此，当 N 加大时， $H_g(\omega)$ 的波动幅度没有多大改善，带内最大肩峰比 $H(0)$ 高8.95%，阻带最大负峰值为 $H(0)$ 的8.95%，使阻带最小衰减只有21 dB。加大 N 只能使 $H_g(\omega)$ 过渡带变窄（过渡带近似为主瓣宽度 $4\pi/N$ ）。因此加大 N ，并不是减小吉布斯效应的有效方法。

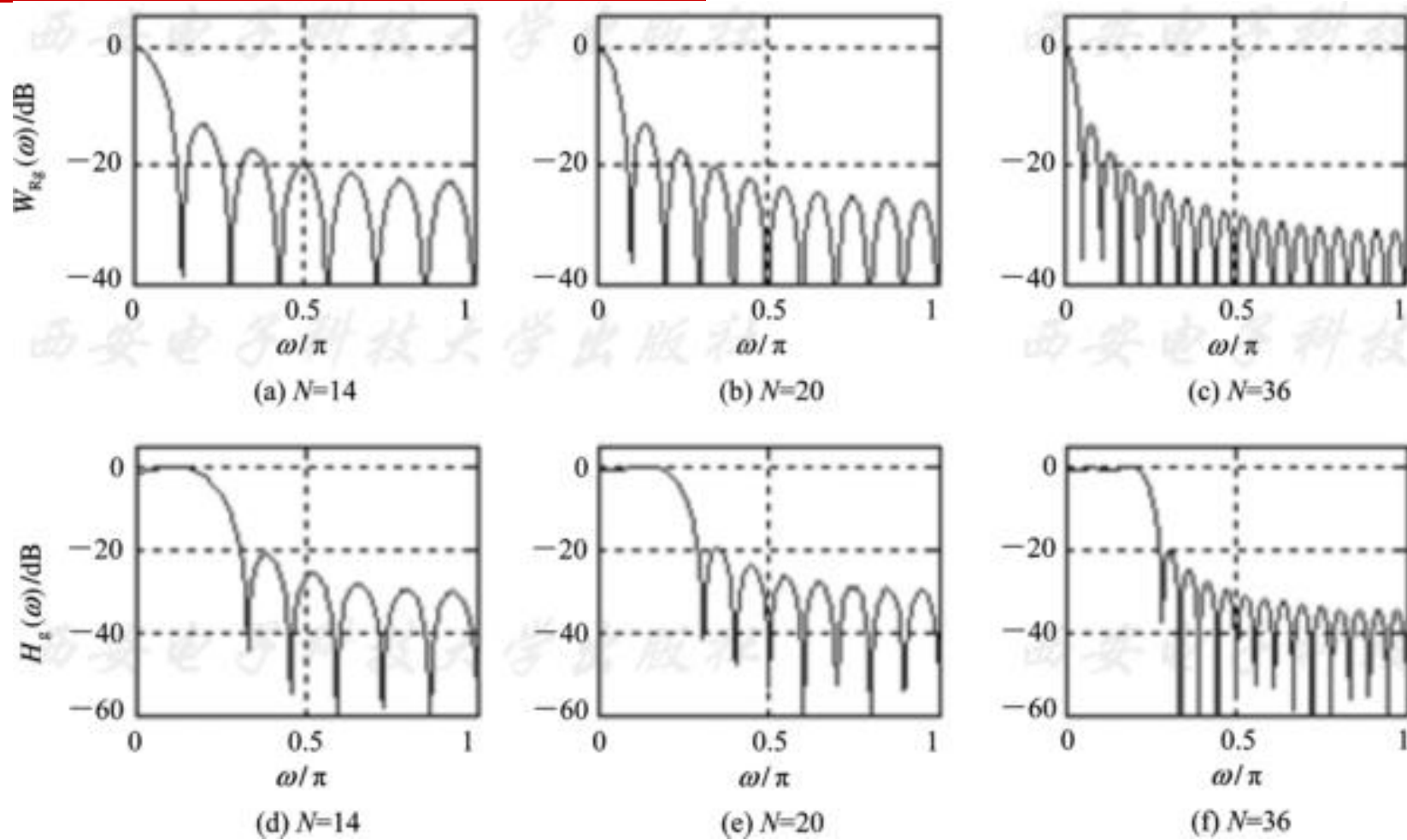


图7.2.4 矩形窗函数长度的影响

以上分析说明，调整窗口长度 N 只能有效地控制过渡带的宽度，而要减少带内波动以及增大阻带衰减，只能从窗函数的形状上找解决问题的方法。构造新的窗函数形状，使其谱函数的主瓣包含更多的能量，相应旁瓣幅度更小。旁瓣的减小可使通带、阻带波动减小，从而加大阻带衰减。但这样总是以加宽过渡带为代价的。下面介绍几种常用的窗函数。

7.2.2 典型窗函数介绍

本节主要介绍几种常用窗函数的时域表达式、时域波形、幅度特性函数（衰减用dB计量）曲线，以及用各种窗函数设计的**FIR**数字滤波器的单位脉冲响应和损耗函数曲线。为了叙述简单，我们把这组波形图简称为“四种波形”。下面均以低通为例， $H_d(e^{j\omega})$ 取理想低通， $\omega_c=\pi/2$ ，窗函数长度 $N=31$ 。

1. 矩形窗（Rectangle Window）

$$w_R(n)=R_N(n)$$

前面已分析过，按照（7.2.5）式，其幅度函数为

$$W_{\text{Rg}}(\omega) = \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)}$$

为了描述方便，定义窗函数的几个参数：

旁瓣峰值 α_n ——窗函数的幅频函数 $|W_g(\omega)|$ 的最大旁瓣的最大值相对主瓣最大值的衰减值（dB）；

过渡带宽度 B_g ——用该窗函数设计的FIR数字滤波器（FIRDF）的过渡带宽度；

阻带最小衰减 α_s ——用该窗函数设计的FIRDF的阻带最小衰减。

图7.2.4所示的矩形窗的参数为： $\alpha_n = -13 \text{ dB}$ ； $B_g = 4\pi/N$ ； $\alpha_s = -21 \text{ dB}$ 。

2. 三角形窗 (Bartlett Window)

$$\omega_B(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, 0 \leq n \leq \frac{1}{2}(N-1) \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, \frac{1}{2}(N-1) < n \leq N-1 \end{cases}$$

其频谱函数为

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N / 4)}{\sin(\omega / 2)} \right]^2 e^{-j \frac{N-1}{2} \omega}$$

其幅度函数为

$$W_{\text{Bg}}(\omega) = \frac{2}{N} \left[\frac{\sin(\omega N / 4)}{\sin(\omega / 2)} \right]^2$$

三角窗的四种波形如图7.2.5所示，参数为： $\alpha_{\text{n}} = -25 \text{ dB}$;

$B_{\text{g}} = 8\pi/N$; $\alpha_{\text{s}} = -25 \text{ dB}$ 。

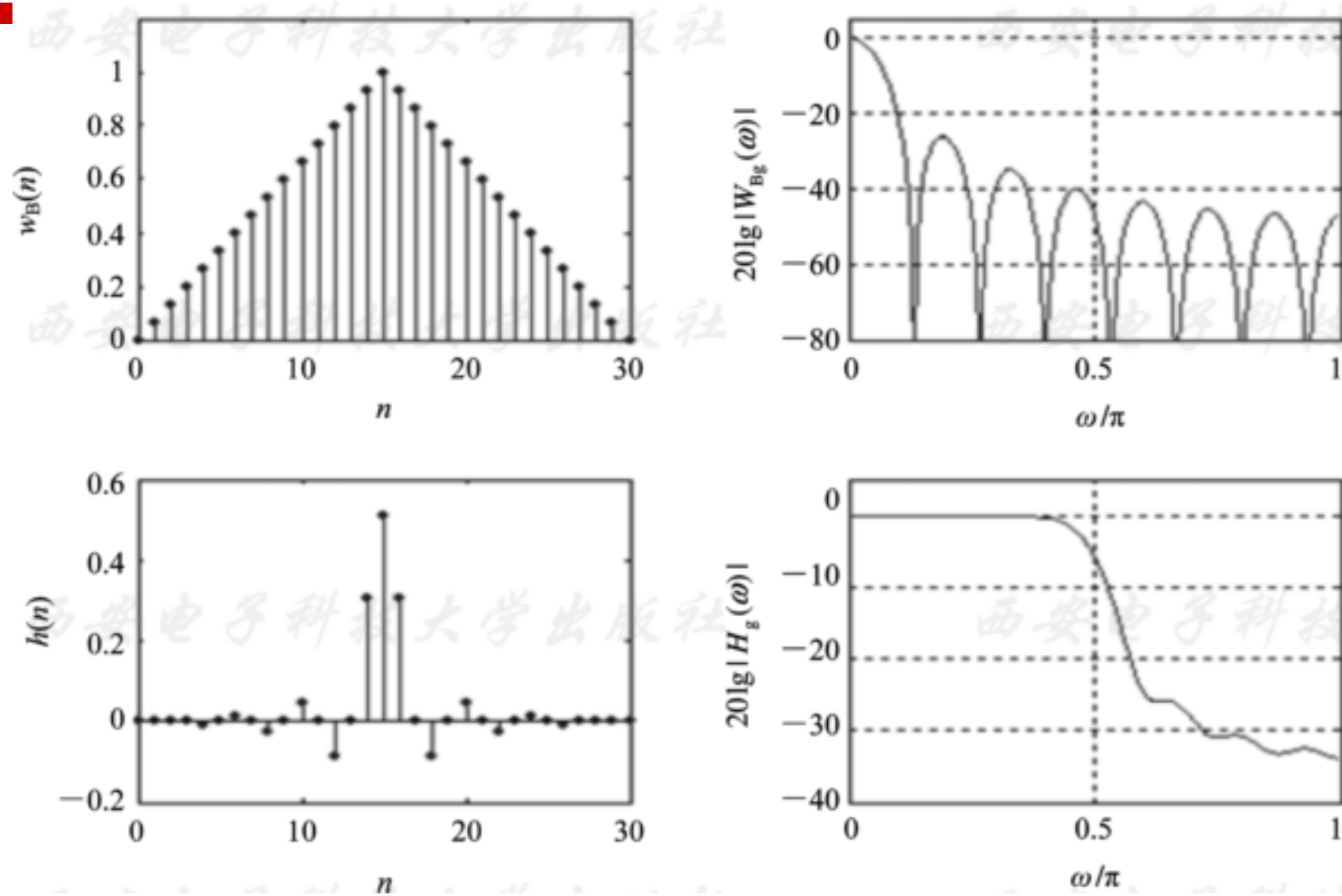


图7.2.5 三角窗的四种波形

3. 汉宁（Hanning）窗——升余弦窗

$$w_{\text{Hn}}(n) = 0.5 \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right] R_N(n)$$

$$W_R(e^{j\omega}) = FT[R_N(n)] = W_{\text{Rg}}(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{Hn}}(e^{j\omega}) &= FT[W_{\text{Hn}}(n)] \\ &= \left\{ 0.5W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25 \left[W_{\text{Rg}} \left(\omega + \frac{2\pi}{N-1} \right) + W_{\text{Rg}} \left(\omega - \frac{2\pi}{N-1} \right) \right] \right\} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \\ &= W_{\text{Hng}}(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \end{aligned}$$

当 $N \gg 1$ 时, $N-1 \approx N$

$$W_{\text{Hng}}(\omega) = 0.5W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25 \left[W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) \right]$$

汉宁窗的幅度函数 $W_{\text{Hng}}(\omega)$ 由三部分相加, 旁瓣互相对消, 使能量更集中在主瓣中。汉宁窗的四种波形如图7.2.6所示, 参数为: $\alpha_n = -31 \text{ dB}$; $B_g = 8\pi/N$; $\alpha_s = -44 \text{ dB}$ 。

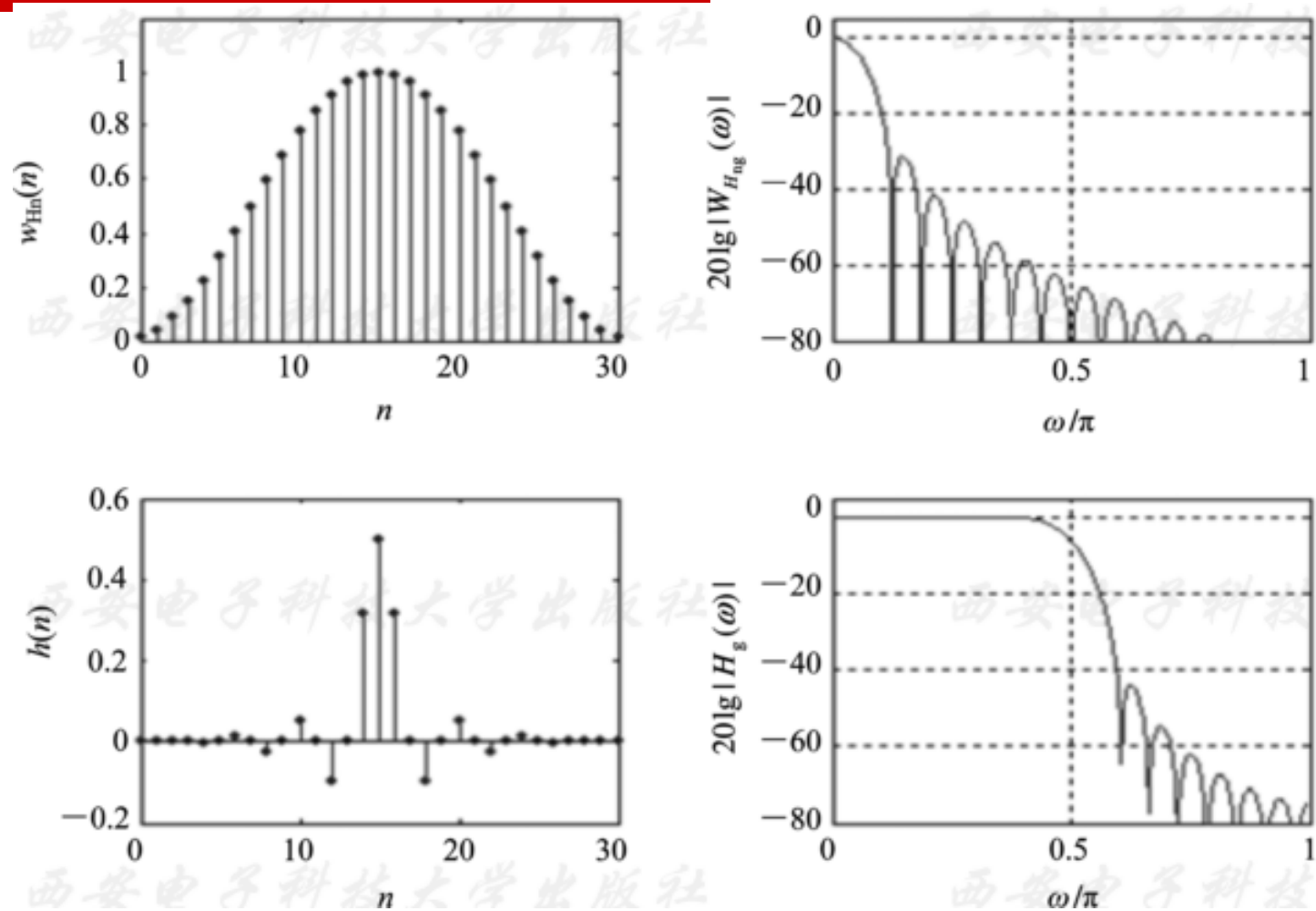


图7.2.6 汉宁窗的四种波形

4. 哈明（Hamming）窗——改进的升余弦窗

$$w_{\text{Hm}}(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right] R_N(n)$$

其频谱函数 $W_{\text{Hm}}(e^{j\omega})$ 为

$$W_{\text{Hm}}(e^{j\omega}) = 0.54W_R(e^{E\omega}) - 0.23W_R(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}) - 0.23W_R(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)})$$

其幅度函数 $W_{\text{Hmg}}(\omega)$ 为

$$W_{\text{Hmg}}(\omega) = 0.54W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)$$

当 $N \gg 1$ 时，其可近似表示为

$$W_{\text{Hmg}}(\omega) \approx 0.54W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + 0.23W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)$$

这种改进的升余弦窗，能量更加集中在主瓣中，主瓣的能量约占**99.96%**，瓣峰值幅度为**40 dB**，但其主瓣宽度和汉宁窗的相同，仍为 $8\pi/N$ 。可见哈明窗是一种高效窗函数，所以MATLAB窗函数设计函数的默认窗函数就是哈明窗。哈明窗的四种波形如图7.2.7所示，参数为： $\alpha_n=-41\text{ dB}$ ； $B_g=8\pi/N$ ； $\alpha_s=-53\text{ dB}$ 。

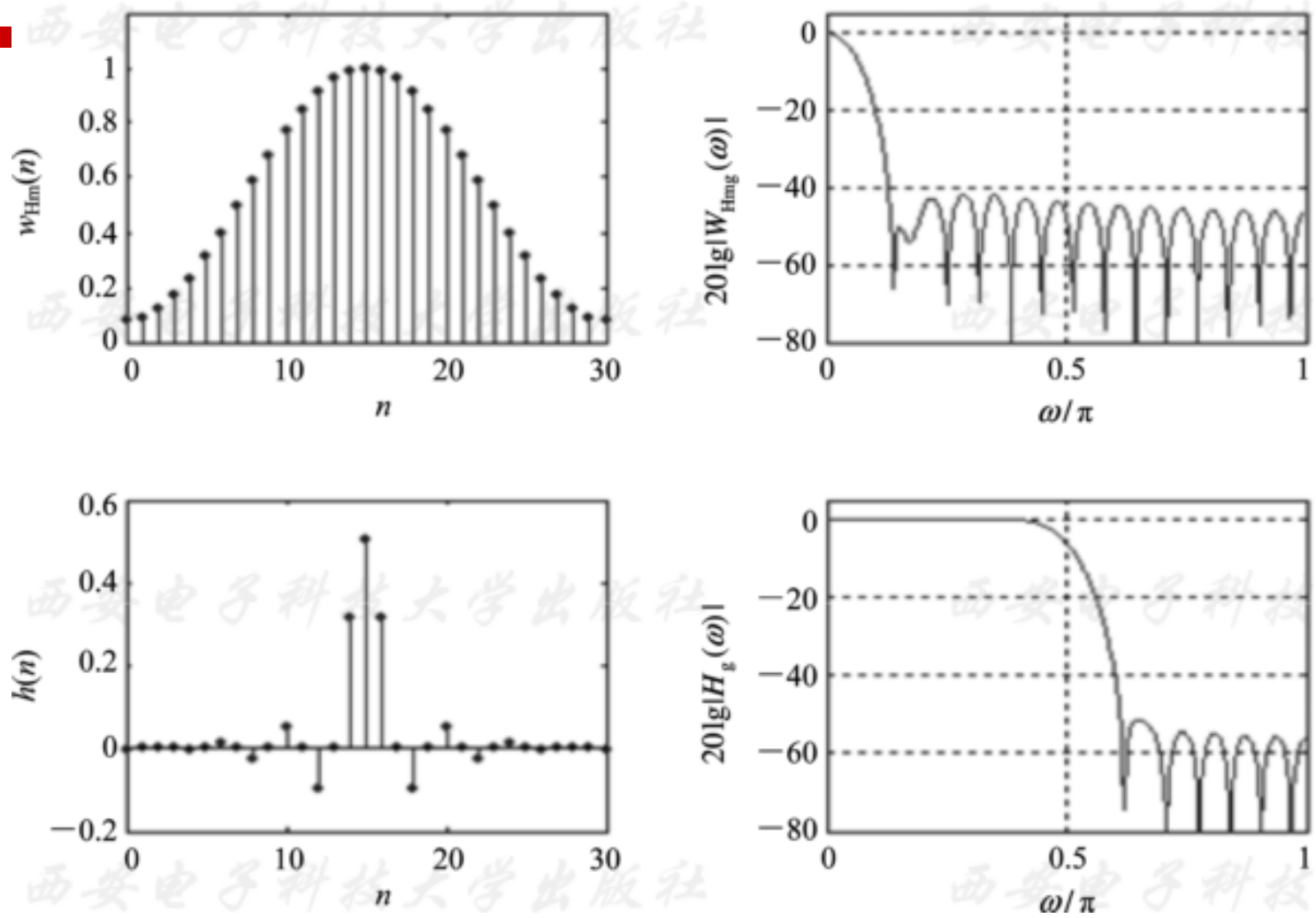


图7.2.7 哈明窗的四种波形

5. 布莱克曼 (Blackman) 窗

$$w_{\text{Bl}}(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1} \right] R_N(n)$$

其频谱函数为

$$W_{\text{Bl}}(e^{j\omega}) = 0.42W_{\text{R}}(e^{j\omega}) - 0.25 \left[W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right)}) + W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)}) \right] \\ + 0.04 \left[W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right)}) + W_{\text{R}}(e^{j\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)}) \right]$$

其幅度函数为

$$W_{\text{Blg}}(\omega) = 0.42W_{\text{Rg}}(\omega) + 0.25\left[W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right] \\ + 0.04\left[W_{\text{Rg}}\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + W_{\text{Rg}}\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right)\right]$$

这样其幅度函数由五部分组成，它们都是移位不同，且幅度也不同的 $W_{\text{Rg}}(\omega)$ 函数，使旁瓣再进一步抵消。旁瓣峰值幅度进一步增加，其幅度谱主瓣宽度是矩形窗的3倍。布莱克曼窗的四种波形如图7.2.8所示，参数为： $\alpha_n = -57$ dB； $\Delta B = 12\pi/N$ ； $\alpha_s = -74$ dB。

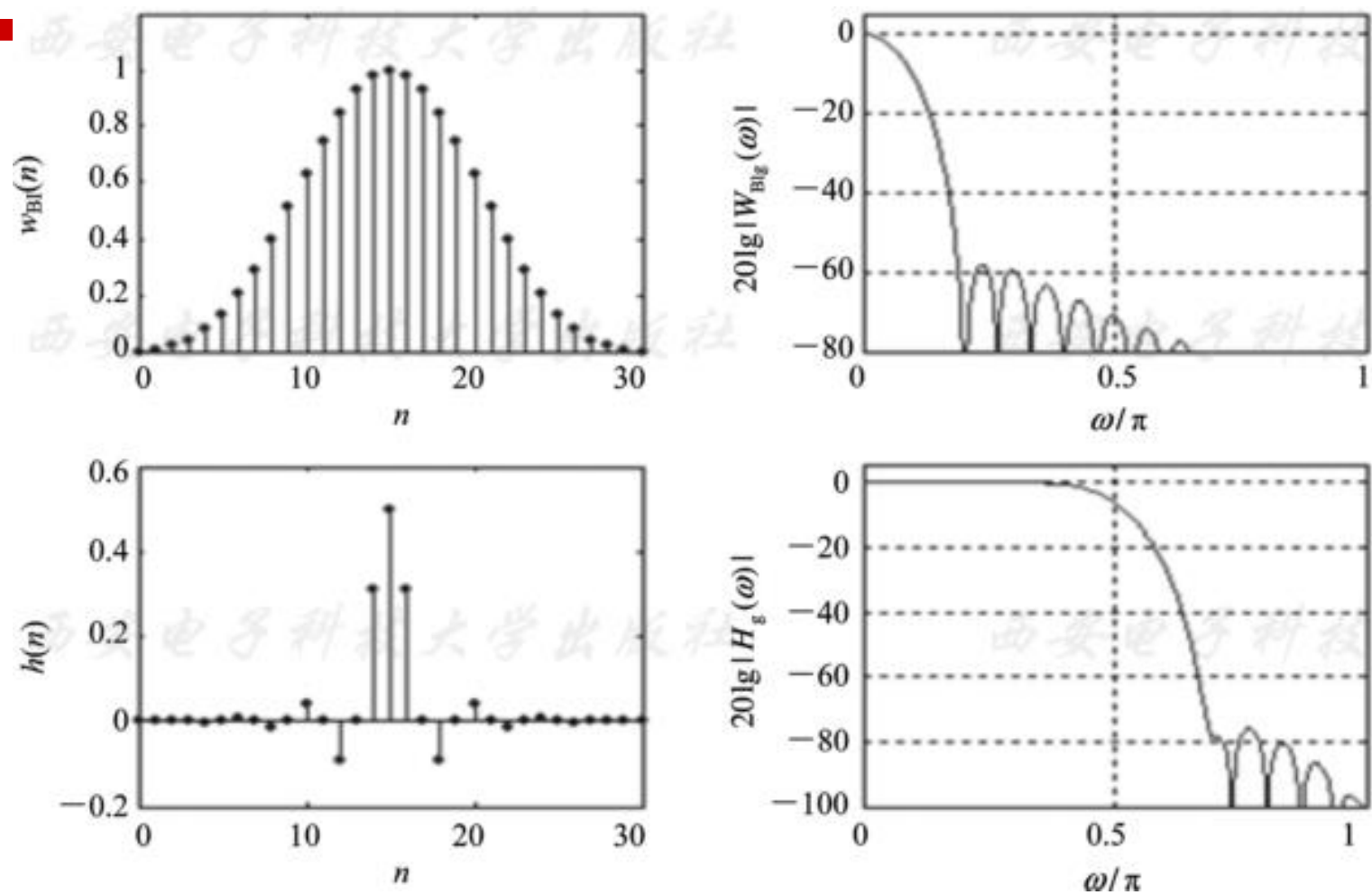


图7.2.8 布莱克曼窗的四种波形

表7.2.2 6种窗函数的基本参数

窗函数类型	旁瓣峰值 α_n /dB	过渡带宽度 B_t		阻带最小衰减 α_s /dB
		近似值	精确值	
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
三角窗	-25	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	-25
汉宁窗	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
哈明窗	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74
凯塞窗 ($\beta = 7.865$)	-57		$10\pi/N$	-80

MATLAB信号处理工具箱提供了**14种**窗函数的产生函数，
下面列出上述**5种**窗函数的产生函数及其调用格式：

wn=boxcar(N)

 %列向量wn中返回长度为N的矩形窗函数w(n)

wn=bartlett(N)

 %列向量wn中返回长度为N的三角窗函数w(n)

wn=hanning(N)

 %列向量wn中返回长度为N的汉宁窗函数w(n)

wn=hamming(N)

 %列向量wn中返回长度为N的哈明窗函数w(n)

wn=blackman(N)

 %列向量wn中返回长度为N的布莱克曼窗函数w(n)

7.2.3 用窗函数法设计FIR滤波器的步骤

用窗函数法设计FIR滤波器的步骤如下：

(1) 根据对过渡带及阻带衰减的指标要求，选择窗函数的类型，并估计窗口长度 N 。

原则是在保证阻带衰减满足要求的情况下，尽量选择主瓣窄的窗函数。然后根据过渡带宽度估计窗口长度 N 。待求滤波器的过渡带宽度 B_t 近似等于窗函数主瓣宽度，且近似与窗口长度 N 成反比， $N \approx A/B_t$ ， A 取决于窗口类型，例如，矩形窗的 $A=4\pi$ ，哈明窗的 $A=8\pi$ 等，参数 A 的近似和精确取值参考表7.2.2。

(2) 构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$, 即

$$H_d(e^{j\omega}) = H_{dg}(\omega)e^{-j\omega(N-1)/2}$$

对所谓的“标准窗函数法”，就是选择 $H_d(e^{j\omega})$ 为线性相位理想滤波器（理想低通、理想高通、理想带通、理想带阻）。以低通滤波器为例， $H_{dg}(\omega)$ 应满足：

$$H_{dg}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (7.2.19)$$

由图7.2.2知道，理想滤波器的截止频率 ω_c 近似位于最终设计的 **FIRDF** 的过渡带的中心频率点，幅度函数衰减一半（约-6 dB）。所以如果设计指标给定通带边界频率和阻带边界频率 ω_p 和 ω_s ，一般取

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} \quad (7.2.20)$$

(3) 计算 $h_d(n)$ 。如果给出待求滤波器的频响函数为 $H_d(e^{j\omega})$ ，那么单位脉冲响应用下式求出：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (7.2.21)$$

如果 $H_d(e^{j\omega})$ 较复杂，或者不能用封闭公式表示，则不能用上式求出 $h_d(n)$ 。我们可以对 $H_d(e^{j\omega})$ 从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$ 采样 M 点，采样值为 $H_{dM}(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$ ， $k=0, 1, 2, \dots, M-1$ ，进行 M 点IDFT(IFFT)，得到：

$$h_{dM}(n) = \text{IDFT}[H_{dM}(k)]_M \quad (7.2.22)$$

根据频域采样理论， $h_{dM}(n)$ 与 $h_d(n)$ 应满足如下关系：

$$h_{dM}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rM) R_M(n)$$

因此，如果 M 选得较大，可以保证在窗口内 $h_{dM}(n)$ 有效逼近 $h_d(n)$ 。

对（7.2.19）式给出的线性相位理想低通滤波器作为 $H_d(e^{j\omega})$ ，由（7.2.2）式求出单位脉冲响应 $h_d(n)$ ：

$$h_d(n) = \frac{\sin(\omega_c(n - \alpha))}{\pi(n - \alpha)}$$

为保证线性相位特性， $\alpha = (N - 1)/2$ 。

(4) 加窗得到设计结果： $h(n) = h_d(n)w(n)$ 。

【例7.2.1】 用窗函数法设计线性相位高通FIRDF，要求通带截止频率 $\omega_p=\pi/2$ rad，阻带截止频率 $\omega_s=\pi/4$ rad，通带最大衰减 $\alpha_p=1$ dB，阻带最小衰减 $\alpha_s=40$ dB。

解 (1) 选择窗函数 $w(n)$ ，计算窗函数长度 N 。
已知阻带最小衰减 $\alpha_s=40$ dB，由表(7.2.2)可知汉宁窗和哈明窗均满足要求，我们选择汉宁窗。本例中过渡带宽度 $B_t \leq \omega_p - \omega_s = \pi/4$ ，汉宁窗的精确过渡带宽度 $B_t = 6.2\pi/N$ ，所以要求 $B_t = 6.2\pi/N \leq \pi/4$ ，解之得 $N \geq 24.8$ 。
对高通滤波器 N 必须取奇数，取 $N=25$ 。由式(7.2.11)，有

$$w(n) = 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) \right] R_{25}(n)$$

(2) 构造 $H_d(e^{j\omega})$:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0, & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

式中

$$\tau = \frac{N-1}{2} = 12, \quad \omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

(3) 求出 $h_d(n)$:

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega + \int_{\omega_c}^{\pi} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega \right) \\ &= \frac{\sin \pi(n - \tau)}{\pi(n - \tau)} - \frac{\sin \omega_c(n - \tau)}{\pi(n - \tau)} \end{aligned}$$

将 $\tau=12$ 代入得

$$h_d(n) = \delta(n - 12) - \frac{\sin[3\pi(n - 12)/8]}{\pi(n - 12)}$$

$\delta(n-12)$ 对应全通滤波器, $\frac{\sin[3\pi(n-12)/8]}{\pi(n-12)}$ 是截止频率为 $3\pi/8$ 的理想低通滤波器的单位脉冲响应, 二者之差就是理想高通滤波器的单位脉冲响应。这就是求理想高通滤波器的单位脉冲响应的另一个公式。(4)

加窗:

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$$= \left\{ \delta(n-12) - \frac{\sin[3\pi(n-12)/8]}{\pi(n-12)} \right\} \left[0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{12}\right) \right] R_{25}(n)$$

7.2.4 窗函数法的MATLAB设计函数简介

实际设计时一般用MATLAB工具箱函数。可调用工具箱函数**fir1**实现窗函数法设计步骤（2）～（4）的解题过程。

（1）**fir1**是用窗函数法设计线性相位**FIR**数字滤波器的工具箱函数，以实现线性相位**FIR**数字滤波器的标准窗函数法设计。这里的所谓“标准”，是指在设计低通、高通、带通和带阻**FIR**滤波器时， $H_d(e^{j\omega})$ 分别表示相应的线性相位理想低通、高通、带通和带阻滤波器的频率响应函数。因而将所设计的滤波器的频率响应称为标准频率响应。

Fir1的调用格式及功能:

• **hn=fir1(M, wc)**, 返回6 dB截止频率为wc的M阶（单位脉冲响应 $h(n)$ 长度 $N=M+1$ ）FIR低通（wc为标量）滤波器系数向量hn，默认选用哈密窗。滤波器单位脉冲响应 $h(n)$ 与向量hn的关系为

$$h(n)=hn(n+1) \quad n=0, 1, 2, \dots, M$$

而且满足线性相位条件: $h(n)=h(N-1-n)$ 。其中wc为对 π 归一化的数字频率, $0 \leq wc \leq 1$ 。

当 $wc=[wcl, wcu]$ 时, 得到的是带通滤波器, 其-6 dB通带为 $wcl \leq \omega \leq wcu$ 。

hn=fir1(M, wc, 'ftype')，可设计高通和带阻FIR滤波器。当ftype=high时，设计高通FIR滤波器；当ftype=stop，且wc= [wcl, wcu] 时，设计带阻FIR滤波器。

应当注意，在设计高通和带阻FIR滤波器时，阶数 M 只能取偶数（ $h(n)$ 长度 $N=M+1$ 为奇数）。不过，当用户将 M 设置为奇数时，fir1会自动对 M 加1。

hn=fir1(M, wc, window)，可以指定窗函数向量window。如果缺省window参数，则fir1默认为哈明窗。

hn=fir1(M, wc, bartlett(M+1)), 使用Bartlett窗设计;

hn =fir1(M, wc, blackman(M+1)), 使用blackman窗设计;

hn=fir1(M, wc, 'ftype', window), 通过选择wc、ftype和window参数（含义同上），可以设计各种加窗滤波器。

例7.2.1 的设计程序ep721.m如下:

**%ep721.m: 例7.2.1 用窗函数法设计线性相位高通
FIR数字滤波器**

wp=pi/2; ws=pi/4;

Bt=wp-ws; %计算过渡带宽度

**N0=ceil(6.2*pi/Bt); %根据表7.2.2汉宁窗计算所
需h(n)长度N0, ceil(x)取大于等于x的最小整数**

N=N0+mod(N0+1, 2); %确保h(n)长度N是奇数

**wc=(wp+ws)/2/pi; %计算理想高通滤波器通带
截止频率(关于 π 归一化)**

hn=fir1(N-1, wc, 'high', hanning(N));

%调用fir1计算高通FIR数字滤波器的h(n)

运行程序得到 $h(n)$ 的25个值:

$h(n) = [$ -0.0004 -0.0006 0.0028 0.0071
-0.0000 -0.0185 -0.0210
0.0165 0.0624 0.0355 0.1061
-0.2898 0.6249 -0.2898
-0.1061 0.0355 0.0624 0.0165
-0.0210 0.0185 -0.0000
0.0071 0.0028 -0.0006 -0.0004]

高通FIR数字滤波器的 $h(n)$ 及损耗函数如图7.2.9所示。

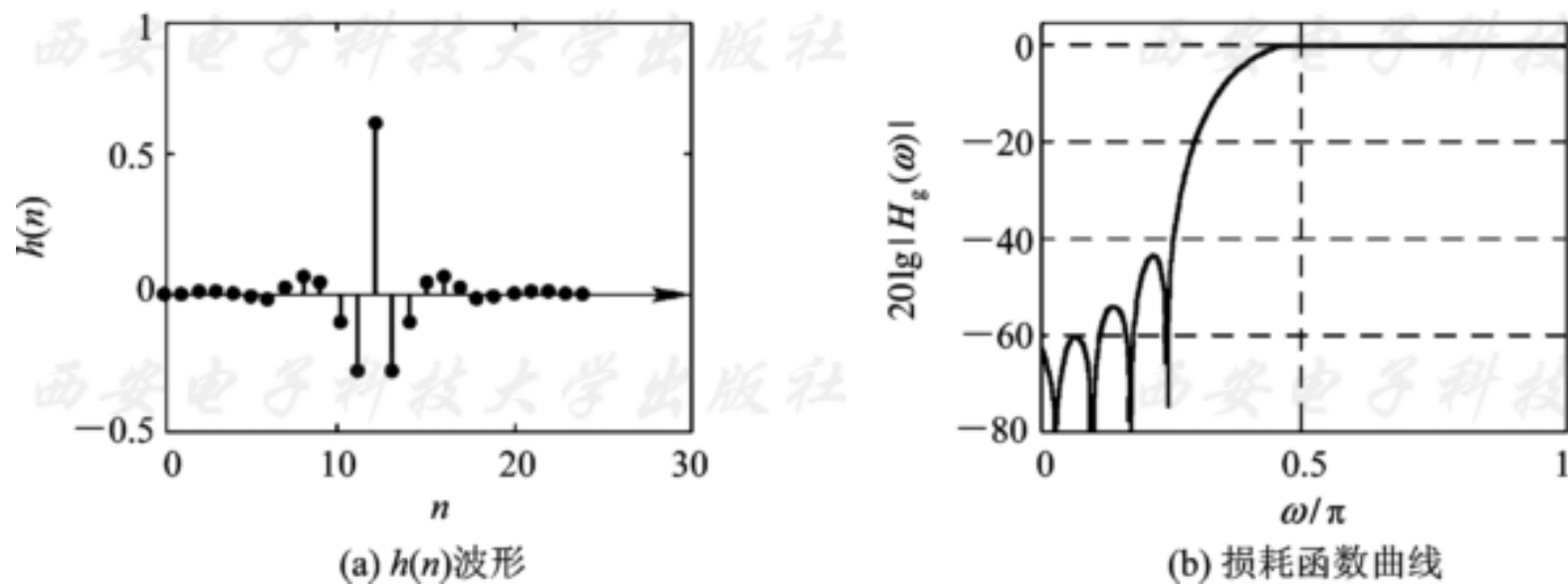
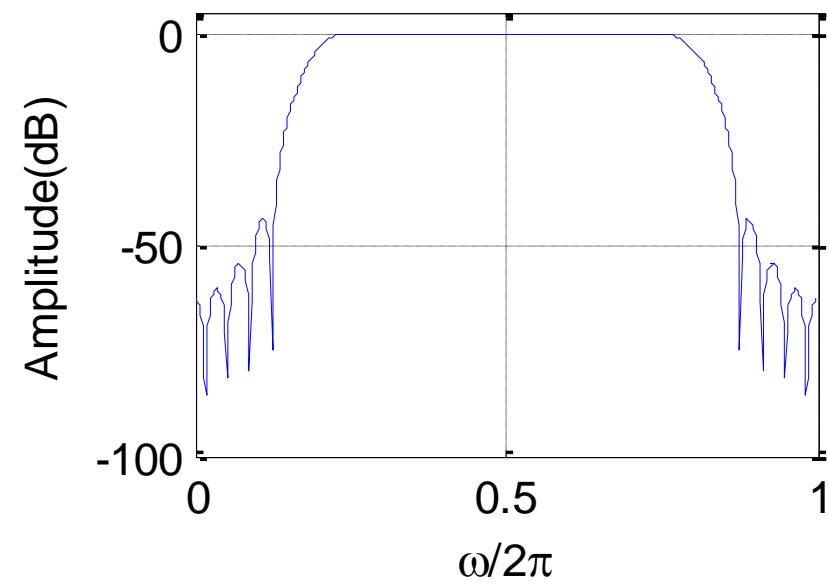
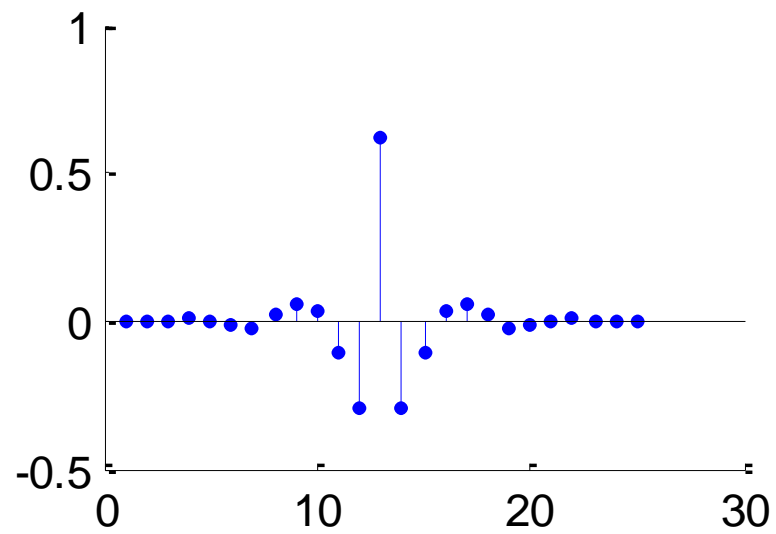


图7.2.9 高通FIR数字滤波器的 $h(n)$ 波形及损耗函数曲线



第7章 有限脉冲响应数字滤波器的设计

1. 线性相位FIR滤波器的特点

$h(n)$, $H_g(w)$, 零点分布

2. 窗函数法设计FIR滤波器.