

第5章 时域离散系统的网络结构

5.1 引言

5.2 用信号流图表示网络结构

5.3 无限长脉冲响应基本网络结构

5.4 有限长脉冲响应基本网络结构

5.5 线性相位结构

5.1 引言

一般时域离散系统或网络的描述:

- 差分方程
- 单位脉冲响应
- 系统函数

如果系统输入、输出服从 N 阶差分方程:

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^N a_i y(n-i) \quad M \leq N$$

则其系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

为了用计算机或专用硬件完成对输入信号的处理（运算），必须把公式变换成一种算法，按照这种算法对输入信号进行运算。

差分方程就是对输入信号的一种直接算法，如果已知输入信号 $x(n)$ 以及 a_i 、 b_i 和 n 时刻以前的 $y(n-i)$ ，则可以递推出 $y(n)$ 值。

但给定一个差分方程，不同的算法有多种。

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{-1.5}{1 - 0.3z^{-1}} + \frac{2.5}{1 - 0.5z^{-1}}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 - 0.3z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

可以证明以上 $H_1(z)=H_2(z)=H_3(z)$ ，但它们具有不同的算法。

不同的算法直接影响系统运算误差、运算速度以及系统的复杂程度和成本等，因此研究实现信号处理的算法是一个很重要的问题。

我们用网络结构表示具体的算法，因此网络结构实际表示的是一种运算结构。

5.2 用信号流图表示网络结构

数字信号处理中有三种基本算法，即乘法、加法和单位延迟。三种基本运算框图及其流图如图5.2.1所示。

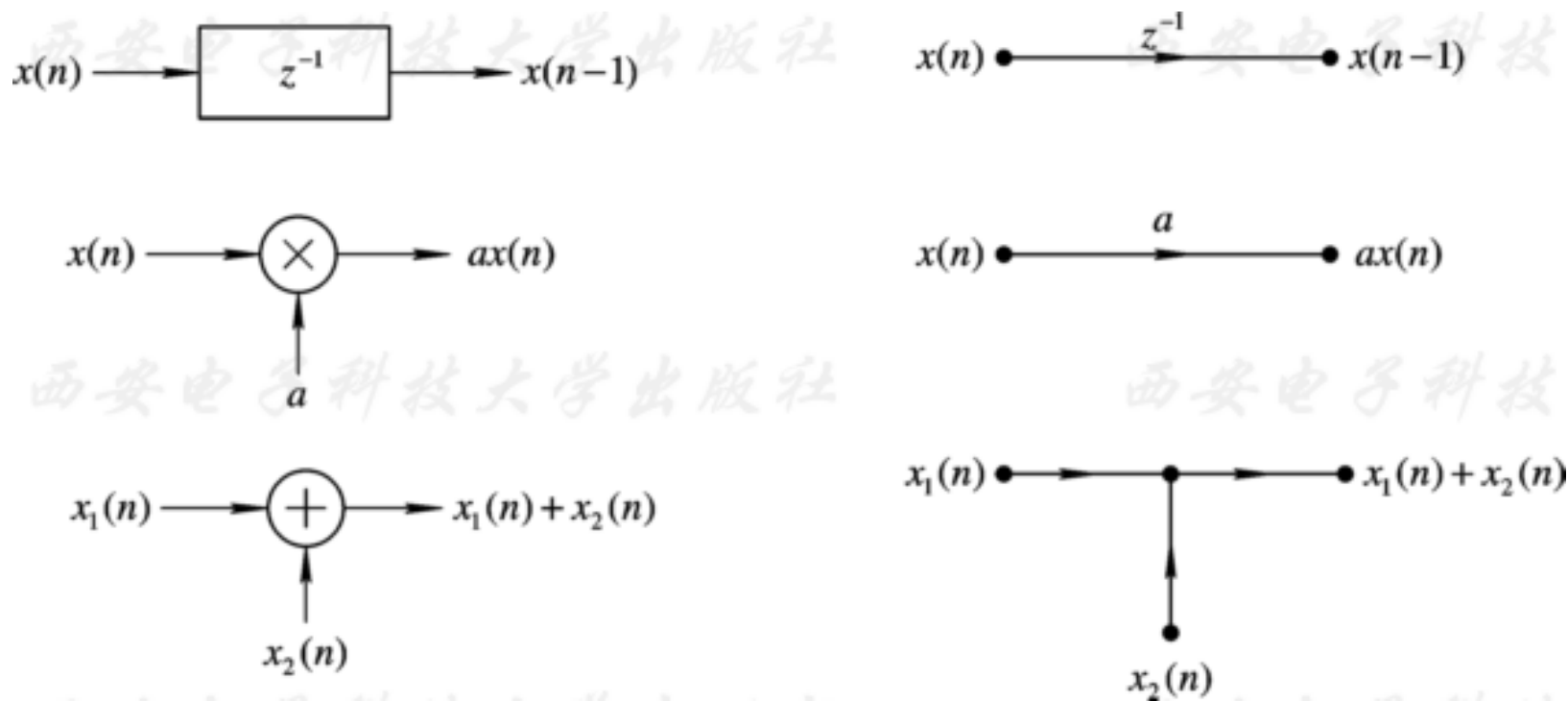
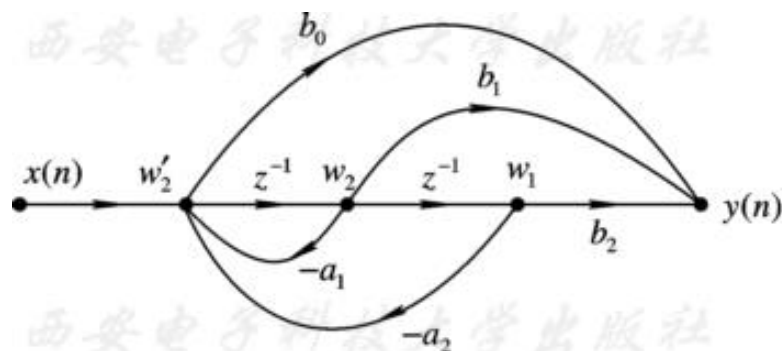


图5.2.1 三种基本运算的流图表示

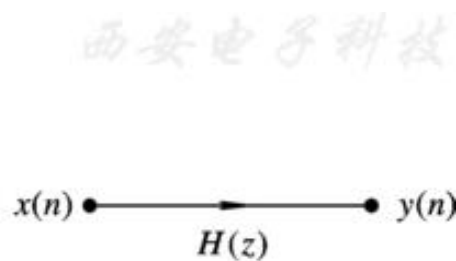
不同的信号流图代表不同的运算方法，而对于同一个系统函数可以有多种信号流图与之相对应。

基本信号流图：

- (1) 信号流图中所有支路都是基本支路，即支路增益是常数或者是 z^{-1} ；
- (2) 流图环路中必须存在延迟支路；
- (3) 节点和支路的数目是有限的。



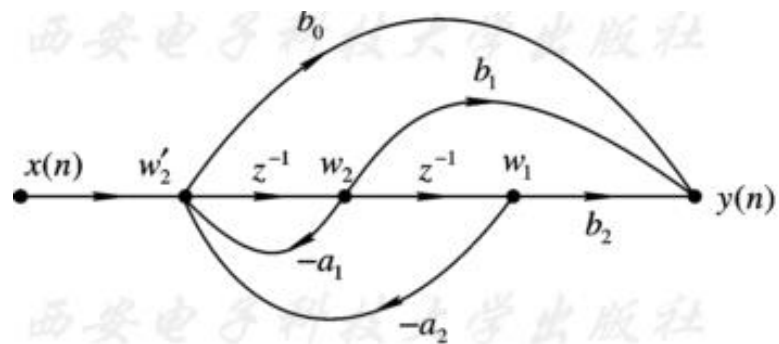
(a) 基本信号流图



(b) 非基本信号流图

根据信号流图可以求出网络的系统函数。

【例5.2.1】 求如图所示信号流图决定的系统函数 $H(z)$ 。



$$\begin{cases} W_1(z) = W_2(z)z^{-1} \\ W_2(z) = W'_2(z)z^{-1} \\ W'_2(z) = X(z) - a_1W_2(z) - a_2W_1(z) \\ Y(z) = b_2W_1(z) + b_1W_2(z) + b_0W'_2(z) \end{cases}$$

得到：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}$$

当结构复杂时，上面利用节点变量方程联立求解的方法较麻烦，不如用梅逊（Masson）公式直接写 $H(z)$ 表示式方便。

信号流图的梅森增益公式

式中：

$$H = \frac{1}{\Delta} \sum_k g_k \Delta_k$$

Δ ——称为流图的特征行列式。

$\Delta = 1 -$ (所有不同环路增益之和)

$+ ($ 每两个互不接触环路增益乘积之和)

$- ($ 每三个互不接触环路增益乘积之和)

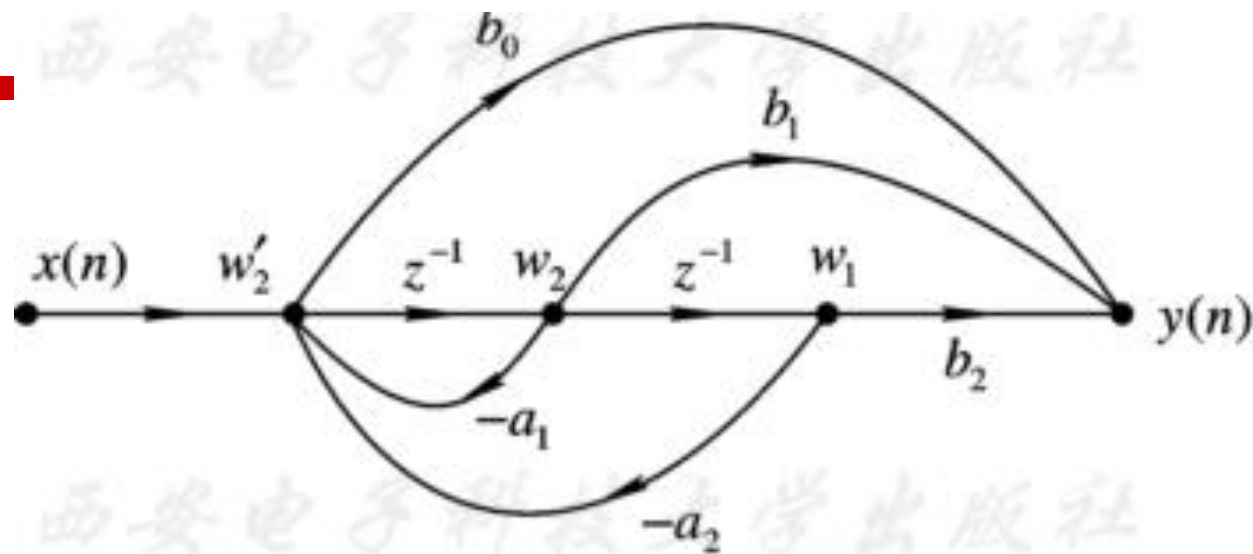
$+ \dots$

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \dots$$

k ——表示由源点到阱点之间第 k 条前向通路的标号。

g_k ——表示由源点到阱点之间的第 k 条前向通路的增益。

Δ_k ——称为对于第 k 条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与 k 条前向通路相接触的环路外，余下的特征行列式。



$$L_1 = -a_1 z^{-1}, L_2 = -a_2 z^{-2}, \Delta = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

$$g_1 = b_0, g_2 = b_1 z^{-1}, g_3 = b_2 z^{-2}, \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 1$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

一般将网络结构分成两类：

一类称为有限长单位脉冲响应网络，
简称**FIR**（**Finite Impulse Response**）网络。

另一类称为无限长单位脉冲响应网络，
简称**IIR**（**Infinite Impulse Response**）网络。

FIR网络中一般不存在输出对输入的反馈支路，因此差分方程用下式 描述：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i)$$

其单位脉冲响应 $h(n)$ 是有限长的，按照上式， $h(n)$ 表示为：

$$h(n) = \begin{cases} b_n & 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i}$$

IIR网络结构存在输出对输入的反馈支路，也就是说，信号流图中存在反馈环路。

这类网络的单位脉冲响应是无限长的。例如，一个简单的一阶**IIR**网络的差分方程为

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

其单位脉冲响应 $h(n)=a^n u(n)$ 。

这两类不同的网络结构各有不同的特点，下面分类叙述其网络结构。

5.3 无限长脉冲响应基本网络结构

IIR网络的基本网络结构有三种，即直接型、级联型和并联型。

1. 直接型

将 N 阶差分方程重写如下：

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N a_i y(n-i)$$

对应的系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}$$

$M=N=2$ 时的系统函数为

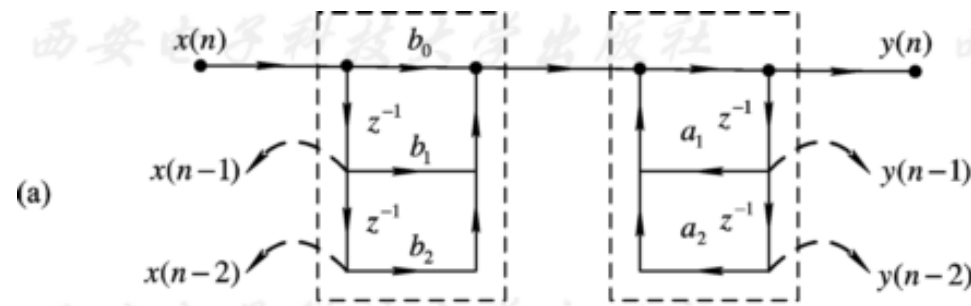
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$

差分方程为:

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$

可以直接按照 $H(z)$ 或者差分方程画出直接型结构流图。

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2)$$



$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

$$= H_2(z)H_1(z)$$

$$w_1 = w_2$$

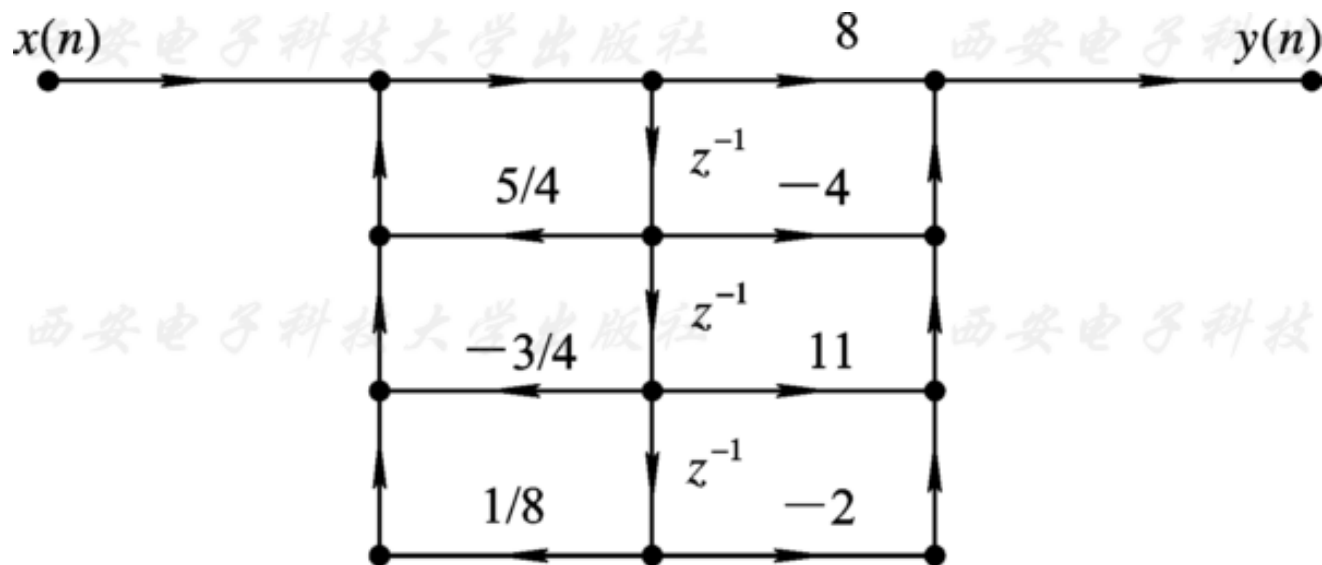
两个系统交换次序

【例5.3.1】 设IIR数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2} - \frac{1}{8}z^{-3}}$$

画出该滤波器的直接型结构。

解



2. 级联型

系统函数 $H(z)$ 中，分子、分母均为多项式，且多项式的系数一般为实数。现将分子、分母多项式分别进行因式分解，得到：

$$H(z) = A \frac{\prod_{r=1}^M (1 - C_r z^{-1})}{\prod_{r=1}^N (1 - d_r z^{-1})}$$

式中, A 是常数; C_r 和 d_r 分别表示 $H(z)$ 的零点和极点。

由于多项式的系数是实数, C_r 和 d_r 是实数或者是共轭成对的复数, 将共轭成对的零点(极点)放在一起, 形成一个二阶多项式, 其系数仍为实数; 再将分子、分母均为实系数的二阶多项式放在一起, 形成一个二阶网络 $H_j(z)$ 。

$H_j(z)$ 如下式:

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1} + \beta_{2j}z^{-2}}{1 - a_{1j}z^{-1} - a_{2j}z^{-2}}$$

式中, β_{0j} 、 β_{1j} 、 β_{2j} 、 α_{1j} 和 α_{2j} 均为实数。这样 $H(z)$ 就分解成一些一阶或二阶的子系统函数的相乘形式:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_k(z)$$

式中 $H_i(z)$ 表示一个一阶或二阶的数字网络的子系统函数, 每个 $H_i(z)$ 的网络结构均采用前面介绍的直接型网络结构, $H(z)$ 则由 k 个子系统级联构成。

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1}}{1 - a_{1j}z^{-1}}$$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1} + \beta_{2j}z^{-2}}{1 - a_{1j}z^{-1} - a_{2j}z^{-2}}$$

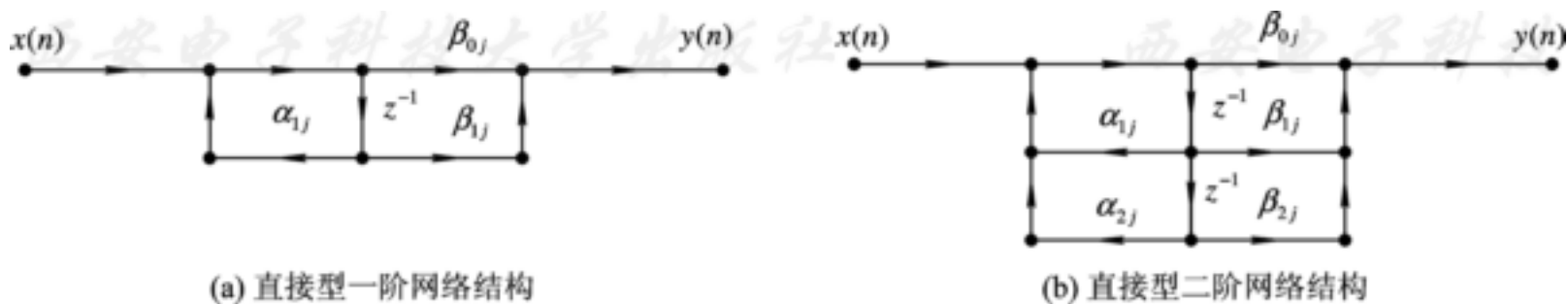


图5.3.3 一阶和二阶直接型网络结构

【例5.3.2】 设系统函数 $H(z)$ 如下式：

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

试画出其级联型网络结构。

解 将 $H(z)$ 的分子、分母进行因式分解，得到：

$$H(z) = \frac{(2 - 0.379z^{-1})(4 - 1.24z^{-1} + 5.264z^{-2})}{(1 - 0.25z^{-1})(1 - z^{-1} + 0.5z^{-2})}$$





级联型结构中每一个一阶网络决定一个零点、一个极点，每一个二阶网络决定一对零点、一对极点。

调整 β_{0j} 、 β_{1j} 和 β_{2j} 三个系数可以改变一对零点的位置，调整 α_{1j} 和 α_{2j} 可以改变一对极点的位置。

因此，相对直接型结构，其优点是调整方便。此外，级联结构中后面的网络输出不会再流到前面，运算误差的积累相对直接型也小。

3. 并联型

如果将级联形式的 $H(z)$ 展成部分分式形式，则得到：

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \cdots + H_k(z)$$

对应的网络结构为这 k 个子系统**并联**。上式中， $H_j(z)$ 通常为一阶网络或二阶网络，网络系统均为实数。

二阶网络的系统函数一般为

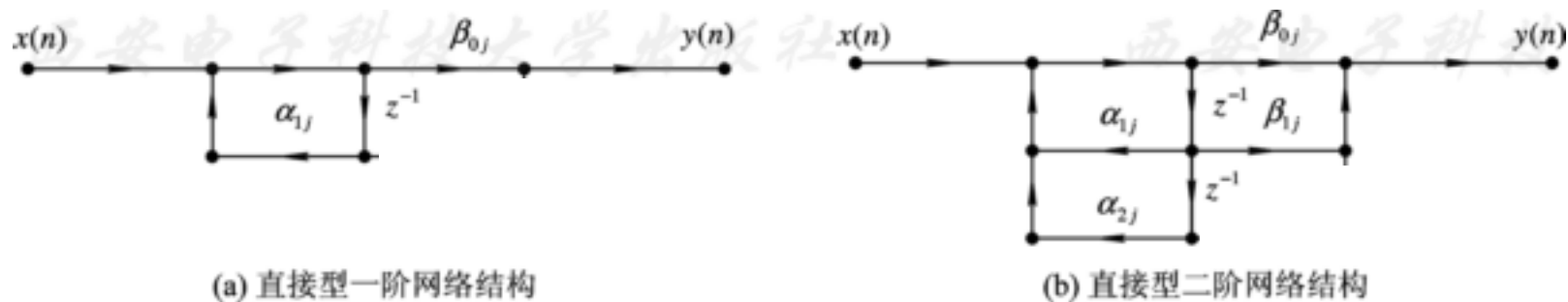
$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1}}{1 - \alpha_{1j}z^{-1} - \alpha_{2j}z^{-2}}$$

式中， β_{0j} 、 β_{1j} 、 α_{1j} 和 α_{2j} 都是实数。

如果 $\beta_{1j} = \alpha_{2j} = 0$ ，则构成一阶网络。其系统函数为： $H_j(z) = \frac{\beta_{0j}}{1 - \alpha_{1j}z^{-1}}$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j}}{1 - a_{1j}z^{-1}}$$

$$H_j(z) = \frac{\beta_{0j} + \beta_{1j}z^{-1}}{1 - a_{1j}z^{-1} - a_{2j}z^{-2}}$$



并联型网络一阶和二阶直接型网络结构

$$H(z) = \frac{8 - 4z^{-1} + 11z^{-2} - 2z^{-3}}{1 - 1.25z^{-1} + 0.75z^{-2} - 0.125z^{-3}}$$

【例5.3.3】 画出例题5.3.2中的 $H(z)$ 的并联型结构。

解 将 $H(z)$ 展成部分分式形式：

$$H(z) = 16 + \frac{8}{1 - 0.25z^{-1}} + \frac{-16 + 20z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

将每一部分用直接型结构实现，其并联型网络结构如图5.3.5所示。

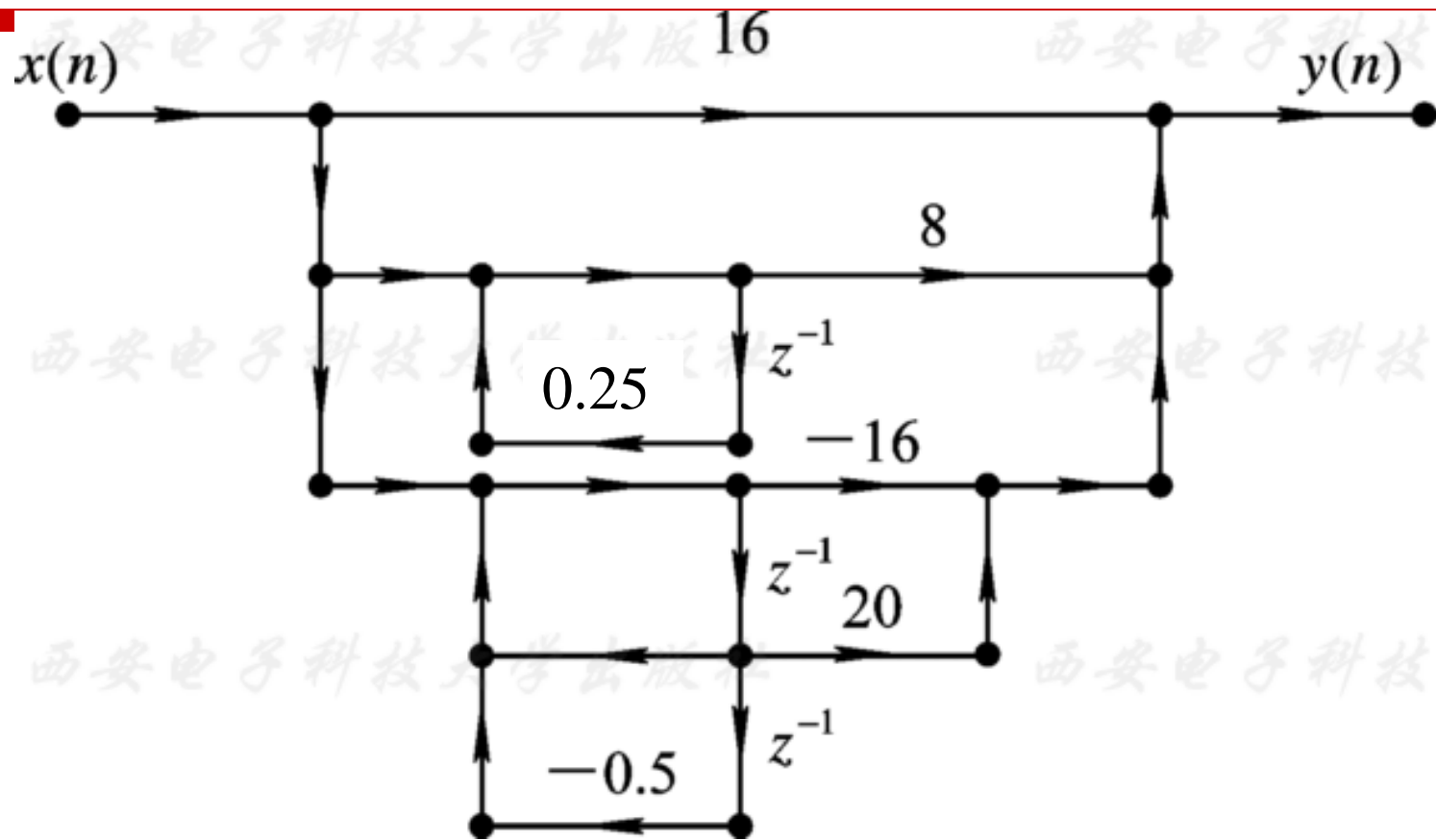


图5.3.5 例5.3.3图

在这种并联型结构中，每一个一阶网络决定一个实数极点，每一个二阶网络决定一对共轭极点，因此调整极点位置方便，但调整零点位置不如级联型方便。

另外，各个基本网络是并联的，产生的运算误差互不影响，不像直接型和级联型那样有误差积累，因此，并联形式运算误差最小。

由于基本网络并联，可同时对输入信号进行运算，因此并联型结构与直接型和级联型比较，其运算速度最高。

5.4 有限长脉冲响应基本网络结构

FIR网络结构特点是没有反馈支路，即没有环路，其单位脉冲响应是有限长的。

设单位脉冲响应 $h(n)$ 长度为 N ，其系统函数 $H(z)$ 和差分方程分别为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$
$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

1. 直接型

按照 $H(z)$ 或者差分方程直接画出结构图。这种结构称为直接型网络结构或者称为卷积型结构。

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

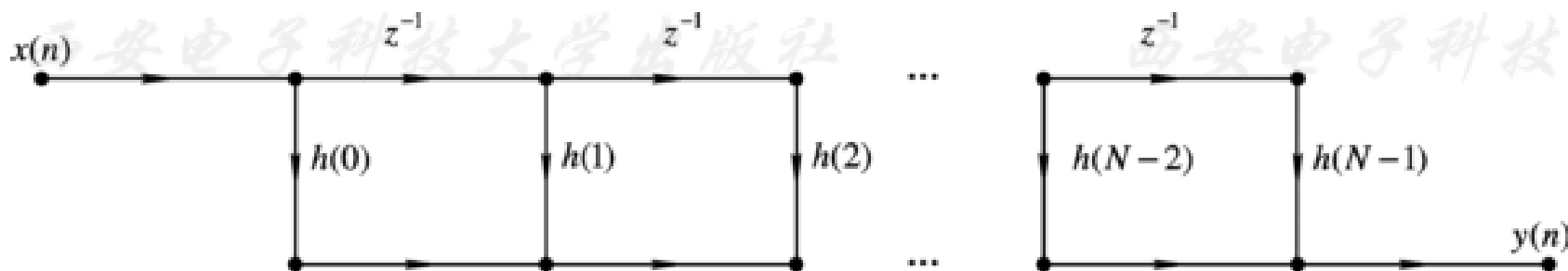


图5.4.1 FIR直接型网络结构

2. 级联型

将 $H(z)$ 进行因式分解，并将共轭成对的零点放在一起，形成一个系数为实数的二阶形式，这样级联型网络结构就是由一阶或二阶因子构成的级联结构，其中每一个因式都用直接型实现。

【例5.4.1】 设FIR网络系统函数 $H(z)$ 如下式：

$$H(z) = 0.96 + 2.0z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$$

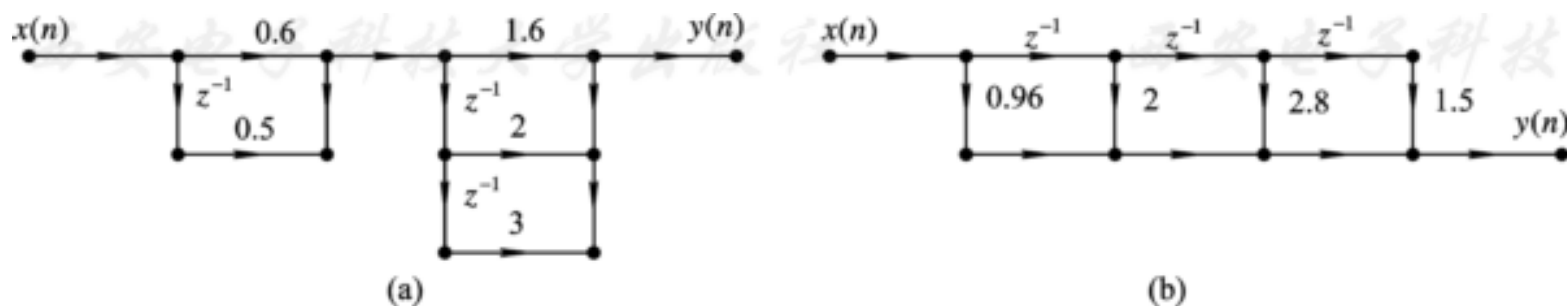
画出 $H(z)$ 的直接型结构和级联型结构。

解 将 $H(z)$ 进行因式分解，得到：

$$H(z) = (0.6 + 0.5z^{-1})(1.6 + 2z^{-1} + 3z^{-2})$$

其级联型结构和直接型结构如图5.4.2所示。

$$H(z) = (0.6 + 0.5z^{-1})(1.6 + 2z^{-1} + 3z^{-2})$$



$$H(z) = 0.96 + 2.0z^{-1} + 2.8z^{-2} + 1.5z^{-3}$$

级联型结构每一个一阶因子控制一个零点，每一个二阶因子控制一对共轭零点，因此调整零点位置比直接型方便。

但 $H(z)$ 中的系数比直接型多，因而需要的乘法器多。在例5.4.1中直接型需要四个乘法器，而级联型则需要五个乘法器。

分解的因子愈多，需要的乘法器也愈多。另外，当 $H(z)$ 的阶次高时，也不易分解。因此，普遍应用的是直接型。

5.5 线性相位结构

线性相位结构是FIR系统的直接型结构的简化网络结构，特点是网络具有线性相位特性，比直接型结构节约了近一半的乘法器。

第7章将证明，如果系统具有线性相位，它的单位脉冲响应满足下面公式：

$$h(n) = \pm h(N - n - 1)$$

式中，“+”代表第一类线性相位滤波器；“—”号代表第二类线性相位滤波器。

$$h(n) = \pm h(N - n - 1)$$

系统函数满足下面两式：

当 N 为偶数时，

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}]$$

当 N 为奇数时，

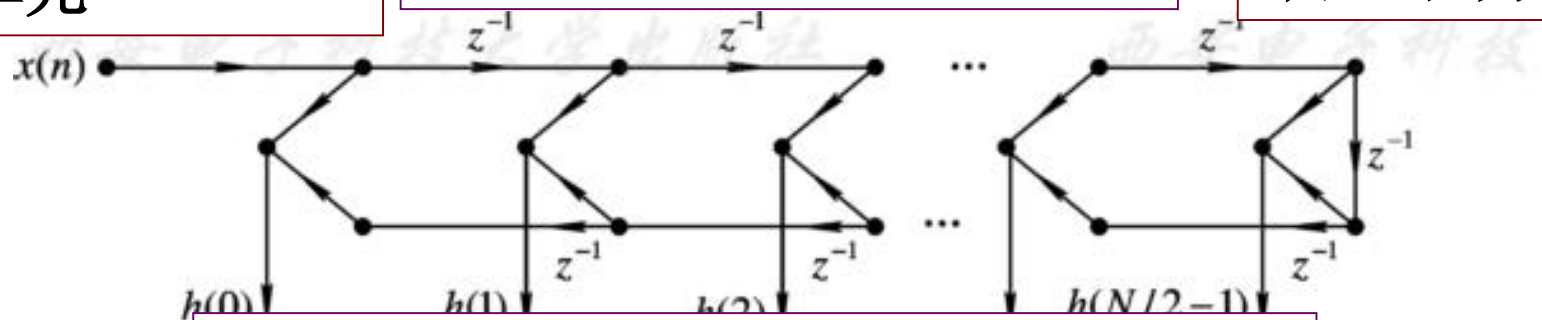
$$H(z) = \sum_{n=0}^{(\frac{N-1}{2})-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] + h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}$$

观察上式，运算时先进行方括号中的加法（减法）运算，再进行乘法运算，这样就节约了乘法运算。

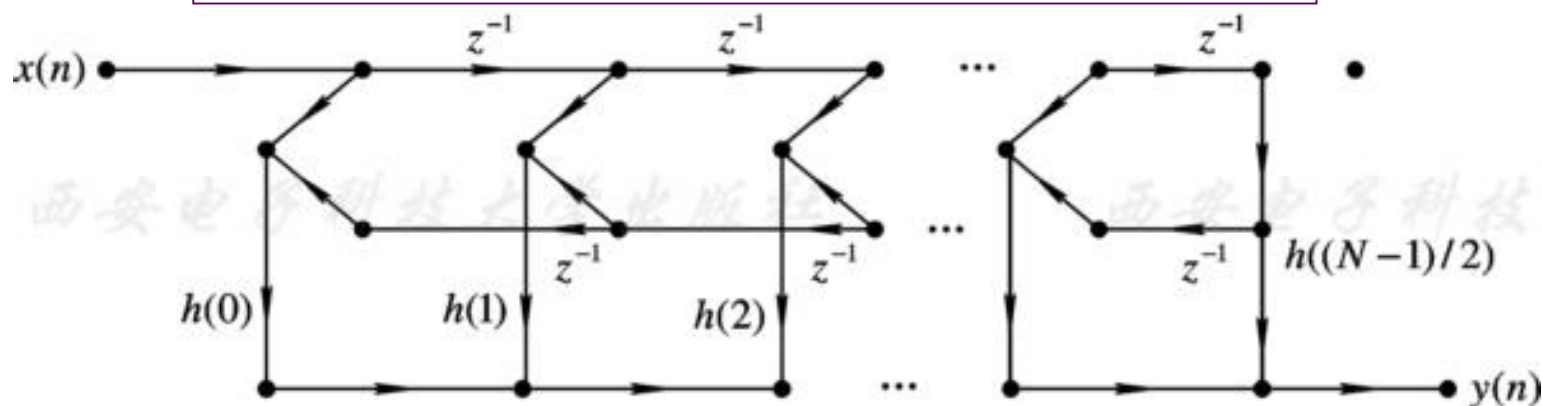
总共有 $N-1$ 个延时单元

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}]$$

上下各有 $N/2-1$ 个延时单元



$$H(z) = \sum_{n=0}^{(\frac{N-1}{2})-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}] + h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}}$$



(b) N 为奇数

上下各有 $(N-1)/2$ 个延时单元

图5.5.1 第一类线性相位网络

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n} \pm z^{-(N-n-1)}]$$

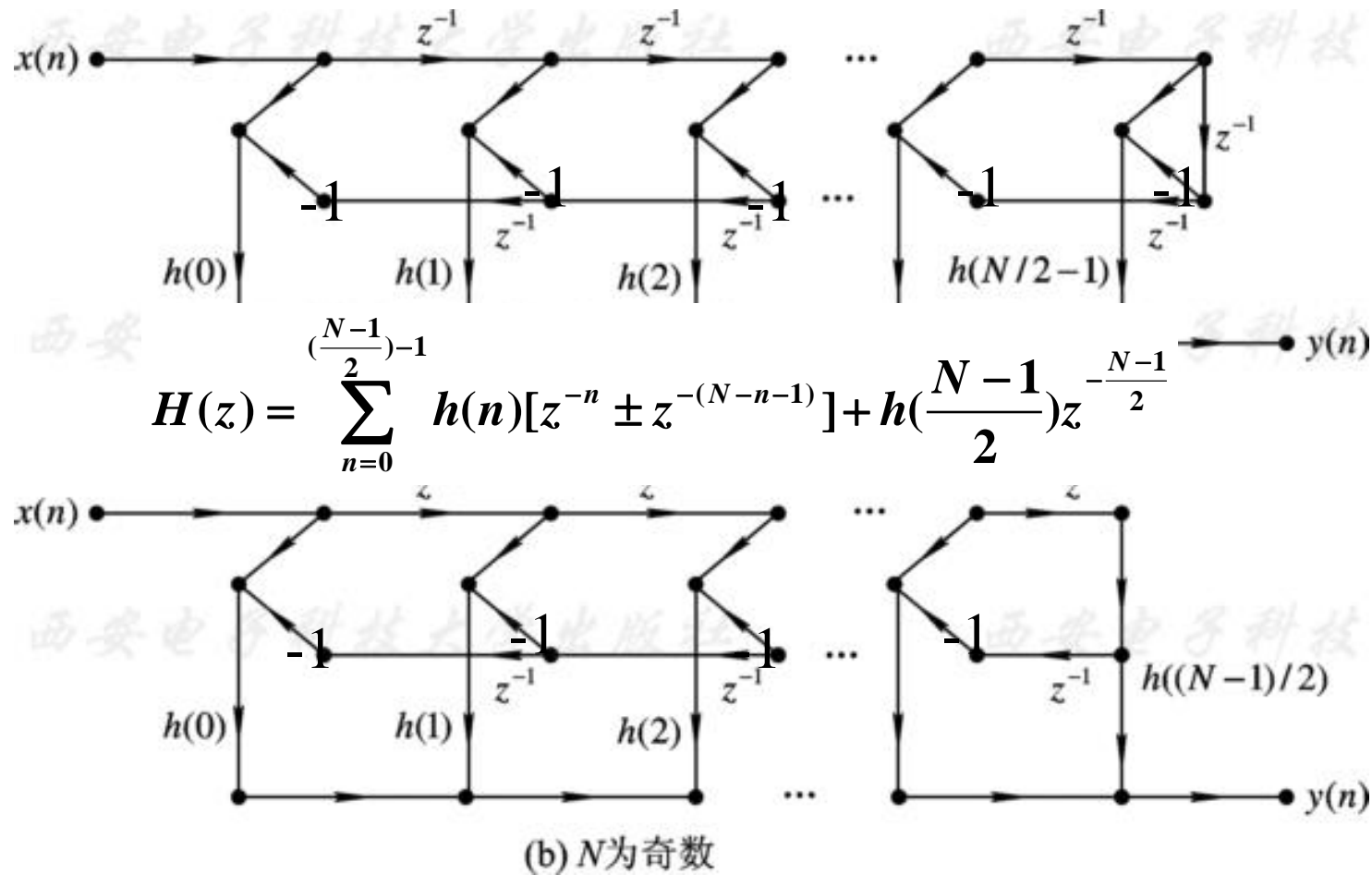
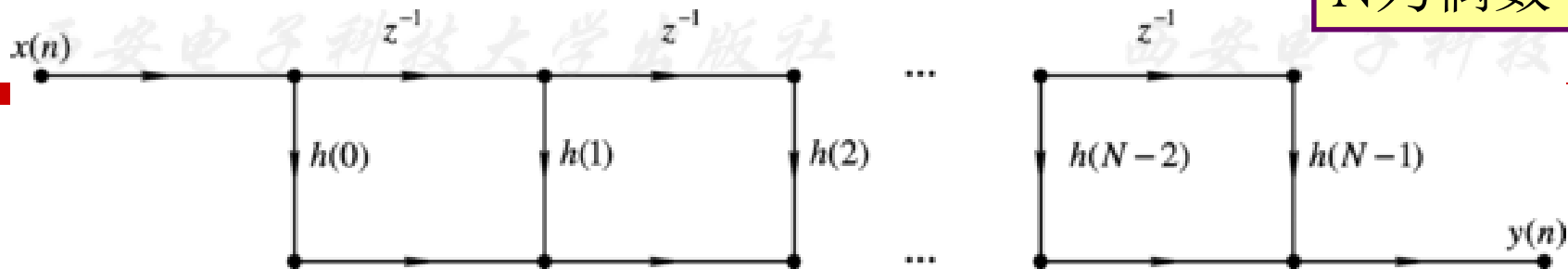
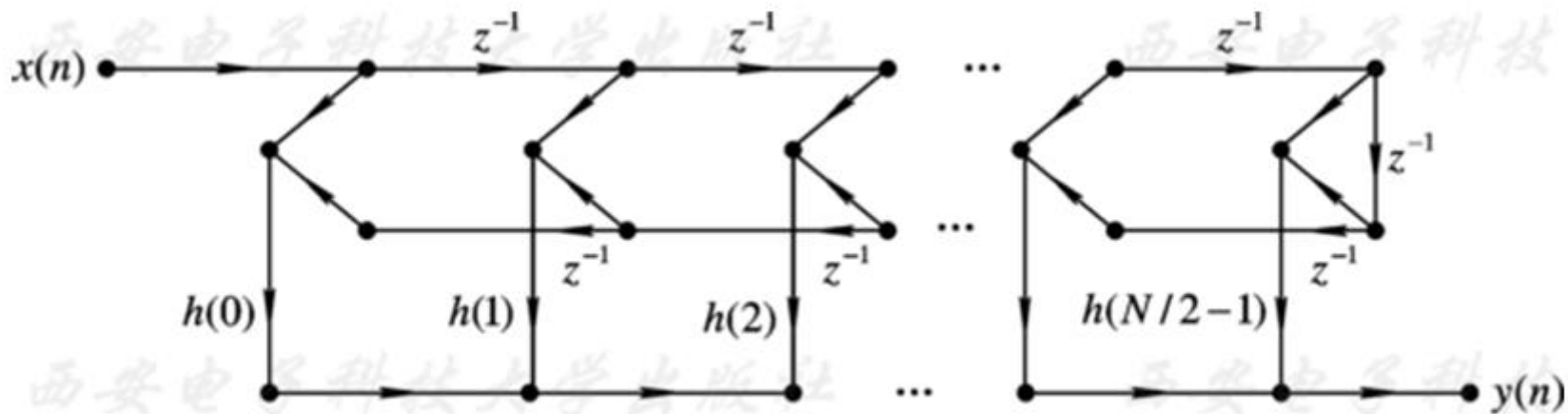


图5.5.2 第二类线性相位网络结构流图

N为偶数



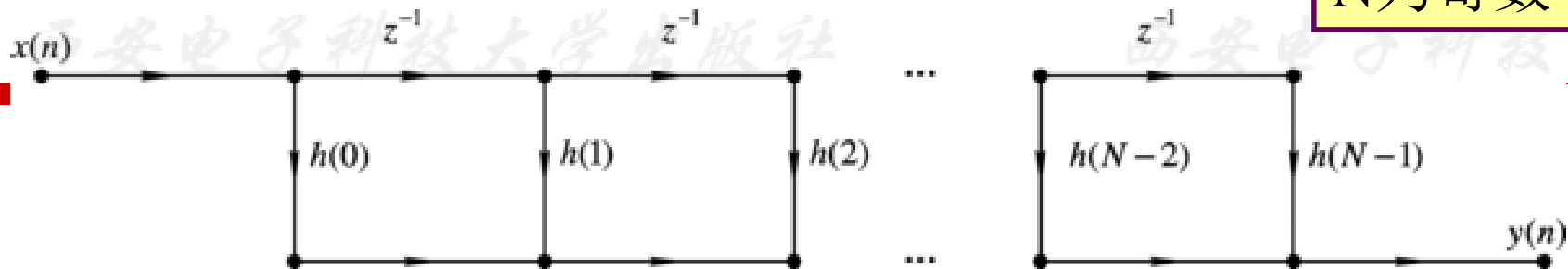
直接型需要 N 个乘法器



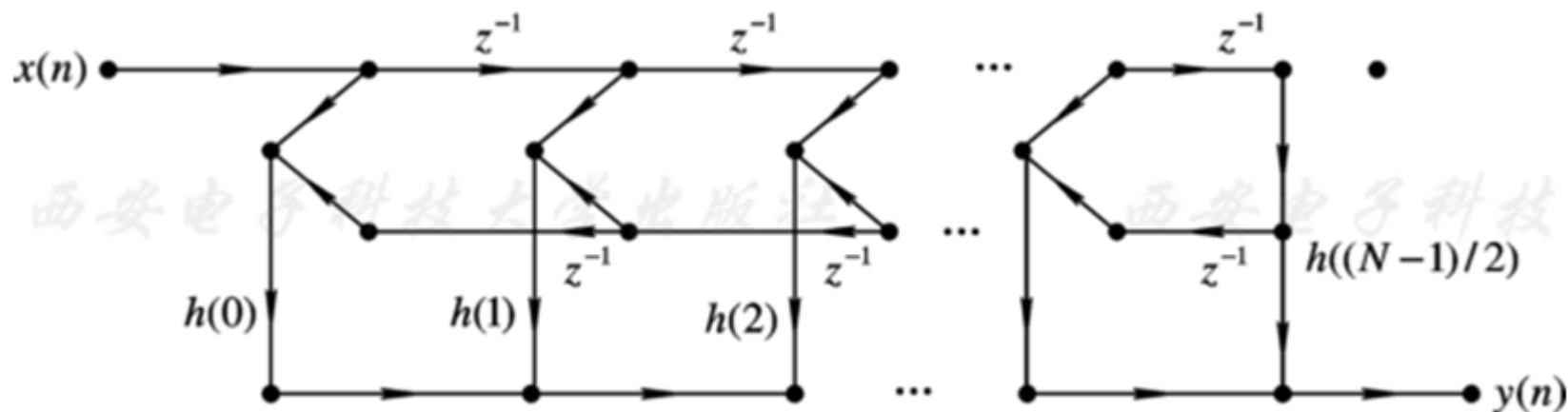
(a) N 为偶数

线性相位结构需要 $N/2$ 个乘法器，节约了一半的乘法器。

N为奇数



直接型需要 N 个乘法器



(b) N 为奇数

线性相位结构需要 $(N-1)/2+1$ 个乘法器，也近似节约了近一半的乘法器。

例题：设某FIR数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = (3 + 2z^{-1} + z^{-2} - z^{-4} - 2z^{-5} - 3z^{-6})$$

试求（1）该滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 的表示式，并判断是否具有线性相位；是第几类线性相位。

（2）画出该滤波器流图的直接型结构和线性相位型结构图，比较两种结构，指出线性相位型结构的优点。

7.1 线性相位FIR数字滤波器的条件和特点

1. 线性相位FIR数字滤波器

对于长度为 N 的 $h(n)$ ，频率响应函数为

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

式中， $H_g(\omega)$ 称为幅度特性； $\theta(\omega)$ 称为相位特性。

注意:这里 $H_g(\omega)$ 不同于 $|H(e^{j\omega})|$ ， $H_g(\omega)$ 为 ω 的实函数，可能取负值，而 $|H(e^{j\omega})|$ 总是正值。

线性相位FIR滤波器是指 $\theta(\omega)$ 是 ω 的线性函数，即

$$\theta(\omega) = -\tau\omega, \quad \tau \text{ 为常数} \quad (7.1.3)$$

如果 $\theta(\omega)$ 满足下式：

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega, \quad \theta_0 \text{ 是起始相位} \quad (7.1.4)$$

严格地说，此时 $\theta(\omega)$ 不具有线性相位特性，但以上两种情况都满足群时延是一个常数，即

$$-\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \tau$$

也称这种情况为线性相位。

一般称满足（7.1.3）式是第一类线性相位；满足（7.1.4）式为第二类线性相位。 $\theta_0 = -\pi/2$ 是第二类线性相位特性常用的情况，所以本章仅介绍这种情况。

2. 线性相位FIR的时域约束条件

线性相位FIR滤波器的时域约束条件是指满足线性相位时，对 $h(n)$ 的约束条件。

1) 第一类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

第一类线性相位FIR数字滤波器的相位函数 $\theta(\omega)=-\omega\tau$ ，可以得到

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)(\cos \omega n - j \sin \omega n) = H_g(\omega)(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau)$$

可以得到:

$$\begin{cases} H_g(\omega) \cos \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \\ H_g(\omega) \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \end{cases}$$

将上式中两式相除得到:

$$\frac{\cos \omega \tau}{\sin \omega \tau} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n}$$

即

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n \sin \omega \tau = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \omega n \cos \omega \tau$$

移项并用三角公式化简得到:

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[\omega(n - \tau)] = 0$$

函数 $h(n)\sin\omega(n - \tau)$ 关于求和区间的中心 $(N - 1)/2$ 奇对称。

因为 $\sin\omega(n - \tau)$ 关于 $n = \tau$ 奇对称, 如果取
 $\tau = (N - 1)/2$, 则要求 $h(n)$ 关于 $(N - 1)/2$ 偶对称,
所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件:

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\omega\tau, & \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

<- 表明 $h(n)$ 偶对称

因此，如果要求单位脉冲响应为 $h(n)$ 、长度为 N 的FIR数字滤波器具有第一类线性相位特性（严格线性相位特性）：

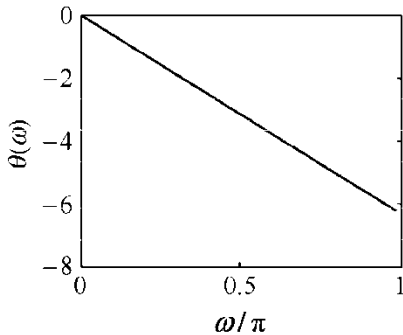
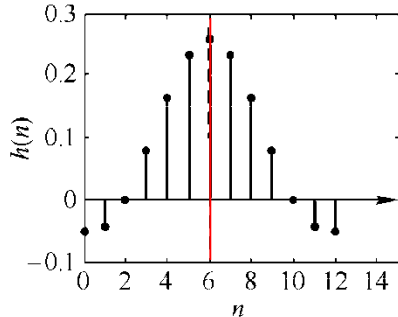
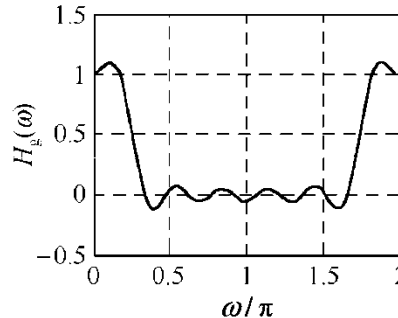
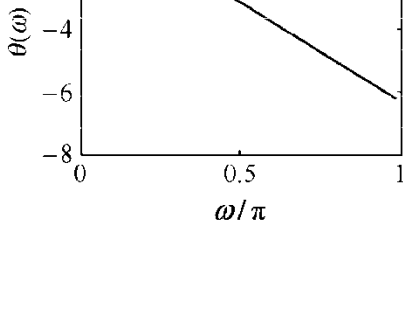
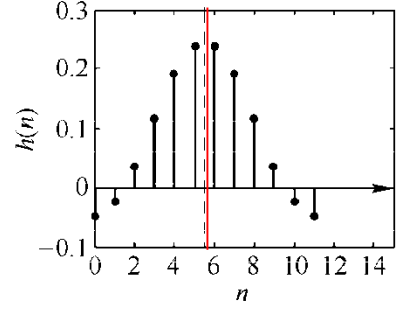
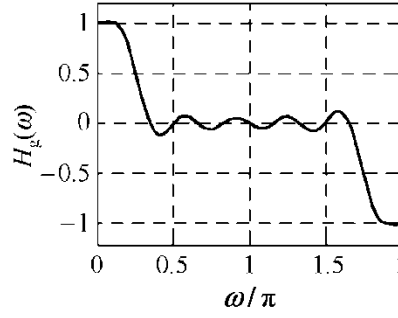
$h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点偶对称。

当 N 确定时，FIR数字滤波器的相位特性是一个确知的线性函数，
即

$$\theta(\omega) = -\omega(N-1)/2。$$

N 为奇数和偶数时， $h(n)$ 的对称情况分别如表7.1.1中的情况1和情况2所示。

表7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的时域和频域特性一览

第一类线性相位特性		$h(n)=h(N-1-n)$	
情况 1	<div>$\theta(\omega)=-\omega\tau, \quad \tau=\frac{N-1}{2}$<p>(以 $N=5$ 为例画图)</p></div>	<div>N 为奇数 ($N=13$)</div> 	<div>$H_g(\omega)=h(\tau)+\sum_{n=0}^{M-1}2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$</div>
情况 2	<div>$\theta(\omega)=-\omega\tau, \quad \tau=\frac{N}{2}$<p>(以 $N=6$ 为例画图)</p></div>	<div>N 为偶数 ($N=12$)</div> 	<div>$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^M2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$</div>

2) 第二类线性相位对 $h(n)$ 的约束条件

第二类线性相位FIR数字滤波器的相位函数 $\theta(\omega)=-\pi/2-\omega\tau$ ，经过同样的推导过程可得到：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j(\pi/2+\omega\tau)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos[\omega(n-\tau)] = 0$$

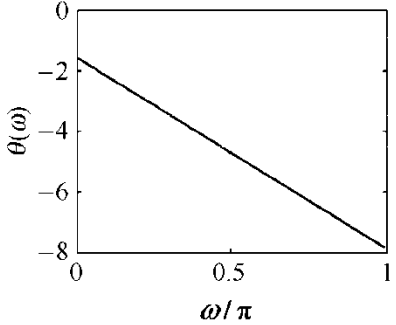
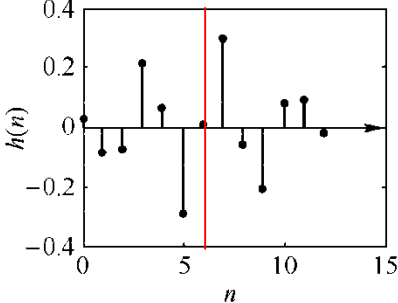
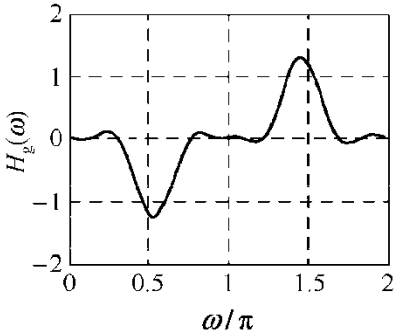
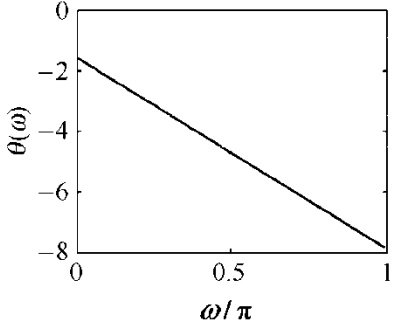
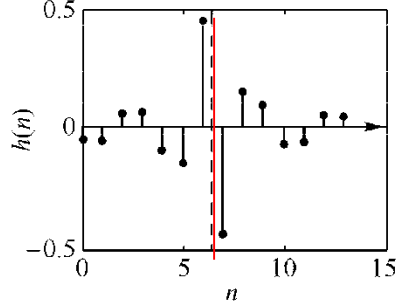
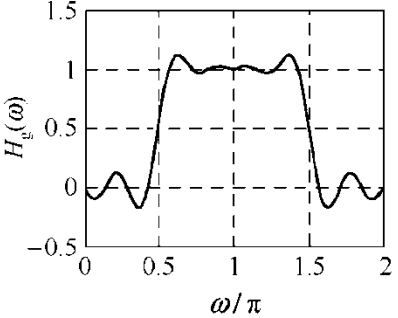
函数 $h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$ 关于求和区间的中心 $(N-1)/2$ 奇对称。因为 $\cos[\omega(n-\tau)]$ 关于 $n=\tau$ 偶对称，所以要求 τ 和 $h(n)$ 满足如下条件：

$$\begin{cases} \theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, & \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

因此，如果要求单位脉冲响应为 $h(n)$ 、长度为 N 的FIR数字滤波器具有第二类线性相位特性，

则 $h(n)$ 应当关于 $n=(N-1)/2$ 点奇对称。

N 为奇数和偶数时 $h(n)$ 的对称情况分别如表7.1.1中情况3和情况4所示。

第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	N 为奇数 ($N=13$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
情况 4		N 为偶数 ($N=14$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 

2. 线性相位FIR滤波器幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点

时域约束条件 $h(n)=\pm h(N-n-1)$

幅度特性 $H_g(\omega)$ 的特点就是线性相位FIR滤波器的频域约束条件。

当 N 取奇数和偶数时对 $H_g(\omega)$ 的约束不同，因此，对于两类线性相位特性，下面分四种情况讨论其幅度特性的特点。

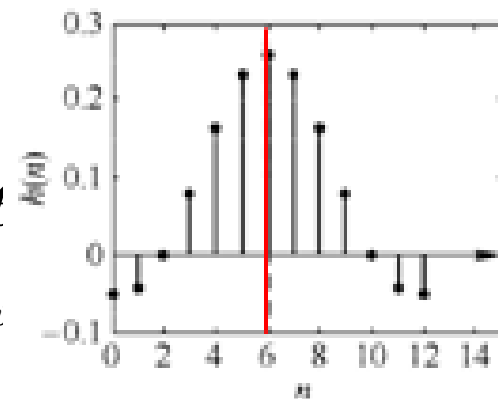
为了推导方便，引入两个参数符号：

$$\tau = \frac{N-1}{2},$$

$$M = \left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil$$

仅当 N 为奇数时， $M=\tau=(N-1)/2$ 。

情况1: $h(n)=h(N-n-1)$, N 为奇数。



将时域约束条件 $h(n)=h(N-n-1)$ 和式

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau}$$


$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$

$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(n)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$

$$= e^{-j\omega\frac{N-1}{2}} \left\{ h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} + e^{j\omega\left(n-\frac{N-1}{2}\right)} \right] \right\}$$

$$= e^{-j\omega\tau} \left\{ h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)] \right\}$$



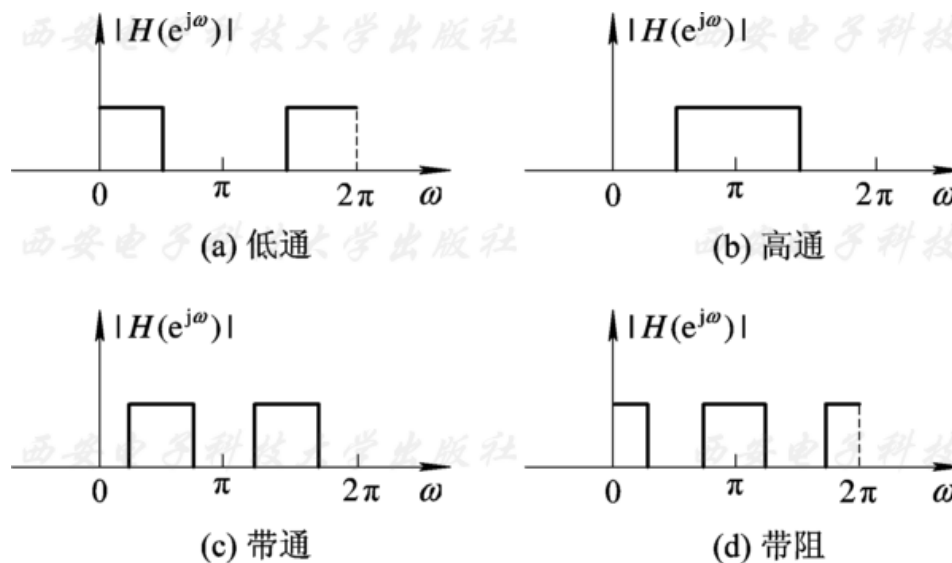
$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{(\frac{N-1}{2})-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-n-1)}] + h(\frac{N-1}{2})z^{-\frac{N-1}{2}} \Big|_{z=e^{j\omega}}$$

所以

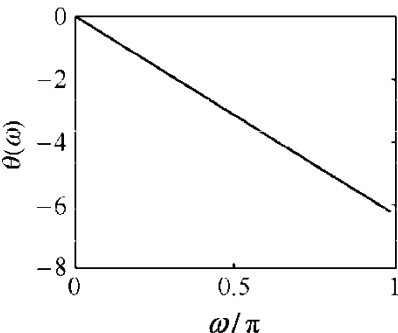
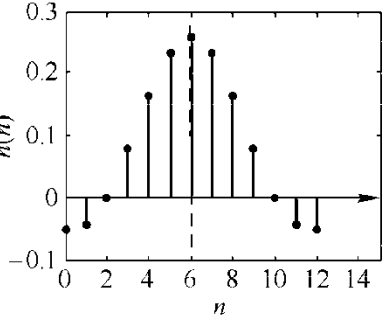
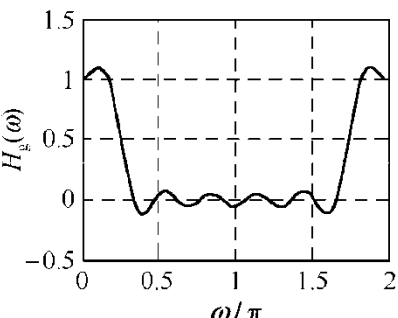
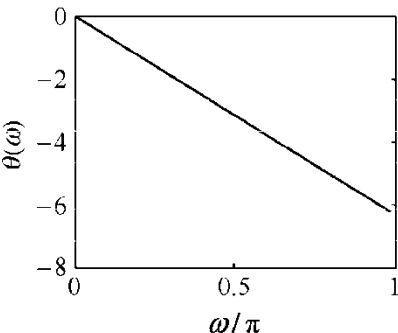
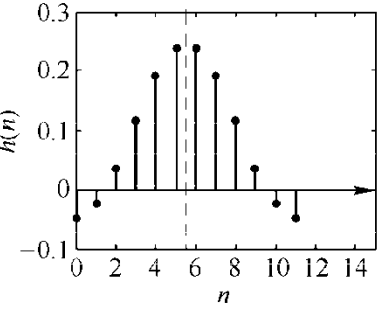
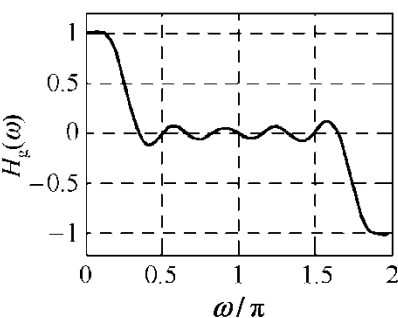
$$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n - \tau)]$$

因为 $\cos [\omega(n-\tau)]$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称, 所以可以看出, $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点偶对称。

因此情况1可以实现各种（低通、高通、带通、带阻）滤波器。

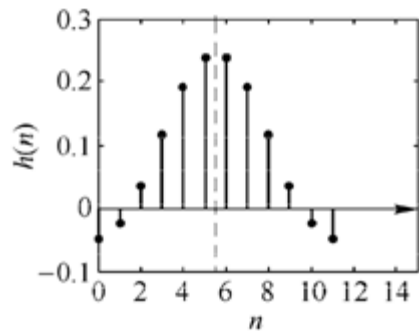


对于N=13的低通情况， $H_g(\omega)$ 的一种例图如表7.1.1中情况1所示。

第一类线性相位特性		$h(n) = h(N-1-n)$	
情况 1	$\theta(\omega) = -\omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	N 为奇数 ($N=13$) 	$H_g(\omega) = h(\tau) + \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 
情况 2		N 为偶数 ($N=12$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \cos[\omega(n-\tau)]$ 

情况2: $h(n)=h(N-n-1)$, N 为偶数。

仿照情况1的推导方法得到:



$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} = e^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos(\omega(n-\tau))$$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$$

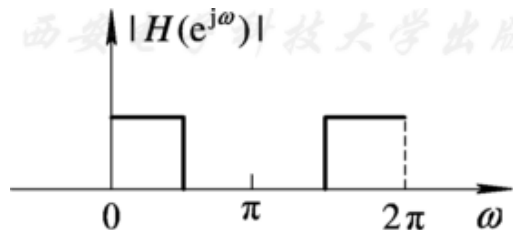
式中, $\tau = (N-1)/2 = N/2 - 1/2$ 。因为 N 是偶数, 所以当 $\omega = \pi$ 时

$$\cos[\omega(n-\tau)] = \cos\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin\left[\pi\left(n - \frac{N}{2}\right)\right] = 0$$

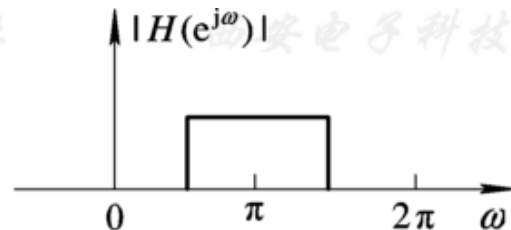
$\cos [\omega(n - \tau)]$ 关于过零点奇对称，关于 $\omega=0$ 和 2π 偶对称。

所以 $H_g(\pi)=0$ ， $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=\pi$ 奇对称，关于 $\omega=0$ 和 2π 偶对称。

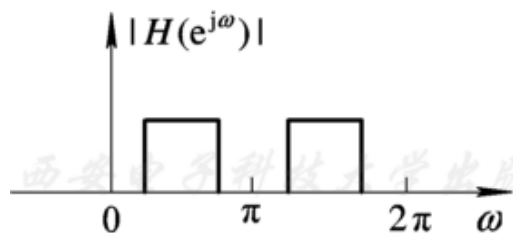
因此，情况2不能实现高通和带阻滤波器。



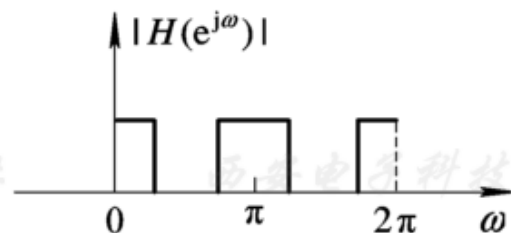
(a) 低通



(b) 高通

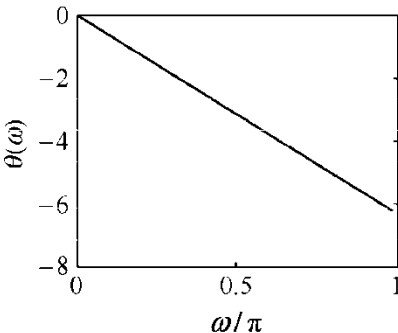
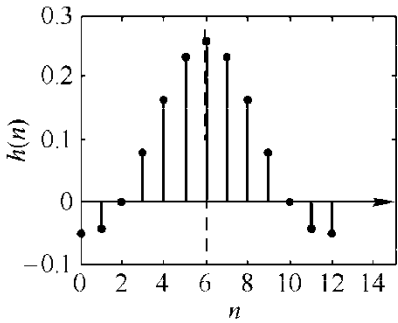
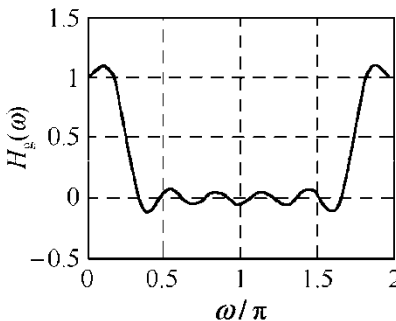
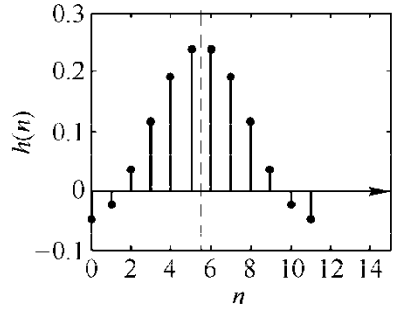
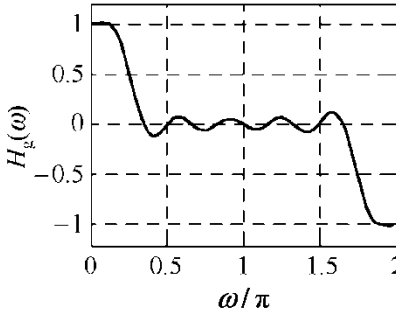


(c) 带通



(d) 带阻

对 $N=12$ 的低通情况， $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况2所示。

第一类线性相位特性		$h(n)=h(N-1-n)$	
情况 1	<div>$\theta(\omega)=-\omega\tau, \quad \tau=\frac{N-1}{2}$<p>(以 $N=5$ 为例画图)</p></div>	<div>N 为奇数 ($N=13$)</div> 	<div>$H_g(\omega)=h(\tau)+\sum_{n=0}^{M-1}2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$</div>
情况 2		<div>N 为偶数 ($N=12$)</div> 	<div>$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^M2h(n)\cos[\omega(n-\tau)]$</div>

情况3: $h(n)=-h(N-n-1)$, N 为奇数。

时域约束条件 $h(n)=-h(N-n-1)$,

$\theta(\omega)=-\pi/2-\omega\tau$, 则:

$$h\left(\frac{N-1}{2}\right)=0$$

$$H(e^{j\omega}) = H_g(\omega)e^{-j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n}$$

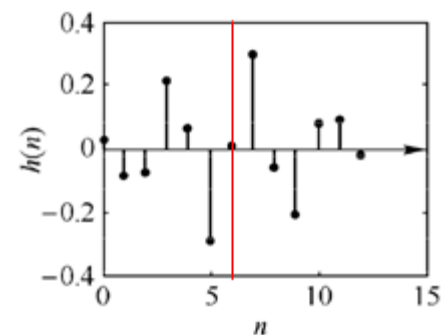
$$= \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} + h(N-n-1)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} \left[h(n)e^{-j\omega n} - h(n)e^{-j\omega(N-n-1)} \right]$$

$$= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} - e^{j\omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right)} \right]$$

$$= -je^{-j\omega\tau} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

$$= e^{-j(\pi/2+\omega\tau)} \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$



$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=0}^{\left(\frac{N-1}{2}\right)-1} h(n)[z^{-n} - z^{-(N-n-1)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} \Big|_{z=e^{j\omega}} \\
&= \sum_{n=0}^{M-1} h(n)[e^{-j\omega n} - e^{-j\omega(N-n-1)}] \\
&= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{M-1} h(n) \left[e^{-j\omega \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} - e^{j\omega \left(n - \frac{N-1}{2}\right)} \right] \right] \\
&= e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{M-1} -2jh(n) \sin \omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right] \\
&= e^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \omega \frac{N-1}{2}\right)} \left[\sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin \omega \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n - \tau)]$$

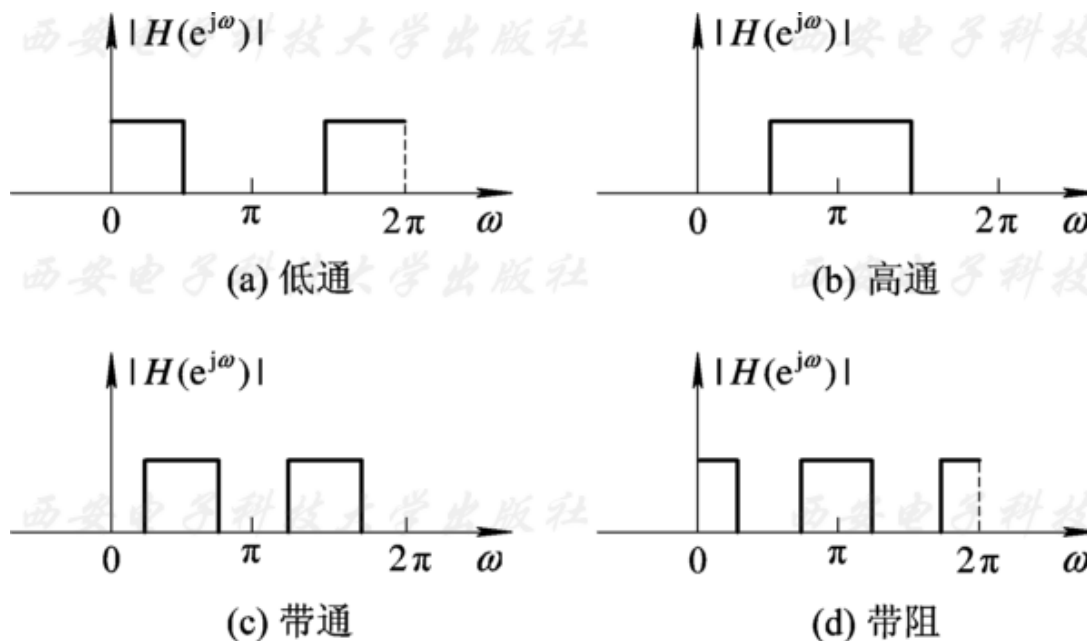
N 是奇数, $\tau=(N-1)/2$ 是整数。

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$

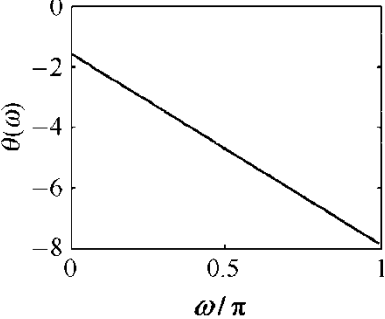
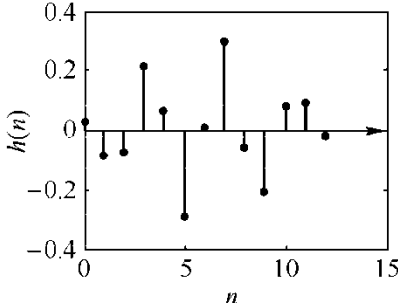
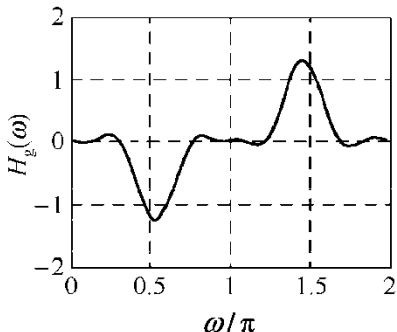
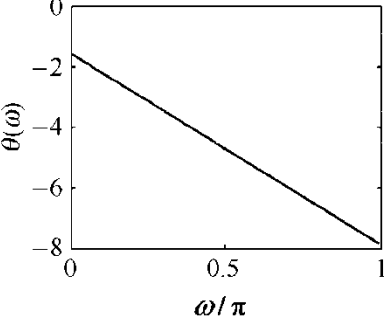
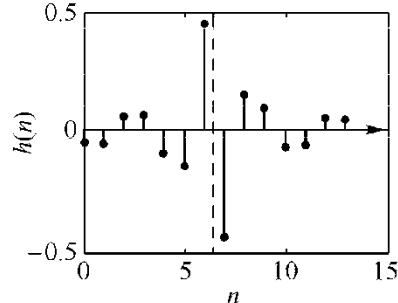
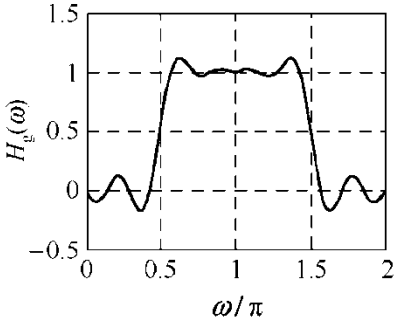
所以, 当 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 时, $\sin[\omega(n-\tau)] = 0$, 而且 $\sin[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点奇对称。

因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0, \pi, 2\pi$ 三点奇对称。

由此可见, 情况3只能实现带通滤波器。



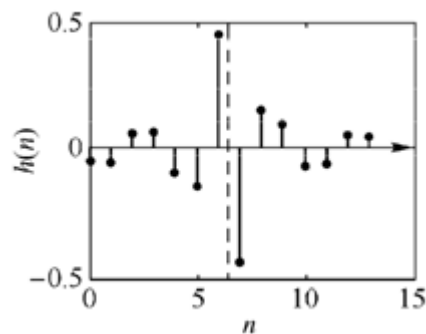
对 $N=13$ 的带通滤波器举例， $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况3所示。

第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$ <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	N 为奇数 ($N=13$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
	$\theta(\omega)$ 	N 为偶数 ($N=14$) 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 

情况4: $h(n)=-h(N-n-1)$, N 为偶数。

用情况3的推导过程可以得到:

$$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$$



N 是偶数, $\tau=(N-1)/2=N/2-1/2$ 。所以, 当 $\omega=0, 2\pi$ 时, $\sin[\omega(n-\tau)]$
 $=0$;

当 $\omega=\pi$ 时,

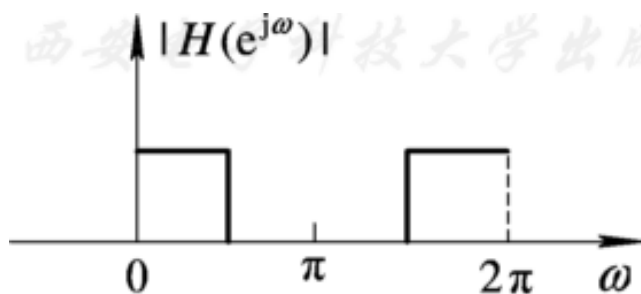
$$\sin[\omega(n-\tau)] = \sin\left[\pi\left(n-\frac{N}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\left[\pi\left(n-\frac{N}{2}\right)\right] = (-1)^{\left(n-\frac{N}{2}\right)}$$

为峰值点。

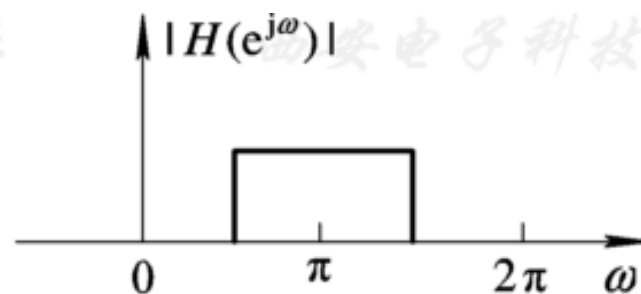
$\sin[\omega(n-\tau)]$ 关于过零点 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称, 关于峰值点 $\omega=\pi$ 偶对称。

因此 $H_g(\omega)$ 关于 $\omega=0$ 和 2π 两点奇对称，关于 $\omega=\pi$ 偶对称。

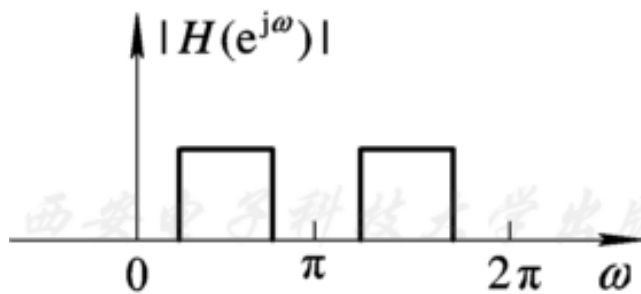
由此可见，情况4不能实现低通和带阻滤波器。



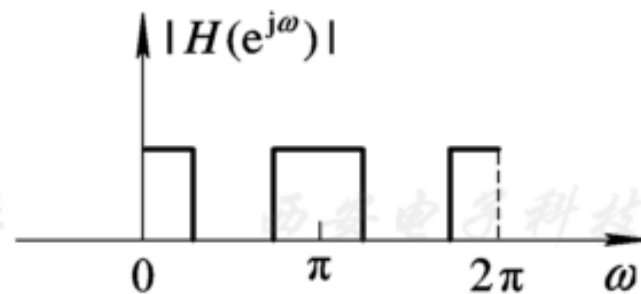
(a) 低通



(b) 高通

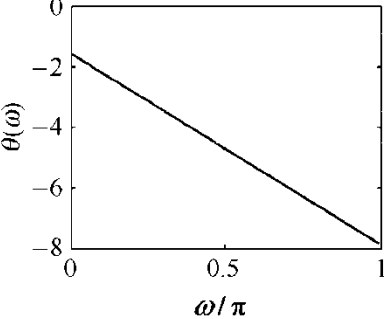
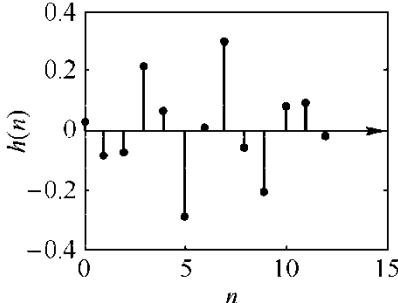
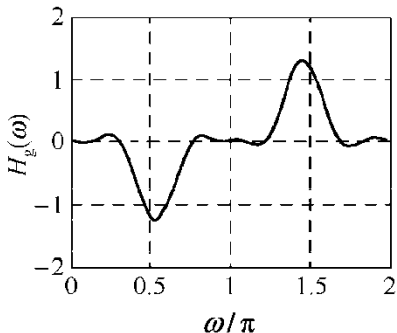
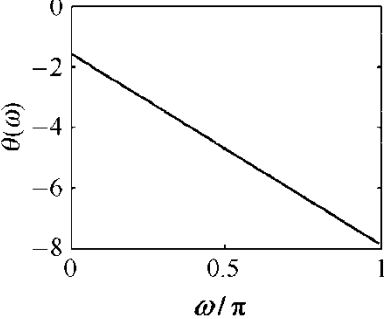
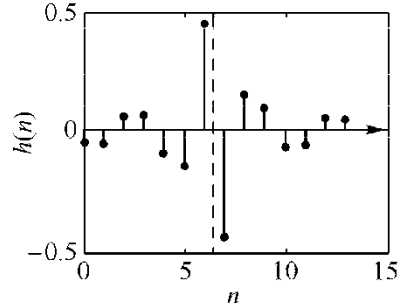
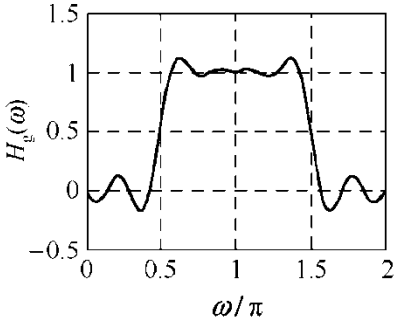


(c) 带通



(d) 带阻

对N=14的高通滤波器举例， $H_g(\omega)$ 如表7.1.1中情况4所示。

第二类线性相位特性		$h(n) = -h(N-1-n)$	
情况 3	<p>$\theta(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega\tau, \quad \tau = \frac{N-1}{2}$</p> <p>(以 $N=5$ 为例画图)</p> 	<p>N 为奇数 ($N=13$)</p> 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 
情况 4		<p>N 为偶数 ($N=14$)</p> 	$H_g(\omega) = \sum_{n=0}^M 2h(n) \sin[\omega(n-\tau)]$ 

3. 线性相位FIR数字滤波器的零点分布特点

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$$

将 $h(n)=\pm h(N-1-n)$ 代入上式, 得到:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(N-1-n)z^{-n} \\ &= \pm \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^{-(N-1-m)} = \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m)z^m \\ &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \end{aligned}$$

可以看出，如 $z=z_i$ 是 $H(z)$ 的零点，其倒数 z_i^{-1} 也必然是其零点；

又因为 $h(n)$ 是实序列， $H(z)$ 的零点必定共轭成对，因此 z_i^* 和 $(z_i^{-1})^*$

也是其零点。这样，线性相位FIR滤波器零点必定是互为倒数的共轭对，确定其中一个，另外三个零点也就确定了。

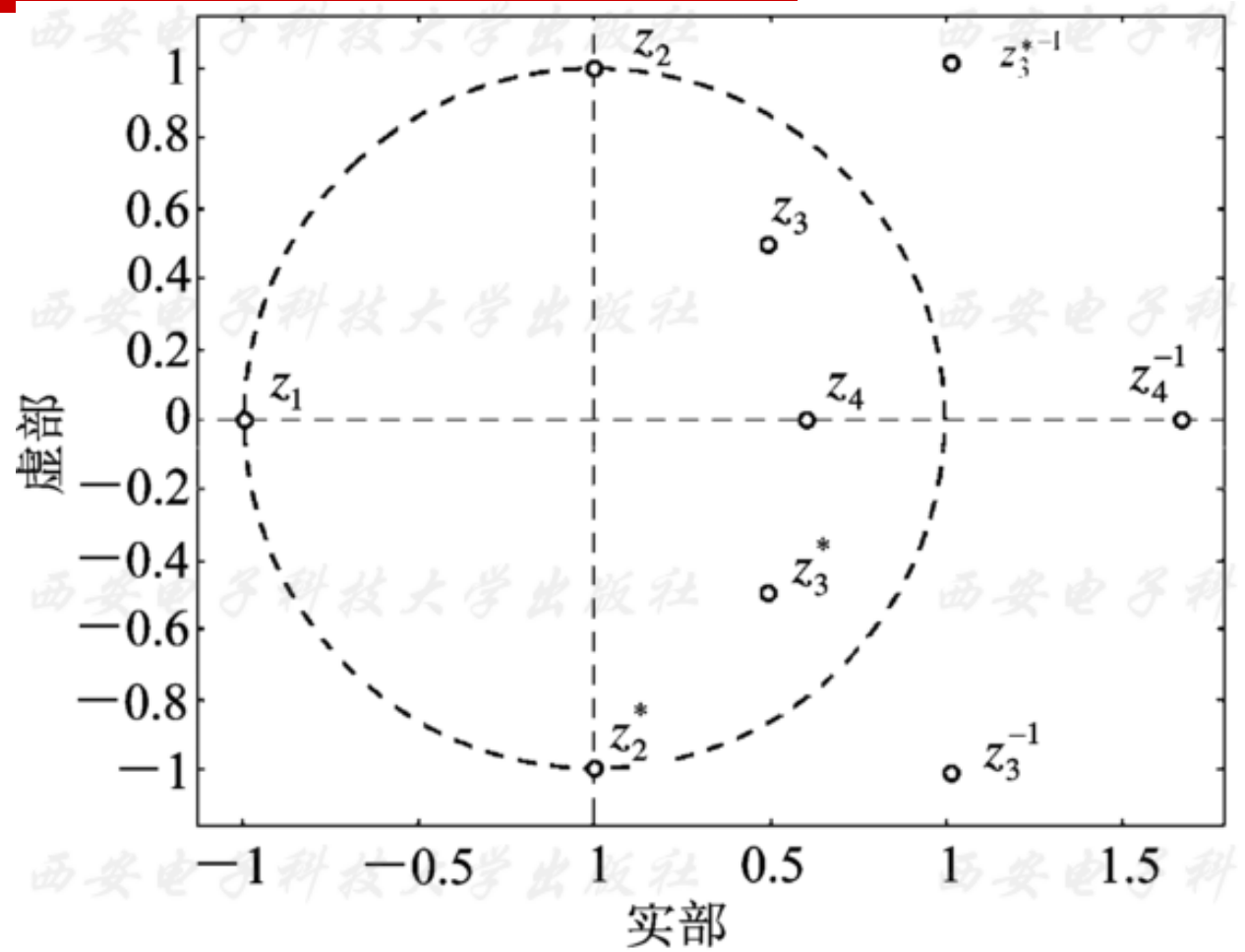


图7.1.1 线性相位FIR数字滤波器的零点分布

例题：设某FIR数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = (3 + 2z^{-1} + z^{-2} - z^{-4} - 2z^{-5} - 3z^{-6})$$

试求（1）该滤波器的单位取样响应 $h(n)$ 的表示式，并判断是否具有线性相位；是第几类线性相位。

（2）求 $H(e^{j\omega})$ 的幅度响应和相频响应的表示式；

（3）画出该滤波器流图的直接型结构和线性相位型结构图，比较两种结构，指出线性相位型结构的优点。

第5章 时域离散系统的网络结构

- 1.由信号流图求系统函数。
- 2.画IIR直接型，并联型，级联型流图。
- 3.FIR直接型，级联型流图。
- 4.线性相位系统的结构。