# 2 .逻辑代数与硬件描述语言基础

## 2.2　逻辑函数的卡诺图化简法

2.2.1 最小项的定义及性质

2.2.2 逻辑函数的最小项表达式

2.2.3 用卡诺图表示逻辑函数

2.2.4 用卡诺图化简逻辑函数

代数法化简在使用中遇到的困难：

1.逻辑代数与普通代数的<u>公式易混淆</u>，化简过程要求对所有公式熟练掌握；

2.代数法化简<u>无一套完善的方法可循</u>，它依赖于人的经验和灵活性；

3.用这种化简方法技巧强，较难掌握。特别是对代数化简后得到的逻辑表达式<u>是否是最简式判断</u>有一定困难。

卡诺图法可以比较简便地得到最简的逻辑表达式。

## 2.2 .1 最小项的定义及其性质

1. 最小项的意义

$n$个变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$的最小项是$n$个因子的乘积，**每个变量**都**以它的原变量**或**非变量**的形式在**乘积项中出现**，**且仅出现一次**。一般n个变量的最小项应有$2^n$个。

例如，$A$、$B$、$C$三个逻辑变量的最小项有（$2^3$＝）8个，即

$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 、$\overline{A}\overline{B}C$ 、$\overline{A}B\overline{C}$、$\overline{A}BC$、$A\overline{B}\overline{C}$ 、$A\overline{B}C$、$AB\overline{C}$ 、$ABC$

$\overline{A}B$ 、 $A\overline{B}C\overline{A}$、$A(B+C)$等则不是最小项。

2、最小项的性质　　三个变量的所有最小项的真值表

| $A$ | $B$ | $C$ | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ | $\bar{A}\bar{B}C$ | $\bar{A}B\bar{C}$ | $\bar{A}BC$ | $A\bar{B}\bar{C}$ | $A\bar{B}C$ | $AB\bar{C}$ | $ABC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

对于任意一个最小项，只有一组变量取值使得它的值为1；
对于变量的任一组取值，任意两个最小项的“乘积”为0；
对于变量的任一组取值，全体最小项之“和”为1。

3、最小项的编号

原变量用1表示，
非变量用0表示

三个变量的所有最小项的真值表

| | | | $m_0$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ | $m_4$ | $m_5$ | $m_6$ | $m_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ | $\bar{A}\bar{B}C$ | $\bar{A}B\bar{C}$ | $\bar{A}BC$ | $A\bar{B}\bar{C}$ | $A\bar{B}C$ | $AB\bar{C}$ | $ABC$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

最小项的表示：通常用$m_i$表示最小项，$m$ 表示最小项, 下标i为最小项号。

## 2.2.2 逻辑函数的最小项表达式

定义：利用逻辑代数的基本公式，可以把任一个逻辑函数化成若干个最小项之和的形式，称为最小项表达式。

逻辑函数的最小项表达式：

$$L(ABC) = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$$

- 为“与或”逻辑表达式；
- 在“与或”式中的每个乘积项都是最小项。

例1 将 $L(A,B,C) = AB + \overline{A}C$ 化成最小项表达式

$$\begin{aligned} L(A,B,C) &= AB(C+\overline{C}) + \overline{A}(B+\overline{B})C \\ &= ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C \\ &= m_7 + m_6 + m_3 + m_1 \\ &= \sum m(1,3,6,7) \end{aligned}$$

## 2.2.3 用卡诺图表示逻辑函数

1、卡诺图的引出

卡诺图：将n变量的全部最小项都用小方块表示，并使具有**逻辑相邻的最小项**在**几何位置上也相邻**地排列起来，这样，所得到的图形叫n变量的卡诺图。

**逻辑相邻的最小项**：如果两个最小项只有一个变量互为反变量，那么，就称这两个最小项在逻辑上相邻。

如最小项 $m_6=AB\overline{C}$、与 $m_7=ABC$ 在逻辑上相邻

| | |
|---|---|
| $m_6$ | $m_7$ |

两变量卡诺图

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $m_0$ | $m_1$ |
| 1 | $m_2$ | $m_3$ |

三变量卡诺图

| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| 1 | $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |

四变量卡诺图

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| 01 | $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |
| 11 | $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | $m_{14}$ |
| 10 | $m_8$ | $m_9$ | $m_{11}$ | $m_{10}$ |

2、**卡诺图的特点**:各小方格对应于各变量不同的组合，而且上下左右在几何上相邻的方格内只有一个因子有差别，这个重要特点成为卡诺图化简逻辑函数的主要依据。

3. 已知逻辑函数画卡诺图

当逻辑函数为最小项表达式时，在卡诺图中找出和表达式中最小项对应的小方格填上1，其余的小方格填上0（有时也可用空格表示），就可以得到相应的卡诺图。任何逻辑函数都等于其卡诺图中为1的方格所对应的最小项之和。

例1：画出逻辑函数

$L(A, B, C, D)=\sum m(0, 1, 2, 3, 4, 8, 10, 11, 14, 15)$的卡诺图

| L: AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 1 |

思考：若一个N变量的逻辑函数F，具有u个值为1的最小项，则其反函数$\overline{F}$应有几个最小项？

例2 画出下式的卡诺图

$$L(A,B,C,D)=(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})(\overline{A}+B+\overline{C}+D)$$
$$(A+\overline{B}+\overline{C}+D)(A+B+C+D)$$

解 1. 将逻辑函数化为最小项表达式

$$\overline{L}=ABCD+AB\overline{C}D+A\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$$

$$=\sum m(0,6,10,13,15)$$

2. 填写卡诺图

$$L=\sum m(1,2,3,4,5,7,8,9,11,12,14)$$

| L: AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0 |

# 2.2.4 用卡诺图化简逻辑函数

A+Ā=1

1、化简的依据？

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $m_0$ | $m_1$ | $m_3$ | $m_2$ |
| 01 | $m_4$ | $m_5$ | $m_7$ | $m_6$ |
| 11 | $m_{12}$ | $m_{13}$ | $m_{15}$ | $m_{14}$ |
| 10 | $m_8$ | $m_9$ | $m_{11}$ | $m_{10}$ |

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C}D+\overline{A}\overline{B}CD=\overline{A}\overline{B}D$$

$$\overline{A}B\overline{C}D+\overline{A}BCD=\overline{A}BD$$

$$\overline{A}\overline{B}D+\overline{A}BD=\overline{A}D$$

$$A\overline{B}D+ABD=AD$$

$$\overline{A}D+AD=D$$

两个相邻最小项之和将消去 1 个变量
四个相邻最小项之和将消去 2 个变量
八个相邻最小项之和将消去 3 个变量

2、化简的步骤

用卡诺图化简逻辑函数的步骤如下：

(1) 将逻辑函数写成最小项表达式

(2) 按最小项表达式填卡诺图，凡式中包含了的最小项，其对应方格填1，其余方格填0。

(3) 合并最小项，即将相邻的1方格圈成一组(包围圈)，每一组含$2^n$个方格，对应每个包围圈写成一个新的乘积项。本书中包围圈用虚线框表示。

(4) 将所有包围圈对应的乘积项相加。

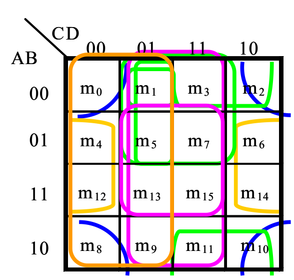
画包围圈时应遵循的原则：

（1）包围圈内的方格数一定是$2^n$个，且包围圈必须呈矩形。

（2）循环相邻特性包括上下底相邻，左右边相邻和四角相邻。

（3）同一方格可以被不同的包围圈重复包围多次，但新增的包围圈中一定要有原有包围圈未曾包围的方格。

（4） 一个包围圈的方格数要尽可能多, 包围圈的数目要可能少。



例 :用卡诺图法化简下列逻辑函数

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0，2，5，7，8，10，13，15)$$

解：(1) 由L 画出卡诺图

（2）画包围圈合并最小项，得最简与-或表达式

$$L=BD+\overline{B}\,\overline{D}$$

| L: AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

$\overline{B}\,\overline{D}$

$BD$

思考：如何能快速的从表达式画出卡诺图？

例： 用卡诺图化简

$$L(A,B,C,D)=\sum m(0\sim 3,5\sim 7,8\sim 11,13\sim 15)$$

圈1

| L: AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$\overline{B}$

$D$

$C$

$$L=D+C+\overline{B}$$

圈0

| L: AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$\overline{L}=B\overline{C}\,\overline{D}$$

$$L=D+C+\overline{B}$$

## 2.2.5 含无关项的逻辑函数及其化简

1、什么叫无关项：

在真值表内对应于变量的某些取值下，函数的值可以是任意的，或者这些变量的取值根本不会出现，这些变量取值所对应的最小项称为无关项或任意项。

在含有无关项逻辑函数的卡诺图化简中，它的值可以取0或取1，具体取什么值，可以根据使函数尽量得到简化而定。

练习题：

1、将含有无关项的逻辑函数化简为最简为**与或式**

$$F_1(A,B,C,D)=\sum m(3,6,8,9,11,12)+\sum d(0,1,2,13,14,15)$$

| F1 AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | × | × | 1 | × |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | × | × | × |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$F_1(A,B,C,D)=A\overline{C}+\overline{B}D+BC\overline{D}$$

例: 要求设计一个逻辑电路，能够判断一位十进制数是奇数还是偶数，当十进制数为奇数时，电路输出为1，当十进制数为偶数时，电路输出为0。

解:

(1)列出真值表

$$L=\bar{A}\bar{B}\bar{C}D+\bar{A}\bar{B}CD+\bar{A}B\bar{C}D+\bar{A}BCD+A\bar{B}\bar{C}D$$

(2)画出卡诺图

| L: AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | × | × | × | × |
| 10 | 0 | 1 | × | × |

D

(3) 卡诺图化简

$$L=D$$

| ABCD | L |
|---|---|
| 0000 | 0 |
| 0001 $m_1$ | 1 |
| 0010 | 0 |
| 0011 $m_3$ | 1 |
| 0100 | 0 |
| 0101 $m_5$ | 1 |
| 0110 | 0 |
| 0111 $m_7$ | 1 |
| 1000 | 0 |
| 1001 $m_9$ | 1 |
| 1010 | × |
| 1011 | × |
| 1100 | × |
| 1101 | × |
| 1110 | × |
| 1111 | × |

练习题：

2、将含有约束条件的逻辑函数化简为最简为**与-或式**

$$\begin{cases} L(A,B,C,D)=\sum m(2,3,4,6,8) \\ AB+AC=0 \quad \text{(约束条件)} \end{cases}$$

$$AB+AC=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB=0 \Leftrightarrow AB=1\text{不可以出现} \\ AC=0 \Leftrightarrow AC=1\text{不可以出现} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB=1 \Leftrightarrow \sum d(12,13,14,15) \\ AC=1 \Leftrightarrow \sum d(10,11,14,15) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sum d(10,11,12,13,14,15)$$

| L: AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | | |
| 11 | × | × | × | × |
| 10 | | | × | × |

**单选题** 1分 设置

$$
\begin{cases}
L(A,B,C,D)=\sum m(2,3,4,6,8) \\
AB+AC=0 \quad \text{(约束条件)} \\
\Leftrightarrow \sum d(10,11,12,13,14,15)
\end{cases}
$$

L: AB \ CD

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | | |
| 11 | × | × | × | × |
| 10 | | | × | × |

$B\overline{D}+A\overline{C}\overline{D}+\overline{A}\overline{B}C$

$B\overline{D}+\overline{B}C+A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

$\overline{B}C+B\overline{D}+A\overline{D}$

提交

$$
\begin{cases}
L(A,B,C,D)=\sum m(2,3,4,6,8) \\
AB+AC=0 \quad \text{(约束条件)}
\end{cases}
$$

$$\Leftrightarrow \sum d(10,11,12,13,14,15)$$

L: AB \ CD

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | × | × | × | × |
| 10 | 1 | 0 | × | × |

$$L(A,B,C,D)=\overline{B}C+B\overline{D}+A\overline{D}$$

# 第二章

- 第一部分（参考练习）
- 2.1（1（2）、3（2、3））
- 2.2（3（1、3、4）、6（2）、7（2））
- 2.3（1（2、3、4、6）、5）
- 2.4（3（1、3、5、6、7））

- 第二部分（作业）
- 习题集

练习题：

1、试用代数化简法将逻辑函数 *L* 化简成最简**与或**表达式。

$$L = AC + \overline{B}C + B\overline{D} + A(B + \overline{C}) + \overline{A}C\overline{D} + A\overline{B}DE$$

2、试用代数化简法将逻辑函数 *L* 化简成最简**与或**表达式，及**与非-与非**表达式。

哪些取值使得L=1？

$$L = \overline{A\,\overline{B} + BC + \overline{A}\,\overline{B}} + A\,\overline{B}\,\overline{C}$$

1　$A + \overline{B}C + B\overline{D}$

2　110　100　010

练习题：

1、求逻辑函数 $L$ 的最简 **与-或式** 和 **或-与式**

$$L = \overline{(AB + \overline{A}\ C)C} + \overline{C}\ D$$

2、求逻辑函数 $L$ 的最简 **或-与式** 和 **或非-或非式**

$$L(A,B,C,D) = A\ \overline{B} + \overline{B}\ \overline{C} + \overline{D}$$

1 $A\overline{B} + \overline{C}$ $(A + \overline{C})(\overline{B} + \overline{C})$

2提示：用卡诺图

$$(\overline{B} + \overline{D})(A + \overline{C} + \overline{D})$$

$$\overline{\overline{(\overline{B} + \overline{D})} + \overline{(A + \overline{C} + \overline{D})}}$$