



## 第3章 离散傅里叶变换(DFT)

3.1 离散傅里叶变换的定义及物理意义

3.2 离散傅里叶变换的基本性质

3.3 频率域采样

3.4 DFT的应用举例

1. 从实际上，当我们在计算机上实现信号的频谱分析时，要求：  
时域、频域都是离散的；时域、频域都是有限长；

2. FT、FS、DTFT、DFS 都不符合要求.

3. 从原理上， $\tilde{x}(n)$  和  $\tilde{X}(k)$  的各自一个周期即可表示完整的序列；

周期信号的傅里叶级数对

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \tilde{x}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\end{aligned}$$

# 为什么要由DFS过渡到DFT?

利用DFS的时域、频域的周期性，各取一个周期，就形成新的变换对：

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

但DFT并不是“第五种”傅立叶变换！

## 3.1 离散傅里叶变换的定义及物理意义

### 3.1.1 DFT的定义

设 $x(n)$ 是一个长度为 $M$ 的有限长序列，则定义 $x(n)$ 的 $N$ 点离散傅里叶变换为

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中， $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ ， $N$ 称为DFT变换区间长度， $N \geq M$ 。

通常用 $\text{DFT}[x(n)]_N$ 和 $\text{IDFT}[X(k)]_N$ 分别表示 $N$ 点离散傅里叶变换和 $N$ 点离散傅里叶逆变换。

下面证明IDFT  $[X(k)]$  的唯一性。

由于

$$\begin{aligned}\text{IDFT}[X(k)]_N &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mk} \right] W_N^{-kn} \\ e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-n)} &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} \\ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} &= \begin{cases} 1, & m = n + iN, \quad i \text{为整数} \\ 0, & m \neq n + iN, \quad i \text{为整数} \end{cases}\end{aligned}$$

所以，在变换区间上满足下式：

$$\text{IDFT}[X(k)]_N = x(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

由此可见，离散傅里叶逆变换是唯一的。

【例3.1.1】  $x(n)=R_4(n)$ , 求 $x(n)$ 的4点和8点DFT。

解 设变换区间 $N=4$ , 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{4}k}} = \begin{cases} 4 & k=0 \\ 0 & k=1,2,3 \end{cases} \end{aligned}$$

设变换区间 $N=8$ , 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^7 x(n)W_8^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \frac{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k \cdot 4}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}} \\ &= e^{-j\frac{3}{8}\pi k} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}k)}{\sin(\frac{\pi}{8}k)} \quad \text{同乘 } \exp(-j\frac{\pi}{8}k) \end{aligned}$$

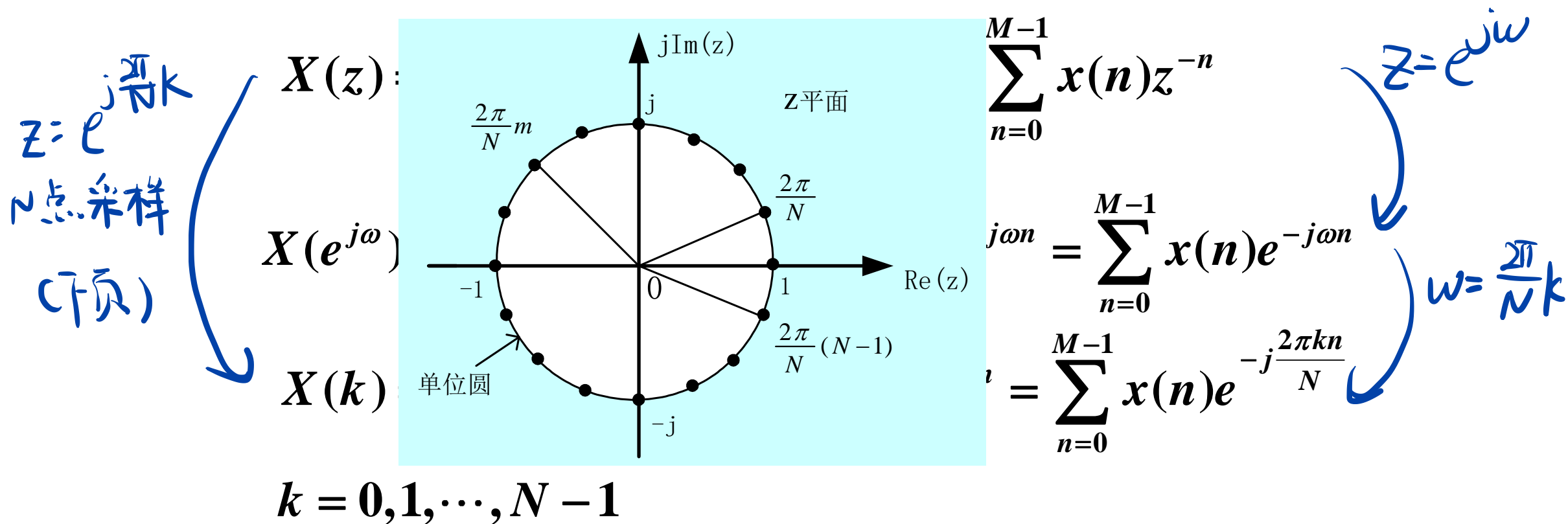
$$k=0, 1, \dots, 7$$

整体有点复杂  $\rightarrow$  用 `mathematica`  $\rightarrow$  代码求解

由此例可见,  $x(n)$ 的离散傅里叶变换结果与变换区间长度 $N$ 的取值有关。

### 3.1.2 DFT与傅里叶变换和Z变换的关系 (IMG)

设 $x(n)$ 是一个长度为 $M$ 的有限长序列，则它的Z变换、DTFT、DFT分别表示为：



设序列 $x(n)$ 的长度为 $M$ ，其Z变换和 $N(N \geq M)$ 点DFT分别为

$$X(z) = \text{ZT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)z^{-n}$$

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N = \sum_{n=0}^{M-1} x(n)W_N^{kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

比较上面二式可得关系式

或

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$



## DFT与Z变换的关系

➤表明序列 $x(n)$ 的 $N$ 点DFT是 $x(n)$ 的Z变换在单位圆上的 $N$ 点等间隔采样。

## DFT与傅里叶变换的关系

➤说明 $X(k)$ 为 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的 $N$ 点等间隔采样。

这是离散傅里叶变换的物理意义。

由此可见，DFT的变换区间长度 $N$ 不同，表示对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的采样间隔和采样点数不同，所以DFT的变换结果不同。

# DFT 的图形解释

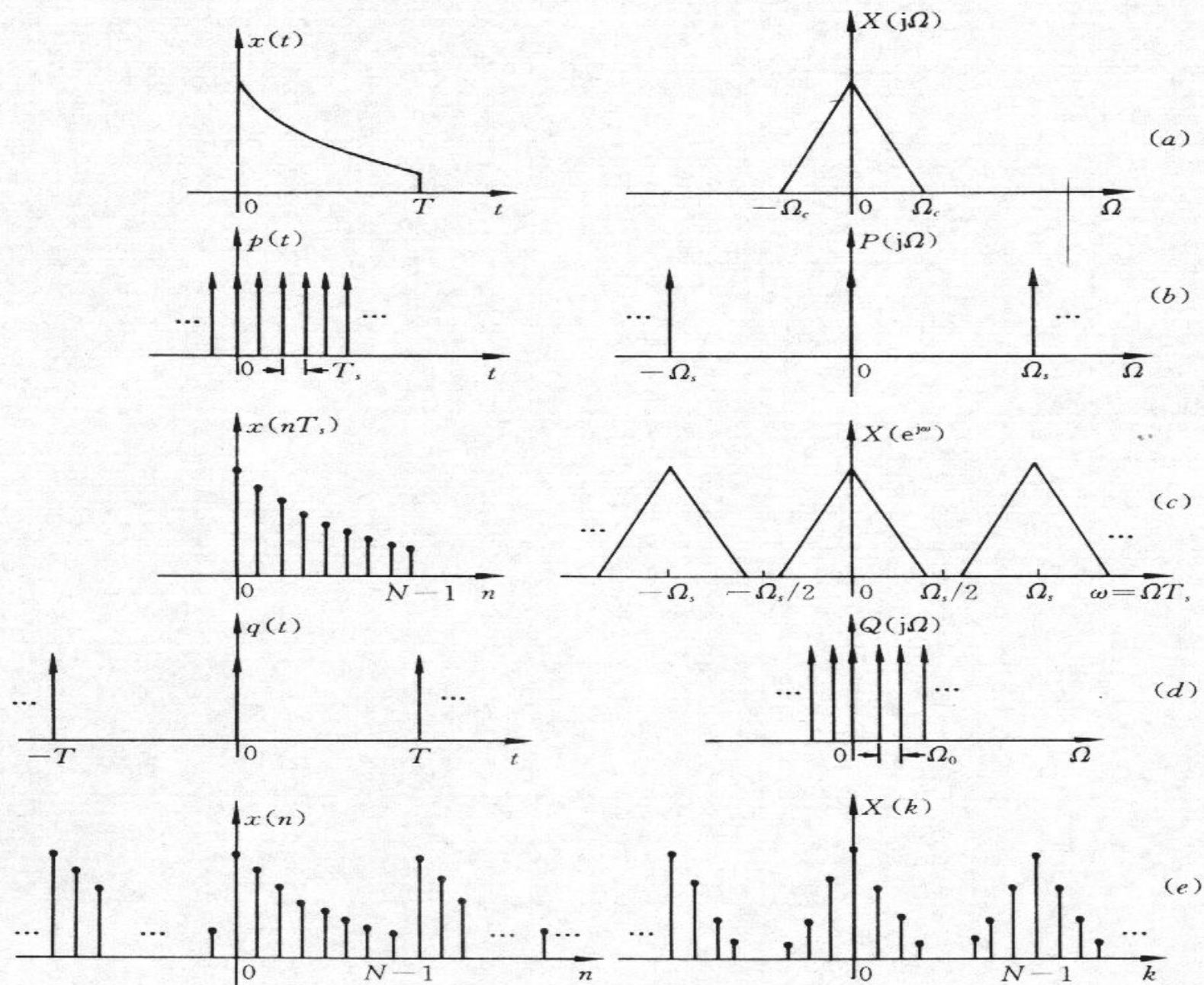
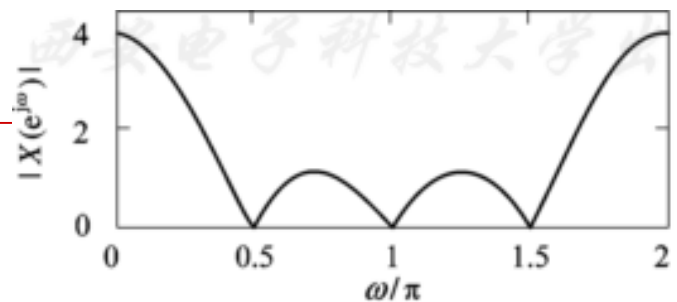
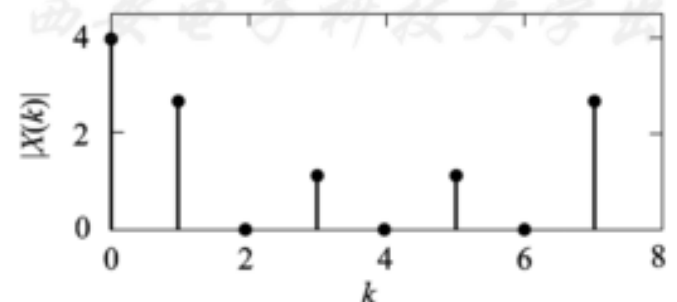


图 3.5.1 DFT 的图形解释

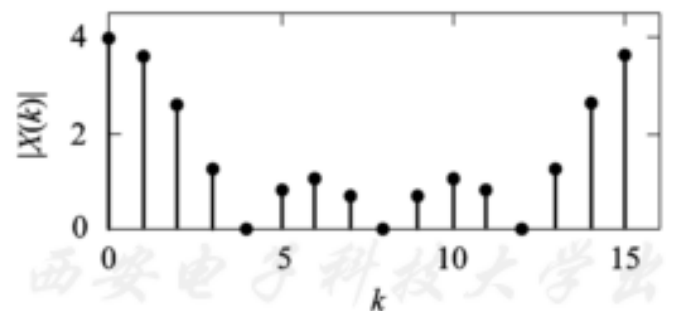
例3.1.1中,  $x(n)=R_4(n)$ , DFT变换区间长度 $N$ 分别取8、16时,  $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 的幅频特性曲线图如图3.1.1所示。



(a)  $x(n)$ 的幅频特性曲线



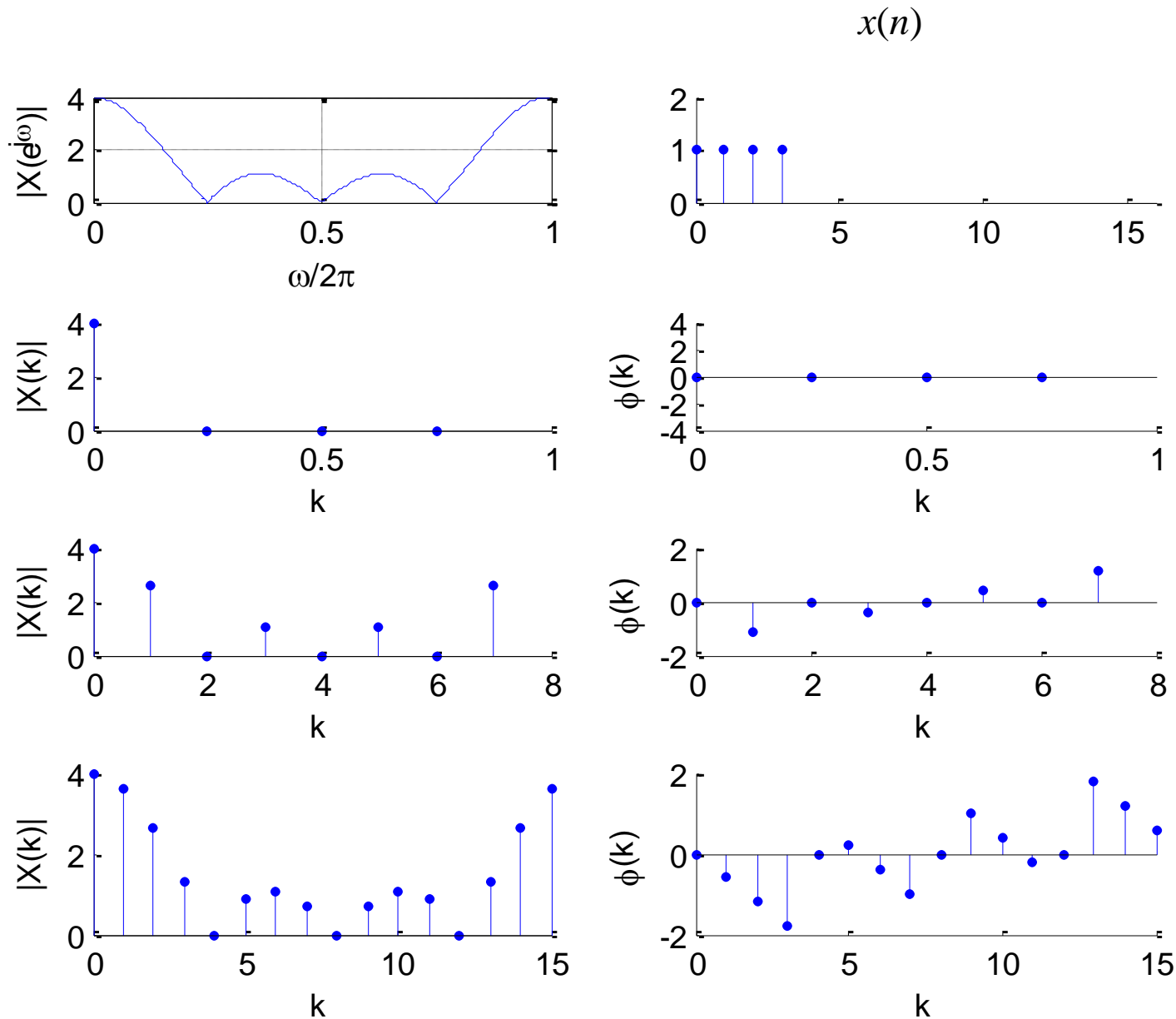
(b)  $x(n)$ 的8点DFT



(c)  $x(n)$ 的16点DFT

图3.1.1  $R_4(n)$ 的FT和DFT的幅度特性关系

$x(n)=R_4(n)$ , DFT变换区间长度 $N$ 分别取4, 8、16时,  $X(e^{j\omega})$ 和 $X(k)$ 的幅频特性曲线图如图所示。



### 3.1.3 DFT的隐含周期性

前面定义的DFT变换对中， $x(n)$ 与 $X(k)$ 均为有限长序列，但由于 $W_N^{kn}$ 的周期性，使DFT定义式中的 $X(k)$ 隐含周期性，且周期均为 $N$ 。对任意整数 $m$ ，总有

$$W_N^k = W_N^{(k+mN)}, \quad k, m \text{ 为整数, } N \text{ 为自然数}$$

$W_N^N = 1$

所以 $X(k)$ 满足：

$$X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} = X(k)$$

实际上，任何周期为 $N$ 的周期序列 $\tilde{x}(n)$ 都可以看做长度为 $N$ 的有限长序列 $x(n)$ 的周期延拓序列，而 $x(n)$ 则是 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期，即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN)$$

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n)$$

$$X(k + \frac{N}{2})$$

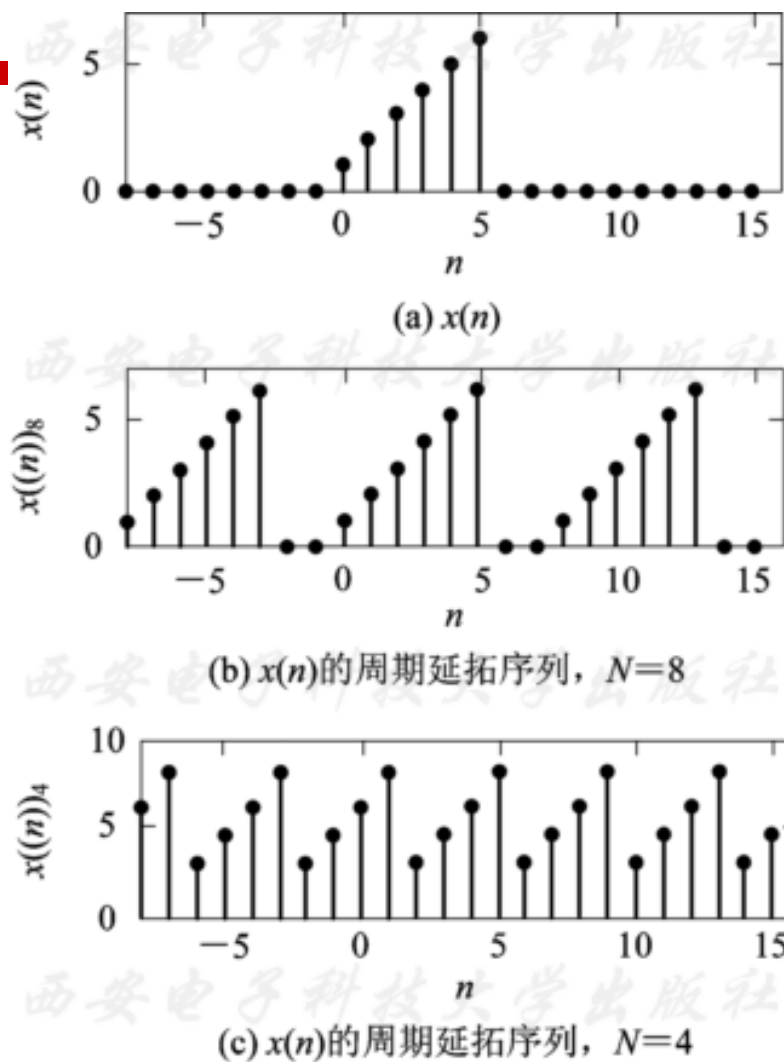
$$\rightarrow \frac{X((k + \frac{N}{2}))_N R_N(n)}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} X(n \pm LN)}$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n + mN)$$

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot R_N(n)$$

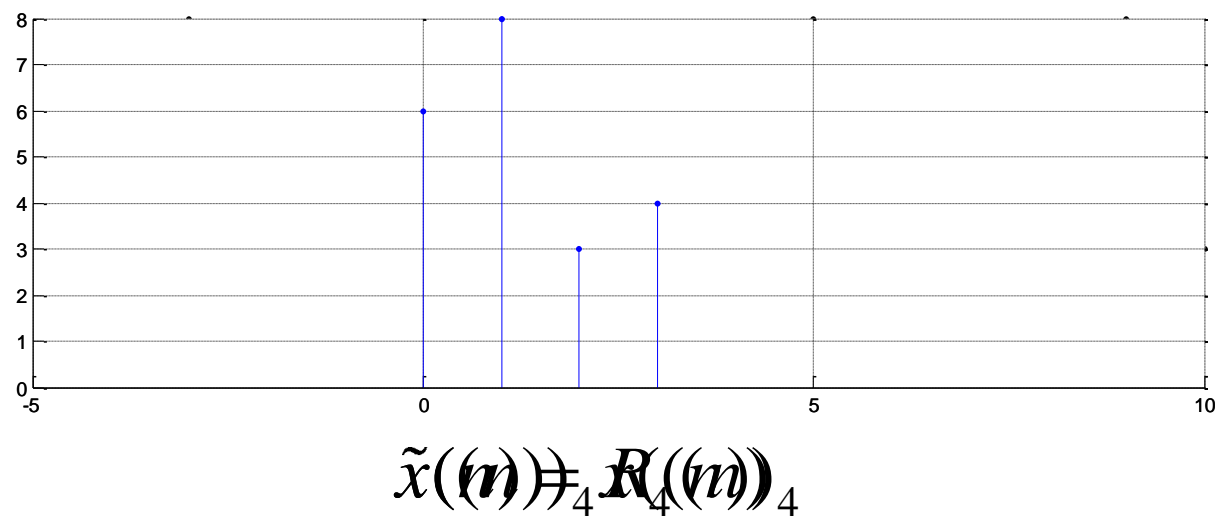
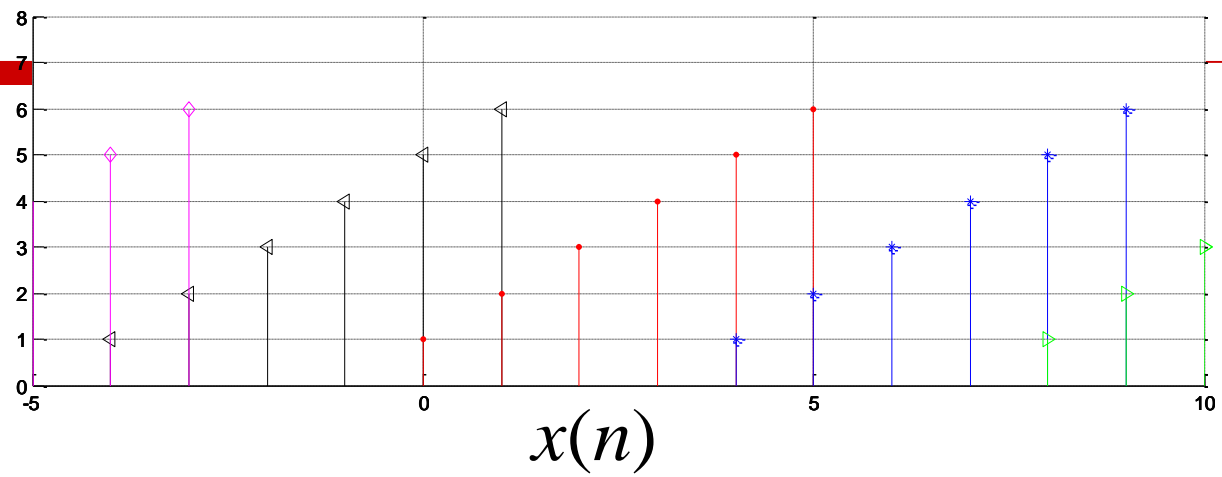
一般称周期序列  $\tilde{x}(n)$  中从  $n=0$  到  $N-1$  的第一个周期为  $\tilde{x}(n)$  的主值区间，而主值区间上的序列称为  $\tilde{x}(n)$  的主值序列。

因此  $x(n)$  与  $\tilde{x}(n)$  的上述关系可叙述为： $\tilde{x}(n)$  是  $x(n)$  的周期延拓序列， $x(n)$  是  $\tilde{x}(n)$  的主值序列。



应当说明，若 $x(n)$ 实际长度为 $M$ ，延拓周期为 $N$ ，则当 $N < M$ 时， $\tilde{x}(n)$ 仍表示以 $N$ 为周期的周期序列，周期信号在时域发生混叠。

图3.1.2  $x(n)$ 及其周期延拓序列





为了以后叙述简洁，当 $N$ 大于等于序列 $x(n)$ 的长度时，将周期序列 $\tilde{x}(n)$ 用如下形式表示：

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

式中 $x((n))_N$ 表示 $x(n)$ 以 $N$ 为周期的周期延拓序列， $((n))_N$ 表示模 $N$ 对 $n$ 求余，即如果

$$n = MN + n_1 \quad 0 \leq n_1 \leq N - 1, M \text{ 为整数}$$

则

$$((n))_N = n_1$$

例如， $N = 8$ ， $\tilde{x}(n) = x((n))_8$ ，则有  $\tilde{x}(8) = x((8))_8 = x(0)$

$$\tilde{x}(9) = x((9))_8 = x(1)$$

$$\tilde{x}(-1) = x((-1))_8 = x(7)$$

所得结果符合图3.1.2 (a) 和 (b) 所示的周期延拓规律。

归一化  $\rightarrow 0 \sim N-1$

$$-1 + 8 = 7$$

如果 $x(n)$ 的长度为 $M$ ，且  $\tilde{x}(n) = x((n))_N$ ， $N \geq M$ ，则可写出  $\tilde{x}(n)$  的离散傅里叶级数表示式

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n))_N W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \\ X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, \dots, N-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad n = 0, \dots, N-1\end{aligned}$$

可以看出  $X(k) = \tilde{X}(k) R_N(k)$ ，即 $X(k)$ 为  $\tilde{X}(k)$  的主值序列。

有限长序列 $x(n)$ 的 $N$ 点离散傅里叶变换 $X(k)$ 正好是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的离散傅里叶级数系数  $\tilde{X}(k)$  的主值序列，  
即  $X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k)$ 。

周期延拓序列频谱完全由其离散傅里叶级数系数  $\tilde{X}(k)$  确定，因此， $X(k)$ 实质上是 $x(n)$ 的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的频谱特性，这就是 $N$ 点DFT的第二种物理解释（物理意义）。

## 周期信号的傅里叶级数对

$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \tilde{x}(n) &= \text{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\end{aligned}$$

## 离散傅里叶变换

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

【例2.3.1】 设 $x(n)=R_4(n)$ ，将 $x(n)$ 以 $N=4$ 为周期进行周期延拓得到 $x((n))_4$ ，求该周期信号的傅里叶级数和傅里叶变换。

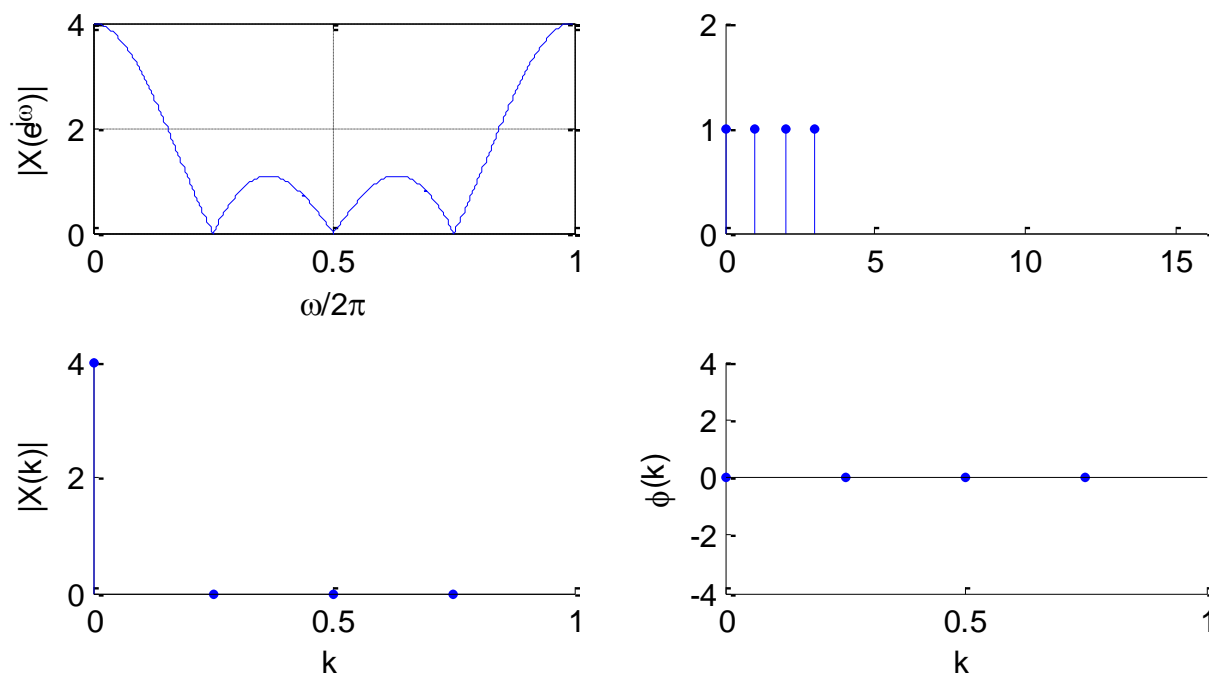
解：

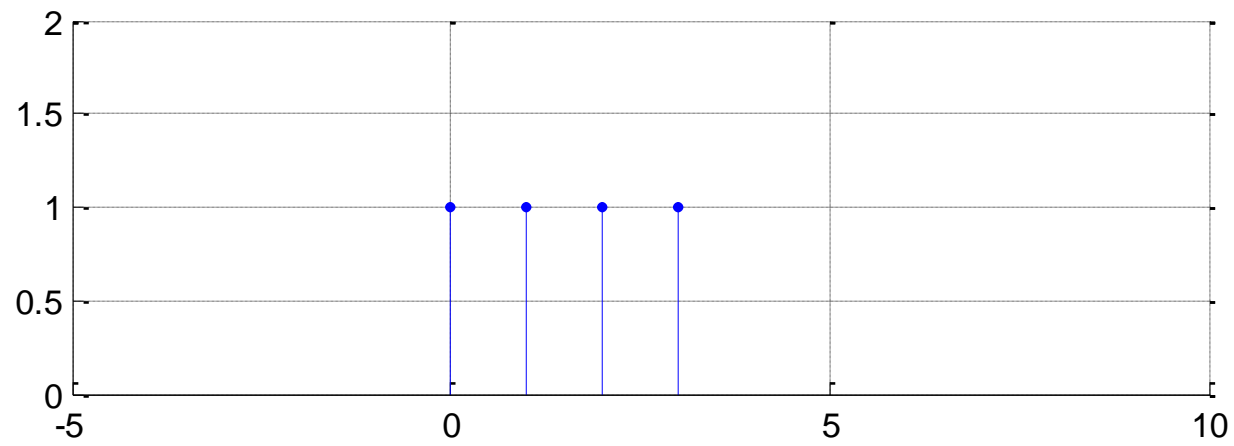
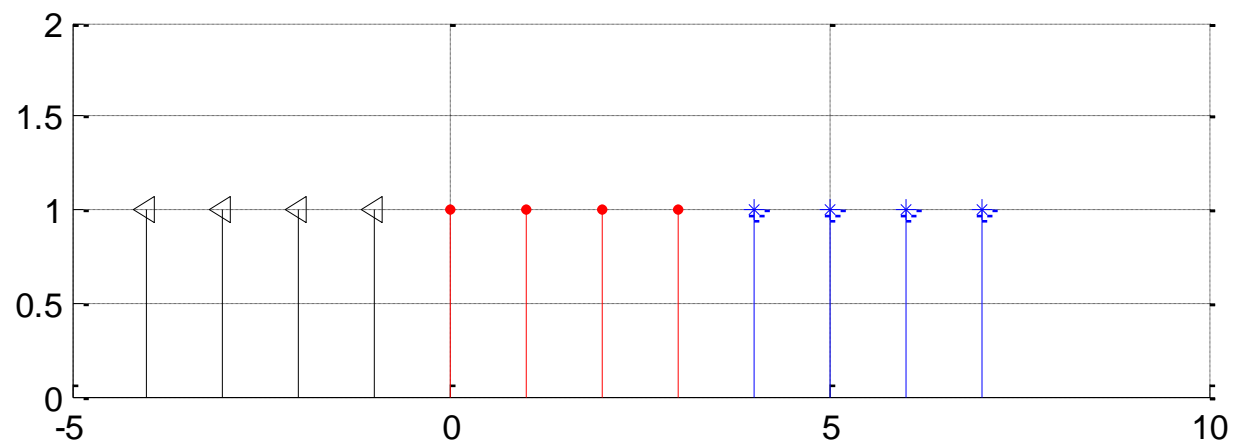
$$\begin{aligned}\tilde{X}(k) &= \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n)W_4^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{4}k}} = \begin{cases} 4 & k = 4r \\ 0 & k \neq 4r \end{cases}\end{aligned}$$

$$X(e^{j\omega}) = FT[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - 2\pi r)$$

$$\begin{aligned}X(k) &= DFT[x(n)]_4 = \sum_{n=0}^3 x(n)W_4^{kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} \\ &= \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{4}k}} = \begin{cases} 4 & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, 3 \end{cases}\end{aligned}$$

现在解释DFT  $[R_4(n)]_4 = 4\delta(k)$ 。根据DFT第二种物理解释可知，DFT  $[R_4(n)]_4$ 表示 $R_4(n)$ 以4为周期的周期延拓序列 $R_4((n))_4$ 的频谱特性，因为 $R_4((n))_4$ 是一个直流序列，只有直流成分（即零频率成分）。





### 3.1.4 用MATLAB计算序列的DFT

MATLAB提供了用快速傅里叶变换算法FFT(算法见第4章介绍)计算DFT的函数fft, 其调用格式如下:

$X_k = \text{fft}(x_n, N);$

调用参数 $x_n$ 为被变换的时域序列向量,  $N$ 是DFT变换区间长度.

当 $N$ 大于 $x_n$ 的长度时, fft函数自动在 $x_n$ 后面补零。函数返回 $x_n$ 的 $N$ 点DFT变换结果向量 $X_k$ 。

当 $N$ 小于 $x_n$ 的长度时, fft函数计算 $x_n$ 的前面 $N$ 个元素构成的 $N$ 长序列的 $N$ 点DFT, 忽略 $x_n$ 后面的元素。

**Ifft**函数计算IDFT, 其调用格式与fft函数相同。



【例3.1.2】 设 $x(n)=R_4(n)$ ,  $X(e^{j\omega})=\text{FT}[x(n)]$ 。分别计算 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间  $[0, 2\pi]$  上的16点和32点等间隔采样, 并绘制 $X(e^{j\omega})$ 采样的幅频特性图和相频特性图。

16点-DFT

解 由DFT与傅里叶变换的关系知道,  $X(e^{j\omega})$ 在频率区间  $[0, 2\pi]$  上的16点和32点等间隔采样, 分别是 $x(n)$ 的16点和32点DFT。调用fft函数求解本例的程序ep312.m如下:

---

% 例3.1.2程序ep312.m

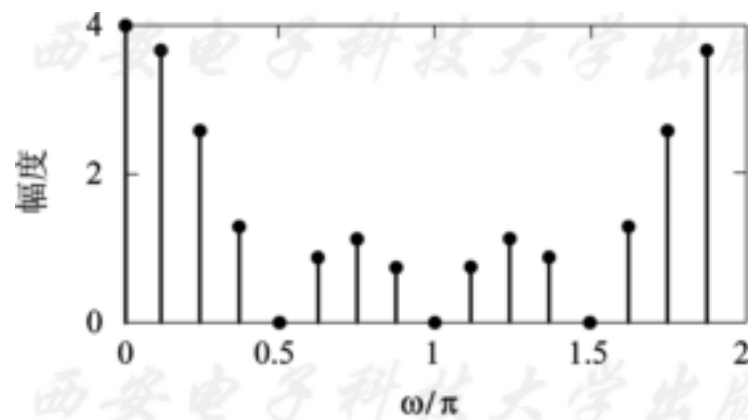
% DFT的MATLAB计算

xn= [1 1 1 1] ;            %输入时域序列向量xn=R4(n)

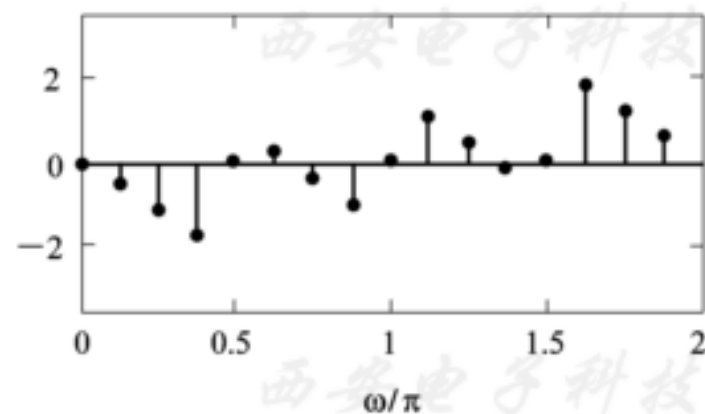
Xk16=fft(xn, 16);        %计算xn的16点DFT

Xk32=fft(xn, 32);        %计算xn的32点DFT

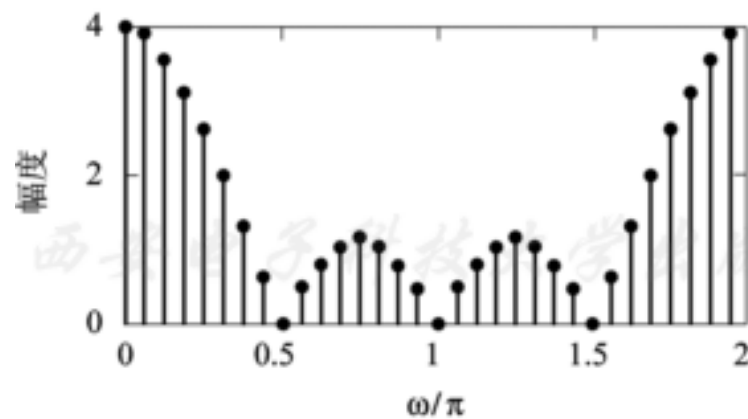
程序运行结果如图3.1.3所示。



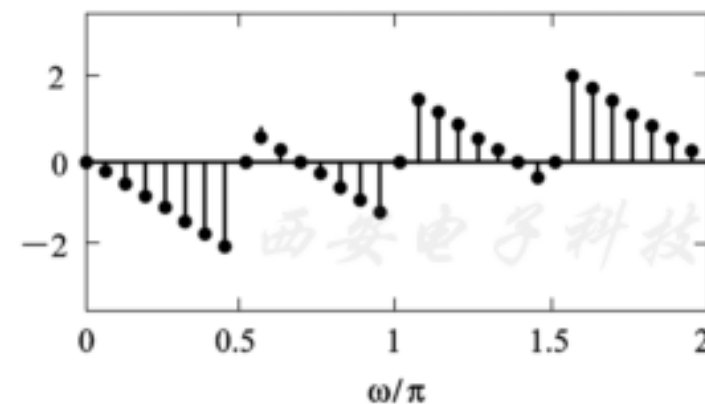
(a) 16 点 DFT 的幅频特性图



(b) 16 点 DFT 的相频特性图

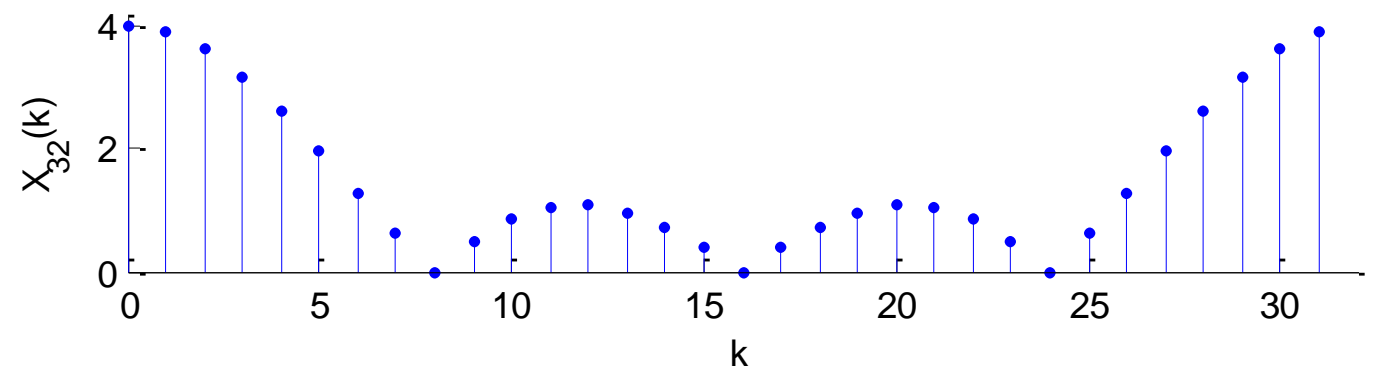
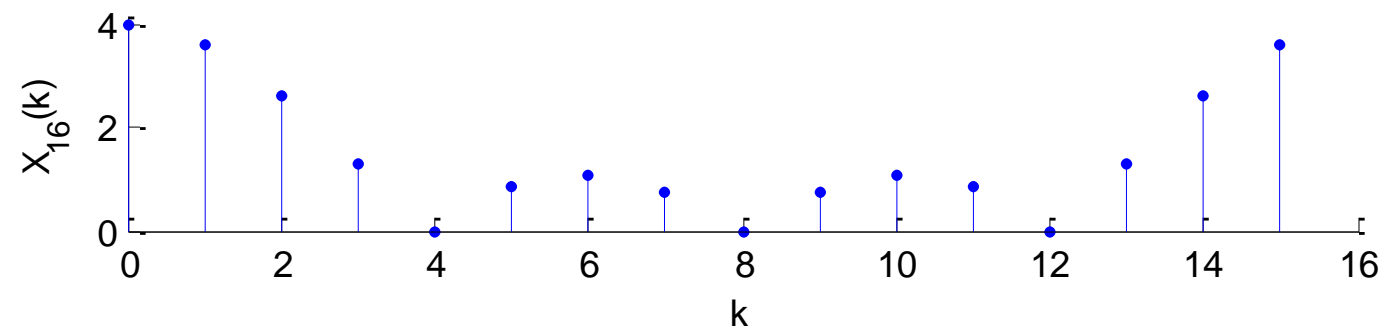
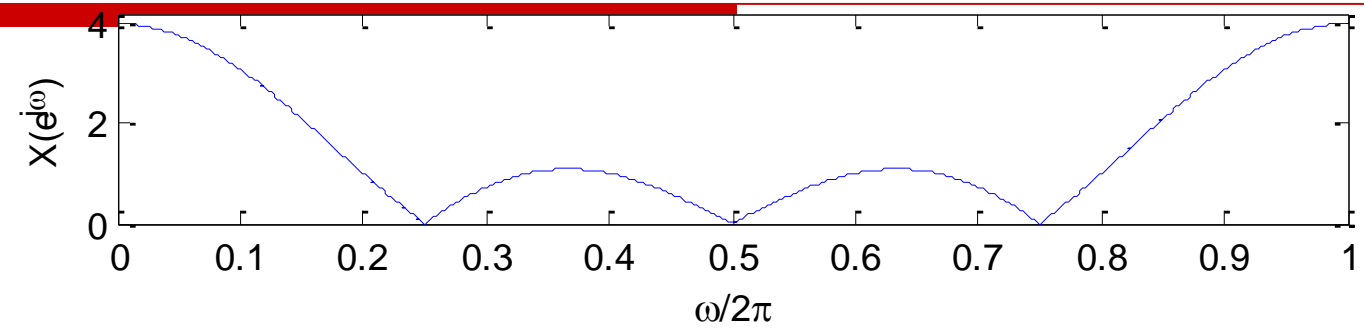


(c) 32 点 DFT 的幅频特性图



(d) 32 点 DFT 的相频特性图

图3.1.3 程序ep312.m 运行结果



## 3.2 离散傅里叶变换的基本性质

### 3.2.1 线性性质

如果 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个有限长序列，长度分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ，且

$$y(n)=ax_1(n)+bx_2(n)$$

式中， $a$ 、 $b$ 为常数，取 $N=\max [N_1, N_2]$

则 $y(n)$ 的 $N$ 点DFT为：

$$Y(k)=\text{DFT} [y(n)]_N=aX_1(k)+bX_2(k) \quad 0 \leq k \leq N-1$$

其中 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 $N$ 点DFT。

## 3.2.2 循环移位性质

### 1. 序列的循环移位

设 $x(n)$ 为有限长序列，长度为 $M$ ， $M \leq N$ ，则 $x(n)$ 的循环移位定义为

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

上式表明，将 $x(n)$ 以 $N$ 为周期进行周期延拓得到  $\tilde{x}(n) = x((n))_N$

，再将  $\tilde{x}(n)$ 左移 $m$ 得到  $\tilde{x}(n+m)$ ，最后取 $\tilde{x}(n+m)$ 的主值序列则得到有限长序列 $x(n)$ 的循环移位序列 $y(n)$ 。

$M=6, N=8, m=2$ 时,  $x(n)$ 及其循环移位过程如图所示。

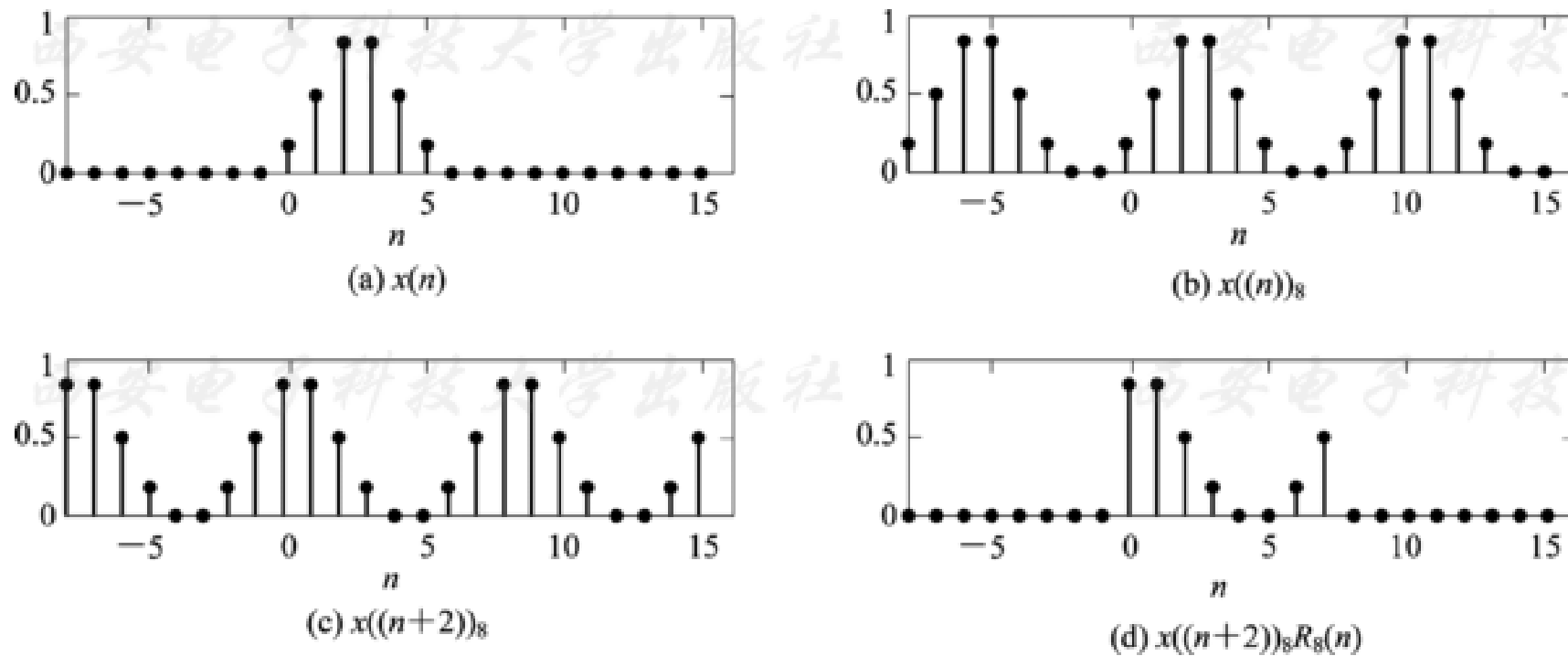


图3.2.1  $x(n)$ 及其循环移位过程

---

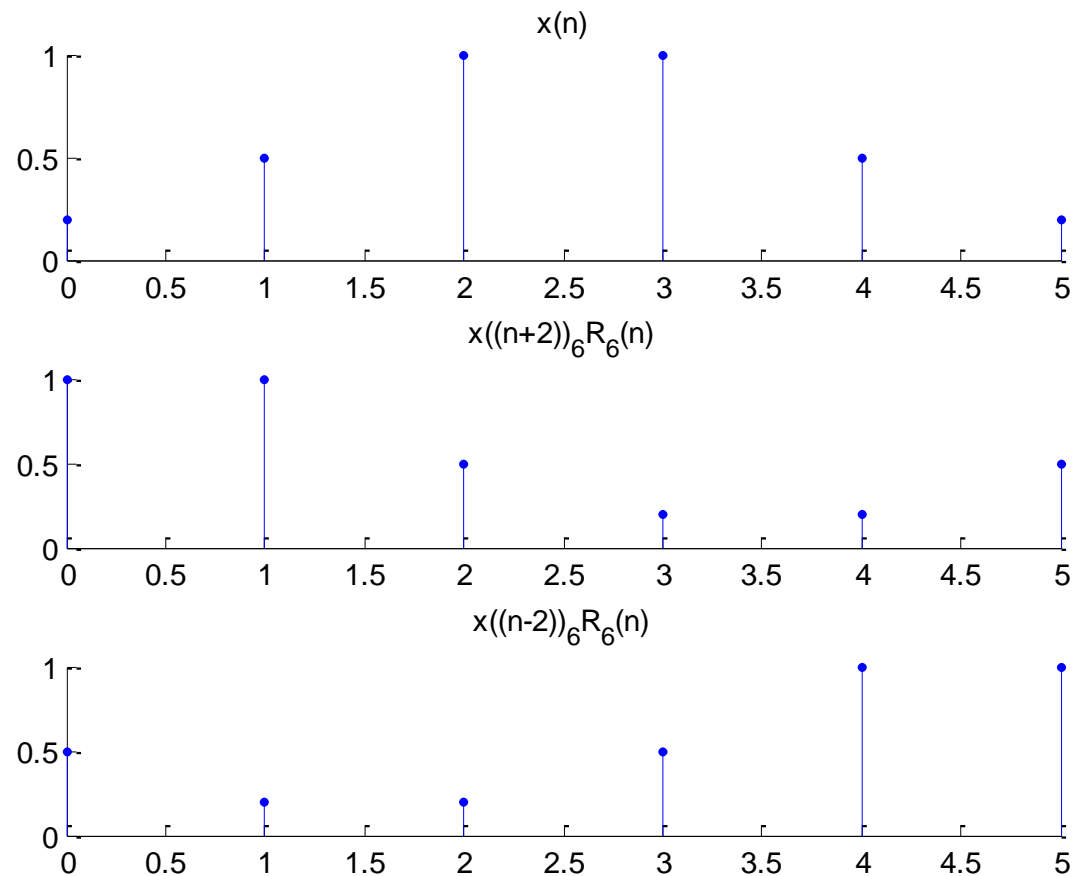
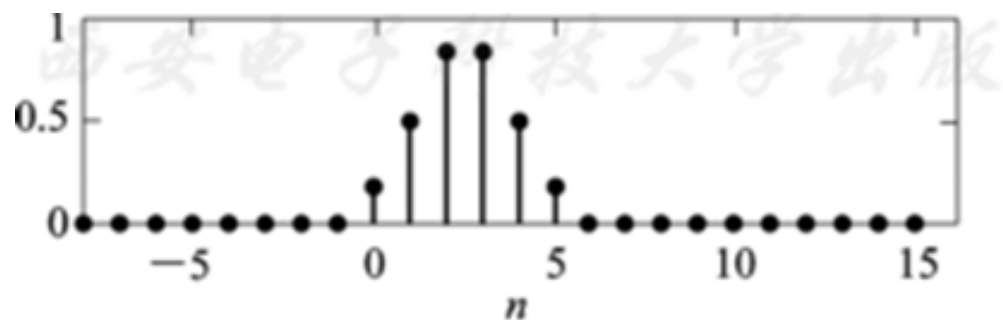
显然， $y(n)$ 是长度为 $N$ 的有限长序列。循环移位的实质是将 $x(n)$ 左移或右移 $m$ 位，而移出主值区( $0 \leq n \leq N-1$ )的序列值又依次从右侧或左侧进入主值区。“循环移位”就是由此得名的。

由循环移位的定义可知，对同一序列 $x(n)$ 和相同的位移 $m$ ，当延拓周期 $N$ 不同时， $y(n)=x((n+m))_N R_n(n)$ 则不同。



已知 $x(n]$ 的波形如图所示，画出 $N = M = 6$ ， $m=2$ 时， $x(n]$ 的循环移位序列

$y(n)=x((n+2))_NR_N(n]$ 和 $y(n)=x((n-2))_NR_N(n]$ 波形图.



## 2. 时域循环移位定理

---

设 $x(n)$ 是长度为 $M$  ( $M \leq N$ ) 的有限长序列,  $y(n)$ 为 $x(n)$ 的循环移位, 即

$$y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)]_N = W_N^{-km} X(k)$$

其中

$$X(k) = \text{DFT} [x(n)]_N \quad 0 \leq k \leq N-1$$

# 证明

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)]_N = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn}$$

令  $n+m=n'$ ，则有

$$Y(k) = \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{k(n'-m)} = W_N^{-km} \sum_{n'=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{kn'}$$

由于上式中求和项  $x((n'))_N W_N^{kn'}$  以  $N$  为周期，因此对其在任一周期上的求和结果相同。将上式的求和区间改在主值区，则得

$$Y(k) = W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n'))_N W_N^{kn'} = W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{kn'} = W_N^{-km} X(k)$$

### 3. 频域循环移位定理

---

如果

$$X(k)=\text{DFT} [x(n)]_N \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$Y(k)=X((k+l))_N R_N(k)$$

则

$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]_N = W_N^{nl} x(n)$$

上式的证明方法与时域循环移位定理类似，直接对  $Y(k)=X((k+l))_N R_N(k)$  进行IDFT即得证。

### 3.2.3 循环卷积定理

#### 1. 两个有限长序列的循环卷积

设序列 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的长度分别为 $N$ 和 $M$ 。 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的 $L$ 点循环卷积定义为

$$y_c(n) = \left[ \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L \right] R_L(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n) \\ = h(n) \otimes x(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) \quad L \geq \max[N, M]$$

$x((n-m))_L$ 是以 $L$ 为周期的周期信号， $n$ 和 $m$ 的变化区间均是 $[0, L-1]$ ，因此直接计算该式比较麻烦。

循环卷积矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} y(0)_c \\ y(1)_c \\ y(2)_c \\ \vdots \\ y(L-1)_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) & x(L-1) & x(L-2) & \cdots & x(1) \\ x(1) & x(0) & x(L-1) & \cdots & x(2) \\ x(2) & x(1) & x(0) & \cdots & x(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(L-1) & x(L-2) & x(L-3) & \cdots & x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ h(2) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}$$

按照上式，可以在计算机上用矩阵相乘的方法计算两个序列的循环卷积，这里关键是先形成循环卷积矩阵。上式中如果 $h(n)$ 的长度 $N < L$ ，则需要先在 $h(n)$ 末尾补 $L - N$ 个零。

【例3.2.1】 计算下面给出的两个长度为4的序列 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的4点和8点循环卷积。

$$h(n) = \{h(0), h(1), h(2), h(3)\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x(n) = \{x(0), x(1), x(2), x(3)\} = \{1, 1, 1, 1\}$$

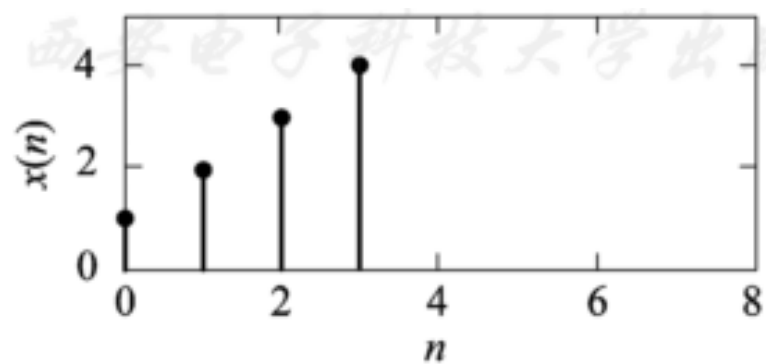
解 写出 $h(n)$ 与 $x(n)$ 的4点循环卷积矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

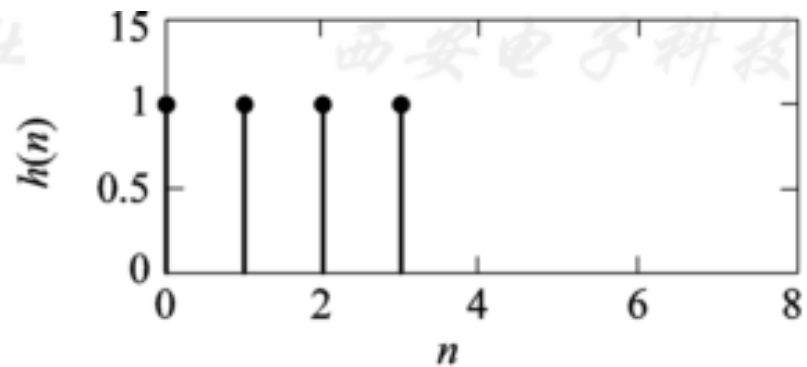
$h(n)$ 与 $x(n)$ 的8点循环卷积矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y_c(0) \\ y_c(1) \\ y_c(2) \\ y_c(3) \\ y_c(4) \\ y_c(5) \\ y_c(6) \\ y_c(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 10 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

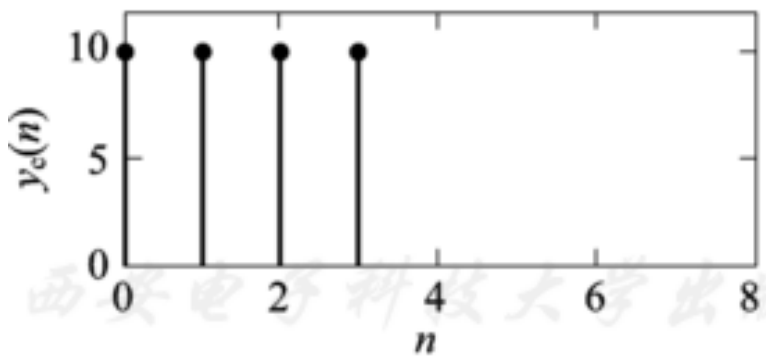




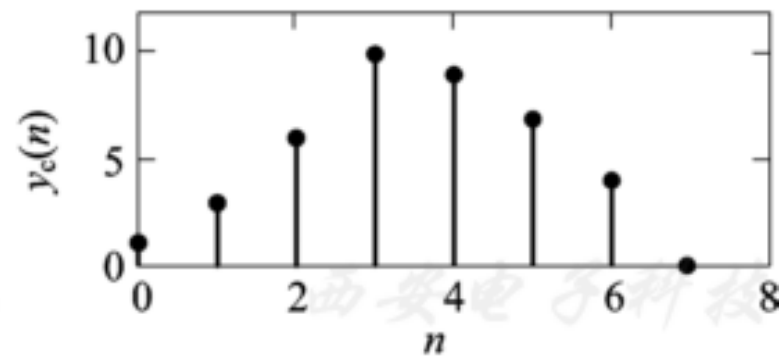
(a)  $x(n)$



(b)  $h(n)$



(c) 4 点循环卷积



(d) 8 点循环卷积

图3.2.2 序列及其循环卷积波形

## 2. 循环卷积定理

有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的长度分别为 $N_1$ 和 $N_2$ ,  $N = \max [N_1, N_2]$ ,  $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 $N$ 点循环卷积为

$$x(n) = x_2(n) \circledN x_1(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N R_N(n)$$

则 $x(n)$ 的 $N$ 点DFT为

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{DFT}[x(n)]_N = X_1(k) \cdot X_2(k)$$

其中

$$X_1(k) = \mathbf{DFT}[x_1(n)]_N, X_2(k) = \mathbf{DFT}[x_2(n)]_N$$

证明 直接对(3.2.8)式两边进行DFT，则有

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)]_N \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N R_N(n) \right] W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \sum_{n=0}^{N-1} x_2((n-m))_N W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} X_2(k) \\ &= \left[ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) W_N^{km} \right] X_2(k) \\ &= X_1(k) X_2(k) \end{aligned}$$

由于  $X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_1(k)X_2(k) = X_2(k)X_1(k)$  ，  
因此

---

即循环卷积亦满足交换律。

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x_1(n) \circledast x_2(n) = x_2(n) \circledast x_1(n)$$

同理可以证明频域循环卷积定理：

如果  $x(n) = x_1(n)x_2(n)$ ， 则

$$\begin{aligned} X(k) &= \text{DFT}[x(n)]_N = \frac{1}{N} X_1(k) \circledN X_2(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N R_N(k) \end{aligned}$$

### 3.2.4 复共轭序列的DFT

设 $x^*(n)$ 是 $x(n)$ 的复共轭序列，长度为 $N$ ， $X(k)=\text{DFT}[x(n)]_N$ ，

则  $\text{DFT}[x^*(n)]_N = X^*(N-k) \quad 0 \leq k \leq N-1$

且 $X(N)=X(0)$ 。

证明：

$$\begin{aligned}\text{DFT}[x^*(n)]_N &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) W_N^{-(N-k)n} \\ &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(N-k)n} \right]^* = X^*(N-k)\end{aligned}$$

用同样的方法可以证明

---

$$\text{DFT}[x^*(N-n)]_N = X^*(k)$$

$$\begin{aligned} x^*(N-n) &= \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} X(k) W_N^{-k(N-n)} \right]^* = \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{k(N-n)} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{-kn} \right] = \text{IDFT}[X^*(k)]_N \end{aligned}$$

### 3.2.5 DFT的共轭对称性

---

#### 1. 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

为了区别于傅里叶变换中所定义的共轭对称（或共轭反对称）序列，下面用 $x_{\text{ep}}(n)$ 和 $x_{\text{op}}(n)$ 分别表示有限长共轭对称序列和共轭反对称序列，则二者满足如下关系式：

$$x_{\text{ep}}(n) = x_{\text{ep}}^*(N - n) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

$$x_{\text{op}}(n) = -x_{\text{op}}^*(N - n) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

当 $N$ 为偶数时，将上式中的 $n$ 换成 $N/2 - n$ ，可得到：

$$x_{\text{ep}}\left(\frac{N}{2} - n\right) = x_{\text{ep}}^*\left(\frac{N}{2} + n\right) \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

$$x_{\text{op}}\left(\frac{N}{2} - n\right) = -x_{\text{op}}^*\left(\frac{N}{2} + n\right) \quad 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$$

上式更清楚地说明了有限长序列共轭对称序列是关于 $n=N/2$ 点对称。

任何有限长序列 $x(n)$ 都可以表示成其共轭对称分量和共轭反对称分量之和，  
即

$$x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n) \quad 0 \leq n \leq N - 1$$



将上式中的 $n$ 换成 $N-n$ ，并取复共轭，得到：

---

$$\begin{aligned}x^*(N-n) &= x_{\text{ep}}^*(N-n) + x_{\text{op}}^*(N-n) \\ &= x_{\text{ep}}(n) - x_{\text{op}}(n)\end{aligned}$$

则可得

$$\begin{aligned}x_{\text{ep}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)] \\ x_{\text{op}}(n) &= \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]\end{aligned}$$

## 2. DFT的共轭对称性

(1) 如果将 $x(n)$ 表示为

$$x(n) = x_r(n) + jx_i(n)$$

其中

$$x_r(n) = \text{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

那么

$$jx_i(n) = j\text{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

$$\text{DFT}[x_r(n)] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n) + x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{\text{ep}}(k)$$

$$\text{DFT}[jx_i(n)] = \frac{1}{2}\text{DFT}[x(n) - x^*(n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = X_{\text{op}}(k)$$

---

由DFT的线性性质即可得

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{DFT}[\mathbf{x}(n)] = \mathbf{X}_{\text{ep}}(k) + \mathbf{X}_{\text{op}}(k)$$

其中， $\mathbf{X}_{\text{op}}(k) = \mathbf{DFT}[x_r(n)]$  是 $\mathbf{X}(k)$ 的共轭对称分量，  
 $\mathbf{X}_{\text{op}}(k) = \mathbf{DFT}[jx_i(n)]$  是 $\mathbf{X}(k)$ 的共轭反对称分量。

$$\mathbf{X}_{\text{ep}}(k) = \frac{1}{2}[\mathbf{X}(k) + \mathbf{X}^*(N - k)]$$

$$\mathbf{X}_{\text{op}}(k) = \frac{1}{2}[\mathbf{X}(k) - \mathbf{X}^*(N - k)]$$

(2) 如果将 $x(n)$ 表示为

$$x(n) = x_{\text{ep}}(n) + x_{\text{op}}(n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

其中,  $x_{\text{ep}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(N-n)]$  是 $x(n)$ 的共轭对称分量,

$x_{\text{op}}(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)]$  是 $x(n)$ 的共轭反对称分量, 那么

$$\text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] = \frac{1}{2} \text{DFT}[x(n) + x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(k)] = \text{Re}[X(k)]$$

$$\text{DFT}[x_{\text{op}}(n)] = \frac{1}{2} \text{DFT}[x(n) - x^*(N-n)] = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(k)] = j \text{Im}[X(k)]$$

---

因此

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{DFT}[x(n)] = X_{\mathrm{R}}(k) + \mathbf{j}X_{\mathrm{I}}(k)$$

其中

$$X_{\mathrm{R}}(k) = \mathbf{Re}[X(k)] = \mathbf{DFT}[x_{\mathrm{ep}}(n)]$$

$$\mathbf{j}X_{\mathrm{I}}(k) = \mathbf{jIm}[X(k)] = \mathbf{DFT}[x_{\mathrm{op}}(n)]$$

---

综上所述，可总结出DFT的共轭对称性质：

- 如果序列 $x(n)$ 的DFT为 $X(k)$ ，则 $x(n)$ 的实部和虚部（包括j）的DFT分别为 $X(k)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量；
- 而 $x(n)$ 的共轭对称分量和共轭反对称分量的DFT分别为 $X(k)$ 的实部和虚部乘以j。

设 $x(n)$ 是长度为 $N$ 的实序列，且 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]_N$ ，则 $X(k)$ 满足如下对称性：

---

(1)  $X(k)$ 共轭对称，即

$$X(k)=X^*(N-k) \quad k=0, 1, \cdots, N-1$$

(2) 如果 $x(n)$ 是偶对称序列，即 $x(n)=x(N-n)$ ，则 $X(k)$ 实偶对称，即

$$X(k)=X(N-k)$$

(3) 如果是奇对称序列，即 $x(n)=-x(N-n)$ ，则 $X(k)$ 纯虚奇对称，即

$$X(k)=-X(N-k)$$

实际中经常需要对实序列进行DFT，利用上述对称性质，可减少DFT的运算量，提高运算效率。例如，计算实序列的 $N$ 点DFT时，当 $N$ =偶数时，只需计算 $X(k)$ 的前面 $N/2+1$ 点，而 $N$ =奇数时，只需计算 $X(k)$ 的前面 $(N+1)/2$ 点，其他点由对称性即可求得。

例如， $X(N-1)=X^*(1)$ ,  $X(N-2)=X^*(2)$ ,  $\cdots$ 这样可以减少近一半运算量。

**【例3.2.2】** 利用DFT的共轭对称性，设计一种高效算法，通过计算一个 $N$ 点DFT，就可以计算出两个实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 $N$ 点DFT。

解 构造新序列 $x(n)=x_1(n)+jx_2(n)$ ，对 $x(n)$ 进行DFT，得到：



$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = X_{\text{ep}}(k) + X_{\text{op}}(k)$$

---

可得：

$$\begin{aligned} X_{\text{ep}}(k) &= \text{DFT}[x_1(n)] = X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] \\ X_{\text{op}}(k) &= \text{DFT}[\mathbf{j}x_2(n)] = jX_2(k) = \frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] \end{aligned}$$

所以，由 $X(k)$ 可以求得两个实序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 $N$ 点DFT：

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)]$$

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)] = -\mathbf{j}\frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)]$$

## 3.3 频率域采样

---

时域采样定理告诉我们，在一定条件下，可以由时域离散采样信号恢复原来的连续信号。

那么能不能也由频域离散采样恢复原来的信号（或原连续频率函数）？其条件是什么？内插公式又是什么形式？本节就上述问题进行讨论。

## DFT与Z变换的关系

表明序列 $x(n)$ 的 $N$ 点DFT是 $x(n)$ 的Z变换在单位圆上的 $N$ 点等间隔采样。

## DFT与傅里叶变换的关系

说明 $X(k)$ 为 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在区间  $[0, 2\pi]$  上的 $N$ 点等间隔采样。

设任意序列 $x(n)$ 的Z变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

且 $X(z)$ 的收敛域包含单位圆（即 $x(n)$ 存在傅里叶变换）。在单位圆上对 $X(z)$ 等间隔采样 $N$ 点, 得到:

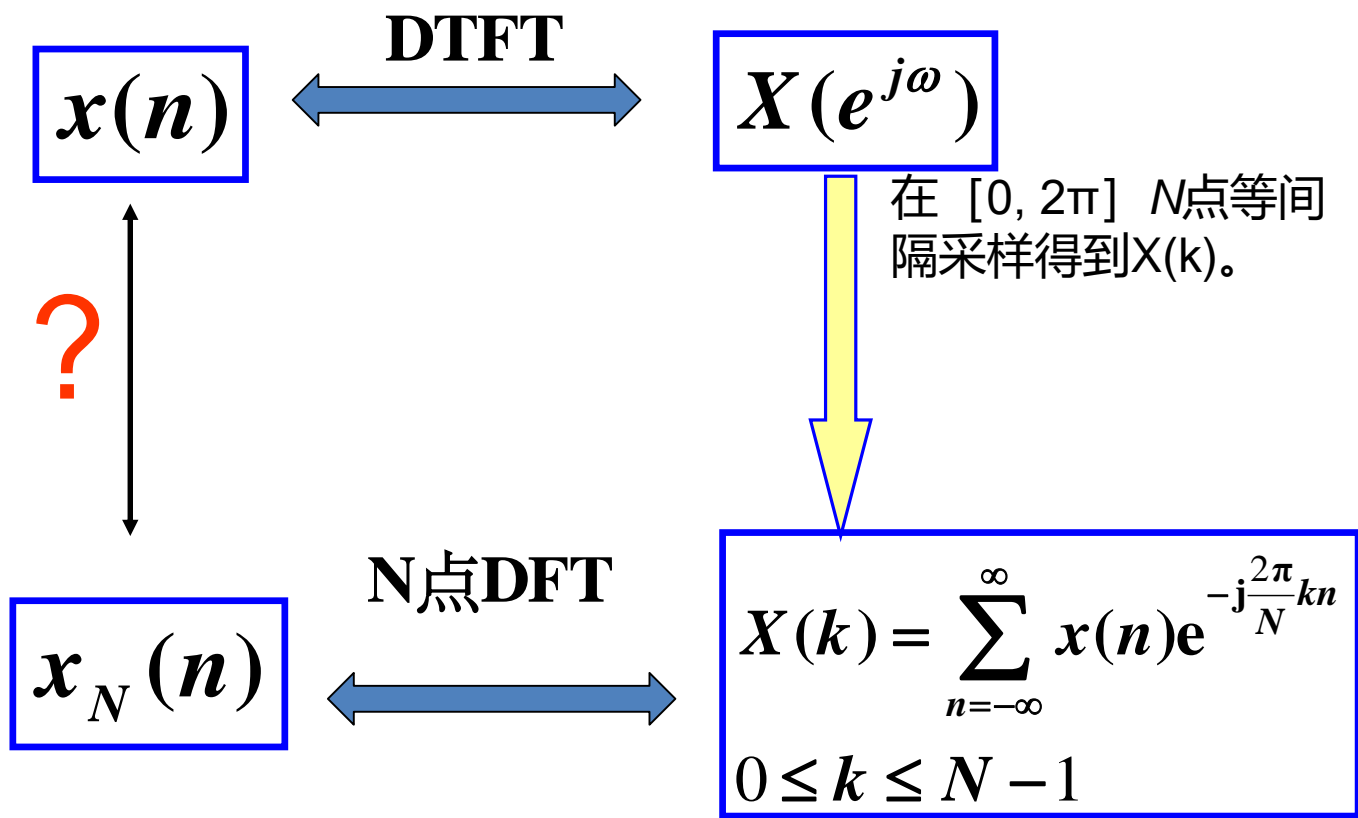
$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)W_N^{kn} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

显然，上式也表示在区间  $[0, 2\pi]$  上对  $x(n)$  的傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$  的  $N$  点等间隔采样。

若将  $X(k)$  看做长度为  $N$  的有限长序列  $x_N(n)$  的 DFT，即

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)], \quad 0 \leq n \leq N-1$$

序列  $x_N(n)$  与原序列  $x(n)$  之间有何种关系？



$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{km} \right] W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-kn} W_N^{km}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n + iN) \quad m = n + iN$$

$$= \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n + iN) \right] R_N(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(m-n)} &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{-j2\pi k(m-n)}{N}} \\ &= \begin{cases} 1 & m = n + iN \\ 0 & m \neq n + iN \end{cases} \end{aligned}$$

上式说明， $X(z)$ 在单位圆上的 $N$ 点等间隔采样 $X(k)$ 的 $N$ 点IDFT是原序列 $x(n)$ 以 $N$ 为周期的周期延拓序列的主值序列。

---

频域采样定理：

如果序列 $x(n)$ 的长度为 $M$ ，则只有当频域采样点数 $N \geq M$ 时，才有

$$x_N(n) = \text{IDFT} [X(k)] = x(n)$$

即可由频域采样 $X(k)$ 恢复原序列 $x(n)$ ，否则产生时域混叠现象。

满足频域采样定理时，频域采样序列 $X(k)$ 的 $N$ 点IDFT是原序列 $x(n)$ ，所以必然可以由 $X(k)$ 恢复 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 。

下面推导用频域采样 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 的内插公式和内插函数。

设序列 $x(n)$ 长度为 $M$ ，在频域 $[0, 2\pi]$ 上等间隔采样 $N$ 点， $N \geq M$ ，得到 $X(k)$  则有

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n}$$

满足频域采样定理： $N \geq M$

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}$$



将上式代入 $X(z)$ 的表示式中，得到：

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-kn} z^{-n}$$

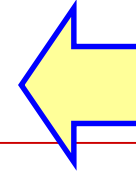
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$
$$W_N^{-kN} = 1$$

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi_k(z), \quad \varphi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

上式称为用 $X(k)$ 表示 $X(z)$ 的内插公式， $\varphi_k(z)$ 称为内插函数。

$$X(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - W_N^{-kN} z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$



$$z = e^{j\omega}$$

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

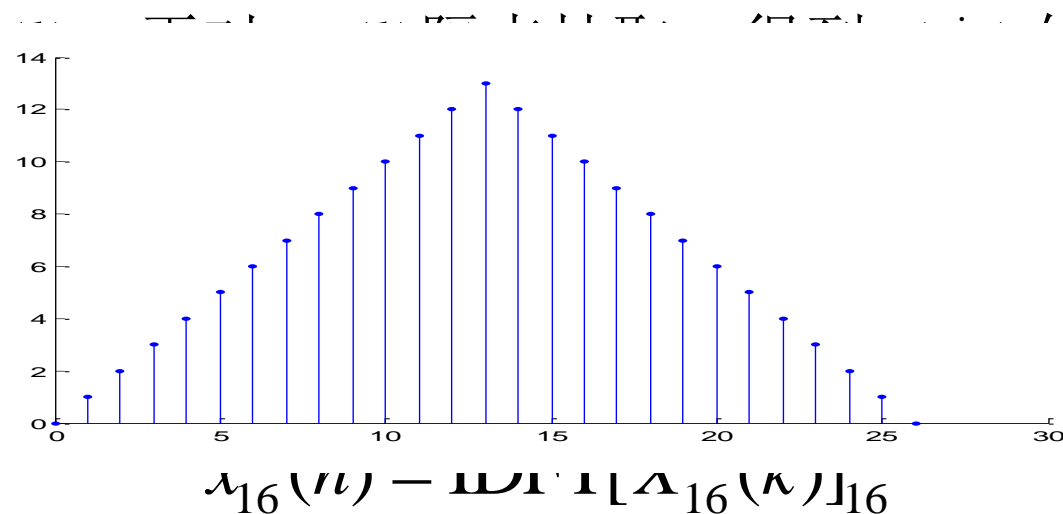
$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}kN} e^{-j\omega N}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} e^{-j\omega}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \frac{1 - e^{-jN(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}}{1 - e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \frac{(e^{j\frac{N(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}} - e^{-j\frac{N(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}}) e^{-j\frac{N(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}}}{(e^{j\frac{(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}} - e^{-j\frac{(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}}) e^{-j\frac{(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k) \frac{\sin\left(\frac{N(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}\right) e^{-j\frac{(N-1)(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}}}{\sin\left(\frac{(\omega - \frac{2\pi}{N}k)}{2}\right)}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \varphi(\omega - \frac{2\pi}{N}k), \quad \varphi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

【例3.3.1】 长度为26的三角形序列 $x(n)$ 如图3.3.1(a)所示。编写MATLAB程序验证频域采样理论。

解 解题思想： 先计算 $x(n)$ 的32点DFT，得到其频谱函数 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间  $[0, 2\pi]$  上等间隔32点采样  
 上间隔16点采样 $X_{16}(k)$



绘制 $x_{16}(n)$ 和 $x_{32}(n)$ 波形图验证频域采样理论  
 $x_{32}(n) = \text{IDFT}[X_{32}(k)]_{32}$

MATLAB求解程序ep331.m如下：

---

```
M=26; N=32; n=1:M;
```

```
xa=0:M/2;  xb= ceil(M/2)-1:-1:0;  xn= [ xa, xb ] ;
```

```
           %产生M长三角波序列x(n)
```

```
Xk=fft(xn, 512);    %512点FFT [x(n)]
```

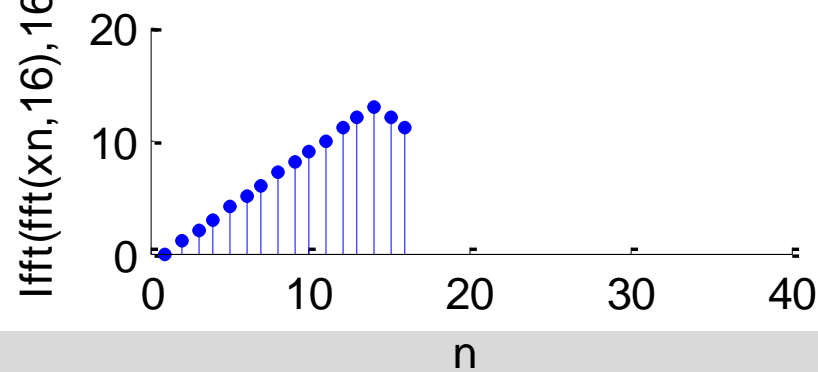
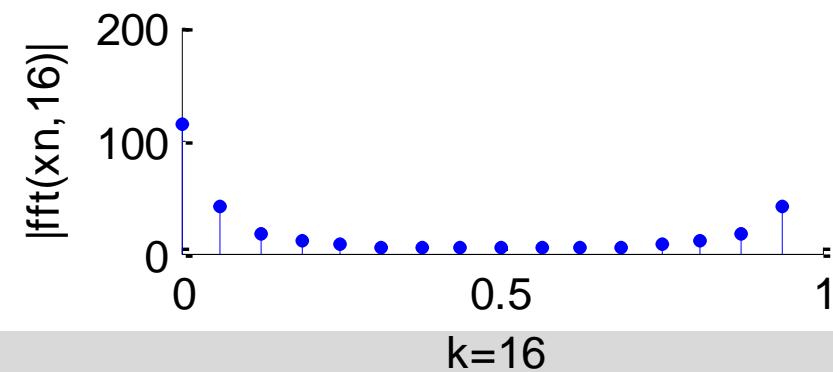
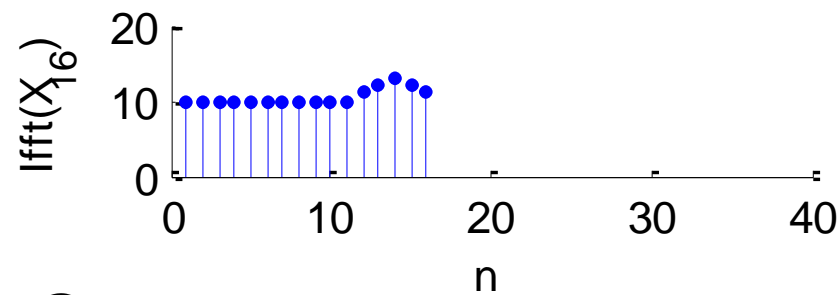
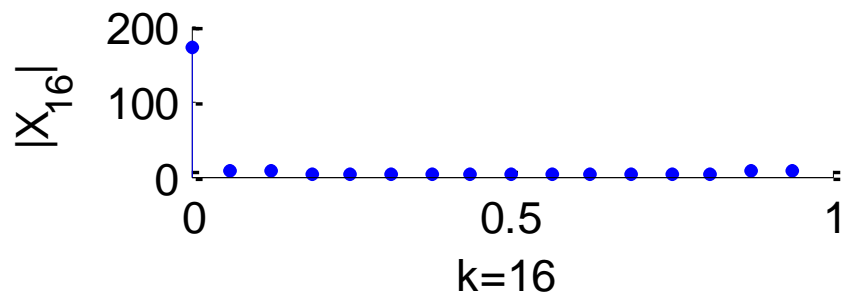
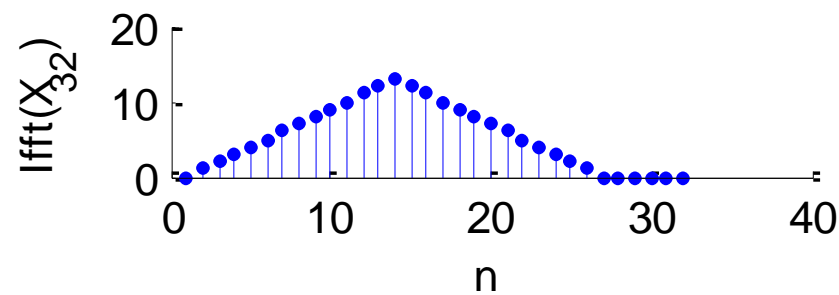
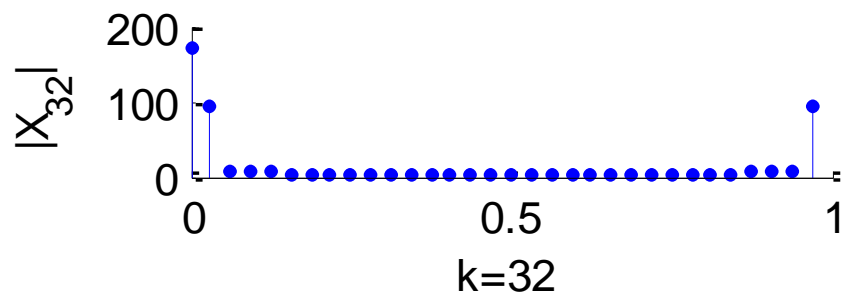
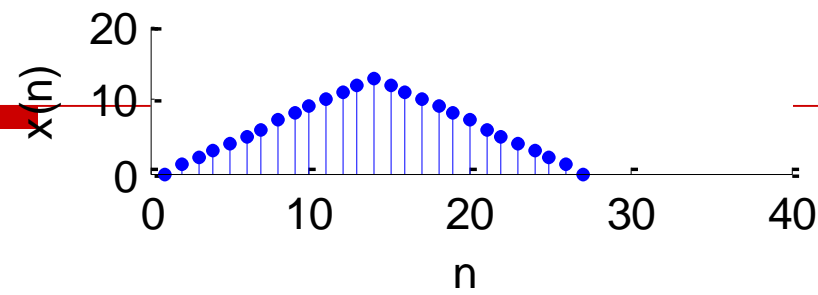
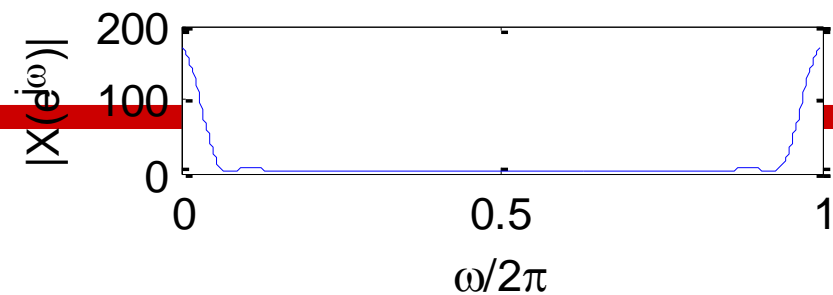
```
X32k=fft(xn, 32);   %32点FFT [x(n)]
```

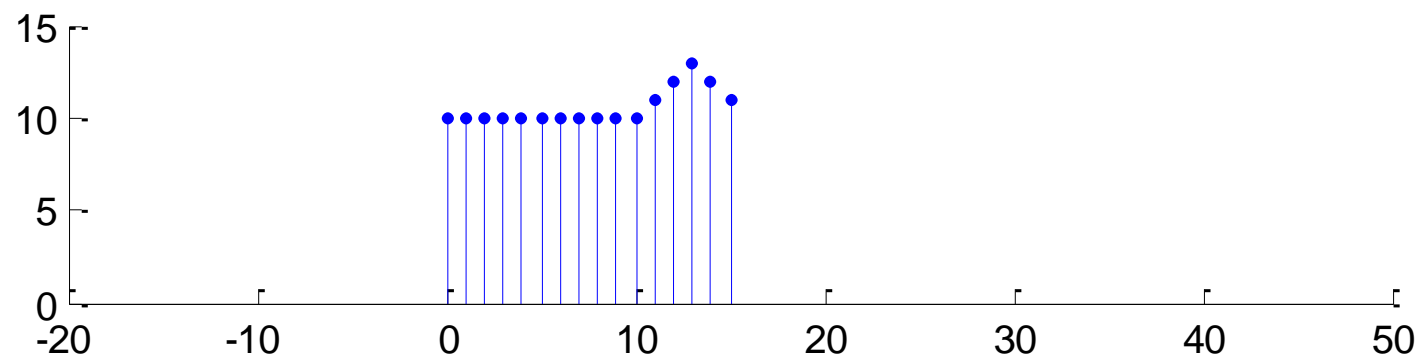
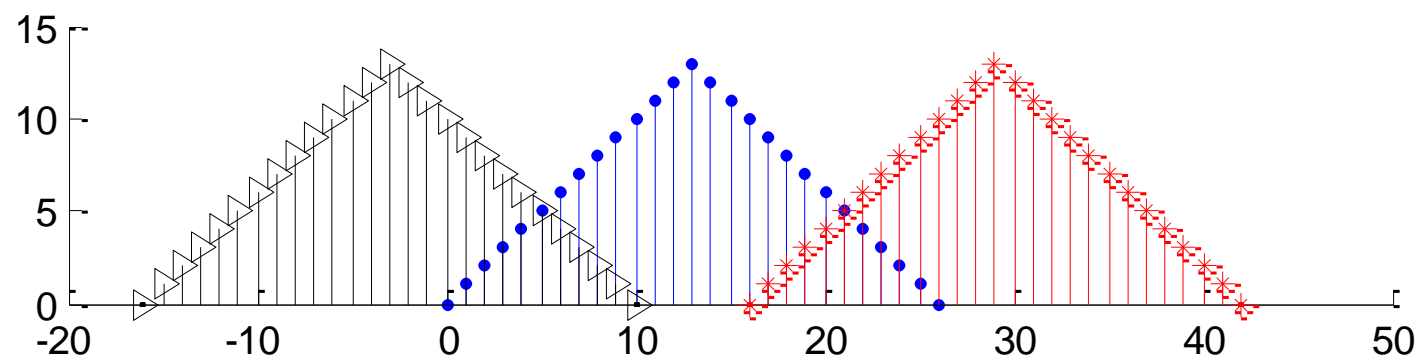
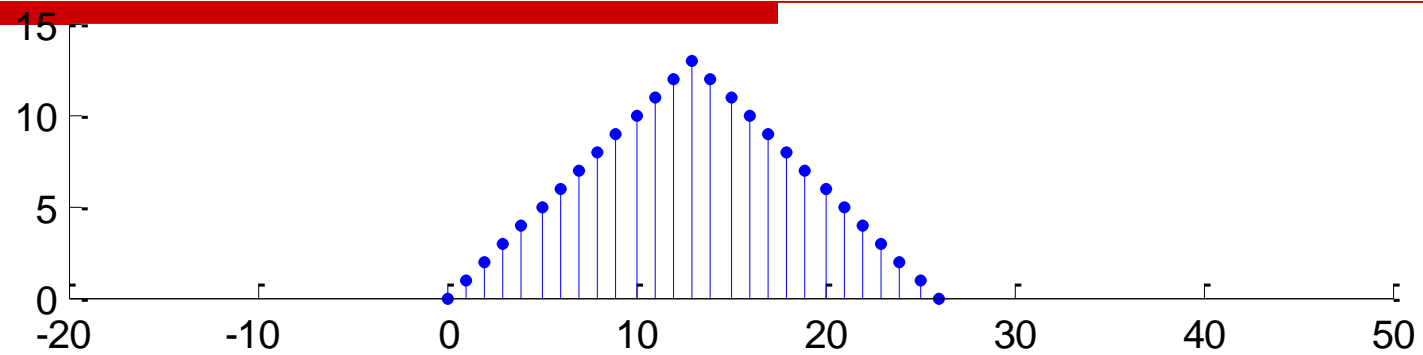
```
x32n=ifft(X32k);    %32点IFFT [X32(k)] 得到x32(n)
```

```
X16k=X32k(1:2:N);   %隔点抽取X32k得到X16(k)
```

```
x16n=ifft(X16k, N/2); %16点IFFT [X16(k)] 得到x16(n)
```

以下绘图部分省略。





## 3.4 DFT的应用举例

### 3.4.1 用DFT计算线性卷积

用DFT计算循环卷积很简单。设 $h(n)$ 和 $x(n)$ 的长度分别为 $N$ 和 $M$ , 其 $L$ 点循环卷积为

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

且

$$\left. \begin{aligned} H(k) &= \text{DFT}[h(n)]_L \\ X(k) &= \text{DFT}[x(n)]_L \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq k \leq L-1$$

---

则由DFT的时域循环卷积定理有

$$Y_c(k) = \text{DFT}[y_c(n)]_L = H(k)X(k) \quad 0 \leq k \leq L-1$$

由此可见，循环卷积既可以在时域直接计算，也可以按照图3.4.1所示的计算框图在频域计算。由于DFT有快速算法，当 $L$ 很大时，在频域计算循环卷积的速度快得多，因而常用DFT(FFT)计算循环卷积。



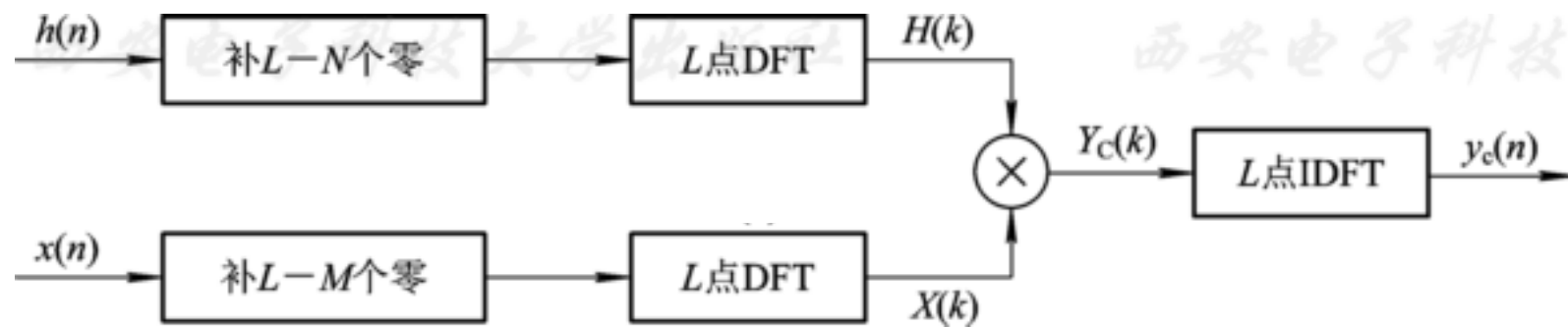


图3.4.1 用DFT计算循环卷积的原理框图

假设 $h(n)$ 和 $x(n)$ 都是有限长序列，长度分别是 $N$ 和 $M$ 。它们的线性卷积和循环卷积分别表示如下：

$$y_l(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

$$y_c(n) = h(n) \textcircled{L} x(n) = \sum_{m=0}^{L-1} h(m)x((n-m))_L R_L(n)$$

其中

$$L \geq \max[N, M], x((n))_L = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iL)$$

所以

---

$$\begin{aligned}y_c(n) &= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n-m+iL) R_L(n) \\&= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n+iL-m) R_L(n)\end{aligned}$$

可以看出，上式中

$$\sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n+iL-m) = y_l(n+iL)$$

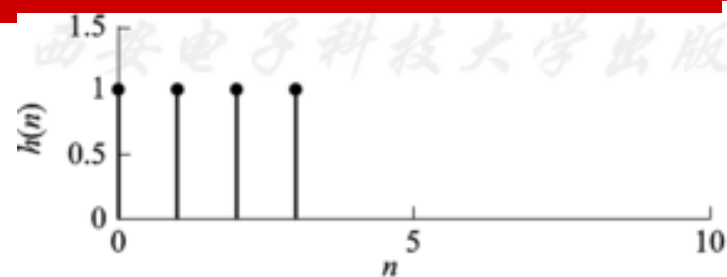
即

$$y_c(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y_l(n+iL) R_L(n)$$

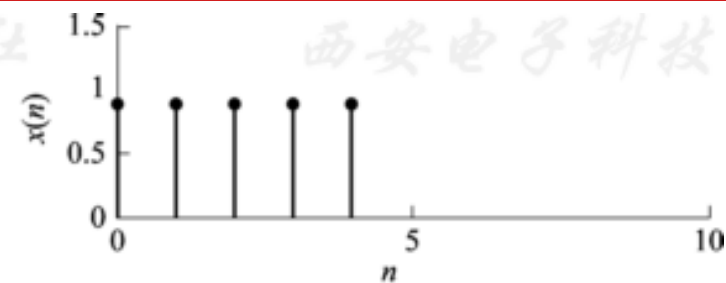
---

$y_l(n)$ 长度为 $N+M-1$ ，因此只有当循环卷积长度 $L \geq N+M-1$ 时， $y_l(n)$ 以 $L$ 为周期进行周期延拓时才无时域混叠现象。

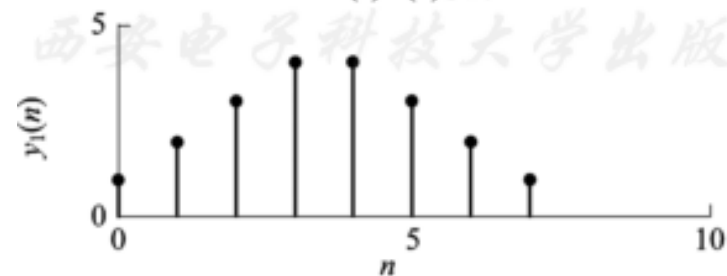
此时取其主值序列显然满足 $y_c(n)=y_l(n)$ 。



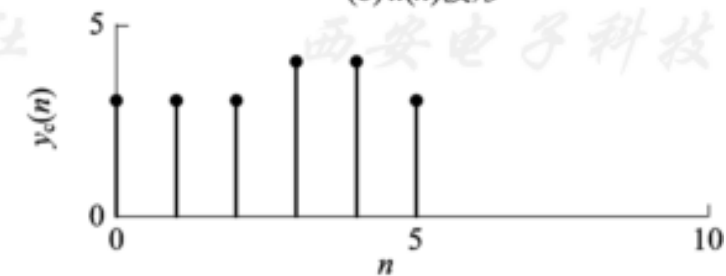
(a)  $h(n)$  波形



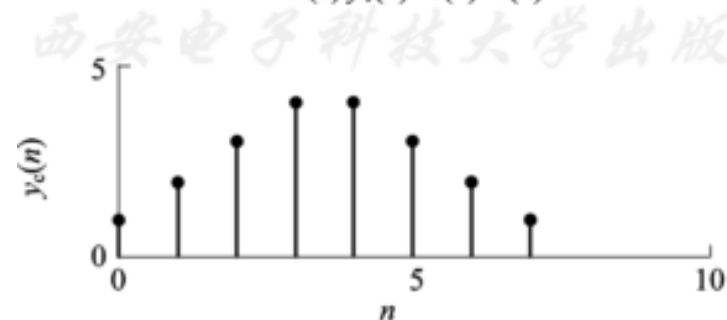
(b)  $x(n)$  波形



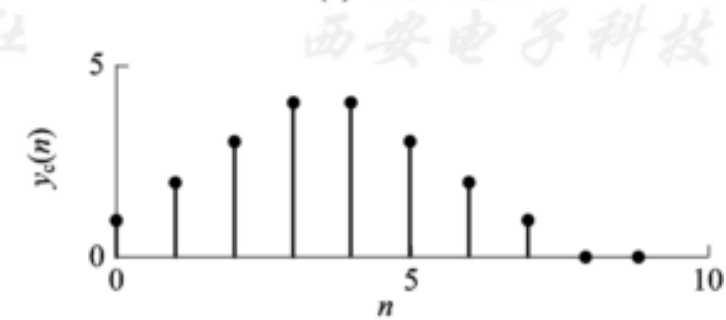
(c)  $y_1(n) = h(n) * x(n)$



(d) 6点循环卷积



(e) 8点循环卷积



(f) 10点循环卷积

图3.4.2 线性卷积与循环卷积波形图

### 3.4.2 用DFT对信号进行谱分析

#### 1. 用DFT对连续信号进行谱分析

工程实际中，经常遇到连续信号 $x_a(t)$ ，其频谱函数 $X_a(j\Omega)$ 也是连续函数。

为了利用DFT对 $x_a(t)$ 进行频谱分析，先对 $x_a(t)$ 进行时域采样，得到 $x(n)=x_a(nT)$ ，再对 $x(n)$ 进行DFT，得到的 $X(k)$ 则是 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在频率区间 $[0, 2\pi]$ 上的 $N$ 点等间隔采样。

这里 $x(n)$ 和 $X(k)$ 均为有限长序列。

设连续信号 $x_a(t)$ 持续时间为 $T_p$ ，最高频率为 $f_c$ 。

$x_a(t)$ 的傅里叶变换为 $X_a(j\Omega)$ ，对 $x_a(t)$ 进行时域采样得到 $x(n)=x_a(nT)$ ， $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 。

由假设条件可知 $x(n)$ 的长度为

$$N = \frac{T_p}{T} = T_p F_s$$

式中， $T$ 为采样间隔， $F_s=1/T$ 为采样频率。用 $X(k)$ 表示 $x(n)$ 的 $N$ 点DFT。

下面推导出 $X(k)$ 与 $X_a(j\Omega)$ 的关系，最后由此关系归纳出用 $X(k)$ 表示 $X_a(j\Omega)$ 的方法，即用DFT对连续信号进行谱分析的方法。

由2.4节知道， $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 与 $x_a(t)$ 的傅里叶变换 $X_a(j\Omega)$ 满足如下关系：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[ j \left( \frac{\omega}{T} - \frac{2\pi}{T} m \right) \right] \quad \leftarrow \boxed{\omega = \Omega T}$$

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[ j \left( \Omega - \frac{2\pi}{T} m \right) \right] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \tilde{X}_a(\Omega)$$

其中：  $\tilde{X}_a(\Omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a \left[ j \left( \Omega - \frac{2\pi}{T} m \right) \right]$  表示模拟信号频谱 $X_a(j\Omega)$ 的周期延拓函数。

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = X(e^{j\Omega T}) \Big|_{\Omega = \frac{\omega}{T} = \frac{2\pi}{NT}k}$$

$x(n)$ 的 $N$ 点DFT

$$= \frac{1}{T} \tilde{X}_a \left( \frac{2\pi}{NT} k \right) = \frac{1}{T} \tilde{X}_a \left( \frac{2\pi}{T_p} k \right)$$

上式说明了 $X(k)$ 与 $X_a(j\Omega)$ 的关系。



为了符合一般的频谱描述习惯，以频率 $f$ 为自变量。

$$\text{令} \quad \begin{cases} X'_a(f) = X_a(j\Omega)|_{\Omega=2\pi f} = X_a(j2\pi f) \\ \tilde{X}'_a(f) = \tilde{X}_a(\Omega)|_{\Omega=2\pi f} = \tilde{X}_a(2\pi f) \end{cases}$$

$$\text{则: } X(k) = \frac{1}{T} \tilde{X}'_a(f) \Big|_{f=\frac{k}{NT}=\frac{k}{T_p}=kF} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \tilde{X}'_a(kF) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

式中， $F$ 表示对模拟信号频谱的采样间隔，所以称之为频率分辨率， $T_p=NT$ 为截断时间长度。

$$F = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{NT} = \frac{F_s}{N}$$

$$\text{由此可得: } \tilde{X}'_a(kF) = TX(k) = T \cdot \text{DFT}[x(n)]_N \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

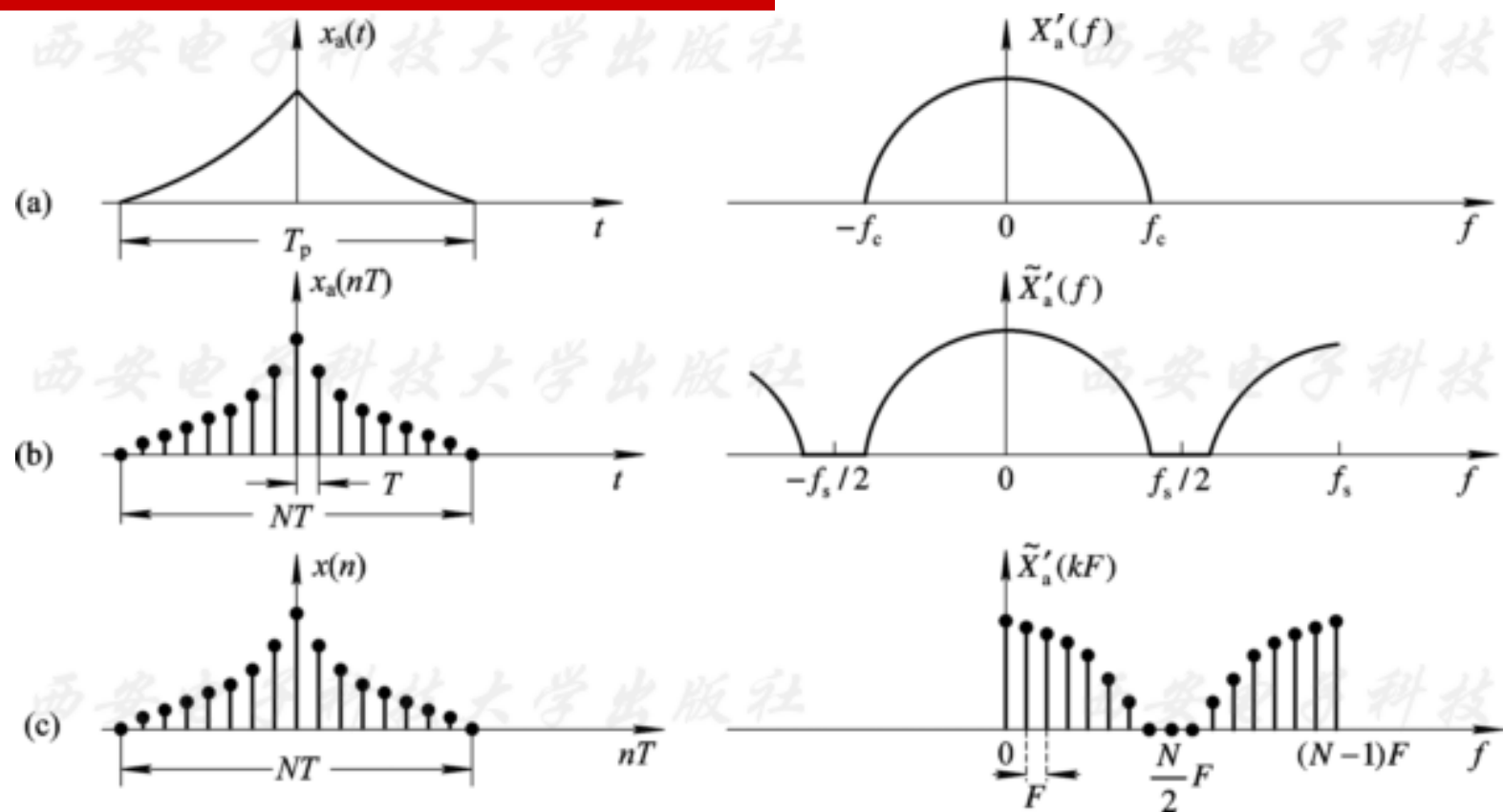


图3.4.6 用DFT分析连续信号谱的原理示意图

## 结论：

可以通过对连续信号采样并进行DFT再乘以 $T$ ，近似得到模拟信号频谱的周期延拓函数在第一个周期  $[0, f_s]$  上的 $N$ 点等间隔采样  $\tilde{X}'_a(kF)$  。

对满足假设的持续时间有限的带限信号，在满足时域采样定理时， $\tilde{X}'_a(kF)$  包含了模拟信号频谱的全部信息（ $k=0, 1, 2, \dots, N/2$ , 表示正频率频谱采样;  $k=N/2+1, N/2+2, \dots, N-1$ , 表示负频率频谱采样）。

---

所以，上述分析方法不丢失信息，即可由 $X(k)$ 恢复 $X_a(j\Omega)$ 或 $x_a(t)$ 。

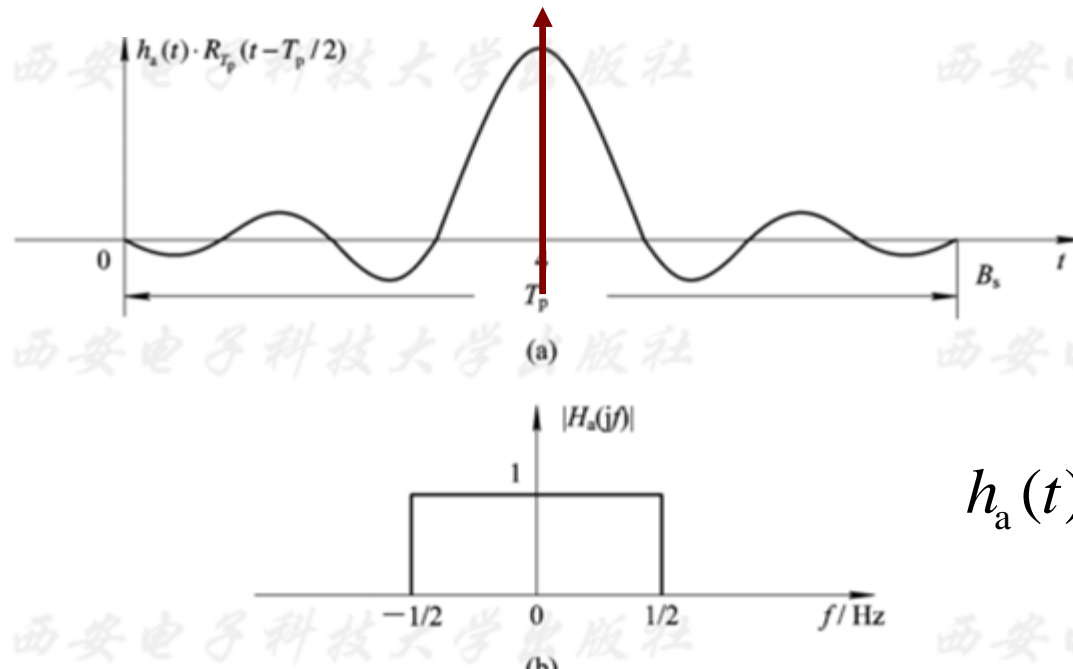
但直接由分析结果 $X(k)$ 看不到 $X_a(j\Omega)$ 的全部频谱特性，而只能看到 $N$ 个离散采样点的谱线，这就是所谓的**栅栏效应**。

对实信号，其频谱函数具有共轭对称性，所以分析正频率频谱就足够了。不存在频谱混叠失真时，正频率  $[0, F_s/2]$  频谱采样为

$$X'_a(kF) = TX(k) = T \cdot \text{DFT}[x(n)]_N \quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2$$

值得注意，如果 $x_a(t)$ 持续时间无限长，上述分析中要进行截断处理，所以会产生所谓的截断效应，从而使谱分析产生误差。

下面举例说明截断效应。理想低通滤波器的单位冲激响应 $h_a(t)$ 及其频响函数 $H_a(f)$ 如图所示：



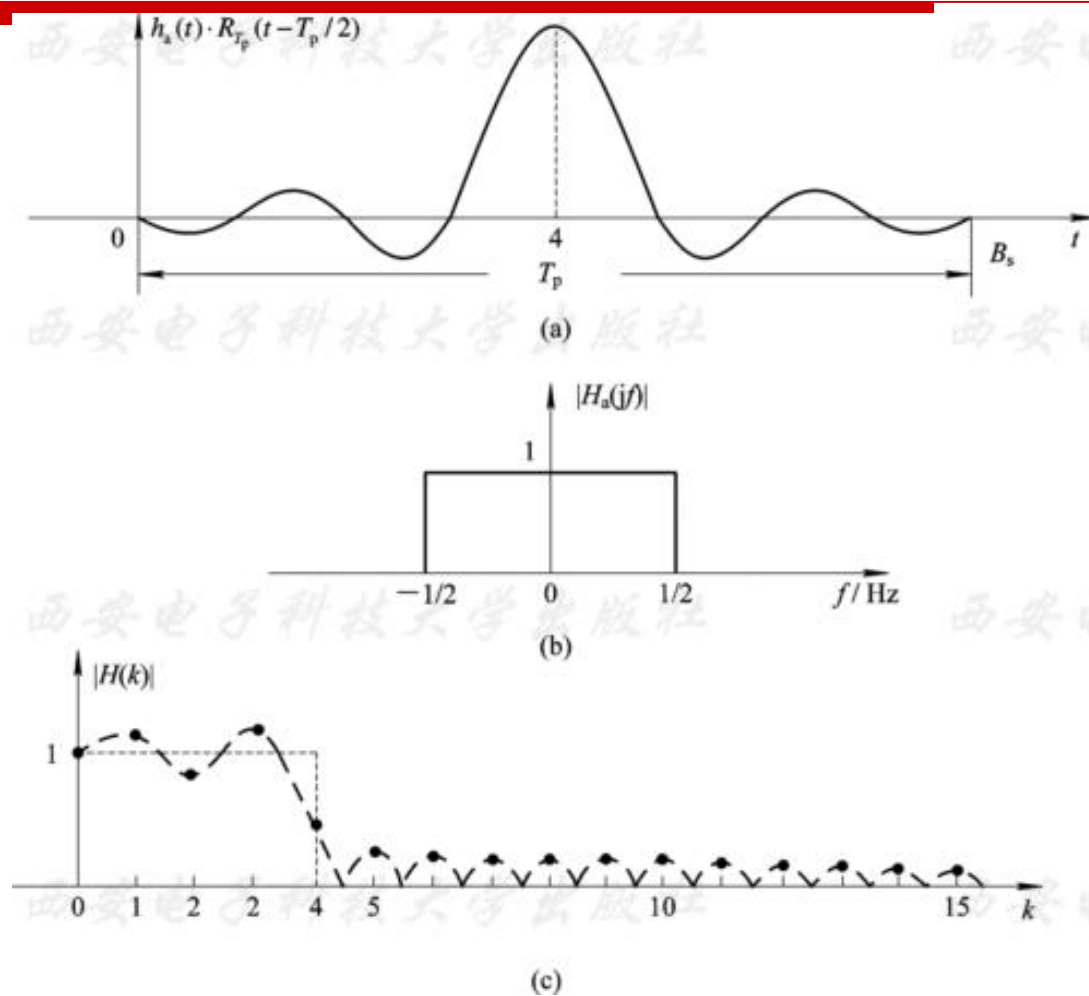
$$h_a(t) = \frac{\sin[\pi(t - \alpha)]}{\pi(t - \alpha)} \quad \alpha = \frac{T_p}{2}$$

现在用DFT来分析 $h_a(t)$ 的频率响应特性。由于 $h_a(t)$ 的持续时间为无穷长，因此要截取一段 $T_p$ ，假设 $T_p=8$  s，采样间隔 $T=0.25$  s(即采样频率 $F_s=4$  Hz)，采样点数 $N=T_p/T=32$ ；  
频域采样间隔 $F=1/T_p=0.125$  Hz；  
由于 $h_a(t)$ 为实信号，因此仅取正频率  $[0, f_s/2]$  频谱采样：

$$H_a(kF) = T \cdot \text{DFT}[h(n)] \quad 0 \leq k \leq 16$$

其中

$$h(n) = h_a(nT)R_{32}(n) = \frac{\sin[\pi(nT - \alpha)]}{\pi(nT - \alpha)} \quad \alpha = \frac{T_p}{2}$$



由图可见，低频部分近似理想低通频响特性，而高频误差较大，且整个频响都有波动。这些误差就是由于对 $h_a(t)$ 截断所产生的，所以通常称之为截断效应。

为减少这种截断误差，可适当加长 $T_p$ ，增加采样点数 $N$ 或用窗函数处理后再进行DFT。

图3.4.7 用DFT计算理想低通滤波器的频响曲线

---

在对连续信号进行谱分析时，主要关心两个问题，这就是谱分析范围和频率分辨率。

谱分析范围为  $[0, F_s/2]$ ，直接受采样频率  $F_s$  的限制。为了不产生频率混叠失真，通常要求信号的最高频率  $f_c < F_s/2$ 。

频率分辨率用频率采样间隔  $F$  描述， $F$  表示谱分析中能够分辨的两个频谱分量的最小间隔。显然， $F$  越小，谱分析就越接近  $X_a(jf)$ ，所以  $F$  较小时，我们称频率分辨率较高。



下面讨论用DFT对连续信号谱分析的参数选择原则。

在已知信号的最高频率 $f_c$ (即谱分析范围)时, 为了避免频率混叠现象, 要求采样速率 $F_s$ 满足:  $F_s > 2f_c$

谱分辨率 $F=F_s/N$ , 如果保持采样点数 $N$ 不变, 要提高频谱分辨率(减小 $F$ ), 就必须降低采样频率, 采样频率的降低会引起谱分析范围变窄和频谱混叠失真。

如维持 $F_s$ 不变, 为提高频率分辨率可以增加采样点数 $N$ , 因为  $NT = T_p$ ,  $T = F_s^{-1}$  只有增加对信号的观察时间 $T_p$ , 才能增加 $N$ 。  $T_p$ 和 $N$ 可以按照下面两式进行选择:

$$N > \frac{2f_c}{F} \quad T_p \geq \frac{1}{F}$$

【例 3.4.2】 对实信号进行谱分析，要求谱分辨率 $F \leq 10$  Hz，信号最高频率 $f_c = 2.5$  kHz，试确定最小记录时间 $T_{p \min}$ ，最大的采样间隔 $T_{\max}$ ，最少的采样点数 $N_{\min}$ 。如果 $f_c$ 不变，要求谱分辨率提高1倍，最少的采样点数和最小的记录时间是多少？

解

$$T_p \geq \frac{1}{F} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s}$$

因此 $T_{p \min} = 0.1$  s。因为要求 $F_s \geq 2f_c$ ，所以

$$T_{\max} = \frac{1}{2f_c} = \frac{1}{2 \times 2500} = 0.2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$N_{\min} = \frac{2f_c}{F} = \frac{2 \times 2500}{10} = 500$$

为使用DFT的快速算法FFT，希望N符合2的整数幂，为此选用 $N=512$ 点。为使频率分辨率提高1倍，即 $F=5$  Hz，要求：

$$N_{\min} = \frac{2 \times 2500}{5} = 1000$$

$$T_{p \min} = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s}$$

用快速算法FFT计算时，选用 $N=1024$ 点。

上面分析了为提高谱分辨率，又保持谱分析范围不变，必须增长记录时间 $T_p$ ，增加采样点数。

应当注意，这种提高谱分辨率的条件是必须满足时域采样定理，甚至采样速率 $F_s$ 取得更高。

## 2. 用DFT对序列进行谱分析

我们知道单位圆上的Z变换就是序列的傅里叶变换，即

$$X(e^{j\omega}) = X(z) \big|_{z=e^{j\omega}}$$

$X(e^{j\omega})$ 是 $\omega$ 的连续周期函数。如果对序列 $x(n)$ 进行 $N$ 点DFT得到 $X(k)$ ，则 $X(k)$ 是在区间  $[0, 2\pi]$  上对  $X(e^{j\omega})$ 的 $N$ 点等间隔采样。

频谱分辨率就是采样间隔 $2\pi/N$ 。因此序列的傅里叶变换可利用DFT(即FFT)来计算。

对周期为 $N$ 的周期序列  $\tilde{x}(n)$ ，其频谱函数为

$$X(e^{j\omega}) = \text{FT}[\tilde{x}(n)] = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k) \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

其中

$$\tilde{X}(k) = \text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

由此可见，周期序列的频谱结构可用其离散傅里叶级数系数  $\tilde{X}(k)$  表示。

由DFT的隐含周期性知道，截取  $\tilde{x}(n)$  的主值序列  $x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$ ，并进行 $N$ 点DFT，得到：

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)]_N = \text{DFT}[\tilde{x}(n)R_N(n)] = \tilde{X}(k)R_N(k)$$

所以可用 $X(k)$ 表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构。

如果截取长度 $M$ 等于 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期, 即 $M=mN$ ,  $m$ 为正整数, 即

$$x_M(n) = \tilde{x}(n)R_M(n)$$

$$X_M(k) = \text{DFT}[x_M(n)] = \sum_{n=0}^{M-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} = \sum_{n=0}^{mN-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{mN}kn}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n'+iN) e^{-j\frac{2\pi(n'+iN)k}{mN}}$$

$$\begin{aligned} &\text{令 } n=n'+iN; \\ &i=0, 1, \dots, m-1; \\ &n'=0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \left[ \sum_{n'=0}^{N-1} \tilde{x}(n'+iN) e^{-j\frac{2\pi n'k}{mN}} \right] e^{-j\frac{2\pi iNk}{m}}$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}ki} = \begin{cases} m, & k/m = \text{整数} \\ 0, & k/m \neq \text{整数} \end{cases}$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} X\left(\frac{k}{m}\right) e^{-j\frac{2\pi}{m}ik}$$

$$= X\left(\frac{k}{m}\right) \sum_{i=0}^{m-1} e^{-j\frac{2\pi}{m}ik}$$

$$= \begin{cases} mX\left(\frac{k}{m}\right), & k/m = \text{整数} \\ 0, & k/m \neq \text{整数} \end{cases}$$

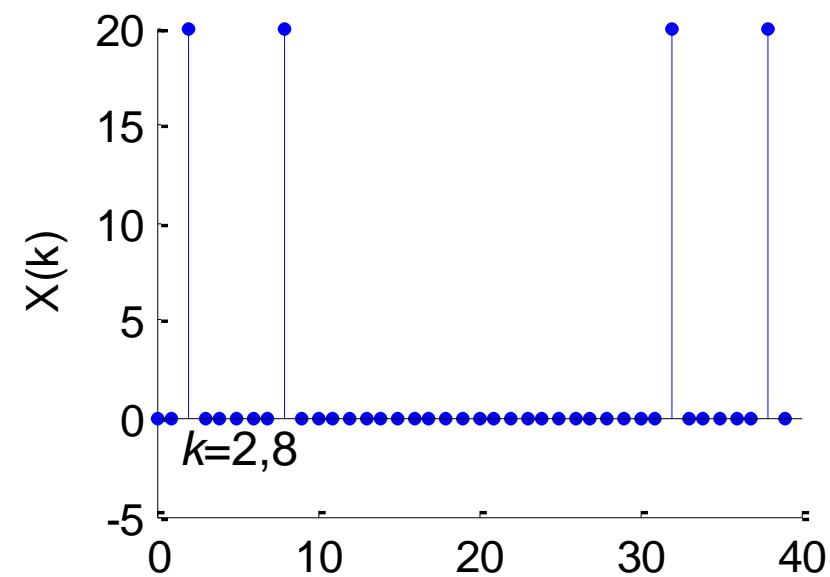
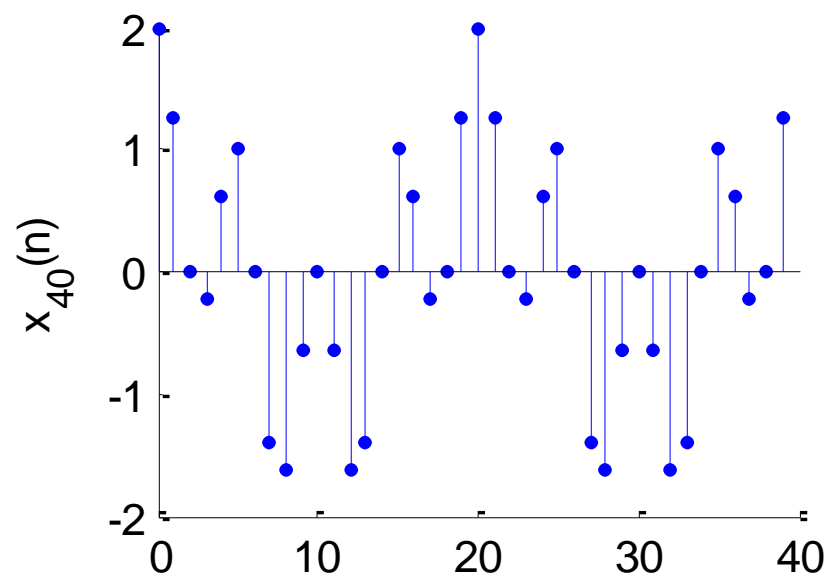
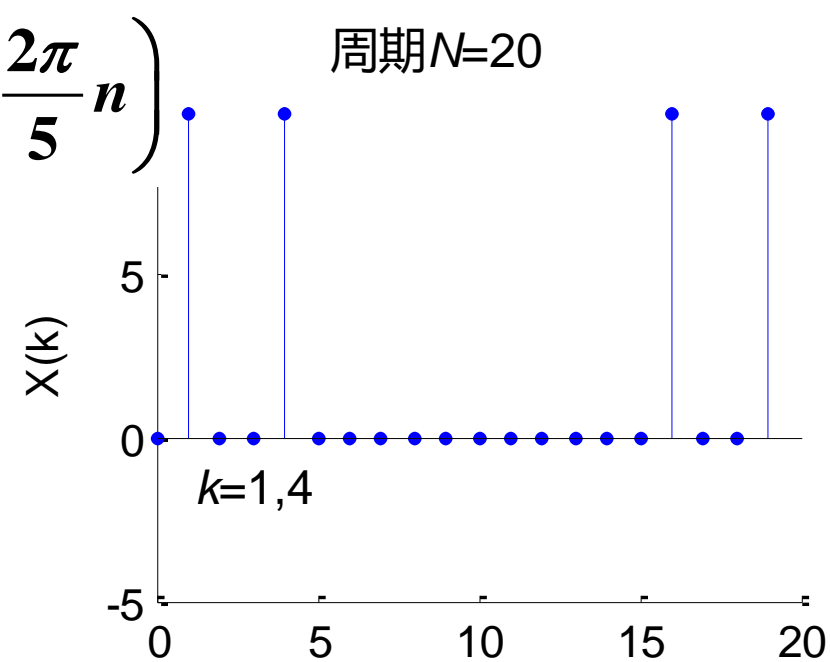
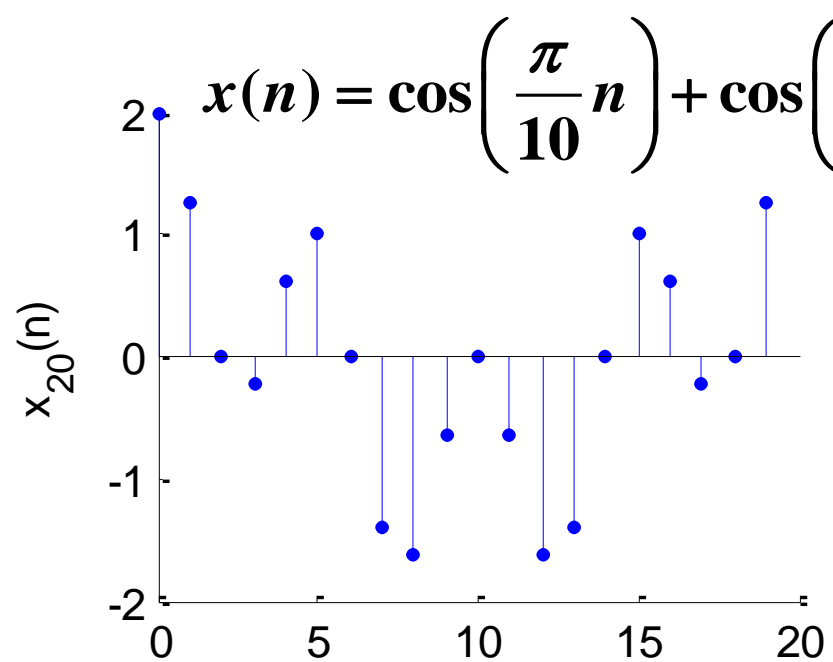
由此可见， $X_M(k)$ 也能表示 $\tilde{x}(n)$ 的频谱结构，只是在 $k=im$

时， $X_M(im) = mX(i)$ ，表示 $\tilde{x}(n)$ 的 $i$ 次谐波谱线，其幅度扩大 $m$ 倍。而其他 $k$ 值时， $X_M(k)=0$ 。

同时， $X(i)$ 对应点频率为： $\frac{2\pi}{N}i$

$X_M(im)$ 对应点频率为： $\frac{2\pi}{mN} \cdot mi = \frac{2\pi}{N}i$

所以，只要截取 $\tilde{x}(n)$ 的整数个周期进行DFT，就可得到它的频谱结构，达到谱分析的目的。





如果  $\tilde{x}(n)$  的周期预先不知道，可先截取  $M$  点进行 DFT，即

$$x_M(n) = \tilde{x}(n)R_M(n)$$

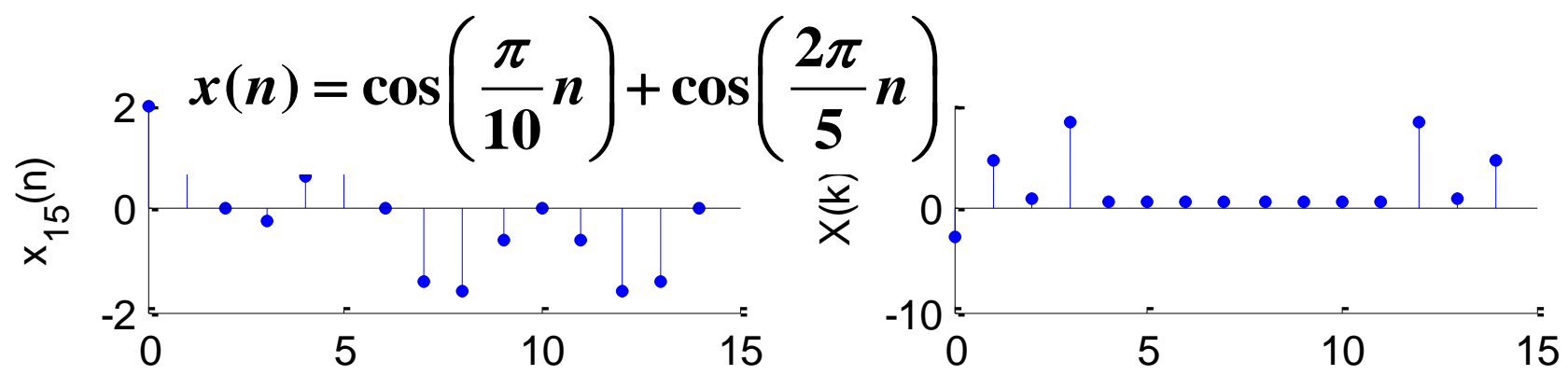
$$X_M(k) = \text{DFT}[x_M(n)] \quad 0 \leq k \leq M-1$$

再将截取长度扩大1倍，截取

$$x_{2M}(n) = \tilde{x}(n)R_{2M}(n)$$

$$X_{2M}(k) = \text{DFT}[x_{2M}(n)] \quad 0 \leq k \leq 2M-1$$

比较  $X_M(k)$  和  $X_{2M}(k)$ ，如果二者的主谱差别满足分析误差要求，则以  $X_M(k)$  或  $X_{2M}(k)$  近似表示  $\tilde{x}(n)$  的频谱，否则，继续将截取长度加倍，直至前后两次分析所得主谱频率差别满足误差要求。设最后截取长度为  $iM$ ，则  $X_{iM}(k_0)$  表示  $\omega = [2\pi/(iM)]k_0$  点的谱线强度。



#### 4. 用DFT进行谱分析的误差问题

DFT(实际中用FFT计算)可用于对连续信号和数字信号进行谱分析。在实际分析过程中, 要对连续信号采样和截断, 有些非时限数据序列也要截断, 由此可能引起分析误差。下面分别对可能产生误差的三种现象进行讨论。

(1) 混叠现象。对连续信号进行谱分析时，首先要对其采样，变成时域离散信号后才能用DFT(FFT)进行谱分析。采样速率 $F_s$ 必须满足采样定理，否则会在 $\omega=\pi$ (对应模拟频率 $f=F_s/2$ )附近发生频谱混叠现象。

这时用DFT分析的结果必然在 $f=F_s/2$ 附近产生较大误差。

因此，理论上必须满足 $F_s \geq 2f_c$  ( $f_c$ 为连续信号的最高频率)。对 $F_s$ 确定的情况，一般在采样前进行预滤波，滤除高于折叠频率 $F_s/2$ 的频率成分，以免发生频率混叠现象。

---

(2) 栅栏效应。 $N$ 点DFT是在频率区间  $[0, 2\pi]$  上对时域离散信号的频谱进行 $N$ 点等间隔采样，而采样点之间的频谱函数是看不到的。这就好像从 $N$ 个栅栏缝隙中观看信号的频谱情况，仅得到 $N$ 个缝隙中看到的频谱函数值。因此称这种现象为栅栏效应。

由于栅栏效应，有可能漏掉(挡住)大的频谱分量。

---

为了把原来被“栅栏”挡住的频谱分量检测出来，对有限长序列，可以在原序列尾部补零；对无限长序列，可以增大截取长度及DFT变换区间长度，从而使频域采样间隔变小，增加频域采样点数和采样点位置，使原来漏掉的某些频谱分量被检测出来。

对连续信号的谱分析，只要采样速率 $F_s$ 足够高，且采样点数满足频率分辨率要求，就可以认为DFT后所得离散谱的包络近似代表原信号的频谱。

(3) 截断效应。实际中遇到的序列 $x(n)$ 可能是无限长的，用DFT对其进行谱分析时，必须将其截短，形成有限长序列 $y(n)=x(n)w(n)$ ， $w(n)$ 称为窗函数，长度为 $N$ 。 $w(n)=R_N(n)$ ，称为矩形窗函数。根据傅里叶变换的频域卷积定理，有

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \text{FT}[y(n)] = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

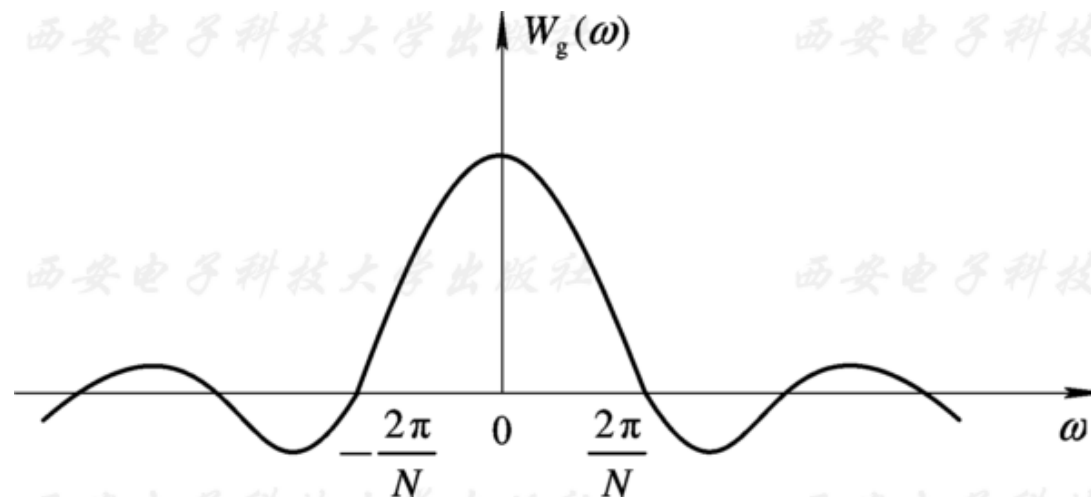
其中：  $X(e^{j\omega}) = \text{FT}[x(n)]$ ,  $W(e^{j\omega}) = \text{FT}[w(n)]$

对矩形窗数 $w(n)=R_N(n)$ , 有

$$W(e^{j\omega}) = \text{FT}[w(n)] = e^{-j\omega \frac{N-1}{2}} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} = W_g(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

幅度谱 $W_g(\omega) \sim \omega$ 曲线如图所示( $W_g(\omega)$ 以 $2\pi$ 为周期, 只画低频部分)。

图中,  $|\omega| < 2\pi/N$ 的部分称为主瓣, 其余部分称为旁瓣。



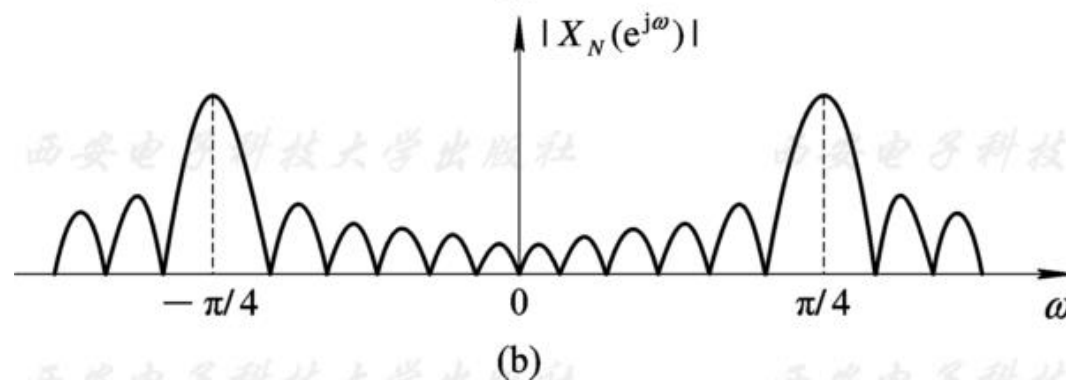
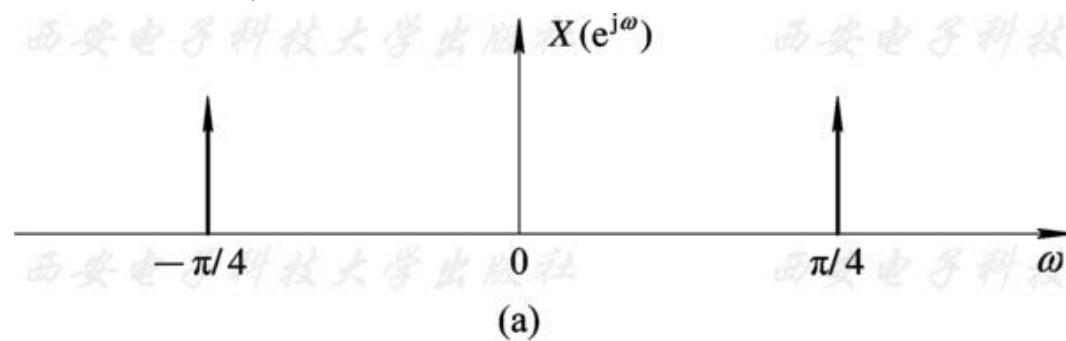


例如,  $x(n)=\cos(\omega_0 n)$ ,  $\omega_0=\pi/4$ , 其频谱为

$$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ \delta\left(\omega - \frac{\pi}{4} - 2\pi l\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4} - 2\pi l\right) \right]$$

$x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 如图3.4.13(a)所示。

将 $x(n)$ 截断后,  $y(n)=x(n)R_N(n)$ 的幅频曲线如图(b)所示。



---

由上述可见，截断后序列的频谱 $Y(e^{j\omega})$ 与原序列频谱 $X(e^{j\omega})$ 必然有差别，这种差别对谱分析的影响主要表现在如下两个方面：

(1) 泄露。原来序列 $x(n)$ 的频谱是离散谱线，经截断后，使原来的离散谱线向附近展宽，通常称这种展宽为泄露。显然，泄露使频谱变模糊，使谱分辨率降低。

频谱泄露程度与窗函数幅度谱的主瓣宽度直接相关，在第7章将证明，在所有的窗函数中，矩形窗的主瓣是最窄的，但其旁瓣的幅度也最大。

---

(2) 谱间干扰。在主谱线两边形成很多旁瓣，引起不同频率分量间的干扰(简称谱间干扰)，特别是强信号谱的旁瓣可能湮没弱信号的主谱线，或者把强信号谱的旁瓣误认为是另一频率的信号的谱线，从而造成假信号，这样就会使谱分析产生较大偏差。

由于上述两种影响是由对信号截断引起的，因此称之为截断效应。增加 $N$ 可使 $W_g(\omega)$ 的主瓣变窄，减小泄露，提高频率分辨率，但旁瓣的相对幅度并不减小。

---

为了减小谱间干扰，应用其它形状的窗函数 $w(n)$ 代替矩形窗(窗函数将在FIR数字滤波其设计中介绍)。但在 $N$ 一定时，旁瓣幅度越小的窗函数，其主瓣就越宽。

所以，在DFT变换区间(即截取长度) $N$ 一定时，只能以降低谱分析分辨率为代价，换取谱间干扰的减小。

---

最后要说明的是，栅栏效应与频率分辨率是不同的两个概念。如果截取长度为 $N$ 的一段数据序列，则可以在其后面补 $N$ 个零，再进行 $2N$ 点DFT，使栅栏宽度减半，从而减轻了栅栏效应。

但是这种截短后补零的方法不能提高频率分辨率。因为截短已经使频谱变模糊，补零后仅使采样间隔变小，但得到的频谱采样的包络仍是已经变模糊的频谱，所以频率分辨率没有提高。

因此，要提高频率分辨率，就必须对原始信号截取的长度加长（对模拟信号，就是增加采样时间 $T_p$ 的长度）。

# 数据后补零的影响：为什么要补零？

- 不能提高分辨率，没有增加数据有效长度！
- 数据过短，补零后可起到一定的插值作用；
- 使数据长度为 2 的整次幂，有利于FFT。

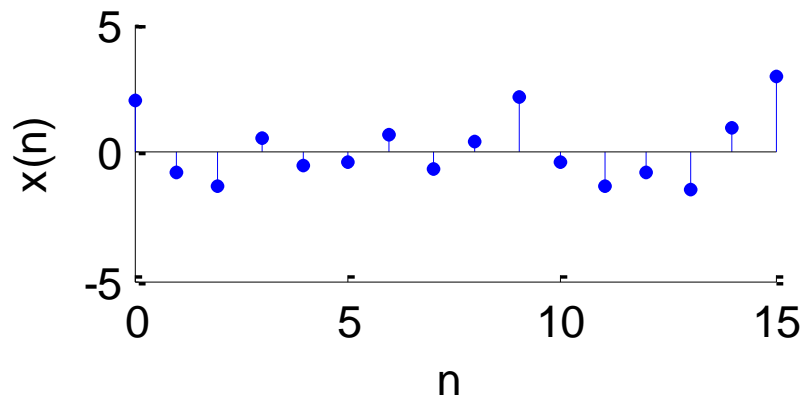
例：

$$x(n) = \sin(2\pi f_1 n / f_s) + \sin(2\pi f_2 n / f_s) + \sin(2\pi f_3 n / f_s)$$

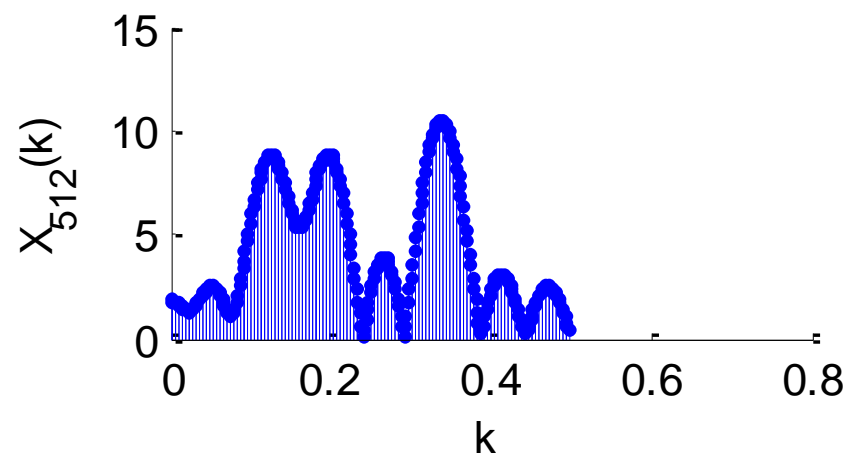
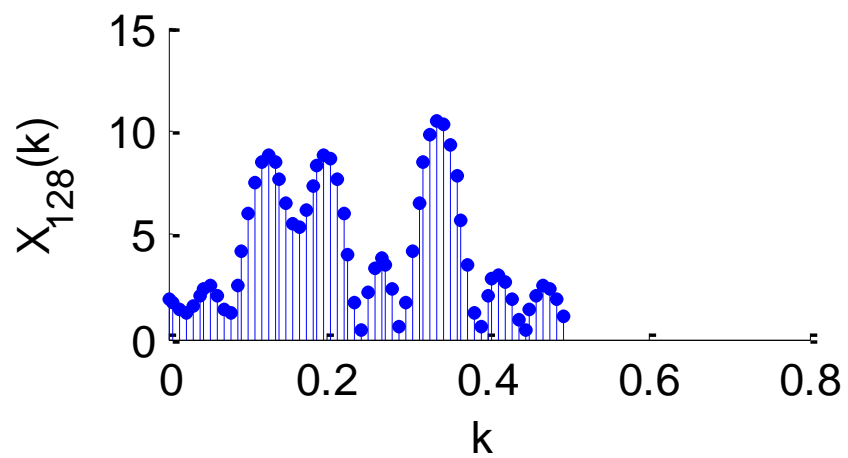
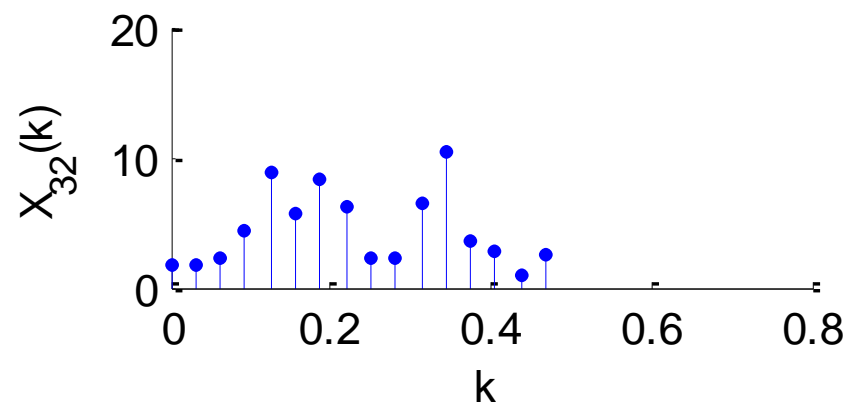
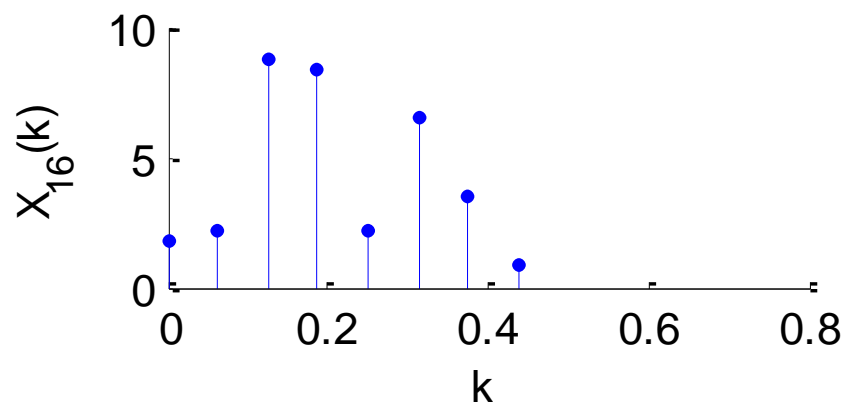
$$f_1 = 2.67 \text{ Hz}, \quad f_2 = 3.75 \text{ Hz}, \quad f_3 = 6.75 \text{ Hz}, \quad f_s = 20 \text{ Hz},$$

$X(e^{j\omega})$  在正频率处应该有三根谱线。

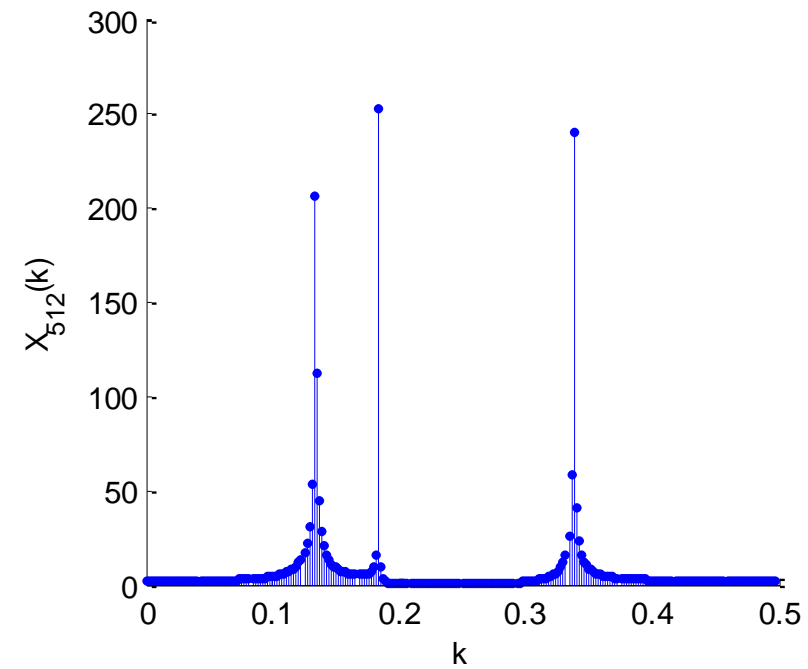
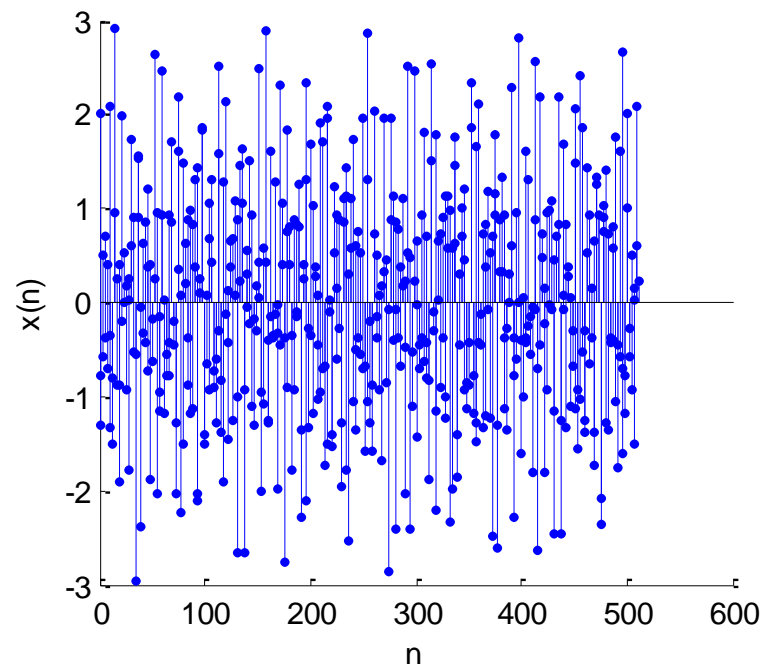
$$\omega = 2\pi\{0.1335, 0.1875, 0.3375\}$$



取 $N=16$ , 在数据后补0做DFT



取 $N=512$ ，做512点DFT





## 第3章 离散傅里叶变换

1. DFT离散傅立叶变化的定义
2. 性质：循环移位、循环卷积、共扼对称性
3. DFT计算线性卷积
4. 谱分析，频率分辨率，信号的长度 $N$ .