信号与系统

第二章 连续时间系统的时域分析

电子与信息工程学院



第二章 连续时间系统的时域分析

主要内容

CATALOG

§2.1 引言

本章主要内容

- 线性时不变系统完全响应的求解；
- 冲激响应$h(t)$的求解；
- 卷积的图解说明；
- 卷积的性质；
- 零状态响应：$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$

§2.2 微分方程的建立与求解



主要内容

物理系统的模型

微分方程的列写

n 阶线性时不变系统的描述

求解系统微分方程的经典法

复习求解系统微分方程的经典法

一. 物理系统的模型

连续时间系统数学模型的时域描述：一元N阶微分方程

线性时不变连续时间系统：线性常系数一元N阶微分方程。

时域分析:将激励信号加入系统的时刻定义为$t=0$，然后分析求解 $t \geq 0_{+}$ 之后系统的行为，即系统响应r(t)

时域分析步骤：

1. 列写方程：根据元件约束,网络拓扑约束

2. 解方程
   - 经典法
   - 双零法
     - 零输入：可利用经典法求
     - 零状态：利用卷积积分法求解

二．微分方程的列写

•根据实际系统的物理特性列写系统的微分方程。

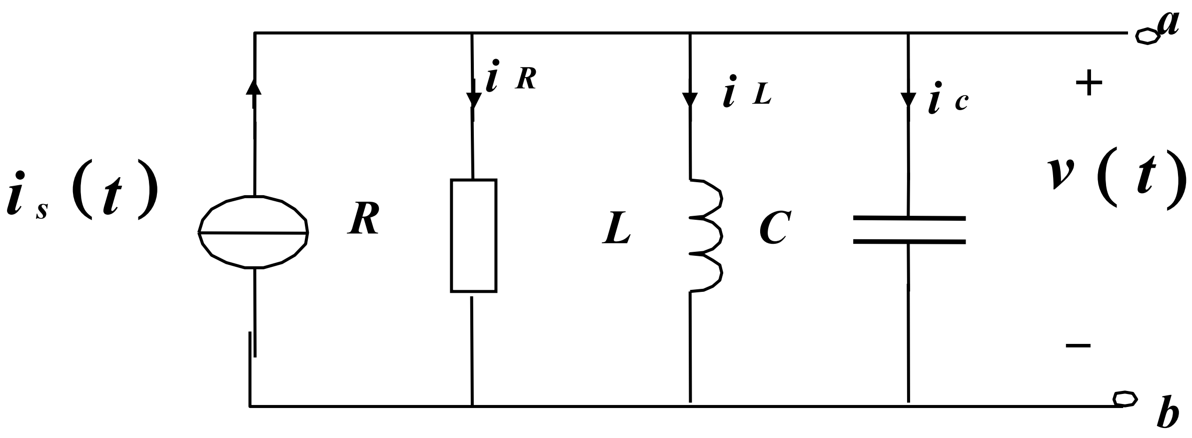
•对于电路系统，主要是根据元件特性约束和网络拓扑约束列写系统的微分方程。

元件特性约束：表征元件特性的关系式。例如二端元件电阻、电容、电感各自的电压与电流的关系以及四端元件互感的初、次级电压与电流的关系等等。

网络拓扑约束：由网络结构决定的电压电流约束关系，KCL，KVL。

例 求并联电路的端电压 $v(t)$ 与激励 $i_s(t)$ 间的关系。

解答



电阻 $$i_R(t)=\frac{1}{R}v(t)$$

电感 $$i_L(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

电容 $$i_C(t)=C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$$

根据KCL $$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=i_S(t)$$

代入上面元件伏安关系，并化简有

$$C\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{L}v(t)=\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t}$$

这是一个代表*RCL*并联电路系统的二阶微分方程。

三．n 阶线性时不变系统的描述

一个线性系统，其激励信号 $e(t)$ 与响应信号 $r(t)$ 之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述

$$C_0 \frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d} t^n} + C_1 \frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d} t^{n-1}} + \cdots + C_{n-1} \frac{\mathrm{d} r(t)}{\mathrm{d} t} + C_n r(t)$$

$$= E_0 \frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d} t^m} + E_1 \frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d} t^{m-1}} + \cdots + E_{m-1} \frac{\mathrm{d} e(t)}{\mathrm{d} t} + E_m e(t)$$

若系统为时不变的，则C，E均为常数，此方程为常系数的n阶线性常微分方程。

阶次：

响应信号微分或积分项中最高的阶次就是方程的阶次

四．求解系统微分方程的经典法

分析系统的方法：列写方程，求解方程。

- 列写方程：根据元件约束，网络拓扑约束
- 解方程
  - 经典法
  - 零输入响应和零状态响应
    - 零输入：可利用经典法求解
    - 零状态：利用卷积积分法求解
  - 变换域法

求解方程时域经典法就是：齐次解+特解。

经典法

齐次解：由特征方程→求出特征根→写出齐次解形式

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \mathrm{e}^{\alpha_k t}$$ **注意重根情况处理方法。**

齐次解仅和系统本身特性有关，与激励无关，是系统的自由响应。

特　解：根据微分方程右端函数式形式，设含待定系数的特解函数式→代入原方程，比较系数，定出特解。

特解的形式由激励确定，是系统的强迫响应。

全　解：齐次解+特解，由**初始条件**求解齐次解中的待定系数 A_k。

初始条件的确定是此课程要解决的问题。

齐次解的求解

$$C_0\frac{\mathrm{d}^n r(t)}{\mathrm{d}t^n}+C_1\frac{\mathrm{d}^{n-1} r(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+C_{n-1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+C_n r(t)=E_0\frac{\mathrm{d}^m e(t)}{\mathrm{d}t^m}+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1} e(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+E_m e(t)$$

- **列特征方程** $C_0\alpha^n+C_1\alpha^{n-1}+\cdots+C_{n-1}\alpha+C_n=0$

1、如果n个特征根各不相同，$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_n$ ，则齐次解为：

$$r_h(t)=\sum_{k=1}^{n}A_k\,\mathrm{e}^{\alpha_k t}$$ 其中A_k为由初始条件决定的系数。

2、特征根有重根

如果α_1是K重根，则对应的齐次解形式为：

$$\sum_{i=1}^{K}A_i t^{K-i}\,\mathrm{e}^{\alpha_1 t}$$ ，其中A_i为由初始条件决定的系数。

如果α_1是2重根，则齐次解为：$r_h(t)=(A_1 t+A_2)\mathrm{e}^{\alpha_1 t}$

例2-2-3

求微分方程$\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}r(t)+7\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+16\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+12r(t)=e(t)$的齐次解。

解答

系统的特征方程为

$$\alpha^3+7\alpha^2+16\alpha+12=0$$

特征根

$$(\alpha+2)^2(\alpha+3)=0$$

$$\alpha_1=-2(\text{重根}),\ \alpha_2=-3$$

因而对应的齐次解为

$$r_h(t)=(A_1t+A_2)\mathrm{e}^{-2t}+A_3\mathrm{e}^{-3t}$$

几种典型激励函数相应的特解

激励函数$e(t)$	响应函数$r(t)$的特解
E(常数)	B(常数)
t^p	$B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}$
$e^{\alpha t}$	$Be^{\alpha t}$　$\alpha \neq$ 特征根
	$(B_0 t^k + \ldots + B_{k-1} t + B_k)e^{\alpha t}$　α为k次特征根
$\cos(\omega t)$	$B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)$
$\sin(\omega t)$	
$t^p e^{\alpha t} \sin(\omega t)$	$\left(B_1 t^p + B_2 t^{p-1} + \cdots + B_p t + B_{p+1}\right)e^{\alpha t}\cos(\omega t)$
$t^p e^{\alpha t} \cos(\omega t)$	$+\left(D_1 t^p + D_2 t^{p-1} + \cdots + D_p t + D_{p+1}\right)e^{\alpha t}\sin(\omega t)$

例

给定微分方程式 $\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+3r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+e(t)$

如果已知：(1) $e(t)=t^2$; (2) $e(t)=\mathrm{e}^t$，分别求两种情况下此方程的特解。

解答

(1) 将$e(t)=t^2$代入方程右端得到t^2+2t，为使等式两端平衡，试选特解函数式

$$r_{\mathrm{p}}(t)=B_1t^2+B_2t+B_3$$

这里，B_1,B_2,B_3为待定系数。将此式代入方程得到

$$3B_1t^2+(4B_1+3B_2)t+(2B_1+2B_2+3B_3)=t^2+2t$$

$$3B_1t^2+\left(4B_1+3B_2\right)t+\left(2B_1+2B_2+3B_3\right)=t^2+2t$$

等式两端各对应幂次的系数应相等，于是有

$$\begin{cases}3B_1=1\\4B_1+3B_2=2\\2B_1+2B_2+3B_3=0\end{cases}$$

联解得到

$$B_1=\frac{1}{3},\ B_2=\frac{2}{9},\quad B_3=-\frac{10}{27}$$

所以，特解为

$$r_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{3}t^2+\frac{2}{9}t-\frac{10}{27}$$

$$\frac{d^2 r(t)}{dt^2} + 2\frac{d r(t)}{dt} + 3r(t) = \frac{d e(t)}{dt} + e(t)$$

(2) 当$e(t) = \mathrm{e}^t$时, 很明显, 可选$r(t) = B\mathrm{e}^t$。

这里，B是待定系数。

代入方程后有：

$$B\mathrm{e}^t + 2B\mathrm{e}^t + 3B\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t$$

$$B = \frac{1}{3}$$

于是，特解为$\frac{1}{3}\mathrm{e}^t$。

系统的完全响应

- **完全响应=齐次解+特解**
- **假设特征根为各不相同的根，则**

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}A_{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\alpha_i t}+r_{\mathrm{p}}(t)$$

- ***A_i*为待定系数，如何求解?**

例

求解待定系数A_i

$$r(t)=\sum_{i=1}^{n}A_{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\alpha_i t}+r_{\mathrm{p}}(t)$$

我们一般将激励信号加入的时刻定义为t=0，响应为 $t\geq 0_+$ 时的方程的解，初始条件

$$r(0_+),\quad \frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t},\quad \frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^2},\quad \cdots,\quad \frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}$$

当n个特征根各不相同时，将初始条件带入$r(t)$：

$$\begin{cases} r(0_+)=A_1+A_2+\ldots+A_n+r_p(0_+) \\ \dfrac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t}=A_1\alpha_1+A_2\alpha_2+\ldots+A_n\alpha_n+\dfrac{d}{dt}r_p(0_+) \\ \ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}=A_1\alpha_1^{n-1}+A_2\alpha_2^{n-1}+\ldots+A_n\alpha_n^{n-1}+\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}r_p(0_+) \end{cases}$$

对上面n个方程联立求解可以得到$A_1,A_2,\ldots A_n$ n个待定系数。

§2.3 起始点的跳变



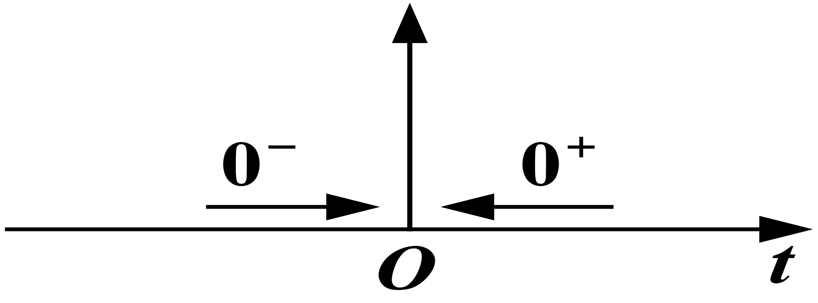
一. 起始点的跳变

0_- 状态、起始状态

$$r^{(k)}(0_-)=\left[r(0_-),\frac{\mathrm{d}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_-)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$

0_+ 状态、初始条件、导出的起始状态

$$r^{(k)}(0_+)=\left[r(0_+),\frac{\mathrm{d}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t},\frac{\mathrm{d}^2\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^2},\cdots\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,r(0_+)}{\mathrm{d}\,t^{n-1}}\right]$$



通常需要$r^k(0_+)$来求解响应，而在系统中起始状态$r^{(k)}(0_-)$比较容易获得。

$t\geq 0_+$ $\quad r^{(k)}(0_-)=r^{(k)}(0_+)?$

以电路系统为例说明

- 对于一个具体的电网络，系统的 0_- 状态就是系统中储能元件的**储能情况**;

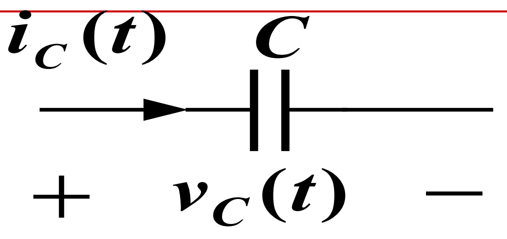
- 一般情况下换路期间电容两端的电压和流过电感中的电流不会发生突变。这就是在电路分析中的**换路定则**：

$$v_C(0_-) = v_C(0_+),\ i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

例

- **什么情况下会发生跳变?**

1．电容电压的突变



由伏安关系

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0_-} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{C}\int_{0_+}^{t} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=v_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\frac{1}{C}\int_{0_+}^{t} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

令$t=0_+$，$v_C(0_+)=v_C(0_-)+\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau+0$

如果$i_c(t)$为有限值

$\int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau=0$，　此时$v_C(0_+)=v_C(0_-)$

如果$i_c(t)$为$\delta(t)$

$\frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{C}$，　此时$v_C(0_+)=v_C(0_-)+\frac{1}{C}$

当有冲激电流或阶跃电压作用于电容时：

$$v_C(0_+)\neq v_C(0_-)$$

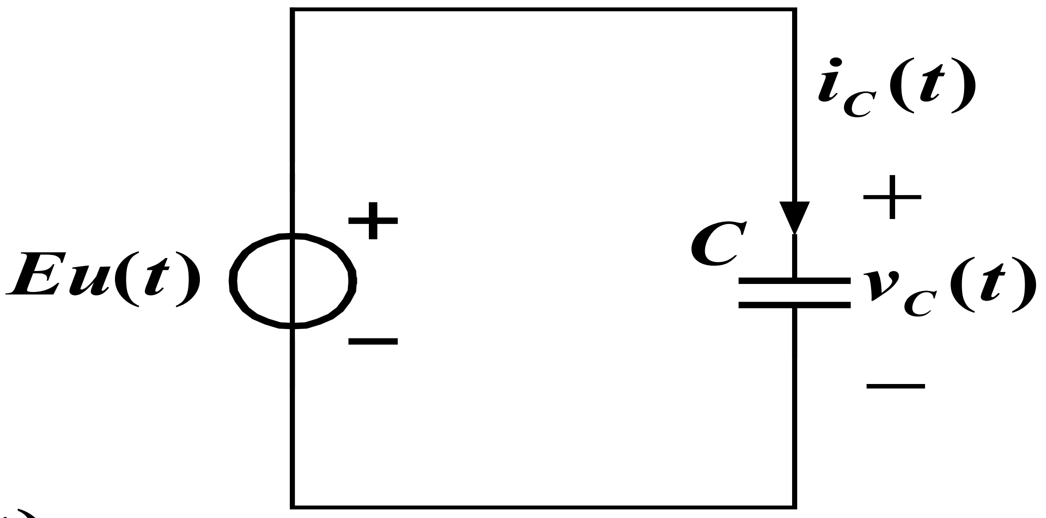
例2-3-1

$$v_C(0_-) = 0$$

$$v_C(0_+) = E$$

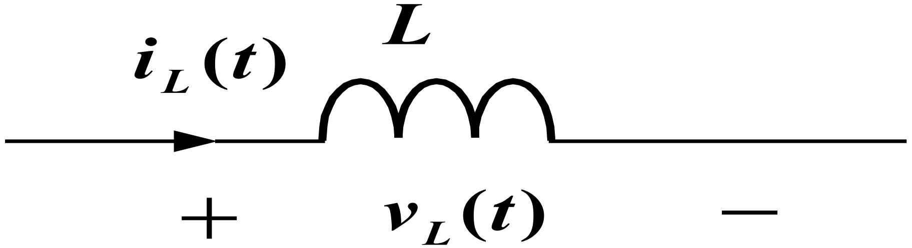
$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}\,v_C(t)}{\mathrm{d}\,t} = CE\delta(t)$$

电流为冲激信号。



2．电感电流的突变

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v_L(\tau)\,d\tau$$



$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} v_L(\tau)\,d\tau$$

如果$v_L(t)$为有限值，

$$\int_{0_-}^{0_+} v_L(\tau)\,d\tau = 0，\quad 此时 i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

如果$v_L(t)$为$\delta(t)$，

$$\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} v_L(\tau)\,d\tau = \frac{1}{L}，\qquad 此时 i_L(0_+) \neq i_L(0_-)$$

冲激电压或阶跃电流作用于电感时：

$$i_L(0_+) \neq i_L(0_-)$$

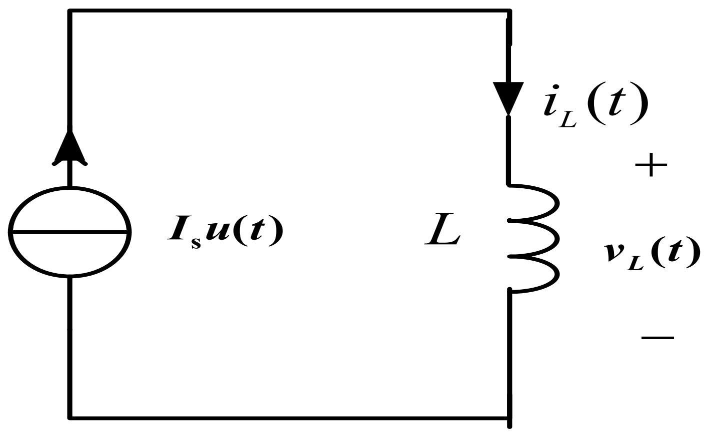
例2-3-2

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t}$$

$$= L\frac{\mathrm{d}[I_s v(t)]}{\mathrm{d}\,t} = LI_s\delta(t)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+} LI_s\delta(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$= i_L(0_-) + I_s$$



- 当有冲激电流强迫作用于电容或有冲激电压强迫作用于电感，0_{-} 到 0_{+} 状态就会发生跳变。

微分方程起始点跳变

①当微分方程右端自由项不包含冲激函数 或其各阶导数项时，系统在0时刻的状态不发生跳变.

$$\{r^k(0_-)\}=\{r^k(0_+)\}。$$

幅度有因为任何有限值乘限的信号激励系统,无法在无穷小的时间内改变系统状态. 以无穷小的结果都是无穷小。

②当微分方程右端自由项<u>包含冲激函数或其各阶导数项</u>时，系统在0时刻状态<u>发生跳变</u>，

$$\{r^k(0_-)\} \neq \{r^k(0_+)\},$$

例

给定系统微分方程，激励e(t)=4,起始条件 $i(0_-)=\frac{14}{5}$ **，** $i'(0_-)=-2$ **，求完全响应**

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$$

解：　求齐次解

系统的特征方程

$$\alpha^2+7\alpha+10=0$$

特征根　$\alpha=-2,-5$

齐次解　$i(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-5t},\quad t\geq 0+$

求系统的完全响应

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}i(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)+10i(t)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e(t)+6\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t)$$

求特解

方程右端自由项为 4×4,因此令特解 $i_{\mathrm{p}}(t)=B$,

要求系统的完全响应为

$$i(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-5t}+\frac{8}{5}\qquad\left(t\geq 0_+\right)$$

根据初始状态确定待定系数

$$i(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-5t} + \frac{8}{5} \qquad (t \geq 0_+)$$

起始条件=初始条件 $i(0_+) = \frac{14}{5}$，$i'(0_+) = -2$，

由$i(t)$的表示式

$$\begin{cases} i(0_+) = A_1 + A_2 + \frac{8}{5} = \frac{14}{5} \\ \frac{d}{dt} i(0_+) = -2A_1 - 5A_2 = -2 \end{cases}$$

求得

$$\begin{cases} A_1 = \frac{4}{3} \\ A_2 = -\frac{2}{15} \end{cases}$$

要求的完全响应为

$$i(t) = \left(\frac{4}{3} e^{-2t} - \frac{2}{15} e^{-5t} + \frac{8}{5} \right) \qquad (t \geq 0_+)$$

冲激函数匹配法

配平的原理：$t=0$ 时刻微分方程左右两端的$\delta(t)$及各阶导数应该平衡(其他项也应该平衡，我们讨论初始条件，可以不管其他项)

例： $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$$ 已知$r(0_-)$,求$r(0_+)$

$3\delta'(t) \rightarrow 3\delta(t)$

$\downarrow$ 带入方程

$-9\delta(t) \leftarrow 9\delta(t)$

$\downarrow$

$\rightarrow -9u(t)$

$\downarrow$ 带入方程

$27u(t) \leftarrow -27u(t)$

$\Delta u(t)$：

表示0_-到0_+相对单位跳变函数

$$r'(t)=3\delta'(t)-9\delta(t)+27\Delta u(t)$$

$$r(t)=3\delta(t)-9\Delta u(t)$$

分析

例： $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$ 已知$r(0_-)$，求$r(0_+)$

方程右端含$3\delta'(t)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$中必含$3\delta'(t)$ $\Rightarrow$ $r(t)$中包含$3\delta(t)$

方程右端不含$\delta(t)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$必含$-9\delta(t)$以平衡$3r(t)$中的$9\delta(t)$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$ 中的 $-9\delta(t)$ $\Rightarrow$ 在$r(t)$中$t=0$ 时刻有$-9\Delta u(t)$

$\Delta u(t)$表示0_-到 的相对跳变函数，所以，

$$r(0_+)-r(0_-)=-9$$

即 $$r(0_+)=r(0_-)-9$$

数学描述

由方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=3\delta'(t)$可知

方程右端含$\delta'(t)$项，它一定属于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$

设 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)$$

则 $$r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t)$$

代入方程 $$a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)+3a\delta(t)+3b\Delta u(t)=3\delta'(t)$$

得出 $$\begin{cases} a=3 \\ b+3a=0 \\ c+3b=0 \end{cases}$$ **即** $$\begin{cases} a=3 \\ b=-9 \\ c=27 \end{cases}$$

所以得 $r(0_+)-r(0_-)=b=-9$ **即** $r(0_+)=r(0_-)-9$

例

描述LTIS的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+10r(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+2e(t)，\text{输入}e(t)=e^{-t}u(t),$$

已知 $r(0_-)=0$和$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(0_-)=0$,用冲激函数匹配法求$r(0_+)$和$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(0_+)$。

解答

（1）将$e(t)$代入微分方程，得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+7\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+10r(t)=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)+2e^{-t}u(t)$$

$$=\delta(t)+e^{-t}u(t)=\delta(t)+\Delta u(t)$$

(2) $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+7\frac{d}{dt}r(t)+10r(t) = \delta(t)+\Delta u(t)$

方程右端的冲激函数项最高阶次是 $\delta(t)$，因而有

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}r(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t) \\ \frac{d}{dt}r(t)=a\Delta u(t) \\ r(t)=0 \end{cases} \qquad (0_- < t < 0_+)$$

代入微分方程

$$\left[a\delta(t)+b\Delta u(t)\right]+7\left[a\Delta u(t)\right] = \delta(t)+\Delta u(t)$$

求得

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 7a = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) = a\delta(t) + b\Delta u(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) = a\Delta u(t) \\ r(t) = 0 \end{cases}}$$

0_+ 状态为

$$\begin{cases} r(0_+) = 0 + r(0_-) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(0_+) = 1 + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(0_-) = 1 \end{cases}$$

解微分方程的步骤：

将元件电压，电流关系应用于给定的电路（KCL, KVL）

↓

列写微分方程组

↓

化为一元微分方程

↓

↓ ↓

齐次解($\sum A_i e^{\alpha_i t}$,系数待定) 特解(查表可得) 给定0_起始状态

↓ ↓

完全解＝齐次解＋特解（有待定系数）← 求出对应0_+状态的值

↓

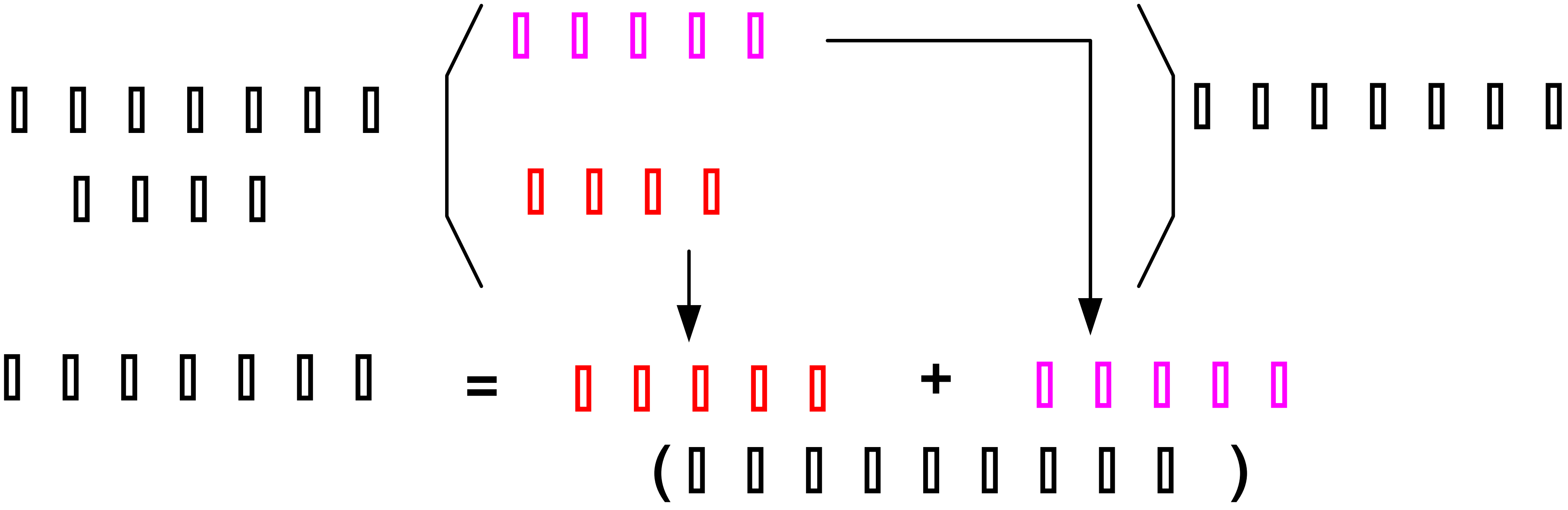
求出待定系数A_i，得到系统完全响应

§2.4 零输入响应和零状态响应

完全响应=零输入响应+零状态响应

输入信号会对系统产生影响，系统的起始状态也会对系统t>0时的行为产生影响.

可以将原始储能看作是激励源。



零输入响应：

没有外加激励信号的作用，只由起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应。

$$r_{zi}(t) = H[e(t) = 0, \{r^{(k)}(0_-)\}]$$

零状态响应：

不考虑原始时刻系统储能的作用（起始状态等于零），由系统的外加激励信号产生的响应。

$$r_{zi}(t) = H[e(t), \{r^{(k)}(0_-)=0\}]$$

求解零输入响应

对于一般的微分方程

$$C_0 r^{(n)}(t)+\cdots+C_{n-1}r'(t)+C_n r(t)=E_0 e^{(m)}(t)+\cdots+E_m e(t)$$

•求解系统零输入响应，就是求解e(*t*)=0条件下微分方程的解。此时方程右端等于0，实际上是求齐次方程的解。

零输入响应就是下列齐次方程的解

$$C_0 r^{(n)}(t)+\cdots+C_{n-1}r'(t)+C_n r(t)=0$$

解的形式为: $$r_{zi}(t)=\sum_{k=1}^{n} A_{zik}e^{\alpha_k t}$$

输入激励为0，因此在0时刻不会发生跳变，所以

$$r_{zi}^{(n)}(0_+)=r_{zi}^{(n)}(0_-)=r^{(n)}(0_-)$$

求解零状态响应

- 求解零状态响应时，激励$\neq$ 0，因此求解的是非齐次的微分方程。
- 解的形式：齐次解+特解

$$r_{zs}(t)=\sum_{k=1}^{n}A_{zik}e^{\alpha_k t}+B(t)$$

其中系数A_{zsk}由初始状态 $r_{zs}(0_+)$ 确定。

例

若系统的微分方程为

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{e}(t)+e(t)$$

已知输入信号$e(t)=e^{-3t}u(t)$,

起始状态为：$r(0_-)=1, r'(0_-)=1$,

求系统的零状态响应，零输入响应

及自由响应，强迫响应。

解：先求零输入响应，求解方程为：

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=0, e(t)=0, r(0_-)=1, r'(0_-)=1$$

系统的特征方程为$\alpha^2+3\alpha+2=0$

所以特征根为$\alpha_1=-1$，$\alpha_2=-2$，

零输入响应可以写为：$r_{zi}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t} \quad t>0$

因为方程右端没有冲激信号或高阶导数，所以

$$r_{zi}(0_+)=r_{zi}(0_-)=1, r'_{zi}(0_+)=r_{zi}'(0_-)=1$$

带入$r_{zi}(t)$得：$A_1=3$，$A_2=-2$；所以$r_{zi}(t)=3e^{-t}-2e^{-2t} \quad t>0$

下面求零状态响应$r_{zs}(t)$,求解方程为:$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{e}(t)+e(t)$

已知输入信号$e(t)=e^{-3t}u(t)$，$r(0_-)=0, r'(0_-)=0,$

将激励信号带入方程得：

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{e}(t)+e(t)=e^{-3t}\delta(t)+(-3)e^{-3t}u(t)+e^{-3t}u(t)$$

$$=\delta(t)-2e^{-3t}u(t)$$

当$t>0$时，方程右端是指数信号$-2e^{-3t}$,所以$r_p(t)=Be^{-3t}$

带入方程得:$9Be^{-3t}-9Be^{-3t}+2Be^{-3t}=-2e^{-3t}$

所以$B=-1, r_p(t)=-e^{-3t}$

$$r_{zs}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}-e^{-3t} \quad t>0$$

求初始条件

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{e}(t)+e(t)=\delta(t)-2e^{-3t}u(t)$$

因为方程右端有冲激函数，所以有跳变$r_{zs}(0_+)\neq r_{zs}(0_-)$

$$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=\delta(t)-2\Delta u(t)$$

$$设\begin{cases} r''(t)=a\delta(t)+b\Delta u(t) \\ r'(t)=a\Delta u(t) \\ r(t)=0 \end{cases}$$

$$r_{zs}(0_+)=r_{zs}(0_-)+0=0, r'_{zs}(0_+)=r'_{zs}(0_-)+a=1$$

带入$r_{zs}(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}-e^{-3t}$中得：

$$r_{zs}(0_+)=0=A_1+A_2-1, r'_{zs}(0_+)=1=-A_1-2A_2+3$$

$$A_1=0, A_2=1, r_{zs}(t)=e^{-2t}-e^{-3t} \quad t>0$$

带入方程得：

$$a\delta(t)+b\Delta u(t)+3a\Delta u(t)=\delta(t)-2\Delta u(t)$$

解得$a=1, b=-5$

若系统的微分方程如下式，输入信号$e(t)=e^{-3t}u(t)$，$r(0_-)=1, r'(0_-)=1$

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{e}(t)+e(t)$$

所以$r(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=3e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-2t}-e^{-3t}$

$$=3e^{-t}-e^{-2t}-e^{-3t} \quad t>0$$

自由响应:$3e^{-t}-e^{-2t}$

强迫响应:$-e^{-3t}$

二．对系统线性的进一步认识

由常系数微分方程描述的系统在下述意义上是线性的。

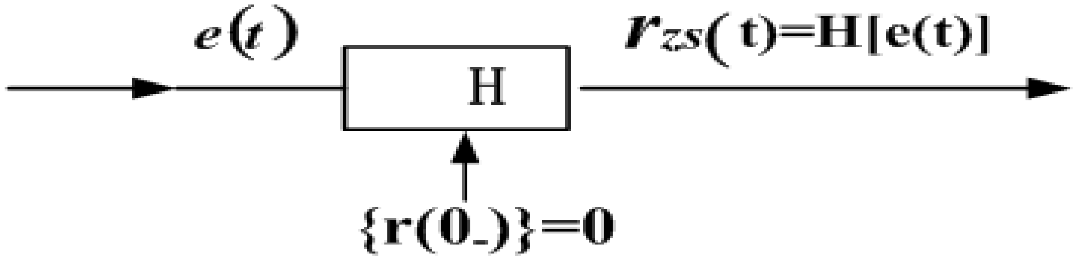
(1)响应可分解为：零输入响应＋零状态响应。

(2)零状态线性：当起始状态为零时，系统的零状态响应对于各激励信号呈线性。

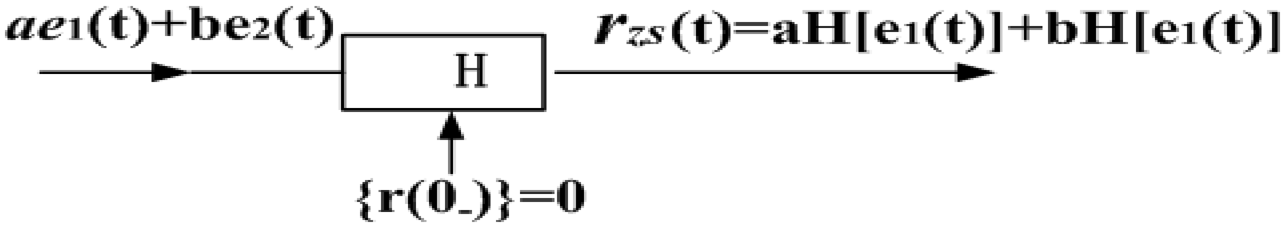
(3)零输入线性：当激励为零时，系统的零输入响应对于各起始状态呈线性。

1.零状态线性

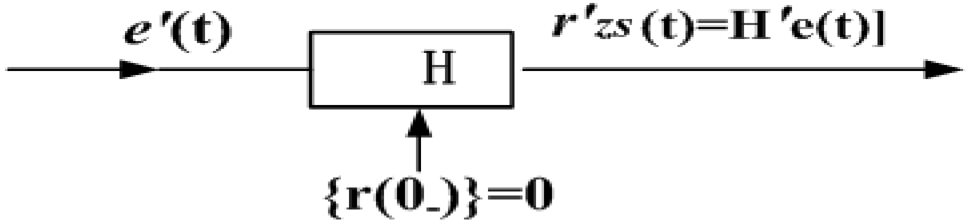
零状态响应和激励之间存在线性关系



满足齐次性和叠加性

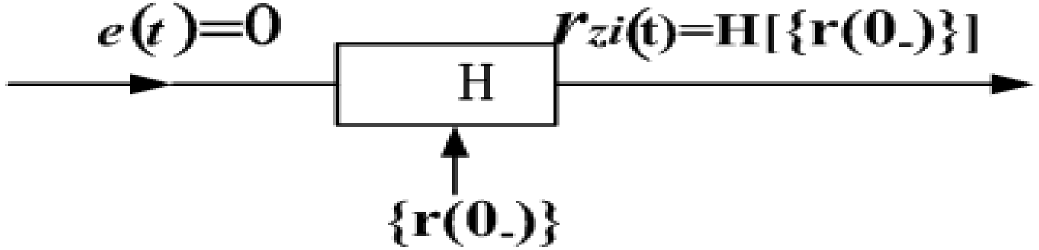


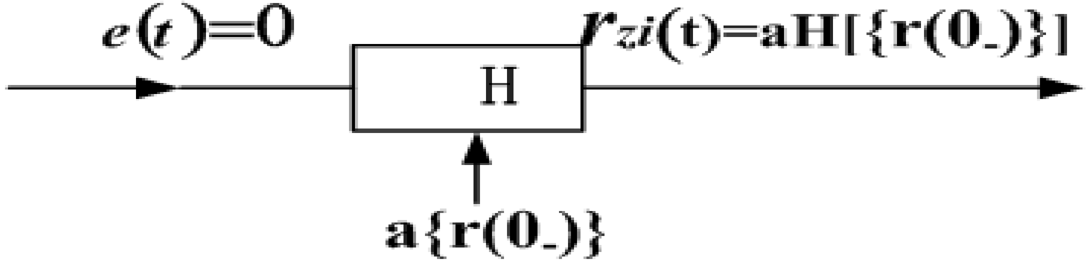
满足微积分特性



2.零输入线性

零输入响应和起始状态之间存在线性关系





例

已知线性时不变系统，当激励是u(t)时，零状态响应$r_{zs}(t)=e^{-2t}u(t)$，求激励是$\delta(t)$和$2u(t\text{-}1)$时的零状态响应。

解答

$\because$ 零状态响应和激励之间存在线性关系，

且$\delta(t)=u'(t)$

$$\therefore H[\delta(t)]=H'[u(t)]=\frac{d[e^{-2t}u(t)]}{dt}=-2e^{-2t}u(t)+\delta(t)$$

$\therefore$ 激励是$\delta(t)$是，$r_{zs}(t)=-2e^{-2t}u(t)+\delta(t)$

同理，$u(t)\leftrightarrow r_{zs}(t)=e^{-2t}u(t)$

$\therefore 2u(t-1)\leftrightarrow 2r_{zs}(t-1)=2e^{-2(t-1)}u(t-1)$

例

系统$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+3r(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+4e(t), e(t)=u(t)$,

$r(0_-)=1, r(0_-^{'})=2$,求完全响应

解答

$$\alpha^2+4\alpha+3=0\Rightarrow\alpha=-1,-3$$

写出齐次解的形式$y_{zi}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}$;

零输入响应的初始条件:

输入为零$\Rightarrow y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)$,$y'_{zi}(0_+)=y'_{zi}(0_-)=y'(0_-)$

$$\therefore\begin{cases}c_1+c_2=1\\-c_1-3c_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=5/2\\c_2=-3/2\end{cases}\Rightarrow$$ 零输入响应为$y_{zi}(t)=5/2e^{-t}-3/2e^{-3t}$,$t\geq0$

利用零状态线性求解零状态响应

若已知下列系统的零状态响应 $y_{zs1}(\mathrm{t}) = (-1/2e^{-t} + 1/6e^{-3t} + 1/3)u(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) + 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) + 3r(t) = e(t), e(t) = u(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r(t) + 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} r(t) + 3r(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t) + 4e(t), e(t) = u(t)$$

的零状态响应?

$$y_{zs}(\mathrm{t}) = y'_{zs1}(\mathrm{t}) + y_{zs1}(\mathrm{t})$$

$$= [(-1/2e^{-t} + 1/6e^{-3t} + 1/3)u(t)]' + 4[(-1/2e^{-t} + 1/6e^{-3t} + 1/3)u(t)]$$

例

已知一线性时不变系统，在相同初始条件下，当激励为 $e(t)$ 时，其全响应为 $r_1(t)=\left[2e^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$；当激励为 $2e(t)$ 时，其全响应为 $r_2(t)=\left[e^{-3t}+2\sin(2t)\right]u(t)$。求：

(1) 初始条件不变，当激励为 $e(t-t_0)$ 时的全响应 $r_3(t)$，t_0 为大于零的实常数。

(2) 初始条件增大 1 倍，当激励为 $0.5e(t)$ 时的全响应 $r_4(t)$。

解答

(1) 设零输入响应为 $r_{zi}(t)$，零状态响应为 $r_{zs}(t)$，则有

$$r_1(t)=r_{zi}(t)+r_{zs}(t)=\left[2e^{-3t}+\sin(2t)\right]u(t)$$

$$r_2(t)=r_{zi}(t)+2r_{zs}(t)=[e^{-3t}+2\sin(2t)]u(t)$$

解（续）

解得

$$r_{zi}(t) = 3\mathrm{e}^{-3t}u(t)$$

$$r_{zs}(t) = [-\mathrm{e}^{-3t} + \sin(2t)]u(t)$$

$$\therefore r_3(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t - t_0)$$

$$= 3\mathrm{e}^{-3t}u(t) + [-\mathrm{e}^{-3(t-t_0)} + \sin(2t - 2t_0)]u(t - t_0)$$

$$\therefore r_4(t) = 2r_{zi}(t) + 0.5r_{zs}(t)$$

$$= 2\left[3\mathrm{e}^{-3t}u(t)\right] + 0.5\left[-\mathrm{e}^{-3t} + \sin(2t)\right]u(t)$$

$$= \left[5.5\mathrm{e}^{-3t} + 0.5\sin(2t)\right]u(t)$$

三．系统响应划分

自由响应＋强迫响应

(Natural+forced)

暂态响应+稳态响应

(Transient+Steady-state)

零输入响应＋零状态响应

(Zero-input+Zero-state)

各种系统响应定义

(1)自由响应： 也称固有响应，由系统本身特性决定，与外加激励形式无关。对应于齐次解。

强迫响应： 形式取决于外加激励。对应于特解。

(2)暂态响应： 是指激励信号接入一段时间内，完全响应中暂时出现的有关成分，随着时间t增加，它将消失。

稳态响应： 由完全响应中减去暂态响应分量即得稳态响应分量。

(3)零输入响应： 没有外加激励信号的作用，只由起始状态（起始时刻系统储能）所产生的响应。

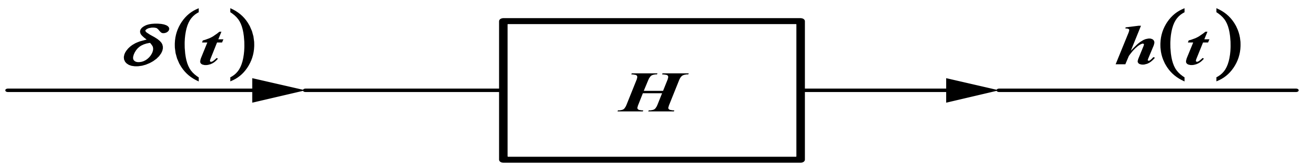
零状态响应： 不考虑原始时刻系统储能的作用（起始状态等于零），由系统的外加激励信号产生的响应。

§2.5 冲激响应和阶跃响应

一．冲激响应

1．定义

系统在单位冲激信号$\delta(t)$作用下产生的零状态响应，称为单位冲激响应，简称冲激响应，一般用$h(t)$表示。



冲激响应由系统本身决定，与外界因素无关，因此常用于衡量系统的特性。

不同的冲激响应就代表了不同的系统

2．n阶系统的冲激响应

(1) 冲激响应的数学模型

对于线性时不变系统,可以用一高阶微分方程表示

$$C_0 \frac{d^n r(t)}{dt^n} + C_1 \frac{d^{n-1} r(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + C_{n-1} \frac{d r(t)}{dt} + C_n r(t) =$$

$$E_0 \frac{d^m e(t)}{dt^m} + E_1 \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + E_{m-1} \frac{d e(t)}{dt} + E_m e(t)$$

响应及其各阶导数(最高阶为n次)

激励及其各阶导数(最高阶为m次)

令 $e(t)=\delta(t)$

则 $r(t)=h(t)$

$$C_0 h^{(n)}(t) + C_1 h^{(n-1)}(t) + \cdots + C_{n-1} h^{(1)}(t) + C_n h(t)$$

$$= E_0 \delta^{(m)}(t) + E_1 \delta^{(m-1)}(t) + \cdots + E_{m-1} \delta^{(1)}(t) + E_m \delta(t)$$

(2)$h(t)$解答的形式

由于$\delta(t)$及其导数在 $t \geq 0_+$时都为零，因而方程式右端的自由项恒等于零，这样原系统的冲激响应形式与齐次解的形式相同。

$h(t)$与n, m相对大小有关

- 当$n > m$时，$h(t)$不含$\delta(t)$及其各阶导数；
- 当$n = m$时，$h(t)$中应包含$\delta(t)$；
- 当$n < m$时，$h(t)$应包含$\delta(t)$及其各阶导数。

特征根为无重根的单根：

$$h(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} A_i e^{\alpha_i t}\right] u(t)$$

n 与 m 的关系	n>m	n=m	n<m（以 n=m-1 为例）
h(t)的形式（以二阶系统为例）	$(C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t})\varepsilon(t)$	$A\delta(t)+(C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t})\varepsilon(t)$	$B\delta'(t)+A\delta(t)+(C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t})\varepsilon(t)$

例

求系统 $\frac{d^2 r(t)}{dt^2}+4\frac{d r(t)}{dt}+3r(t)=\frac{d e(t)}{dt}+2e(t)$ **的冲激响应**

解:

将$e(t)\rightarrow\delta(t)$**,** $r(t)\rightarrow h(t)$

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2}+4\frac{d h(t)}{dt}+3h(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}+2\delta(t)$$

求特征根 $\alpha^2+4\alpha+3=0\Rightarrow\alpha_1=-1,\alpha_2=-3$

$n=2,m=1,n>m$ $h(t)$中不包含冲激项

带$u(t)$

冲激响应 $h(t)=(A_1e^{-t}+A_2e^{-3t})u(t)$

求待定系数 **0_+法确定待定系数,**

求0_+定系数

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+3r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+2e(t)$$

设
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 h(t)}{\mathrm{d}t^2}=a\delta'(t)+b\delta(t)+c\Delta u(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ h(t)=a\Delta u(t)\end{cases}$$

$$\therefore\quad h(0_+)=1\ ,\quad h'(0_+)=-2$$

代入$h(t)$,得

$$\begin{cases}h(0_+)=A_1+A_2=1\\ h'(0_+)=-A_1-3A_2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=\dfrac{1}{2}\\ A_2=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\therefore\ h(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{-3t}\right)u(t)$$

$\delta(\mathrm{t})$ 信号的加入在t=0时刻引起了系统能量的存储，而 $t \geq 0_+$ 之后无外加激励，由存储的能量产生响应，相当于将冲激信号源等效为起始条件，响应为齐次解的形式。

齐次解法求冲激响应（补充）

假设一n阶常系数微分方程右端的自由项是$\delta(t)$的线性组合，

$$\frac{\mathrm{d}^{(n)}h(t)}{\mathrm{d}t^{n}}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{(n-1)}h(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{0}h(t)=b_{m}\frac{d^{(m)}\delta(t)}{dt^{m}}+\ldots+b_{0}\delta(t) \qquad (1)$$

如何用简单的方法求解其冲激响应h(t)?

<u>思路：利用系统线性</u>

1.构造微分方程（2）使方程左端与所求方程相同（方程最左端系数为1），右端只有一项$\delta(t)$,求其冲激响应 $h_1(t)$

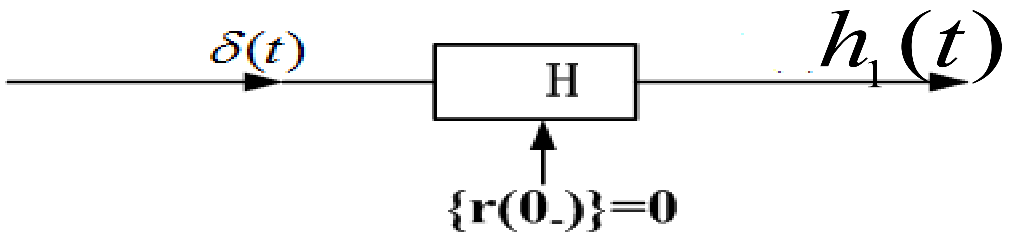
$$\frac{\mathrm{d}^{(n)}h_1(t)}{\mathrm{d}t^{n}}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{(n-1)}h_1(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{0}h_1(t)=\delta(t) \qquad (2)$$

2. 求解$h(t)$

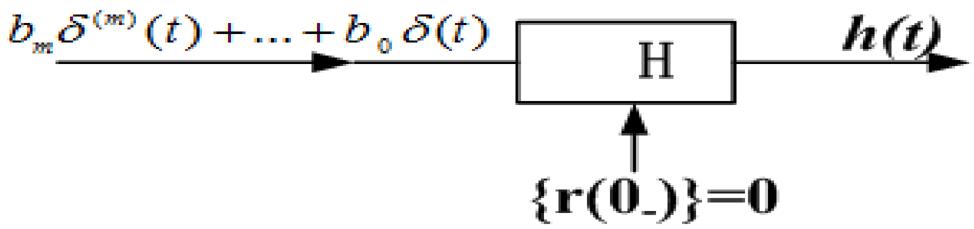
齐次解法求冲激响应（补充）

方程(1)和(2)左端完全相同，说明系统的固有特性完全相同，是同一系统。方程右端自由项不同，说明该系统的激励不同。

$$h_1^{(n)}(t)+\ldots+a_0h_1(t)=b_0\delta(t)$$



$$h^{(n)}(t)+\ldots+a_0h(t)=b_m\delta^{(m)}(t)+\ldots+b_0\delta(t)$$



由系统的线性时不变特性，原系统的冲激响应h(t)是$h_1(t)$的线性组合。

$$h(t)=b_mh_1^{(m)}(t)+b_{m-1}h_1^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0h_1(t)$$

求系统 $\frac{d^2 r(t)}{dt^2}+4\frac{d r(t)}{dt}+3r(t)=\frac{d e(t)}{dt}+2e(t)$ 的冲激响应

解答

系统的激响应的求解方程:$\frac{d^2 h(t)}{dt^2}+4\frac{d h(t)}{dt}+3h(t)=\delta'(t)+2\delta(t)$

先求解 $\frac{d^2 h_1(t)}{dt^2}+4\frac{d h_1(t)}{dt}+3h_1(t)=\delta(t)$,再利用线性求出 $h(t)$

则由系统的线性时不变特性

$$h(t)=\frac{dh_1(t)}{dt}+2h_1(t)$$

先求解$\dfrac{\mathrm{d}^2 h_1(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t}+3h_1(t)=\delta(t)$

$$h_1(t)=\left(A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$$

$$h_1'(t)=(A_1+A_2)\delta(t)+(-A_1\mathrm{e}^{-t}-3A_2\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

$$h_1''(t)=(A_1+A_2)\delta'(t)+(-A_1-3A_2)\delta(t)+(A_1\mathrm{e}^{-t}+9A_2\mathrm{e}^{-3t})u(t)$$

将上式代入方程，方程左右两端配平，可以得到A1,A2的解

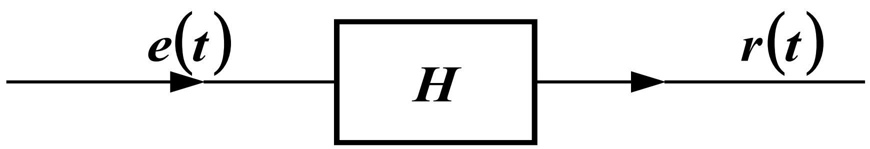
$$h_1(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$$

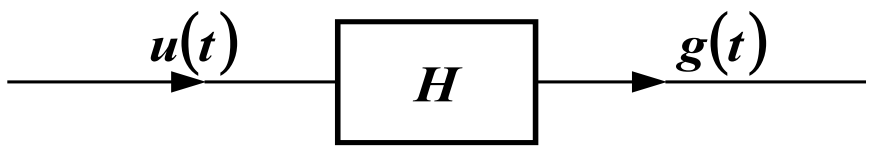
$$h(t)=\frac{\mathrm{d}h_1(t)}{\mathrm{d}t}+2h_1(t)$$

二．阶跃响应

1. 定义

系统在单位阶跃信号作用下的零状态响应，称为单位阶跃响应，简称阶跃响应。





系统的输入$e(t)=u(t)$，其响应为$r(t)=g(t)$。系统方程的右端将包含阶跃函数$u(t)$，所以除了齐次解外，还有特解项。

我们也可以根据线性时不变系统特性，利用冲激响应与阶跃响应关系求阶跃响应。

2．阶跃响应与冲激响应的关系

线性时不变系统满足微、积分特性

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)\,\mathrm{d}\,t$$

阶跃响应是冲激响应的积分，注意积分限：

$\int_{-\infty}^{t}$,对因果系统：$\int_{0_-}^{t}$

例题

求系统 $\dfrac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+3r(t)=\dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}+2e(t)$ **的阶跃响应**

解答

将$e(t)\to u(t)$，　　$r(t)\to g(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}+4\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}+3g(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+2u(t)=\delta(t)+2u(t)$$

特征根-1，-3，　$\therefore$齐次解为$A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}$。

当$t>0$时，方程右端=2，特解为：$r_p(t)=B$,带入方程得:$3B=2$

所以$r_p(t)=B=\dfrac{2}{3}$.

因此$g(t)=(A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}+\dfrac{2}{3})u(t)$.

求待定系数 $g(t)=(A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}+\frac{2}{3})u(t).$

设$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}=a\delta(t)+b\Delta u(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}=a\Delta u(t)\\ g(t)=0\end{cases}$

带入方程得： $a=1, b=\text{-}2$

$$\therefore g(0_+)=0=A_1+A_2+\frac{2}{3}$$

$$g'(0_+)=1=-A_1-3A_2$$

得到$A_1=-\dfrac{1}{2}, A_2=-\dfrac{1}{6}$

$$g(t)=(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-3t}+\frac{2}{3})u(t)$$

已知$h(t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t}\right)u(t)$,利用$h(t)$和$g(t)$的积分性质求$g(t)$

解答

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\tau}+\mathrm{e}^{-3\tau}\right)u(\tau)d\tau$$

当$t<0$时，$g(t)=0$

当$t\geq 0$时，$g(t)=\int_{0}^{t}1/2\mathrm{e}^{-\tau}d\tau+\int_{0}^{t}1/2\mathrm{e}^{-3\tau}d\tau$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\tau}\Big|_{0}^{t}-\frac{1}{6}e^{-3\tau}\Big|_{0}^{t}=-\frac{1}{2}(e^{-t}-1)-\frac{1}{6}(e^{-3t}-1)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{2}{3}$$

所以$g(t)=(-\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-3t}+\frac{2}{3})u(t)$

总结

冲激响应的定义

- 零状态；
- 单位冲激信号作用下，系统的响应为冲激响应。

冲激响应说明：在时域，对于不同系统，零状态情况下加同样的激励$\delta(t)$，看响应$h(t)$，$h(t)$不同，说明其系统特性不同，冲激响应可以衡量系统的特性。

用变换域(拉氏变换)方法求冲激响应和阶跃响应简捷方便，但时域求解方法直观、物理概念明确。

§2.6 卷积

一．卷积（Convolution）

设有两个函数$f_1(t)$和$f_2(t)$,积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

称为$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积积分，简称卷积，记为

$$f(t)=f_1(t)\otimes f_2(t) \qquad 或 \qquad f(t)=f_1(t)*f_2(t)$$

卷积积分的说明:

(1)t：是积分的参变量；　　τ：积分变量

(2)积分限由$f_1(t)$,$f_2(t)$存在的区间决定，即由 $f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$ 的范围决定。

(3)卷积积分得到的是一个新的函数

二．利用卷积求系统的零状态响应

任意信号$e(t)$可表示为冲激序列之和

$$e(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad \boxed{=e(t)*\delta(t)}$$

若把它作用于冲激响应为$h(t)$的LTIS,则响应为

$$r(t)=H[e(t)]=H\left[\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

线性

$$=\left[\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)H[\delta(t-\tau)]\mathrm{d}\tau\right]$$

时不变性

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau \quad =e(t)*h(t)$$

这就是系统的零状态响应。

$$r_{zs}(t)=e(t)\otimes h(t)=e(t)*h(t)$$

二．利用卷积求系统的零状态响应

- 卷积求解回避了起始点跳变问题，但是，这种方法只限于求零状态响应，不能求完全响应。

- 原因在于卷积运算是一种线性运算，而当系统的起始状态不为零时，系统的完全响应不满足叠加性、齐次性与时不变性。

三．卷积的计算

由于系统的因果性或激励信号存在时间的局限性，卷积的积分限会有所变化。卷积积分中积分限的确定是非常关键的。

借助于阶跃函数$u(t)$确定积分限

利用图解说明确定积分限

积分上下限的变化

当$f_1(t)$和$f_2(t)$处在某种条件下，卷积积分的上下限可有所变化。

1. 当$t<0$时，$f_1(t)=0$, $f_2(t)\neq 0$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

2. 当$t<0$时，$f_2(t)=0$, 而$f_1(t)\neq 0$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$

3. 当$t<0$时，$f_1(t)=f_2(t)=0$

$$f_1(t)*f_2(t)=\left[\int_0^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]u(t)$$

例

卷积的图解说明

用图解法直观，尤其是函数式复杂时，用图形分段求出定积分限尤为方便准确，用解析式作容易出错，最好将两种方法结合起来。

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

对τ时延 t
$-(\tau-t)=t-\tau$
积分结果为
t的函数

1. $f_1(t) \to f_1(\tau)$,积分变量改为τ

2. $f_2(t) \to f_2(\tau) \xrightarrow{\text{倒置}} f_2(-\tau) \xrightarrow{\text{时延}} f_2(t-\tau)$

3. 相乘：$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)$

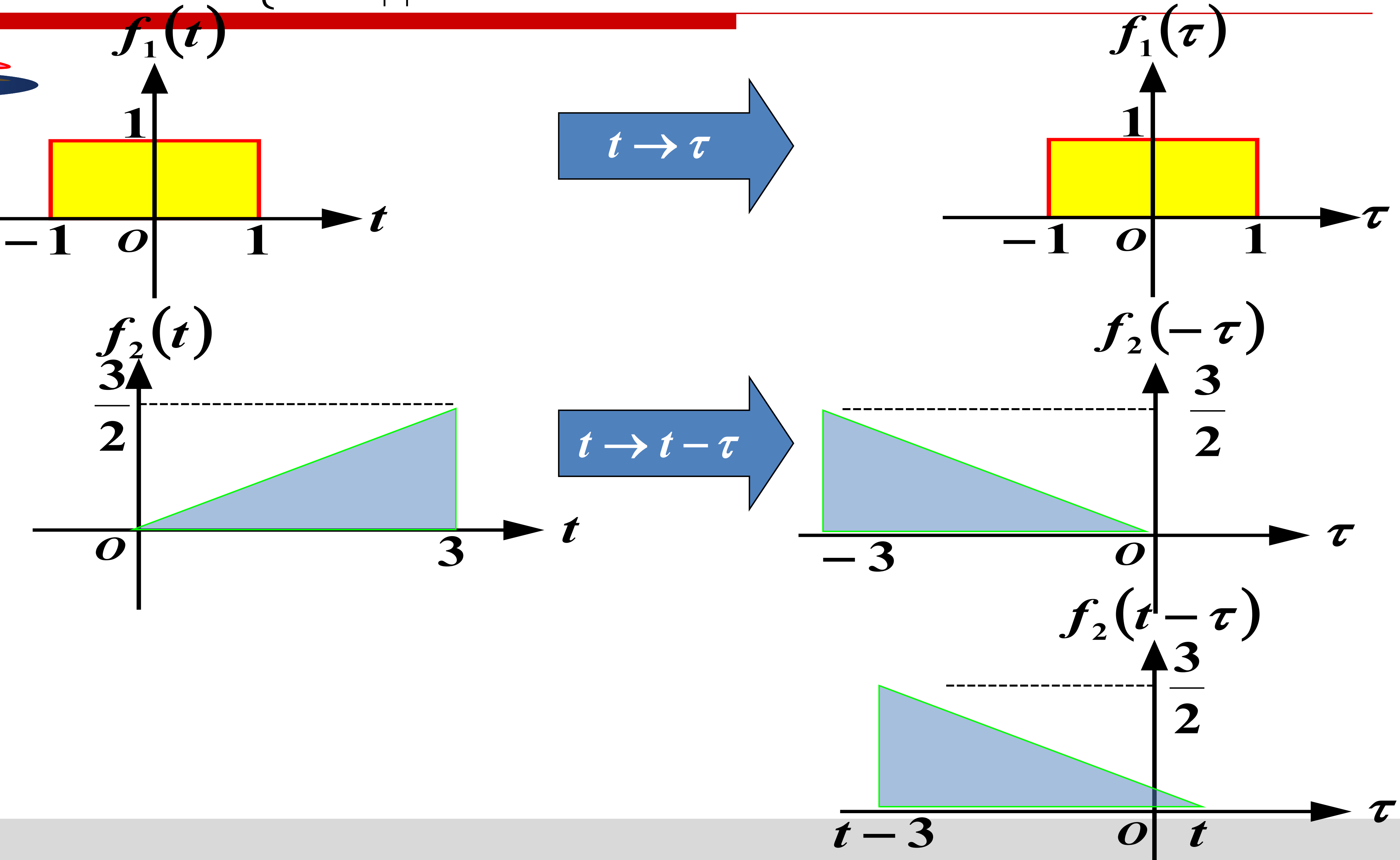
4. 乘积的积分$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau).f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$

$f_1(\tau)$的图形不动，$f_2(\tau)$倒置为$f_2(-\tau)$，$f_2(-\tau)$再移动

例

$$f_1(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases} \qquad f_2(t)=\frac{t}{2} \qquad (0\le t\le 3)$$

解答



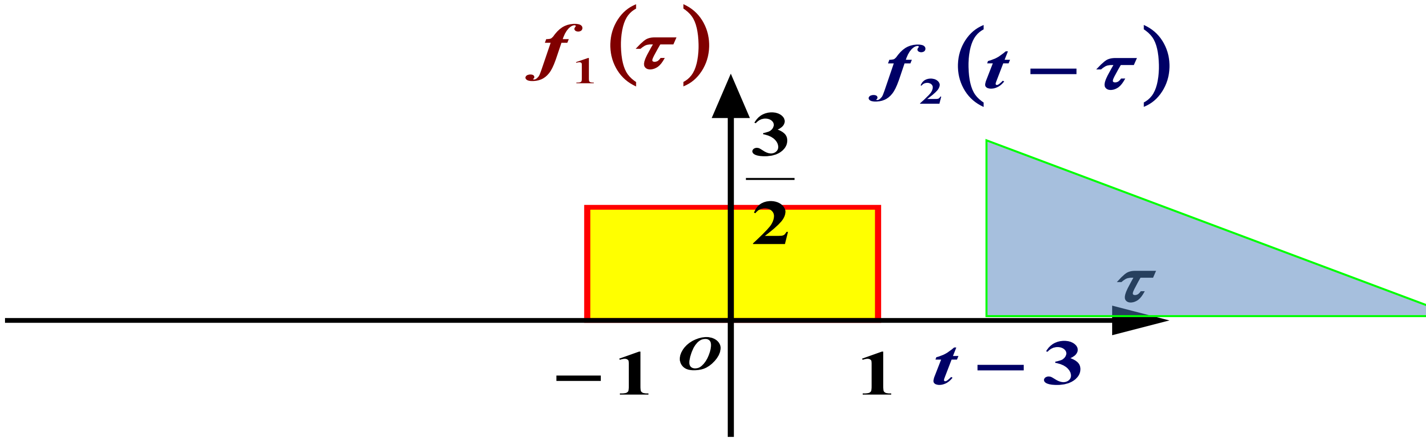
浮动坐标

t：**移动的距离**

$t=0$ $f_2(t-\tau)$ **未移动**

$t>0$ $f_2(t-\tau)$ **右移**

$t<0$ $f_2(t-\tau)$ **左移**

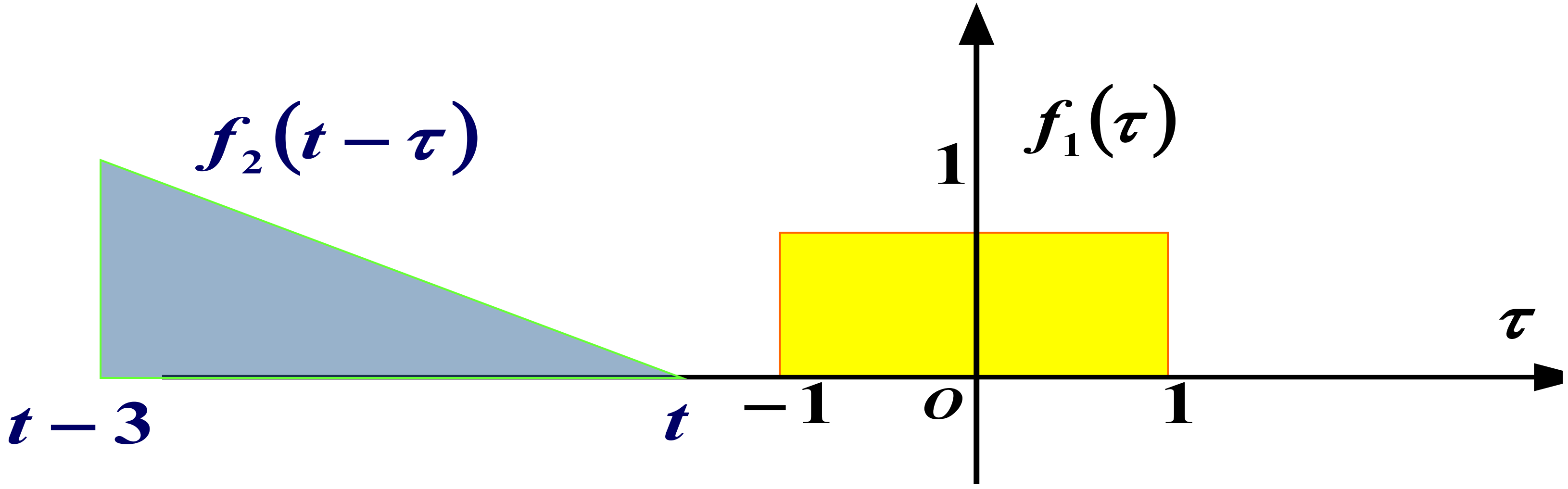


t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$，对应 $f_2(t-\tau)$ 从左向右移动

浮动坐标：

	下限	上限
$f_2(t-\tau)$	t-3	t-0
$f_1(\tau)$	-1	1

$t \le -1$



$t \le -1$

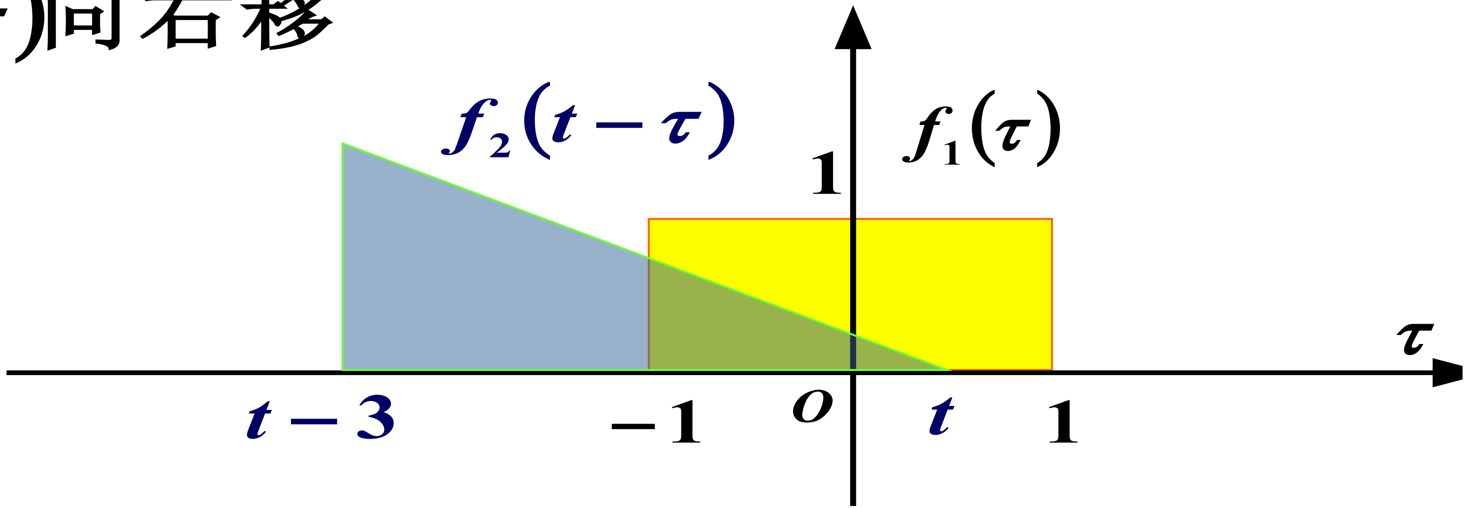
两波形没有公共处，二者乘积为0，即积分为0

$$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)=0$$

$$g(t)=f_1(t)*f_2(t)=0$$

$-1 \le t \le 1$

$f_2(t-\tau)$向右移

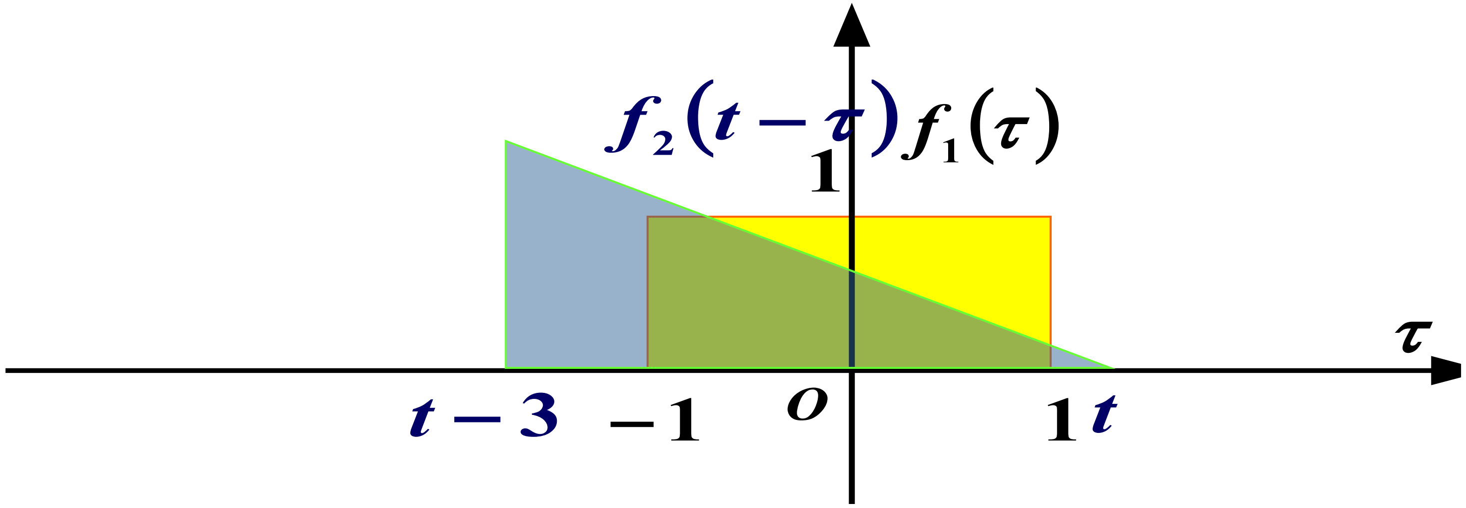


$t > -1$ 时两波形有公共部分，积分开始不为0，积分下限-1，上限t，t为移动时间;

$$g(t) = \int_{-1}^{t} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad = \int_{-1}^{t} \frac{1}{2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$= \left(\frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{t} \quad = \frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}$$

$1 \le t \le 2$

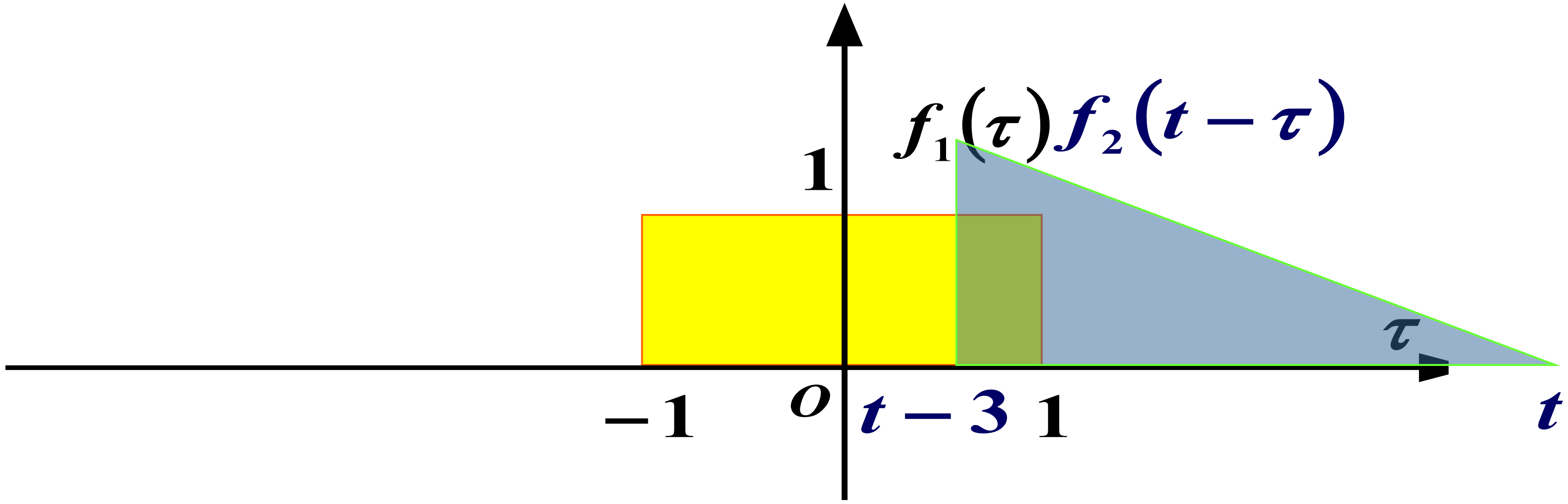


$$\begin{cases} t-3 \le -1 \\ t \ge 1 \end{cases}$$

即$1 \le t \le 2$

$$g(t) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = t$$

$2 \le t \le 4$

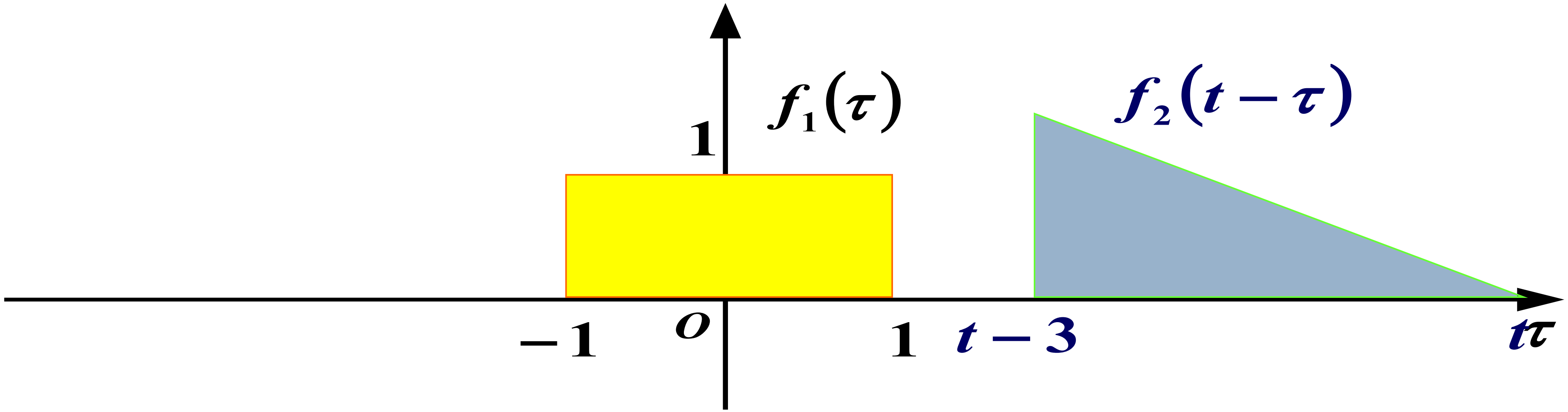


$$\begin{cases} t-3 \ge -1 \\ t-3 \le 1 \end{cases}$$

即$2 \le t \le 4$

$$g(t) = \int_{t-3}^{1} \frac{1}{2}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{t^2}{4} + \frac{t}{2} + 2$$

$t \geq 4$

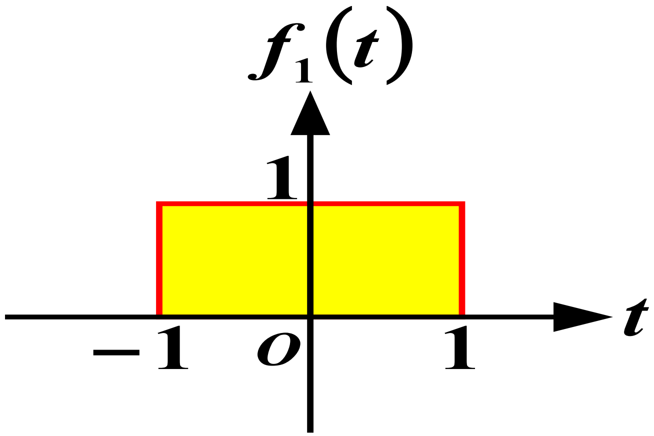


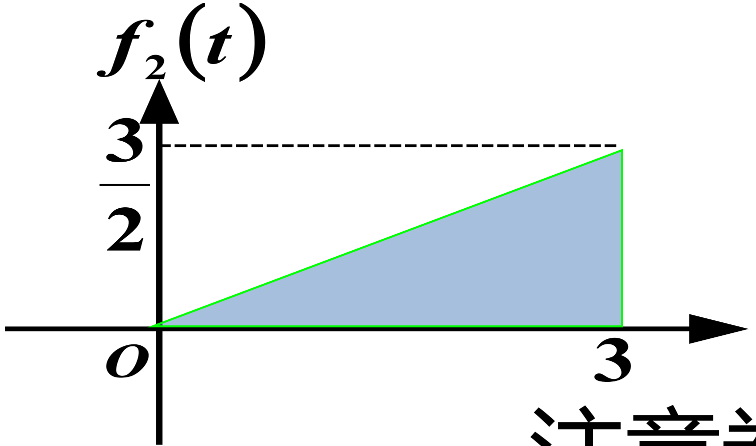
t-3≥1 即$t \geq 4$

$$g(t) = 0$$

卷积结果

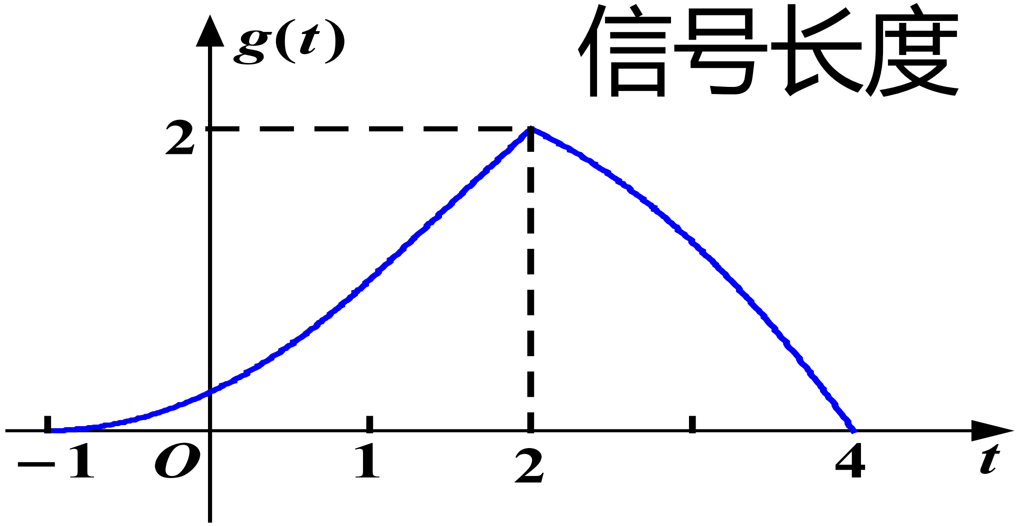
演示





注意卷积信号长度

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4} & -1\le t\le 1\\ t & 1\le t\le 2\\ -\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}+2 & 2\le t\le 4\\ 0 & \text{其他}t\end{cases}$$



积分上下限和卷积结果区间的确定

(1)积分上下限

由$f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\neq 0$的范围（区间）确定。

上限取小，下限取大

(2)卷积结果区间

		上下限
一般规律：	$f_1(t)$	[A,B]
	$f_2(t)$	[C,D]
	$g(t)$	[A+C,B+D]

	$f_1(t)$	-1	1
+	$f_2(t)$	0	3
	$g(t)$	-1	4

四．对卷积积分的几点认识

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

(1) t：观察响应的时刻，是积分的参变量；

τ：信号作用的时刻，积分变量

从因果关系看，必定有 $t\geq\tau$

(2)卷积是系统分析中的重要方法，通过冲激响应$h(t)$建立了响应$r(t)$与激励$e(t)$之间的关系。

(3)积分限由$f_1(t)$, $f_2(t)$ 存在的区间决定，即由

$f_1(\tau)f_2(t-\tau)\neq 0$ 的范围决定。

(4)卷积是数学方法，也可运用于其他学科 。

五．卷积积分的物理意义

卷积的物理意义是：一个函数（如：单位冲激响应）在另一个函数（如：输入信号）上的加权叠加。

卷积是大自然中最常见的运算，一切信号的观测、采集、传输和处理都可以用卷积过程模拟。

六. 生活中的卷积应用

1. 拍照时手抖的影响

比如你拍照时手抖了一下，拍照是一种无氧运动，导致照片模糊，实际上等价于手没抖拍摄的正常照片与一个表示手抖的冲激响应进行卷积运算的结果。

六．生活中的卷积应用

2. 为什么封闭空间会有“余音绕梁”的美好音乐效果?

“余音绕梁”是一个汉语成语，出自《列子·汤问》：“昔韩娥东之齐，匮粮，过雍门，鬻歌假食，既去，而余音绕梁欐，三日不绝。”指音乐长久地在屋梁上回荡，形容歌声或音乐优美悦耳，余音回旋不绝。

“余音绕梁”所内涵的物理现象就是指：声音的反射现象形成的“声音的混响”。

六．生活中的卷积应用

2. 为什么封闭空间会有“余音绕梁”的美好音乐效果?

声音是一种波，声波在室内传播过程中，遇到障碍物会发生反射，每反射一次都要被障碍物吸收一些。当声源停止发声后，声波在室内要经过多次反射和吸收，最后才消失，我们就感觉到声源停止发声后还有若干个声波混合持续一段时间，这种现象叫做混响。

卷积的本质是一种加权和，混响即为延迟信号的加权和。现实生活中混响效果器的工作原理，就是拿源声音，与各种类型房间的IR(impulse response) 做卷积计算。

总结

求解响应的方法：

时域经典法： **完全解=齐次解 + 特解**

双零法：

零输入响应： **解齐次方程，用初（起）始条件求系数；**

零状态响应： $e(t) * h(t)$

§2.7 卷积的性质

一. 代数性质

1. 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

2. 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

系统并联运算

3. 结合律

$$\left[f(t) * f_1(t)\right] * f_2(t) = f(t) * [f_1(t) * f_2(t)]$$

系统级联运算

证明交换律

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

令$t-\tau=\lambda$， 则$\tau:\int_{-\infty}^{+\infty}\rightarrow\lambda:\int_{+\infty}^{-\infty}$ $,\mathrm{d}\tau=-\mathrm{d}\lambda$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(\lambda)\cdot f_1(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=f_2(t)*f_1(t)$$

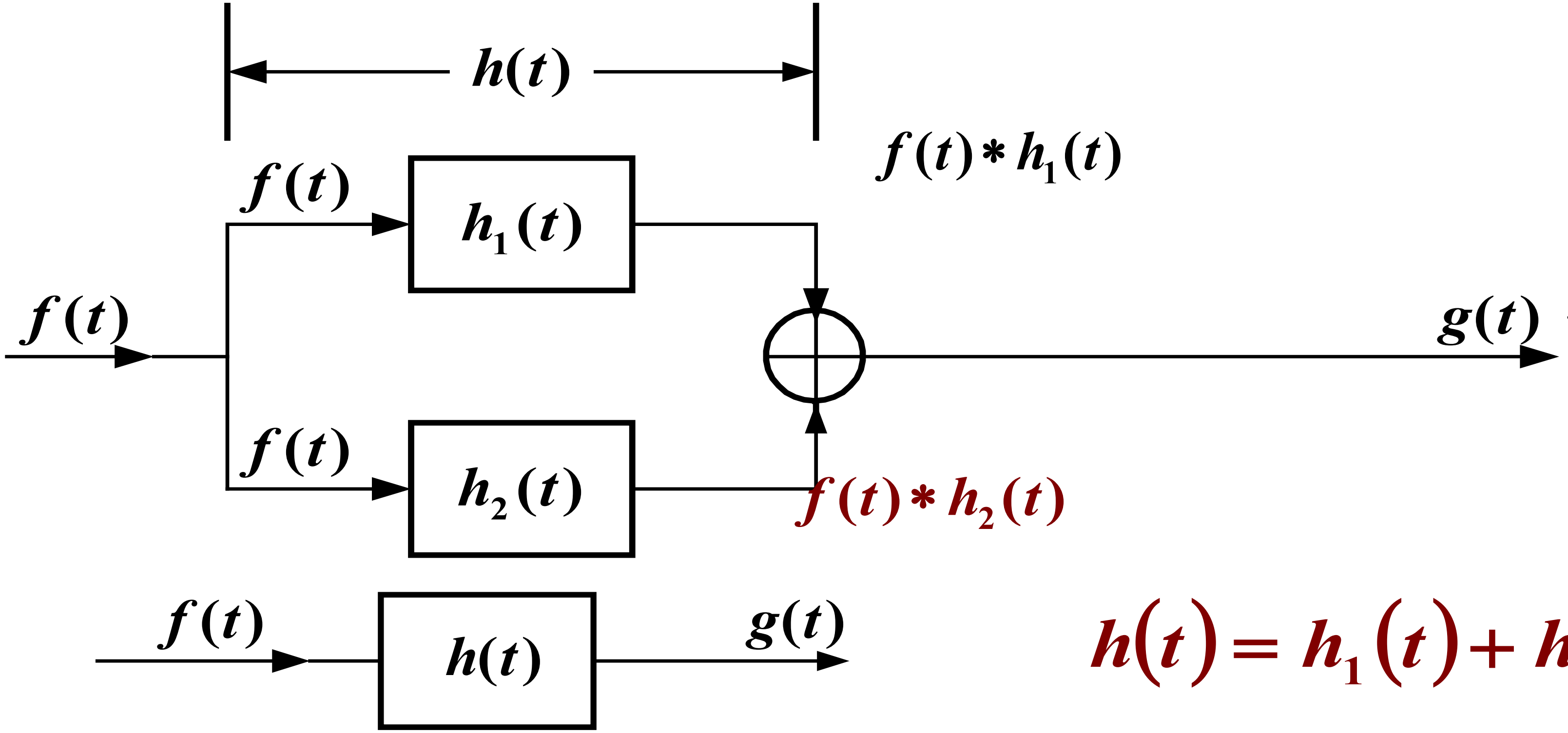
•卷积结果与交换两函数的次序无关。因为倒置 $f_1(\tau)$ 与倒置 $f_2(\tau)$ 积分面积与 t 无关。

•一般选简单函数为移动函数。如矩形脉冲或$\delta(t)$。

系统并联

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

系统并联，框图表示：



$$f(t)*h_1(t)+f(t)*h_2(t)$$

$$=f(t)*\left[h_1(t)+h_2(t)\right]=f(t)*h(t)$$

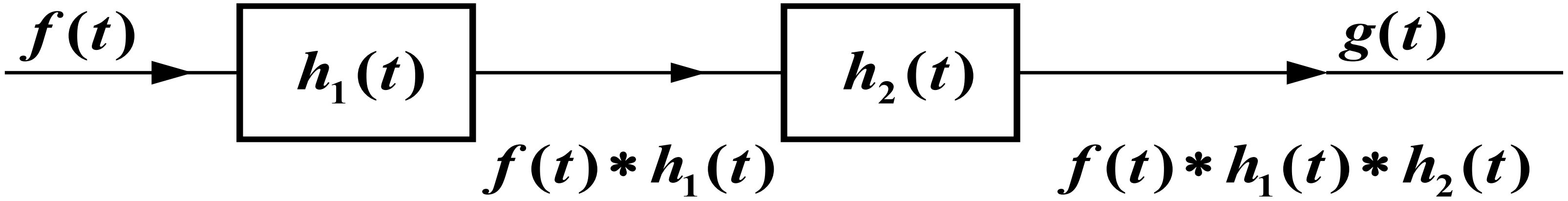
$$h(t)=h_1(t)+h_2(t)$$

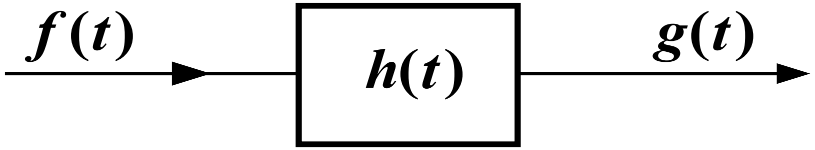
结论：子系统并联时，总系统的冲激响应等于各子系统冲激响应之和。

系统级联

$$f(t)*h_1(t)*h_2(t)=f(t)*[h_1(t)*h_2(t)]=f(t)*h(t)$$

系统级联，框图表示：





$$h(t)=h_1(t)*h_2(t)$$

结论：时域中，子系统级联时，总的冲激响应等于子系统冲激响应的卷积。

补充性质

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t)$$

则$f(t - t_1 - t_2) = [f_1(t - t_1) * f_2(t - t_2)]$

二．微分积分性质

$$g'(t) = f(t) * h'(t) = f'(t) * h(t)$$

成立条件: $f(-\infty) = h(-\infty) = 0$

证 明

推广：

g(t)的积分

$$g^{(-1)}(t) = f(t) * h^{(-1)}(t) = f^{(-1)}(t) * h(t)$$

$$g^{(n)}(t) = f(t) * h^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) * h(t)$$

微分性质积分性质联合实用

$$g^{(n-m)}(t) = f^{(n)}(t) * h^{(-m)}(t) = f^{(-m)}(t) * h^{(n)}(t)$$

微分n次，积分m次

$$g(t) = f^{(n)}(t) * h^{(-n)}(t)$$

$m=n$, 微分次数＝积分次数

对于卷积很方便。

微积分性质的证明

已知

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

两端对t求导

交换律

$$\frac{\mathrm{d}\,g(t)}{\mathrm{d}\,t}=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\frac{\mathrm{d}\,h(t-\tau)}{\mathrm{d}\,t}\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,f(t-\tau)}{\mathrm{d}\,t}h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

即

$$g'(t)=f(t)*h'(t)=f'(t)*h(t)$$

返回

三. 与冲激函数或阶跃函数的卷积

$$f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=f(t)$$

推广:

- $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$
- $f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$
- $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$
- $f(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$
- $f(t)*\delta^{(k)}(t)=f^{(k)}(t)$
- $f(t)*\delta^{(k)}(t-t_0)=f^{(k)}(t-t_0)$

例 $f_1(t)=2(u(t-1)-u(t-3)), f_2(t)=(u(t)-2u(t-1)), f_1(t)*f_2(t)=?$

解:$f_1(-\infty)=f_2(-\infty)=0,$

$\therefore$ 利用微积分性质,$f_1(t)*f_2(t)=f_1^{'}(t)*f_2^{-1}(t)$

$$f_1^{'}(t)=2(\delta(t-1)-\delta(t-3))$$

$$f_2^{-1}(t)=\int_{-\infty}^{t}(u(\tau)-2u(\tau-1))d\tau=\int_0^t u(\tau)d\tau-\int_1^t 2u(\tau-1))d\tau$$

$$=tu(t)-2(t-1)u(t-1)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=[2(\delta(t-1)-\delta(t-3))]*[tu(t)-2(t-1)u(t-1)]$$

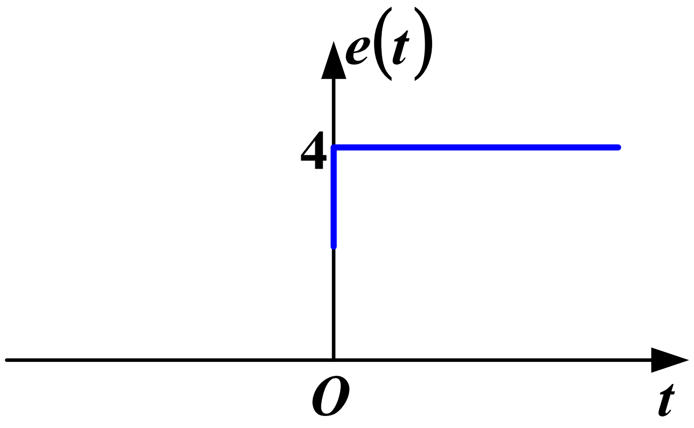
$$=2(t-1)u(t-1)-4(t-2)u(t-2)-(t-3)u(t-3)+2(t-4)u(t-4)$$

X

例

输入$e(t)$如图，$h(t)=\delta(t)+\left(-4/3e^{-2t}+1/3e^{-5t}\right)u(t)$

求系统的零状态响应。



解：$e(t)=4u(t)$

$$r_{zs}(t)=e(t)*h(t)$$

$$h(t) = \delta(t) + \left(-4/3\mathrm{e}^{-2t} + 1/3\mathrm{e}^{-5t}\right)u(t)$$

$$e(t) = 4u(t)$$

$$r_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

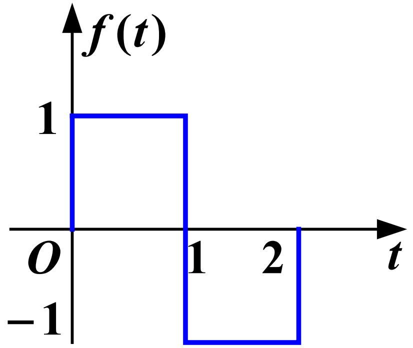
$$= \int_{-\infty}^{\infty} 4u(\tau)\left[\delta(t-\tau) + \left(-\frac{4}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-5(t-\tau)}\right)u(t-\tau)\right]d\tau$$

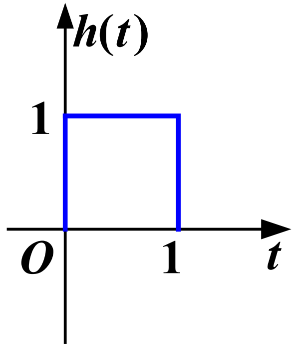
$$= 4u(t) + \int_{-\infty}^{\infty} 4u(\tau)\left[\left(-\frac{4}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-5(t-\tau)}\right)u(t-\tau)\right]d\tau$$

$$= 4u(t) + \left[\int_{0}^{t} 4\left[\left(-\frac{4}{3}e^{-2(t-\tau)} + \frac{1}{3}e^{-5(t-\tau)}\right)\right]d\tau\right]u(t)$$

$$= \left(\frac{8}{5} + \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{4}{15}e^{-5t}\right)u(t)$$

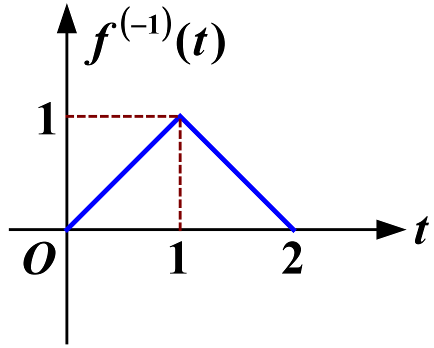
例 已知$f(t),h(t)$，求$g(t)=f(t)*h(t)$。

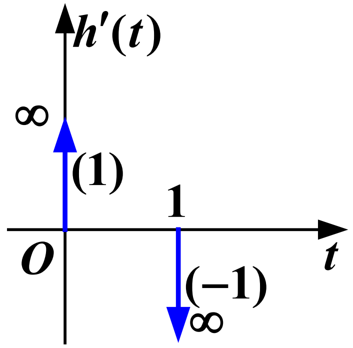




$$f(t)=u(t)-u(t-1)-[u(t-1-u(t-2)]$$

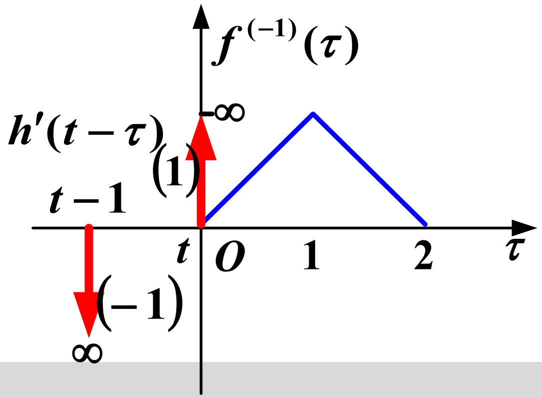
$$h(t)=u(t)-u(t-1)$$

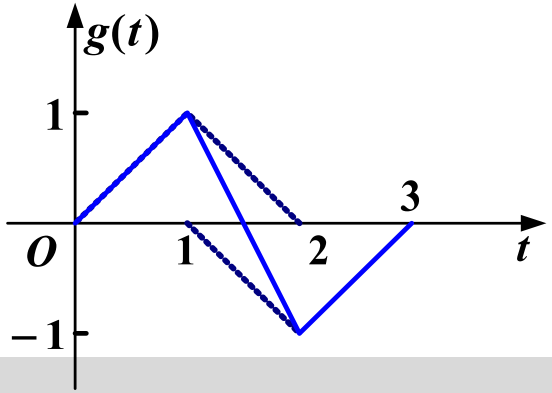




$$f^{(-1)}(t)=tu(t)+(2-2t)u(t-1)+(t-2)u(t-2)$$

$$h^{(1)}(t)=\delta(t)-\delta(t-1)$$



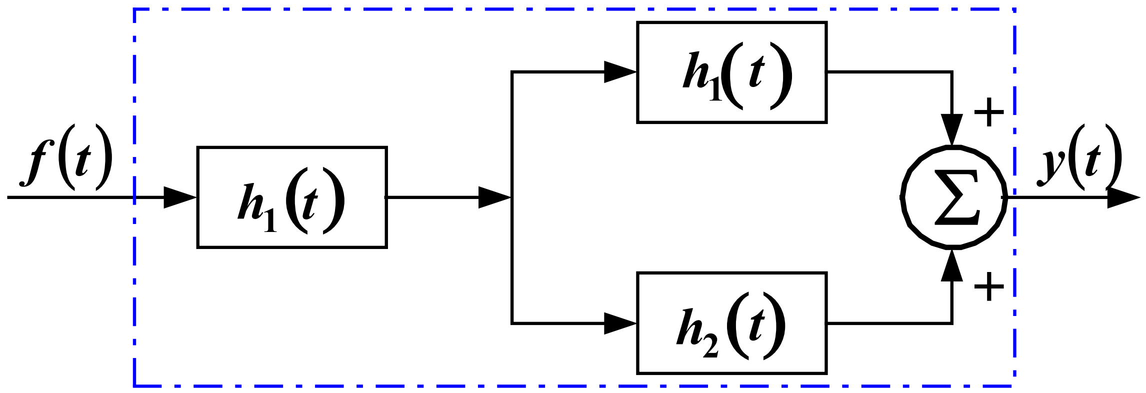


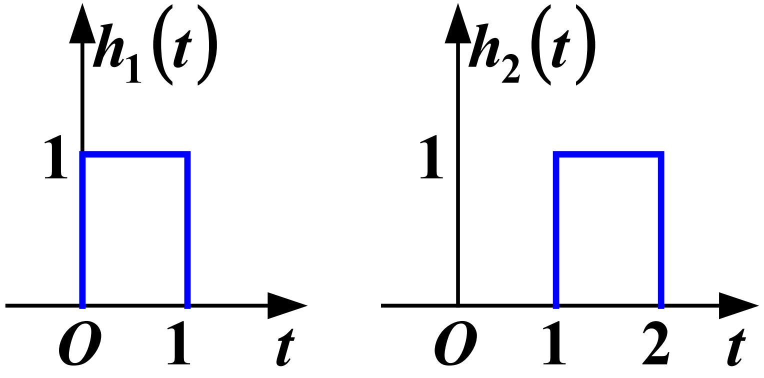
$$g(t)=f^{(-1)}(t)*h^{(1)}(t)$$

$$=tu(t)+(3-3t)u(t-1)+$$

$$(3t-6)u(t-2)-(t-3)u(t-3)$$

例　**系统由三个子系统构成，已知各子系统的冲激响应 $h_1(t), h_2(t)$ 。求复合系统的冲激响应 $h(t)$ ，并画出它的波形。**



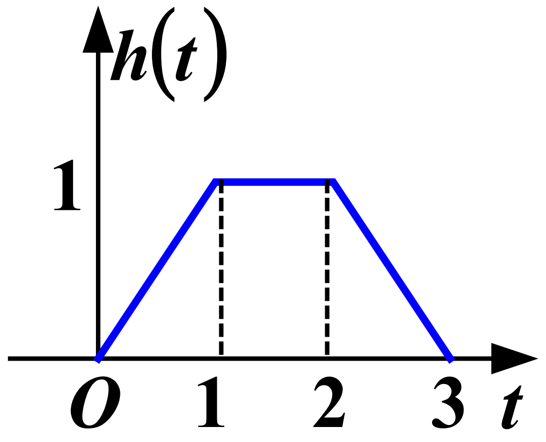


解:

$$h(t) = h_1(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$$

$$= [u(t) - u(t-1)] * [u(t) - u(t-2)]$$

$$= tu(t) - (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) + (t-3)u(t-3)$$



谢 谢