上海电力大学
SHANGHAI UNIVERSITY OF ELECTRIC POWER

信号与线性系统分析

第七章 离散时间系统的时域分析

电子与信息工程学院



第七章 离散时间系统的时域分析

主要内容

CATALOG

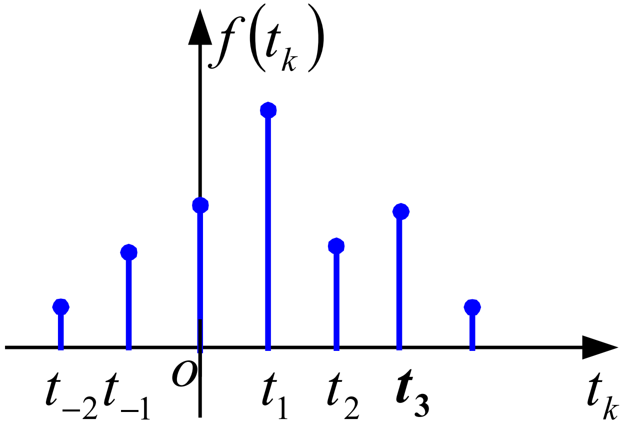
§7.1 引言

- 离散时间信号、离散时间系统
- 系统分析

离散时间信号、离散时间系统

离散时间信号：

时间变量是离散的，函数只在某些规定的时刻有确定的值，在其他时间没有定义。



离散信号可以由模拟信号抽样而得，也可以由实际系统生成。

离散时间系统：

系统的输入、输出都是离散的时间信号。如数字计算机。

系统分析

连续时间系统——微分方程描述

- 时域分析
  - 经典法：齐次解+特解
  - 零输入响应+零状态响应
- 变换域分析:拉氏变换法

离散时间系统——差分方程描述

差分方程的解法与微分方程类似

- 时域分析
  - 经典法：齐次解+特解
  - 零输入响应+零状态响应
- 变换域分析：z变换法

§7.2 离散时间信号——序列

- 离散信号的表示方法
- 离散时间信号的运算
- 常用离散时间信号



一．离散信号的表示方法

$$x(t) \rightarrow x(nT) \xrightarrow{\text{等间隔}T} x(n) \qquad n = 0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- 数字序列 如 $\left\{\cdots 0.9, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0.8}, 0.3, 0.1 \cdots\right\}$
- 有规则的，可以用函数表示：$x(n)$
- 波形表示：线段的长短表示各序列 值的大小

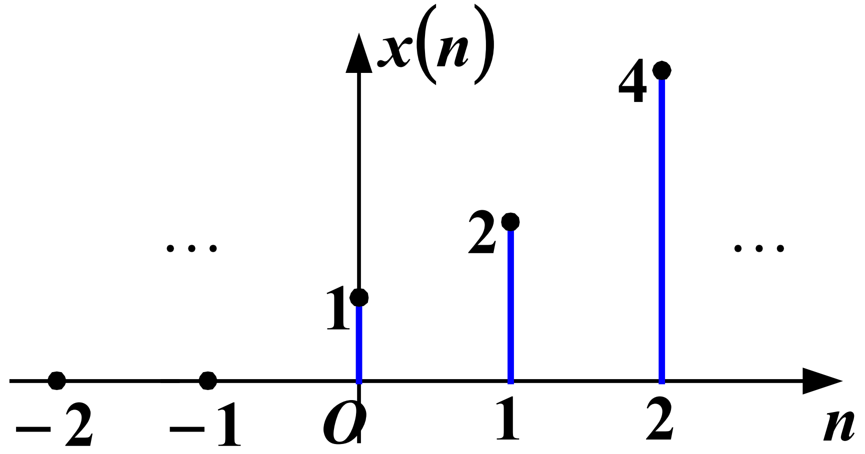
例

$$x(n)=\begin{cases}2^n, n\ge 0\\ 0, n<0\end{cases}$$ **试写出其序列形式并画出波形。**

解答

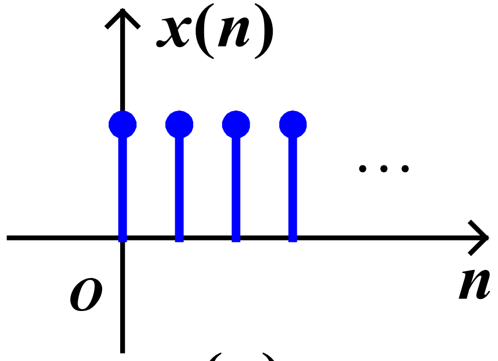
序列形式： $$x(n)=\left\{\cdots,0,0,\underset{\substack{\uparrow\\ n=0}}{1},2,4,8,\cdots\right\}$$

波形：

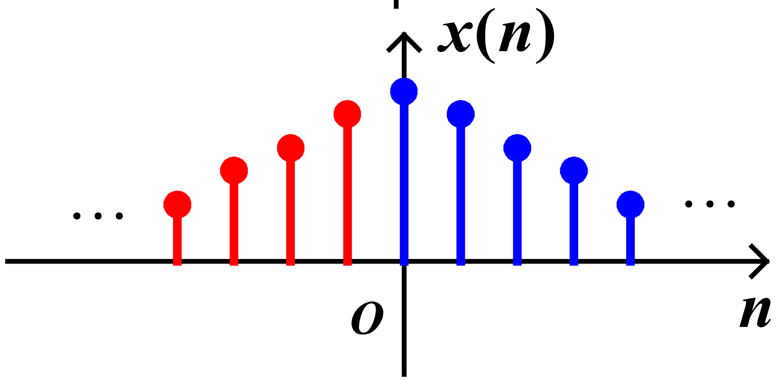


序列的三种形式

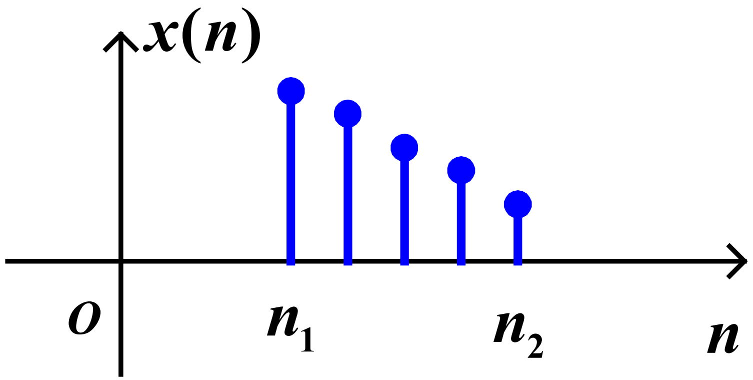
单边序列： $n \geq 0$;



双边序列: $-\infty \leq n \leq \infty$;



有限长序列： $n_1 \leq n \leq n_2$;



二. 离散信号的运算

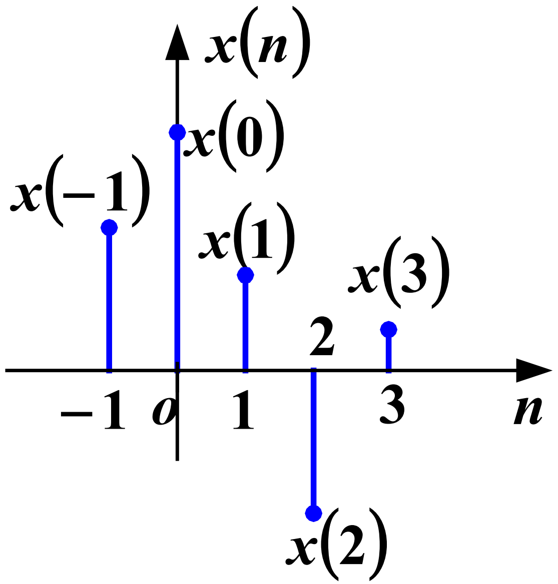
1. 相加： $z(n)=x(n)+y(n)$

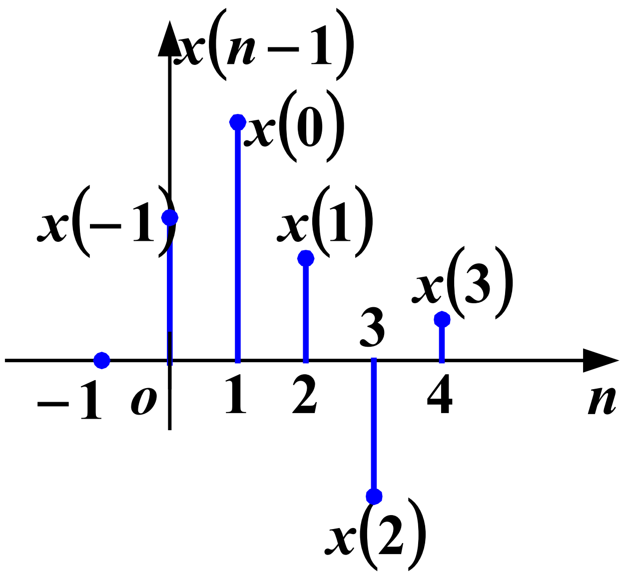
2. 相乘： $z(n)=x(n)\cdot y(n)$

3. 乘系数： $z(n)=ax(n)$

4. 移位： $z(n)=x(n-m)$ 右移位

$z(n)=x(n+m)$ 左移位





5．倒置：$z(n)=x(-n)$

6．差分：前向差分：$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$

后向差分：$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$

7．累加：$z(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

8．重排（压缩、扩展）：

$x(n)\to x(an)$,或 $x(n)\to x\left(\dfrac{n}{a}\right)$

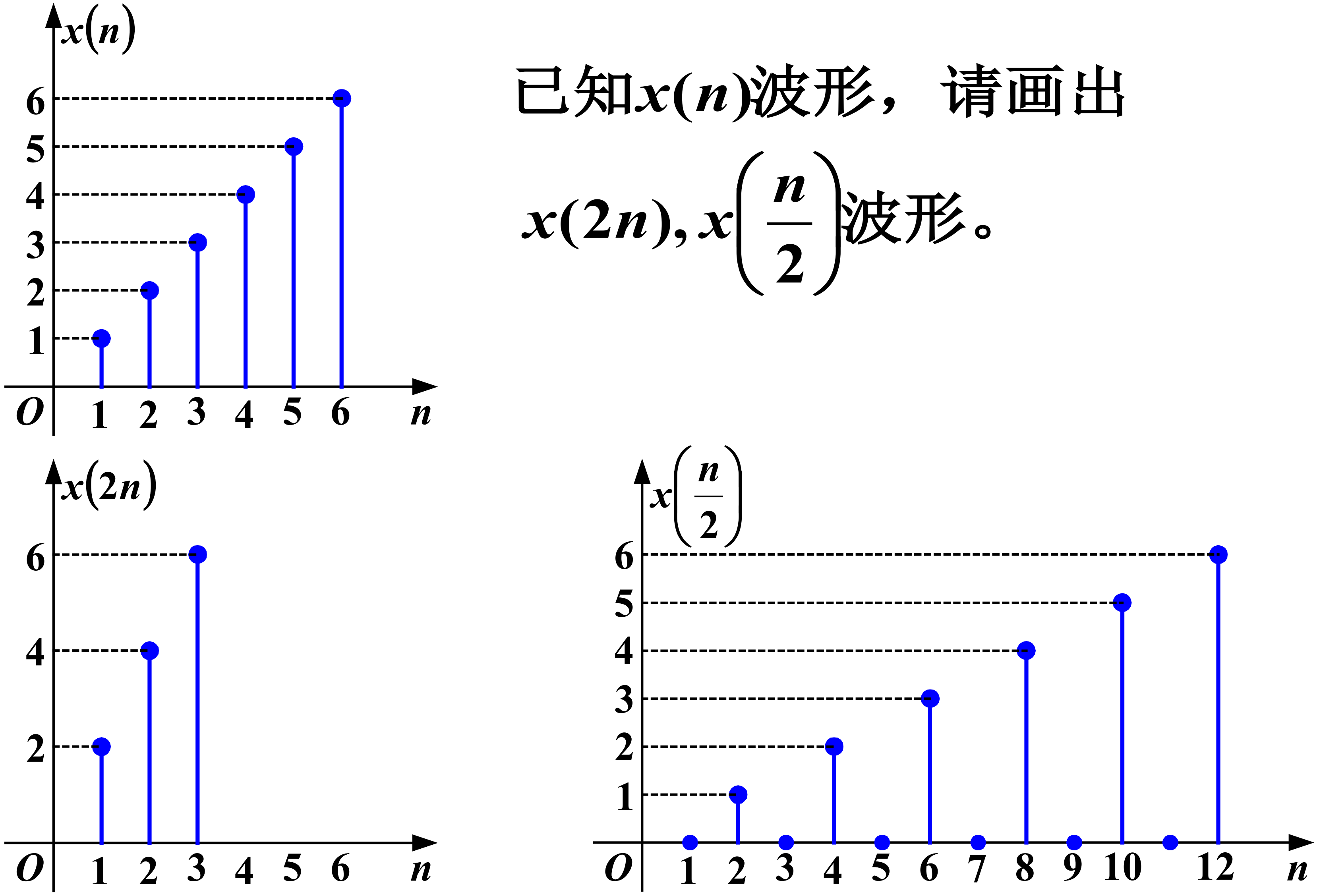
注意：有时需去除某些点或补足相应的零值。

9．序列的能量 $E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2$

例

已知$x(n)$波形，请画出

$x(2n), x\left(\frac{n}{2}\right)$波形。

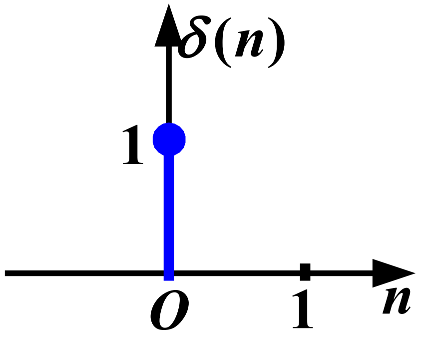


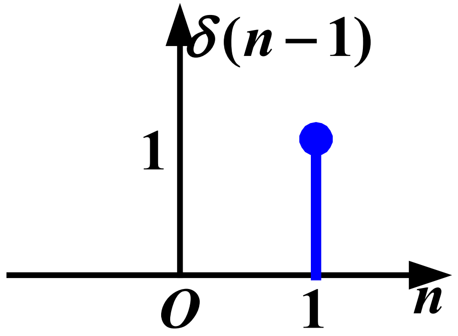
三．常用离散信号

- **单位样值信号**
- **单位阶跃序列**
- **矩形序列**
- **斜变序列**
- **单边指数序列**
- **正弦序列**
- **复指数序列**

1．单位样值信号

$$\delta(n)=\begin{cases}0, n\neq 0\\1, n=0\end{cases}$$





时移性

$$\delta(n-j)=\begin{cases}0, n\neq j\\1, n=j\end{cases}$$

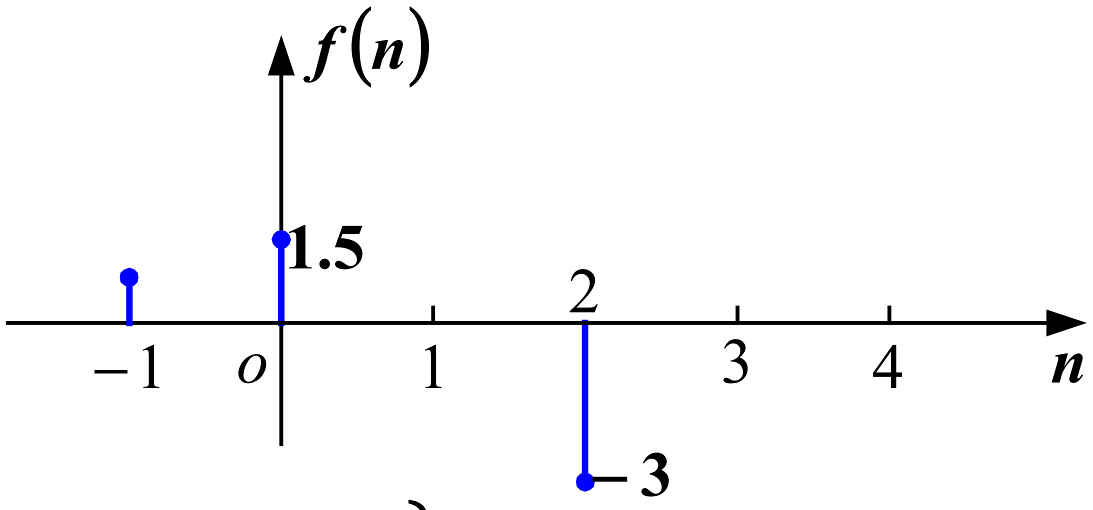
抽样性

$$f(n)\delta(n)=f(0)\delta(n)$$

$$f(n)\delta(n-n_0)=f(n_0)\delta(n-n_0)$$

利用单位样值信号表示任意序列

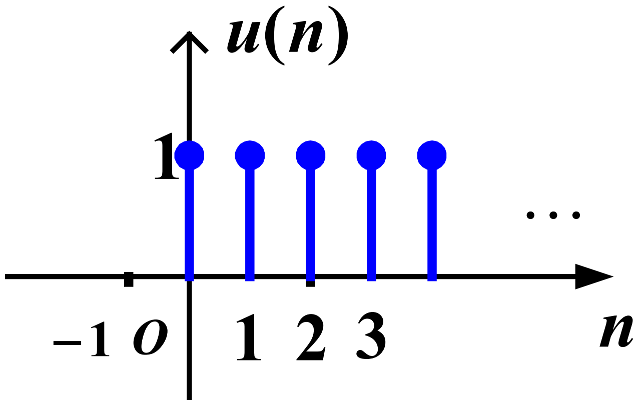
$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$



$$f(n)=\left\{1,\underset{\underset{n=0}{\uparrow}}{1.5},0,-3,0,0,\right\}=\delta(n+1)+1.5\delta(n)-3\delta(n-2)$$

2．单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



$u(n)$可以看作是无数个单位样值之和：

$$u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)+\cdots$$

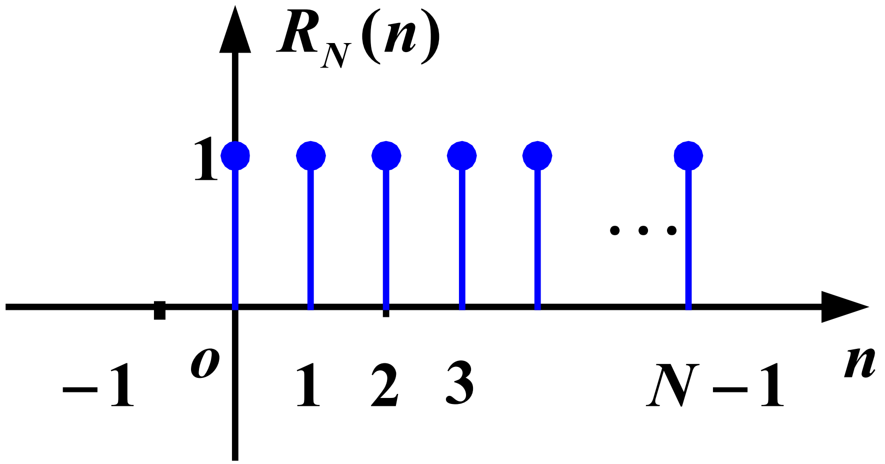
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$\delta(n)$与$u(n)$是差和关系，不再是微分和积分关系。

3．矩形序列

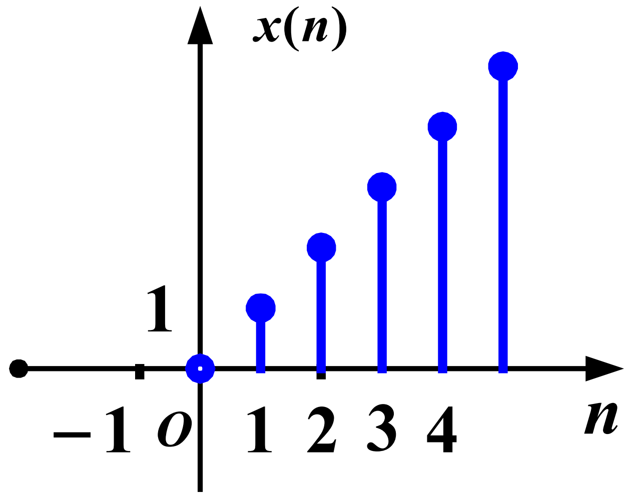
$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n<0,n\ge N\end{cases}$$



与$u(n)$的关系：$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$

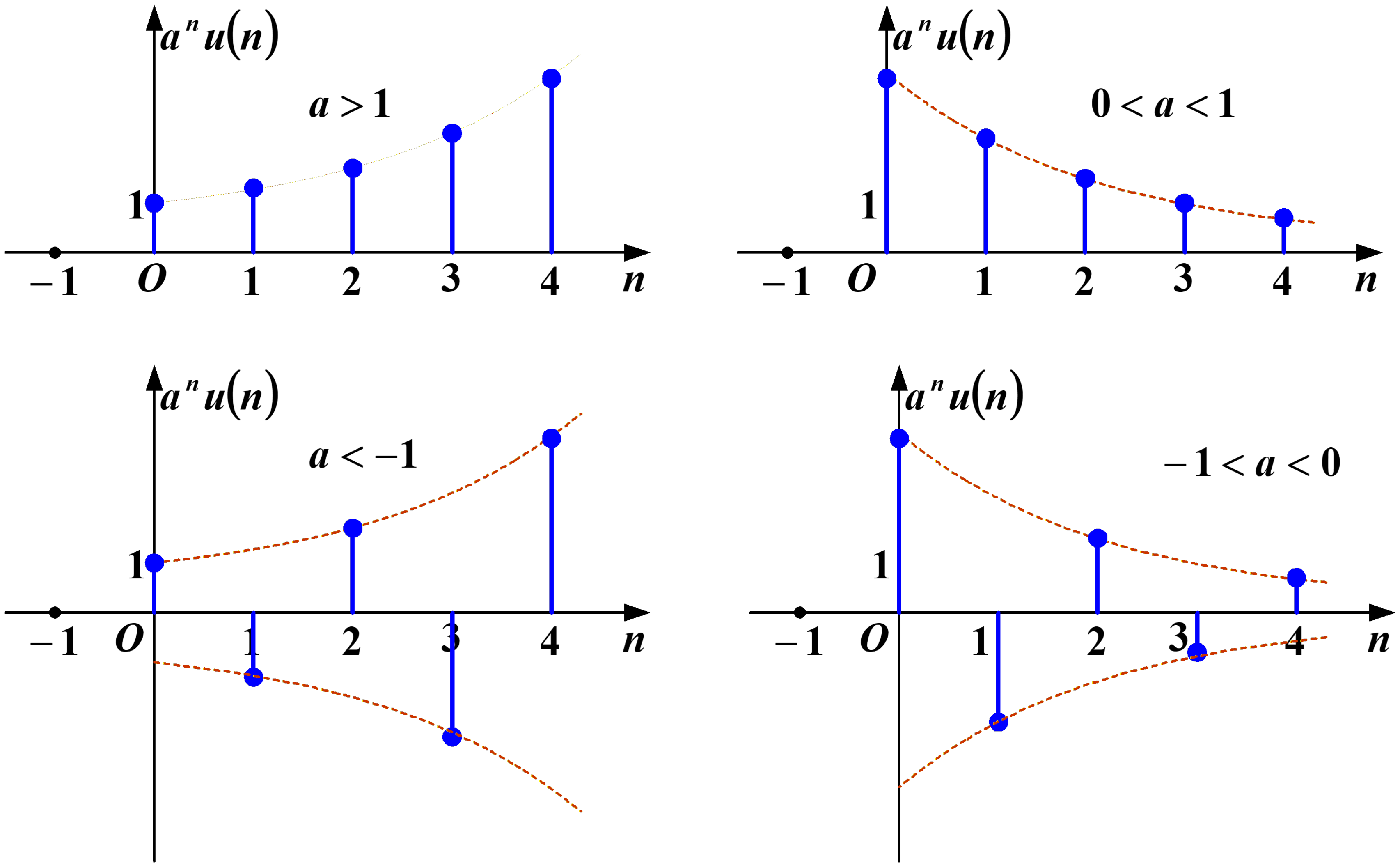
4．斜变序列

$$x(n) = nu(n)$$

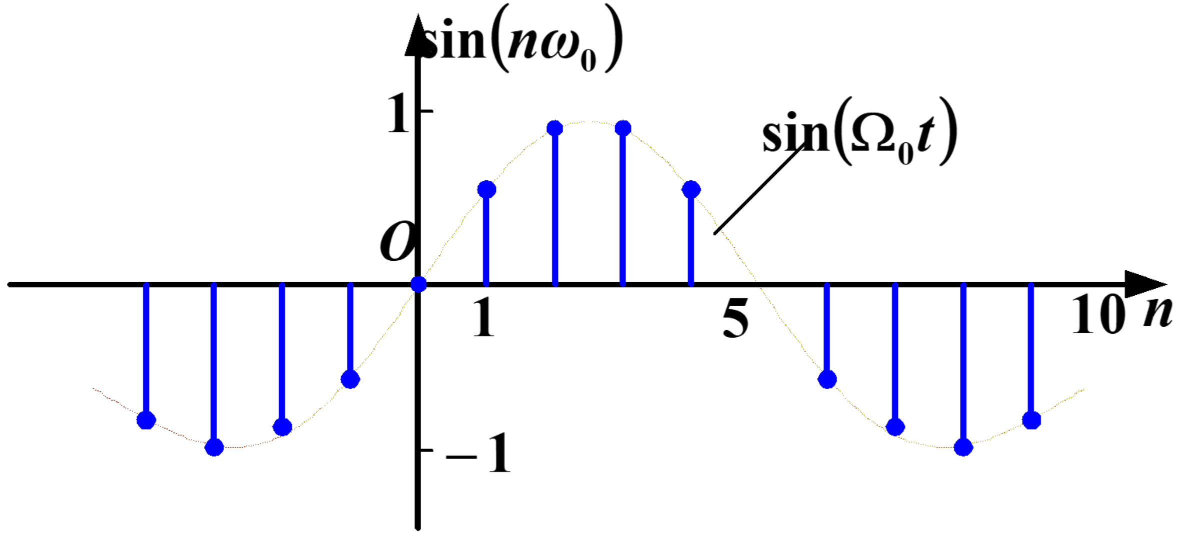


5．单边指数序列

$$x(n)=a^n u(n)$$



6．正弦序列 $x(n)=\sin(n\omega_0)$ 余弦序列：$x(n)=\cos(n\omega_0)$



ω_0 :正弦序列的频率,序列值依次周期性重复的速率。

当$\omega_0=\dfrac{2\pi}{10}$，则序列每10个重复一次正弦包络的数值。

离散正弦序列 $x(n)=\sin(\omega_0 n)$ 是周期序列应满足

$$x(n+N)=x(n)$$

N称为序列的周期，为任意正整数。

正弦序列周期性的判别

① $\frac{2\pi}{\omega_0}=N$，N是正整数

$$\sin[\omega_0(n+N)] = \sin\left[\omega_0\left(n+\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \sin(\omega_0 n+2\pi) = \sin(\omega_0 n)$$

② $\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{m}$，$\frac{N}{m}$为有理数

$$\sin[\omega_0(n+N)] = \sin\left[\omega_0\left(n+m\frac{2\pi}{\omega_0}\right)\right] = \sin(\omega_0 n+m\cdot 2\pi) = \sin(\omega_0 n)$$

$\sin(\omega_0 n)$仍为周期的　　周期：$N=m\frac{2\pi}{\omega_0}$

③ $\frac{2\pi}{\omega_0}$为无理数

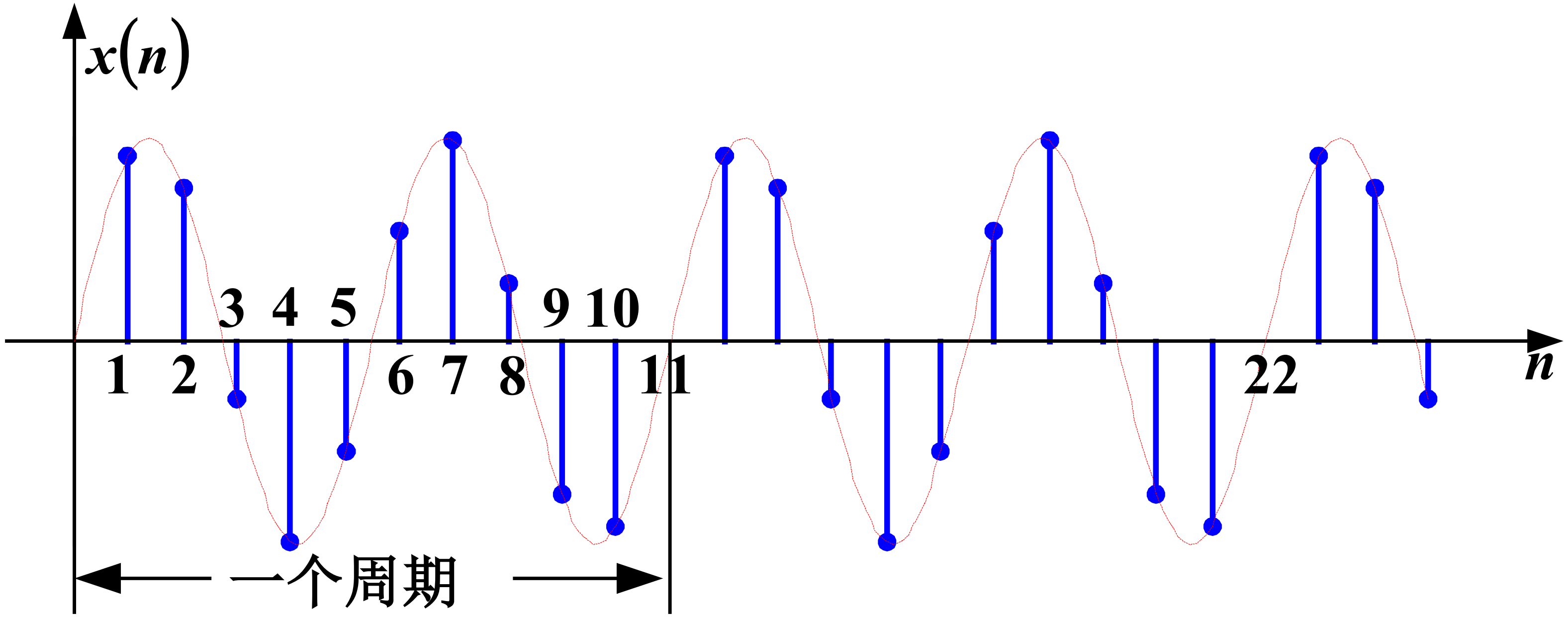
找不到满足 $x(n+N)=x(n)$的N值，为非周期的

例

已知：$\sin\frac{4\pi}{11}n$，求其周期。

解答 $\omega_0 = \frac{4\pi}{11}$，则有：$\frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\frac{11}{4\pi} = \frac{11}{2} = \frac{N}{m}$

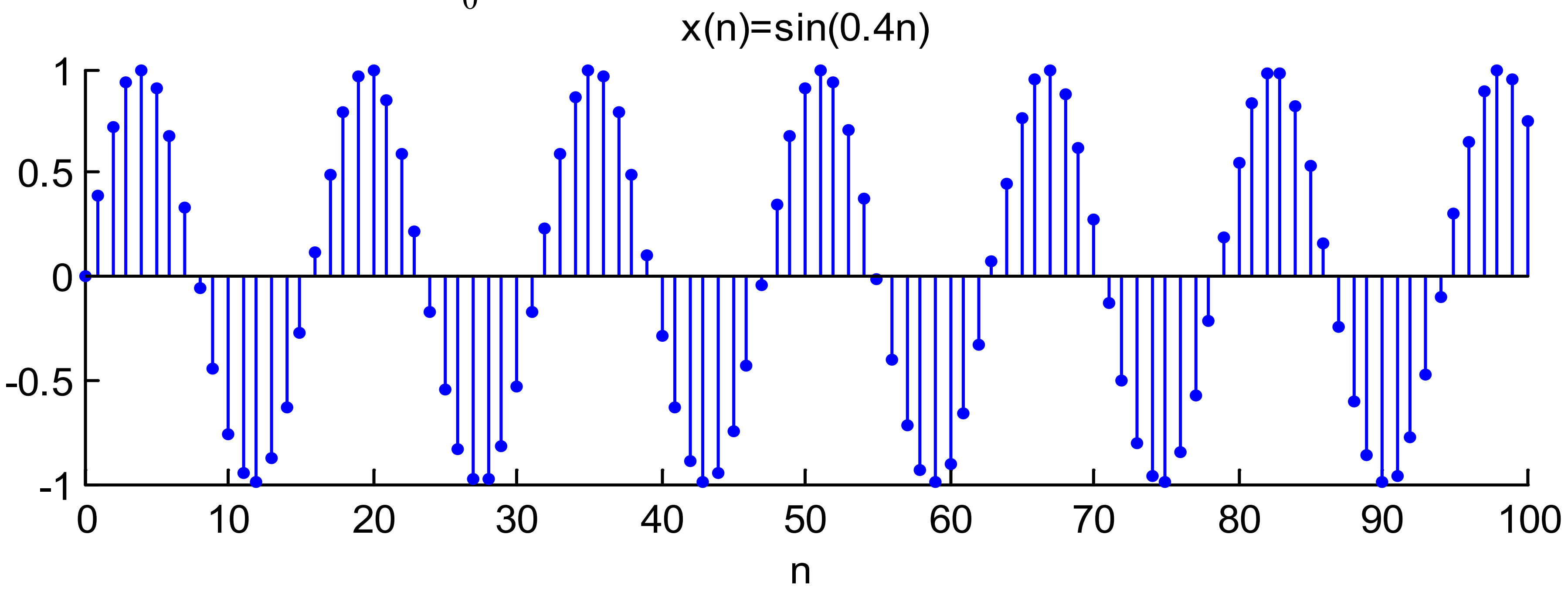
所以$N = 11$，即周期为11。（2π 中有5.5个ω_0）



信号$x(n)=\sin(0.4n)$是否为周期信号？

解答

$\omega_0 = 0.4$　　$\frac{2\pi}{\omega_0} = 5\pi$是无理数　　所以为非周期的序列



7．复指数序列

$$x(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n} = \cos\omega_0 n + \mathrm{j}\sin\omega_0 n$$

复序列用极坐标表示：

$$x(n) = |x(n)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg[x(n)]}$$

复指数序列：

$$|x(n)| = 1$$

$$\arg[x(n)] = \omega_0 n$$

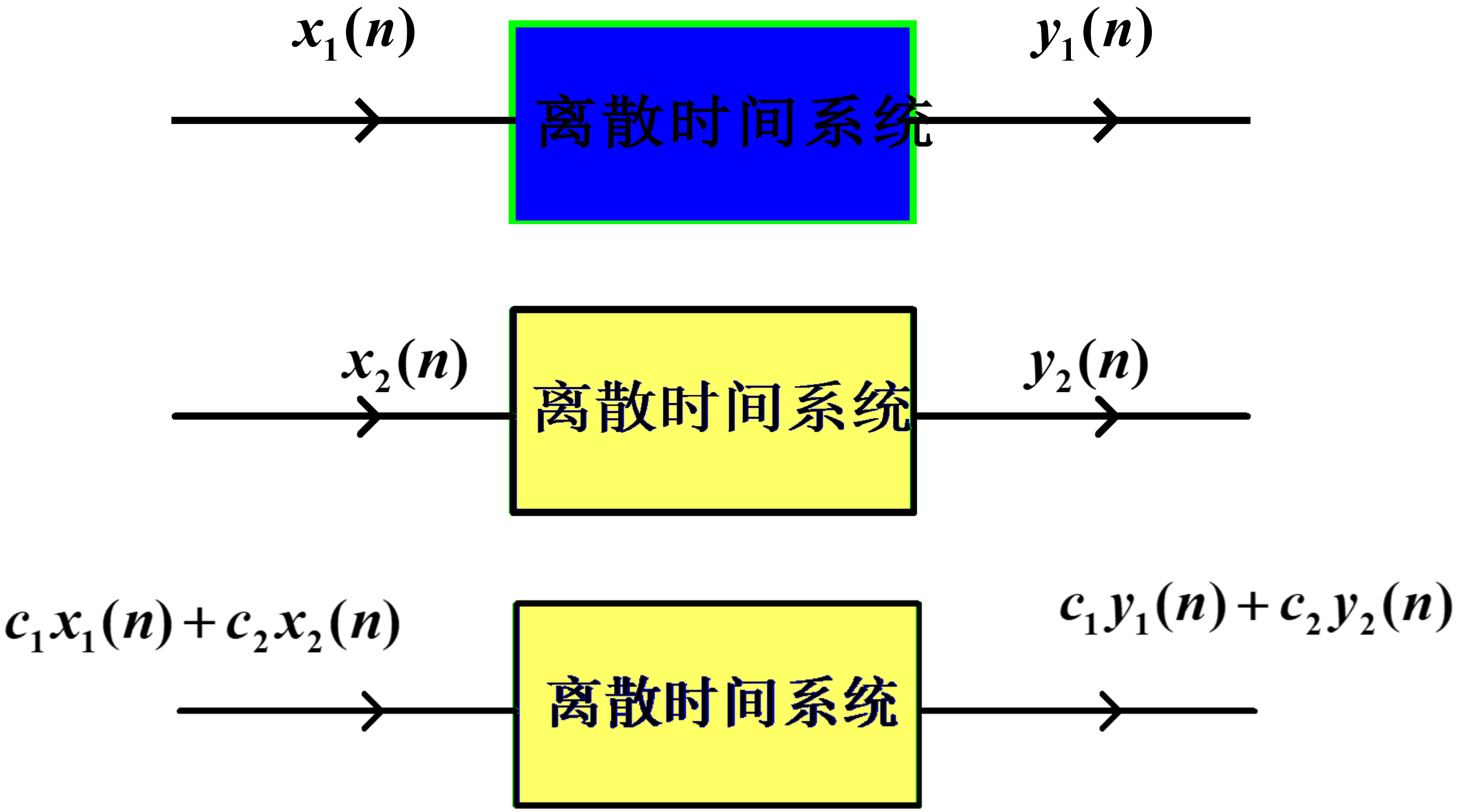
§7.3 离散时间系统的数学模型——差分方程

- 线性时不变离散系统
- 离散时间系统的基本单元符号
- 差分方程
- 差分方程的特点



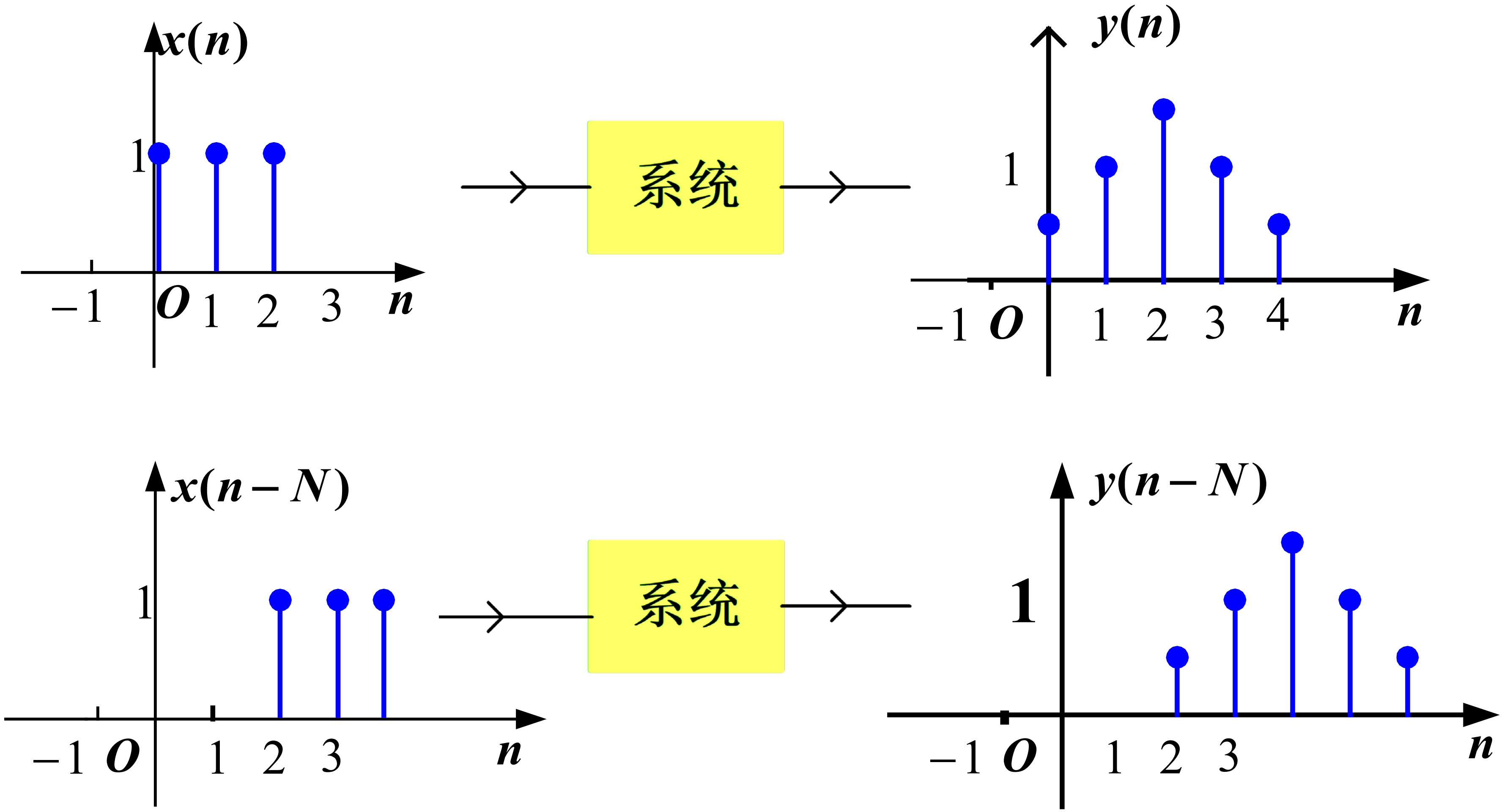
一．线性时不变离散系统

线性：均匀性、可加性均成立；



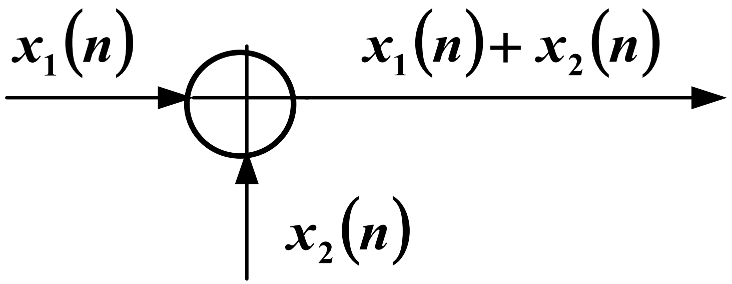
时不变性

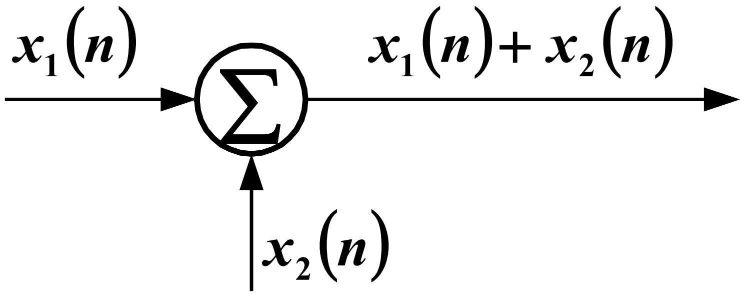
$$x(n) \to y(n),\ x(n-N) \to y(n-N)$$ 整个序列右移 N位



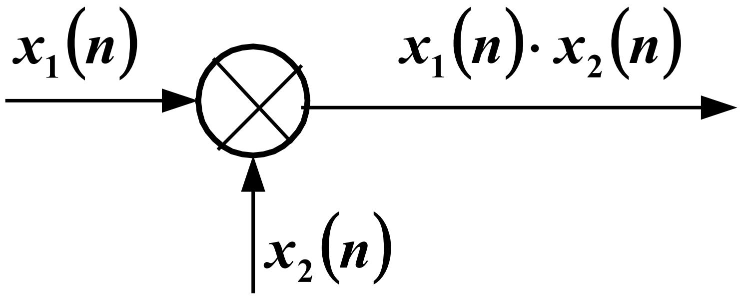
二．离散时间系统的基本单元符号

加法器：



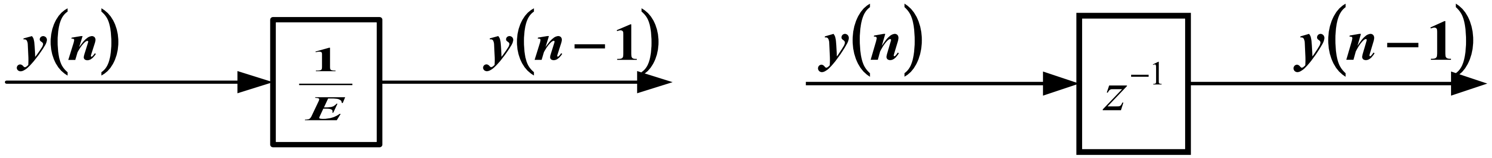


乘法器：



标量乘法器

延时器



单位延时实际是一个移位寄存器，把前一个离散值顶出来，递补。

三．差分方程

1、N阶前向差分方程

$$y(n+N)+a_{N-1}y(n+N-1)+\ldots+a_1y(n+1)+a_0y(n)$$
$$=b_Mx(n+M)+b_{M-1}x(n+M-1)+\ldots+b_1x(n+1)+b_0x(n)$$

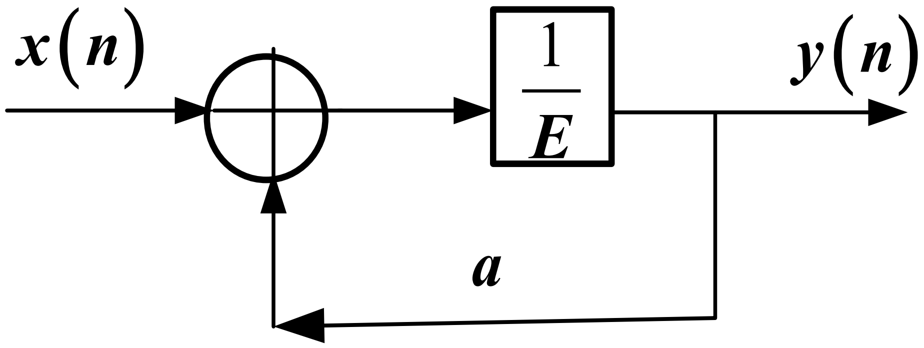
应用于状态变量分析

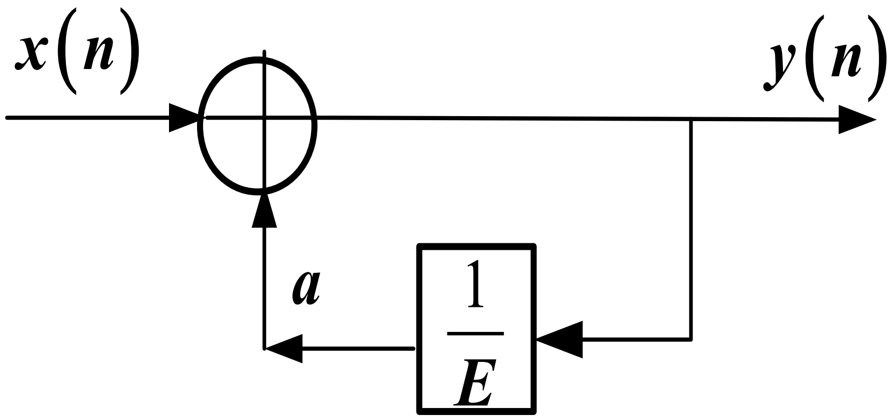
2、N阶后向差分方程

$$y(n)+a_1y(n-1)+\ldots+a_{N-1}y(n-N+1)+a_Ny(n-N)$$
$$=b_0x(n)+b_1x(n-1)+\ldots+b_{M-1}x(n-M+1)+b_Mx(n-M)$$

应用于因果系统

例1 写出如图所示系统的差分方程





解答

$$y(n+1) = ay(n) + x(n)$$
$$y(n+1) - ay(n) = x(n)$$

$$y(n) = ay(n-1) + x(n)$$
$$y(n) - ay(n-1) = x(n)$$

四．差分方程的特点

(1)输出序列的第n个值不仅决定于同一瞬间的输入样值，而且还与前面输出值有关，每个输出值必须依次保留。

(2)差分方程的阶数：差分方程中变量的最高和最低序号差数为阶数。

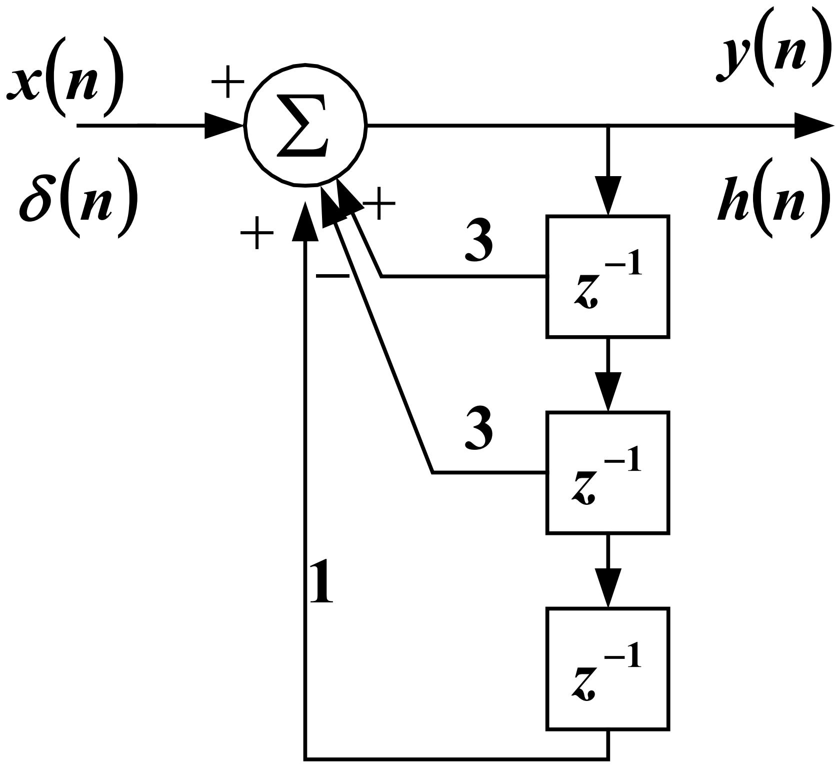
如果一个系统的第n个输出决定于刚过去的几个输出值及输入值，那么描述它的差分方程就是几阶的。

$$\text{通式}:\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

例

已知系统框图，

求系统的差分方程。



解答 列方程

从加法器出发：

$$x(n)+3y(n-1)-3y(n-2)+y(n-3)=y(n)$$

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

§7.4 常系数线性差分方程的求解

解法

1.迭代法

2.时域经典法：齐次解+特解

3.零输入响应+零状态响应

利用卷积求系统的零状态响应

4. z变换法→反变换→$y(n)$

一. 迭代法

解差分方程的基础方法

差分方程本身是一种递推关系，

但输出序列$y(n)$的解析式要自己归纳

迭代法

利用差分方程本身的递推关系，但输出序列$y(n)$的解析式要自己归纳

已知$y(n)=3y(n-1)+u(n)$，且$y(-1)=0$，求解方程。

解答

$$n=0 \quad y(0)=3y(-1)+1=1$$

$$n=1 \quad y(1)=3y(0)+1=4$$

$$n=2 \quad y(2)=3y(1)+1=13$$

$$n=3 \cdots y(3)=3y(2)+1=40$$

由递推关系，可得输出值：

$$y(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{1}, \quad 4, \quad 13, \quad 40, \quad \cdots\right\}$$

$$y(n)=\frac{3}{2}.3^n-\frac{1}{2}$$

二. 时域经典法

1. 齐次解：齐次方程的解

$$y(n)-ay(n-1)=0$$

但起始状态$y(-1),y(-2),\cdots y(-N)$不能全为零

$$y(-1)\neq 0,\quad \frac{y(0)}{y(-1)}=\frac{y(1)}{y(0)}=\cdots=\frac{y(n)}{y(n-1)}=a$$

说明 $y(n)$是一个公比为 a的几何级数 ，所以

$$y(n)=Ca^n$$

或由特征方程 $r-a=0$,可得$r=a$

$$y(n)=C\alpha^n=Ca^n$$

指数形式

解的三种情况

通式：$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$

1.无重根 $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots \neq \alpha_N$ N阶方程

$$y(n) = C_1(\alpha_1)^n + C_2(\alpha_2)^n + \cdots + C_N(\alpha_N)^n$$

2.有重根 设 α_1为k重根，$\alpha_{k+1} \neq \cdots \neq \alpha_N$ N阶方程

$$y(n) = (C_1 n^{k-1} + C_2 n^{k-2} + \ldots + C_{k-1} n + C_k)(\alpha_1)^n + \cdots + C_{k+1}(\alpha_{k+1})^n + \cdots + C_N(\alpha_N)^n$$

二重根的齐次解是$C_1 n r_1^{n} + C_2 r_1^{n} = (C_1 n + C_2) r_1^{n}$

三重根的齐次解是$(C_1 n^2 + C_2 n + C_3) r_1^{n}$

3.有共轭复数根

可按照单根处理

例

求解二阶差分方程 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=0$

已知$y(0)=2,\quad y(1)=1$。

解答

特征方程 $\alpha^2-5\alpha+6=0 \qquad (\alpha-2)(\alpha-3)=0$

特征根 $\alpha_1=2,\ \alpha_2=3$

齐次解 $y(n)=C_1(2)^n+C_2(3)^n$

定 C_1，C_2

$n=0 \qquad y(0)=C_1+C_2=2$

$n=1 \qquad y(1)=2C_1+3C_2=1$

解出 $C_1=5,\ C_2=-3$

所以$y(n)=5(2)^n-3(3)^n$

例

求方程$y(n)+6y(n-1)+12y(n-2)+8y(n-3)=x(n)$的齐次解的形式。

解答

特征方程

$$r^3+6r^2+12r+8=0 \qquad (r+2)^3=0$$

所以$r=-2$　三重根

$$y(n)=\left(C_1n^2+C_2n+C_3\right)(-2)^n$$

3.有共轭复数根

设 $r_1 = M\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \quad r_2 = M\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$

$$y(n) = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n$$

$$= C_1\left(M\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right)^n + C_2\left(M\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}\right)^n$$

$$= C_1 M^n(\cos n\varphi + \mathrm{j}\sin n\varphi) + C_2 M^n(\cos n\varphi - \mathrm{j}\sin n\varphi)$$

$$= PM^n \cos n\varphi + QM^n \sin n\varphi$$

方程的解是正弦(余弦)序列

P,Q为待定系数

$M = 1 \quad y(n)$ 为等幅正弦序列

$M > 1 \quad y(n)$ 为增幅正弦序列

$M < 1 \quad y(n)$ 为减幅正弦序列

2. 特解

有相同的形式

线性时不变系统输入与输出

输入	输出
$x(n)=\mathrm{e}^{an}$	$y(n)=A\mathrm{e}^{an}$
$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$	$y(n)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$
$x(n)=\cos(\omega n)$	$y(n)=A\cos(\omega n+\theta)$
$x(n)=\sin(\omega n)$	$y(n)=A\sin(\omega n+\theta)$
$x(n)=n^k$	$y(n)=A_k n^k+A_{k-1}n^{k-1}+\cdots+A_1 n+A_0$
$x(n)=A$	$y(n)=C$
$x(n)=(r)^n$	$y(n)=C(r)^n$
$x(n)=(r)^n$ （r与特征根重）	$y(n)=C_1 n(r)^n+C_2(r)^n$

差分方程的经典求解方法

齐次解：求出特征根r_n，设n个特征根不相同

$$y_h(n)=C_1(r_1)^n+C_2(r_2)^n+\cdots+C_n(r_n)^n$$

特解$y_p(n)$：由激励信号决定特解的形式，并带入差分方程求出待定系数。

完全解：$y(n)=y_h(n)+y_p(n)$

$$=C_1(r_1)^n+C_2(r_2)^n+\cdots+C_n(r_n)^n+y_p(n)$$

待定系数要带入$y(0),y(1),\ldots,y(n-1)$求解。

例

三．零输入响应+零状态响应

1. 零输入响应：输入为零，差分方程为齐次方程

齐次解：$C(r)^n$

C由起始状态定出（没加入激励时的状态，$y(-1), y(-2)\ldots$）

2. 零状态响应：起始状态为0，即

$$y(-1)=y(-2)=\ldots=0$$

$$\text{求解方法}\begin{cases}\text{经典法：齐次解+特解}\\[2em]\text{卷积法}\end{cases}$$

例　已知描述某系统的差分方程为

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

且 $y(-1)=0, y(-2)=\dfrac{1}{2}$;设激励 $x(n)=2^n, n\geq 0$; 求响应序列 $y(n)$。

解答

特征方程为 $\gamma^2+3\gamma+2=0$　　$\gamma_1=-1, \gamma_2=-2$

(1)　求零输入响应

$$y_{zi}(n)=D_1(-1)^n+D_2(-2)^n \qquad n\geq 0$$

零输入响应用起始状态 $y(-1), y(-2)$ 来求系数 D_1, D_2。

如果已知系统的初始值 $y(0), y(1)$，可以经过迭代求出起始状态。

$$y_{zi}(n)=D_1(-1)^n+D_2(-2)^n \qquad n\ge 0$$

由题知 $y(-1)=0,\ y(-2)=\frac{1}{2}$，代入 $y_{zi}(n)$，得

$$y_{zi}(-1)=-D_1+\frac{1}{2}D_2=0 \qquad y_{zi}(-2)=D_1+\frac{1}{4}D_2=\frac{1}{2}$$

解得 $D_1=1,\ D_2=-2$ ，则

$$y_{zi}(n)=(-1)^n-2(-2)^n \qquad n\ge 0$$

（2） 零状态响应 $y_{zs}(n)$

零状态响应 $y_{zs}(n)$ 是满足非齐次方程，且起始状态全部为零的解，即满足

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

$$y(-1)=y(-2)=\ldots=y(-N)=0$$

$$y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$$

$x(n)=2^n,\therefore$ 特解$D(n)=c\cdot 2^n$

代入原方程求解c，c=1/3　　$,\therefore D(n)=\frac{1}{3}\cdot 2^n$

因此　$y_{zs}(n)=A_1(-1)^n+A_2(-2)^n+\frac{1}{3}\times 2^n \qquad n\geq 0$

由起始条件为0可得，　$y(0)=1, y(1)=-1$

$$y_{zs}(0)=A_1+A_2+\frac{1}{3}=1$$

$$y_{zs}(1)=-A_1-2A_2+\frac{1}{3}\times 2=-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=-\frac{1}{3} \\ A_2=1 \end{cases}$$

$$y_{zs}(n)=-\frac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\frac{1}{3}\times 2^n \qquad n\geq 0$$

求解零状态响应时，边界条件中至少有一项是$n\geq 0$的；

也就是可以用$y(0)$，$y(-1)$，$y(-2)$计算待定系数

所以系统的全解为

$$
\begin{aligned}
y(n) &= y_{\mathrm{zi}}(n) + y_{\mathrm{zs}}(n) \\
&= (-1)^n - 2(-2)^n \quad - \frac{1}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3} \times 2^n \\
&= \left[\frac{2}{3}(-1)^n - (-2)^n\right] + \frac{1}{3} \times 2^n \qquad n \geq 0
\end{aligned}
$$

齐次解(自由响应）　　特解（强迫响应）

§7.5 离散时间系统的单位样值（单位冲激）响应

- 单位样值响应
- 因果性、稳定性

一. 单位样值响应

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\text{系统}} \longrightarrow h(n)$$

即$\delta(n)$作用下，系统的零状态响应，表示为 $h(n)$

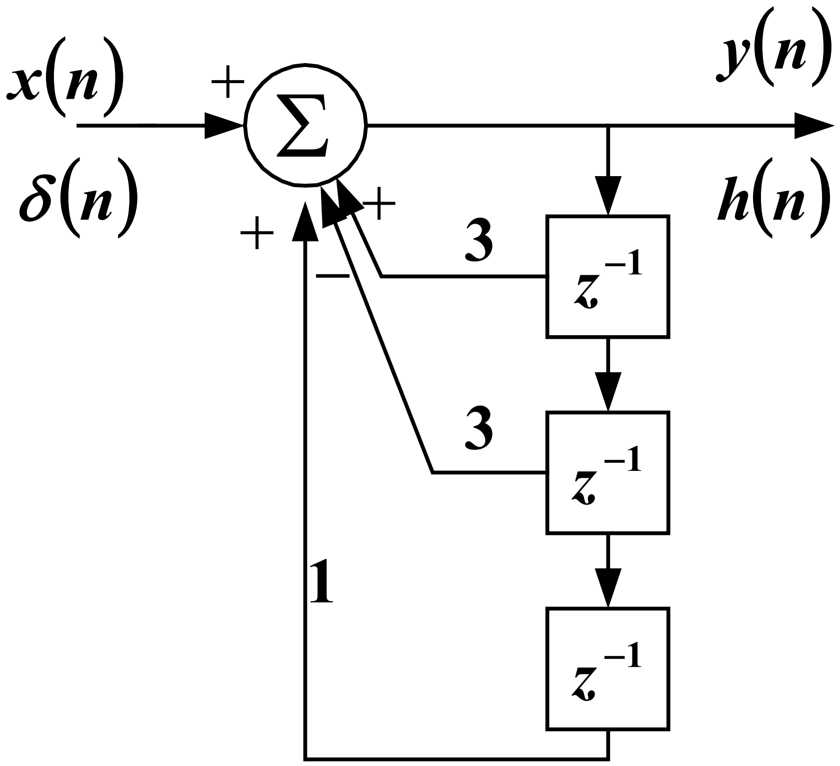
$$h(-k)=0 \quad k=1,2,3,\cdots N$$

离散时间系统的$h(n)$和连续离散时间系统的$h(t)$一样，都表征了系统的固有特性，因此可以用$h(n)$来判断系统的特性

例

已知系统框图，

求系统的单位样值响应。



解答 列方程

从加法器出发：

$$x(n)+3y(n-1)-3y(n-2)+y(n-3)=y(n)$$

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

单位样值信号 $\delta(n)$作用于系统：

$$h(n)-3h(n-1)+3h(n-2)-h(n-3)=\delta(n)$$

当$n>0$时

$$h(n)-3h(n-1)+3h(n-2)-h(n-3)=0$$

方程成为齐次方程

特征方程

$$r^3-3r^2+3r-1=0\ ,\quad (r-1)^3=0$$

特征根

$$r_1=r_2=r_3=1$$

所以$h(n)=C_1n^2+C_2n+C_3$

如何求待定系数?

先求边界条件

$$y(n)-3y(n-1)+3y(n-2)-y(n-3)=x(n)$$

零状态 $h(-1)=h(-2)=h(-3)=0$

可迭代出$h(0)$，$h(1)$，$h(2)$

$$h(0)=3h(-1)-3h(-2)+h(-3)+\delta(0)=1$$

$$h(1)=3h(0)-3h(-1)+h(-2)=3$$

$$h(2)=3h(1)-3h(0)+h(-1)=6$$

当n>0时，系统激励为0，将$\delta(n)$的作用等效为系统的初始条件。

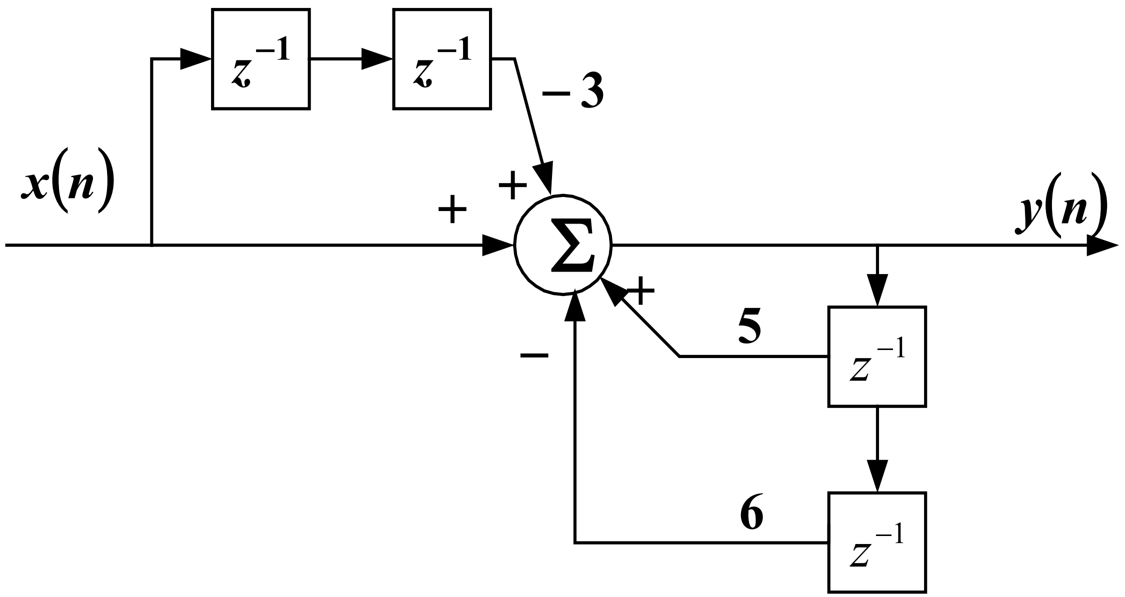
代入$h(n)=C_1n^2+C_2n+C_3$得

$$C_1=\frac{1}{2},\quad C_2=\frac{3}{2},\quad C_3=1$$

所以$h(n)=\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1\right)u(n)$

对于求$h(n)$，边界条件中至少有一项是$n\geq 0$的。

例　系统图如下，求$h(n)$



$$y(n)=x(n)-3x(n-2)+5y(n-1)-6y(n-2)$$

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

$$y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)-3x(n-2)$$

先求 $y(n)-5y(n-1)+6y(n-2)=x(n)$的单位样值响应

特征方程　$\alpha^3-5\alpha+6=0$ ，$\alpha_1=2$，$\alpha_2=3$

所以$h_1(n)=A_1 2^n+A_2 3^n$

?

带入$h_1(0)=1, h_1(-1)=0$解A_1, A_2

$$\begin{cases} h_1(0)=1=A_1+A_2 \\ h_1(-1)=0=\dfrac{A_1}{2}+\dfrac{A_2}{3} \end{cases}$$ 解得:$\begin{cases} A_1=-2 \\ A_2=3 \end{cases}$

所以$h_1(n)=\left(-2^{n+1}+3^{n+1}\right)u(n)$

所以$h(n)=h_1(n)-3h_1(n-2)=\left(-2^{n+1}+3^{n+1}\right)u(n)-3\left(-2^{n-1}+3^{n-1}\right)u(n-2)$

二. 因果性、稳定性

因果系统：输出变化不领先于输入变化的系统。

对于线性时不变系统是因果系统的充要条件：

$$n<0 \qquad h(n)=0 \text{或} h(n)=h(n)u(n)$$

稳定性的充要条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right| = P < \infty$$

单位样值响应绝对和为有限值（绝对可和）收敛。

等价条件：输入有界，则输出也有界的系统

例 $h(n)=a^n u(n)$

(1)讨论因果性：

因为是单边有起因， 即$n<0$时，$h(n)=0$

所以系统是因果的。

(2)讨论稳定性：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty}|a^n| = \begin{cases} \dfrac{1}{1-|a|} & |a|<1 \\ \infty & |a|\ge 1 \end{cases}$$

只有当 $|a|<1$时，$h(n)$收敛，即

即$|a|<1$,系统是稳定的

§7.6 卷积（卷积和）

- 卷积和定义
- 离散卷积的性质
- 卷积计算



一. 卷积和定义

连续时间信号的卷积定义为$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau$

类似的，离散信号的卷积定义为

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) x_2(n-m)$$

连续时间系统中，可以用卷积求解零状态响应，

$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$，

那么在离散时间系统中，是否有相同的结论？

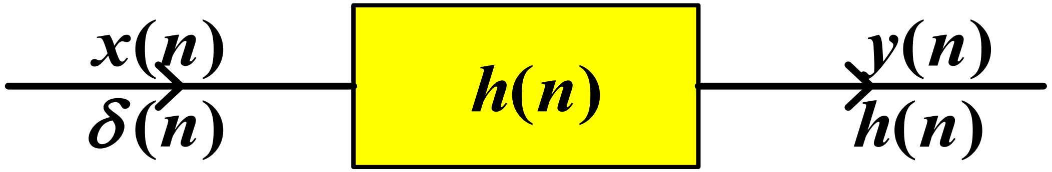
一．卷积和定义

如下图所示，一个离散时间系统对单位样值$\delta(n)$的响应为$h(n)$,对任意输入序列$x(n)$的零状态响应是$y(n)$,那么$y(n)=?$

任意序列$x(n)$表示为$\delta(n)$的加权移位之线性组合：

$$x(n)=\cdots x(-1)\delta(n+1)+x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+\cdots+x(m)\delta(n-m)+\cdots$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$



$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)$$

时不变 $\boldsymbol{\delta(n-m)\to h(n-m)}$

均匀性 $\boldsymbol{x(m)\delta(n-m)\to x(m)h(n-m)}$

可加性 $\boldsymbol{x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)}$

输出 $\boldsymbol{y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)}$

系统对 $x(n)$ 的响应 $=$ 每一样值产生的响应之 和，在各处由 $x(m)$ 加权。

卷积和的公式表明:

$h(n)$将输入输出联系起来，即零状态响应 $=x(n)*h(n)$。

二．离散卷积的性质

1．交换律

$$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

2．结合律

$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

3．分配律

$$x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

4． $x(n)*\delta(n)=x(n)$

不存在微分、积分性质。

5． 若 $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$

则 $x(n-k_1-k_2)=x_1(n-k_1)*x_2(n-k_2)$

$=x_2(n-k_1)*x_1(n-k_2)$

0511周三 10：10-10：45 第三章测试

0515周日10：10-10：45 第四章测试

0518周三 10：10-10：45 第七章测试

第四章作业截止0515 中午12点

第七章作业截止0522中午12点

第八章作业截止0604中午12点

第十一章作业截止0615中午12点

第七章作业答疑 本周三17：00-18：00

三．卷积计算

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

m的范围由$x(n),h(n)$的范围共同决定。

离散卷积过程：序列倒置→移位→相乘→取和

1.解析式法

2.图解法

3.利用性质

4.对位相乘求和法求卷积（排表法）

例

已知 $x(n)=\alpha^n u(n)\ \ (0<\alpha<1)$，$h(n)=u(n)$,求卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$。

解答

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\alpha^m u(m)u(n-m)$$

要点：
定上下限

宗量：$m\ge 0,\quad m\le n$ 即：$0\le m\le n, n\ge 0$

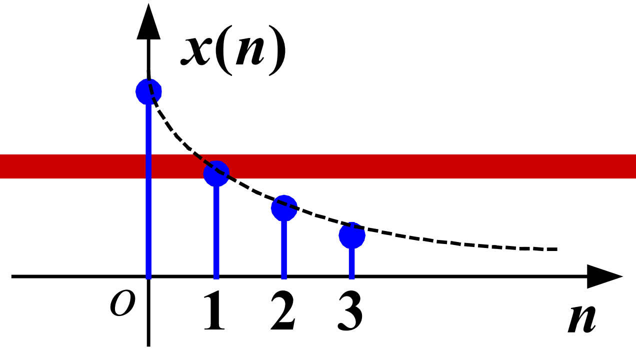
可见求和上限n,下限0

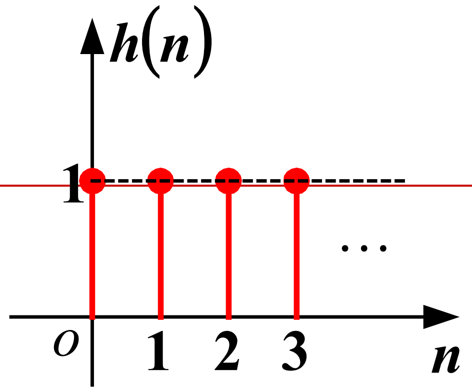
$$y(n)=\left(\sum_{m=0}^{n}\alpha^m\right)\cdot u(n)=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$

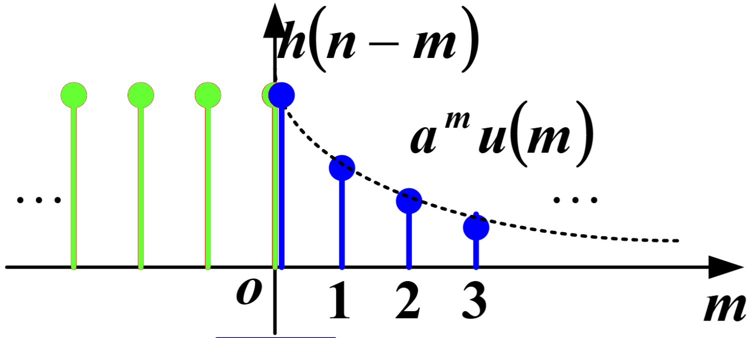
当$n\to\infty$时

$$y(n)=\frac{1}{1-\alpha}$$

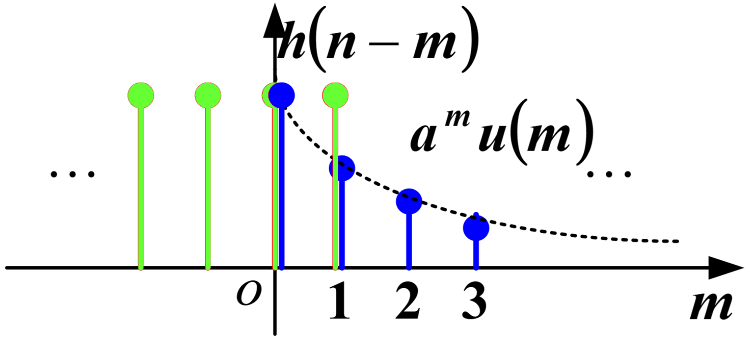
波形





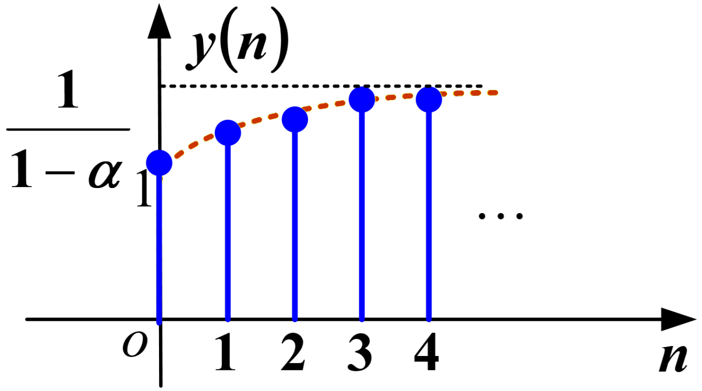


$n=0$



$n=1$

$$y(n)=u(n)\cdot\sum_{m=0}^{n}\alpha^{m}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$



当$n\to\infty$时，$y(n)=\dfrac{1}{1-\alpha}$

例

已知$x(n)=R_3(n),h(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow\\ n=1}}{1},2,3\right\}$，求$x(n)*h(n)$。

解答

$$x(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

$$h(n)=\delta(n-1)+2\delta(n-2)+3\delta(n-3)$$

利用分配律

$$\begin{aligned}
&x(n)*h(n)\\
&=\delta(n-1)+2\delta(n-2)+3\delta(n-3)\\
&\qquad+\delta(n-2)+2\delta(n-3)+3\delta(n-4)\\
&\qquad\qquad+\delta(n-3)+2\delta(n-4)+3\delta(n-5)\\
&=\delta(n-1)+3\delta(n-2)+6\delta(n-3)+5\delta(n-4)+3(n-5)
\end{aligned}$$

$y(n)$的元素个数?

$x(n)$ n_A

$h(n)$ n_B

$y(n)$ $n_C = n_A + n_B - 1$

若: $x(n)$序列 $n_1 \le n \le n_2$,

$h(n)$序列 $n_3 \le n \le n_4$

则$y(n)$序列 $(n_1 + n_3) \le n \le (n_2 + n_4)$

例如: $x(n)$: $2 \le n \le 5$ 4个元素

$h(n)$: $1 \le n \le 3$ 3个元素

$y(n)$: $3 \le n \le 8$ 6个元素

4.对位相乘求和法求卷积（排表法）

$$x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

例

已知$x(n)=R_3(n), h(n)=\left\{\underset{\substack{\uparrow \\ n=1}}{1},2,3\right\}$，求$x(n)*h(n)$。

解答

$$
\begin{array}{rccccc}
x(n) & & & 1 & 1 & 1 \quad n=0\text{开始} \\
h(n) & & & 1 & 2 & 3 \quad n=1\text{开始} \\
\hline
 & & & 3 & 3 & 3 \\
 & & 2 & 2 & 2 & \\
 & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
y(n) & 1 & 3 & 6 & 5 & 3 \\
 & \uparrow & & & & \\
 & n=1 & & & &
\end{array}
$$

注意：

不能进位

已知$x(n)=n^2\left[u(n-2)-u(n-6)\right],h(n)=n\left[u(n-1)-u(n-4)\right]$,

求$y(n)=x(n)*h(n),y_1(n)=x(n-2)*h(n-3)$。

解答

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & x(n) & 4 & 9 & 16 & 25 & n=2\text{开始} \\
 & & & h(n) & & 1 & 2 & 3 & n=1\text{开始} \\
\hline
 & & & 12 & 27 & 48 & 75 & & \\
 & & 8 & 18 & 32 & 50 & & & \\
 & 4 & 9 & 16 & 25 & & & & \\
\hline
 & 4 & 17 & 46 & 84 & 98 & 75 & & \\
y(n) & \uparrow & & & & & & & \\
 & n=3 & & & & & & &
\end{array}
$$

$$y(n)=4\delta(n-3)+17\delta(n-4)+46\delta(n-5)+84\delta(n-6)+98\delta(n-7)+75\delta(n-8)$$

$$y_1(n)=y(n-5)$$

谢 谢