2020 年总复习概念及参考题

June. 24

一，填空题（非考试类型）：

1. 已知信号 x(n)的长度为 8，若对它的 Z 变换 X(z)在单位圆上做 N 点等间隔采样得到 X(k),N ≥_____可以无失真地恢复出 X(z)。

Ans: (概念：Z 变换，DFT, 频域采样定理)

2. $x(n) = R_5(n)$，则它的离散时间傅里叶变换 $X(\omega)$ =__________ 。

Ans: （概念： DTFT）

3. 已知信号 x(n)长度为 8, h(n)的长度为 5,若利用循环卷积求解二者的线性卷积,则循环卷积的长度应该大于等于 。

Ans: (概念：线性卷积，循环卷积， 两者关系)

4. 旋转因子 $W_N^{\frac{6N}{4}}$ =______________。

Ans: （概念： DFT）

5．求 16 点 FFT 时，5 的倒序数为 。

Ans: (概念：倒序数, textbook, pp. 117)

6. 一个系统的输入 $x(n)$ 与输出 $y(n)$ 间存在关系：$y(n) = a\,x(n) + b$，则该系统是线性系统（a 和 b 为常数)。 （ ）

7.凡是稳定系统，其 Z 变换在单位圆内不能有极点。 （ ）

8.有限长序列 Z 变换的收敛域一定是 0 < ｜z｜< ∞。 （ ）

9.FFT 是序列傅氏变换的快速算法。 （ ）

10.FIR 滤波器一定是线性相位的，而 IIR 滤波器以非线性相频特性居多。 （ ）

11. 信号 $x(n) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}n\right)$ 的周期为：（略）

12. 已知信号 x(n)长度为 7，h(n)的长度为 4,若利用循环卷积求解二者的线性卷积,则循环卷积的长度应该大于等于__________

13. 做 32 点 DFT 时，十进制数 13 的倒序数为 （略）（同上）

14. 采用时域抽取法基 2FFT 算法用来计算 N=32 点 DFT，求需要计算复数加法的次数为_（参考公式!!）______

15. 序列的傅立叶变换是___的 z 变换。

A. 单位圆内 B. 单位圆外

C. 单位圆上 D.右半平面

16. 用___方法设计 IIR 数字滤波器会产生频率混叠现象。

A.脉冲响应不变法 B.双线性变换法

C.窗函数法 D.频率采样法

17. FIR 系统的系统函数 $H(z)$ 的特点是_______。

A. 只有极点，没有零点
B. 只有零点，没有极点
C. 没有零、极点
D. 既有零点，也有极点

18. 以下说法中____是不正确的。

A.时域采样，频谱周期延拓 B.频域采样，时域周期延拓

C.序列有限长，则频谱有限宽 D.序列的频谱有限宽，则序列无限长

19. 对 $R_{16}(n)$ 进行____点的 DFT 后，再通过同样点数的 IDFT 将无法恢复出原序列。

A.64 B.32 C.16 D.8

20.用 DFT 对连续信号做谱分析时,与模拟折叠频率 fs/2 相对应的数字频率是___ ,fs 为采样频率。

20. $x(n)=R_6(n)$，则它的离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})=$ (概念：DTFT) 。

22. 已知信号 x(n)长度为 3，h(n)的长度为 5,若利用循环卷积求解二者的线性卷积,则循环卷积的长度应该大于等于__________

23. 十进制数 10 的倒序数为 (同上)

24. 采用时域抽取法基 2FFT 算法用来计算 N=32 点 DFT，求需要计算复数乘法的次数为__（参考公式!!）_____。

25. 系统输入为 $x(n)$，输出为 $y(n)$， $y(n)=x(n)\cos\left(\frac{2}{5}\pi n+\frac{\pi}{8}\right)$，该系统是______。

A. 线性时不变系统 B. 非线性时不变系统

C. 线性时变系统 D. 非线性时变系统

26. 用脉冲响应不变法设计出的 H（z）最适合用________结构实现。

A.级联型　　　　　B.并联型

C.直接Ⅰ型　　　　　D.直接Ⅱ型

（概念：级联型， 并联型，直接Ⅰ型，直接Ⅱ型）

27. $X\left(k\right)=X_R\left(k\right)+jX_I\left(k\right),0\le k\le N-1$,则$IDFT\left[X_R\left(k\right)\right]$是 x(n)的______ 。

A. 共轭对称分量　　　　　B.共轭反对称分量

C. 偶对称分量　　　　　D.奇对称分量

(参考：教科书：pp.35-37)

28. 已知某线性相位 FIR 滤波器的零点 z_i 位于单位圆内，则位于单位圆内的零点还有______。

A. z_i^*　　B. $1/z_i^*$　　C. $1/z_i$　　D.0

29. 已知线性时不变系统的输入为$x(n)=R_4(n)$,系统的单位取样响应序列$h(n)=R_4(n)$，则系统的输出序列$y(n)$的长度 N＝ _____。

A.4　B.7　C.8　D.9

30. 与数字滤波器频率 π 相对应的模拟频率是______

31. $x(n)=R_6(n)$，则它的离散时间傅里叶变换$X(e^{j\omega})$ =_(DTFT)_______

32. 已知信号 x(n)长度为 5,h(n)的长度为 4,若利用循环卷积求解二者的线性卷积,则循环卷积的长度应该大于等于_______

33. 十进制数 14 的倒序数为　（同上）

34.__B_方法设计的 IIR 数字滤波器会造成频率变换的非线性关系。

A.脉冲响应不变法　　B.双线性变换法

C.窗函数法　　　　　D.频率采样法

35. 以下现象中_____属于截断效应。

A. 频谱泄漏　　　　　　　B. 频谱混叠

C. 时域混叠　　　　　　　D. 栅栏效应

36. 满足下列哪种条件的序列称为共轭对称序列_____ 。

A. $x(n)=x^{*}(-n)$　　　　　B. $x(n)=x^{*}(n)$

C. $x(n)=-x^{*}(-n)$　　　　D. $x(n)=-x^{*}(n)$

37. 系统函数 H(z)位于 z 平面_____的零极点，不影响系统的幅频响应。

A.原点处　　　B.单位圆上

C.单位圆内　　D.单位圆外

二，计算作图题

1. 已知有限长序列 $x(n)=(2n+1)\left[u(n)-u(n-4)\right]$，

(1)求序列 $x_1(n)=x((n-2))_4 R_4(n)$ 并画出波形。

(2)求线性卷积 $y(n)=x(n)*x_1(n)$

(3) 求 4 点循环卷积 $y_1(n)=x(n) \circledast x_1(n)$

概念：线性卷积，循环卷积

Ans: (1)

x(n)={1, 3, 5, 7}

$x_1(n) = x((n-2))_4 R_4(n)$

$x_1(0) = x((0-2))_4 = x((4-2))_4 = x(2)$

$x_1(1) = x((1-2))_4 = x((4-1))_4 = x(3)$

$x_1(2) = x((2-2))_4 = x((0))_4 = x(0)$

$x_1(3) = x((3-2))_4 = x((1))_4 = x(1)$

Therefore,

$x_1(n)$ = {5, 7, 1, 3} for $0 \le n \le 3$

linear convolution $y(n) = x(n) * x_1(n) = \sum_n x(k)\, x_1(n-k)$

cyclic convolution $y_1(n) = x(n) \otimes x_1(n) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(k)\, x_1((n-k))_N\right] R_N(n)$

(2) 线性卷积：$y(n)=[5,22,47,76,63,22,21]$

计算参考：教科书 pp.13，案例 1.3.4 (图解法或列表法)

(3) 循环卷积：

computation example of $y(n)\big|_{N=4}=x(n)\otimes x_1(n)=x_1(n)\otimes x(n)$ (满足交换律)

$y_1(n)\big|_{N=4}=[68,44,68,76]$ (can be verified with Matlab code using fft command)

计算参考：教科书 pp.85，案例 3.2.1

##

2. 已知实序列 x(n)的 6 点 DFT 为 X(k)，其中 k=0,1,2,3 的值为：X(0)=1, X(1)=2+j, X(2)=1-j, X(3)=2。求

（1）整个 X(k)。

（2）若 $x_1(n)=x((n-3))_6R_6(n)$,求 $X_1(k)$。

概念：DFT 特性（关于实序列， textbook,pp.84-86）

需要搞清楚的概念：

a) DFT 是长为 N 的序列，其对称性是关于 N/2 点位置的

b) 什么是有限长共轭对称及共轭反对称

c) 任何有限长序列=共轭对称+共轭反对称（对 DFT 也如此， 关于 N/2 为对称点）

d)

如 x(n)为实序列，

-> X(k)共轭对称， i.e.,

conjugate even symmetric $X(k) = X^*(N-k)$

Case 1，x(n)为共轭对称，

-> X(k)共轭偶对称, i.e.,

real even symmetric $X(k) = X(N-k)$

Case 2，x(n)为奇对称

-> X(k)为纯虚奇对称，i.e.,

imaginary odd symmetric X(k)=-X(N-k)

Proof:

Since $x[n] = x_{op}[n]$, DFT $\{x(n)\}$ = DFT $\{x_{op}(n)\} = j X_i(k) = X(k)$

Since $x(n)$ is real, $X(k) = X^*(N-k)$, $X(k) = j X_i(k) = -j X_i(N-k) = -X(N-k)$

Ans (1): 从上面的特性，我们得出：

$X(4) = X^*(6-4) = X^*(2) = 1 + j$

$X(5) = X^*(6-5) = X^*(1) = 2 - j$

因此：

X(k)={1, 2+j, 1-j, 2, 1+j, 2-j}

Ans (2):

概念：DFT 时域循环移位定理（proof）:

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$
$$Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)] = W_N^{-km} X(k)$$

所以：

$$X_1(k) = DFT[x((n-3))_6 R_6(n)] = W_6^{3k} X(k) = (-1)^k X(k)$$

##

3. 已知连续系统的系统函数为 $H(s) = \dfrac{3}{(s+3)(s+4)}$，试用双线性变换法将该模拟传递函数转变为数字传输函数 $H(z)$，采样周期 T=1s

概念：使用零极点映射方法，求数字滤器的系统函数

解:将 $s = \dfrac{2}{T}\cdot\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 带入 $H_a(s)$ 中，得 $H(z) = \dfrac{3(1+2z^{-1}+z^{-2})}{(5+z^{-1})(6+2z^{-1})}$

##

4. 一个时域离散线性相位 FIR 低通滤波器的频率响应为：

$$H(e^{j\omega})=\begin{cases} e^{-j3\omega} & |\omega|\le\dfrac{\pi}{4} \\ 0 & \dfrac{\pi}{4}<|\omega|\le\pi \end{cases}$$ ，求该系统的单位取样响应 h(n)。

概念：DTFT 的逆变换算法

Ans: $h(n)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}(n-3)}{\pi(n-3)}$

##

5. 已知连续信号 $x_a(t)=\sin\left(300\pi t\right)$，若采样频率为 f_s=200Hz,得到时域采样信号 $\hat{x}_a(t)$ 和时域离散信号 x(n),（1）写出 $\hat{x}_a(t)$ 和 x(n)的时域表达式。（2）求 $x_a(t)$，$\hat{x}_a(t)$ 和 x(n)的傅里叶变换。(3) 上述傅里叶变换表达式之间的关系

概念：采样，数字信号，傅里叶变换(FT)，DTFT, 相对连续信号的 FT 及离散信号的 DTFT 的关系

Ans (1):

$$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin(\frac{3}{2}\pi n)\delta(t-0.005n)$$

$$x(n)=\sin(\frac{3}{2}\pi n)$$

其中，我们可以认为采样函数是：

$s(t)=\sum\delta(t-nT_s)$. and

sampling process can be expressed as

$\hat{x}(t)=x(t)\,s(t)$

Ans (2) (3): refer to separate file <question5>

##

6. 已知数字高通滤波器,要求通带截止频率ω_p=0.9π rad，阻带截止频率ω_s=0.4π rad。采样周期 T=1s。

(1) 利用双线性变换法确定模拟高通滤波器的边界频率。

(2) 确定模拟低通滤波器的边界频率。

概念：双线性变换公式，数字高通滤波器的设计(textbook, pp.170-173, 自学)

Ans:

定义：

$$s\triangleq\sigma+j\Omega \qquad p\triangleq\eta+j\lambda$$

$$p\rightarrow s \qquad \lambda\rightarrow\Omega$$

（流程参考 PPT 或教材）

第一步：求模拟高通通带及带阻频率: Ω_{ph}，Ω_{sh}

$$\Omega_{ph}=\frac{2}{\mathrm{T}}\ \tan\frac{0.9\pi}{2}=12.63$$

$$\Omega_{sh}=\frac{2}{\mathrm{T}}\ \tan\frac{0.4\pi}{2}=1.45$$

第二步：模拟高通（带通）转模拟低通 （模拟低通边界频率）:

$p=\dfrac{\lambda_p\cdot\Omega_{ph}}{s}$ (textbook: 第四版 pp.176)， 则在虚轴上：$\lambda=-\dfrac{\lambda_p\Omega_{ph}}{\Omega}$， 其中$\Omega_{ph}$为希望设计的高通滤波器的通带边界频率

因为通常情况下, 我们设 $\lambda_p=1$, 在虚轴上的映射关系为:

$$\lambda_s=\frac{\Omega_{ph}}{\Omega_{sh}}=8.7$$

其中, λ_s为低通滤波器的边界频率

##

7. 设 $X(z)=\dfrac{0.36}{(1-0.8z)(1-0.8z^{-1})}$

试求与$X(z)$对应的因果序列$x(n)$

Hints: z 逆变换方法：
a) z 逆变换的积分方法
b) 利用留数或留数余数定理
c) 利用部分展开方法及现有（给出）z-逆变换公式

Ans： $x(n)=\left(0.8^{n}-0.8^{-n}\right)u(n)$

```
In[40]:= Xz = 0.36 / ((1 - 0.8 z) (1 - 0.8 z^-1));
         Fz = Xz z^(n-1)

Out[41]= 0.36 z^(-1+n) / ((1 - 0.8/z) (1 - 0.8 z))
```

According to inverse z-transform $x(n) = \sum \text{Res}[F(z), z]$. Because $x[n]$ is a causal sequence, X(z) has two single poles at location z=1/0.8 and z=0.8. For each pole location:

```
In[42]:= x1 = Residue[Fz, {z, 1 / 0.8}]
         x2 = Residue[Fz, {z, 0.8}]

Out[42]= -1. 1.25^n

Out[43]= 1. × 0.8^n
```

The final solution is then

```
In[44]:= xn = (x1 + x2) UnitStep[n] // Simplify

Out[44]= (1. × 0.8^n - 1. × 1.25^n) UnitStep[n]
```

##

8. 已知一个线性时不变因果系统，系统的差分方程如下：

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

求（1）该系统的单位脉冲响应。

（2）系统的频率响应。

Hints: Firstly find the z-transform of the system

Ans:

$$h(n)=\begin{cases} 1, & n=0 \\ 2^{(1-n)} & n>0 \end{cases}$$

$$\delta(n)+2^{(1-n)}u(n-1)$$

或

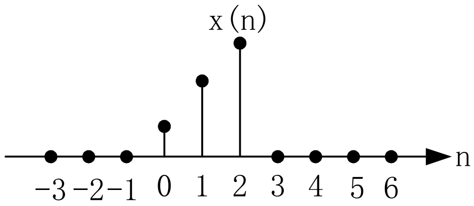
$$h(n)=\delta(n)+2^{(1-n)}u(n-1)$$

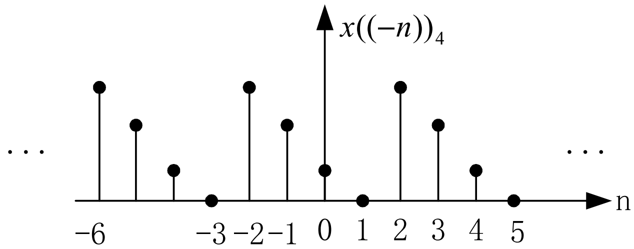
$$H(\omega)=\frac{1+1/2e^{-j\omega}}{1-1/2e^{-j\omega}}$$

参考文件：《part2_q8.pdf》

##

9. 在图 1 中画出了有限长序列 $x(n)$ ，试画出序列 $x((-n))_4$ 的图形





Ans:

##

10. $H_a(s)=\dfrac{3}{(s+1)(s+2)}$，试用脉冲响应不变法将以上模拟传递函数转变为数字传输函数

$H(z)$，采样周期 T=0.5s。

解；$H_a(s)=\dfrac{\frac{3}{2}}{s+1}-\dfrac{\frac{3}{2}}{s+3}$

$H_a(s)$ 的极点为 –1 和-3, 从冲击响应不变法的公式：

$$H(z)=\frac{\frac{3}{2}T}{1-e^{-T}z^{-1}}-\frac{\frac{3}{2}T}{1-e^{-3T}z^{-1}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-e^{-\frac{1}{2}}z^{-1}}-\frac{\frac{3}{4}}{1-e^{-\frac{3}{2}}z^{-1}}$$

Note: 公式的推导

##

11. 已知一个有限长序列 $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-5)$ ，求它的 10 点离散傅立叶变换 $X(k)$

解： $X(k)=1+2\omega_{10}^{5k}=1+2e^{-j\pi k}=1+2(-1)^k, k=0,1,.....9$

##

12. 序列 a(n)为 $\{1,2,3\}$，序列 b(n)为 $\{3,2,1\}$ 。

(1) 求线性卷积 a(n)*b(n)。

(2) 若用基 2FFT 的快速卷积法来得到两个序列的线性卷积运算结果，FFT 至少应取多少点？

Ans:

（1）线性卷积概念

（2）循环卷积，至少是 N>=5 点，所以基 2FFT 是 8

##

13. 设数字滤波器的差分方程为

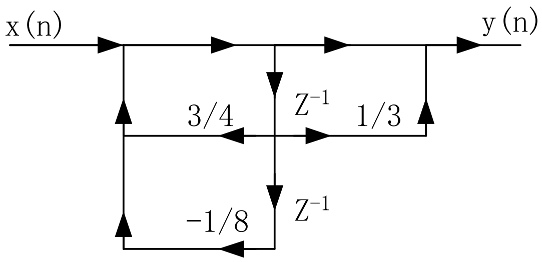
$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

试画出该滤波器的直接型、级联型和并联型结构。

概念：直接型、级联型和并联型结构， 滤波器的一般形式

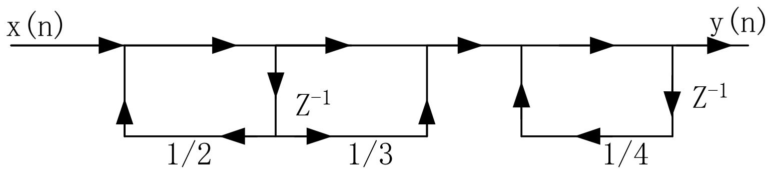
Ans: 直接型

system equation: $H(z)=\dfrac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$



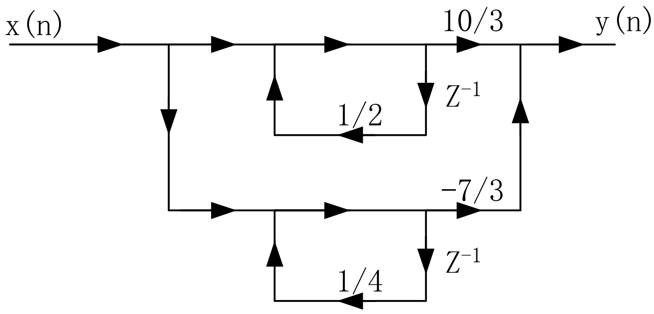
级联型

factor form: $H(z)=\dfrac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(-1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(-1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$



并联型

parallel form: $H(z)=\dfrac{10}{3\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}-\dfrac{7}{3\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$



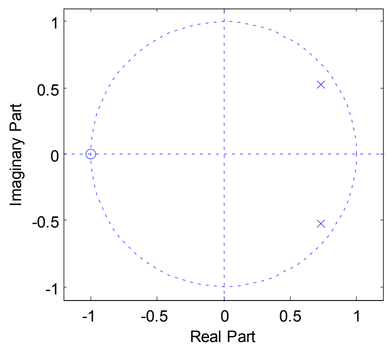
###

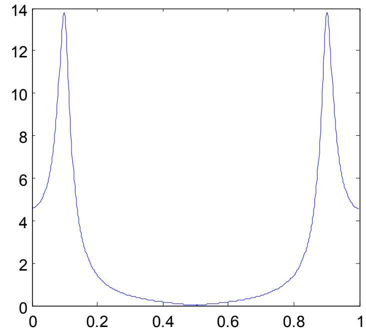
14. 序列 x(n)={3,4,2,5}，序列 h(n)={1,2,1}。
(1) 求线性卷积 y(n)=x(n)*h(n)。
(2) 求 x(n)和 h(n)的 4 点循环卷积 $y_1(n)$。
(3) 若用基 2FFT 的快速卷积法来得到两个序列的线性卷积运算结果，FFT 至少应取多少点？
Ans:（同上）

###

15. 一个离散时间系统有一对共轭极点：$p_1=0.9e^{j\frac{\pi}{5}}, p_2=0.9e^{-j\frac{\pi}{5}}$，且在 z=-1 处有一阶零点，H(0)=1。
(1)写出该系统的系统函数 H(z), 并画出零极点图。
(2)试用零极点分析的方法大致画出其幅频响应曲线（0～2π）。
Ans:

$$H(z)=\frac{k(z+1)}{\left(z-0.9e^{j\frac{\pi}{5}}\right)\left(z-0.9e^{-j\frac{\pi}{5}}\right)}=\frac{0.81(z+1)}{z^2-1.8\cos\frac{\pi}{5}z+0.81}$$





Matlab code

```
b=[0,0.81,0.81];
a=[1,-1.8*cos(pi/5),0.81];

figure;
zplane(b,a);

figure;
[h,w]=freqz(b,a,1024,'whole');
plot(w,abs(h))
```

Note: you should be able to draw a rough plot by hand.

##

16. 设系统的输入输出关系为 $y(n)=n\,x(n)$,试判断系统的线性和时不变性。

Ans: (同上)

##

17.已知 $x(n)$ 是实序列，其 8 点 DFT 的前 5 点值为：{0.255, 0.125-j0.3, 0, 0.125-j0.06, 0.45}，

写出 $x(n)$ 8 点 DFT 的后 3 点值 $\{X(5),X(6),X(7)\}$。

Ans: DFT symmetric property:

如 x(n)为实序列，

-> X(k)共轭对称， i.e.,

conjugate even symmetric $X(k)=X^*(N-k)$

如同时，x(n)为共轭对称，

-> X(k)共轭偶对称, i.e.,

real even symmetric $X(k)=X(N-k)$

如同时，x(n)为奇对称

-> X(k)为纯虚奇对称，i.e.,

imaginary odd symmetric X(k)=-X(N-k)

所以：

X(0)=0.255,

X(1)=0.125-j0.3

X(2)=0

X(3)=0.125-j0.06

X(4)=0.45

For real sequence, its DFT satisfies

$X(5)=X^*(8-5)=X^*(3)$

$X(6)=X^*(8-6)=X^*(2)$

$X(7)=X^*(8-7)=X^*(1)$

所以：

$\{X(5), X(6), X(7)\}$ ={0.125+j0.06,   0,   0.125+j0.3}

##
18. 采用基 2FFT 算法用来计算 N=16 点 DFT，求需要计算复加法，复乘法的次数
Ans (review)
##

19. 判断系统 $T[x(n)] = e^{x(n)}$ 是否为稳定系统、因果系统

Ans: (review)
##

20 已知 IIR 数字滤波器的系统函数 $H(z) = \dfrac{1}{1-0.9z^{-1}}$ ，试判断滤波器的类型（低通、高通、带通、带阻）
Ans: 低通滤波器
##

21. 有一线性时不变系统，如图 1 所示，试写出该系统的频率响应、系统（转移）函数、差分方程和卷积关系表达式。

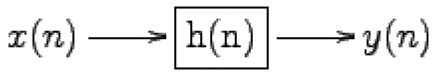


图 1

图中：x(n)为系统输入，y(n)为系统输出，h(n)为系统单位取样响应。
Ans:

频率响应 $H(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$ 系统函数 $H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$

差分方程 $z^{-1}\left[\dfrac{Y(z)}{X(z)}\right]$ 卷积关系 $y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) * x(n)$

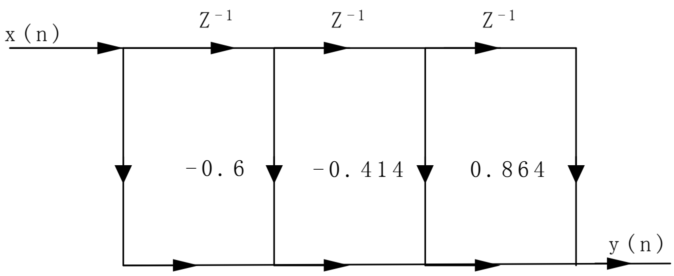
22. 令 $H_1(z) = 1 - 0.6z^{-1} - 1.414z^{-2} + 0.864z^{-3}$

$H_2(z) = 1 - 0.98z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.898z^{-3}$

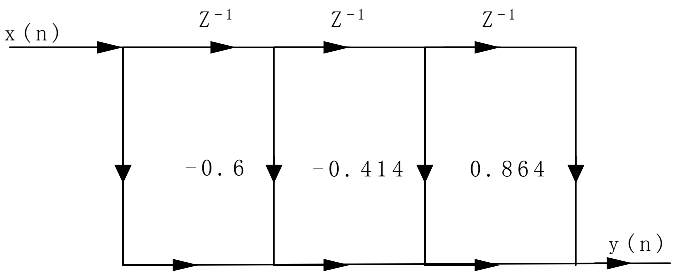
$H_3(z) = H_1(z) / H_2(z)$

试分别画出其直接型结构

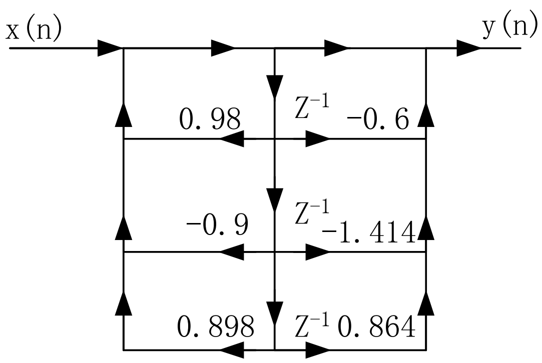
Ans:
H1(z)



H2(z)



H3(z)



注意符号

##

23. 分析判断系统 $T\left[x(n)\right]=e^{x(n)}$ 是否为稳定系统、因果系统、线性系统。

Ans: (同上)

##

24. 已知有限长序列 $h(n)=\{1,1,1,1,1\}$ 和 $x(n)=\{4,3,2,1\}$，对其补零成为 $h_8(n)=\{1,1,1,1,1,0,0,0\}$ 和 $x_8(n)=\{4,3,2,1,0,0,0,0\}$,求解以下问题：

(1) 求解线性卷积 $y(n)=h(n)*x(n)$

(2) 求循环卷积 $y_8(n)=h_8(n)⑧x_8(n)$，与（1）的结果比较，指出循环卷积与线性卷积的关系

Ans:

$y(n)=\{4,7,9,10,10,6,3,1\}$

$y_8(n)=\{4,7,9,10,10,6,3,1\}$

循环卷积与线性卷积的关系：当循环卷积的长度不小于线性卷积长度时，二者相等

mathematica code

```
In[20]:= x = {4, 3, 2, 1};
         h = {1, 1, 1, 1, 1};

         linear convolution
         ==========================

         yn = ListConvolve[x, h, {1, -1}, 0]
Out[22]= {4, 7, 9, 10, 10, 6, 3, 1}

         8-point cyclic convolution
         ==========================

In[23]:= xp = Flatten@{x, 0, 0, 0, 0}
         hp = Flatten@{h, 0, 0, 0}
Out[23]= {4, 3, 2, 1, 0, 0, 0, 0}

Out[24]= {1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0}

In[25]:= ListConvolve[hp, xp, 1]
Out[25]= {4, 7, 9, 10, 10, 6, 3, 1}
```

matlab code

```
clc
clear all;
close all;

x=[4,3,2,1];
h=[1,1,1,1,1];

% linear convolution
yn=conv(x,h);

% 8 point cyclic convolution
Xk=fft(x,8);
Hk=fft(h,8);
Y1k=Xk.*Hk;
yn1=ifft(Y1k);

yn(:)
yn1(:)
```

##

25. 有一有限长序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1,0\le n\le N-1\\0,\text{其他}\end{cases}$$

试求：

(1) $R_N(n)$ 的 z 变换；

(2) DFT[$R_N(n)$]；

(3) $R_N(n)$ 的幅频响应特性。

Ans:

(1) $\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}},0<|z|$ (2) $DFT\left[R_N(n)\right]=\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{N-1}W_N^{kn},0\le k\le N-1\\0,\text{其他}\end{cases}$

(3) 幅频响应：$H\left(e^{jw}\right)=\left|\dfrac{\sin\dfrac{\omega N}{2}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}\right|$

Mathematica code

```
In[403]:= rn = UnitStep[n] - UnitStep[n - N];

In[404]:= rz = ZTransform[rn, n, z];

In[405]:= rz = Refine[rz, Assumptions → N > 0 && N ∈ Integers] // Simplify

Out[405]= (z - z^(1-N)) / (-1 + z)

In[406]:= num = Numerator[rz] / z
          den = Denominator[rz] / z

Out[406]= (z - z^(1-N)) / z

Out[407]= (-1 + z) / z

In[408]:= num1 = num /. z → Exp[I ω] // ExpToTrig
          den1 = den /. z → Exp[I ω] // ExpToTrig

Out[408]= Cos[ω]^2 - Cos[ω] (Cos[ω] + i Sin[ω])^(1-N) +
            i (Cos[ω] + i Sin[ω])^(1-N) Sin[ω] + Sin[ω]^2

Out[409]= -Cos[ω] + Cos[ω]^2 + i Sin[ω] + Sin[ω]^2

In[410]:= magNum1 = FullSimplify[Abs[num1],
            Assumptions → ω ∈ Reals && N ∈ Integers]

Out[410]= 2 Abs[Sin[N ω / 2]]

In[411]:= magDen1 = FullSimplify[Sqrt[(1 - Cos[ω])^2 + Sin[ω]^2],
            Assumptions → ω ∈ Reals]

Out[411]= 2 Abs[Sin[ω / 2]]

In[412]:= mag1 = magNum1 / magDen1

Out[412]= Abs[Sin[N ω / 2]] / Abs[Sin[ω / 2]]
```

##

26. 已知$X\left(k\right)$和$Y\left(k\right)$分别是两个 N 点实序列 x(n)和 y(n)的 N 点 DFT,若要求 x(n)和 y(n)，为提高运算效率，试设计用一次 N 点 IFFT 来完成。

Ans:

Let $F(k) = X(k) + j\,Y(k)$

$f(n) = \mathrm{IDFT}[F(k)] = x(n) + j\,y(n)$

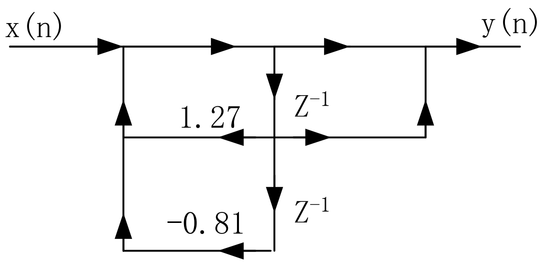
Therefore,

$x(n) = \mathrm{Re}[f(n)]$, and $y(n) = \mathrm{Im}[f(n)]$

###
27. 已知实序列 x(n)的 6 点 DFT 为 X(k)，X(0)=3,X(1)=3+2j,X(2)=1-j,X(3)=4。求
（1）整个 X(k)。
（2）若 $x_1(n)=x((n-3))R_6(n)$,求 $X_1(k)$。
Ans:
(同上)
###
28. 已知 $x(n)=\cos(\frac{\pi}{6}n)R_4(n)$，求 $x\left((9)\right)_4$。
Hints: Check periodic extension
###
29. 已知模拟滤波器传输函数为 $Ha(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$ ，试用双线性变换法将其转换成数字滤波器，设 $T=2\,\text{s}$
Hints: 双线性变换概念及公式
###
30. 已知一个有限长序列 $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-5)$ ，求它的 10 点离散傅立叶变换 $X(k)$

Hints: DFT 概念及公式
###

31. 数字滤波器的结构如图 1 所示，写出它的差分方程和系统函数。



Ans: （同上）
###
32. 用 Z 变换法解如下差分方程：

$y(n)-0.9y(n-1)=0.05u(n)$ ， $y(-1)=1$ ， $y(n)=0$ ，当 $n<-1$ 时

Hints: Single sided z-transform
Ans:

```
In[427]:= eqn1 = Y[z] - 9/10 z^-1 (Y[z] + z) == ZTransform[1/20 UnitStep[n], n, z]
```

Out[427]= $Y[z] - \frac{9\,(z + Y[z])}{10\,z} == \frac{z}{20\,(-1 + z)}$

```
In[428]:= soln = Solve[eqn1, Y[z]] // Flatten // Simplify
```

Out[428]= $\left\{Y[z] \to \frac{z\,(-18 + 19\,z)}{2\,(-1 + z)\,(-9 + 10\,z)}\right\}$

```
In[429]:= yz = Y[z] /. soln
```

Out[429]= $\frac{z\,(-18 + 19\,z)}{2\,(-1 + z)\,(-9 + 10\,z)}$

```
In[430]:= yn = InverseZTransform[yz, z, n]
```

Out[430]= $\frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{10}{9}\right)^{-1-n}\right)$

The final result is

$y[n] = 0.5 + 0.45\,(0.9)^n$

###

33. 已知有限长序列 $x(n) = (n+1)\left[u(n) - u(n-4)\right]$，

(1)试画出序列 $x((-n))_4 R_4(n)$ 的图形。(2)求线性卷积 $y(n) = x(n) * x(n)$。（3）求 4 点循环卷积 $y_1(n) = x(n) ④ x(n)$

Ans: (same as above)

###

34. 已知一个有限长序列 $x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-4)$，求它的 8 点离散傅立叶变换 (DFT) $X(k)$

Ans: (same as above)

###

35. 判断系统 $T\left[x(n)\right] = \sum_{k=3}^{n} x(k)$ 是否为稳定系统、因果系统、线性系统

Ans: (same as above)

###

36. 一个时域离散线性相位 FIR 低通滤波器的频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j5\omega} & |\omega| \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & \frac{\pi}{4} < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

求该系统的单位取样响应 h(n)

Ans: $h(n)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}(n-5)}{\pi(n-5)}$

```
In[578]:= Hω = Piecewise[{{Exp[-I 5 ω], -π/4 ≤ ω ≤ π/4}}, 0]

Out[578]= { e^(-5 i ω)   -π/4 ≤ ω ≤ π/4
          { 0            True

In[585]:= hn = IDTFT[Hω, ω, n] // ExpToTrig // FullSimplify

Out[585]= Cos[1/4 (1 + n) π] / ((-5 + n) π)

In[592]:= FullSimplify[Sin[π/4 (n - 5)], Assumptions → n ∈ Integers]

Out[592]= Cos[1/4 (1 + n) π]
```

The final answer is then

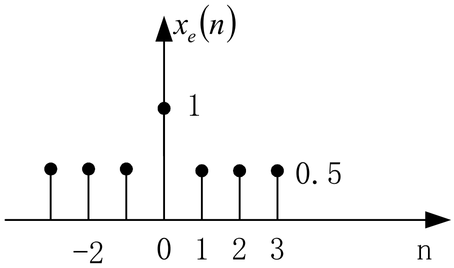
$h[n]=\dfrac{\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{4}(1+n)\pi\right]}{(-5+n)\pi}=\dfrac{\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{4}(n-5)\right]}{(-5+n)\pi}$

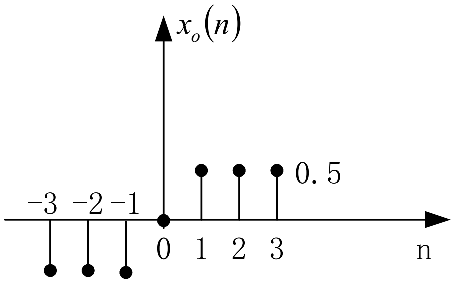
##

37. 设 $x(n)=R_4(n)$，试求 $x(n)$ 的共轭对称序列 $x_e(n)$ 和共轭反对称序列 $x_o(n)$，并分别用图表示。

Hints: check the textbook on how to find the answers

解：$x_e(n)=\frac{1}{2}\left(R_4(n)+R_4(-n)\right)$ ，$x_o(n)=\frac{1}{2}\left(R_4(n)-R_4(-n)\right)$





##

38. 求序列 $x(n)=u(n+3)-u(n-4)$ 的傅立叶变换

Ans: (same as above)

##

39. 求序列 x(n) 的 Z 变换及其收敛域，并在 z 平面上画出极零点分布图，其中

$x(n)=R_N(n), N=4$

$$X(z)=\frac{1-z^{-4}}{1-z^{-1}}=\frac{z^4-1}{z^3(z-1)} \quad , \quad 0<|z|\le\infty$$

零点 $z_k = e^{j\frac{2\pi}{4}k}$ ，k＝0，1，2，3

极点 $z_{1,2} = 0,1$.

##

40. 求 $R_5(n)$ 与序列 $\{4,3,2,1\}, n = 0,1,2,3$ 的 7 点循环卷积。

Ans: (same as above)

三、综合题

1. 已知 x(n)为 N 点序列，n=0，1，…，N-1，其 DFT 为 X(k)，令 $y(n)=x((n))_N R_{3N}(n)$，

y(n)为 3N 点序列，试用 X(k)表示 Y(k)
DFT 的特性

解： $Y(k)=DFT[y(n)], k=0,1,.....3N-1$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_{3N}^{kn}+\sum_{n=N}^{2N-1} x(n-N)W_{3N}^{kn}+\sum_{n=2N}^{3N-1} x(n-2N)W_{3N}^{kn}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_{3N}^{kn}+W_{3N}^{kN}\sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_{3N}^{kr}+W_{3N}^{2kN}\sum_{r=0}^{N-1} x(r)W_{3N}^{kr}$$

Consider $W_{3N}^{kN}=e^{-j\frac{2\pi}{3N}kN}=e^{-j2\pi(k/3)}$, therefore

when $k/3=\text{integer}$, $W_{3N}^{kN}=1$ and $Y(k)=3X(k/3)$

when $k/3\neq\text{integer}$,

let $y_1=\sum x(n)W_{3N}^{kn}$, we have

$$Y(k)=y_1\left(1+W_{3N}^{kN}+W_{3N}^{2kN}\right)=y_1\left(\frac{1-W_{3N}^{3kN}}{1-W_{3N}^{kN}}\right)=0$$

In summary

$$Y(k)=\begin{cases}3X(k/3), & k/3 \text{ integer}\\ 0, & k/3 \text{ not an integer}\end{cases}$$

##

2. 用微处理机对实数序列做谱分析，要求频率分辨率 $F\leq 25\,\text{Hz}$，信号最高频率为 2kHz，试确定以下参数：
（1）最小记录时间 T_{min}；
（2）最大取样间隔 T_{max}；
（3）最少采样点数 N_{min}；
（4）在采样频率不变的情况下，将频率分辨率减小一倍的最小采样点数 N

解： $T_{\min}=\frac{1}{F}=1/25s=0.04s$

$$T_{\max}=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{2f_m}=\frac{1}{4}ms$$

$$N_{\min}=\frac{T_{\min}}{T_{\max}}=\frac{0.04}{0.25}\times 10^3=160$$

$$N=\frac{f_s}{F}=80$$

##

3. 一个线性时不变因果系统由差分方程描述：

$$y(n)+0.5y(n-1)+0.06y(n-2)=x(n)-x(n-1)$$

(1)分析该系统属于 FIR 滤波器还是 IIR 滤波器；

(2)写出系统函数 H(z)和单位取样响应 $h(n)$ 。

(3)写出系统频响函数 $H(e^{j\omega})$ 表达式；

(4)当激励信号为 $x(n)=(-1)^n$ 时，求系统的响应

解：

(1)系统函数既有零点又有极点，所以是 IIR 系统

(2)

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+0.5z^{-1}+0.06z^{-2}}=\frac{-12z}{z+0.2}+\frac{13z}{z+0.3}$$

$$h(n)=\left[-12(-0.2)^n+13(-0.3)^n\right]u(n)$$

（3） $H(e^{j\omega})=\dfrac{1-e^{-j\omega}}{1+0.5e^{-j\omega}+0.06e^{-2j\omega}}$

（4）

$$(-1)^n=e^{j\pi n}$$

$$y(n)=H(e^{j\pi})e^{j\pi n}$$

$$=\frac{-1(-1-1)}{(-1+0.2)(-1+0.3)}e^{j\pi n}=\frac{2}{0.56}e^{j\pi n}=3.57e^{j\pi n}=3.57(-1)^n$$

##

4. 设某 FIR 数字滤波器的系统函数为

$H(z)=\dfrac{1}{5}\times(1+2z^{-1}+4z^{-2}-4z^{-3}-2z^{-4}-z^{-5})$ ，

（1）该滤波器的单位取样响应 的表示式，并判断是否具有线性相位,说明是第几类线性相位滤波器；

（2） $H(e^{j\omega})$ 的幅频响应和相频响应的表示式；

（3）画出该滤波器流图的直接型结构和线性相位型结构图，比较两种结构，指出线性相位型结构的优点。

ans (1）

$$h(n)=\frac{1}{5}\times[\delta(n)+2\delta(n-1)+4\delta(n-2)-4\delta(n-3)-2\delta(n-4)-\delta(n-5)]$$

$h(n)$ 满足 $h(n)=-h(N-1-n), N=6$

所以，该 FIR 滤波器具有第二类线性相位特性。

(2) 公式推导参考：高西全第四版 pp201

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{M}2h(n)\sin[\omega(n-\tau)]$$

$$\theta(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\omega\tau \text{ , and } \tau=\frac{N-1}{2}$$

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{M}2h(n)\sin[\omega(n-\tau)]=\frac{2}{5}\sin\left(\frac{5}{2}\omega\right)+\frac{4}{5}\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)+\frac{8}{5}\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right)$$

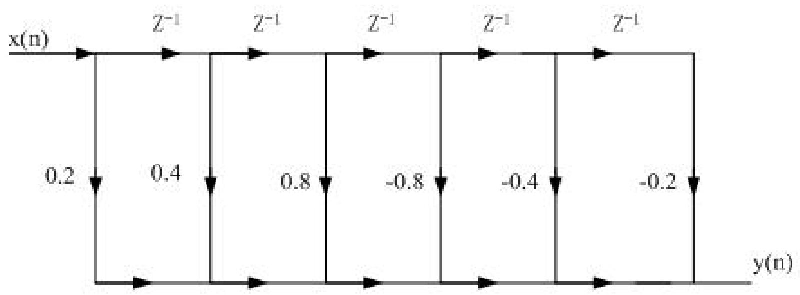
$$\phi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega=-\frac{\pi}{2}-\frac{5}{2}\omega$$

$$h(n)=\frac{1}{5}\times[\delta(n)+2\delta(n-1)+4\delta(n-2)-4\delta(n-3)-2\delta(n-4)-\delta(n-5)]$$

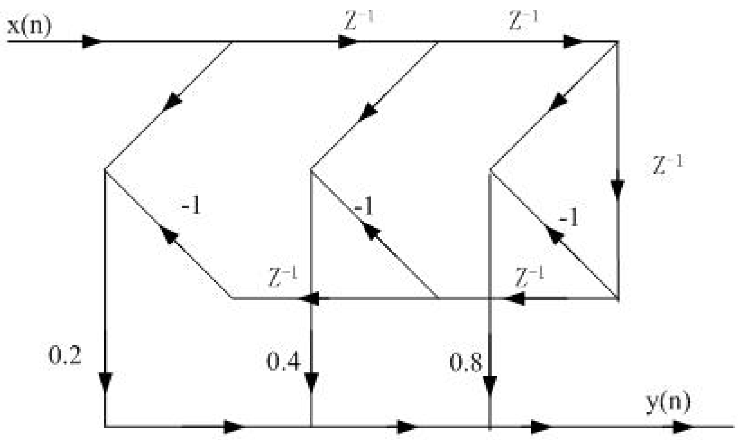
（3 分）

$h(n)$ 满足 $h(n)=-h(N-1-n), N=6$

所以，该 FIR 滤波器具有第二类线性相位特性。　　　　（2 分）



直接型结构



线性相位型

线性相位型结构比直接型结构可以节省近一半的乘法器。
##

5. 设 $x(n)$ 是长度为 2N 的有限长实序列，$X(k)$ 为 $x(n)$ 的 2N 点 DFT。试设计用一次 N 点 FFT 完成计算 $X(k)$ 的高效算法。

解

let $\begin{aligned} x_1(r) &= x(2r) \quad r \in 0,1,...N \\ x_2(r) &= x(2r+1) \quad r \in 0,1,...N \end{aligned}$

令 $y(n) = x_1(n) + jx_2(n)$

$$Y(k) = DFT[y(n)], k = 0,1,.....N-1$$

$$X_1(k) = DFT[x_1(n)] = Y_{ep}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$

$$jX_2(k) = DFT[jx_2(n)] = Y_{op}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

2N 点 DFT[x(n)]=X(k) ，为：

$$X(k) = \sum_{n=0,even}^{2N-1} x(n)W_{2N}^{kn} + \sum_{n=0,odd}^{2N-1} x(n)W_{2N}^{kn}$$

$k = 0...2N-1$

Let $k' = 0..N-1$

$$k = \begin{cases} k', & 0 \le k \le N-1 \\ k'+N, & N \le k \le 2N-1 \end{cases}$$

It can be shown that

$$\begin{cases} X(k') = X_1(k') + W_{2N}^{k'} X_2(k'), \\ X(k'+N) = X_1(k') - W_{2N}^{k'} X_2(k') \end{cases}$$

##

6. 已知 x(n)为 N 点序列，$n = 0,1 \ldots N-1$，其 DFT 为 X(k)，令

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0,1,\ldots N\text{-}1 \\ x(n\text{-}N) & n = N,\ldots,2N\text{-}1 \end{cases}$$，y(n)为 2N 点序列，试用 X(k)表示 Y(k)。

$$Y(k) = DFT[y(n)], k = 0,1,\ldots..2N-1$$

解：

$$Y(k) = DFT[y(n)], k = 0,1,\ldots..2N-1$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\text{N-1}} x(n) W_{2N}^{kn} + \sum_{n=N}^{\text{2N-1}} x(n-N) W_{2N}^{kn} \\
&= \sum_{n=0}^{\text{N-1}} x(n) W_{2N}^{kn} + W_{2N}^{kN} \sum_{r=0}^{\text{N-1}} x(r) W_{2N}^{kr} \\
&= (1 + W_{2N}^{kN}) X(k/2) \\
&= \begin{cases} 2X(k/2), k/2 = \text{整数} \\ 0, k/2 \neq \text{整数} \end{cases}
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned} W_{2N}^{kN} &= e^{-jk\pi} = \cos(k\pi) - j\sin(k\pi) \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

##

7. 已知因果稳定离散时间系统用下面差分方程描述：

$$y(n) - 0.8y(n-1) + 0.12y(n-2) = x(n) + 0.8x(n-1)$$

(1)求系统函数 $H(z)$ 及单位取样响应 $h(n)$；

(2)写出系统频响函数 $H(e^{j\omega})$ 表达式；

(3) 当激励信号为 $x(n) = e^{j\pi n}$ 时，求系统的输出。

(4)分析该系统属于 FIR 滤波器还是 IIR 滤波器

解：

$$H(z)=\frac{1+0.8z^{-1}}{1-0.8z^{-1}+0.12z^{-2}}$$

$$h(n)=-\frac{5}{2}\cdot\left(0.2\right)^{n}u(n)+\frac{7}{2}\cdot\left(0.6\right)^{n}u(n)$$

$$H(e^{jw})=\frac{1+0.8e^{-jw}}{1-0.8e^{-jw}+0.12e^{-2jw}}$$

$$y(n)=H(e^{j\pi})e^{j\pi n}$$

$$=\frac{-1(-1+0.8)}{\left(-1-0.2\right)\left(-1-0.6\right)}e^{j\pi n}=\frac{0.2}{(-1.2)(-1.6)}e^{j\pi n}=0.104e^{j\pi n}$$

(4) 系统函数既有零点又有极点，所以是 IIR 系统。
##

8. 设某线性时不变离散系统的差分方程为

$$y(n-1)-\frac{10}{3}y(n)+y(n+1)=x(n)\ ,$$

试讨论分析其因果性和稳定性，求其单位取样响应。

解：对差分方程两边取 Z 变换后，得：

$$H(z)=\frac{z}{(z-\frac{1}{3})(z-3)}$$

则极点 为 1/3 和 3 （4 分）

当 ROC：$\left|Z\right|>3$时，系统因果不稳定，$h(n)=\frac{3}{8}\times[3^{n}-3^{-n}]u(n)$；

当 ROC：$\frac{1}{3}<\left|z\right|<3$时，系统非因果稳定，$h(n)=-\frac{3}{8}\times[3^{n}u(-n-1)+3^{-n}u(n)]$ ；

当 ROC：$\left|z\right|<\frac{1}{3}$时，系统非因果不稳定，$h(n)=\frac{3}{8}\times[3^{-n}-3^{n}]u(-n-1)$
##

9. 一个线性时不变因果系统由差分方程 $y(n)=x(n)-x(n-1)-0.5y(n-1)$ 描述。分析该系统属于 FIR 滤波器还是 IIR 滤波器；判断它属于哪种选频滤波器（低通、高通、带通、带阻）

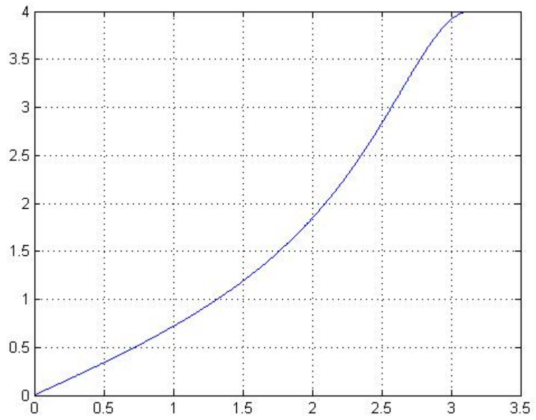
解：

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$$

既有零点又有极点，所以是 IIR 系统

$H(e^{j\Omega}) = \frac{1-e^{-j\omega}}{1+0.5e^{-j\omega}}$

由幅频特性可知是高通滤波器



##

10. 已知线性因果网络用下面差分方程描述：

$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n) + 0.9x(n-1)$

（1）求网络的系统函数 $H(z)$ 及单位脉冲响应 $h(n)$；

（2）写出网络传输函数 $H(e^{jw})$ 表达式，并定性画出其幅频特性曲线；

设输入 $x(n) = e^{jw_0 n}$，求输出 $y(n)$。

解：（1） $H(z) = \frac{1+0.9z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}$

$$h(n) = 2 \cdot 0.9^n u(n-1) + \delta(n)$$

(2) $H(e^{jw}) = \frac{1+0.9e^{-jw}}{1-0.9e^{-jw}}$

(3) $y(n) = e^{jw_0} \frac{1+0.9e^{-jw_0}}{1-0.9e^{-jw_0}}$

##

11. 已 知 x(n) 为 N 点 序 列 ， $n = 0,1,\ldots N-1$ ， N 为 偶 数 ， 其 DFT 为 X(k)， 令

$$Y(k)=DFT[y(n)],k=0,1,.....3N-1$$

$$y(n)=\begin{cases}x(n) & n=0,1,...N\text{-}1\\ x(n\text{-}N) & n=N,...,2N\text{-}1\\ x(n\text{-}2N) & n=2N,...,3N\text{-}1\end{cases}$$，y(n)为 3N 点序列，试用 X(k)表示 Y(k)。

解：

$$Y(k)=DFT[y(n)],k=0,1,.....3N-1$$

$$=\sum_{n=0}^{\text{N-1}}x(n)W_{3N}^{kn}+\sum_{n=N}^{\text{2N-1}}x(n-N)W_{3N}^{kn}+\sum_{n=2N}^{\text{3N-1}}x(n-2N)W_{3N}^{kn}$$
$$=\sum_{n=0}^{\text{N-1}}x(n)W_{3N}^{kn}+W_{3N}^{kN}\sum_{r=0}^{\text{N-1}}x(r)W_{3N}^{kr}+W_{3N}^{2kN}\sum_{r=0}^{\text{N-1}}x(r)W_{3N}^{kr}$$
$$=\begin{cases}3X(k/3),k/3=\text{整数}\\ 0,k/3\neq\text{整数}\end{cases}$$

##

12. 已知线性因果稳定离散时间系统用下面差分方程描述：

$$y(n)-0.5y(n-1)+0.06y(n-2)=x(n)+0.9x(n-1)$$

(1)求系统函数 $H(z)$ 及单位取样响应 $h(n)$；

(2)写出系统频响函数 $H(e^{j\omega})$ 表达式；

(3) 当激励信号为 $x(n)=e^{j\frac{\pi}{2}n}$ 时，求系统的输出。

(4)分析该系统属于 FIR 滤波器还是 IIR 滤波器

解：（同上）

##

13. 已知一个线性非时变因果系统由下列线性差分方程给出：

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+x(n-1)$$

画出系统的幅频响应示意图，并判断系统的滤波特性。

解：（同上）

##

14. 设 $N=2^M$，简要说明按时间抽取和按频率抽取基 2-FFT 算法的主要区别，并写出 DIT-FFT 算法第一级分解的蝶形公式，画出相应的第一级蝶型图（N=8）

解：基 2 DIF 与 DIT 的主要区别：

（1） 蝶形运算的组成不同

DIT：旋转因子在蝶形的输入端
DIF：旋转因子在蝶形的输出端
（2） 输入输出顺序不同
DIT：输入倒序，输出顺序
DIF：输入顺序，输出倒序
第一级分解的蝶形公式----DIT

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \\ X\left(\frac{N}{2}+k\right) = X_1(k) - W_N^k X_2(k) \end{cases} \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

###

15. 已知 x(n) 为 N 点序列，$n = 0,1 \ldots N-1$，N 为偶数，其 DFT 为 X(k)，令 $y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n-1}{2}\right) & n\text{为奇数} \\ 0 & n\text{为偶数} \end{cases}$，y(n)为 2N 点序列，试用 X(k)表示 Y(k)。

解：

$Y(k) = \sum_{n=0}^{2N-1} y(n)\, W_{2N}^{kn}$
$= \sum_{n\,\text{even}}^{2N-1} + \sum_{n\,\text{odd}}^{2N-1}$
Since $y(n) = 0$ when n = even and $y(n) = x\left(\frac{n-1}{2}\right)$ when n = odd,
let $n = 2r + 1$ for odd n, then
$Y(k) = \sum_{r=0}^{N-1} x(r)\, W_{2N}^{k(2r+1)}$
We can write $W_{2N}^{k(2r+1)} = W_{2N}^{k2r}\, W_{2N}^{k} = W_N^{kr}\, W_{2N}^{k}$, therefore
$Y(k) = W_{2N}^{k} \sum_{r=0}^{N-1} x(r)\, W_N^{kr}$
$= W_{2N}^{k}\, X(k)$

###

16. 一个线性时不变因果系统由差分方程描述：

$$y(n) = x(n) - x(n-1) + 0.6y(n-1) - 0.08y(n-2)$$

(1)分析该系统属于 FIR 滤波器还是 IIR 滤波器；

(2)写出系统函数 H(z),当激励信号 x(n)=u(n)时求系统的零状态响应

(1) $H(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-0.6z^{-1}+0.08z^{-2}}$，(5 分)既有零点又有极点，所以是 IIR 系统(4 分)。

$$Y_{zs}(z)=H(z)X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-0.6z^{-1}+0.08z^{-2}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

(2) $$=\frac{-z}{z-0.2}+\frac{2z}{z-0.4}$$

$$y_{zs}(n)=\left[-\left(0.2\right)^{n}+2\left(0.4\right)^{n}\right]u(n)$$

###

17. 已知一个因果线性非时变（LTI）系统，用差分方程表示为

$$y\left(n\right)=x\left(n\right)-x\left(n-1\right)-0.9y\left(n-1\right)$$

（1）.求系统的传递函数 $H\left(z\right)$ 和它的收敛域，并说明系统的稳定性；

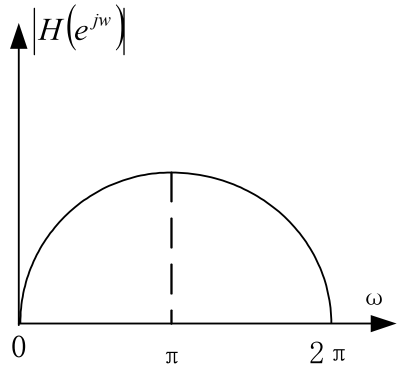
(2)求系统的频率响应 $H\left(e^{jw}\right)$ 的表达式，画出幅频响应示意图，并判断系统的滤波特性；

解：

（1）.$H\left(z\right)=\dfrac{1-z^{-1}}{1+0.9z^{-1}}=\dfrac{z-1}{z+0.9}$

收敛域为 $\left|z\right|>0.9$ ，因为收敛域包含单位圆，所以系统稳定。

（2）. $H\left(e^{jw}\right)=\dfrac{e^{jw}-1}{e^{jw}+0.9}$



幅频响应示意图

滤波特性：高通。

END