

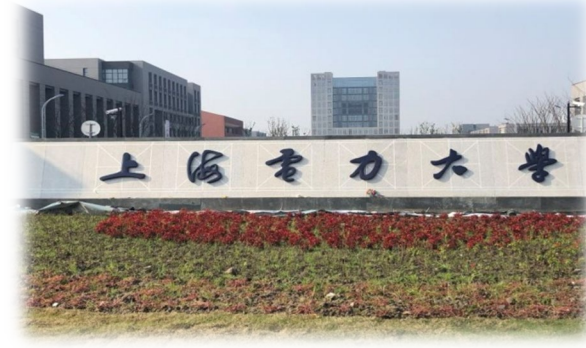


上海電力大學
SHANGHAI UNIVERSITY OF ELECTRIC POWER

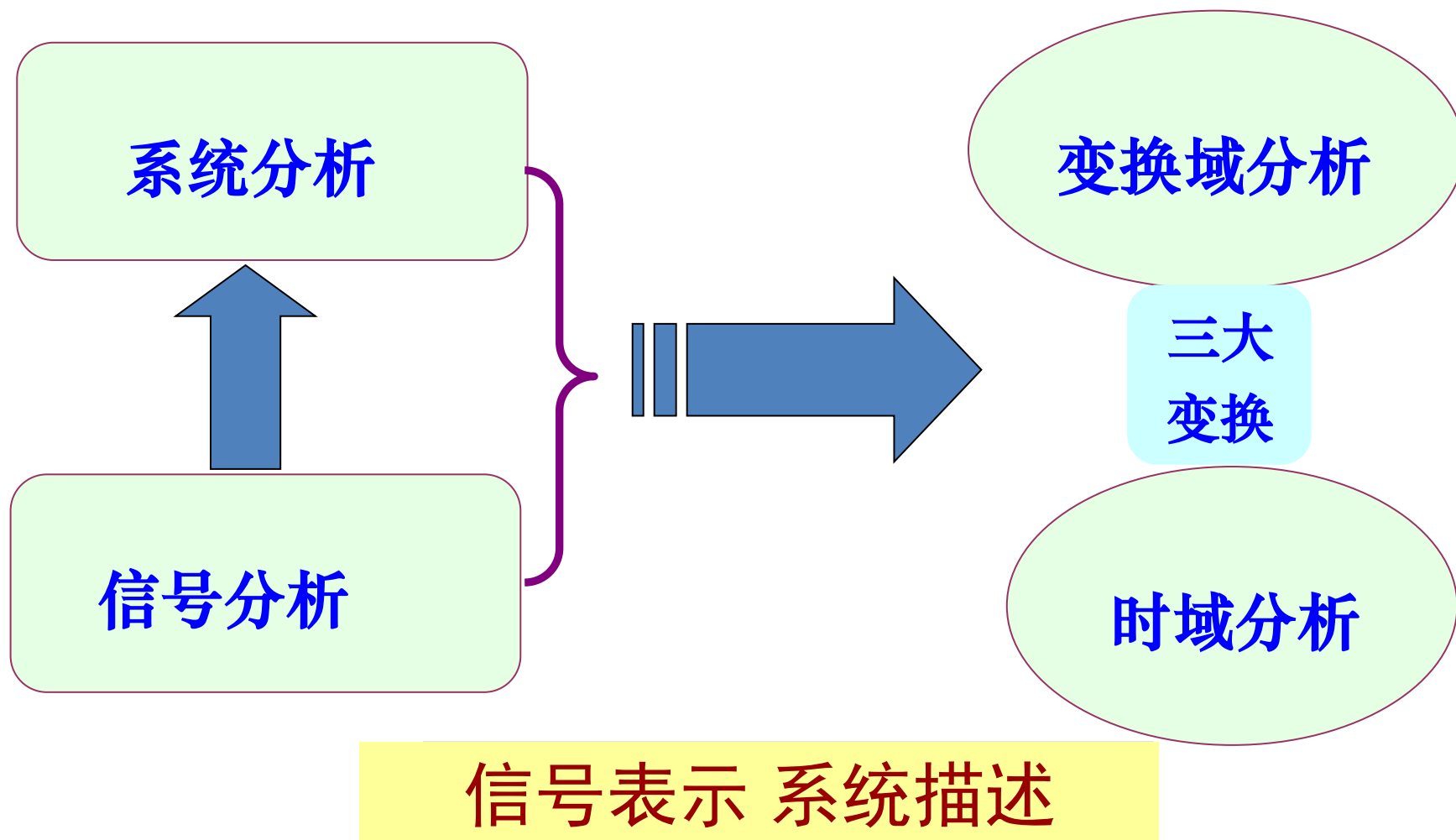
信号与系统

第一章 绪论

电子与信息工程学院



解析课程知识架构，明确课程教学内涵



课程特点

- 与《电路分析》比较，更抽象，更一般化；
- 应用数学知识较多，用数学工具分析物理概念；

- **常用数学工具：**

微分、积分(定积分、无穷积分、变上限积分)

线性代数

微分方程

傅里叶级数、傅里叶变换、拉氏变换

差分方程求解, z 变换

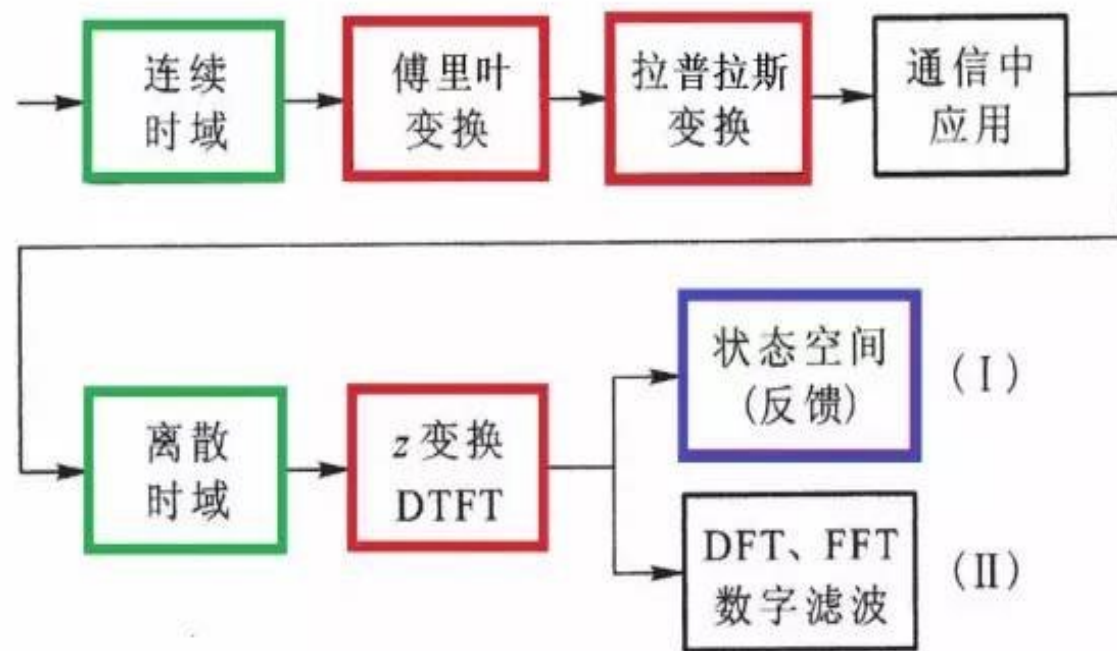
信号与系统（第三版） 上、下册

郑君里、应启珩、 杨为理

高等教育出版社

2011年3月

**讲课内容：一至五章，七章，八章
，十一章（信号流图），十二章**



主要内容

本课程研究**确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基**

本概念与基本分析方法：

- **从时间域到变换域；**
- **从连续到离散；**
- **从输入、输出描述到状态空间描述。**

参考书目

(1)谷源涛. 信号与系统（第三版）习题解析.北京：高等教育出版社, 2011

(2)胡光锐 . 信号与系统 . 上海：上海交通大学出版社, 1995

(3)ALAN V. OPPENHEIM（刘树棠译）. 信号与系统 . 西安：西安交通大学出版社, 1997

.....

• 过程化考核

- 考勤，作业，平时测验，期中考试，期末考试
- 重视学习全过程！！！！

第一章 绪论

主要内容

1

信号与系统

2

信号的描述和分类

3

信号的运算

4

阶跃信号和冲激信号

5

信号的分解

6

系统模型及其分类

7

线性时不变系统

8

系统分析方法



§ 1.1 信号与系统



一. 信号(Signal)

- **消息 (Message)** : 运动或状态变化的直接反映、待传输与处理的原始对象。在通信系统中, 一般将语言、文字、图像或数据统称为消息。
- **信号 (Signal)** : 指消息的表现形式与传送载体。
- **信息 (Information)** : 一般指消息中赋予人们的新知识、新概念, 定义方法复杂, 信息量的大小与消息发生的概率有关。
- **信号是消息的表现形式与传送载体, 消息是信号的传送内容。**

二.系统(System)

- **系统 (system)：** 由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的，具有稳定功能的整体。如通信系统、控制系统等。
- **电系统具有特殊的重要地位，** 某个电路的输入、输出是完成某种功能，如微分、积分、放大。
- **在电子技术领域中，“系统”、“电路”、“网络”三个名词在一般情况下可以通用。**

信号理论与系统理论

信号理论

信号分析：研究信号的基本性能，如信号的描述、性质等。

信号传输

信号处理

系统理论

系统分析：给定系统，研究系统对于输入激励所产生的输出响应。

系统综合：按照给定的需求设计（综合）系统。

重点讨论信号的分析、系统的分析。分析是综合的基础。

信号与系统的描述



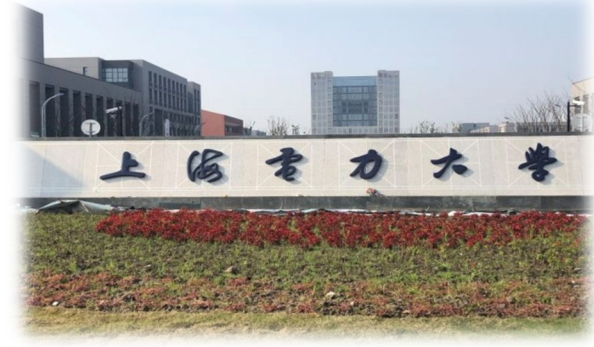
$x + H \rightarrow y$ Analysis 分析

$y + H \rightarrow x$ Control 控制

$x + y \rightarrow H$ Design 设计



§ 1.2 信號的描述和分類



一. 信号的分类

- 信号的分类方法很多，可以从不同的角度对信号进行分类。

- 按**实际用途**划分：

电视信号

雷达信号

控制信号

通信信号

广播信号

.....

- 按**所具有的时间特性**划分 

1. 确定性信号和随机信号

• 确定性信号

对于指定的某一时刻 t ，可确定一相应的函数值 $f(t)$ 。
若干不连续点除外。

例如： $f(t)=\sin(3t)$

• 随机信号

具有未可预知的不确定性。

2. 周期信号和非周期信号

复杂周期信号可以展成一系列
频率成比例的正弦波。

周期信号 { 正弦周期信号 (简谐波)
 { 复杂周期信号 (除简谐波外的周期信号)

非周期信号

1. $\cos 4t$ 周期 T_1 ? $\sin 5t$ 周期 T_2 ?

解: $T_1 = 2\pi / 4 = \pi / 2$, $T_2 = 2\pi / 5$

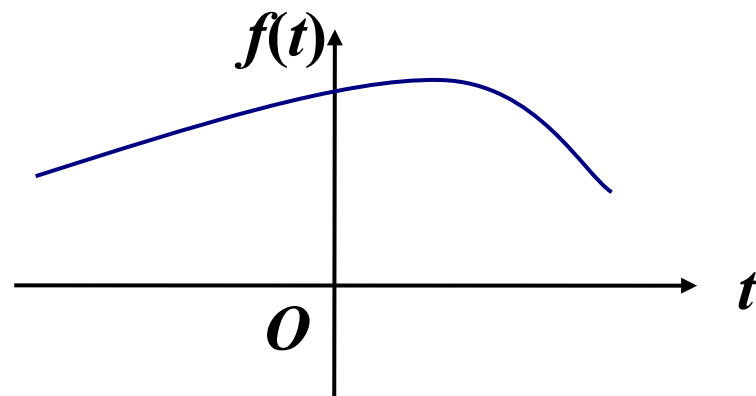
2. $\sin 2t + \sin 3t$ 的周期 T ?

T_1, T_2 的最小公倍数:

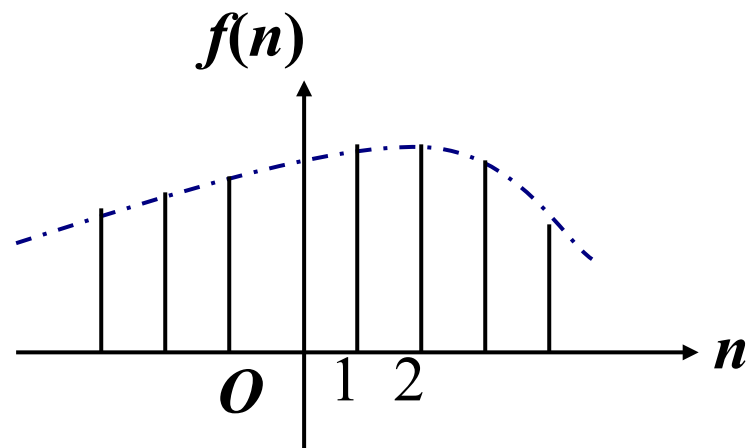
$$T_1 = 2\pi / 2 = \pi; T_2 = 2\pi / 3 \Rightarrow T = 2\pi$$

3. 连续信号和离散信号

连续时间信号：信号存在的时间范围内，任意时刻都有定义（即都可以给出确定的函数值，可以有有限个间断点）。用 t 表示连续时间变量。



离散时间信号：在时间上是离散的，只在某些不连续的规定瞬时给出函数值，其他时间没有定义。用 n 表示离散时间变量。



离散时间信号又可以分为抽样信号和数字信号。

4. 模拟信号，抽样信号，数字信号

•模拟信号：时间和幅值均为连续的信号。

抽样

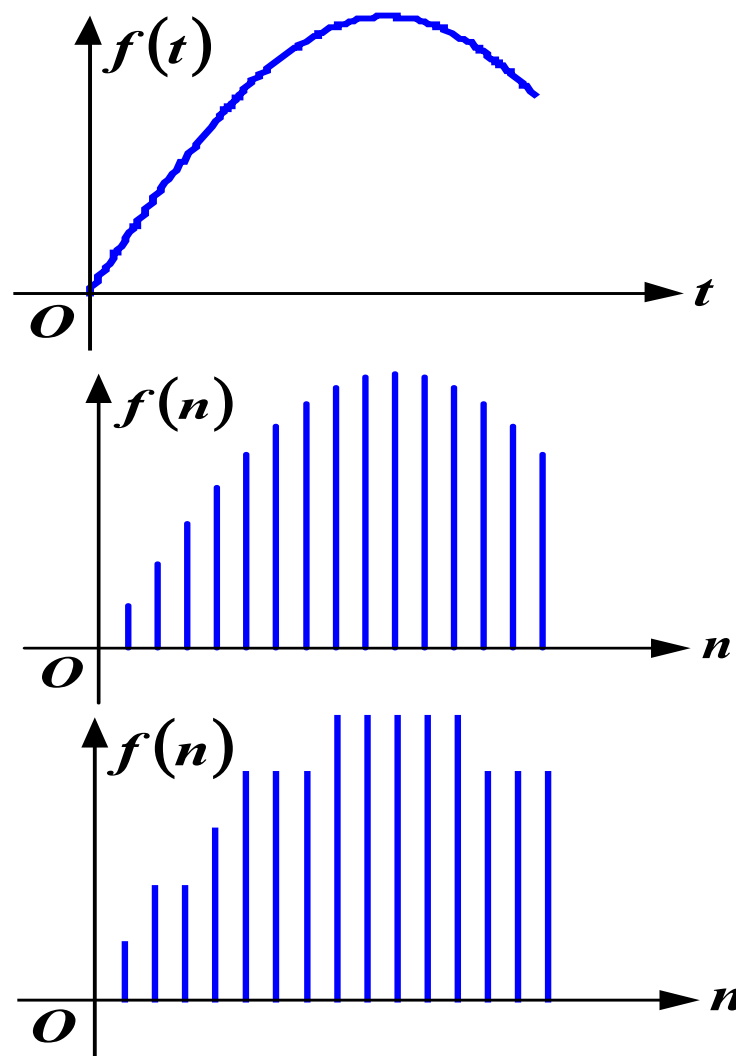
•抽样信号：时间离散的，幅值连续的信号。

量化

•数字信号：时间和幅值均为离散的信号。

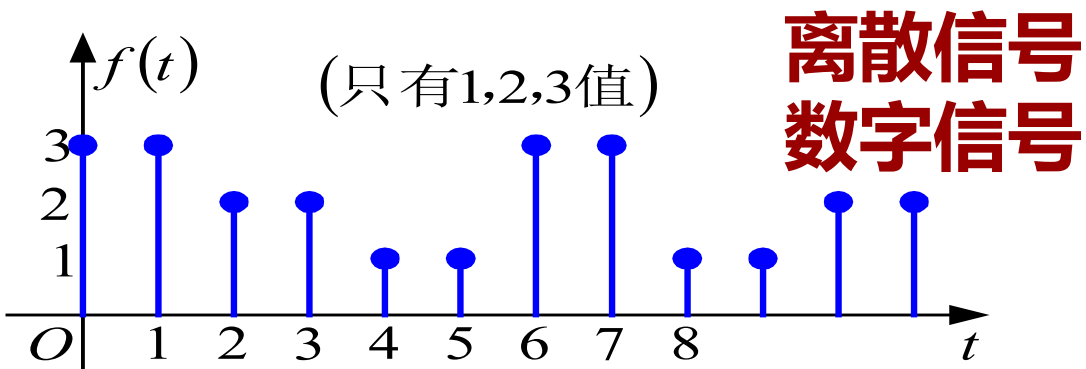
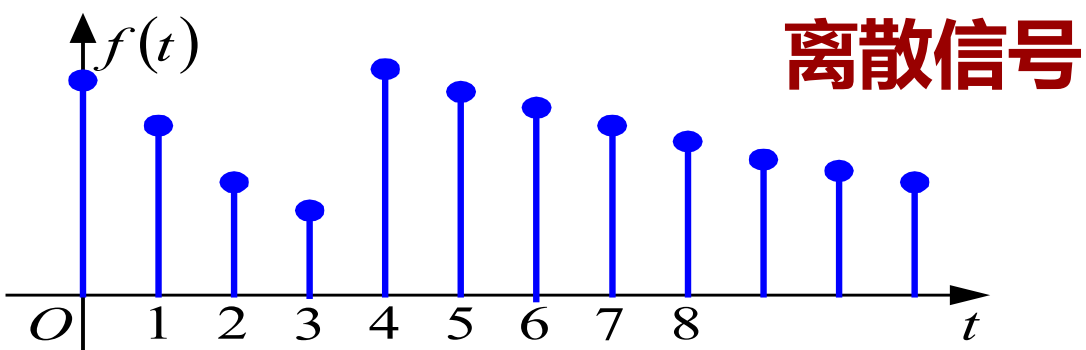
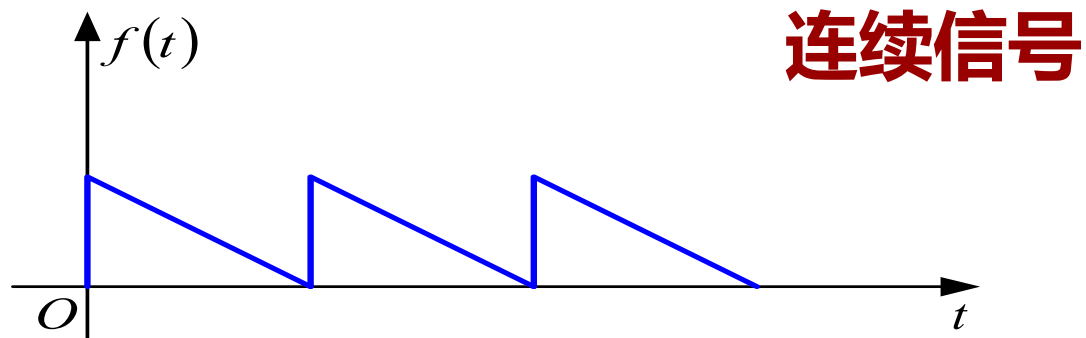
主要讨论**确定性**信号。

先连续，后离散；先周期，后非周期



判断信号性质

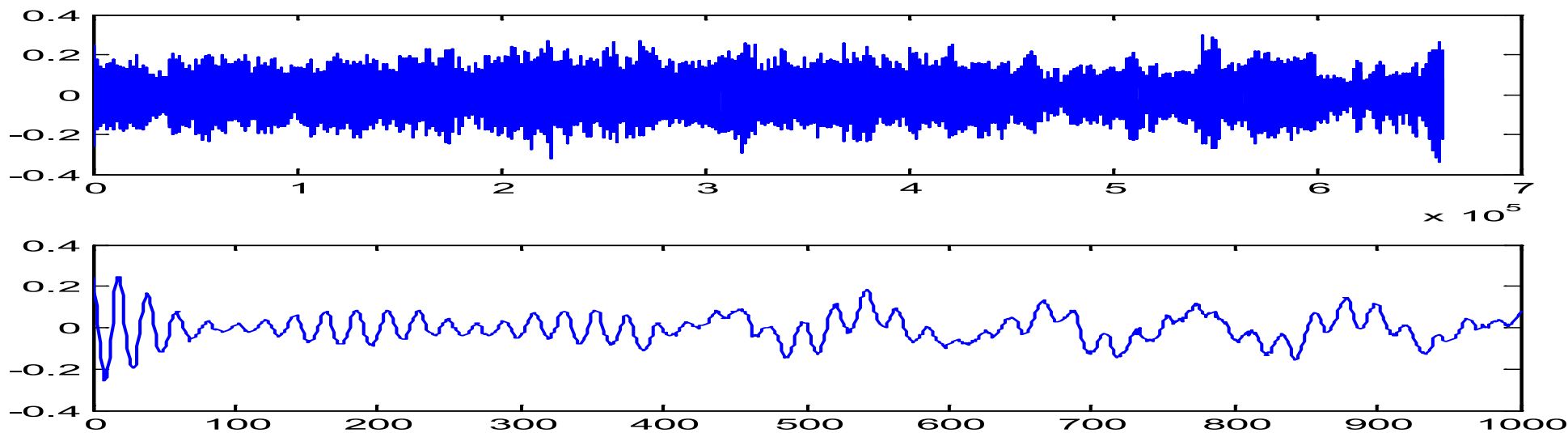
判断下列波形是连续时间信号
还是离散时间信号，若是离散
时间信号是否为数字信号？



5. 一维信号和多维信号

一维信号:

只由一个自变量描述的信号，如语音信号。



多维信号：
由多个自变量描述的信号，如图像信号。



二. 几种典型确定性信号

1. 指数信号

2. 正弦信号

3. 复指数信号(表达具有普遍意义)

4. 抽样信号(Sampling Signal)

信号的表示

- 函数表达式 $f(t)$
- 波形

1. 指数信号

$$f(t) = K e^{\alpha t}$$

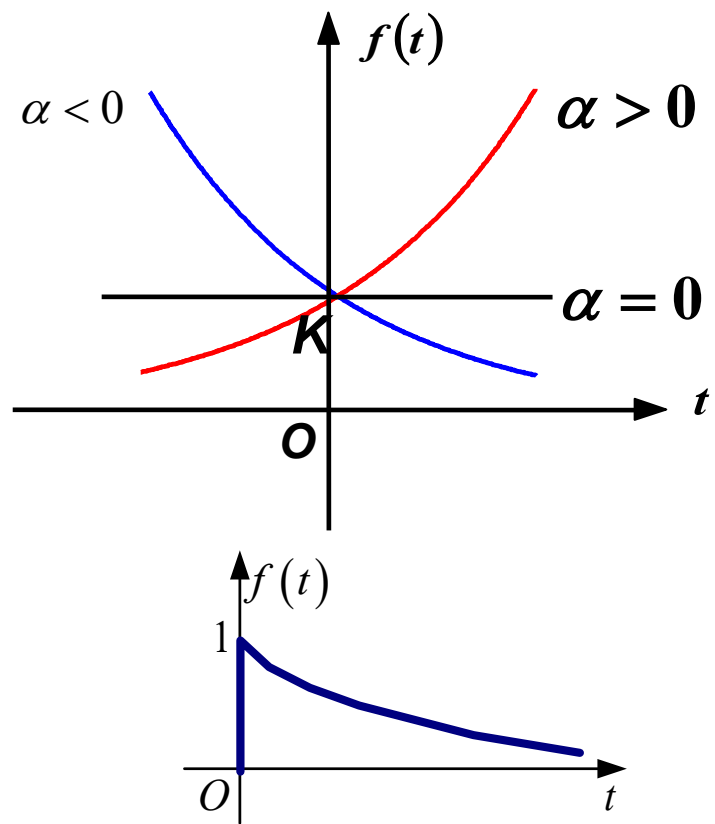
- $\alpha = 0$ 直流(常数)
- $\alpha < 0$ 指数衰减
- $\alpha > 0$ 指数增长

单边指数信号

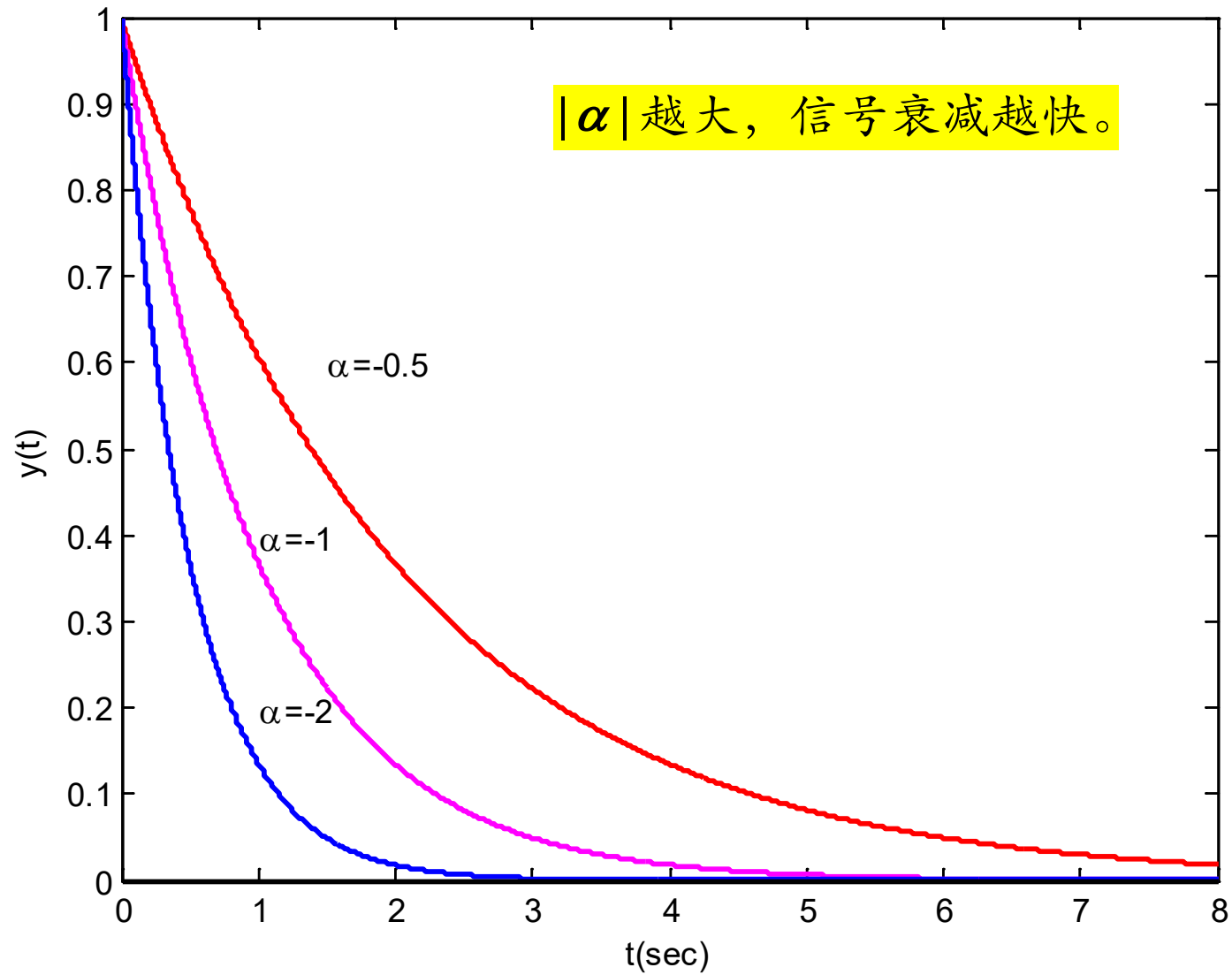
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-\frac{t}{\tau}} & t \geq 0 \end{cases}$$

通常把 $\frac{1}{|\alpha|}$ 称为指数信号的时间常数，记作 τ ，代表信号衰减速度，具有时间的量纲。 $|\alpha|$ 越大，信号衰减越快。

重要特性： 其对时间的微分和积分仍然是指数形式。

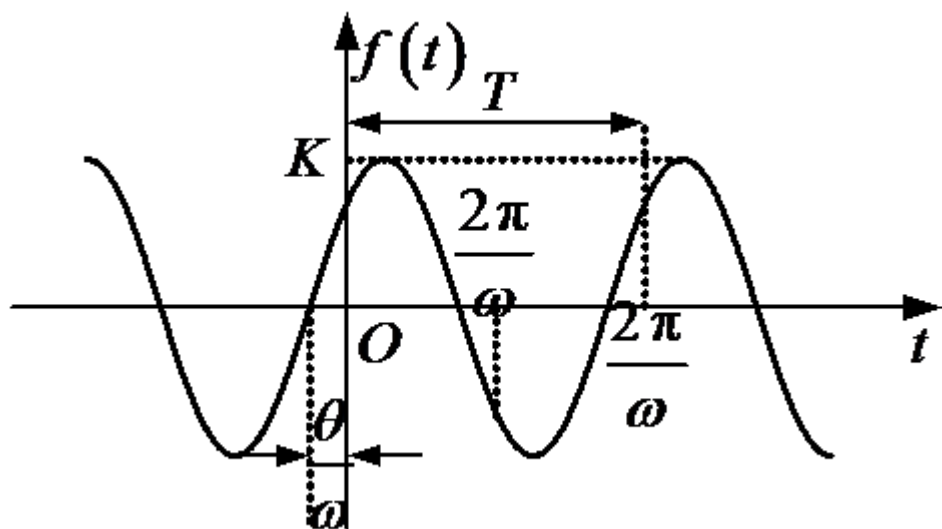


$$f(t) = K e^{\alpha t} (\alpha < 0)$$



2. 正弦信号

$$f(t) = K \sin(\omega t + \theta)$$



振幅: K

周期: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$

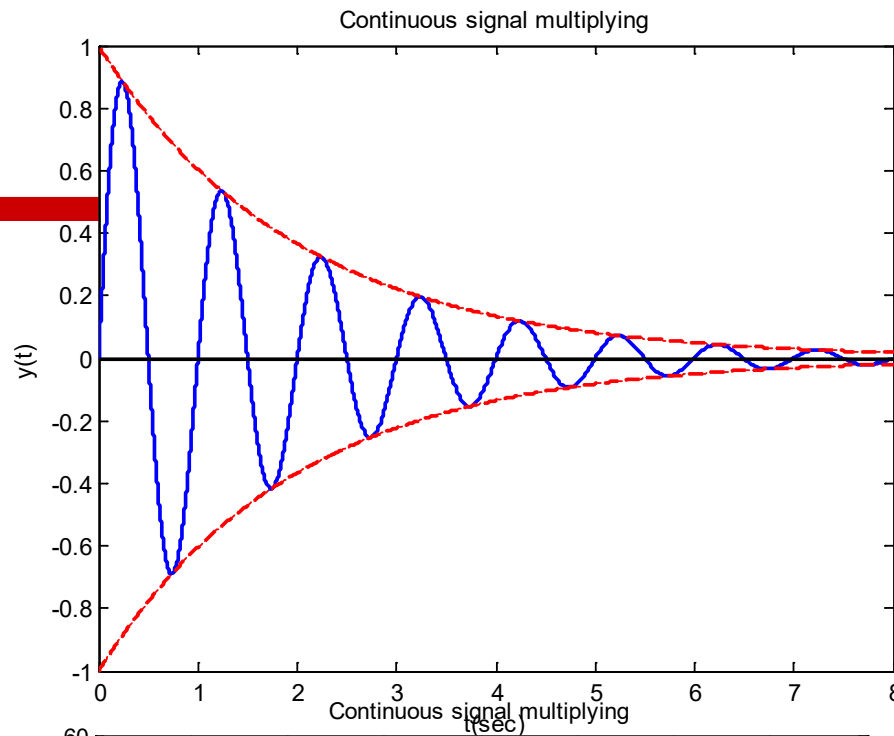
频率: f

角频率: $\omega = 2\pi f$

初相: θ

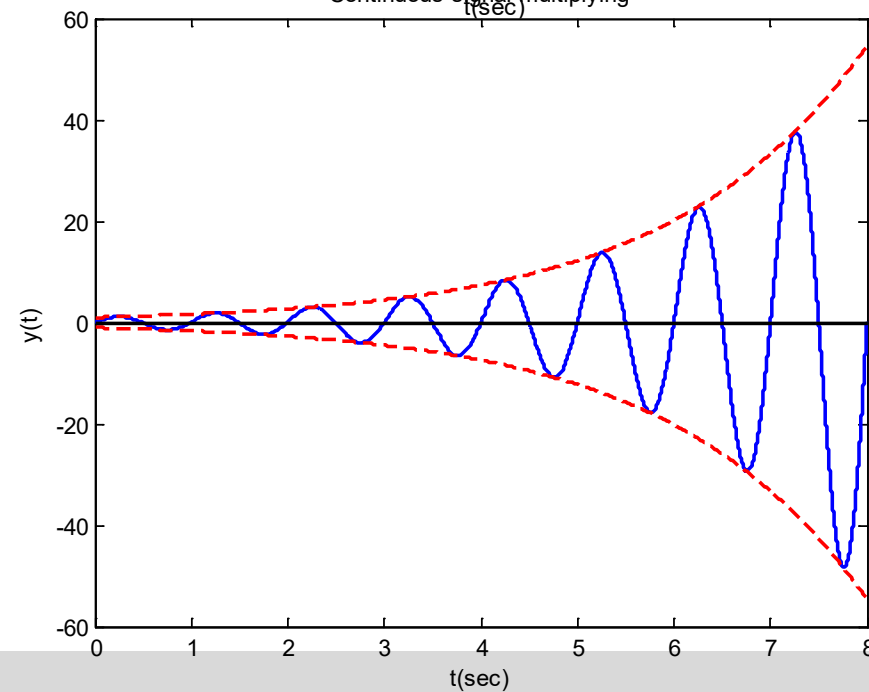
衰减正弦信号:

$$f(t) = \begin{cases} K e^{-\alpha t} \sin(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$



$$K = 1, \alpha = 0.5, \omega = 2\pi$$

$$f(t) = \begin{cases} K e^{-\alpha t} \sin(\omega t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$



$$K = 1, \alpha = -0.5, \omega = 2\pi$$

欧拉 (Euler) 公式

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)$$

3. 复指数信号

$$\begin{aligned} f(t) &= Ke^{st} & (-\infty < t < \infty) \\ &= Ke^{\sigma t} \cos(\omega t) + jKe^{\sigma t} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

- $s = \sigma + j\omega$ 为复数，称为复频率
- σ, ω 均为实常数

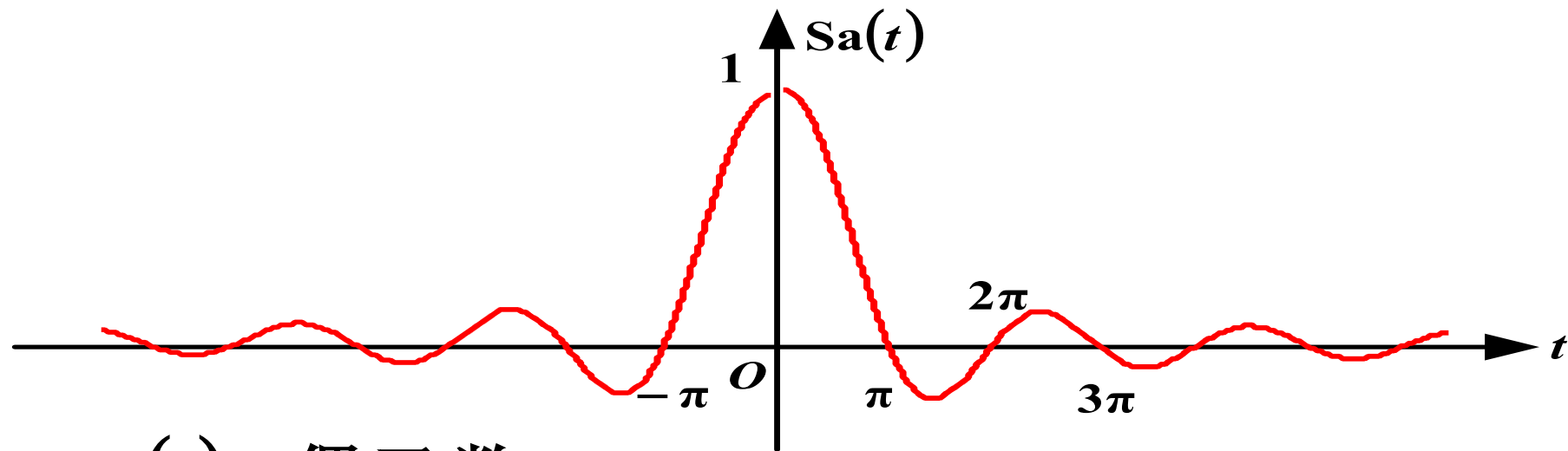
讨论

$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 0, \omega = 0 & \text{直流} \\ \sigma > 0, \omega = 0 & \text{升指数信号} \\ \sigma < 0, \omega = 0 & \text{衰减指数信号} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = 0, \omega \neq 0 & \text{等幅} \\ \sigma > 0, \omega \neq 0 & \text{增幅} \\ \sigma < 0, \omega \neq 0 & \text{衰减} \end{array} \right.$	振荡

4. 抽样信号 (Sampling Signal)

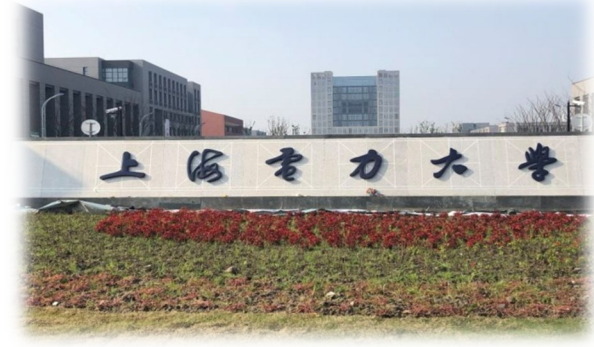
$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

性质



- ① $\text{Sa}(-t) = \text{Sa}(t)$, 偶函数
- ② $t = 0$, $\text{Sa}(t) = 1$, 即 $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Sa}(t) = 1$
- ③ $\text{Sa}(t) = 0$, $t = \pm n\pi$, $n = 1, 2, 3 \dots$
- ④ $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$
- ⑤ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{Sa}(t) = 0$
- ⑥ $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t) = \text{Sa}(\pi t)$

§ 1.3 信号的运算



一. 信号的自变量的变换 (波形变换)

1.信号的移位

2.信号的反褶

3.信号的展缩 (尺度变换)

4.一般情况

1. 信号的平移

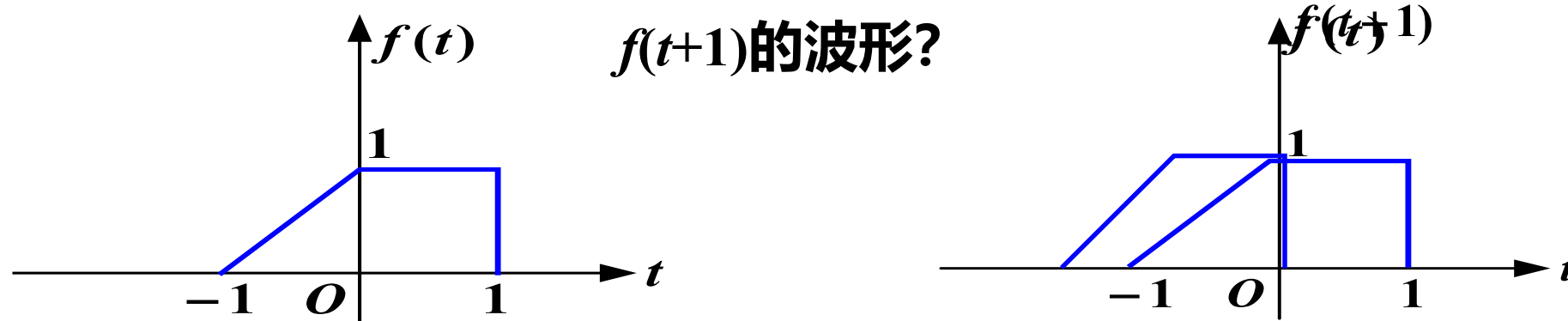
$$f(t) \rightarrow f(t - \tau)$$

将信号 $f(t)$ 沿 t 轴平移 τ 即得时移信号 $f(t - \tau)$, τ 为常数

$\tau > 0$, 右移(滞后)

$\tau < 0$, 左移(超前)

例:



宗量相同, 函数值相同, 求新坐标

根据原信号 $f(t)$ 有 $f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 0$

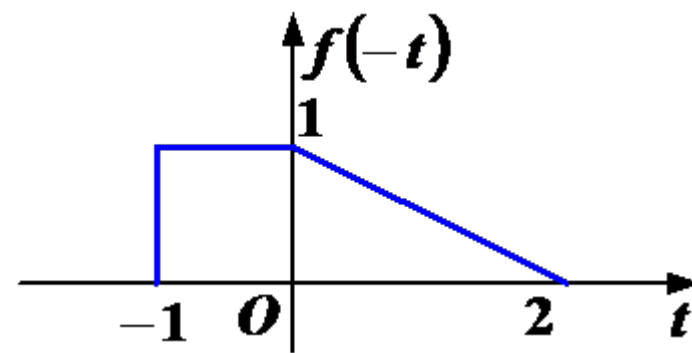
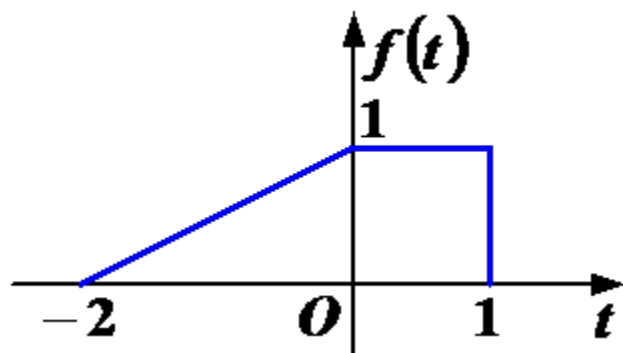
$$\therefore f(t+1)|_{t+1=-1} = 0 \Rightarrow t = -2, f(t+1) = 0$$

2. 反褶

$$f(t) \longrightarrow f(-t)$$

以纵轴为轴折叠，把信号的过去与未来对调。

例：



3. 信号的展缩 (Scale Changing)

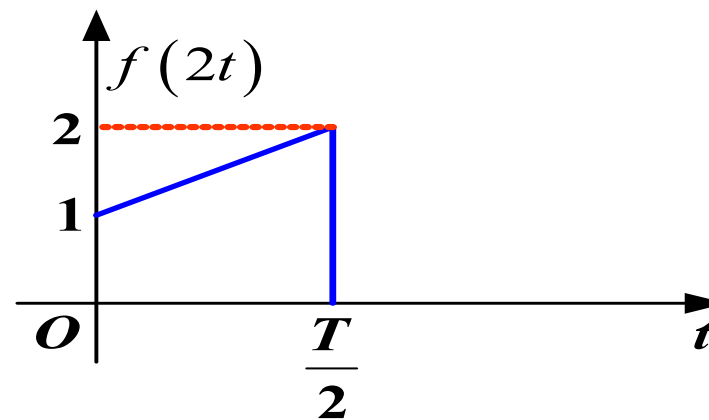
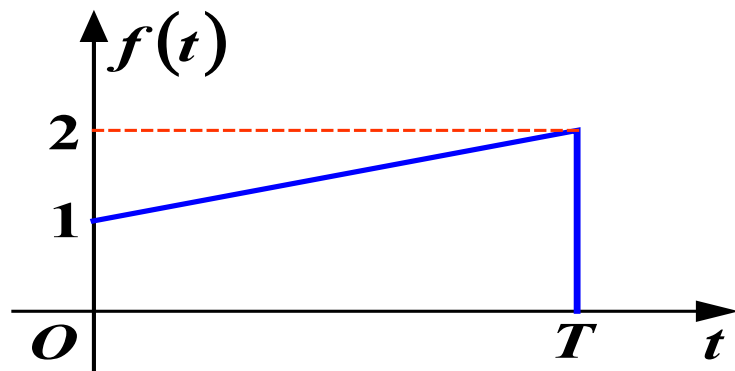
$f(t) \rightarrow f(at)$ **波形的压缩与扩展, 标度变换**

- 当 $a > 1$ 时, 信号波形压缩, 保持信号的时间缩短
- 当 $0 < a < 1$ 时, 信号波形扩展, 保持信号的时间增长

例子

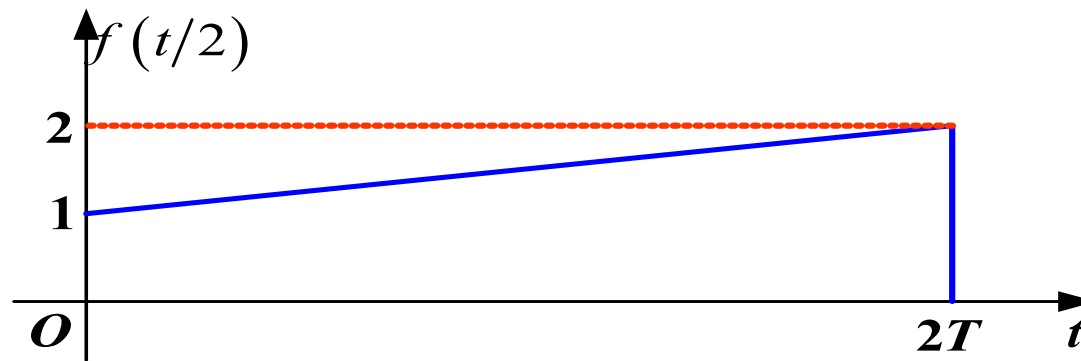
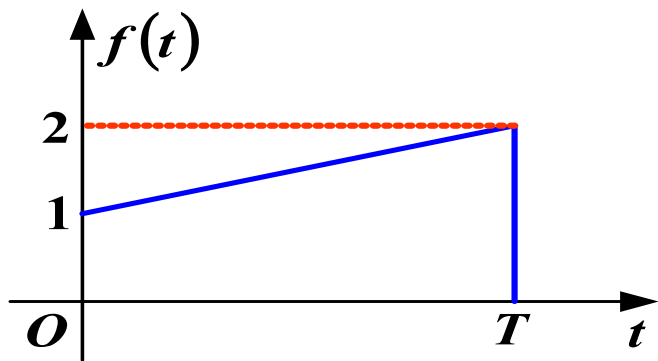
例：已知 $f(t)$ ，画出 $f(2t)$ 和 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 的波形。

$$f(t) \rightarrow f(2t)$$



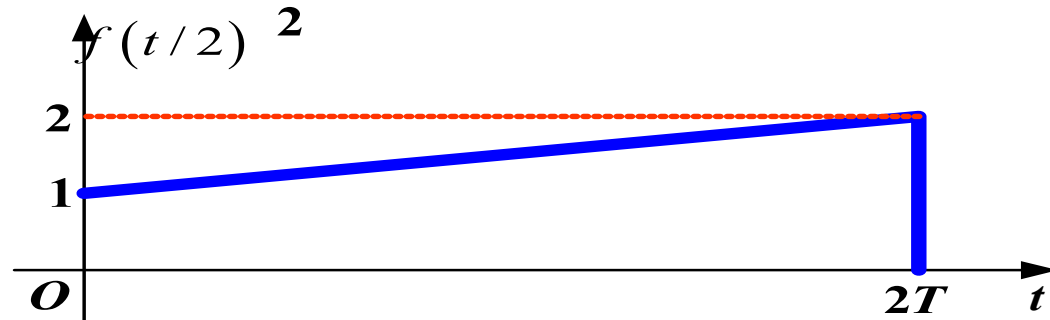
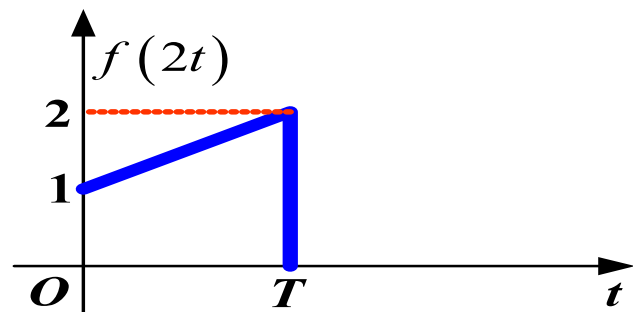
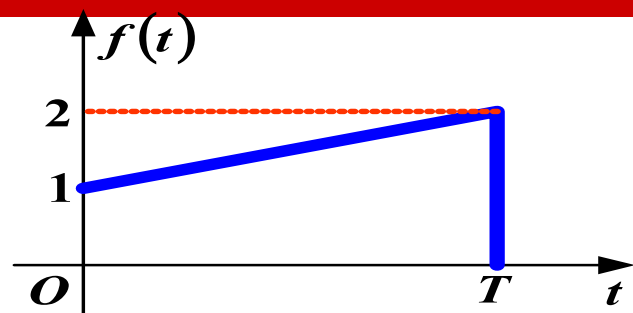
$t \rightarrow 2t$ ，时间尺度增加，波形压缩。

$$f(t) \rightarrow f(t/2)$$



时间尺度压缩: $t \rightarrow t/2$, 波形扩展

比较



- 三个波形相似，都是 t 的一次函数。
- 但由于自变量 t 的系数不同，则达到同样函数值 2 的时间不同。
- 时间变量乘以一个系数等于改变观察时间的标度。

4. 一般情况

$$f(t) \rightarrow f(at \pm b) \text{ 或 } f(-at \pm b) \quad (\text{设 } a > 0)$$

1: 先展缩: $a > 1$, 压缩 a 倍; $a < 1$, 扩展 $1/a$ 倍

后平移: $+$, 左移 b/a 单位; $-$, 右移 b/a 单位

加上反褶: $f(-at \pm b) = f[-a(t \mp b/a)]$

一般情况

2: 先平移: $+$, 左移 b 单位; $-$, 右移 b 单位

后展缩: $a > 1$, 压缩 a 倍; $a < 1$, 扩展 $1/a$ 倍

加上反褶: $f(-at \pm b) = f[-a(t \mp b/a)]$

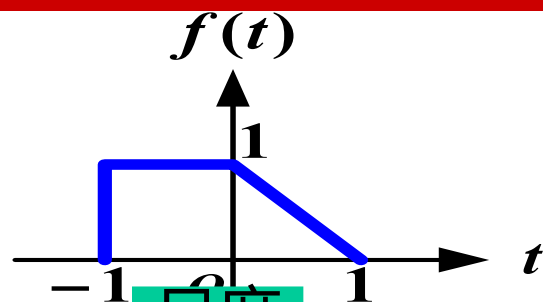


注意!

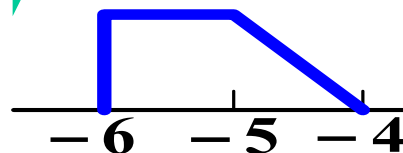
一切变换都是相对 t 而言

例题1 已知 $f(t)$, 求 $f(3t+5)$ 。

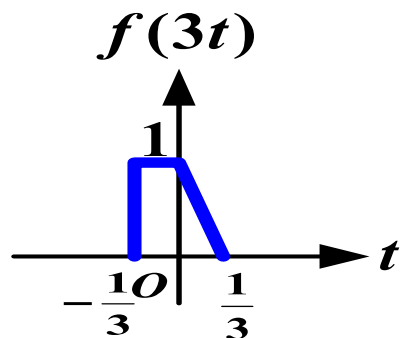
解:



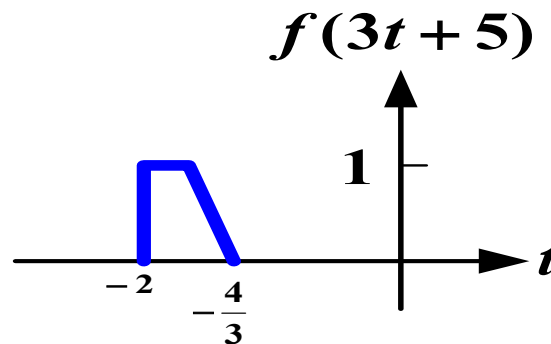
左移5



尺度
变换



左移 $\frac{5}{3}$

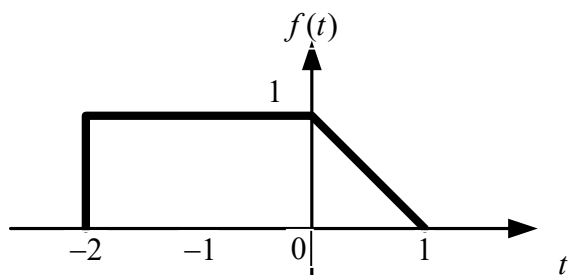


验证: 计算特殊点

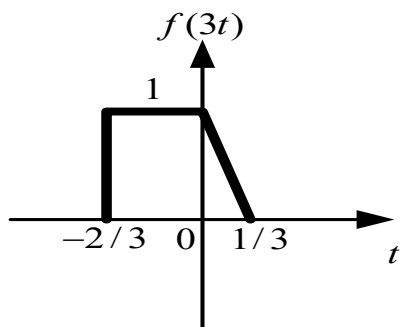
变量 t	变量 $3t+5$	函数值
$t=-1$	$3t+5=-1, t=-2$	1
$t=0$	$3t+5=5, t=-5/3$	1
$t=1$	$3t+5=8, t=-4/3$	0

例题2 已知 $f(t)$, 求 $f(-3t-2)$ 。

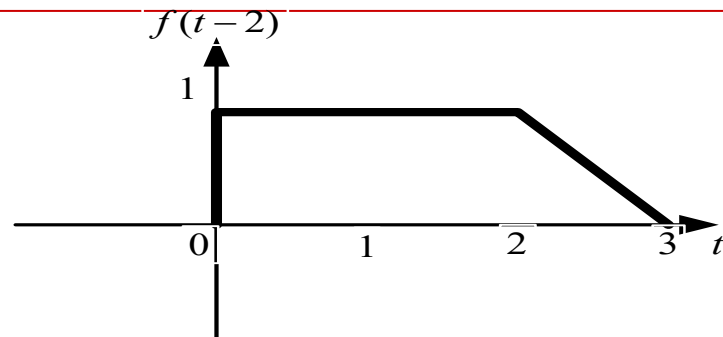
解:



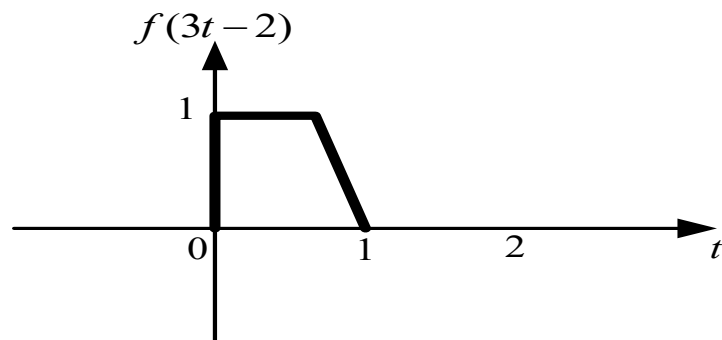
尺度
变换



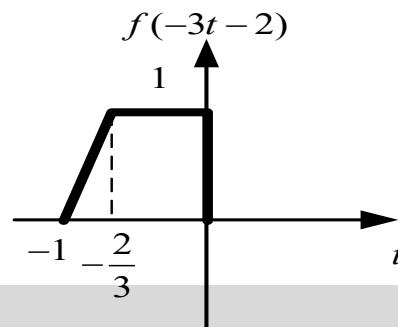
右移2



尺度
变换



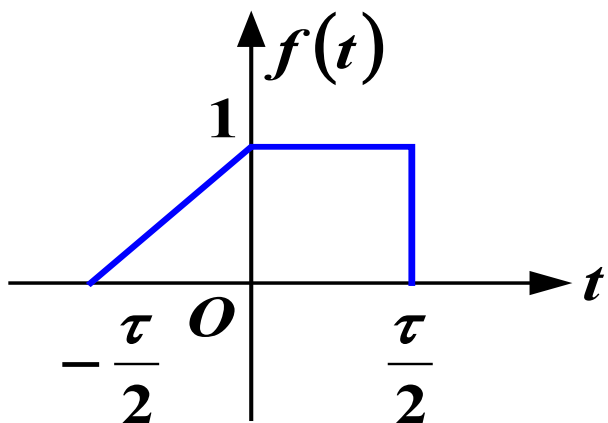
右移2/3



反褶

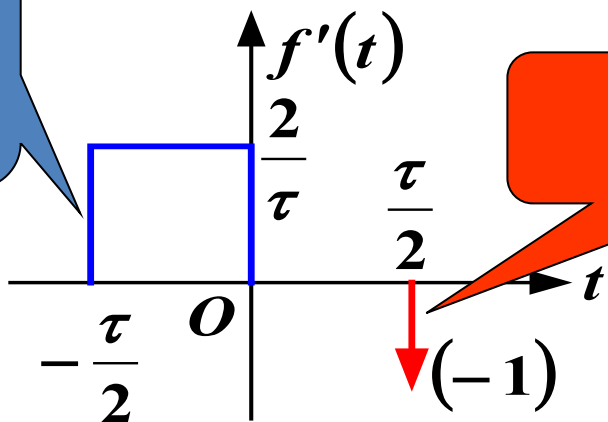
二. 微分和积分

$$\text{微分: } f'(t) = \frac{d f(t)}{d t}$$



$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\tau}t + 1 & -\frac{\tau}{2} \leq t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{\tau}{2} \\ 1/2 & t = \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

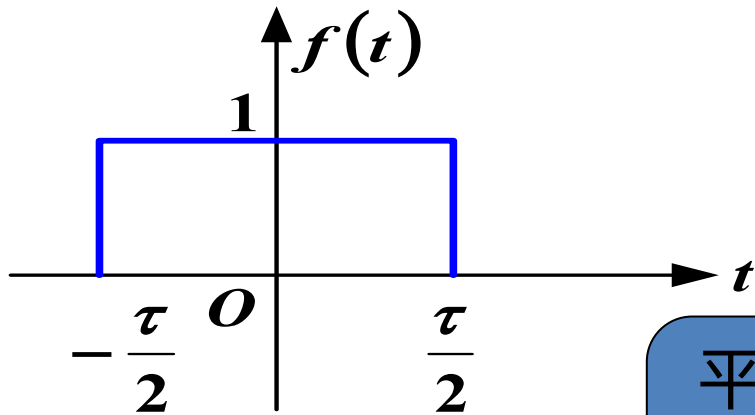
突现信号的
变化部分



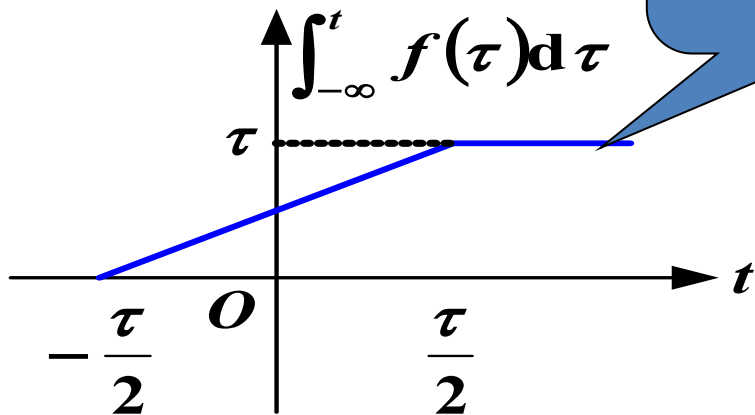
冲激信号

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

积分: $f^{-1}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$



平滑信号的
突变部分

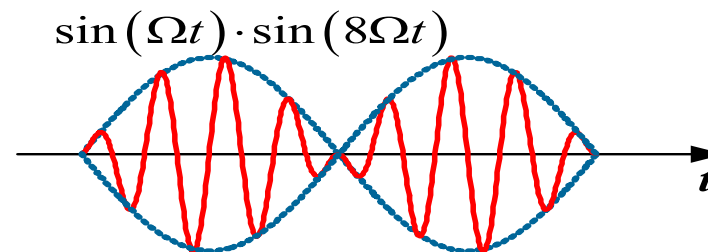
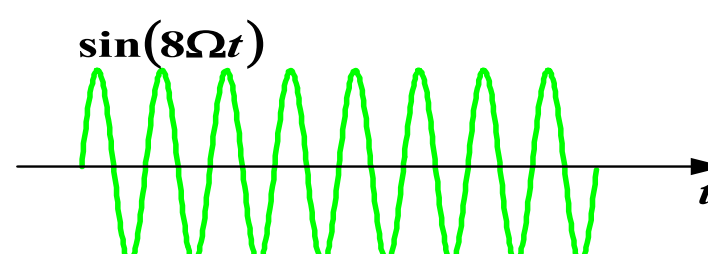
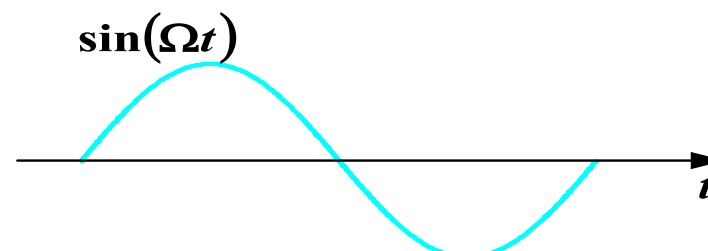
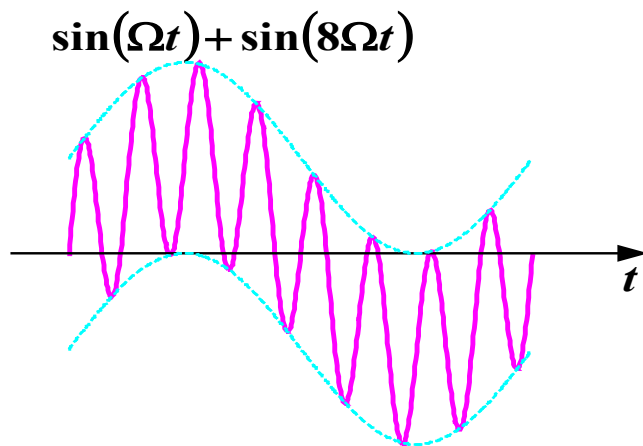
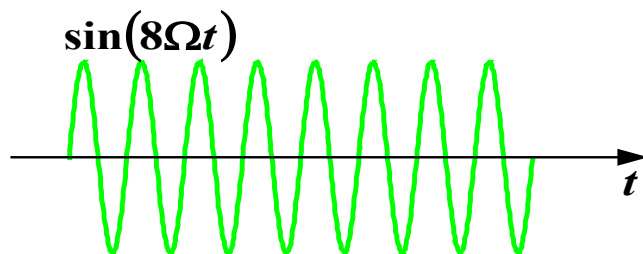
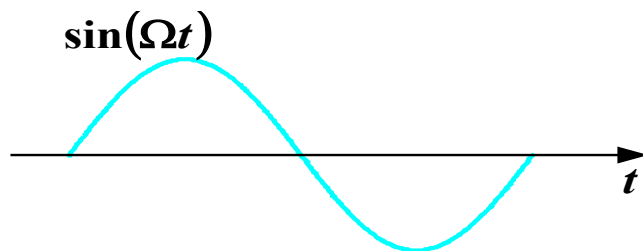


$$f(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 1/2 & t = -\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

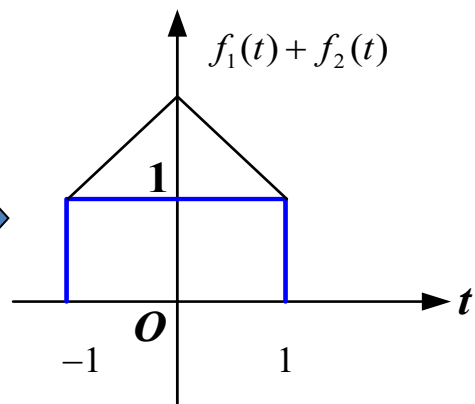
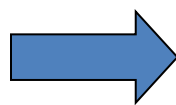
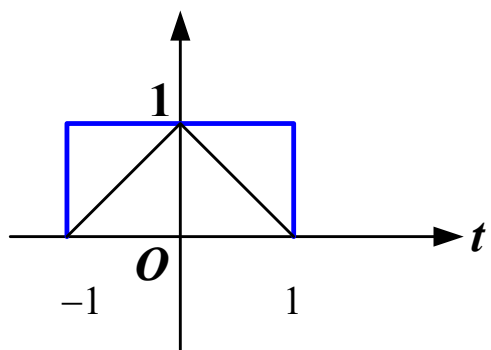
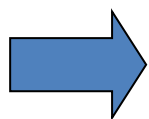
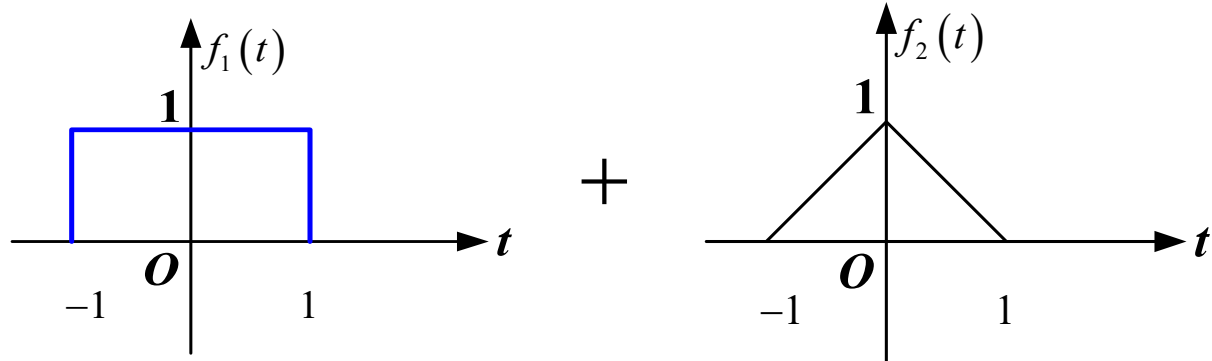
$$f^{(-1)}(t) = \begin{cases} 1 & t > \frac{\tau}{2} \\ t + \frac{\tau}{2} & -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

三. 两信号相加和相乘

同一瞬时两信号对应值相加（相乘）。

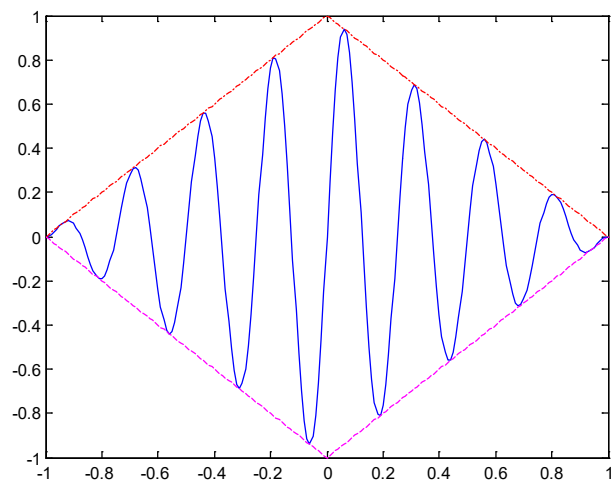
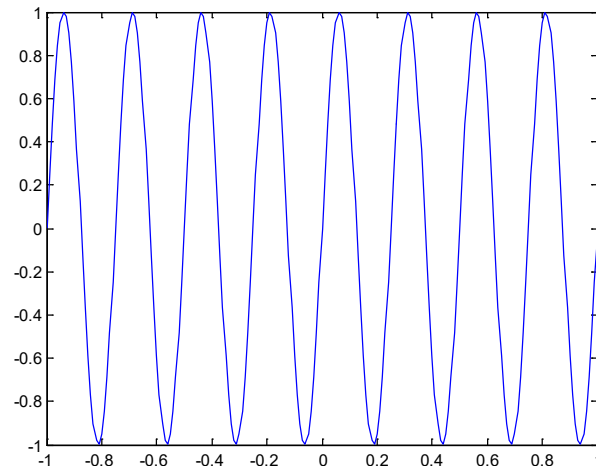
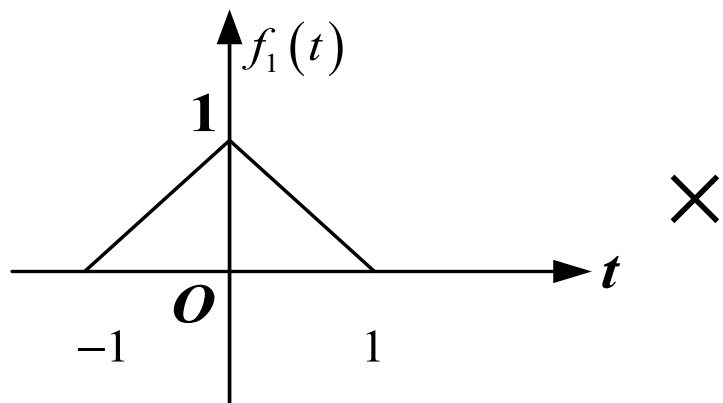


例题：



例题：

$$f_2(t) = \sin 8\pi t$$





§ 1.4 阶跃信号和冲激信号



本节介绍

函数本身有不连续点(跳变点)或其导数与积分有不连续点的一类函数统称为奇异信号或奇异函数。

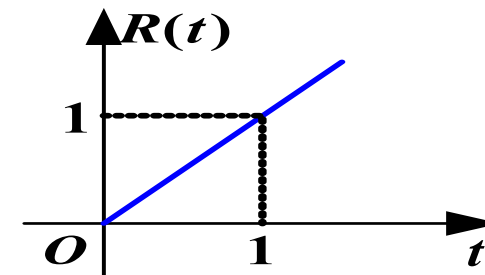
主要内容：

- 单位斜变信号**
- 单位阶跃信号**
- 单位冲激信号**
- 冲激偶信号**

一. 单位斜变信号

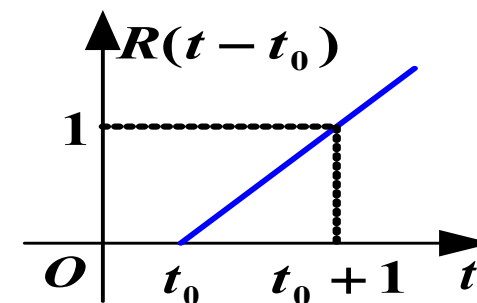
1. 定义

$$R(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$



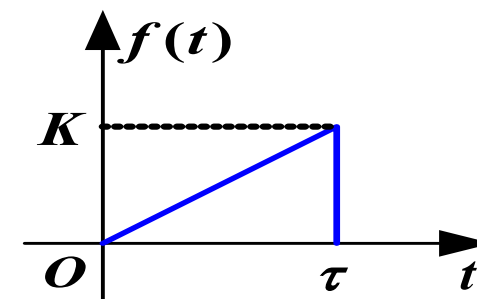
2. 有延迟的单位斜变信号

$$R(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ t - t_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$



3. 三角形脉冲

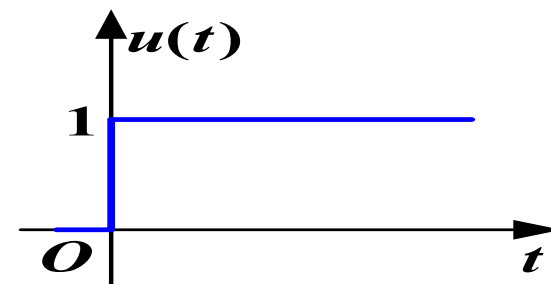
$$f(t) = \begin{cases} \frac{K}{\tau} R(t) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



二. 单位阶跃信号

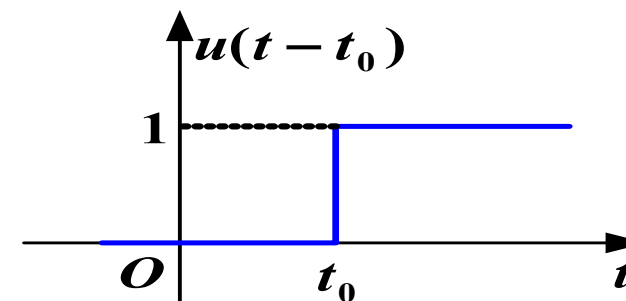
1. 定义

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad \text{0点无定义或}\frac{1}{2}$$

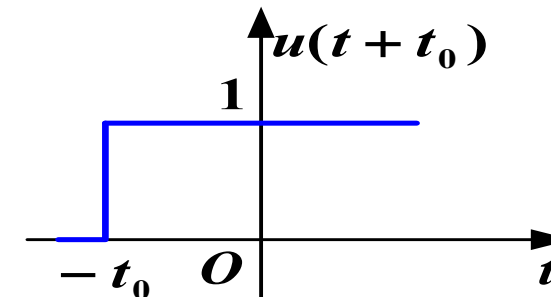


2. 有延迟的单位阶跃信号

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}, \quad t_0 > 0$$



$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0 & t < -t_0 \\ 1 & t > -t_0 \end{cases}, \quad t_0 > 0$$



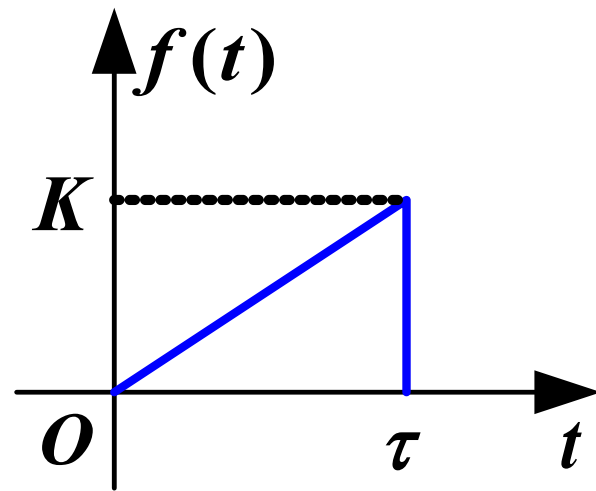
3. 用单位阶跃信号描述其他信号

解：信号持续时间 $[0, \tau]$ ，

可表示为 $u(t) - u(t - \tau)$

在该区间内信号的变化规律是 Kt/τ

$$\therefore f(t) = \frac{K}{\tau} t [u(t) - u(t - \tau)]$$

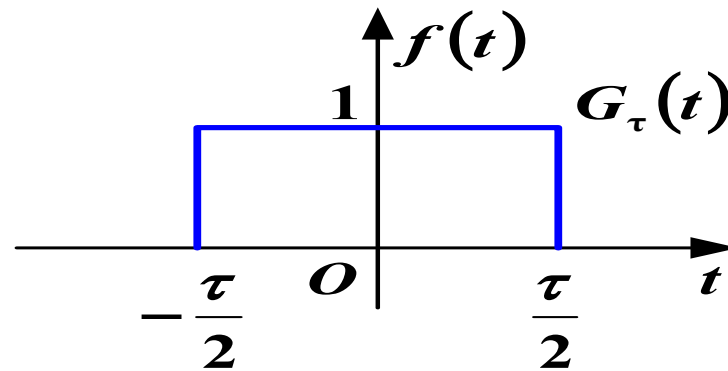


3. 用单位阶跃信号描述其他信号

门函数：也称窗函数

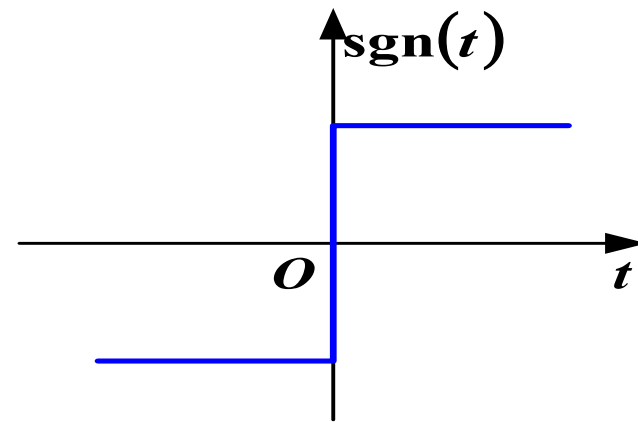
$$f(t) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

其他函数只要用门函数处理(乘以门函数)，就只剩下门内的部分。



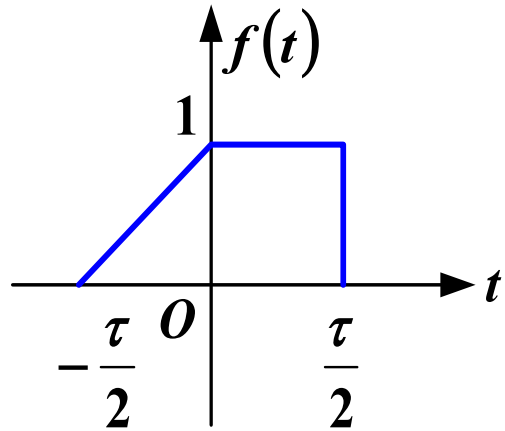
符号函数：(Signum)

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$



$$\text{sgn}(t) = -u(-t) + u(t) = 2u(t) - 1 \quad u(t) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(t) + 1]$$

利用阶跃信号表示分段函数



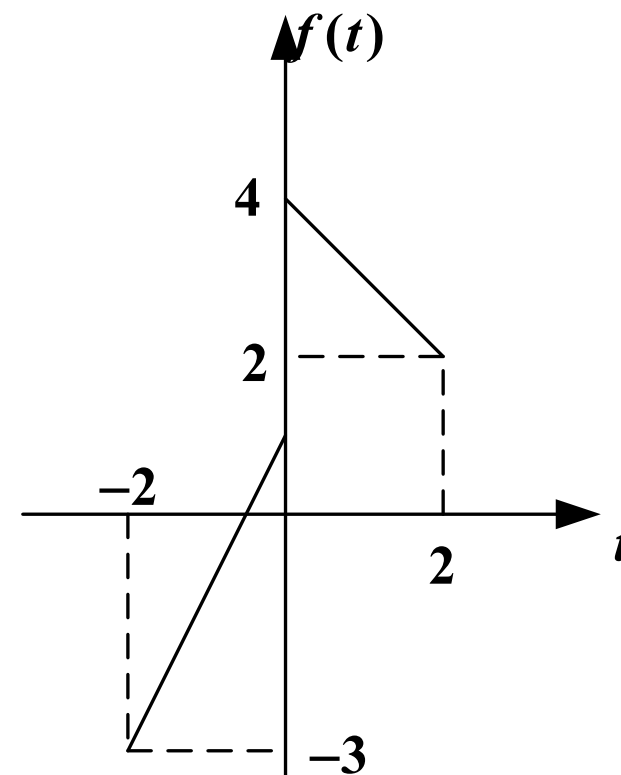
$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\tau}t + 1 & -\frac{\tau}{2} \leq t < 0 \\ 1 & 0 < t < \frac{\tau}{2} \\ 1/2 & t = \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(\frac{2}{\tau}t + 1 \right) \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) \right] + \left[u(t) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{2}{\tau}t + 1 \right) u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{2}{\tau}tu(t) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

画出信号的波形

$$f(t) = (2t + 1)u(t + 2) - (3t - 3)u(t) + (t - 4)u(t - 2)$$

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ 2t + 1, & -2 \leq t < 0 \\ 2t + 1 - (3t - 3) = -t + 4, & 0 \leq t < 2 \\ 2t + 1 - (3t - 3) + (t - 4) = 0, & t \geq 2 \end{cases}$$



三. 单位冲激 (难点)

冲激函数用来描述在极短时间内取值极大的物理量，如瞬间作用的冲击力，雷击闪电等。

定义1：狄拉克(Dirac)函数

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{d} t = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad (t \neq 0) \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{d} t = \int_{0-}^{0+} \delta(t) \mathrm{d} t$$

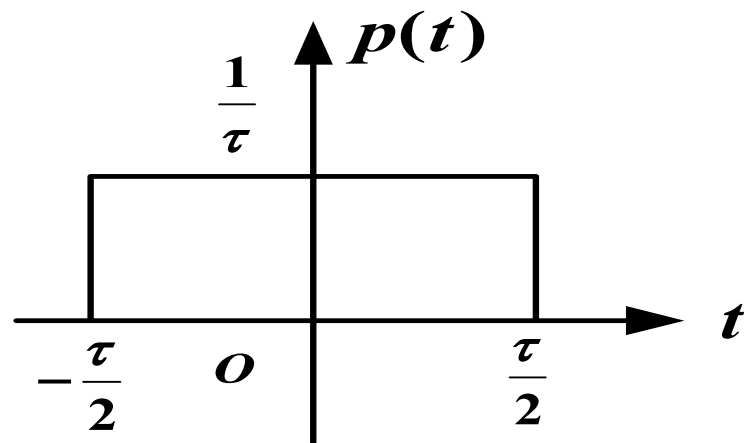
- 函数值只在 $t = 0$ 时不为零；
- 积分面积为1；
- $t = 0$ 时, $\delta(t) \rightarrow \infty$, 为无界函数。

定义2

$$p(t) = \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$\tau \rightarrow 0$

面积1; 脉宽↓; 脉冲高度↑;
则窄脉冲集中于 $t=0$ 处。

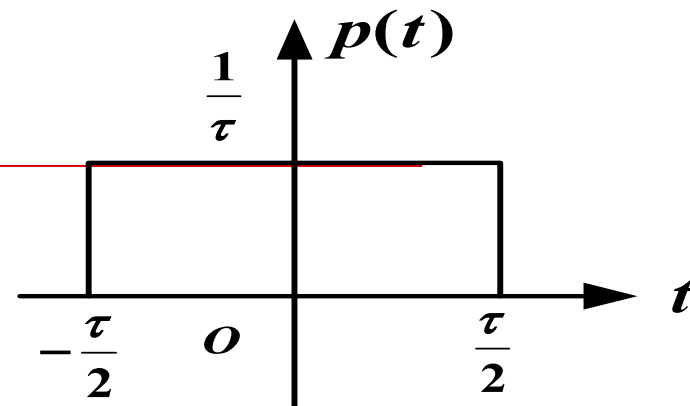


$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p(t)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

描述

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$



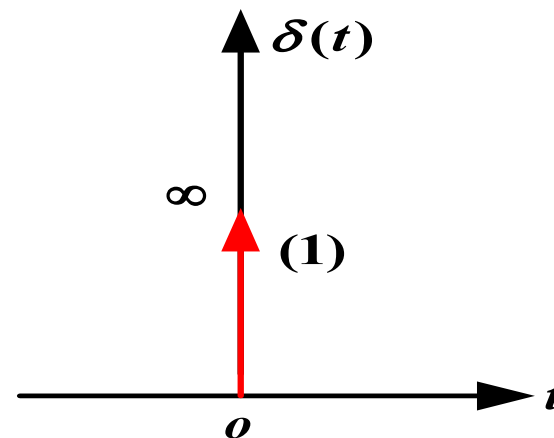
若面积为 k ，则强度为 k 。

三个特点:

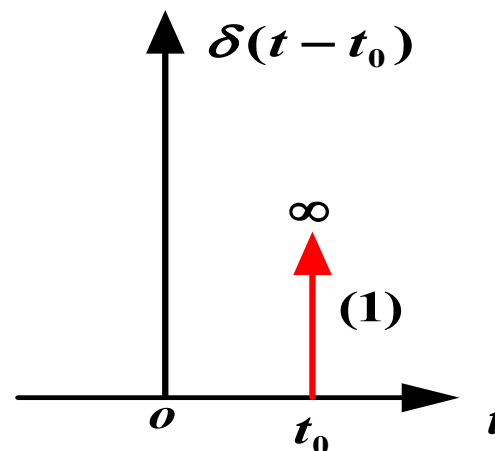
★面积为1

★宽度为0

★ 幅度 $\begin{cases} \text{无穷} & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$



三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲、抽样函数取 $\tau \rightarrow 0$ 极限，都可以认为是冲激函数。



$$\begin{cases} \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \mathrm{d}\tau = 1 & , \quad t > 0 \\ \int_{-\infty}^t \delta(\tau) \mathrm{d}\tau = 0 & , \quad t < 0 \end{cases},$$

与 $u(t)$ 的定义相同，因此可以得到

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) \mathrm{d}\tau = u(t),$$

$$\text{反之, } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t) = \delta(t)$$

冲激函数的性质

为了信号分析的需要，人们构造了 $\delta(t)$ 函数。就时间 t 而言， $\delta(t)$ 可以当作时域连续信号处理，因为它符合时域连续信号运算的某些规则。但由于 $\delta(t)$ 是一个广义函数，它有一些特殊的性质。

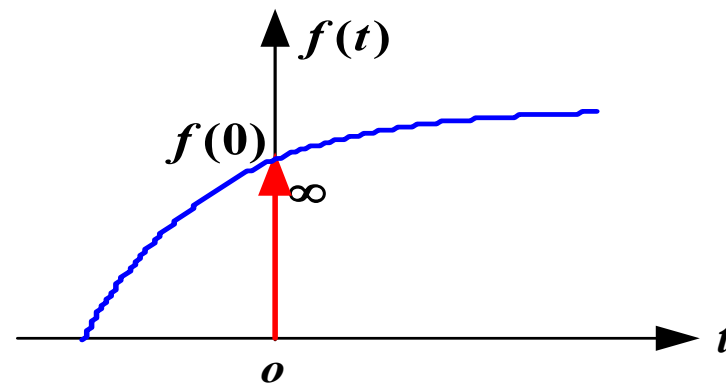
1. 抽样性
2. 奇偶性
3. 冲激偶
4. 标度变换

1. 抽样性(筛选性)

如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 且处处有界, 则有

$$\delta(t)f(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0)$$



对于移位情况:

$$\delta(t-t_0)f(t) = f(t_0)\delta(t-t_0) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t) dt = f(t_0)$$

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+\pi/4)\cos(t) dt = ?$

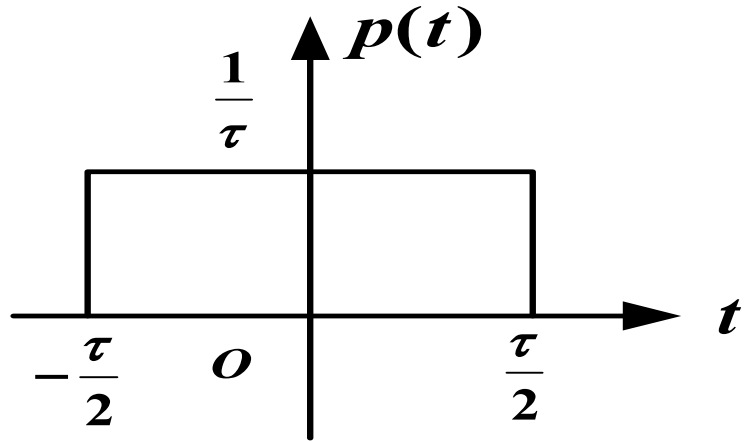
2. $\int_0^{\infty} \delta(t+\pi/4)\cos(t) dt = 0$

解: $= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+\pi/4)\cos(-\pi/4) dt$

$$= \cos(\pi/4) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+\pi/4) dt = \sqrt{2}/2$$

2. 奇偶性

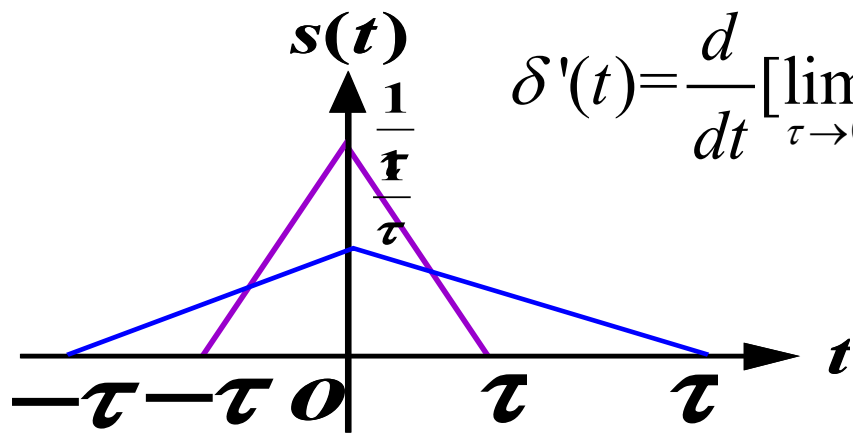
$$\delta(t) = \delta(-t)$$



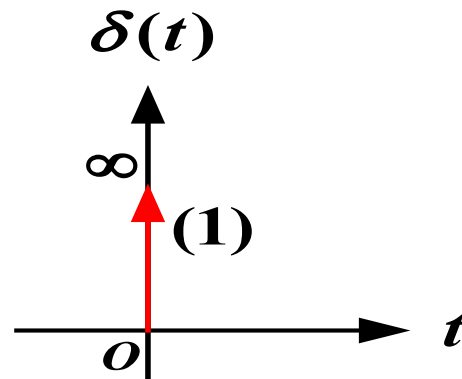
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p(t)$$

$$\delta(-t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} p(-t)$$

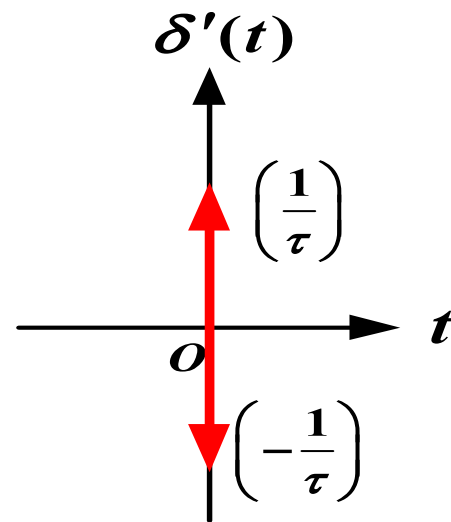
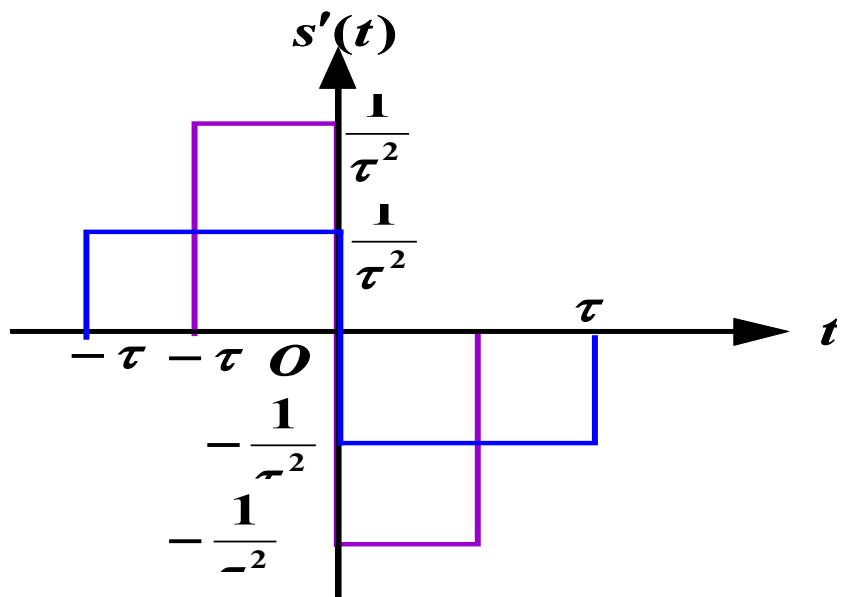
3. 冲激偶—冲激函数的微分 $\delta'(t) = \frac{d}{dt}[\delta(t)]$



$$\delta'(t) = \frac{d}{dt} \left[\lim_{\tau \rightarrow 0} s(t) \right] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\frac{d}{dt} s(t) \right]$$



$\tau \rightarrow 0$



冲激偶的性质

① $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) f(t) dt = -f'(0)$

证明

对 $\delta(t)$ 的 k 阶导数: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(k)}(t) f(t) dt = (-1)^k f^{(k)}(0)$

时移, 则: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t - t_0) f(t) dt = -f'(t_0)$

② $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$, $\int_{-\infty}^t \delta'(t) dt = \delta(t)$

③ $\delta'(t)$ 是奇函数

$$\delta'(-t) = -\delta'(t),$$

④ $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t),$

4. 对 $\delta(t)$ 的标度变换

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

证明

冲激偶的标度变换

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a} \delta'(t)$$

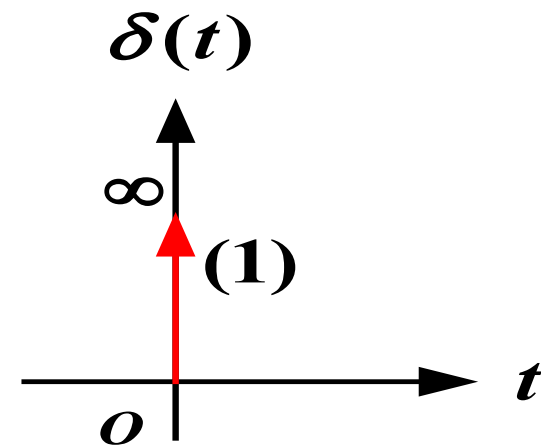
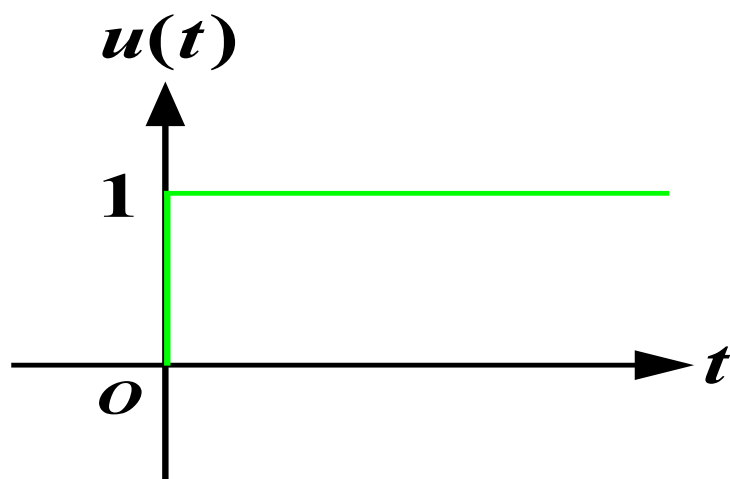
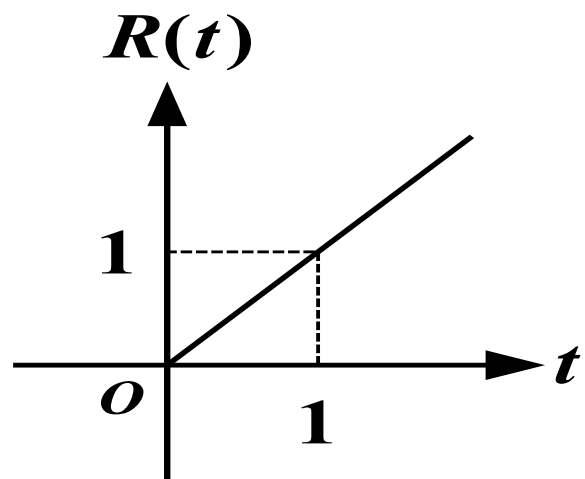
$$\delta^{(k)}(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a^k} \delta^{(k)}(t)$$

$$[\delta(at)]' = a\delta'(at) \Rightarrow \delta'(at) = \frac{1}{a} [\delta(at)]'$$

$$[\delta(at)]' = \left[\frac{1}{|a|} \delta(t) \right]' = \frac{1}{|a|} \delta'(t)$$

$$\therefore \delta'(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{a} \delta'(t)$$

四.总结: $R(t)$, $u(t)$, $\delta(t)$ 之间的关系



求导
↓ ↑
 $R(t)$
↓ ↑
 $u(t)$
↓ ↑
 $\delta(t)$
↓ ↑
 $\delta'(t)$

积分

$(-\infty < t < \infty)$

冲激函数的性质总结

(1) 抽样性

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t) dt = f(0)$$

(2) 奇偶性

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

(3) 比例性

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

(4) 微积分性质

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

(5) 冲激偶

$$\delta'(-t) = -\delta'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^t \delta'(t) dt = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta'(t) dt = -f'(0)$$

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$

(6) 卷积性质(第二章)

$$f(t) * \delta(t) = f(t)$$



§ 1.5 信号的分解

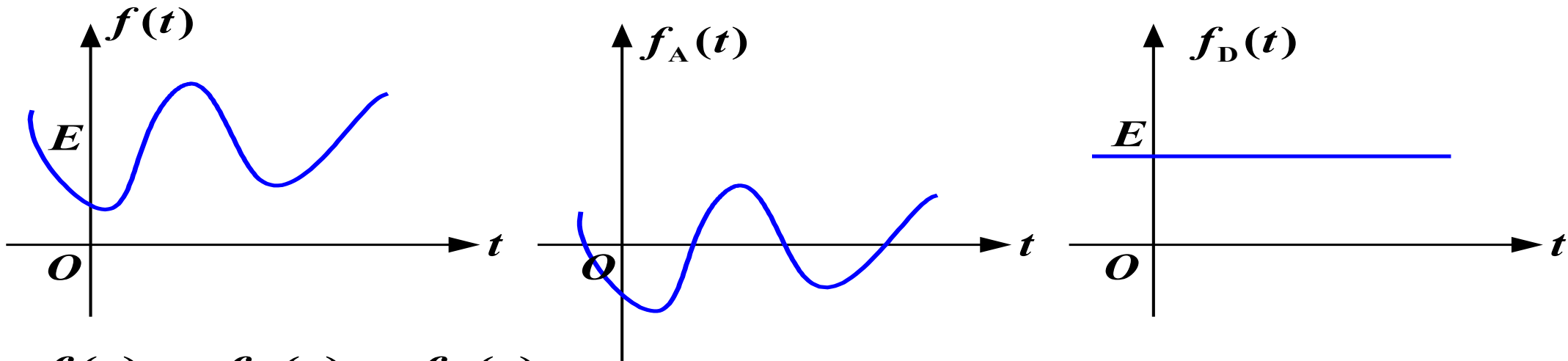


序言

为了便于研究信号的传输和处理问题，往往将信号分解为一些简单(基本)的信号之和，分解角度不同，可以分解为不同的分量

- **直流分量与交流分量**
- **偶分量与奇分量**
- **脉冲分量**
- **实部分量与虚部分量**
- **正交函数分量**
- **利用分形理论描述信号**

一. 直流分量与交流分量



$$f(t) = f_A(t) + f_D(t)$$

$f_D(t)$: 信号的直流分量, 即平均值。

$$f_D(t) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [f_D(t) + f_A(t)]^2 dt = f_D^2(t) + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f_A^2(t) dt$$

信号的平均功率 = 信号的直流功率 + 交流功率

二. 偶分量与奇分量

对任何实信号而言:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \begin{cases} f_e(t): \text{偶分量} \\ f_o(t): \text{奇分量} \end{cases}$$

$$f_e(t) = f_e(-t) \quad \text{e : even}$$

$$f_o(t) = -f_o(-t) \quad \text{o : odd}$$

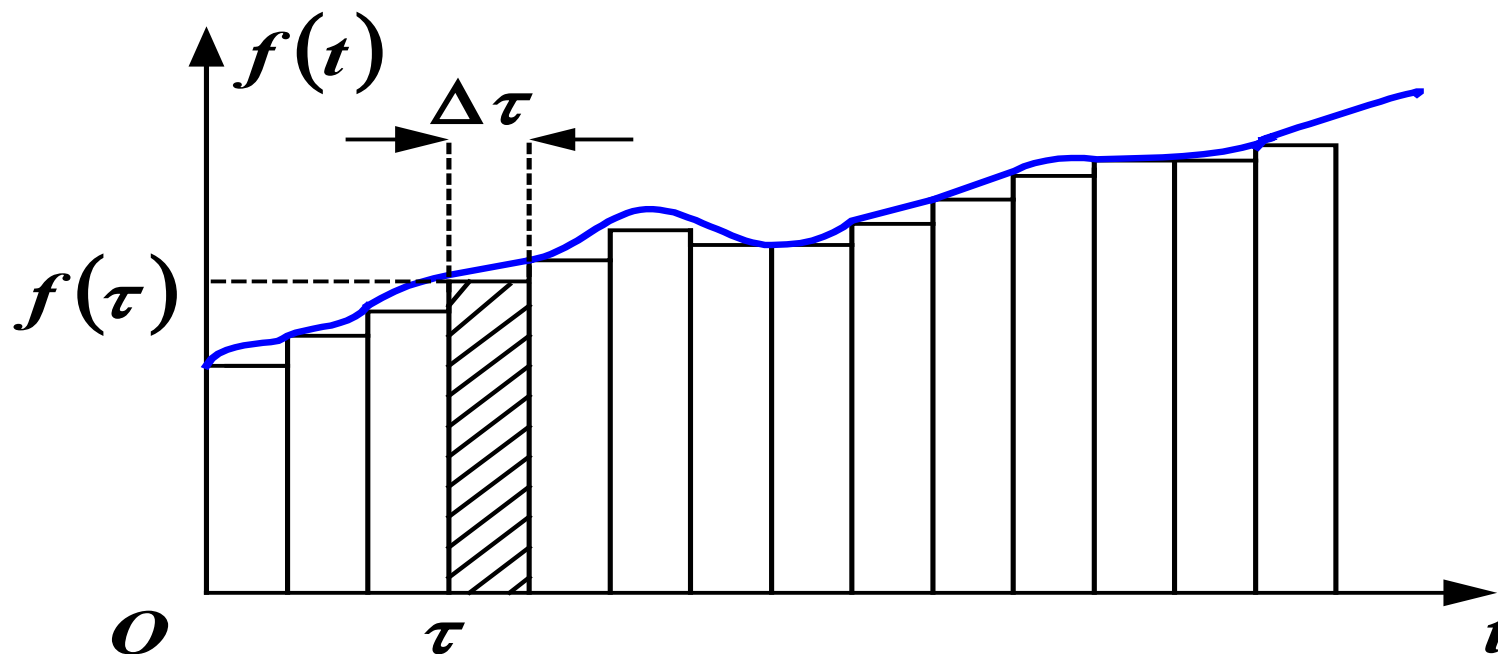
$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$$

信号的平均功率 = 偶分量功率 + 奇分量功率

三. 脉冲分量

1. 矩形窄脉冲序列



当 $t = \tau$,

脉高： $f(\tau)$ ， 脉宽： $\Delta \tau$ ， 存在区间： $u(t - \tau) - u(t - \tau - \Delta \tau)$

此窄脉冲可表示为 $f(\tau)[u(t - \tau) - u(t - \tau - \Delta \tau)]$

从 $\tau = -\infty$ 到 ∞ , $f(t)$ 可表示为许多窄脉冲的叠加

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) [u(t-\tau) - u(t-\tau-\Delta\tau)] \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{[u(t-\tau) - u(t-\tau-\Delta\tau)]}{\Delta\tau} \cdot \Delta\tau \end{aligned}$$

令 $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{[u(t-\tau) - u(t-\tau-\Delta\tau)]}{\Delta\tau} = \frac{d u(t-\tau)}{d t} = \delta(t-\tau)$$

$$\Delta\tau \rightarrow d\tau, \quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rightarrow \int_{\tau=-\infty}^{\infty}$$

$$\text{所以 } f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

出现在不同时刻的, 不同强度的冲激函数的和。

四. 实部分量与虚部分量

瞬时值为复数的信号可分解为实虚部两部分之和。

$$f(t) = f_r(t) + \mathbf{j}f_i(t)$$

共轭复函数

$$f^*(t) = f_r(t) - \mathbf{j}f_i(t)$$

即

$$f_r(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f^*(t)] \quad \mathbf{j}f_i(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f^*(t)]$$

实际中产生的信号为实信号，可以借助于复信号来研究实信号。

五. 正交函数分量

如果用正交函数集来表示一个信号，那么，组成信号的分量就是相互正交的。把信号分解为正交函数分量的研究方法在信号与系统理论中占有重要地位，这将是本课程讨论的主要课题。



§ 1.6 系統模型及其分類



一. 信号的时域运算 (基本元件)

1.加法器

2.乘法器

3.标量乘法器 (数乘器, 比例器)

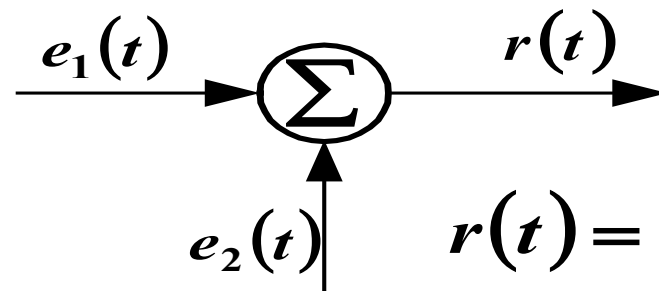
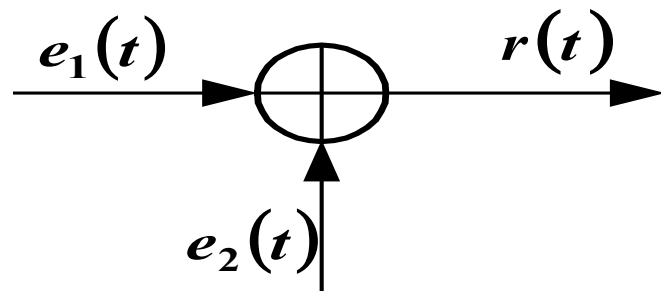
4.微分器

5.积分器

6.延时器

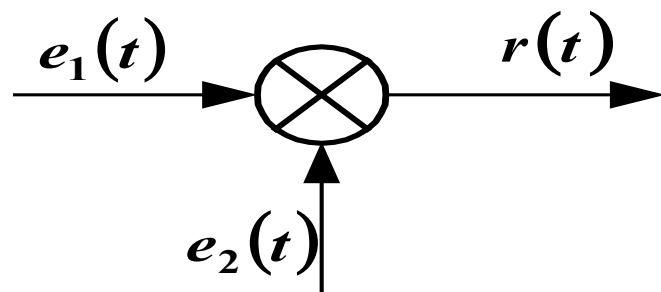
基本元件1

1. 加法器



$$r(t) = e_1(t) + e_2(t)$$

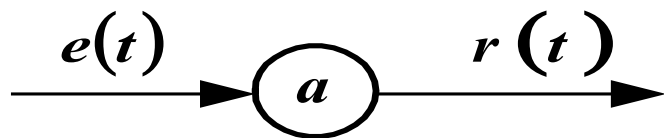
2. 乘法器



$$r(t) = e_1(t) \cdot e_2(t)$$

注意：与公式中的卷积符号相区别，没有卷积器。

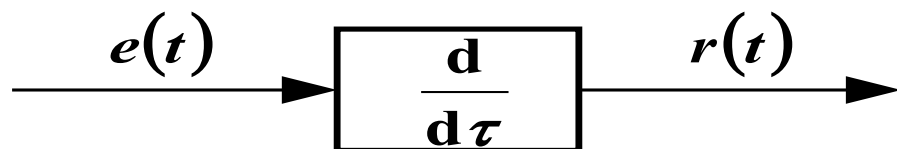
3. 标量乘法器（数乘器，比例器）



$$r(t) = ae(t)$$

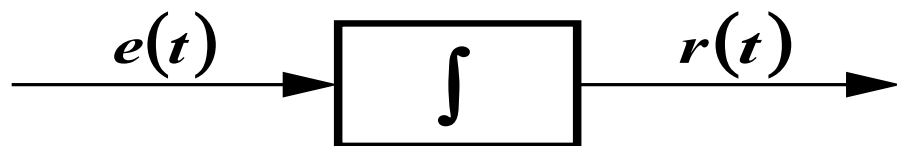
基本元件2

4. 微分器



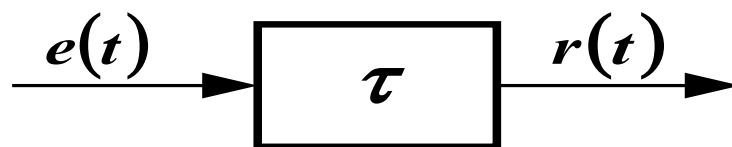
$$r(t) = \frac{de(t)}{dt}$$

5. 积分器

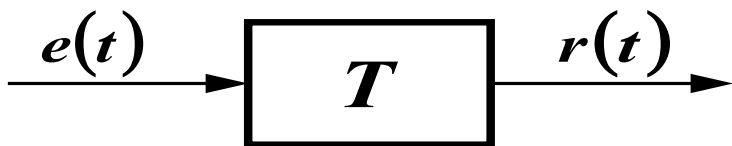


$$r(t) = \int_{-\infty}^t e(t) dt$$

6. 延时器



$$r(t) = e(t - \tau)$$



例1-6-1

请用积分器画出如下微分方程所代表的系统的系统框图。

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d} t^2} + 3 \frac{\mathrm{d} r(t)}{\mathrm{d} t} + 2r(t) = \frac{\mathrm{d} e(t)}{\mathrm{d} t} + e(t)$$

解答

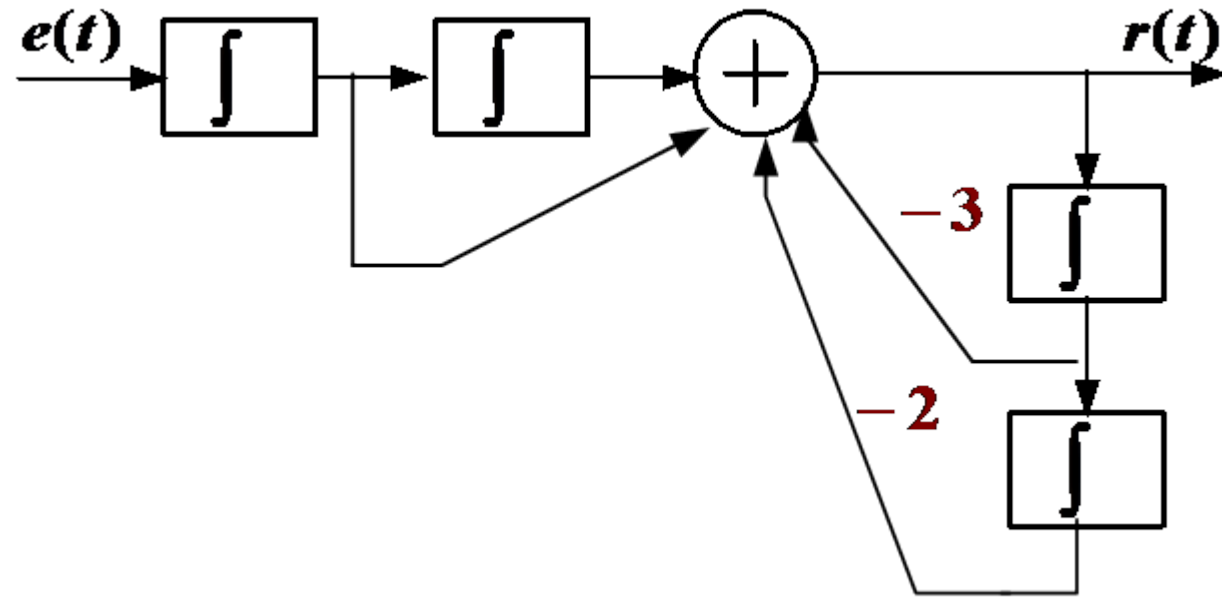
方程左端只保留输出的最高阶导数项

$$\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d} t^2} = -3 \frac{\mathrm{d} r(t)}{\mathrm{d} t} - 2r(t) + \frac{\mathrm{d} e(t)}{\mathrm{d} t} + e(t)$$

积分 $n=2$ 次, 使方程左端只剩下 $r(t)$ 项

$$r(t) = -3 \int r(t) \mathrm{d} t - 2 \iint r(t) \mathrm{d} t + \int e(t) \mathrm{d} t + \iint e(t) \mathrm{d} t$$

系统框图



二. 系统的定义和表示

系统：具有特定功能的总体，可以看作信号的变换器、处理器。

系统模型：系统物理特性的数学抽象。

系统的表示：

数学表达式：系统物理特性的数学抽象。

系统图：形象地表示其功能。

三. 系统的分类

连续时间系统：微分方程

离散时间系统：差分方程

混合系统

即时系统（非记忆系统）：代数方程

动态系统（记忆系统）：微分方程或差分方程

集总参数系统：常微分方程(t)

分布参数系统：偏微分方程(t, x, y, z)

<div> <div>线性系统</div> <div>非线性系统</div> </div>	若系统具有叠加性和均匀性则为线性系统，否则，即为非线性系统。
<div> <div>时变系统</div> <div>非时变系统</div> </div>	若系统的参数不随时间的变化而变化则称为非时变系统，否则，即为时变系统。
<div> <div>因果系统</div> <div>非因果系统</div> </div>	若系统在 t_0 时刻的响应只与 $t = t_0$ 和 $t < t_0$ 时刻的输入有关，否则，即为非因果系统。
<div> <div>可逆系统</div> <div>不可逆系统</div> </div>	若系统在不同的激励信号作用下产生不同的响应，则称此系统为可逆系统。

重点研究：

确定性信号作用下的集总参数线性时不变系统 。



§ 1.7 线性时不变系统



一. 线性系统与非线性系统

1. 定义

线性系统： 指具有线性特性的系统。

线性：指均匀性，叠加性。

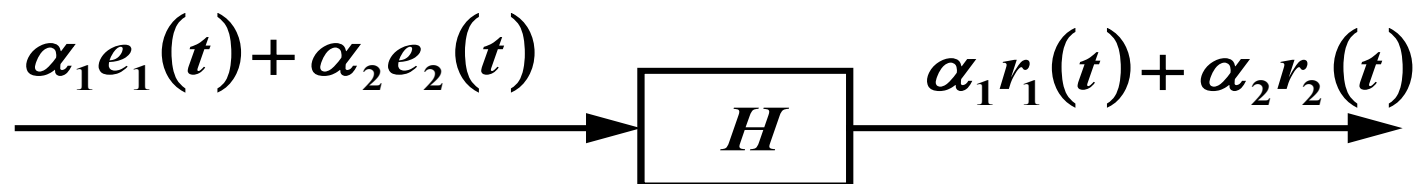
均匀性(齐次性)：

$$e(t) \rightarrow r(t) \Rightarrow ke(t) \rightarrow kr(t)$$

叠加性：

$$\left. \begin{array}{l} e_1(t) \rightarrow r_1(t) \\ e_2(t) \rightarrow r_2(t) \end{array} \right\} \Rightarrow e_1(t) + e_2(t) \rightarrow r_1(t) + r_2(t)$$

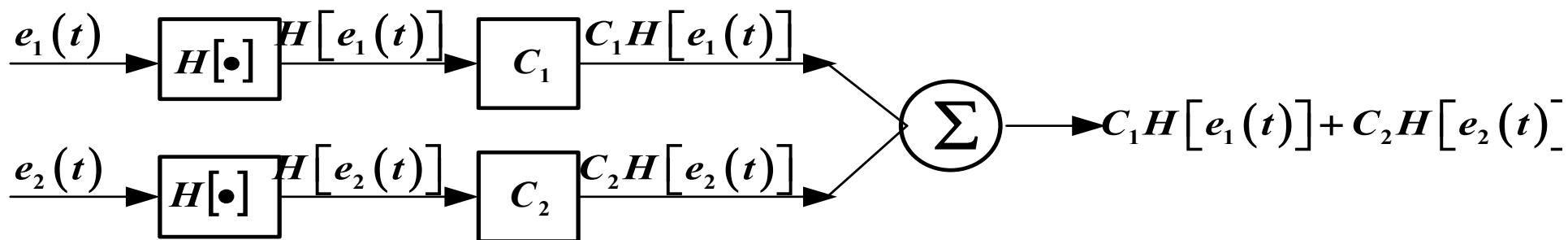
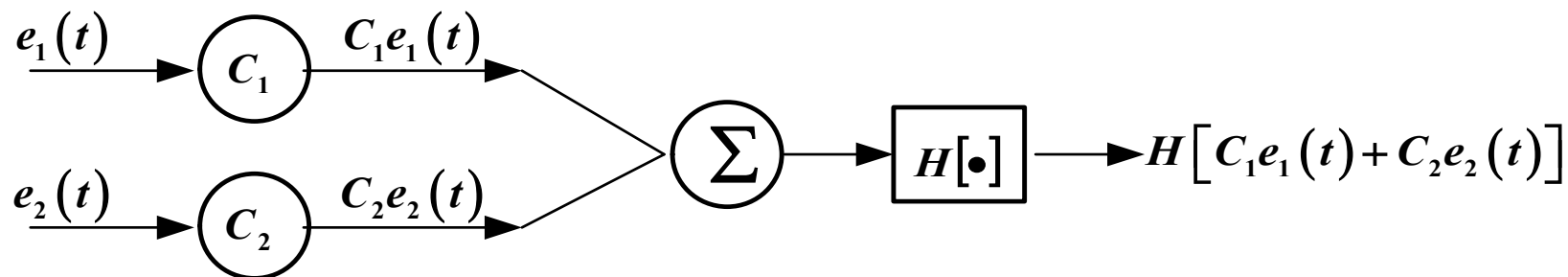
线性



$$\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) \rightarrow \alpha_1 r_1(t) + \alpha_2 r_2(t)$$

2. 判断方法

先线性运算，再经系统 = 先经系统，再线性运算



若 $H[C_1 e_1(t) + C_2 e_2(t)] = C_1 H[e_1(t)] + C_2 H[e_2(t)]$

则系统 $H[\cdot]$ 是线性系统, 否则是非线性系统。

注意：外加激励与系统非零状态单独处理。

例 判断系统 $y(t) = f(t)\cos 2\pi t$ 是否线性？

解：定义两个输入 $e_1(t)$ 和 $e_2(t)$ 对应的响应为 $r_1(t)$ 和 $r_2(t)$,

则 $r_1(t) = a_1 e_1(t) \cos 2\pi t$

$r_2(t) = a_2 e_2(t) \cos 2\pi t$

当输入激励是 $a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t)$ 时，根据原方程有

$$r(t) = (a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t)) \cos 2\pi t$$

$$= a_1 e_1(t) \cos 2\pi t + a_2 e_2(t) \cos 2\pi t$$

$$= a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t)$$

\therefore 线性

二. 时变系统与时不变系统

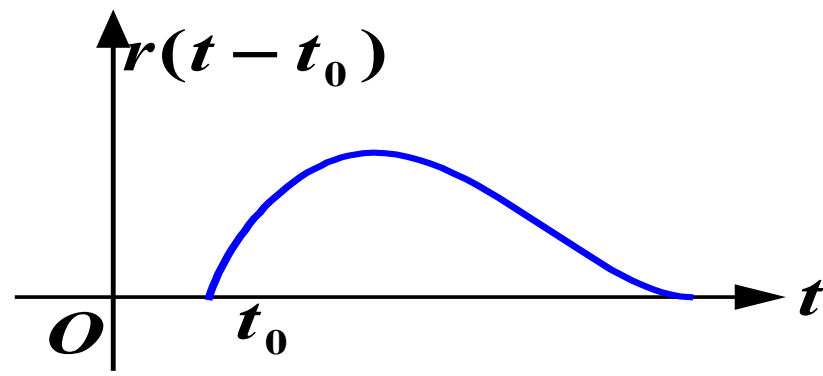
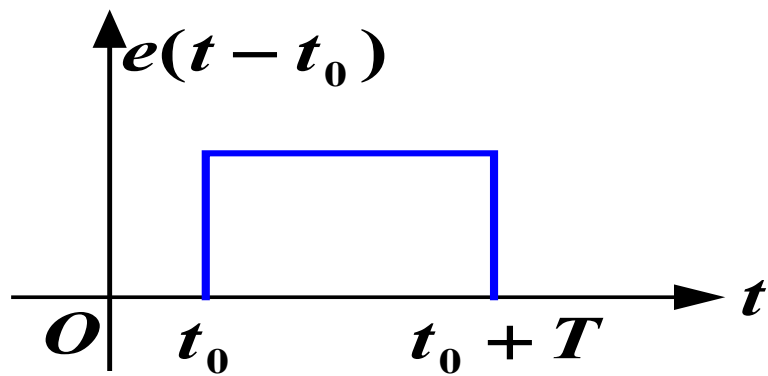
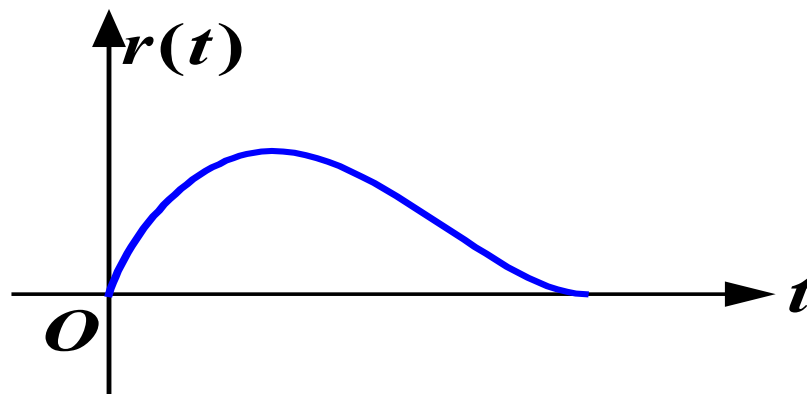
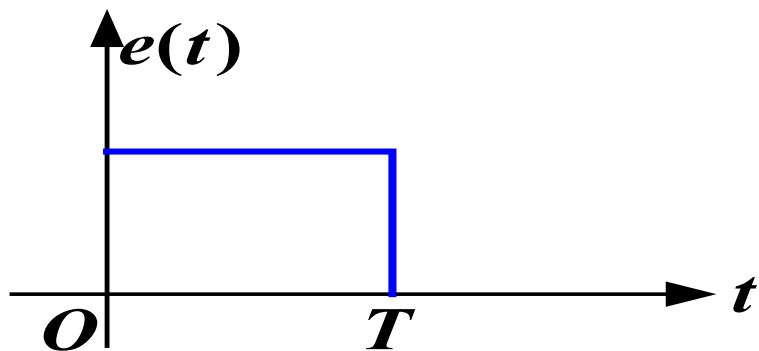
1. 定义

一个系统，在零初始条件下，其输出响应与输入信号施加于系统的时间起点无关，称为非时变系统，否则称为时变系统。

认识:

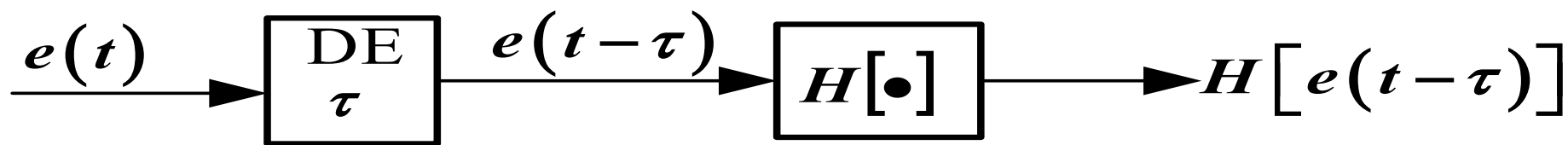
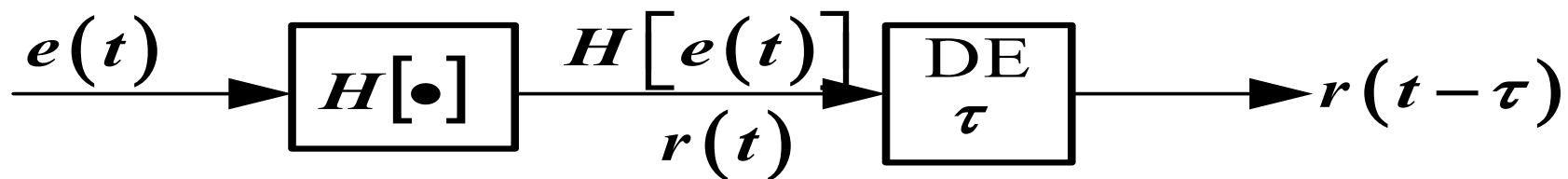
- 电路分析上看:元件的参数值是否随时间而变
- 从方程看:系数是否随时间而变
- 从输入输出关系看:

时不变性



2. 判断方法

先时移，再经系统 = 先经系统，再时移



若 $H[e(t - \tau)] = r(t - \tau)$

则系统 $H[\bullet]$ 是非时变系统, 否则是时变系统。

例

判断下列两个系统是否为非时变系统。

系统1: $r(t) = \cos[e(t)] \quad t > 0$

系统2: $r(t) = e(t) \cdot \cos t \quad t > 0$

解答

1. 系统的作用是对输入信号作余弦运算。

$$(1) e(t) \xrightarrow{\text{时移 } t_0} e(t - t_0) \xrightarrow{\text{经过系统}} r_{11}(t) = \cos e(t - t_0) \quad t > 0$$

$$(2) e(t) \xrightarrow{\text{经过系统}} \cos e(t) \xrightarrow{\text{时移 } t_0} r_{12}(t) = \cos e(t - t_0) \quad t > 0$$

$$r_{11}(t) = r_{12}(t)$$

所以此系统为时不变系统。

系统2: $r(t) = e(t) \cdot \cos t \quad t > 0$

系统作用: 输入信号乘 $\cos t$

$$(1) e(t) \xrightarrow{\text{时移} t_0} e(t - t_0) \xrightarrow{\text{经过系统}} r_{21}(t) = e(t - t_0) \cos t \quad t > 0$$

$$(2) e(t) \xrightarrow{\text{经过系统}} e(t) \cos t \xrightarrow{\text{时移} t_0} r_{22}(t) = e(t - t_0) \cos(t - t_0) \quad t > 0$$

$$r_{21}(t) \neq r_{22}(t)$$

此系统为时变系统。

$r(t) = t \cdot e(t)$ 判断系统是否为线性非时变系统。



是否为线性系统?

$$r_1(t) = te_1(t), r_2(t) = te_2(t),$$

当输入为 $e(t) = a_1e_1(t) + a_2e_2(t)$ 时,

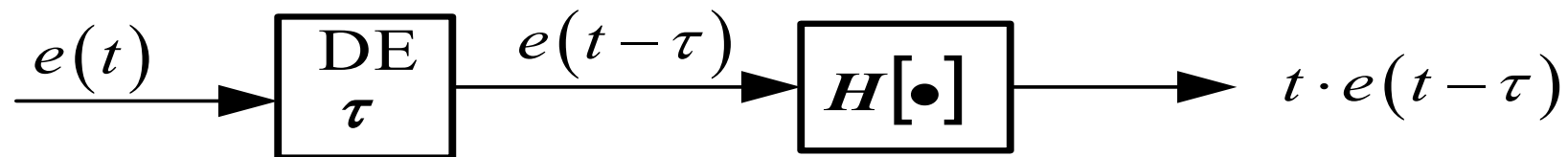
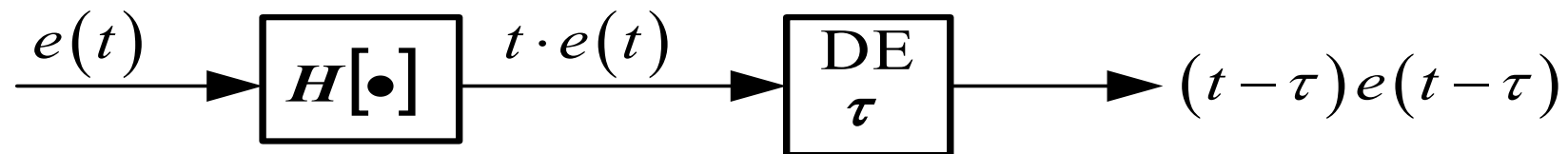
$$r(t) = te(t)$$

$$= t[a_1e_1(t) + a_2e_2(t)]$$

$$= a_1te_1(t) + a_2te_2(t) = a_1r_1(t) + a_2r_2(t)$$

可见,先线性运算,再经系统 = 先经系统,再线性运算,所以此系统是线性系统。

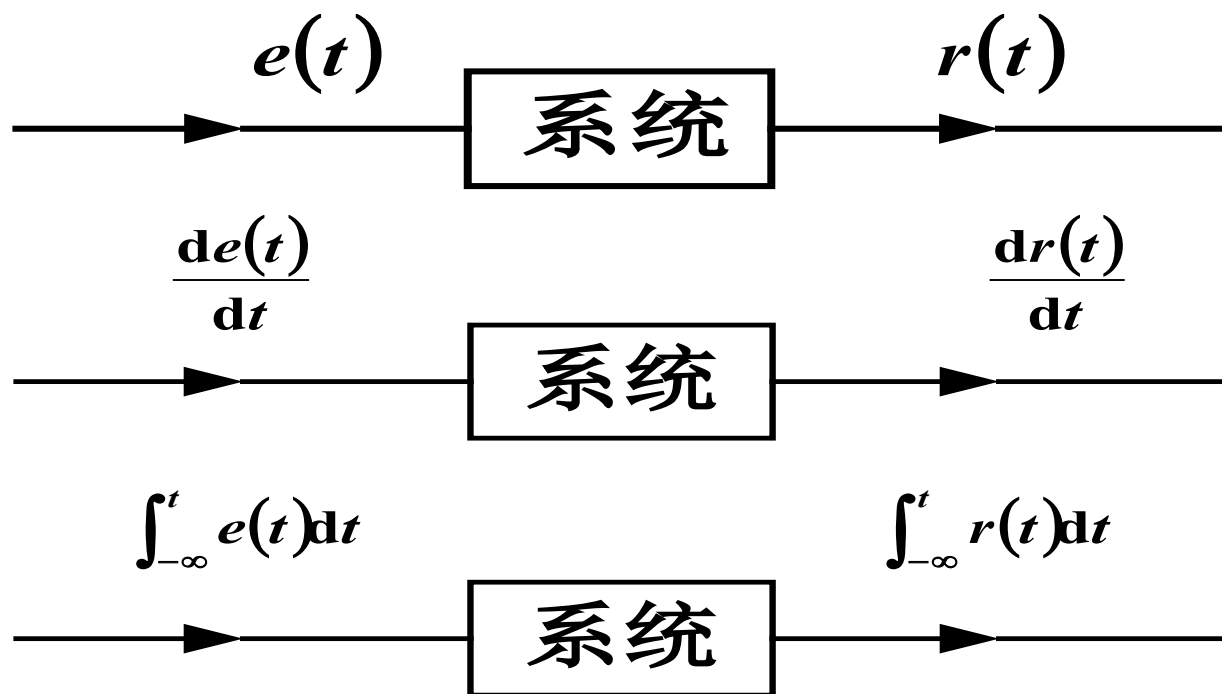
是否为时不变系统?



可见，时移、再经系统 \neq 经系统、再时移，所以此系统是时变系统。

三. 线性时不变系统的微分特性

线性时不变系统满足微分特性、积分特性



利用线性证明，可推广至高阶。

四. 因果系统与非因果系统

1. 定义

因果系统是指当且仅当输入信号激励系统时，才会出现输出（响应）的系统。也就是说，因果系统的输出（响应）不会出现在输入信号激励系统以前的时刻。

系统的这种特性称为因果特性。

符合因果性的系统称为因果系统（非超前系统）。实际的物理可实现系统均为因果系统

2. 判断方法 输出不超前于输入

例

微分方程 $r(t) = e(t) + e(t-2)$ 代表的系统是否是因果系统。

解答

$$t = t_0 \quad r(t_0) = e(t_0) + e(t_0 - 2)$$

现在的响应=现在的激励+以前的激励

所以该系统为因果系统。

微分方程 $r(t) = e(t) + e(t+2)$ 代表的系统是否是因果系统。

解答

$$t = t_0 \quad r(t_0) = e(t_0) + e(t_0 + 2)$$

未来的激励

所以该系统为非因果系统。

3. 因果信号

$t = 0$ 接入系统的信号称为因果信号。

表示为：

$$e(t) = e(t)u(t) \quad \text{相当于 } t < 0, e(t) = 0$$



§ 1.7 系統分析方法



一. 建立系统模型的两种方法

输入——输出描述法:

- 着眼于激励与响应的关系, 而不考虑系统内部变量情况;
- 单输入/单输出系统;
- 列写一元 n 阶微分方程。

状态变量分析法:

- 不仅可以给出系统的响应, 还可以描述内部变量, 如电容电压 $v_C(t)$ 或电感电流 $i_L(t)$ 的变化情况。
- 研究多输入/多输出系统;
- 列写多个一阶微分方程。

二. 数学模型的求解方法

1. 时域分析

- 经典法求解 $\begin{cases} \text{连续系统: 微分方程} \\ \text{离散系统: 差分方程} \end{cases}$
- 卷积积分（或卷积和）法

2. 变换域分析

- 傅里叶变换——FT
- 拉普拉斯变换——LT
- z 变换——ZT
- 离散傅里叶变换——DFT
- 离散沃尔什变换——DWT

谢 谢

