信号与线性系统分析

第十一章

电子与信息工程学院



目　录

目录

CATALOG

§11.6信号流图

- 概述
- 系统的信号流图表示法
- 术语定义
- 信号流图的性质
- 信号流图的代数运算

一．概述

利用方框图可以描述系统（连续的或离散的），比用微分方程或差分方程更为直观。

线性系统的仿真（模拟）

- **连续系统——相加、倍乘、积分**
- **离散系统——相加、倍乘、延时**

系统框图 $\xrightarrow{\text{简化}}$ **信号流图**

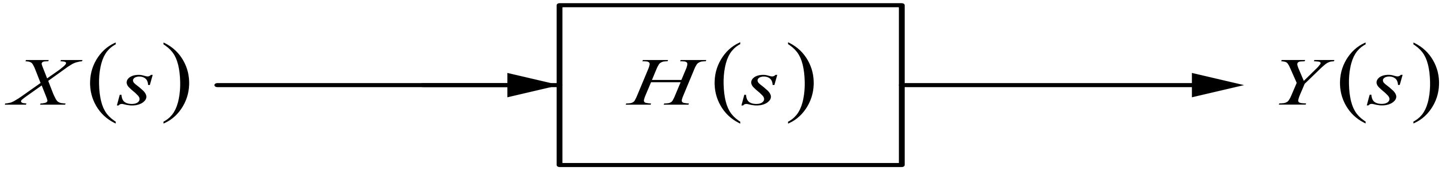
由美国麻省理工学院的梅森（Mason）于20世纪50年代首先提出。
应用于：反馈系统分析、线性方程组求解、线性系统模拟及数字滤波器设计等方面。

信号流图方法的主要优点

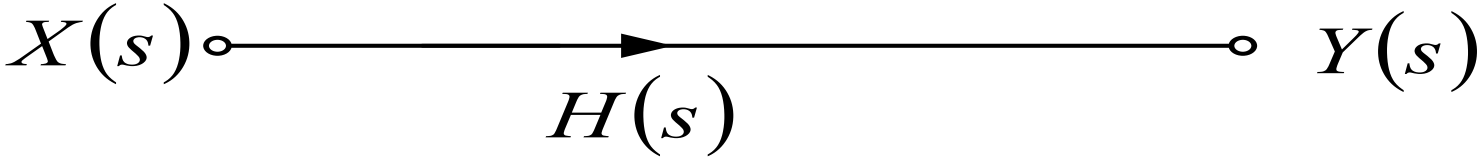
- **系统模型的表示简明清楚；**
- **简化系统函数的计算方程。**

二．系统的信号流图表示法

实际上是用一些点和支路来描述系统：



方框图



流图

$\boldsymbol{X(s)}$、$\boldsymbol{Y(s)}$ **称为结点**

线段表示信号传输的路径，称为支路。

信号的传输方向用箭头表示，转移函数标在箭头附近，相当于乘法器。

三．术语定义

结点：表示系统中变量或信号的点。

转移函数：两个结点之间的增益称为转移函数。

支路：连接两个结点之间的定向线段，支路的增益即为转移函数。

输入结点或源点：只有输出支路的结点，它对应的是自变量（即输入信号）。

输出信号或阱点：只有输入支路的结点，它对应的是因变量（即输出信号）。

混合结点：既有输入支路又有输出支路的结点。

通路：沿支路箭头方向通过各相连支路的途径（不允许有相反方向支路存在）。

开通路：通路与任一结点相交不多于一次。

闭通路：如果通路的终点就是起点，并且与任何其他结点相交不多于一次。闭通路又称环路。

环路增益：环路中各支路转移函数的乘积。

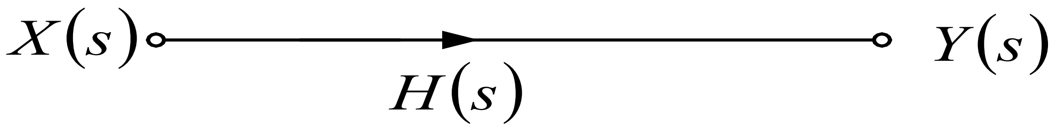
不接触环路：两环路之间没有任何公共结点。

前向通路：从输入结点（源点）到输出结点（阱点）方向的通路上，通过任何结点不多于一次的全部路径。

前向通路增益：前向通路中，各支路转移函数的乘积。

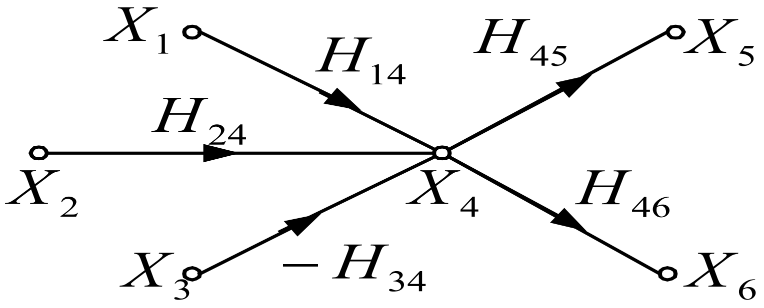
四．信号流图的性质

(1) 支路表示了一个信号与另一信号的函数关系，信号只能沿着支路上的箭头方向通过。



$$\boldsymbol{Y(s) = H(s)X(s)}$$

(2) 结点可以把所有输入支路的信号叠加，并把总和信号传送到所有输出支路。

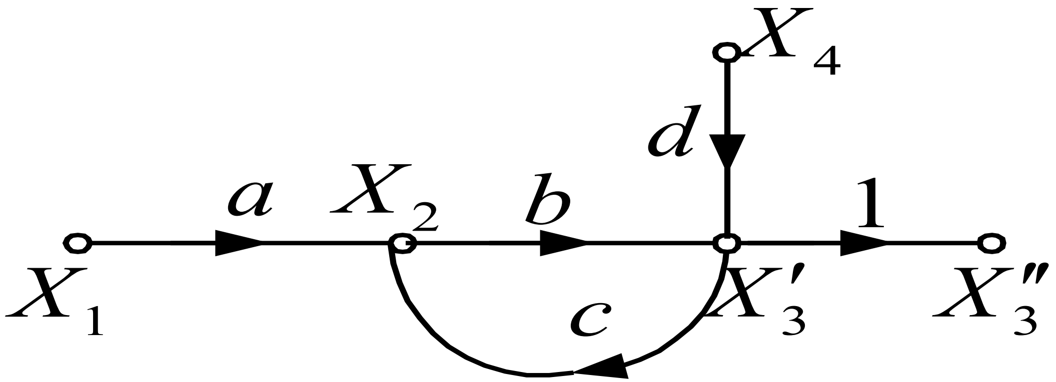


例如结点$\boldsymbol{X_4}$

结点$X_4 = X_1H_{14} + X_2H_{24} - X_3H_{34}$

$X_5 = X_4H_{45}$

(3) 具有输入和输出支路的混合结点，通过增加一个具有单传输的支路，可以把它变成输出结点来处理。



X_3'和X_3''实际上是一个结点。

分成两个结点以后，是既有输入又有输出的混合结点；

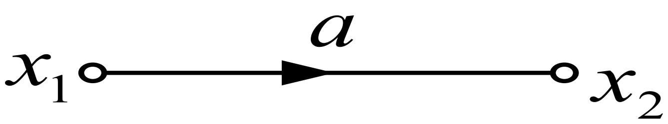
X_3''是只有输入的输出结点。

（4）给定系统，信号流图形式并不是惟一的。这是由于同一系统的方程可以表示成不同形式，因而可以画出不同的流图。

（5）流图转置以后，其转移函数保持不变。所谓转置就是把流图中各支路的信号传输方向调转，同时把输入输出结点对换。

五．信号流图的代数运算

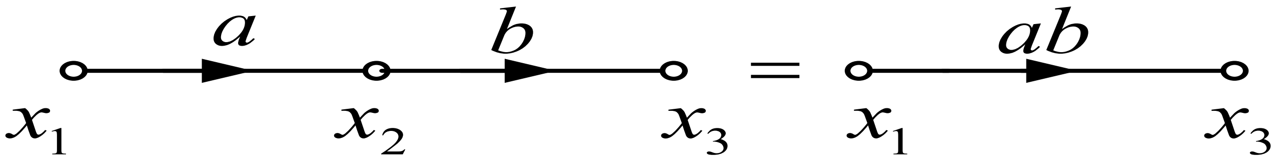
(1）有一个输入支路的结点值等于输入信号乘以支路增益。



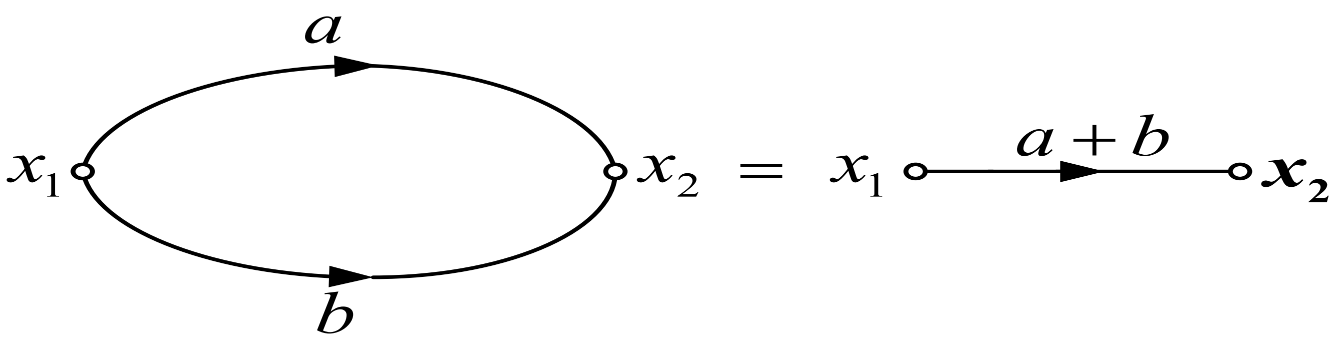
$x_2 = ax_1$

(2）串联支路的合并

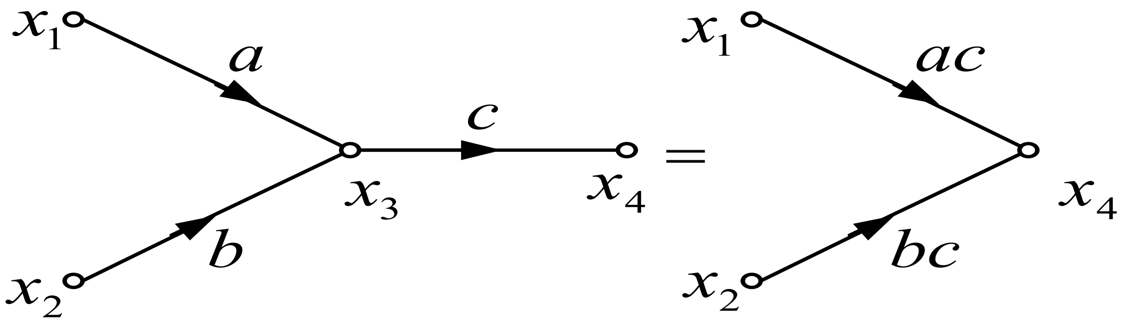
总增益等于各支路增益的乘积。



(3) 并联支路的合并：并联相加

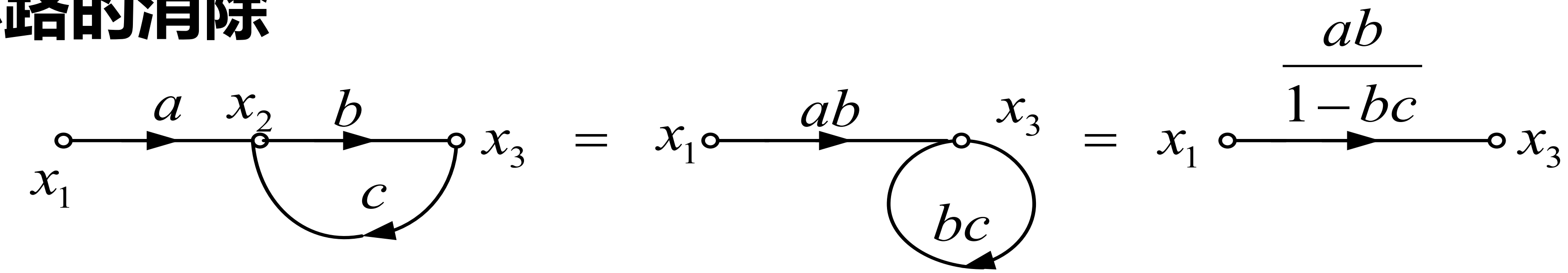


(4) 混合结点的消除



$$
\begin{aligned}
x_4 &= (ax_1 + bx_2)c \\
&= acx_1 + bcx_2
\end{aligned}
$$

(5) 环路的消除



$$
\text{因为}\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 \end{cases} \Longrightarrow x_3 = abx_1 + bcx_3 \Longrightarrow x_3 = \frac{ab}{1-bc}x_1
$$

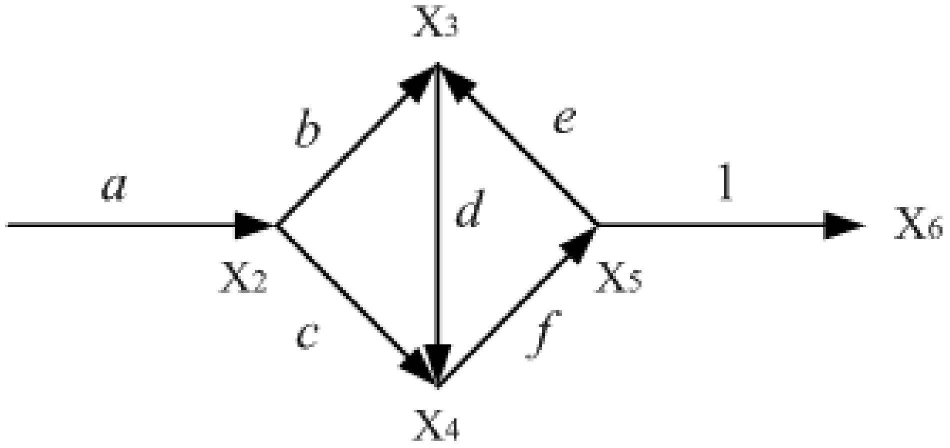
总结：可以通过如下步骤简化信号流图，从而求得系统函数。

① 串联支路合并，减少结点；

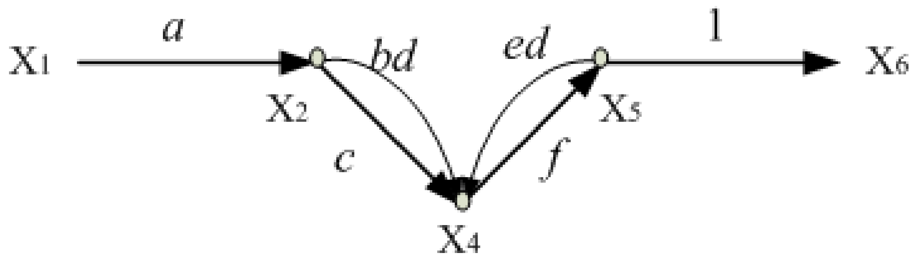
② 并联支路合并，减少支路；

③ 消除环路。

例：化简下面的信号流图



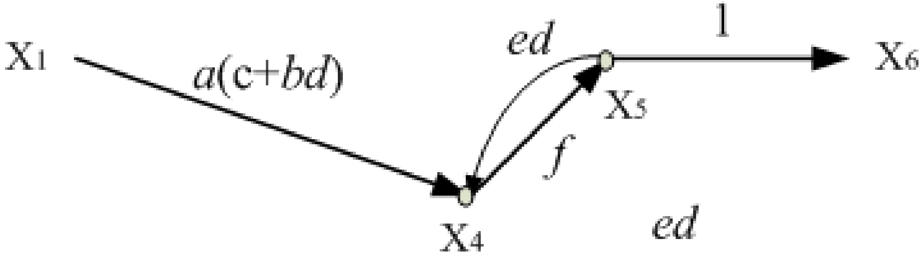
解：① 消去*X*3结点

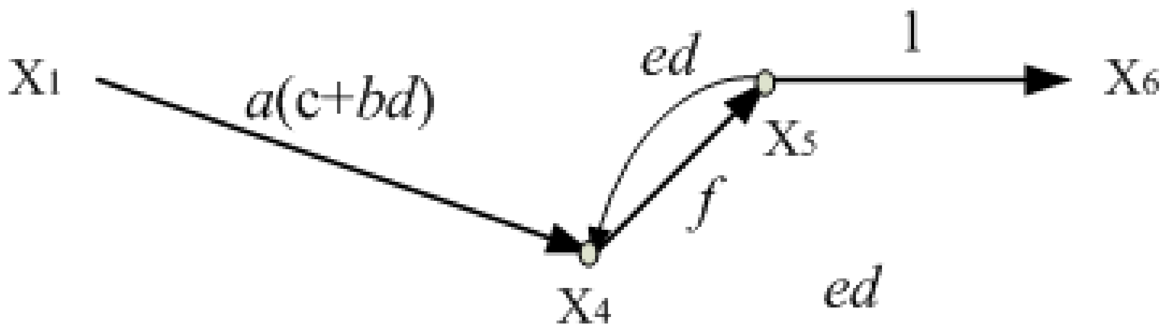


$$X_3 = bX_2 + eX_5, X_4 = dX_3 + cX_2,$$

可以推出$X_4 = d\left(bX_2 + cX_5\right) + cX_2$

②同样道理，可以消去*X*2结点；



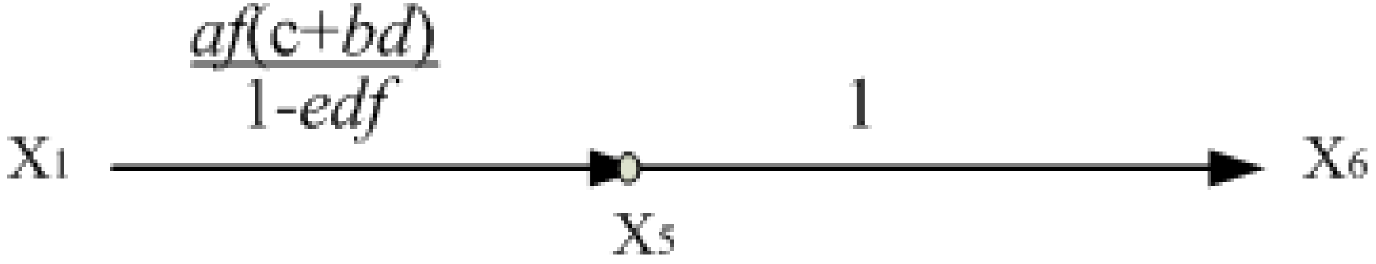


③消去X4结点和环路；

$$X_4 = (ac + abd)X_1 + edX_5,\ X_5 = fX4,$$ 可以推出

$$X_5 = f((ac + abd)X_1 + edX_5),$$

$$X_5 = (afc + afbd)X_1 / \left(1 - edf\right)$$



同学们，回顾我们学习的系统分析方法会发现，对系统的分析从时域到频域，从方框图到信号流图，科学家们始终在不断探索更有效更便捷的方法，并没有因为已经有了一种分析方法就停止不前。而也正是因为他们的不断努力，才有了我们今天多种多样，各有特色的系统分析方法。科学家们这种不断探索，不断创新的精神是青年人应该具备的最宝贵的素质。希望同学们在平时的学习中学好基础知识，打下好的基础。多思考多提问题，做到知其然，也要知其所以然；遇到问题试着从不同角度来思考和解决，培养科学的学习习惯和思考习惯。

(6) 信号流图的梅森增益公式

$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_{k} g_k\Delta_k$$

式中：

△——称为流图的特征行列式。

$$\begin{aligned}\Delta &= 1-(\text{所有不同环路增益之和})\\ &\quad+(\text{每两个互不接触环路增益乘积之和})\\ &\quad-(\text{每三个互不接触环路增益乘积之和})\\ &\quad+\cdots\\ &=1-\sum_{a}L_a+\sum_{b,c}L_bL_c-\sum_{d,e,f}L_dL_eL_f+\cdots\end{aligned}$$

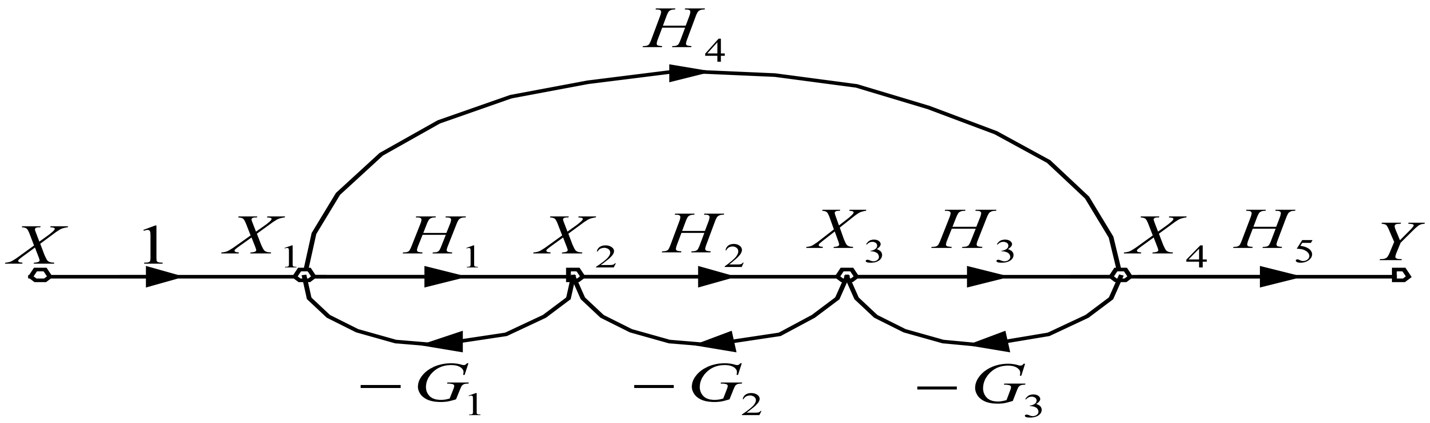
k ——表示由源点到阱点之间第k条前向通路的标号。

g_k ——表示由源点到阱点之间的第 k 条前向通路的增益。

Δ_k ——称为对于第k条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与k条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式。

例　　求下图信号流图表示的系统的系统函数。

$$H=\frac{1}{\Delta}\sum_{k} g_k \Delta_k$$



解答

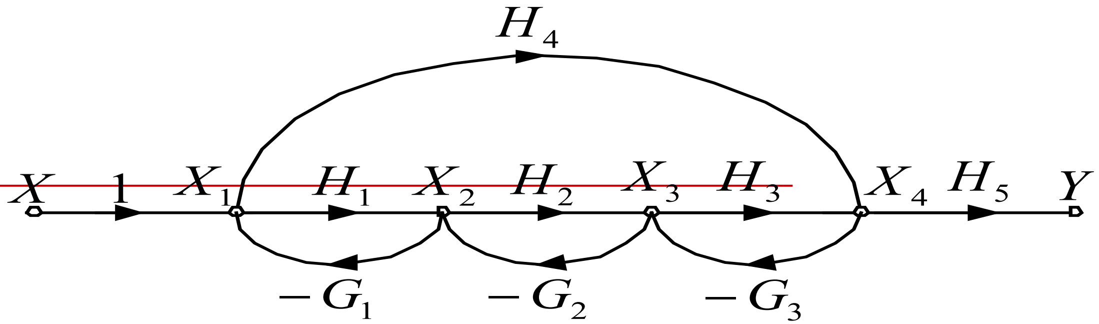
为了求出特征行列式，先求出有关参数。图中的流图共有4个回路，各回路增益为

$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$回路　　$L_1=-G_1H_1$

$X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2$回路　　$L_2=-G_2H_2$

$X_3 \rightarrow X_4 \rightarrow X_3$回路　　$L_3=-G_3H_3$

$X_1 \rightarrow X_4 \rightarrow X_3 \rightarrow X_2 \rightarrow X_1$回路　　$L_4=-G_1G_2G_3H_4$



它只有一对两两互不接触的回路

$$X_1 \to X_2 \to X_1 \qquad\qquad X_3 \to X_4 \to X_3$$

其回路增益乘积为

$$L_1 L_3 = G_1 G_3 H_1 H_3$$

没有三个以上的互不接触回路。所以

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b, L_c - \sum_{d,e,f} L_d, L_e, L_f + \cdots$$

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b, L_c$$

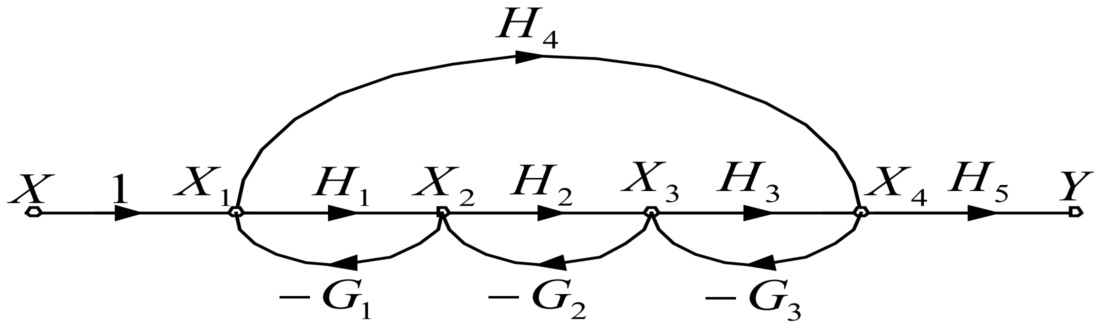
$$= 1 + \left(G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4\right) + G_1 G_3 H_1 H_3$$

图中有两条前向通路，对于前向通路

$$X \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \to Y$$

其增益 $g_1 = H_1 H_2 H_3 H_5$

由于各回路都与该通路相接触，故 $\Delta_1 = 1$



对于前向通路 $X \to X_1 \to X_4 \to Y$

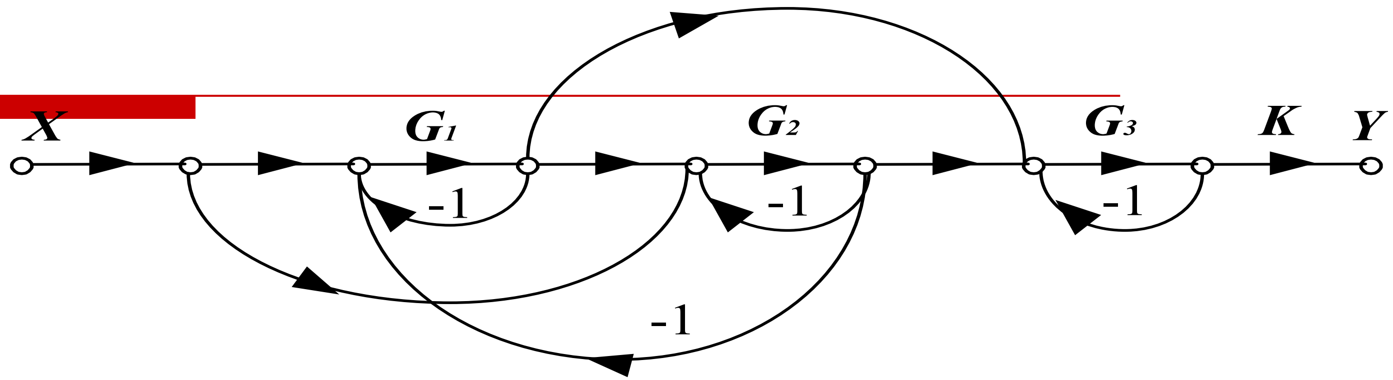
其增益 $g_2 = H_4 H_5$

不与g_2接触的回路有 $X_2 \to X_3 \to X_2$

所以 $\Delta_2 = 1 - \sum_a L_a = 1 + G_2 H_2$

按式$H = \dfrac{1}{\Delta}\sum_k g_k \Delta_k$，得

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_5 + H_4 H_5 (1 + G_2 H_2)}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4 + G_1 G_3 H_1 H_3}$$



环路:

L1:-G1

L2:-G2

L3:-G3

L4:-G1G2

两两不接触的环路:

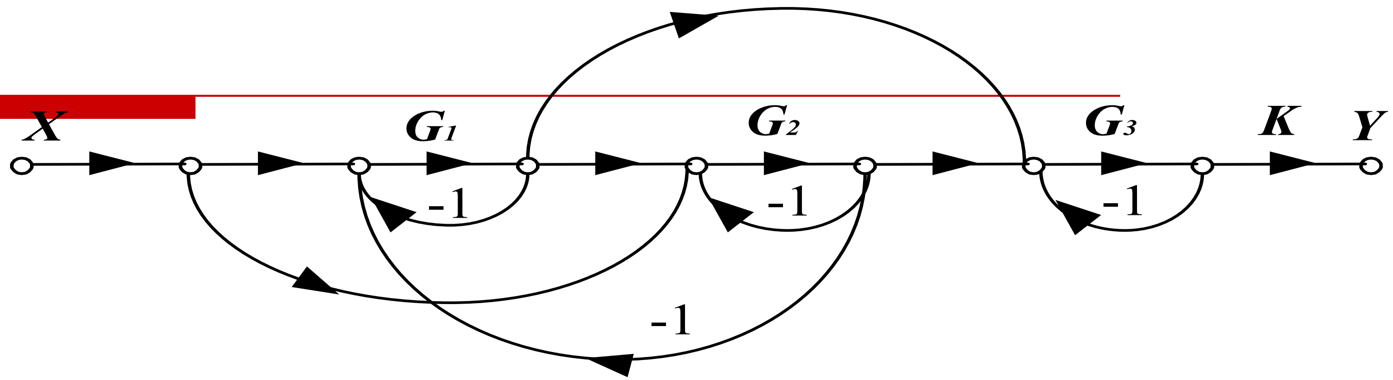
L1L2;L1L3;L2L3;L3L4

三个不接触的环路:

L1L2L3

$$\Delta = 1-(-G1-G2-G3-G1G2)+(G1G2+G2G3+G1G3+G1G2G3)-(-G1G2G3)$$

$$=1+G1+G2+G3+2G1G2+G1G3+G2G3+2G1G2G3$$



$$g1 = G1G2G3K,\ \ \Delta 1 = 1;\ \ g2 = G2G3K,\ \ \Delta 2 = 1 + G1;$$

$$g3 = G1G3K,\ \ \Delta 3 = 1 + G2;\ g4 = -G1G2G3K, \Delta 4 = 1$$ G2---（-1）---G1---G3---K

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{g1\Delta 1 + g2\Delta 2 + g3\Delta 3 + g4\Delta 4}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1G_3K(1+G_2) + G_2G_3K(1+G_1)}{\Delta}$$

由系统函数画出信号流图

假定一个二阶系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{b_0s^2+b_1s+b_2}{s^2+a_1s+a_2}$$

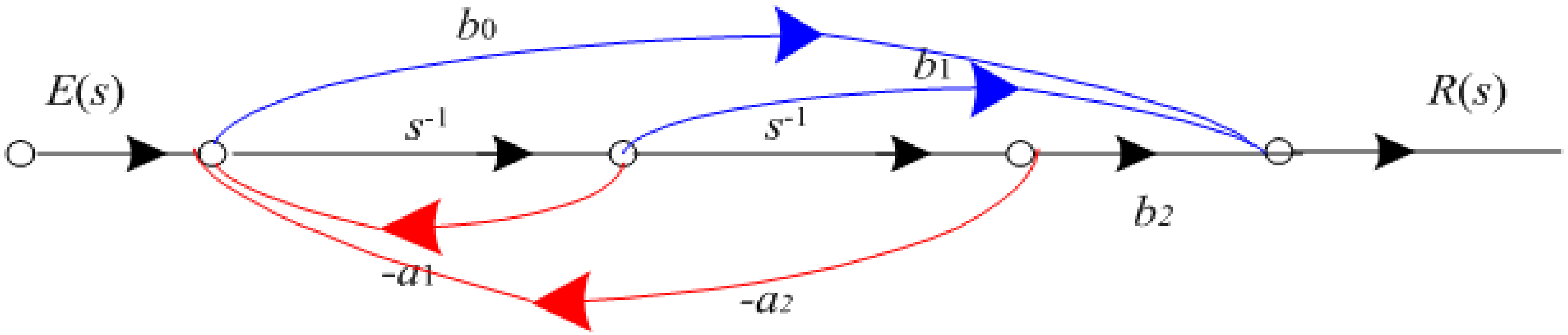
$$H=\frac{\sum_k g_k\Delta_k}{1-\sum_a L_a+\sum_{b,c}L_bL_c-\sum_{d,e,f}L_dL_eL_f+\cdots}$$

将分子分母同时除以s²，将函数改写成梅森公式的形式，

$$H(s)=\frac{b_0+b_1s^{-1}+b_2s^{-2}}{1-(-a_1s^{-1}-a_2s^{-2})}=\frac{b_0\cdot 1+b_1s^{-1}\cdot 1+b_2s^{-2}\cdot 1}{1-(-a_1s^{-1}-a_2s^{-2})}$$

分母是Δ,其中$-a_1s^{-1}-a_2s^{-2}$表示两个互相接触的回路， 增益分别为$-a_1s^{-1}$和$-a_2s^{-2}$;分子可看作3条前向通路， 增益分别为b_0, b_1s^{-1}, b_2s^{-2},并且$\Delta_i=1$, 即2个环路和3条通路相接触

$$H(s)=\frac{b_0\cdot 1+b_1 s^{-1}\cdot 1+b_2 s^{-2}\cdot 1}{1-(-a_1 s^{-1}-a_2 s^{-2})}$$



一般情况下，假定某一*k* 阶物理系统可用如下微分方程表示

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}r(t)+a_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}r(t)+\cdots+a_{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+a_k r(t)$$

$$=b_0\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}e(t)+b_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}e(t)+\cdots+b_{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+b_k e(t)$$

系统函数（零状态下*R*(*s*)/*E*(*s*)）为

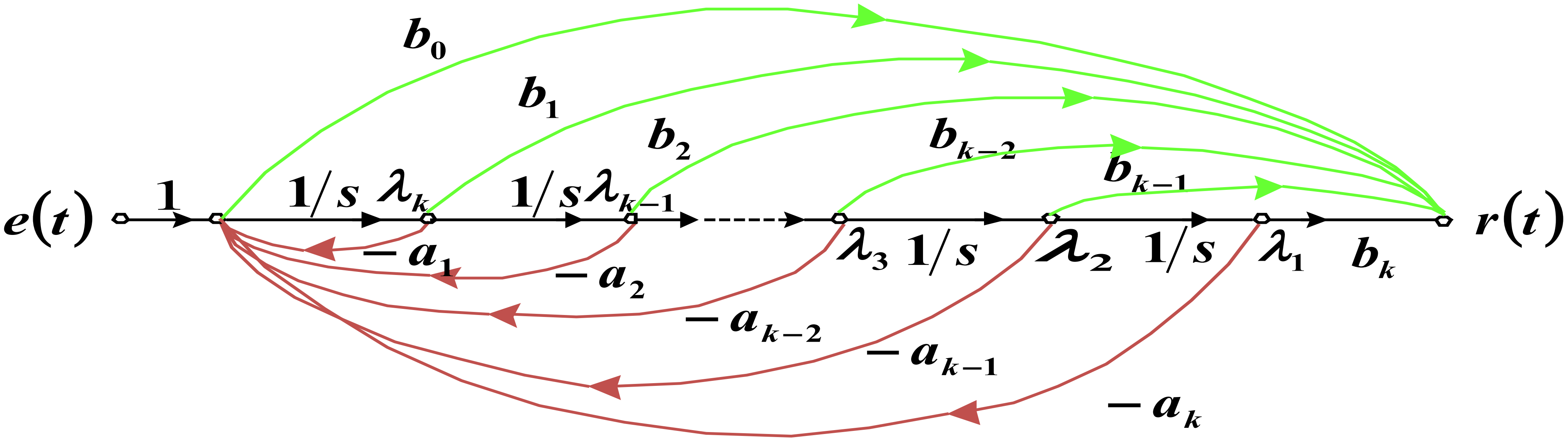
$$H(s)=\frac{b_0 s^k+b_1 s^{k-1}+\cdots+b_{k-1}s+b_k}{s^k+a_1 s^{k-1}+\cdots+a_{k-1}s+a_k}$$

将函数改写成梅森公式的形式，系统函数表示成

$$H(s)=\frac{b_0+b_1 s^{-1}+\cdots+b_{k-1}s^{1-k}+b_k s^{-k}}{1+a_1 s^{-1}+\cdots+a_{k-1}s^{1-k}+a_k s^{-k}}$$

$$H(s)=\frac{b_0+b_1s^{-1}+\cdots+b_{k-1}s^{1-k}+b_ks^{-k}}{1+a_1s^{-1}+\cdots+a_{k-1}s^{1-k}+a_ks^{-k}}$$

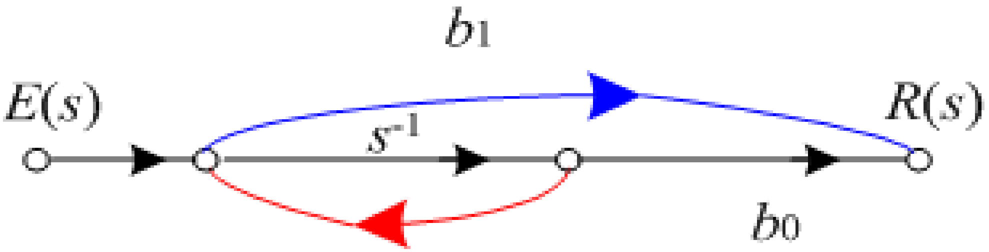
当用积分器来实现该系统时，因此流图如下

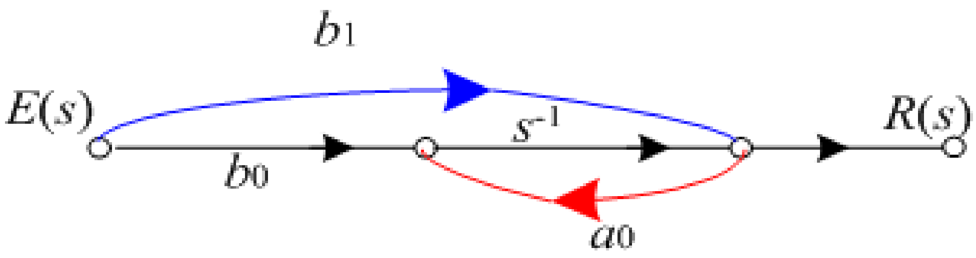


系统的结构：

对同一个系统函数根据实际需要可以有多种不同的实现方法，常用的有直接形式，级联形式和并联形式。

把流图中各支路的信号传输方向调转，同时把输入输出结点对换就是流图转置。流图转置以后,系统函数保持不变。





例　求离散系统的信号流图。

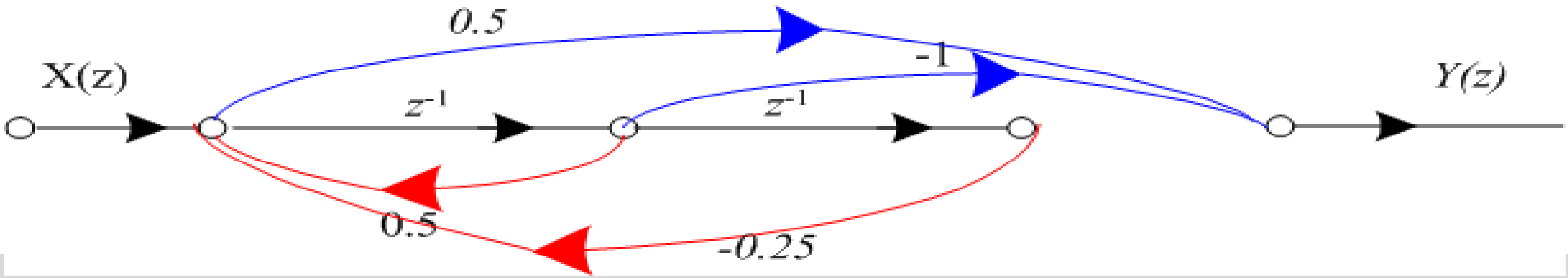
$$4y(n)-2y(n-2)+y(n-3)=2x(n)-4x(n-1)$$

解答　**先求出系统函数，再画流图**

$$4Y(z)-2z^{-2}Y(z)+z^{-3}Y(z)=2X(z)-4z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{2-4z^{-1}}{4-2z^{-2}+z^{-3}}=\frac{0.5-z^{-1}}{1-0.5z^{-2}+0.25z^{-3}}$$

$$=\frac{0.5-z^{-1}}{1-(0.5z^{-2}-0.25z^{-3})}$$

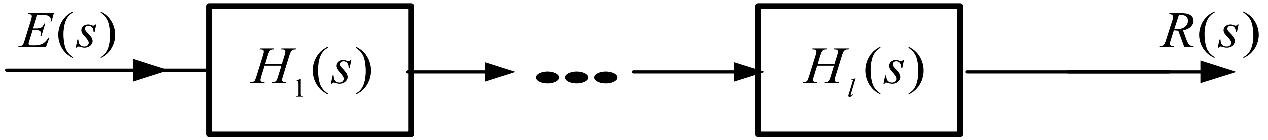


级联形式

将系统函数分解为几个较简单的子系统函数乘积的形式。

***子系统中的各个系数必须为实数**

以连续时间系统为例：（离散时间系统同理）



级联$H(s)=H_1(s)\bullet H_2(s)\cdots H_l(s)$

子系统可以选择简单的一阶或二阶函数：

$$H(s)=\frac{b_0+b_1 s^{-1}+b_2 s^{-2}}{1-(-a_1 s^{-1}-a_2 s^{-2})}$$

$$H(s)=\frac{b_0+b_1 s^{-1}}{1-(-a_1 s^{-1})}$$

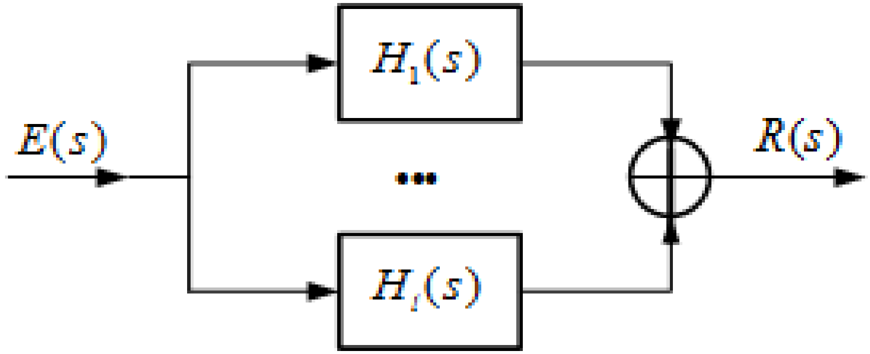
通常系统函数的一阶实极点可构成一阶子系统，共轭复极点构成二阶子系统

并联形式

将系统函数分解为几个较简单的子系统函数和的形式。

***子系统中的各个系数必须为实数**

以连续时间系统为例：（离散时间系统同理）



并联：$H(s)=H_1(s)+H_2(s)+\cdots+H_l(s)$

子系统可以选择简单的一阶或二阶函数：

$$H(s)=\frac{b_0+b_1s^{-1}+b_2s^{-2}}{1-(-a_1s^{-1}-a_2s^{-2})}\qquad H(s)=\frac{b_0+b_1s^{-1}}{1-(-a_1s^{-1})}$$

例　求系统的并联和级联形式的信号流图

$$H(s)=\frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3}$$

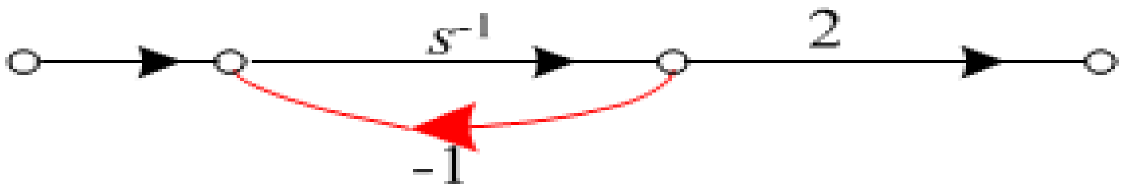
解答

$$H(s)=\frac{2s+4}{(s+1)(s^2+2s+3)}$$

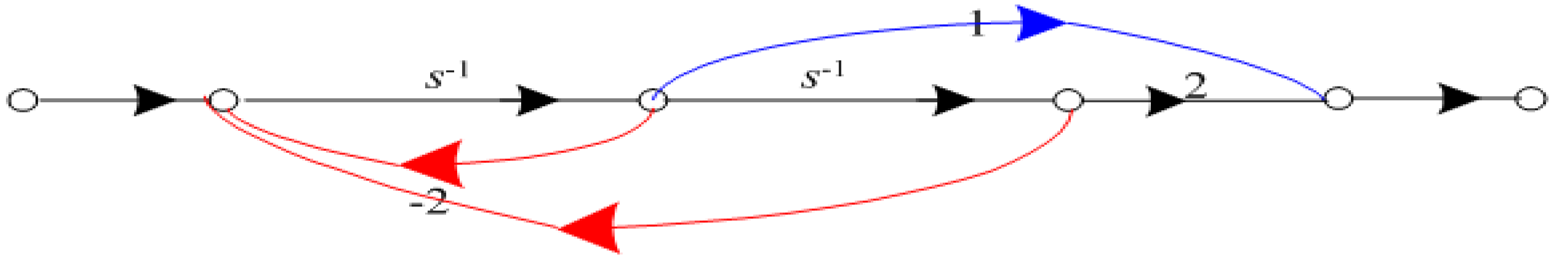
级联形式：

$$H(s)=\frac{2s+4}{(s+1)(s^2+2s+3)}=\frac{2}{(s+1)}\frac{s+2}{(s^2+2s+3)}$$

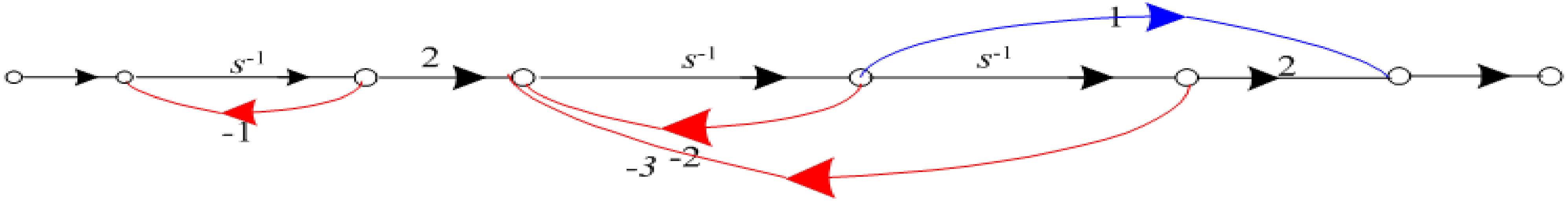
子系统$H_1(s)=\dfrac{2}{(s+1)}=\dfrac{2s^{-1}}{(1+s^{-1})}$



$$子系统H_2(s)=\frac{s+2}{(s^2+2s+3)}=\frac{s^{-1}+2s^{-2}}{(1+2s^{-1}+3s^{-2})}$$



级联形式的信号流图



并联形式：

$$H(s)=\frac{2s+4}{(s+1)(s^2+2s+3)}=\frac{k_1}{(s+1)}+\frac{k_2s+k_3}{(s^2+2s+3)}$$

$$k_1=(s+1)H(s)\big|_{s=-1}=1$$

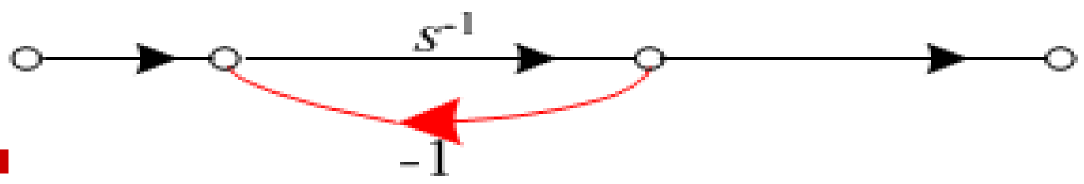
$$\frac{1}{(s+1)}+\frac{k_2s+k_3}{(s^2+2s+3)}=\frac{s^2+2s+3+(k_2s+k_3)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+3)}$$

$$=\frac{2s+4}{(s+1)(s^2+2s+3)}$$

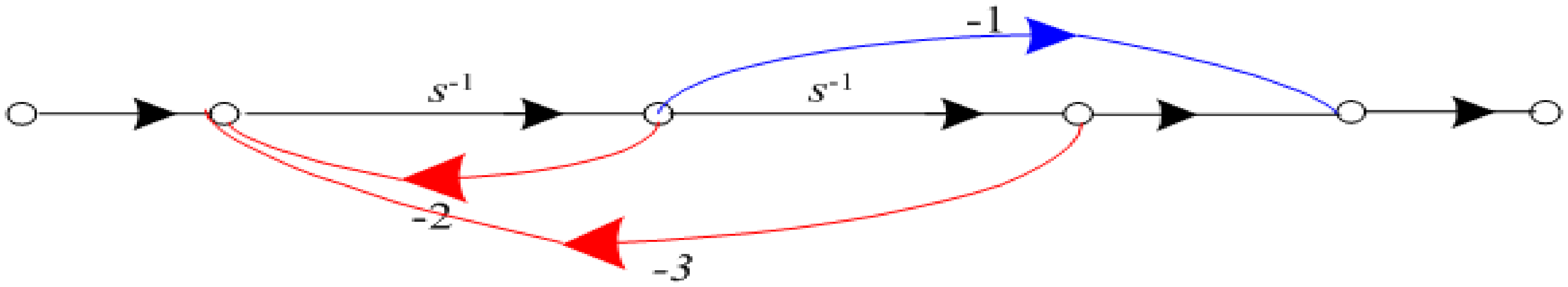
$$\therefore k_2=-1, k_3=1$$

$$H(s)=\frac{1}{(s+1)}+\frac{-s+1}{(s^2+2s+3)}=\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}+\frac{-s^{-1}+s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}}$$

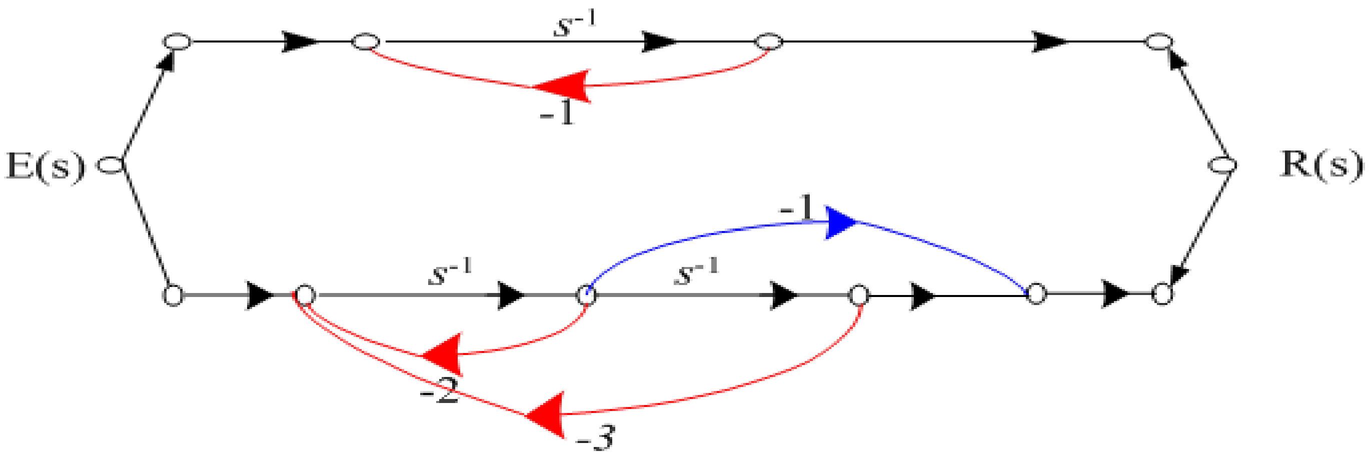
$$子系统H_1(s)=\frac{s^{-1}}{1+s^{-1}}$$



$$子系统H_2(s)=\frac{-s^{-1}+s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}}$$



并联形式的信号流图：



例 求系统的并联和级联形式的信号流图

$$H(s)=\frac{s+2}{s^2+5s+4}$$

解答

$$H(s)=\frac{\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{2}{3}}{s+4}=\frac{s+2}{s+1}\cdot\frac{1}{s+4}$$