

# 第6章 无限脉冲响应数字滤波器的设计

---

- 6.1 数字滤波器的基本概念
- 6.2 模拟滤波器的设计
- 6.3 用脉冲响应不变法设计IIR数字低通滤波器
- 6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器
- 6.5 数字高通、带通和带阻滤波器的设计

# 6.1 数字滤波器的基本概念

---

## 1 . 数字滤波器的分类

**经典滤波器：**特点是其输入信号中有用的频率成分和希望滤除的频率成分各占有不同的频带，通过一个合适的选频滤波器滤除干扰，得到纯净信号，达到滤波的目的。

**现代滤波器：**根据随机信号的一些统计特性，在某种最佳准则下，最大限度地抑制干扰，同时最大限度地恢复信号，从而达到最佳滤波的目的。

经典数字滤波器从滤波特性上分类，可以分成低通、高通、带通和带阻等滤波器。

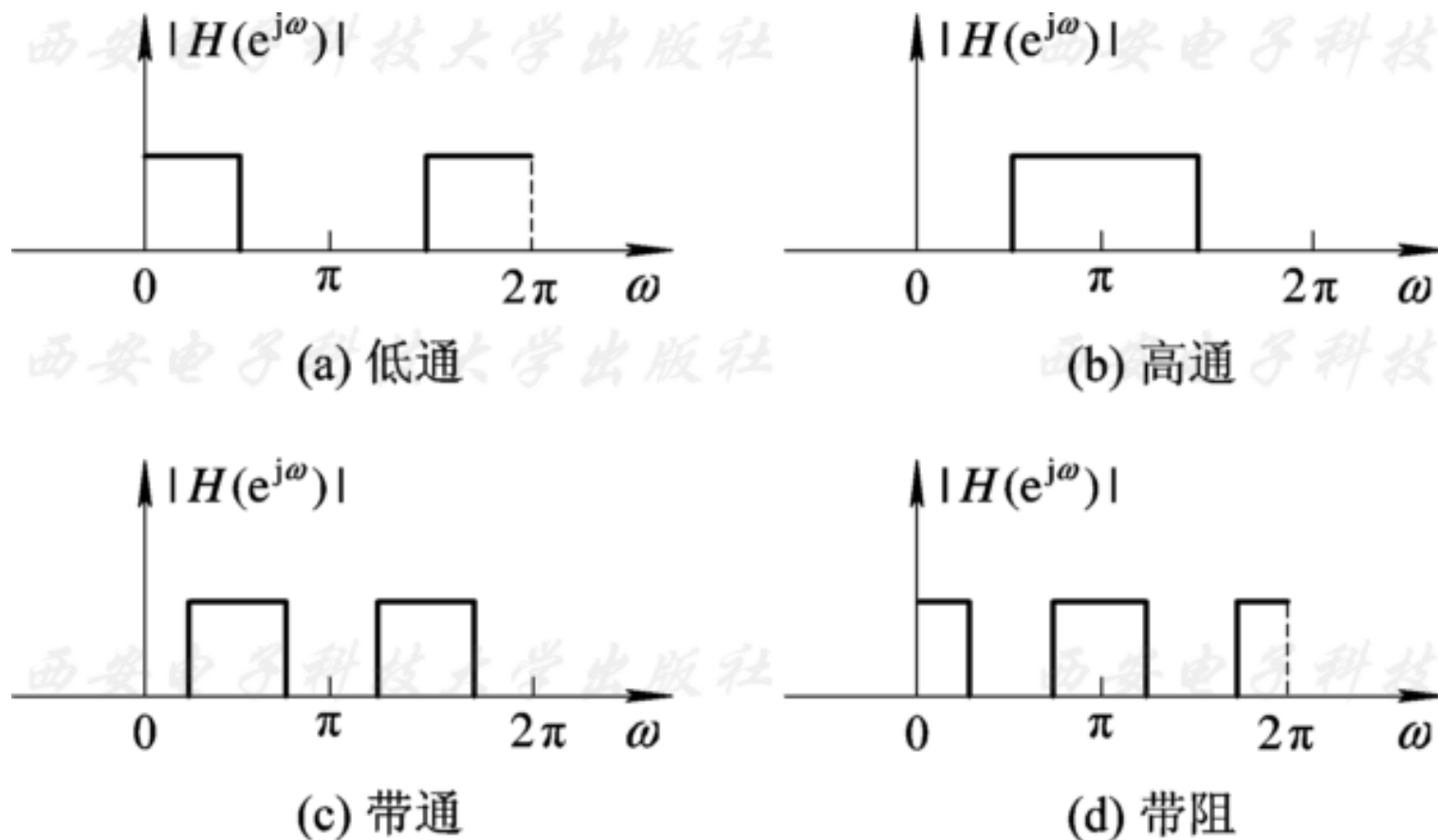


图6.1.2 理想低通、高通、带通和带阻滤波器幅度特性

数字滤波器从实现的网络结构或者从单位脉冲响应长度分类，可以分成无限长单位脉冲响应(IIR)滤波器和有限长单位脉冲响应(FIR)滤波器。它们的系统函数分别为：

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^M b_j z^{-j}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

**N阶IIR数字滤波器**

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

**N-1阶FIR数字滤波器**

这两种数字滤波器的设计方法有很大区别，因此下面分成两章分别进行学习。

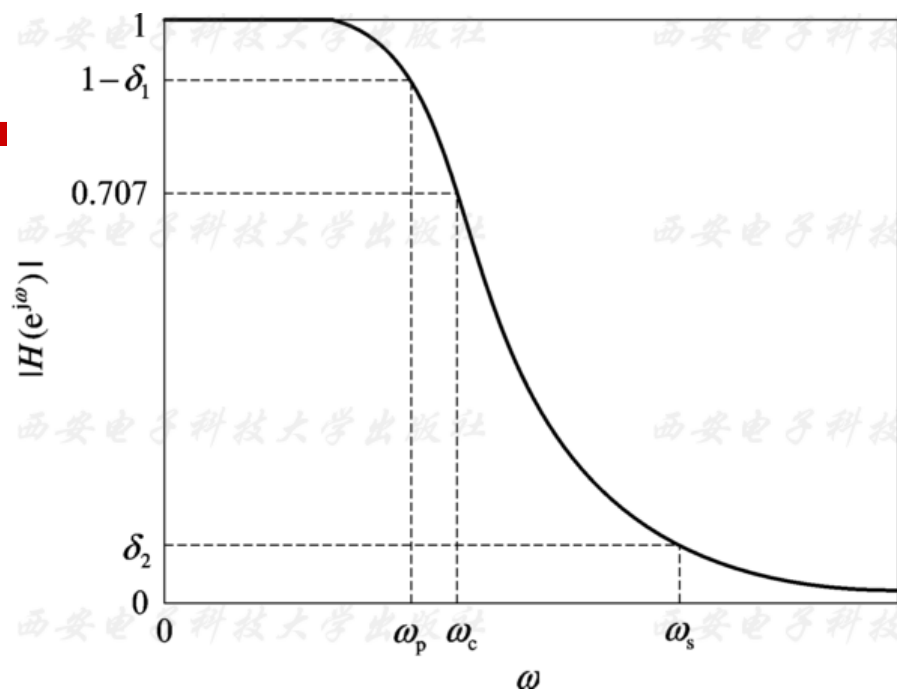
## 2. 数字滤波器的技术指标

常用的数字滤波器一般属于选频滤波器。假设数字滤波器的频率响应函数 $H(e^{j\omega})$ 用下式表示：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

式中， $|H(e^{j\omega})|$ 称为幅频特性函数； $\theta(\omega)$ 称为相频特性函数。

幅频特性表示信号通过该滤波器后各频率成分振幅衰减情况，而相频特性反映各频率成分通过滤波器后在时间上的延时情况。



系统设计要求：

- 1、因果可实现。
- 2、通带和阻带中都允许一定的误差容限，即通带不是完全水平的，阻带不是绝对衰减到零。
- 3、在通带与阻带之间还应设置一定宽度的过渡带。

通带内允许的最大衰减用 $\alpha_p$ 表示

---

$$\alpha_p = 20\lg \frac{\max |H(e^{j\omega})|}{\min |H(e^{j\omega})|} \text{dB} \quad , \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

阻带内允许的最小衰减用 $\alpha_s$ 表示

$$\alpha_s = 20\lg \frac{\text{通带中} \max |H(e^{j\omega})|}{\text{阻带中} \max |H(e^{j\omega})|} \text{dB}$$

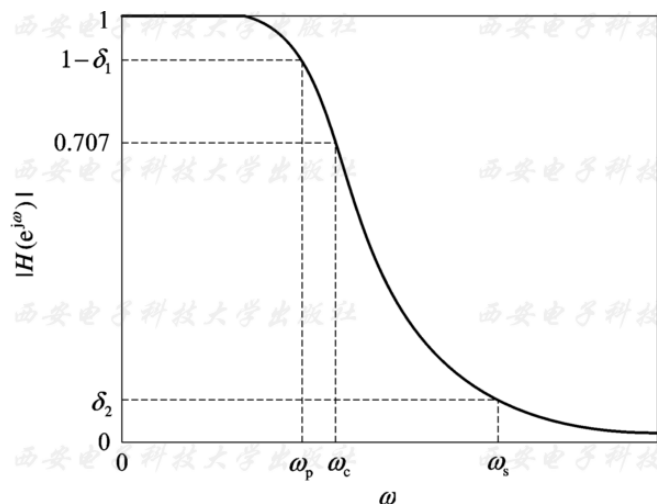
$\alpha_p$  越小, 通带波纹越小, 通带逼近误差就越小;

$\alpha_s$  越大, 阻带波纹越小, 阻带逼近误差就越小;

$\omega_p$  与  $\omega_s$  间距越小, 过渡带就越窄。

所以低通滤波器的设计指标完全由通带边界频率 $\omega_p$ 、通带最大衰减 $\alpha_p$  阻带边界频率 $\omega_s$ 和阻带最小衰减 $\alpha_s$ 确定。

图6.1.3所示的单调下降幅频特性， $\alpha_p$ 和 $\alpha_s$ 别可以表示为



$$\alpha_p = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} \text{ dB}$$

$$\alpha_s = 20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} \text{ dB}$$

如果将 $|H(e^{j0})|$ 归一化为1，则式子表示为：

$$\alpha_p = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| \text{ dB} = -20 \lg (1 - \delta_1) \text{ dB}$$

$$\alpha_s = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| \text{ dB} = -20 \lg \delta_2 \text{ dB}$$



---

当幅度下降到  $\sqrt{2}/2$  时, 标记  $\omega=\omega_c$ , 此时  $\alpha_p = 3$  dB, 称  $\omega_c$  为3 dB通带截止频率。

$\omega_p$ 、 $\omega_c$ 和 $\omega_s$ 统称为边界频率, 它们是滤波器设计中所涉及到的很重要的参数。

对其他类型的滤波器, 式中的 $H(e^{j0})$ 应改成  $H(e^{j\omega_0})$ ,  $\omega_0$ 为滤波器通带中心频率。

### 3 . 数字滤波器设计方法概述

---

**IIR**滤波器和**FIR**滤波器的设计方法完全不同。**IIR**滤波器设计方法有间接法和直接法，间接法是借助于模拟滤波器的设计方法进行的。

其设计步骤是：先设计过渡模拟滤波器得到系统函数  $H_a(s)$ ，然后将  $H_a(s)$  按某种方法转换成数字滤波器的系统函数  $H(z)$ 。

因为模拟滤波器的设计方法已经很成熟，不仅有完整的设计公式，还有完善的图表和曲线供查阅；另外，还有一些典型的优良滤波器类型可供我们使用。

本章只介绍**IIR滤波器的间接设计方法**。为此，我们先介绍模拟低通滤波器的设计，这是因为低通滤波器的设计是设计其他滤波器的基础。

## 6.2 模拟滤波器的设计

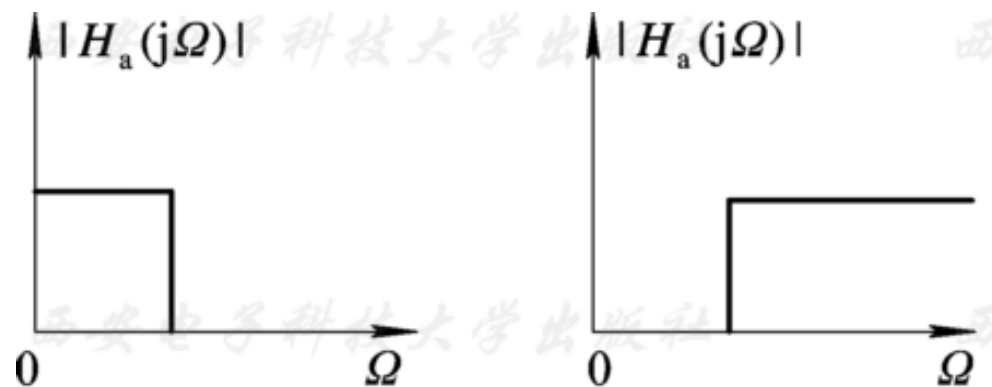
---

典型的模拟滤波器各有特点：

- 巴特沃斯滤波器具有单调下降的幅频特性；
- 切比雪夫滤波器的幅频特性在通带或者阻带有等波纹特性，可以提高选择性；
- 贝塞尔滤波器通带内有较好的线性相位特性；
- 椭圆滤波器的选择性相对前三种是最好的，但通带和阻带内均呈现等波纹幅频特性，相位特性的非线性也稍严重。

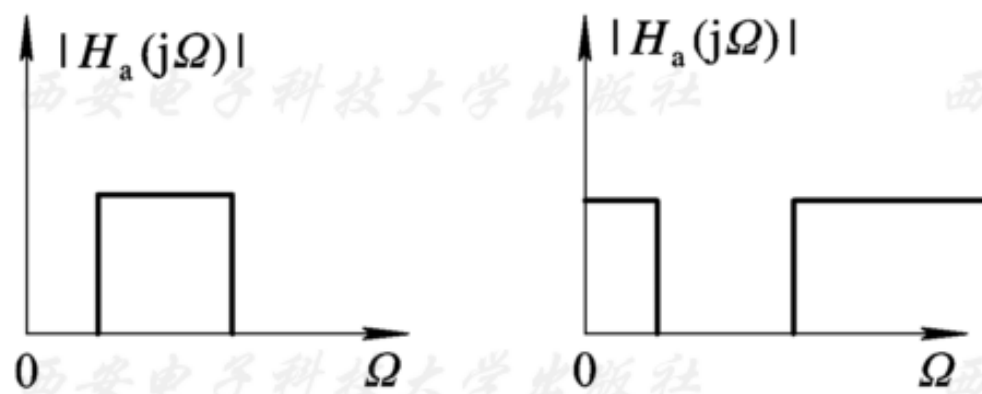
设计时，根据具体要求选择滤波器的类型。

选频型模拟滤波器按幅频特性可分成低通、高通、带通和带阻滤波器，它们的理想幅频特性如图所示。



(a) 低通

(b) 高通



(c) 带通

(d) 带阻

## 6.2.1 模拟低通滤波器的设计指标及逼近方法

本书中，分别用 $h_a(t)$ 、 $H_a(s)$ 、 $H_a(j\Omega)$ 表示模拟滤波器的单位冲激响应、系统函数、频率响应函数，三者的关系如下：

$$H_a(s) = \text{LT}[h_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-st} dt$$

$$H_a(j\Omega) = \text{FT}[h_a(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h_a(t) e^{-j\Omega t} dt$$

可以用 $h_a(t)$ 、 $H_a(s)$ 、 $H_a(j\Omega)$ 中任一个描述模拟滤波器，也可以用线性常数微分方程描述模拟滤波器。

但是设计模拟滤波器时，**设计指标一般由幅频响应函数 $|H_a(j\Omega)|$ 给出**，而模拟滤波器设计就是根据设计指标，求系统函数 $H_a(s)$ 。

---

工程实际中通常用所谓的损耗函数（也称为衰减函数） $A(\Omega)$ 来描述滤波器的幅频响应特性，对归一化幅频响应函数（本书后面都是针对该情况，特别说明的除外）， $A(\Omega)$ 定义如下（其单位是分贝，用dB表示）：

$$A(\Omega) = -20\lg|H_a(j\Omega)| = -10\lg|H_a(j\Omega)|^2 \quad \text{dB}$$

应当注意，损耗函数 $A(\Omega)$ 和幅频特性函数 $|H(j\Omega)|$ 只是滤波器幅频响应特性的两种描述方法。损耗函数的优点是对幅频响应 $|H_a(j\Omega)|$ 的取值非线性压缩，放大了小的幅度，从而可以同时观察通带和阻带频响特性的变化情况。

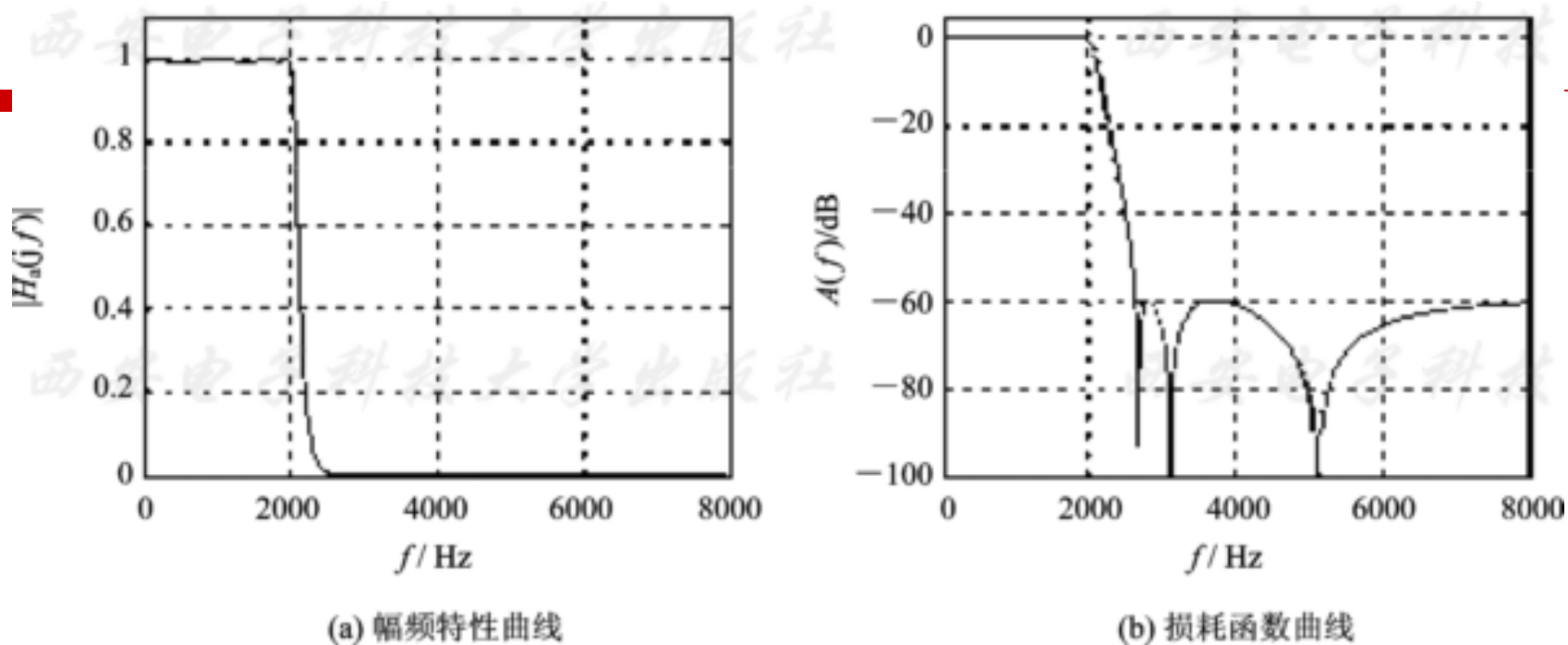


图6.2.2 幅频响应与损耗函数曲线的比较

图6.2.2(a)所示的幅频响应函数完全看不清阻带内取值较小（0.001以下）的波纹，而图6.2.2(b)所示的同一个滤波器的损耗函数则能很清楚地显示出阻带—60 dB以下的波纹变化曲线。

---

模拟低通滤波器的设计指标参数有 $\alpha_p$ 、 $\Omega_p$ 、 $\alpha_s$ 和 $\Omega_s$ 。

其中 $\Omega_p$ 和 $\Omega_s$ 分别称为通带边界频率和阻带截止频率。

$\alpha_p$ 称为通带最大衰减（即通带 $[0, \Omega_p]$ 中允许 $A(\Omega)$ 的最大值）

$\alpha_s$ 称为阻带最小衰减（即阻带 $\Omega \geq \Omega_s$ 上允许 $A(\Omega)$ 的最小值）， $\alpha_p$ 和 $\alpha_s$ 的单位为dB。



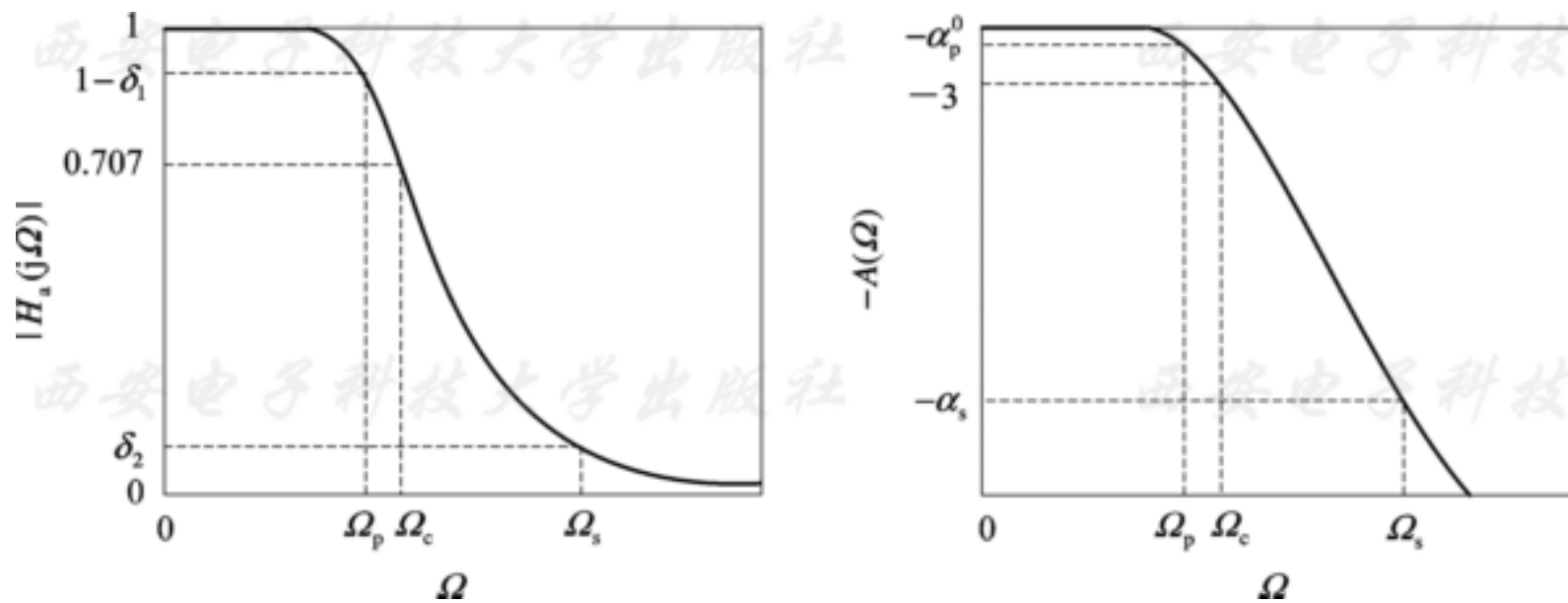


图6.2.3 模拟低通滤波器的设计指标参数示意图

由图6.2.3可见，对于单调下降的幅度特性， $\alpha_p$ 和 $\alpha_s$ 可表示成：

$$\alpha_p = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2$$

$$\alpha_s = -10 \lg |H_a(j\Omega_s)|^2$$

因为  $|H_a(j\Omega_c)| = 1/\sqrt{2}$ ， $-20 \lg |H_a(j\Omega_c)| = 3 \text{ dB}$ ，所以 $\Omega_c$ 称为3 dB截止频率。

$\delta_1$ 和 $\delta_2$ 分别称为通带和阻带波纹幅度，容易得到关系式：

$$\alpha_p = -20 \lg(1 - \delta_1)$$

$$\alpha_s = -20 \lg \delta_2$$

滤波器的技术指标给定后，需要设计一个系统函数 $H_a(s)$ ，希望其幅度平方函数满足给定的指标。一般滤波器的单位冲激响应为实函数，因此

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega} = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega)$$

如果能由 $\alpha_p$ 、 $\Omega_p$ 、 $\alpha_s$ 和 $\Omega_s$ 求出 $|H_a(j\Omega)|^2$ ，那么就可以求出 $H_a(s)H_a(-s)$ ，由此可求出所需要的 $H_a(s)$ 。

$H_a(s)$ 必须是因果稳定的，因此极点必须落在 $s$ 平面的左半平面，相应的 $H_a(-s)$ 的极点必然落在右半平面。这就是由 $H_a(s)H_a(-s)$ 求所需要的 $H_a(s)$ 的具体原则，即模拟低通滤波器的逼近方法。因此幅度平方函数在模拟滤波器的设计中起着很重要的作用。对于上面介绍的五种典型滤波器，其幅度平方函数都有确知表达式，可以直接引用。

## 6.2.2 巴特沃斯低通滤波器的设计

### 1. 巴特沃斯低通模拟滤波器设计原理

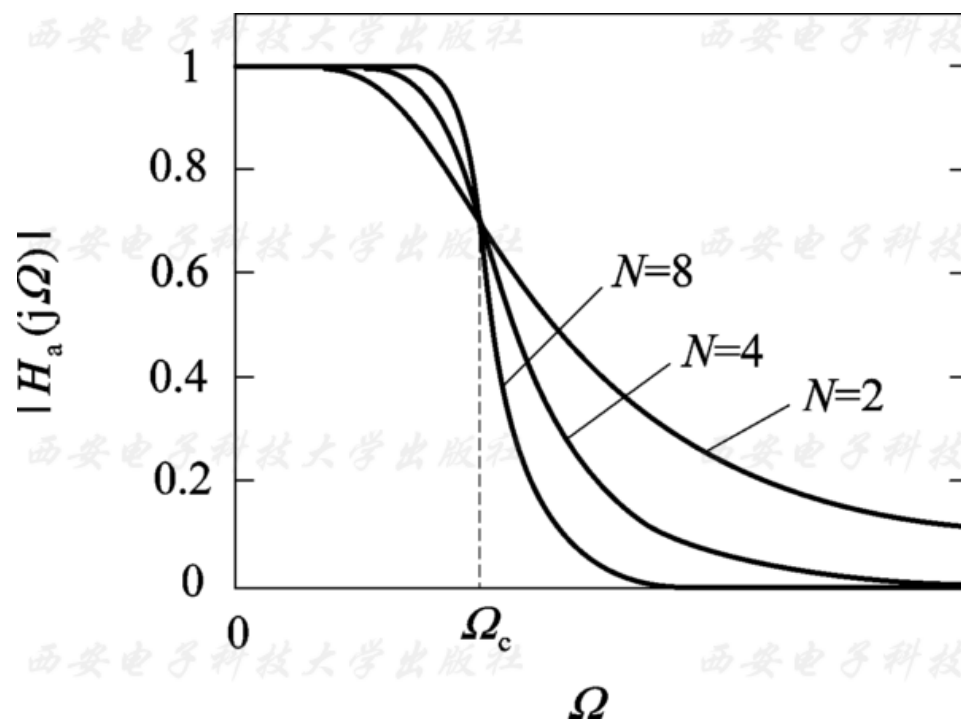
巴特沃斯低通滤波器的幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 用下式表示:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

式中,  $N$ 称为滤波器的阶数。当 $\Omega=0$ 时,  $|H_a(j\Omega)|=1$ ;  $\Omega=\Omega_c$

时,  $|H_a(j\Omega)|=1/\sqrt{2}$ ,  $\Omega_c$ 是3 dB截止频率。在 $\Omega=\Omega_c$ 附近, 随 $\Omega$ 加大, 幅度迅速下降。

幅度特性与 $\Omega$ 和 $N$ 的关系如图所示。幅度下降的速度与阶数 $N$ 有关， $N$ 愈大，通带愈平坦，过渡带愈窄，过渡带与阻带幅度下降的速度愈快，总的频响特性与理想低通滤波器的误差愈小。



以 $s$ 替换 $j\Omega$ ，将幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 写成 $s$ 的函数：

---

$$H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

复变量 $s=\sigma+j\Omega$ ，此式表明幅度平方函数有 $2N$ 个极点，极点 $s_k$ 用下式表示：

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N})}$$

式中， $k=0, 1, 2, \dots, 2N-1$ 。 $2N$ 个极点等间隔分布在半径为 $\Omega_c$ 的圆上(该圆成为巴特沃斯圆)，间隔是 $\pi/N$ rad。

例如 $N=3$ ，极点间隔为 $\pi/3$  rad，如图6.2.5所示。

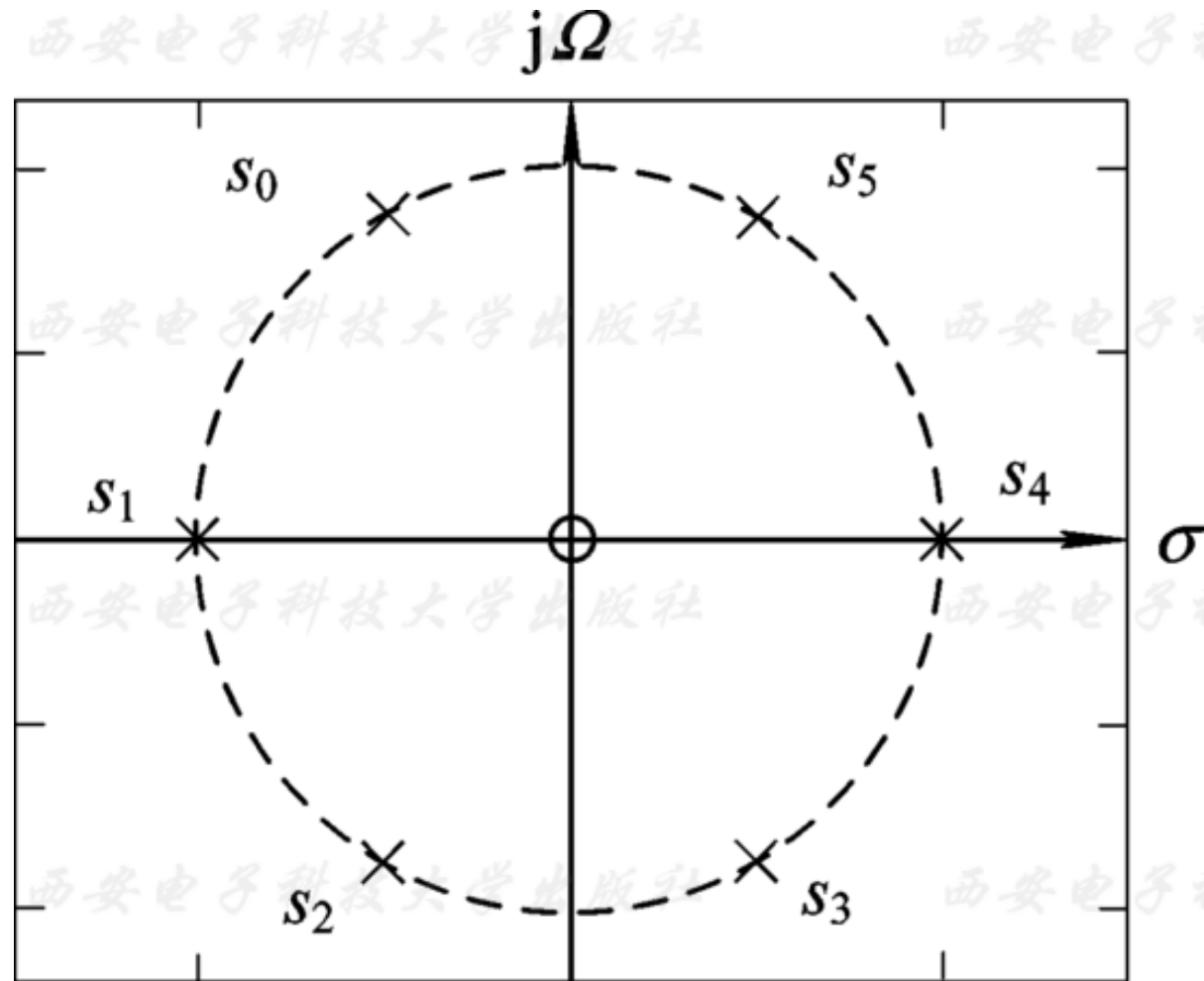


图6.2.5 三阶巴特沃斯滤波器极点分布图

为形成因果稳定的滤波器， $2N$ 个极点中只取 $s$ 平面左半平面的 $N$ 个极点构成 $H_a(s)$ ，而右半平面的 $N$ 个极点构成 $H_a(-s)$ 。 $H_a(s)$ 的表达式为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - s_k)}$$

设 $N=3$ ，极点有6个，它们分别为

$$\begin{aligned} s_0 &= \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi}, & s_1 &= -\Omega_c, & s_2 &= \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi} \\ s_3 &= \Omega_c e^{-j\frac{1}{3}\pi}, & s_4 &= \Omega_c, & s_5 &= \Omega_c e^{j\frac{1}{3}\pi} \end{aligned}$$



取 $s$ 平面左半平面的极点 $s_0$ 、 $s_1$ 、 $s_2$ 组成系统函数 $H_a(s)$ ，即

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s + \Omega_c)(s - \Omega_c e^{j\frac{2}{3}\pi})(s - \Omega_c e^{-j\frac{2}{3}\pi})}$$

由于不同的技术指标对应的边界频率和滤波器幅频特性不同，为使设计公式和图表统一，将频率归一化。巴特沃斯滤波器采用对3 dB截止频率 $\Omega_c$ 归一化，归一化后的系统函数为：

$$G_a\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} \left( \frac{s}{\Omega_c} - \frac{s_k}{\Omega_c} \right)}$$

$$G_a\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} \left(\frac{s}{\Omega_c} - \frac{s_k}{\Omega_c}\right)}$$

令  $p = \eta + j\lambda = s/\Omega_c$ ,  $\lambda = \Omega/\Omega_c$ ,  $\lambda$  称为归一化频率,  $p$  称为归一化复变量, 这样巴特沃斯滤波器的归一化低通原型系统函数为:

$$G_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)}$$

式中,  $p_k=s_k/\Omega_c$ , 为归一化极点, 用下式表示:

$$s_k = (-1)^{2N} \frac{1}{2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N})}$$

$$p_k = e^{j\pi(\frac{1}{2} + \frac{2k+1}{2N})} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

显然,  $s_k = \Omega_c p_k$

这样, 只要根据技术指标求出阶数 $N$ ,

求出 $N$ 个极点,

再得到归一化低通原型系统函数 $G_a(p)$ ,

如果给定 $\Omega_c$ , 再去归一化, 即将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $G_a(p)$ 中(或求出 $s_k=\Omega_c p_k$ ), 便得到期望设计的系统函数 $H_a(s)$ 。

$$G_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1} (p - p_k)}$$

将极点表示式 代入 $G_a(p)$ 式子

得到 $G_a(p)$ 的分母是 $p$ 的 $N$ 阶多项式，用下式表示：

$$G_a(p) = \frac{1}{p^N + b_{N-1}p^{N-1} + b_{N-2}p^{N-2} + \cdots + b_1p + b_0}$$

归一化原型系统函数 $G_a(p)$ 的系数 $b_k$ ， $k=0, 1, \dots, N-1$ ，以及极点 $p_k$ ，可以由表6.2.1得到。

另外，表中还给出了 $G_a(p)$ 的因式分解形式中的各系数，这样只要求出阶数 $N$ ，查表可得到 $G_a(p)$ 及各极点，而且可以选择级联型和直接型结构的系统函数表示形式，避免了因式分解运算工作。

表6.2.1 巴特沃斯归一化低通滤波器参数

<div>极点位置</div> <div>阶数 <math>N</math></div>	$P_{0, N-1}$	$P_{1, N-2}$	$P_{2, N-3}$	$P_{3, N-4}$	$P_4$
1	-1.0000				
2	$-0.7071 \pm j0.7071$				
3	$-0.5000 \pm j0.8660$	-1.0000			
4	$-0.3827 \pm j0.9239$	$-0.9239 \pm j0.3827$			
5	$-0.3090 \pm j0.9511$	$-0.8090 \pm j0.5878$	-1.0000		
6	$-0.2588 \pm j0.9659$	$-0.7071 \pm j0.7071$	$-0.9659 \pm j0.2588$		
7	$-0.2225 \pm j0.9749$	$-0.6235 \pm j0.7818$	$-0.9091 \pm j0.4339$	-1.0000	
8	$0.1951 \pm j0.9808$	$0.5556 \pm j0.8315$	$-0.8315 \pm j0.5556$	$-0.9808 \pm j0.1951$	
9	$-0.1736 \pm j0.9848$	$-0.5000 \pm j0.8660$	$-0.7660 \pm j0.6428$	$-0.9397 \pm j0.3420$	-1.0000



因此, 只要求出巴特沃斯滤波器的阶数 $N$ 和3 dB截止频率 $\Omega_c$ , 就可以求出滤波器的系统函数 $H_a(s)$ 。

所以, 巴特沃斯滤波器的设计实质上就是根据设计指标求阶数 $N$ 和3 dB截止频率 $\Omega_c$ 的过程。下面先介绍阶数 $N$ 的确定方法。

阶数 $N$ 的大小主要影响通带幅频特性的平坦程度和过渡带、阻带的幅度下降速度, 它由技术指标 $\Omega_p$ 、 $\alpha_p$ 、 $\Omega_s$ 和 $\alpha_s$ 确定。

将 $\Omega=\Omega_p$ 代入幅度平方函数式中, 再将幅度平方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 代入式子中, 得到:

$$1 + \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} = 10^{\alpha_p/10}$$

$$\alpha_p = -10 \lg |H_a(j\Omega_p)|^2$$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^{2N}}$$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$\alpha_s = -10 \lg |H_a(j\Omega_s)|^2$$

将 $\Omega = \Omega_s$ 代入式中，再将 $|H_a(j\Omega)|^2$ 代入式中，得到：

$$1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\alpha_s/10}$$

$$1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N} = 10^{\alpha_p/10}$$

可以得到：

$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^N = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}$$



$$\left( \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)^N = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}$$

令

$$\lambda_{\text{sp}} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \quad k_{\text{sp}} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}}$$

则 $N$ 由下式表示:

$$N = \frac{\lg k_{\text{sp}}}{\lg \lambda_{\text{sp}}}$$

用上式求出的 $N$ 可能有小数部分，应取大于或等于 $N$ 的最小整数。

关于**3 dB**截止频率 $\Omega_c$ ，如果技术指标中没有给出，可以按照以下式子求出。

$$1 + \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} = 10^{\alpha_p / 10}$$

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{0.1\alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

通带指标刚好满足要求，  
阻带指标有富余

或由式得到：

$$1 + \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} = 10^{\alpha_s / 10}$$

$$\Omega_c = \Omega_s (10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}}$$

阻带指标刚好满足要求，  
通带指标有富余

---

总结以上，低通巴特沃斯滤波器的设计步骤如下：

(1) 根据技术指标 $\Omega_p$ 、 $\alpha_p$ 、 $\Omega_s$ 和 $\alpha_s$ ，求出滤波器的阶数 $N$ 。

(2) 求出归一化极点 $p_k$ ，将 $p_k$ 代入式，得到归一化低通原型系统函数 $G_a(p)$ 。

也可以根据阶数 $N$ 直接查表6.2.1得到 $p_k$ 和 $G_a(p)$ 。

(3) 将 $G_a(p)$ 去归一化。将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $G_a(p)$ ，得到实际的滤波器系统函数

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

这里 $\Omega_c$ 为3 dB截止频率。

**【例6.2.1】** 已知通带截止频率 $f_p=5$  kHz，通带最大衰减 $\alpha_p=2$  dB，阻带截止频率 $f_s=12$  kHz，阻带最小衰减 $\alpha_s=30$  dB，按照以上技术指标设计巴特沃斯低通滤波器。

解 (1) 确定阶数 $N$

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 41.3223$$

$$\lambda_{sp} = \frac{2\pi f_s}{2\pi f_p} = 2.4$$

$$N = \frac{\lg 41.3223}{\lg 2.4} = 4.25 \quad \text{取 } N=5$$

(2) 按照(6.2.13)式, 其极点为

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{j\frac{3}{5}\pi}, & p_1 &= e^{j\frac{4}{5}\pi}, & p_2 &= e^{j\pi} \\ p_3 &= e^{j\frac{6}{5}\pi}, & p_4 &= e^{j\frac{7}{5}\pi} \end{aligned}$$

按照(6.2.12)式, 归一化低通原型系统函数为

$$G_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^4 (p - p_k)}$$

上式分母可以展开成五阶多项式, 或者将共轭极点放在一起, 形成因式分解式。这里不如直接查表6.2.1简单, 由 $N=5$ 直接查表得到:

极点:

$$-0.3090 \pm j0.9511, \quad -0.8090 \pm j0.5878, \quad -1.0000$$

归一化低通原型系统函数为

$$G_a(p) = \frac{1}{p^5 + b_4 p^4 + b_3 p^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

式中,

$b_0=1.0000$ ,  $b_1=3.2361$ ,  $b_2=5.2361$ ,  $b_3=5.2361$ ,  $b_4=3.2361$  分母因式分解形式为

$$G_a(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.6180p + 1)(p^2 + 1.6180p + 1)(p + 1)}$$

以上公式中的数据均取小数点后四位。

(3) 为将 $G_a(p)$ 去归一化, 先求3 dB截止频率 $\Omega_c$ 。

$$\Omega'_c = \Omega_s (10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 2\pi \times 6.014 \text{ krad/s}$$

$$\Omega_c = \Omega_p (10^{0.1\alpha_p} - 1)^{-\frac{1}{2N}} = 2\pi \times 5.2755 \text{ krad/s}$$

选择利用 $\Omega_p$ 求出的  $\Omega_c$  , 所以说阻带指标有富余量。

将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $G_a(p)$ 中, 得到:

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^5}{s^5 + b_4\Omega_c s^4 + b_3\Omega_c^2 s^3 + b_2\Omega_c^3 s^2 + b_1\Omega_c^4 s + b_0\Omega_c^5}$$

## 2. 用MATLAB工具箱函数设计巴特沃斯滤波器

MATLAB信号处理工具箱函数**buttap**, **buttord**和**butter**是巴特沃斯滤波器设计函数。其5种调用格式如下。

### 1) $[Z, P, K] = \text{buttap}(N)$

该格式用于计算N阶巴特沃斯归一化（3 dB截止频率 $\Omega_c=1$ ）模拟低通原型滤波器系统函数的零、极点和增益因子。返回长度为N的列向量Z和P，分别给出N个零点和极点的位置，K表示滤波器增益。得到的系统函数为如下形式：

$$G_a(p) = K \frac{(p - Z(1))(p - Z(2)) \cdots (p - Z(N))}{(p - P(1))(p - P(2)) \cdots (p - P(N))}$$



式中， $Z(k)$ 和 $P(k)$ 分别为向量 $Z$ 和 $P$ 的第 $k$ 个元素。如果要从计算得到的零、极点得到系统函数的分子和分母多项式系数向量 $B$ 和 $A$ ，可以调用结构转换函数 $[B, A]=zp2tf(Z, P, K)$ 。

## 2) $[N, wc] = \text{buttord}(wp, ws, Rp, As)$

该格式用于计算巴特沃斯数字滤波器的阶数 $N$ 和3 dB截止频率 $wc$ 。调用参数 $wp$ 和 $ws$ 分别为数字滤波器的通带边界频率和阻带边界频率的归一化值，要求 $0 \leq wp \leq 1$ ， $0 \leq ws \leq 1$ ，1表示数字频率 $\pi$ （对应模拟频率 $F_s/2$ ， $F_s$ 表示采样频率）。 $Rp$ 和 $As$ 分别为通带最大衰减和阻带最小衰减（dB）。当 $ws \leq wp$ 时，为高通滤波器；当 $wp$ 和 $ws$ 为二元矢量时，为带通或带阻滤波器，这时 $wc$ 也是二元向量。 $N$ 和 $wc$ 作为butter函数的调用参数。

### 3) $[N, wc] = \text{buttord}(wp, ws, Rp, As, 's')$

该格式用于计算巴特沃斯模拟滤波器的阶数 $N$ 和3 dB截止频率 $wc$ 。 $wp$ 、 $ws$ 和 $wc$ 是实际模拟角频率（rad/s）。其他参数与格式2）相同。

### 4) $[B, A] = \text{butter}(N, wc, 'ftype')$

计算 $N$ 阶巴特沃斯数字滤波器系统函数分子和分母多项式的系数向量 $B$ 和 $A$ 。调用参数 $N$ 和 $wc$ 分别为巴特沃斯数字滤波器的阶数和3 dB截止频率的归一化值（关于 $\pi$ 归一化），一般按格式2）调用函数`buttord`计算 $N$ 和 $wc$ 。由系数向量 $B$ 和 $A$ 可以写出数字滤波器系统函数：

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{B(1) + B(2)z^{-1} + \cdots + B(N)z^{-(N-1)} + B(N+1)z^{-N}}{A(1) + A(2)z^{-1} + \cdots + A(N)z^{-(N-1)} + A(N+1)z^{-N}}$$

式中， $B(k)$ 和 $A(k)$ 分别为向量 $B$ 和 $A$ 的第 $k$ 个元素。

5) `[B, A] = butter(N, wc, 'ftype', 's')`

计算巴特沃斯模拟滤波器系统函数的分子和分母多项式的系数向量**B**和**A**。调用参数**N**和**wc**分别为巴特沃斯模拟滤波器的阶数和**3 dB**截止频率（实际角频率）。由系数向量**B**和**A**写出模拟滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(1)s^N + B(2)s^{N-1} + \cdots + B(N)s + B(N+1)}{A(1)s^N + A(2)s^{N-1} + \cdots + A(N)s + A(N+1)}$$

---

**【例6.2.2】** 调用**buttord**和**butter**设计巴特沃斯低通模拟滤波器。要求与例6.2.1相同。

设计程序ep622.m如下：

```
wp=2*pi*5000; ws=2*pi*12000; Rp=2; As=30;
```

```
    %设置滤波器参数
```

```
[N, wc] =buttord(wp, ws, Rp, As, 's');
```

```
    %计算滤波器阶数N和3 dB截止频率
```

```
[B, A] =butter(N, wc, 's');
```

```
    %计算滤波器系统函数分子分母多项式系数
```

---

```
k=0:511; fk=0:14000/512:14000; wk=2*pi*fk;
```

```
Hk=freqs(B, A, wk);
```

```
subplot(2, 2, 1);
```

```
plot(fk/1000, 20*log10(abs(Hk))); grid on
```

```
xlabel('频率(kHz)'); ylabel('幅度(dB)')
```

```
axis( [0, 14, -40, 5] )
```

运行结果:

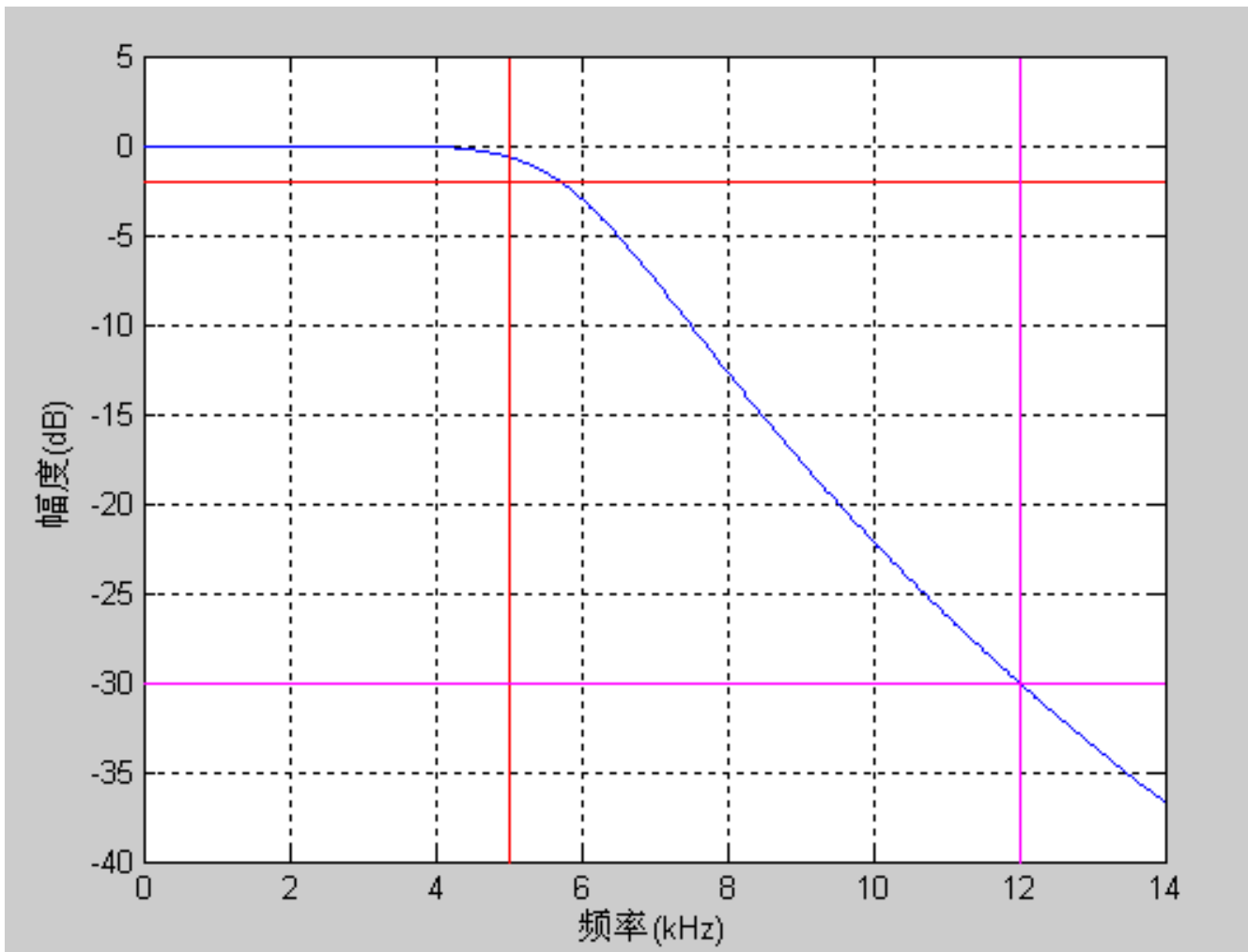
```
N=5, wc=3.7792e+004, B=7.7094e+022
```

```
A = [1 1.2230e+005 7.4785e+009 2.8263e+014 6.6014e+018 7.7094e+022]
```

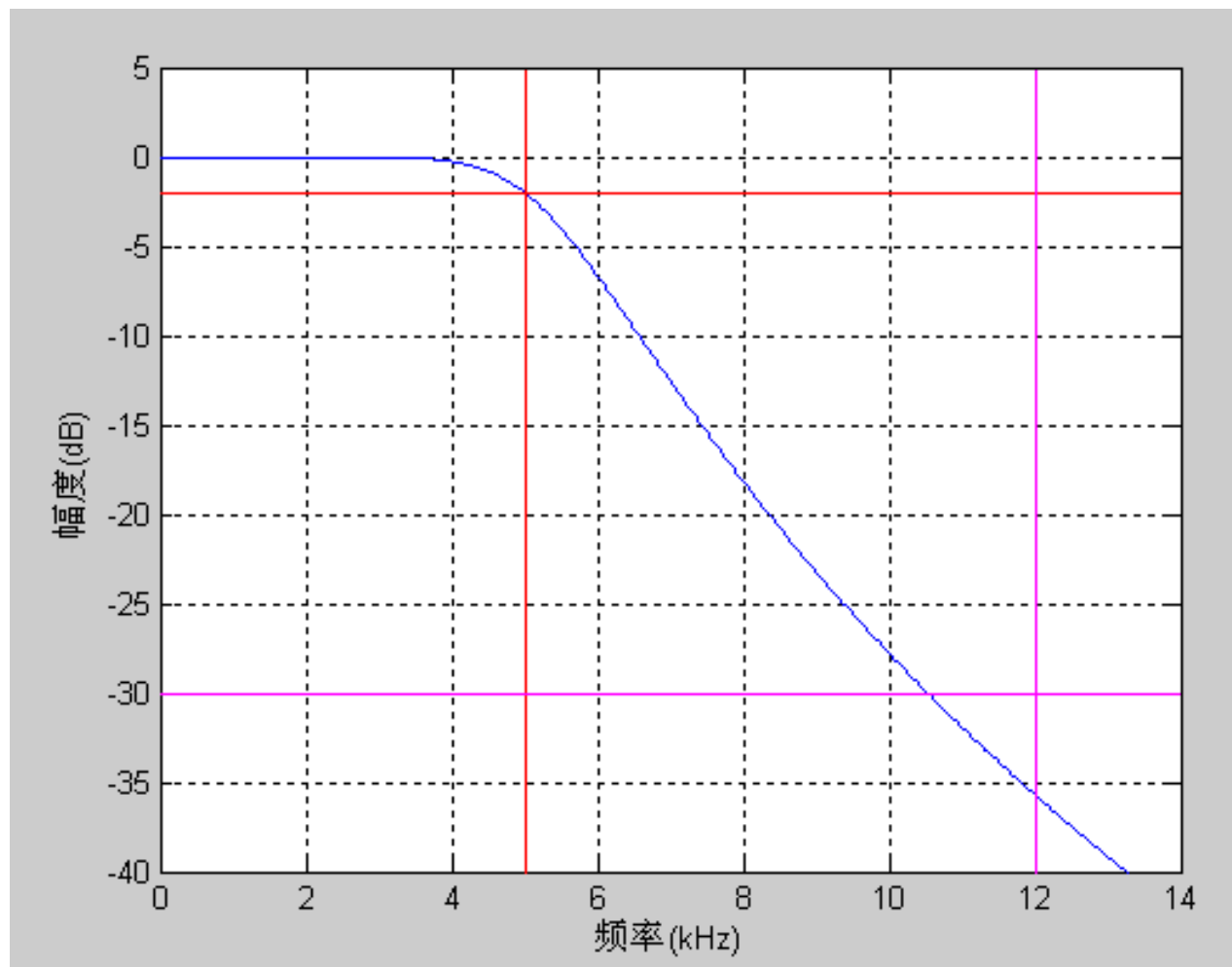
将B和A代入（6.2.23）式写出系统函数为

$$H_a(s) = \frac{B}{s^5 + A(2)s^4 + A(3)s^3 + A(4)s^2 + A(5)s + A(6)}$$

与例6.2.1计算结果形式相同。滤波器的损耗函数曲线如图6.2.6所示。由图可以看出，阻带刚好满足指标要求，通带指标有富余。这就说明butterd函数使用（6.2.20）式计算3 dB 截止频率。



**wc**为阻带截止频率计算得到。



$w_c$ 为通带截止频率计算得到。



## 6.2.6 频率变换与模拟高通、带通、带阻滤波器的设计

高通、带通、带阻滤波器的幅频响应曲线及边界频率分别如图6.2.12(a)、(b)和(c)所示。

低通、高通、带通和带阻滤波器的通带最大衰减和阻带最小衰减仍用 $\alpha_p$ 和 $\alpha_s$ 表示。

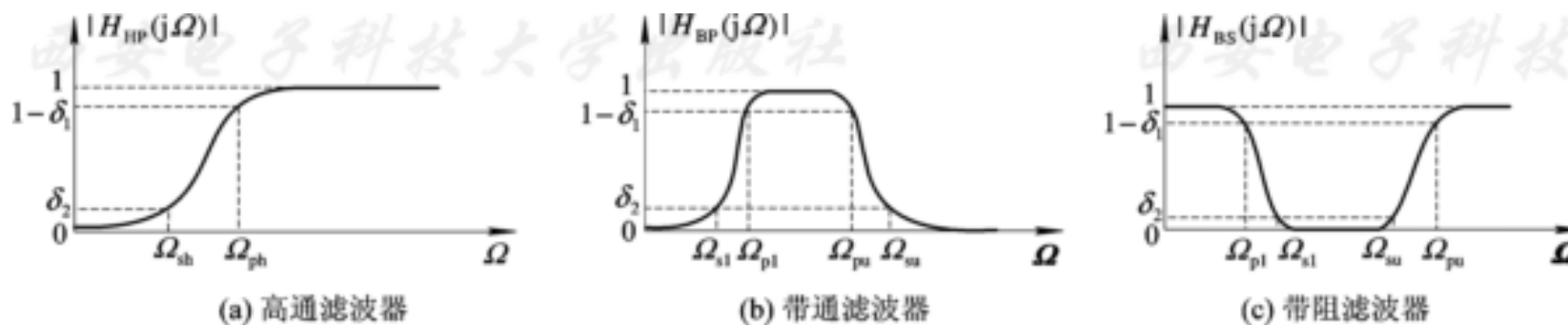


图6.2.12 各种滤波器幅频特性曲线及边界频率示意图

---

从原理上讲，通过频率变换公式，可以将模拟低通滤波器系统函数 $Q(p)$ 变换成希望设计的低通、高通、带通和带阻滤波器系统函数 $H_d(s)$ 。

设计高通、带通和带阻滤波器的一般过程是：

- (1) 通过频率变换公式，先将希望设计的滤波器指标转换为相应的低通滤波器指标；
- (2) 设计相应的低通系统函数 $Q(p)$ ；
- (3) 对 $Q(p)$ 进行频率变换，得到希望设计的滤波器系统函数 $H_d(s)$ 。

本节先简要介绍模拟滤波器的频率变换公式，再举例说明调用MATLAB信号处理工具箱函数直接设计高通、带通和带阻滤波器的方法。

---

这里，“归一化低通滤波器”是指关于某个边界频率归一化的低通滤波器,其系统函数就用 $Q(p)$ 表示。

归一化频率根据设计需要而定，对巴特沃斯滤波器关于3 dB截止频率归一化的系统函数称为巴特沃斯归一化低通原型（记为 $G(p)$ ）。

为了叙述方便，定义 $p=\eta+j\lambda$ 为 $Q(p)$ 的归一化复变量，其通带边界频率记为 $\lambda_p$ ， $\lambda$ 称为归一化频率。

用 $H_d(s)$ 表示希望设计的模拟滤波器的系统函数， $s=\sigma+j\Omega$ 表示 $H_d(s)$ 的复变量。

下面简单介绍各种频率变换公式。从 $p$ 域到 $s$ 域映射的可逆变换记为 $p=F(s)$ 。  
低通系统函数 $Q(p)$ 与 $H_d(s)$ 之间的转换关系为

$$H_d(s) = Q(p) \Big|_{p=F(s)}$$

$$Q(p) = H_d(s) \Big|_{s=F^{-1}(p)}$$

# 1. 模拟高通滤波器设计

从低通到高通滤波器的映射关系为

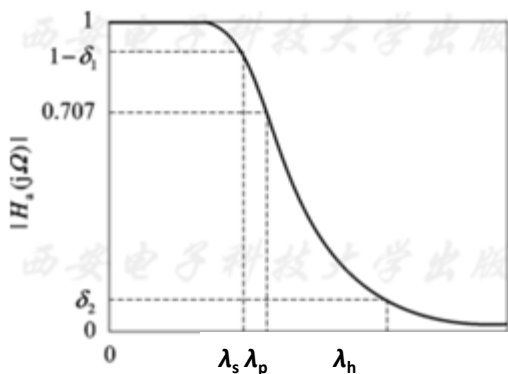
$$p = \frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{s}$$

在虚轴(频率轴)上该映射关系简化为如下频率变换公式:

$$p \rightarrow j\lambda$$

$$s \rightarrow j\Omega$$

$$\lambda = -\frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{\Omega}$$



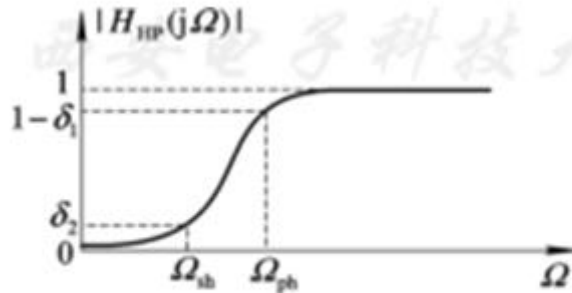
低通滤波器

通带  $[0, \lambda_p]$

通带  $[-\lambda_p, 0]$

阻带  $[\lambda_s, \infty]$

阻带  $[-\infty, -\lambda_s]$



(a) 高通滤波器

高通滤波器

通带  $[-\infty, -\Omega_{ph}]$

通带  $[\Omega_{ph}, \infty]$

阻带  $[-\Omega_{sh}, 0]$

阻带  $[0, \Omega_{sh}]$

所以只要将式  $p = \frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{s}$  代入式  $H_d(s) = Q(p)|_{p=F(s)}$   
就可将通带边界频率为  $\lambda_p$  的低通滤波器的系统函数  $Q(p)$  转换成通带边界频率为  $\Omega_{ph}$  的高通滤波器系统函数:

$$H_{HP}(s) = Q(p)|_{p=\lambda_p \Omega_{ph}/s}$$

**【例6.2.5】** 设计巴特沃思模拟高通滤波器, 要求通带边界频率为4 kHz, 阻带边界频率为1 kHz, 通带最大衰减为0.1 dB, 阻带最小衰减为40 dB。

解 (1) 通过映射关系式, 将希望设计的高通滤波器的指标转换成相应的低通滤波器 $Q(p)$ 的指标。为了计算简单, 一般选择 $Q(p)$ 为归一化低通, 即取 $Q(p)$ 的通带边界频率 $\lambda_p=1$ 。则归一化阻带边界频率为

$$\lambda_p=1, \quad \lambda_s = \frac{\Omega_{ph}}{\Omega_{sh}} = \frac{2\pi \times 4000}{2\pi \times 1000} = 4 \quad \lambda = -\frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{\Omega}$$

转换得到低通滤波器的指标为: 通带边界频率 $\lambda_p=1$ , 阻带边界频率 $\lambda_s=4$ , 通带最大衰减 $\alpha_p=0.1\text{dB}$ , 阻带最小衰减 $\alpha_s=40\text{ dB}$ 。

(2) 设计相应的归一化低通系统函数 $Q(p)$ 。本例调用MATLAB函数**buttord**和**butter**来设计 $Q(p)$ 。

(3) 将 $Q(p)$ 转换成希望设计的高通滤波器的系统函数 $H_{HP}(s)$ 。

本例调用MATLAB函数lp2hp实现低通到高通的变换。lp2hp函数的功能可用help命令查阅。

$[BH, AH] = \text{lp2hp}(B, A, wph)$ 将系统函数分子和分母系数向量为B和A的低通滤波器变换成通带边界频率为wph的高通滤波器，返回结果BH和AH是高通滤波器系统函数分子和分母的系数向量。实现步骤（2）和（3）的程序ep616.m如下：



---

**%例6.2.5 设计巴特沃思模拟高通滤波器程序: ep625.m**

**wp=1; ws=4; Rp=0.1; As=40; %设置低通滤波器指标参数**

**[N, wc] =buttord(wp, ws, Rp, As, 's');**

**%计算低通滤波器 $Q(p)$ 的阶数 $N$ 和3 dB截止频率 $wc$**

**[B, A] =butter(N, wc, 's');**

**%计算低通滤波器系统函数 $Q(p)$ 的分子分母多项式系数**

**wph=2\*pi\*4000;**

**%模拟高通滤波器通带边界频率wph**

**[BH, AH] =lp2hp(B, A, wph);**

**%低通到高通转换**

---

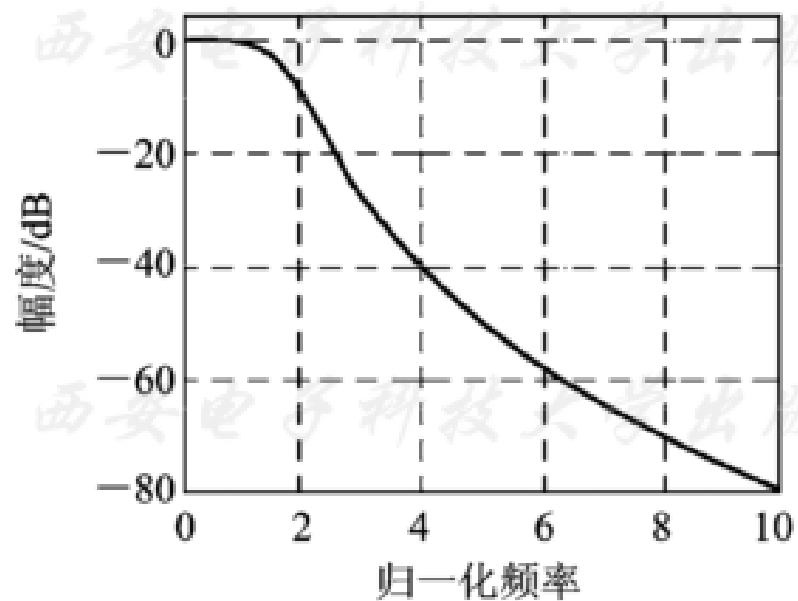
由系数向量**B**和**A**写出归一化低通系统函数为

$$Q(p) = \frac{10.2405}{p^5 + 5.1533p^4 + 13.278p^3 + 21.1445p^2 + 20.8101p + 10.2405}$$

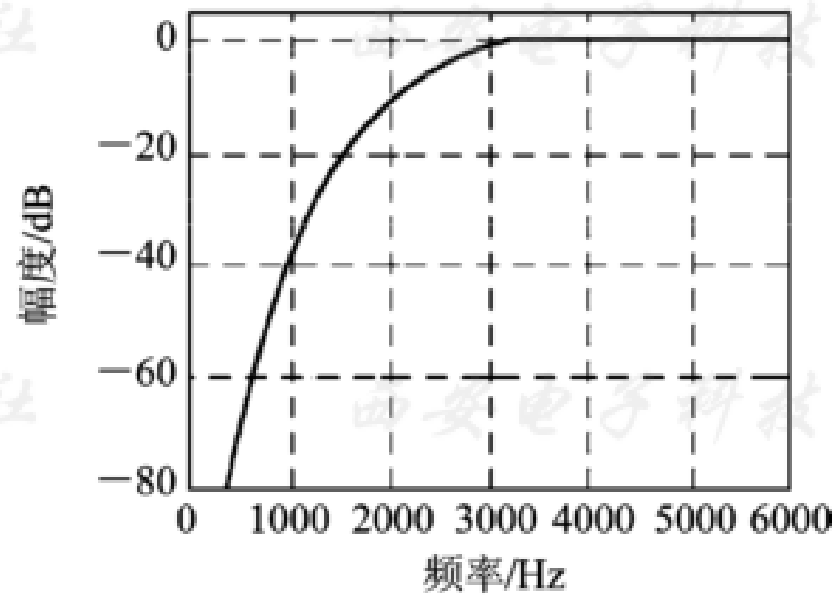
由系数向量**BH**和**AH**写出希望设计的高通滤波器系统函数为

$$H_{\text{HP}}(s) = \frac{s^5 + 1.94 \times 10^{-12} s^4 - 5.5146 \times 10^{-5} s^3 + 9.5939 s^2 + 4.5607 s + 1.9485 \times 10^{-3}}{s^5 + 5.1073 \times 10^4 s^4 + 1.3042 \times 10^9 s^3 + 2.0584 \times 10^{13} s^2 + 2.0078 \times 10^{17} s + 9.7921 \times 10^{20}}$$

**Q(p)**和**HHP(s)**的损耗函数曲线如图**6.2.13**所示。



(a) 归一化低通滤波器  $Q(p)$



(b) 高通滤波器  $H_{HP}(s)$

图6.2.13 例6.2.5 所得低通、高通滤波器损耗函数曲线

---

值得注意的是，实际上调用函数**buttord**和**butter**可以直接设计巴特沃思高通滤波器。设计程序**ep625b.m**如下：

**%例6.2.5 设计巴特沃思模拟高通滤波器程序: ep625b.m**

**wp=2\*pi\*4000; ws=2\*pi\*1000; Rp=0.1; As=40;**

**%设置高通滤波器指标参数**

**[N, wc] =buttord(wp, ws, Rp, As, 's');**

**%计算高通滤波器阶数N和3 dB截止频率**

**[BH, AH] =butter(N, wc, 'high', 's');**

**%计算高通滤波器系统函数 $H_{HP}(s)$ 分子分母多项式  
系数**

程序运行结果:

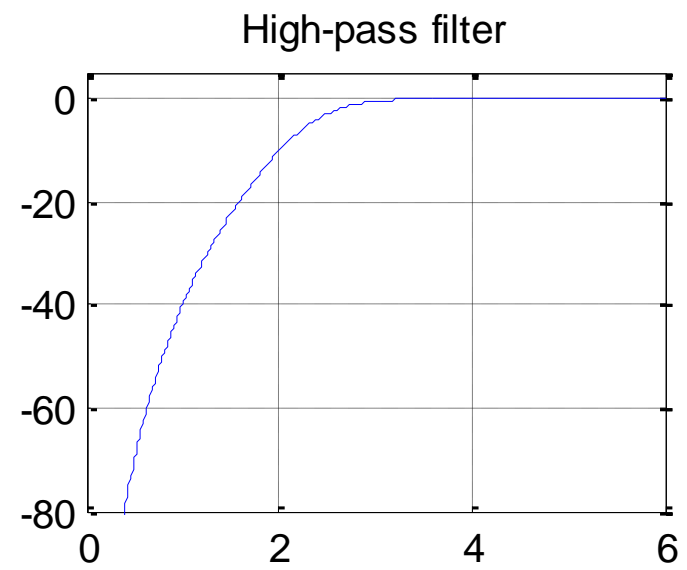
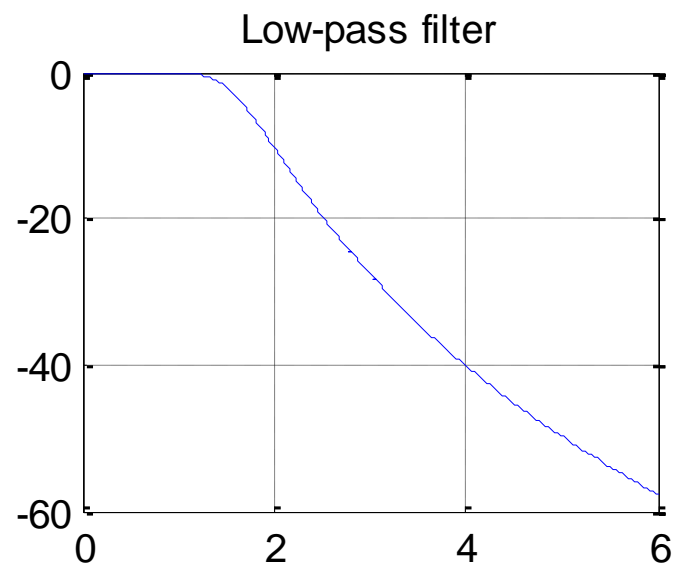
**N=5**

**BH= [1 0 0 0 0 0]**

**AH= [1 5.1073e+004 1.3042e+009 2.0584e+013 2.0078e+017  
9.7921e+020]**

分母多项式系数向量AH与程序ep625.m的运行结果相同。但是，分子多项式系数向量BH与程序ep625.m的运行结果有较大差别，这是由运算误差引起的。由于butter函数采用了归一化处理，所以计算误差小。

$$H_{\text{HP}}(s) = \frac{s^2}{s^5 + 5.1073 \times 10^4 s^4 + 1.3042 \times 10^9 s^3 + 2.0584 \times 10^{13} s^2 + 2.0078 \times 10^{17} s + 9.7921 \times 10^{20}}$$



## 2. 低通到带通的频率变换

低通到带通的频率变换公式为：  
在 $p$ 平面与 $s$ 平面虚轴上的频率关系为

$$p = \lambda_p \frac{s^2 + \Omega_0^2}{B_w s}$$

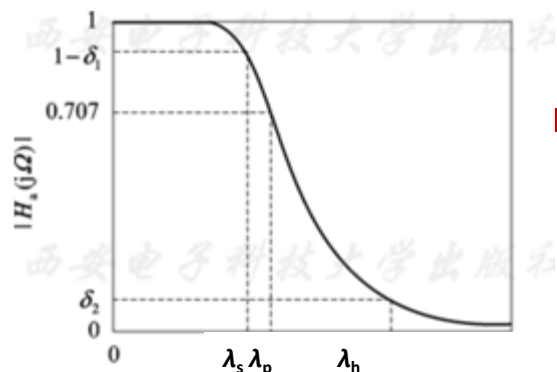
$$\lambda = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega B_w}$$

$B_w = \Omega_{pu} - \Omega_{pl}$ , 表示带通滤波器的通带宽度;  $\Omega_{pl}$ 和 $\Omega_{pu}$ 分别为带通滤波器的通带下截止频率和通带上截止频率;

$\Omega_0$ 称为带通滤波器的中心频率。

$$\Omega_0^2 = \Omega_{pl} \Omega_{pu} = \Omega_{sl} \Omega_{su}$$

所以，带通滤波器的通带（阻带）边界频率关于中心频率 $\Omega_0$ 几何对称。



## 低通滤波器

频率  $\lambda=0$

频率  $\lambda=\lambda_p$

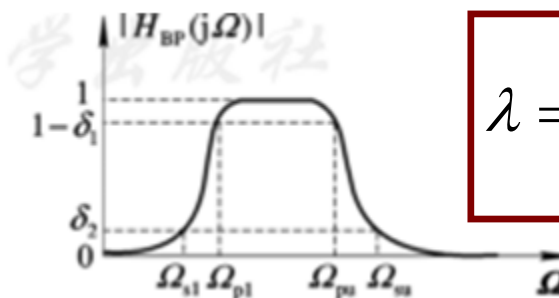
频率  $\lambda=-\lambda_p$

通带  $[-\lambda_p, \lambda_p]$

频率  $\lambda=\lambda_s$

频率  $\lambda=-\lambda_s$

带通滤波器的系统函数为



## 带通滤波器

频率  $\Omega=\pm\Omega_0$

频率  $\Omega_{pu}$  和  $-\Omega_{pl}$

频率  $-\Omega_{pu}$  和  $\Omega_{pl}$

通带  $[-\Omega_{pu}, -\Omega_{pl}]$   $[\Omega_{pl}, \Omega_{pu}]$

频率  $\Omega_{su}$  和  $-\Omega_{sl}$

频率  $-\Omega_{su}$  和  $\Omega_{sl}$

$$\lambda = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega B_w}$$

$$H_{BP}(s) = Q(p)$$

$$p = \lambda_p \frac{s^2 + \Omega_0^2}{B_w s}$$



如果原指标给定的边界频率不满足式

$$\Omega_0^2 = \Omega_{pl}\Omega_{pu} = \Omega_{sl}\Omega_{su}$$

就要改变其中一个边界频率,但要保证改变后的指标高于原始指标。

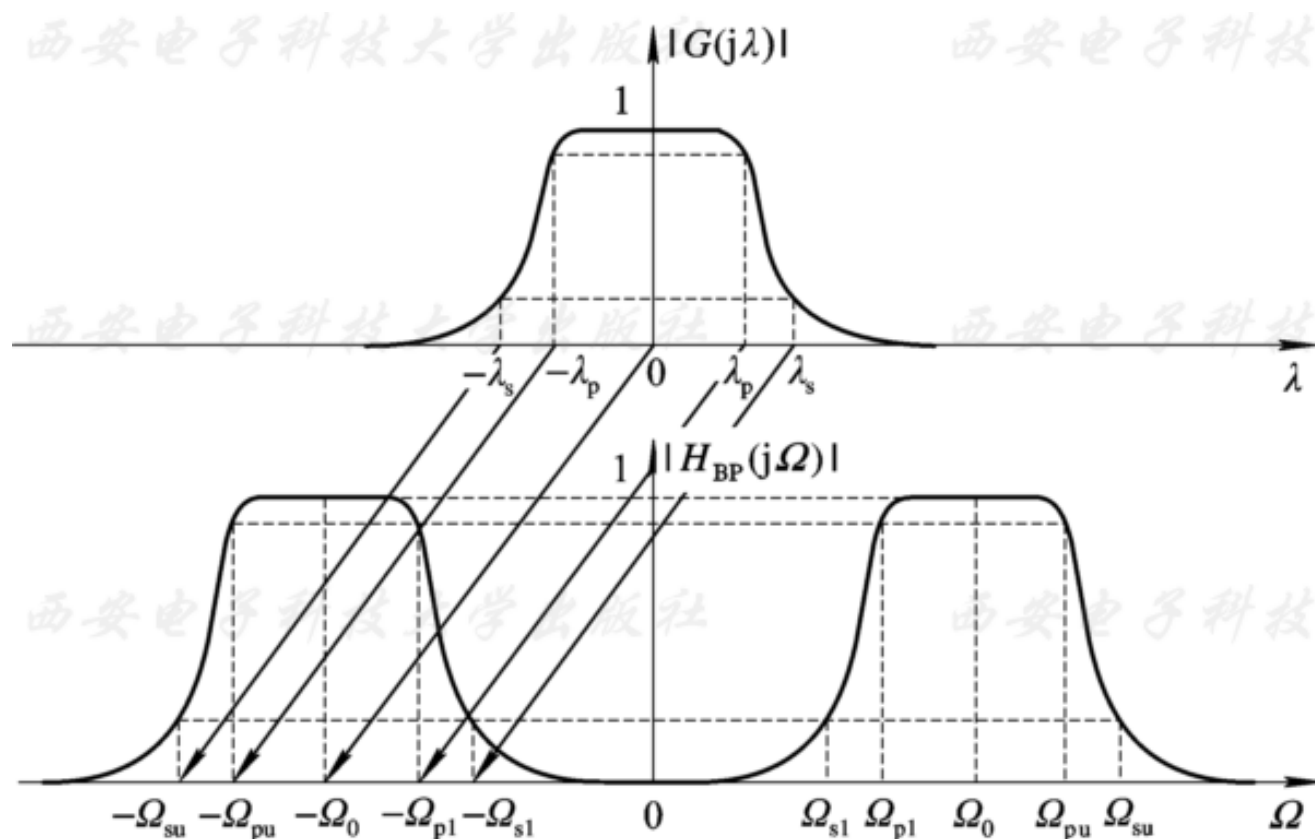
具体方法是,如果 $\Omega_{pl}\Omega_{pu} > \Omega_{sl}\Omega_{su}$ , 则减小 $\Omega_{pl}$  (或增大 $\Omega_{sl}$ )。

反之,如果 $\Omega_{pl}\Omega_{pu} < \Omega_{sl}\Omega_{su}$ , 则减小 $\Omega_{su}$  (或增大 $\Omega_{pu}$ )。

具体计算公式:

$$\Omega_{pl} = \frac{\Omega_{sl}\Omega_{su}}{\Omega_{pu}} \quad \text{或} \quad \Omega_{sl} = \frac{\Omega_{pl}\Omega_{pu}}{\Omega_{su}}$$

综上所述，低通到带通的边界频率及幅频响应特性的映射关系如图所示，低通原型的每一个边界频率都映射为带通滤波器两个相应的边界频率。图中标出了设计时有用的频率对应关系。



**【例6.2.6】** 设计巴特沃思模拟带通滤波器，要求通带上、下边界频率分别为4 kHz和7 kHz，阻带上、下边界频率分别为2 kHz和9 kHz，通带最大衰减为1 dB，阻带最小衰减为20 dB。

解 所给带通滤波器指标为：

$$f_{pl} = 4 \text{ kHz}, f_{pu} = 7 \text{ kHz}, \alpha_p = 1 \text{ dB};$$

$$f_{sl} = 2 \text{ kHz}, f_{su} = 9 \text{ kHz}, \alpha_s = 20 \text{ dB}$$

$$f_{pl} f_{pu} = 4000 \times 7000 = 28 \times 10^6;$$

$$f_{sl} f_{su} = 2000 \times 9000 = 18 \times 10^6$$

---

因为 $f_{pl}f_{pu} > f_{sl}f_{su}$ ，所以不满足（6.2.56）式。按照（6.2.57）式增大 $f_{sl}$ ，则

$$f_{sl} = \frac{f_{pl}f_{pu}}{f_{su}} = \frac{28 \times 10^6}{9 \times 10^3} = 3.1111 \text{ kHz}$$

采用修正后的 $f_{sl}$ ，按如下步骤设计巴特沃斯模拟带通滤波器。

① 通过映射关系式  $\lambda = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega B_w}$ ，将希望设计的带通滤波器指标转换为相应的低通原型滤波器 $Q(p)$ 的指标。 $\lambda_p=1$ 。因为 $\lambda=\lambda_s$ 的映射为 $-\Omega_{sl}$ ，所以将 $\lambda_p=1$ 、 $\lambda=\lambda_s$ 和 $\Omega=-\Omega_{sl}$ 代入式（6.2.54）可求得归一化阻带边界频率为

$$\lambda_s = \frac{f_0^2 - f_{sl}^2}{f_{sl} B_w} = \frac{28 - 3.1111^2}{3.1111 \times 3} = 1.9630$$

转换得到的归一化低通滤波器指标为：通带边界频率 $\lambda_p=1$ ，阻带边界频率 $\lambda_s=1.963$ ，通带最大衰减 $\alpha_p=1$  dB，阻带最小衰减 $\alpha_s=20$  dB。

## •不修正的具体方法:

$$f_{pl} = 4 \text{ kHz}, f_{pu} = 7 \text{ kHz}, \alpha_p = 1 \text{ dB}; \quad f_{pl} f_{pu} = 4000 \times 7000 = 28 \times 10^6;$$

$$f_{sl} = 2 \text{ kHz}, f_{su} = 9 \text{ kHz}, \alpha_s = 20 \text{ dB} \quad f_{sl} f_{su} = 2000 \times 9000 = 18 \times 10^6$$

频率 $\lambda = \lambda_s$ 映射为: 频率 $\Omega_{su}$ 和 $-\Omega_{sl}$

$$\lambda_{s1} = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega_{su}^2}{\Omega_{su} B_w} = -\frac{28 - 81}{9 \cdot 3} = 1.9629$$

$$\lambda_{s2} = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - (-\Omega_{sl})^2}{(-\Omega_{sl}) B_w} = -\frac{28 - 4}{-2 \cdot 3} = 4$$

选择小的 $\lambda_s$ 作为指标。

---

② 设计相应的归一化低通系统函数 $Q(p)$ 。设计过程与例6.2.1完全相同，留作读者练习。

③ 用式（6.2.55）将 $Q(p)$ 转换成所希望设计的带通滤波器系统函数 $H_{BP}(s)$ 。

本例调用MATLAB函数**buttord**和**butter**直接设计巴特沃思模拟带通滤波器。设计程序**ep626.m**如下：

---

**%例6.2.6 设计巴特沃思模拟带通滤波器程序:**

**ep626.m**

**wp=2\*pi\* [4000, 7000] ; ws=2\*pi\* [2000, 9000] ;**

**Rp=1; As=20;**

**%设置带通滤波器指标参数**

**[N, wc] =buttord(wp, ws, Rp, As, 's');**

**%计算带通滤波器阶数N和3dB截止频率wc**

**[BB, AB] =butter(N, wc, 's');**

**%计算带通滤波器系统函数分子分母多项式系数向量BB和AB**



程序运行结果:

阶数:  $N=5$

系统函数分子多项式系数向量:

$BB=1.0e+021 * [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6.9703 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$

系统函数分母多项式系数向量:

$AB= [1 \ 7.5625e+004 \ 8.3866e+009 \ 4.0121e+014 \ 2.2667e+019$   
 $7.0915e+023$   
 $2.5056e+028 \ 4.9024e+032 \ 1.1328e+037 \ 1.1291e+041$   
 $1.6504e+045 ]$

由运行结果可知, 带通滤波器是 $2N$ 阶的。10阶巴特沃思带通滤波器损耗函数曲线如图6.2.15所示。

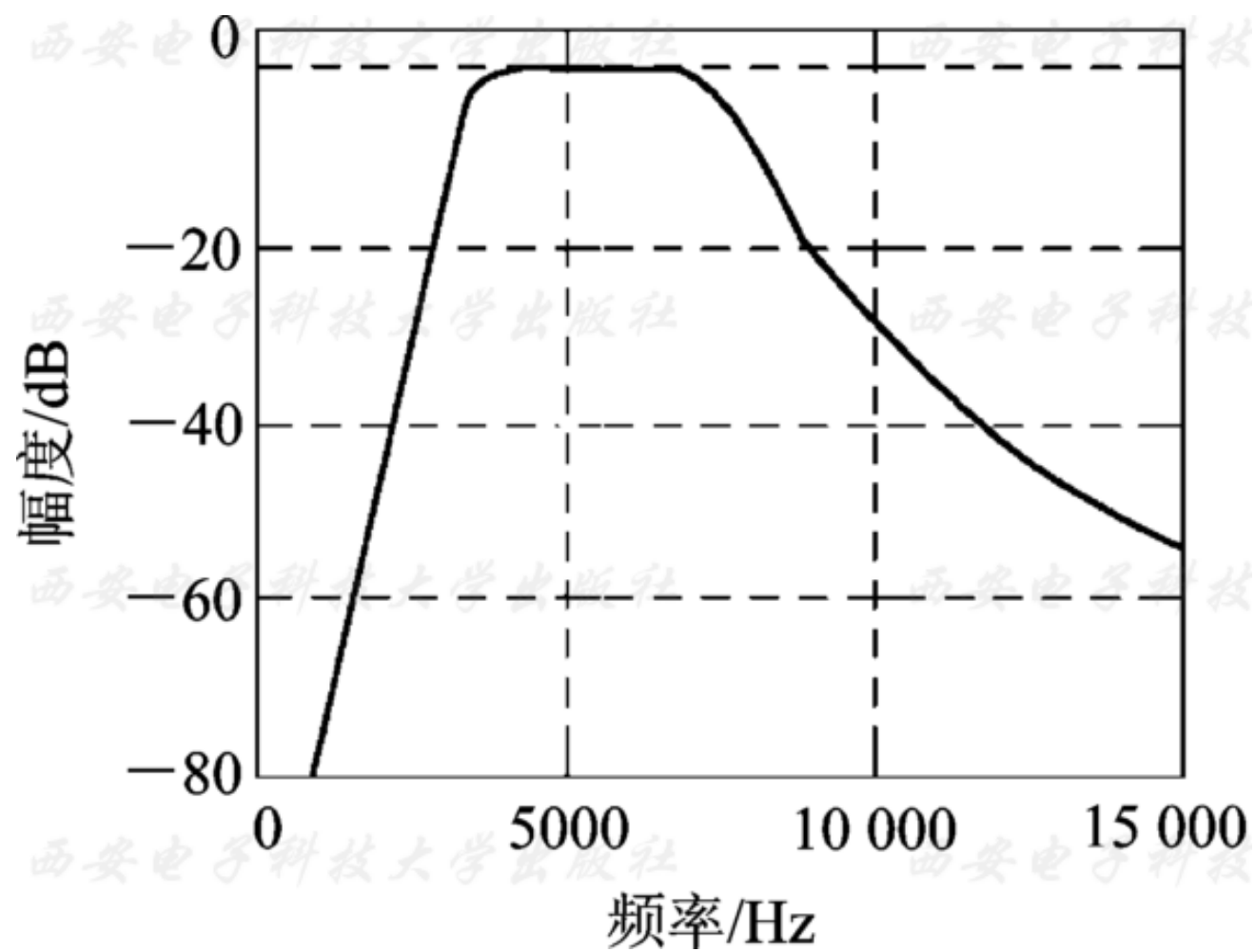
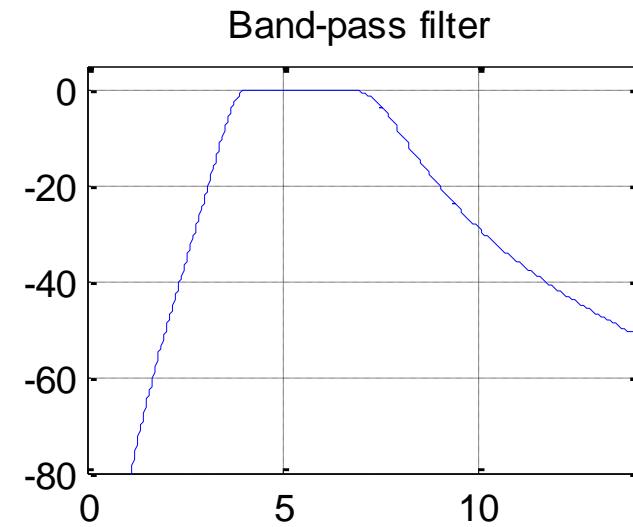
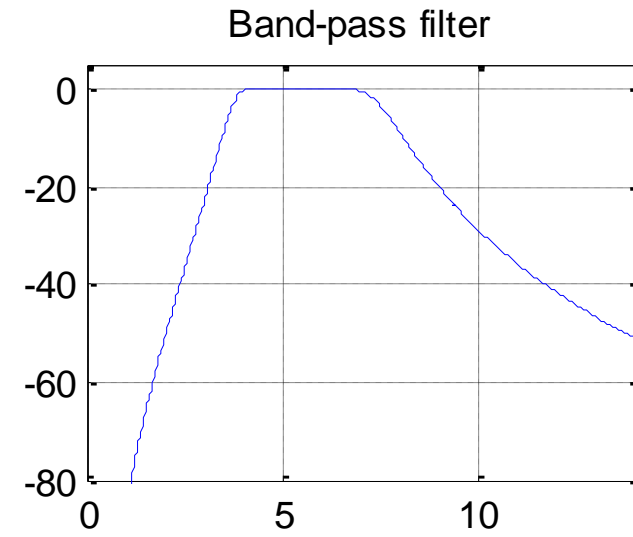
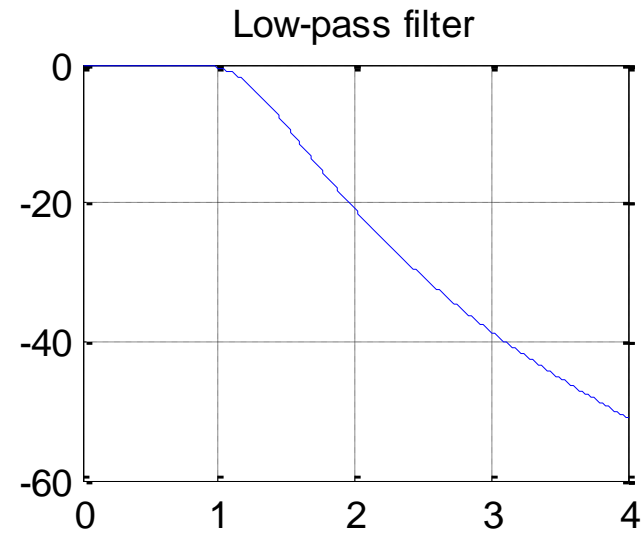


图6.2.15 例6.2.6巴特沃思模拟带通滤波器损耗函数



### 3. 低通到带阻的频率变换

低通到带阻的频率变换公式为

$$p = \lambda_s \frac{B_w s}{s^2 + \Omega_0^2}$$

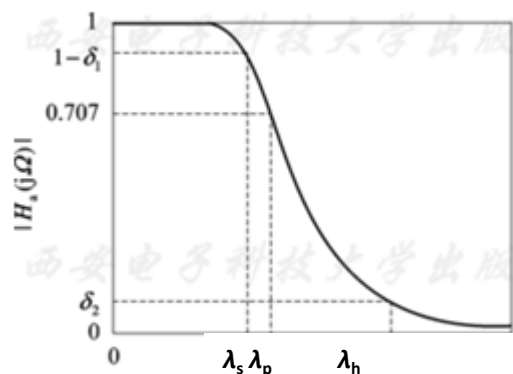
在p平面与s平面虚轴上的频率变换关系为

$$\lambda = -\lambda_s \frac{\Omega B_w}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$$

$B_w = \Omega_{su} - \Omega_{sl}$ , 表示带阻滤波器的阻带宽度,  $\Omega_{sl}$ 和 $\Omega_{su}$ 分别为带阻滤波器的阻带下截止频率和阻带上截止频率;

$\Omega_0$ 称为带阻滤波器的阻带中心频率。

$$\Omega_{pl} \Omega_{ph} = \Omega_{sl} \Omega_{sh} = \Omega_0^2$$



### 低通滤波器

通带  $[-\lambda_p, \lambda_p]$

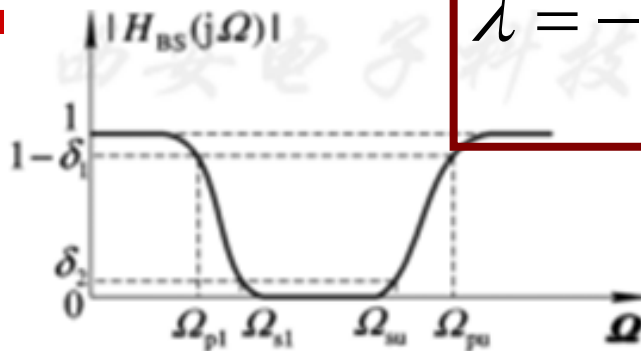
频率  $\lambda = \lambda_p$

频率  $\lambda = -\lambda_p$

频率  $\lambda = \lambda_s$

频率  $\lambda = -\lambda_s$

带阻滤波器的系统函数:



### 带阻滤波器

阻带  $[-\Omega_{su}, -\Omega_{sl}]$  和  $[\Omega_{sl}, \Omega_{su}]$ 。

频率  $\Omega_{pu}$  和  $-\Omega_{pl}$

频率  $-\Omega_{pu}$  和  $\Omega_{pl}$

频率  $\Omega_{su}$  和  $-\Omega_{sl}$

频率  $-\Omega_{su}$  和  $\Omega_{sl}$

$$H_{BP}(s) = G(p) \bigg|_{p = \lambda_s \frac{B_w s}{s^2 + \Omega_0^2}}$$

$$\lambda = -\lambda_s \frac{\Omega B_w}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$$

**【例6.2.7】** 分别设计巴特沃思带阻滤波器，要求阻带上、下边界频率分别为4 kHz和7 kHz，通带上、下边界频率分别为2 kHz和9 kHz，通带最大衰减为1 dB，阻带最小衰减为20 dB。

解 所给带阻滤波器指标为

$$f_{sl} = 4 \text{ kHz}, f_{su} = 7 \text{ kHz}, \alpha_s = 20 \text{ dB};$$

$$f_{pl} = 2 \text{ kHz}, f_{pu} = 9 \text{ kHz}, \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$f_{sl} f_{su} = 4000 \times 7000 = 28 \times 10^6;$$

$$f_{pl} f_{pu} = 2000 \times 9000 = 18 \times 10^6$$

$$\lambda = -\lambda_s \frac{\Omega B_w}{\Omega_0^2 - \Omega^2} \rightarrow \lambda_p = -\lambda_s \frac{\Omega B_w}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\rightarrow \lambda_s = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega^2}{\Omega B_w}$$

频率 $\lambda=\lambda_p$ 映射为：频率 $\Omega_{pu}$ 和 $-\Omega_{pl}$

$$\lambda_{s1} = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - \Omega_{pu}^2}{\Omega_{pu} B_w} = -\frac{28-81}{9 \cdot 3} = 1.9629$$

$$\lambda_{s2} = -\lambda_p \frac{\Omega_0^2 - (-\Omega_{pl})^2}{(-\Omega_{pl}) B_w} = -\frac{28-4}{-2 \cdot 3} = 4$$

选择小的 $\lambda_s$  作为指标。

---

调用MATLAB函数**buttord**, **butter**直接设计巴特沃思带阻模拟滤波器的设计程序如下:

**%例6.2.7 设计模拟带阻滤波器程序: ep627.m**

**wp=2\*pi\* [2000, 9000] ; ws=2\*pi\* [4000, 7000] ; Rp=1; As=20;**

**%设置带阻滤波器指标参数**

**%设计巴特沃思模拟带阻滤波器**

**[Nb, wc] =buttord(wp, ws, Rp, As, 's');**

**%计算带阻滤波器阶数N和3 dB截止频率**

**[BSb, ASb] =butter(Nb, wc, 'stop', 's');**

**%计算带阻('stop')滤波器系统函数分子分母多项式系数**



---

程序运行结果:

巴特沃思模拟带阻滤波器阶数: Nb=5

巴特沃思模拟带阻滤波器系统函数分子多项式系数向量:

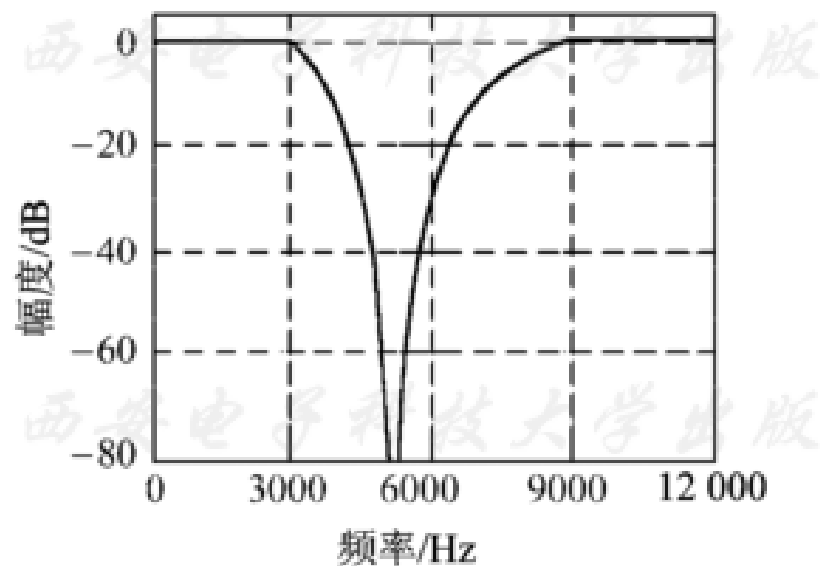
**BSb=1.0e+021 \* [0 0 0 0 0 6.9703 0 0 0 0 0]**

巴特沃思模拟带阻滤波器系统函数分母多项式系数向量:

**ASb= [1 7.5625e+004 8.3866e+009 4.0121e+014 2.2667e+019  
7.0915e+023  
2.5056e+028 4.9024e+032 1.1328e+037 1.1291e+041  
1.6504e+045]**

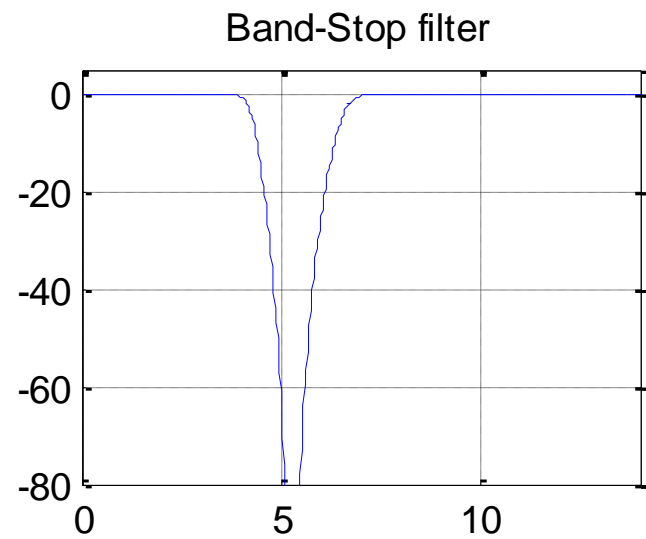
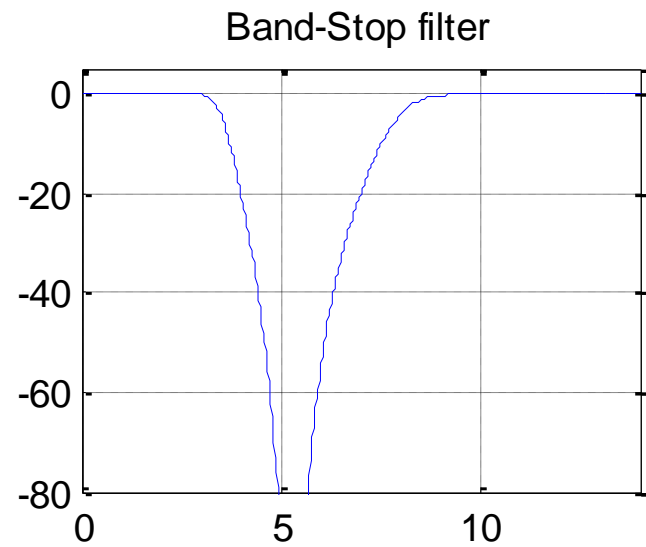
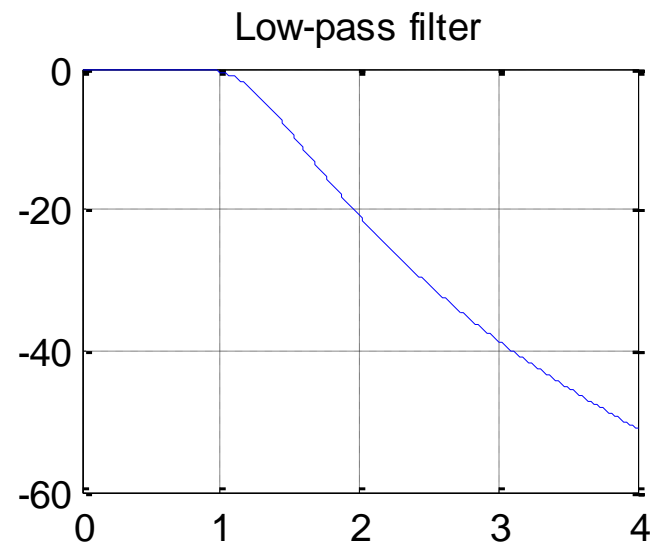
由运行结果可知，带阻滤波器也是 $2N$ 阶的。10阶巴特沃思带阻滤波器如

图6.2.16(a)。



(a) 巴特沃思带阻滤波器

图6.2.16 例6.2.7的巴特沃思



$$\hat{H}_a(s) = \sum_n h(n) e^{-snT} = \sum_n h(n) z^{-n} \Big|_{z=e^{sT}} = H(z) \Big|_{z=e^{sT}}$$

---

上式表明理想采样信号  $\hat{h}_a(t)$  的拉氏变换与相应的采样序列  $h(n)$  的Z变换之间的映射关系可用下式表示：

$$z = e^{sT}$$

上式就是脉冲响应不变法对应的s平面到z平面的映射关系。

设  $s = \sigma + j\Omega$ ,  $z = re^{j\omega}$ , 得到  $re^{j\omega} = e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$ 。由此得到：

$$\begin{cases} r = e^{\sigma T} \\ \omega = \Omega T \end{cases}$$

## 6.3 用脉冲响应不变法设计IIR数字低通滤波器

---

利用模拟滤波器成熟的理论及其设计方法来设计IIR数字低通滤波器是常用的方法。

设计过程是：按照数字滤波器技术指标要求设计一个过渡模拟低通滤波器 $H_a(s)$ ，再按照一定的转换关系将 $H_a(s)$ 转换成数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$ 。

设计的关键问题就是找到这种转换关系，将 $s$ 平面上的 $H_a(s)$ 转换成 $z$ 平面上的 $H(z)$ 。

---

为了保证转换后的 $H(z)$ 稳定且满足技术指标要求，对转换关系提出两点要求：

(1) 因果稳定的模拟滤波器转换成数字滤波器，仍是因果稳定的。模拟滤波器因果稳定的条件是其系统函数 $H_a(s)$ 的极点全部位于 $s$ 平面的左半平面；数字滤波器因果稳定的条件是 $H(z)$ 的极点全部在单位圆内。因此，转换关系应使 $s$ 平面的左半平面映射到 $z$ 平面的单位圆内部。

(2) 数字滤波器的频率响应模仿模拟滤波器的频响特性， $s$ 平面的虚轴映射为 $z$ 平面的单位圆，相应的频率之间呈线性关系。

将系统函数 $H_a(s)$ 从 $s$ 平面转换到 $z$ 平面的方法有多种，但工程上常用的是脉冲响应不变法和双线性变换法。

## 脉冲响应不变法:

设模拟滤波器的系统函数为 $H_a(s)$ ，相应的单位冲激响应是 $h_a(t)$ ， $H_a(s)=\text{LT}[h_a(t)]$ 。

对 $h_a(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为 $T$ ，得到 $h_a(nT)$ ，将 $h(n)=h_a(nT)$ 作为数字滤波器的单位脉冲响应，那么数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 便是 $h(n)$ 的 $Z$ 变换。

因此脉冲响应不变法是一种时域逼近方法，它使 $h(n)$ 在采样点上等于 $h_a(t)$ 。但是，模拟滤波的设计结果是 $H_a(s)$ ，所以下面基于脉冲响应不变法的思想，导出直接从 $H_a(s)$ 到 $H(z)$ 的转换公式。

$$h(n) = h_a(nT)$$

设模拟滤波器 $H_a(s)$ 只有单阶极点，且分母多项式的阶次高于分子多项式的阶次，将 $H_a(s)$ 用部分分式表示：

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i}$$

式中 $s_i$ 为 $H_a(s)$ 的单阶极点。将 $H_a(s)$ 进行逆拉氏变换，得到：

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t)$$

式中， $u(t)$ 是单位阶跃函数。对 $h_a(t)$ 进行等间隔采样，采样间隔为 $T$ ，得到：

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(n)$$



---

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(n)$$

对上式进行Z变换，得到数字滤波器的系统函数 $H(z)$ ，即

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad \boxed{H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i}}$$

对比式， $H_a(s)$ 的极点 $s_i$ 映射到 $z$ 平面的极点为  $e^{s_i T}$ ，系数 $A_i$ 不变。

下面讨论数字滤波器的频响特性与模拟滤波器的频响特性之间的关系。因为 $h(n)=h_a(nT)$ ，由（2.4.2）和（2.4.3）式得到：

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\Omega - j\frac{2\pi}{T}k)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

上式说明， $H(e^{j\Omega T})$ 是 $H_a(j\Omega)$ 以 $2\pi/T$ 为周期的周期延拓函数（对数字频率，则是以 $2\pi$ 为周期）。

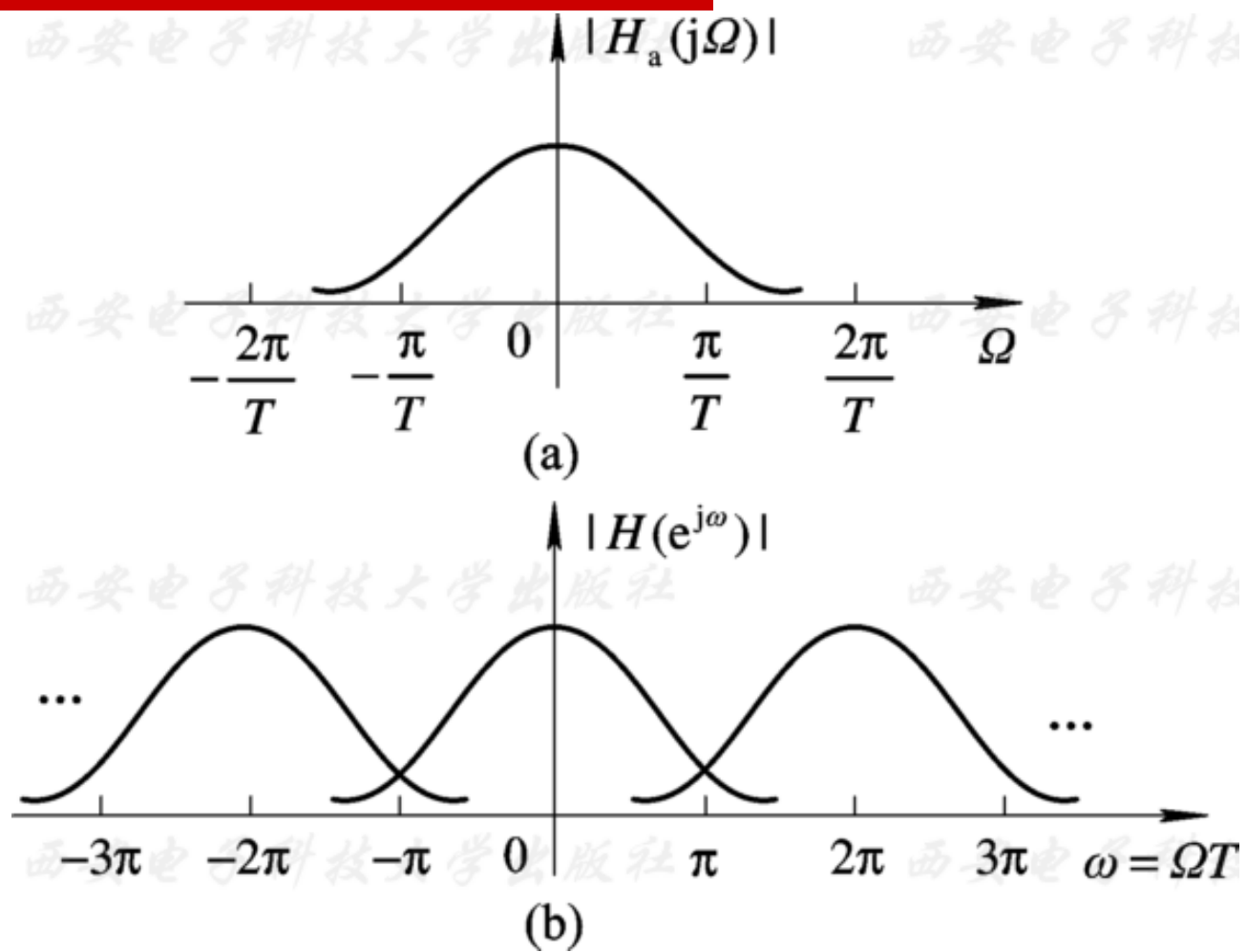
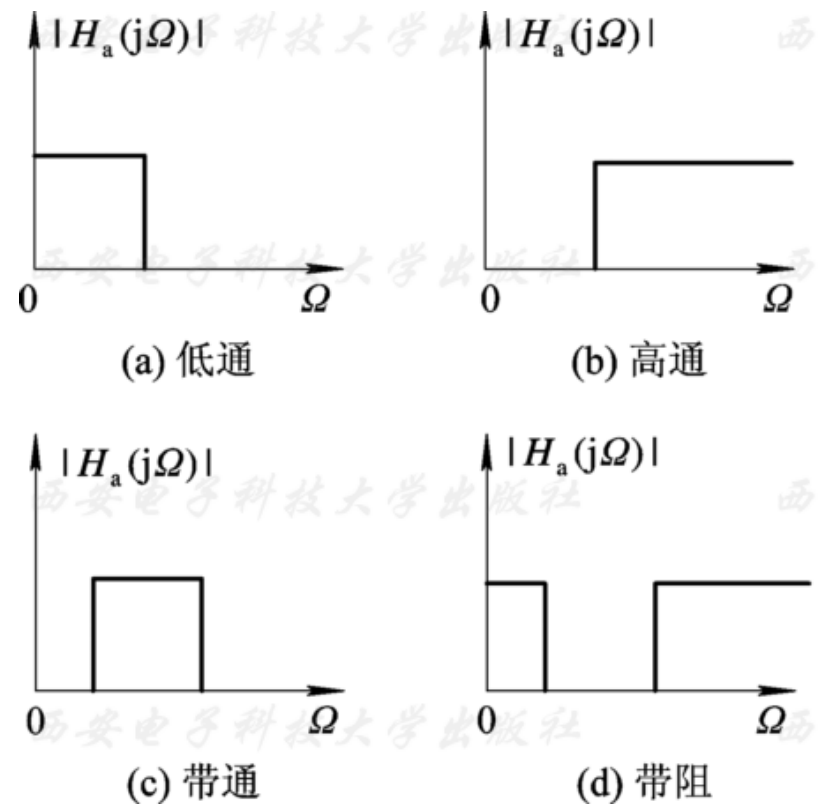


图6.3.2 脉冲响应不变法的频谱混叠现象示意图

为此，希望设计的模拟滤波器是带限滤波器，如果不是带限的，例如高通滤波器、带阻滤波器，需要在高通和带阻滤波器之前加保护滤波器，滤除高于折叠频率 $\pi/T$ 以上的频带，以免产生频谱混叠现象。但这样会增加系统的成本和复杂性，因此，高通与带阻滤波器不适合用这种方法设计。



假设 $H(e^{j\Omega T})$ 没有频谱混叠现象，即满足

$$H_a(j\Omega) = 0, |\Omega| \geq \pi/T$$

得到：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right), |\omega| < \pi$$

上式说明，如果不考虑频谱混叠现象，用脉冲响应不变法设计的数字滤波器可以很好的重现原模拟滤波器的频响特性。但是， $H(e^{j\omega})$ 的幅度与采样间隔成反比，当 $T$ 很小时， $|H(e^{j\omega})|$ 就会有太高的增益。

---

因此采样时，采用： $h(n)=Th_a(nT)$

那么

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

该式称为实用公式，此时：

$$H(e^{j\omega}) = H_a\left(j\frac{\omega}{T}\right), |\omega| < \pi$$

---

综上所述，脉冲响应不变法的优点是频率变换关系是线性的，即 $\omega = \Omega T$ ，如果不存在频谱混叠现象，用这种方法设计的数字滤波器会很好地重现原模拟滤波器的频响特性。

另外一个优点是数字滤波器的单位脉冲响应完全模仿模拟滤波器的单位冲激响应波形，时域特性逼近好。但是，有限阶的模拟滤波器不可能是理想带限的，所以，脉冲响应不变法的最大缺点是会产生不同程度的频率混叠失真，其适合用于低通、带通滤波器的设计，不适合用于高通、带阻滤波器的设计。

---

脉冲响应不变法:

$h(n)=Th_a(nT)$ ,  $T$ 为采样间隔

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i}$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}$$

$$\omega = \Omega T$$



【例6.3.1】已知  $H_a(s)$ ，试用脉冲响应不变法将该模拟传递函数变为数字传递函数，采样周期  $T=0.5$  s。

$$H_a(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

解：

$$H_a(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s+1} - \frac{\frac{3}{2}}{s+3}$$

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{TA_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} = \frac{\frac{3}{2}T}{1 - e^{-T} z^{-1}} - \frac{\frac{3}{2}T}{1 - e^{-3T} z^{-1}} = \frac{\frac{3}{4}}{1 - e^{-\frac{1}{2}} z^{-1}} - \frac{\frac{3}{4}}{1 - e^{-\frac{3}{2}} z^{-1}}$$

**【例6.3.2】** 用脉冲响应不变法设计数字低通滤波器，  
要求通带和阻带具有单调下降特性，指标参数如下：  
 $\omega_p=0.2\pi$  rad,  $\alpha_p=1$  dB,  $\omega_s=0.35\pi$  rad,  $\alpha_s=10$  dB      解  
根据间接设计法的基本步骤求解。

(1) 将数字滤波器设计指标转换为相应的模拟滤波器指标。设采样周期为 $T$ ，得到：

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = \frac{0.2\pi}{T} \text{ rad/s}, \quad \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T} = \frac{0.35\pi}{T} \text{ rad/s}, \quad \alpha_s = 10 \text{ dB}$$

(2) 设计相应的模拟滤波器，得到模拟系统函数 $H_a(s)$ 。根据单调下降要求，选择巴特沃斯滤波器。设计过程与例6.2.1完全相同，求出阶数 $N=4$ 。求解计算留做读者练习。

(3) 按照 (6.3.1) 和 (6.3.4) 式，将模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$ ：

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^4 \frac{A_k}{s - s_k}, \quad H(z) = \sum_{k=1}^4 \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

如上求解计算相当复杂。本例调用MATLAB信号处理工具箱函数进行设计。设计程序ep632.m如下。读者可以改变程序中的 $T$ 值，观察 $T$ 的大小与频谱混叠失真的关系。

---

**%例6.3.2 用脉冲响应不变法设计数字滤波器程序:**

**ep632.m**

**T=1;            %T=1s**

**wp=0.2\*pi/T; ws=0.35\*pi/T; rp=1; rs=10;**

**%T=1 s的模拟滤波器指标**

**[N, wc] =buttord(wp, ws, rp, rs, 's');**

**%计算相应的模拟滤波器阶数N和3 dB截止频率wc**

**[B, A] =butter(N, wc, 's');**

**%计算相应的模拟滤波器系统函数**

**[Bz, Az] =impinvar(B, A, 1); 1为采样频率**

**%用脉冲响应不变法将模拟滤波器转换成数字滤波器  
省略绘图部分。**

---

程序中，**impinvar**是脉冲响应不变法的转换函数，  
**[Bz, Az] =impinvar(B, A)**实现用脉冲响应不变法将  
分子和分母多项式系数向量为**B**和**A**的模拟滤波器系统  
函数 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$ ， $H(z)$ 的分  
子和分母多项式系数向量为**Bz**和**Az**。

取 **$T=1$**  s时的运行结果：

**N=4**

模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$ 分子和分母多项式系数向量**B**  
和**A**：

**B= [0 0 0 0 0.4872]**

**A= [1.0000 2.1832 2.3832 1.5240 0.4872]**

---

数字滤波器的系统函数 $H(z)$ 分子和分母多项式系数向量**Bz**和**Az**:

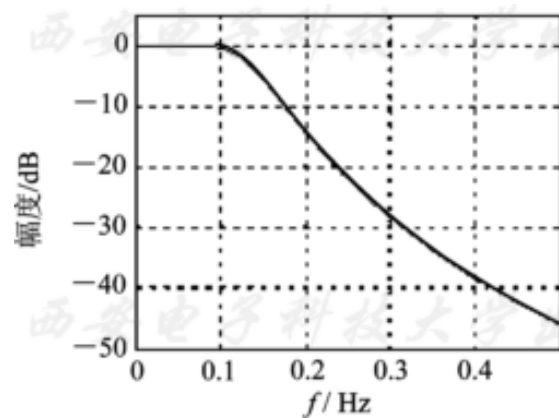
$$\mathbf{Bz} = [0 \quad 0.0456 \quad 0.1027 \quad 0.0154 \quad 0]$$

$$\mathbf{Az} = [1.0000 \quad -1.9184 \quad 1.6546 \quad -0.6853 \quad 0.1127]$$

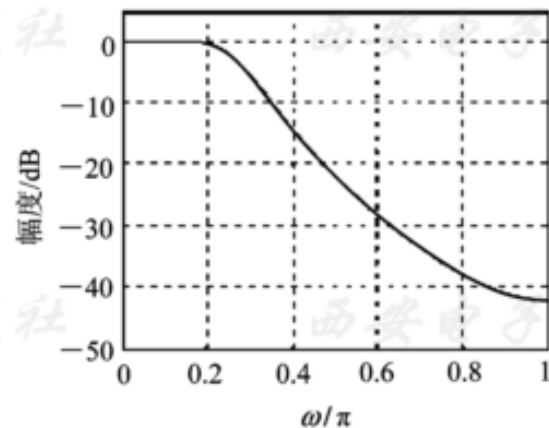
由**Bz**和**Az**写出数字滤波器系统函数:

$$H(z) = \frac{0.0456z^{-1} + 0.1027z^{-2} + 0.0154z^{-3}}{1 - 1.9184z^{-1} + 1.6546z^{-2} - 0.6853z^{-3} + 0.1127z^{-4}}$$

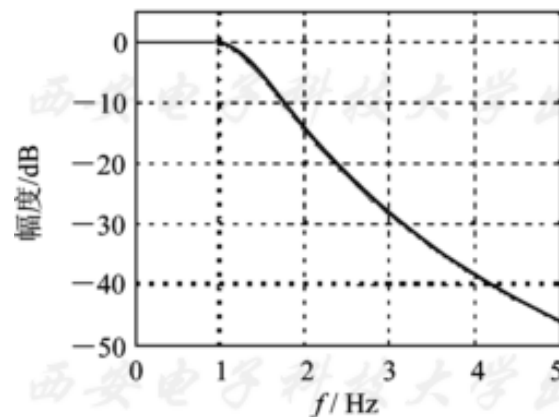
$T=1$  s时模拟滤波器和数字滤波器的损耗函数分别如图6.3.4(a)和(b)所示。



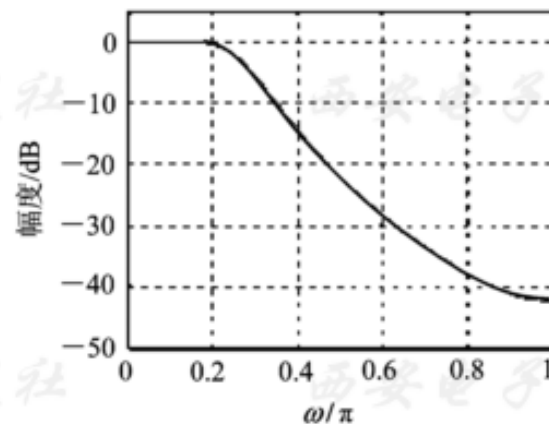
(a) 模拟滤波器( $T=1$  s)



(b) 数字滤波器( $T=1$  s)

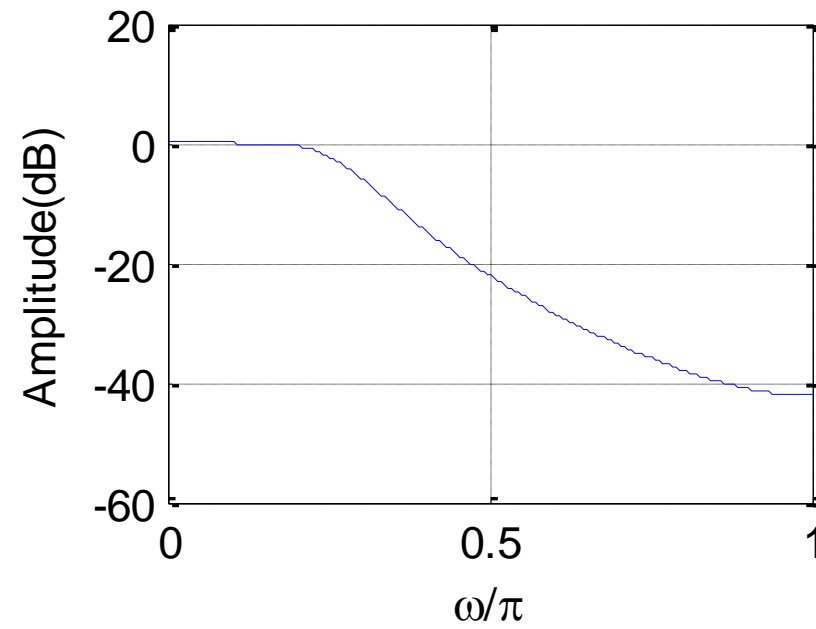
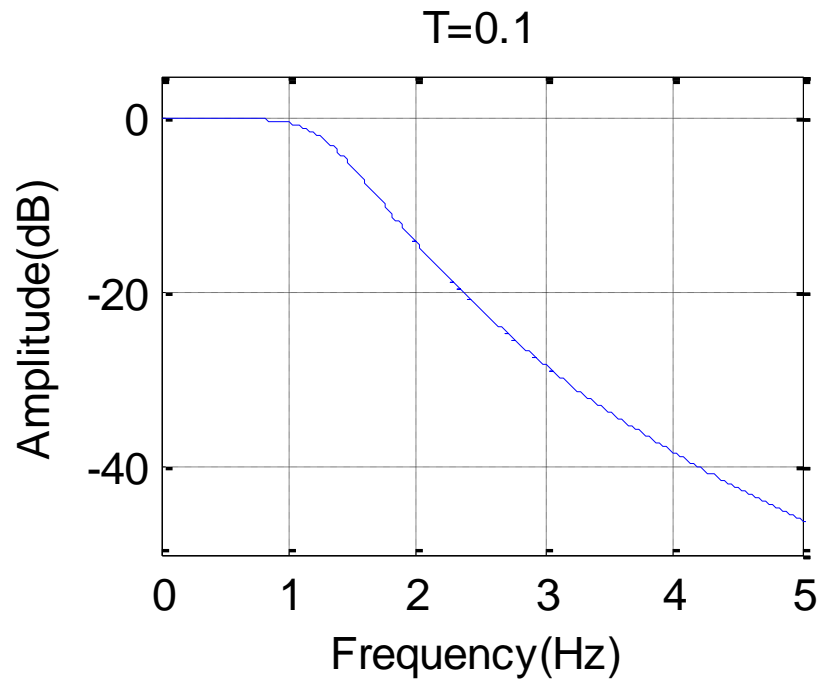
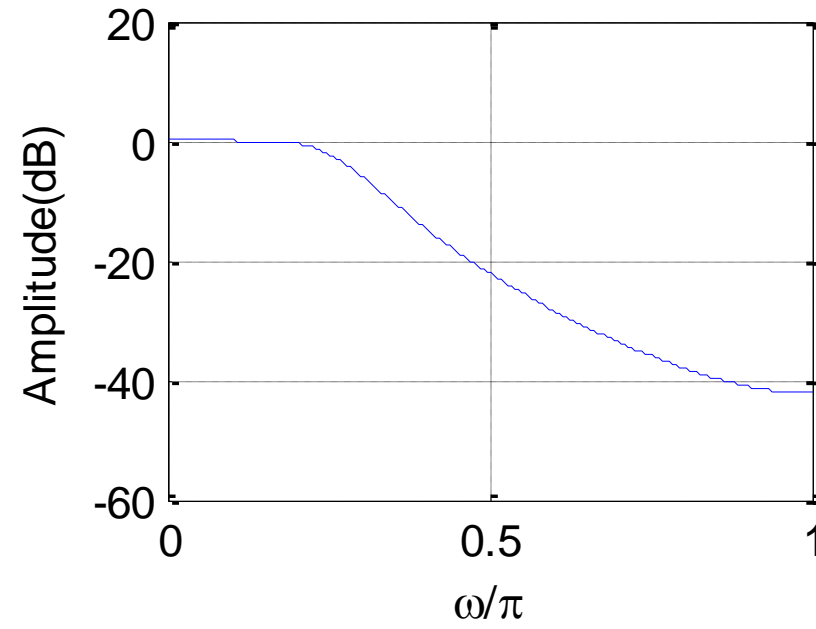
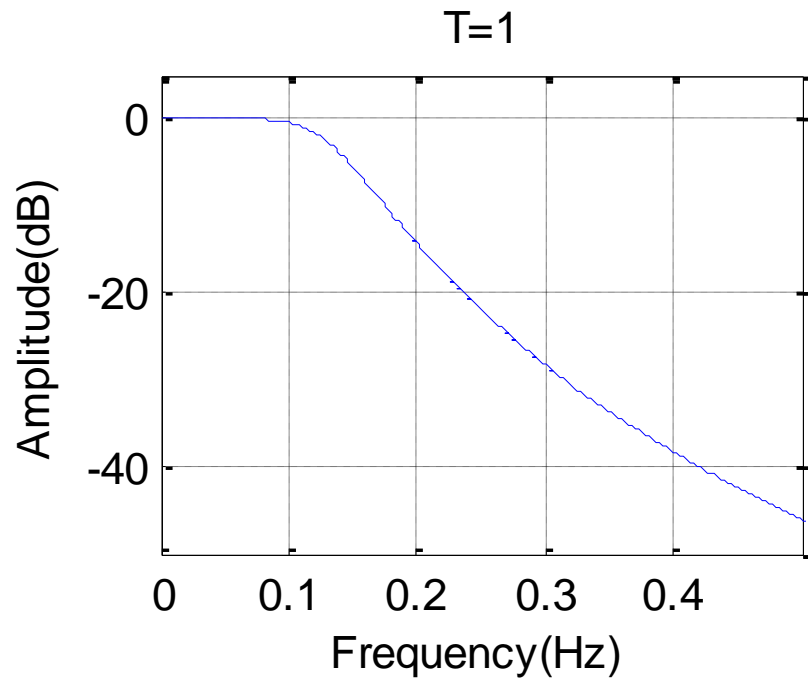


(c) 模拟滤波器( $T=0.1$  s)



(d) 数字滤波器( $T=0.1$  s)

图6.3.4 例6.3.2设计的模拟和数字滤波器的损耗函数





## 6.4 用双线性变换法设计IIR数字低通滤波器

脉冲响应不变法的主要缺点是会产生频谱混叠现象，使数字滤波器的频响偏离模拟滤波器的频响特性。

产生的原因是模拟低通滤波器不是带限于折叠频率 $\pi/T$ ，在数字化后产生了频谱混叠，再通过映射关系 $z=e^{sT}$ ，使数字滤波器在 $\omega=\pi$ 附近形成频谱混叠现象。

为了克服这一缺点，可以采用非线性频率压缩方法，将整个模拟频率轴压缩到 $\pm\pi/T$ 之间，再用 $z=e^{sT}$ 转换到 $z$ 平面上。设 $H_a(s)$ ， $s=j\Omega$ ，经过非线性频率压缩后用  $\hat{H}_a(s_1)$ ， $s_1=j\Omega_1$ 表示，这里用正切变换实现频率压缩：

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2} \Omega_1 T\right)$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{1}{2} \Omega_1 T\right)$$

式中,  $T$  仍是采样间隔。当  $\Omega_1$  从  $-\pi/T$  经过  $0$  变化到  $\pi/T$  时,  $\Omega$  则由  $-\infty$  经过  $0$  变化到  $+\infty$ , 实现了  $s$  平面上整个虚轴完全压缩到  $s_1$  平面上虚轴的  $\pm\pi/T$  之间的转换。

$$j\Omega = \frac{2}{T} \frac{e^{j\Omega_1 T/2} - e^{-j\Omega_1 T/2}}{e^{j\Omega_1 T/2} + e^{-j\Omega_1 T/2}} = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\Omega_1 T}}{1 + e^{-j\Omega_1 T}}$$

代入  $s = j\Omega$ ,  $s_1 = j\Omega_1$ , 得到:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

---

再通过  $z = e^{s_1 T}$  从  $s_1$  平面转换到  $z$  平面上, 得到:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$
$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s}$$

上式称为双线性变换。从  $s$  平面映射到  $s_1$  平面, 再从  $s_1$  平面映射到  $z$  平面, 其映射关系如图6.4.1所示。

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

$$z = e^{s_1 T}$$

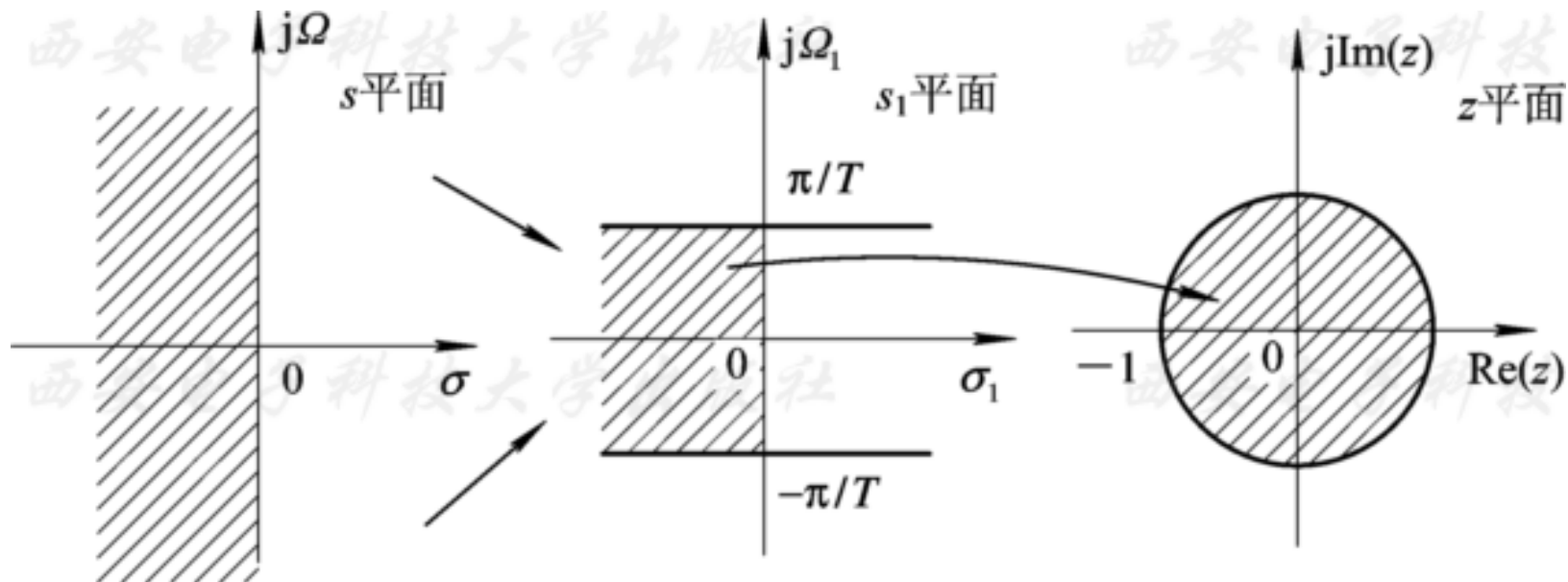


图6.4.1 双线性变换映射关系示意图

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

下面分析双线性变换法的转换性能。先分析模拟频率 $\Omega$ 和数字频率 $\omega$ 之间的关系。令 $s=j\Omega$ ,  $z=e^{j\omega}$ , 得到:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad j\Omega = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}}, \quad \Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$$

上式说明,  $s$ 平面上 $\Omega$ 与 $z$ 平面的 $\omega$ 成非线性正切关系, 如图6.4.2所示。在 $\omega=0$ 附近接近线性关系; 当 $\omega$ 增加时,  $\Omega$ 增加得愈来愈快; 当 $\omega$ 趋近 $\pi$ 时,  $\Omega$ 趋近于 $\infty$ 。正是因为这种非线性关系, 消除了频谱混叠现象。

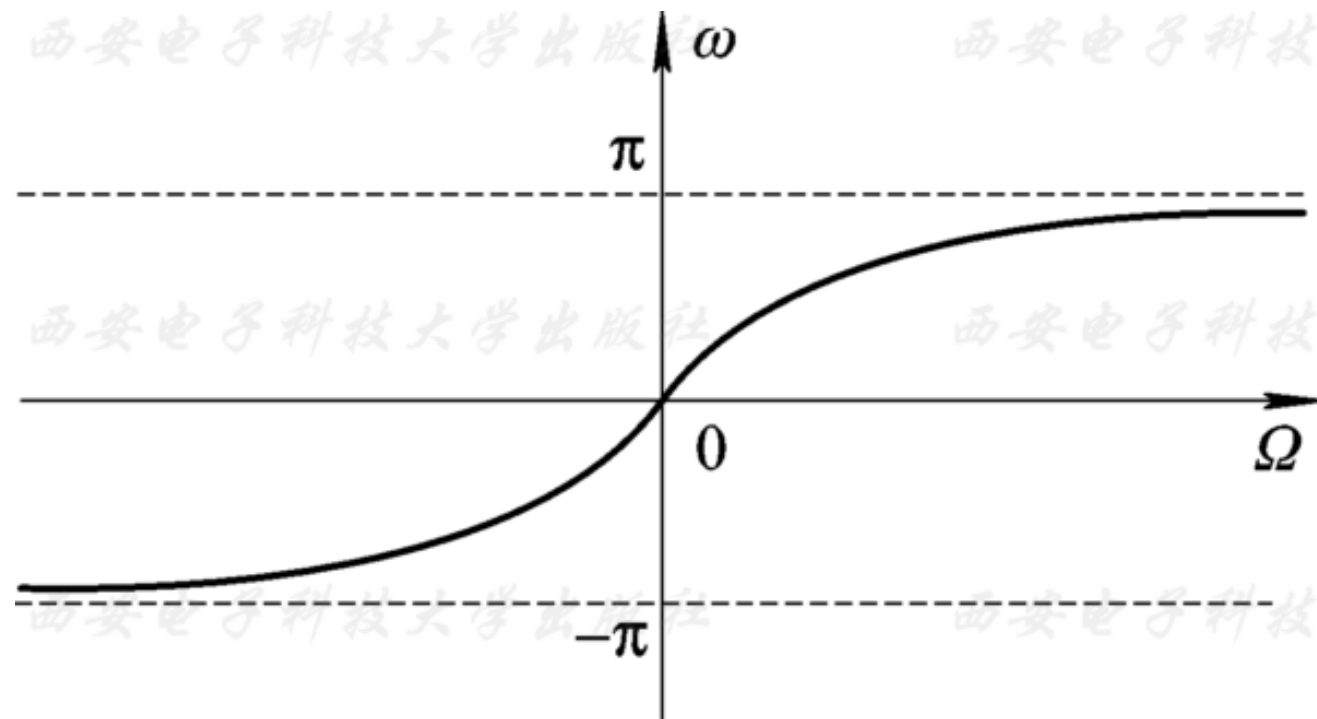


图6. 4. 2 双线性变换法的频率关系

但在设计时，要注意边界频率（如通带截止频率、阻带截止频率等）的转换关系要用  $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$  计算。如果设计指标中边界频率以数字频率给出，则必须按上式求出相应模拟滤波器的边界频率，将这种计算称为“预畸变校正”。

只有这样，才能保证将设计的  $H_a(s)$  转换成  $H(z)$  后仍满足给定的数字滤波器技术指标。

---

双线性变换法:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega$$

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$



**【例6.3.1】** 已知  $H_a(s)$ ，试用双线性变换法将该模拟传递函数变为数字传递函数，采样周期  $T=0.5$  s。

$$H_a(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)}$$

解：

$$\begin{aligned} H(z) &= H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \\ &= \frac{3}{\left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1\right) \left(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 3\right)} \\ &= \frac{3(1+z^{-1})^2}{(5-3z^{-1})(7-z^{-1})} \end{aligned}$$

---

下面我们总结利用模拟滤波器设计IIR数字低通滤波器的步骤。

(1) 确定数字低通滤波器的技术指标：通带边界频率 $\omega_p$ 、通带最大衰减 $\alpha_p$ 、阻带截止频率 $\omega_s$ 、阻带最小衰减 $\alpha_s$ 。

(2) 将数字低通滤波器的技术指标转换成相应的模拟低通滤波器的技术指标。这里主要是边界频率 $\omega_p$ 和 $\omega_s$ 的转换， $\alpha_p$ 和 $\alpha_s$ 指标不变。如果采用脉冲响应不变法，边界频率的转换关系为

$$\begin{cases} \Omega_p = \frac{\omega_p}{T} \\ \Omega_s = \frac{\omega_s}{T} \end{cases}$$

---

如果采用双线性变换法，边界频率的转换关系为

$$\begin{cases} \Omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \\ \Omega_s = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) \end{cases}$$

(3) 按照模拟低通滤波器的技术指标设计过渡模拟低通滤波器。设计方法及设计步骤参考本章6.2节。

(4) 用所选的转换方法，将模拟滤波器 $H_a(s)$ 转换成数字低通滤波器系统函数 $H(z)$ 。

---

在设计过程中，要用到采样间隔 $T$ ，下面介绍 $T$ 的选择原则。

如采用脉冲响应不变法，为避免产生频率混叠现象，要求所设计的模拟低通带限于 $-\pi/T \sim \pi/T$ 区间。由于实际滤波器都是有限阶的，因此有一定宽度的过渡带，且频响特性不是带限于 $\pi/T$ 。

当给定模拟滤波器 $H_a(s)$ ，要求单向转换成数字滤波器 $H(z)$ ，且 $\alpha_s$ 足够大时，选择 $T$ 满足 $|\Omega_s| < \pi/T$ ，可使频谱混叠足够小，满足数字滤波器指标要求。

---

但如果先给定数字低通的技术指标时，情况则不一样。由于数字滤波器系统函数 $H(e^{j\omega})$ 以 $2\pi$ 为周期，最高频率在 $\omega=\pi$ 处，因此， $\omega_s < \pi$ ，按照线性关系 $\Omega_s = \omega_s/T$ ，那么一定满足 $\Omega_s < \pi/T$ ，这样 $T$ 可以任选。一般选 $T=1\text{ s}$ 。

双线性变换法不存在频谱混叠现象，尤其对于设计片断常数滤波器， $T$ 也可以任选。为了简化计算，一般取 $T=2\text{ s}$ 。

**【例6.4.2】** 设计低通数字滤波器，要求频率低于  $0.2\pi$  rad时，容许幅度误差在1 dB以内；在频率  $0.3\pi$  到  $\pi$  之间的阻带衰减大于15 dB。指定模拟滤波器采用巴特沃斯低通滤波器。试用双线性变换法设计数字滤波器。

解 (1) 数字低通技术指标为

$$\omega_p = 0.2\pi \text{ rad}, \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\omega_s = 0.3\pi \text{ rad}, \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

---

(2) 为了计算简单, 取 $T=1$  s, 预畸变校正计算相应模拟低通的技术指标为

$$\Omega_p = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega_p = 2 \tan 0.1\pi = 0.6498 \text{ rad/s}, \alpha_p = 1 \text{ dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega_s = 2 \tan 0.15\pi = 1.0191 \text{ rad/s}, \alpha_s = 15 \text{ dB}$$

(3) 设计巴特沃斯低通模拟滤波器。根据 (6.2.18) 式阶数N计算如下：

$$\lambda_{\text{sp}} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \frac{1.0191}{0.6498} = 1.568$$

$$k_{\text{sp}} = \sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10} - 1}{10^{\alpha_p/10} - 1}} = 10.8751$$

$$N = \frac{\lg k_{\text{sp}}}{\lg \lambda_{\text{sp}}} = \frac{\lg 10.8751}{\lg 1.568} = 5.3056$$

取N=6。将 $\Omega_s$ 和 $\alpha_s$ 代入 (6.2.20) 式，求得 $\Omega_c=0.7663$  rad/s。这样保证阻带技术指标满足要求，通带指标有富余。



---

根据 $N=6$ ，查表6.2.1得到的归一化系统函数 $G_a(p)$   
为

$$G_a(p) = \frac{1}{(p^2 + 0.5176p + 1)(p^2 + 1.14142p + 1)(p^2 + 1.9319p + 1)}$$

将 $p=s/\Omega_c$ 代入 $G_a(p)$ ，去归一化得到实际的 $H_a(s)$ 为

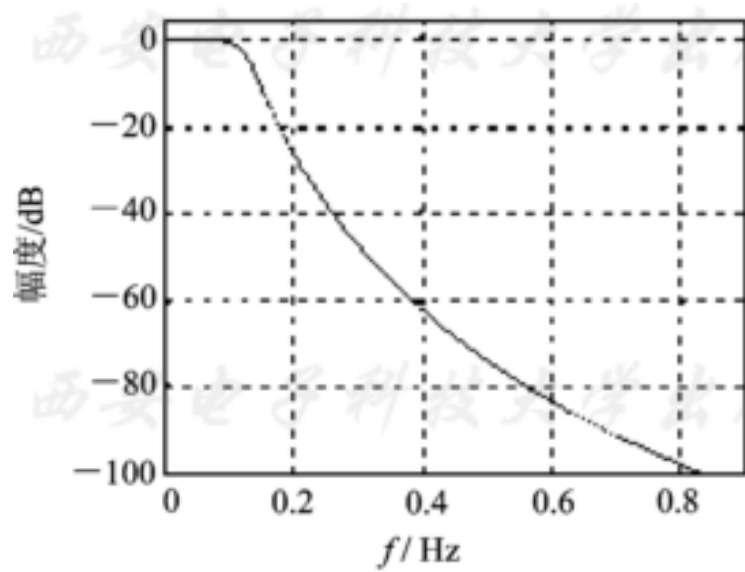
$$H_a(s) = \frac{0.2024}{(s^2 + 0.396s + 0.5871)(s^2 + 1.083s + 0.5871)(s^2 + 1.480s + 0.5871)}$$

(4) 用双线性变换法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器 $H(z)$ ,  
即

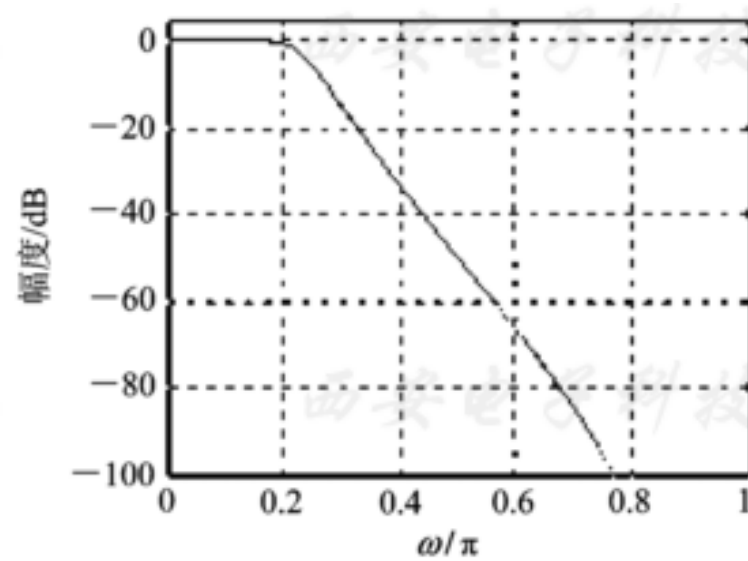
$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$= \frac{0.000\ 7378(1+z^{-1})^6}{(1-1.268z^{-1}+0.7051z^{-2})(1-1.010z^{-1}+0.358z^{-2})(1-0.9044z^{-1}+0.2155z^{-2})}$$

本例设计的模拟和数字滤波器幅度特性分别如图6.4.6

(a) 和(b)所示。此图表明数字滤波器满足技术指标要求, 且无频谱混叠。



(a)



(b)

图6.4.6 例6.4.2设计的模拟和数字滤波器幅度特性

---

本例的设计程序为**ep642.m**。程序中分别采用本例中的双线性变换法的分步设计法和调用**MATLAB**工具箱函数**buttord**和**butter**直接设计数字滤波器，所得结果完全相同。这就说明该函数默认采用双线性变换法。

**%例6.4.2 设计程序： ep642.m**

**% 用双线性变换法设计DF**

**T=1; Fs=1/T;**

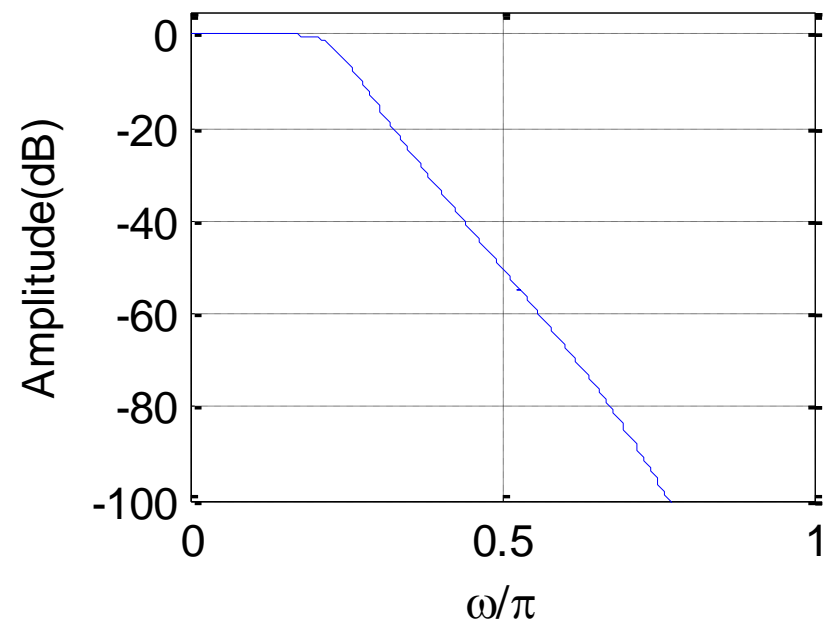
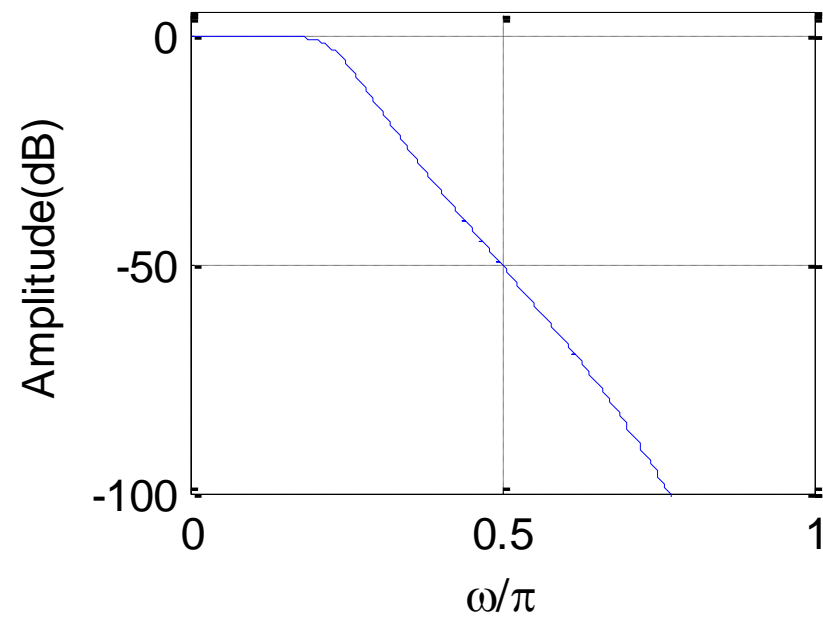
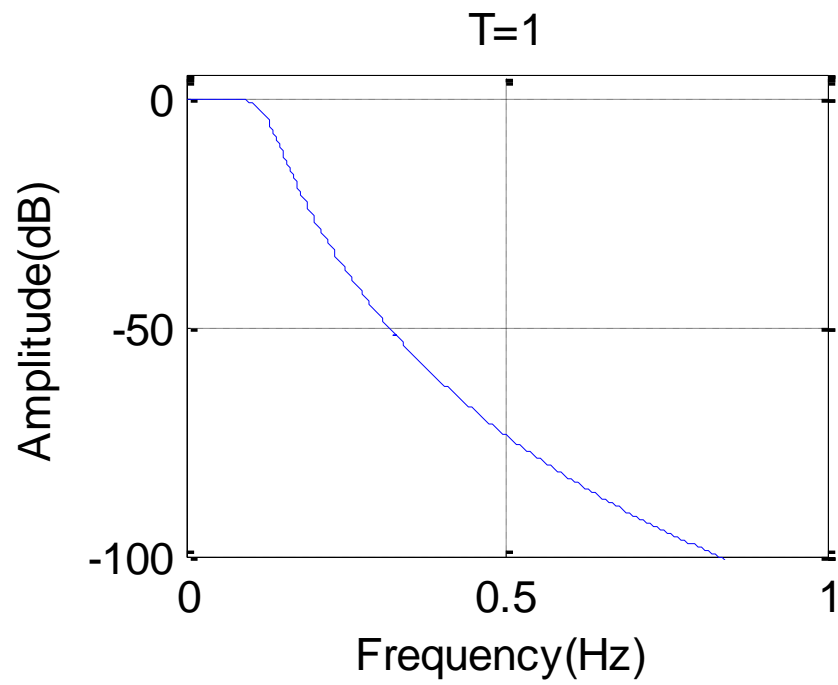
**wpz=0.2; wsz=0.3;**

**wp=2\*tan(wpz\*pi/2); ws=2\*tan(wsz\*pi/2); rp=1; rs=1**

**%预畸变校正转换指标**

---

```
[N, wc] =buttord(wp, ws, rp, rs, 's');  
    %设计过渡模拟滤波器  
[B, A] =butter(N, wc, 's');  
[Bz, Az] =bilinear(B, A, Fs);  
    %用双线性变换法转换成数字滤波器  
[Nd, wdc] =buttord(wpz, wsz, rp, rs);  
    %调用buttord和butter直接设计数字滤波器  
[Bdz, Adz] =butter(Nd, wdc);  
    %绘制滤波器的损耗函数曲线（省略）
```



## 6.5 数字高通、带通和带阻滤波器的设计

---

前面我们已经学习了模拟低通滤波器的设计方法，以及基于模拟滤波器的频率变换，模拟高通、带通和带阻滤波器的设计方法。对于数字高通、带通和带阻的设计，通用方法为双线性变换。可以借助于模拟滤波器的频率变换设计一个所需类型的过渡模拟滤波器，再通过双线性变换将其转换成所需类型的数字滤波器，例如高通数字滤波器等。具体设计步骤如下：

- (1) 确定所需类型数字滤波器的技术指标。
- (2) 将所需类型数字滤波器的边界频率转换成相应类型模拟滤波器的边界频率，转换公式为

---

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{1}{2} \omega \quad (6.5.1)$$

- (3) 将相应类型模拟滤波器技术指标转换成模拟低通滤波器技术指标（具体转换公式参看本章6.2节）。
- (4) 设计模拟低通滤波器。
- (5) 通过频率变换将模拟低通转换成相应类型的过渡模拟滤波器。
- (6) 采用双线性变换法将相应类型的过渡模拟滤波器转换成所需类型的数字滤波器。



**【例6.5.1】** 设计一个数字高通滤波器，要求通带截止频率 $\omega_p=0.8\pi$  rad，通带衰减不大于3 dB，阻带截止频率 $\omega_s=0.44\pi$  rad，阻带衰减不小于15 dB。希望采用巴特沃斯型滤波器。

解 (1) 确定数字高通的技术指标：

$$\omega_p=0.8\pi \text{ rad}, \alpha_p=3 \text{ dB}$$

$$\omega_s=0.44\pi \text{ rad}, \alpha_s=15 \text{ dB}$$

(2) 将高通数字滤波器的技术指标转换成高通模拟滤波器的设计指标： 令 $T=2$  s，预畸变校正得到模拟边界频率：

$$\Omega_{\text{ph}} = \tan \frac{1}{2} \omega_{\text{p}} = 3.0775 \text{ rad/s}, \alpha_{\text{p}} = 3 \text{ dB}$$

$$\Omega_{\text{sh}} = \tan \frac{1}{2} \omega_{\text{s}} = 0.8275 \text{ rad/s}, \alpha_{\text{s}} = 15 \text{ dB}$$

(3) 模拟低通滤波器的技术指标计算如下：对通带边界频率(本例中就是3 dB截止频率 $\Omega_{\text{c}}$ )归一化，即

$$\lambda_{\text{p}}=1, \alpha_{\text{p}}=3 \text{ dB}$$

将 $\lambda_{\text{p}}=1$ 和 $-\Omega_{\text{sh}}$ 代入 (6.2.51) 式，求出归一化低通滤波器的阻带截止频率

$$\lambda_{\text{s}} = \frac{\Omega_{\text{ph}}}{\Omega_{\text{sh}}} = 3.7190, \alpha_{\text{s}} = 15 \text{ dB}$$

(4) 设计归一化模拟滤波器 $G(p)$ 。

$$k_{\text{sp}} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = 5.5463, \quad \lambda_{\text{sp}} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 3.719$$

$$N = \frac{\lg k_{\text{sp}}}{\lg \lambda_{\text{sp}}} = 1.3043, \quad \text{取 } N = 2$$

查表6.2.1，得到归一化模拟低通原型系统函数 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

(5) 利用频率变换公式 (6.2.50) 式将  $G(p)$  转换成模拟高通  $H_{HP}(s)$ :

$$H_a(s) = G(p) \Big|_{p=\frac{\lambda_p \Omega_{ph}}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2} \Omega_{ph} s + \Omega_{ph}^2} = \frac{s^2}{s^2 + 4.3522s + 9.4710}$$

(6) 用双线性变换法将模拟高通  $H_a(s)$  转换成数字高通  $H(z)$ :

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.1326 - 0.2653z^{-1} + 0.1326z^{-2}}{1 + 0.7394z^{-1} + 0.2699z^{-2}}$$

---

实际上,上述复杂的设计过程的实现程序ep651.m只有下面3行:

```
wpz=0.8; wsz=0.44; rp=3; rs=15;
```

```
[N, wc] =buttord(wpz, wsz, rp, rs);
```

```
%调用buttord和butter直接设计数字滤波器
```

```
[Bz, Az] =butter(N, wc, 'high');
```

程序运行结果:

```
N=2; Bz= [0.1326  -0.2653  0.1326] ;
```

```
Az= [1.0000  0.7394  0.2699]
```

数字滤波器损耗函数如图6.5.1所示。

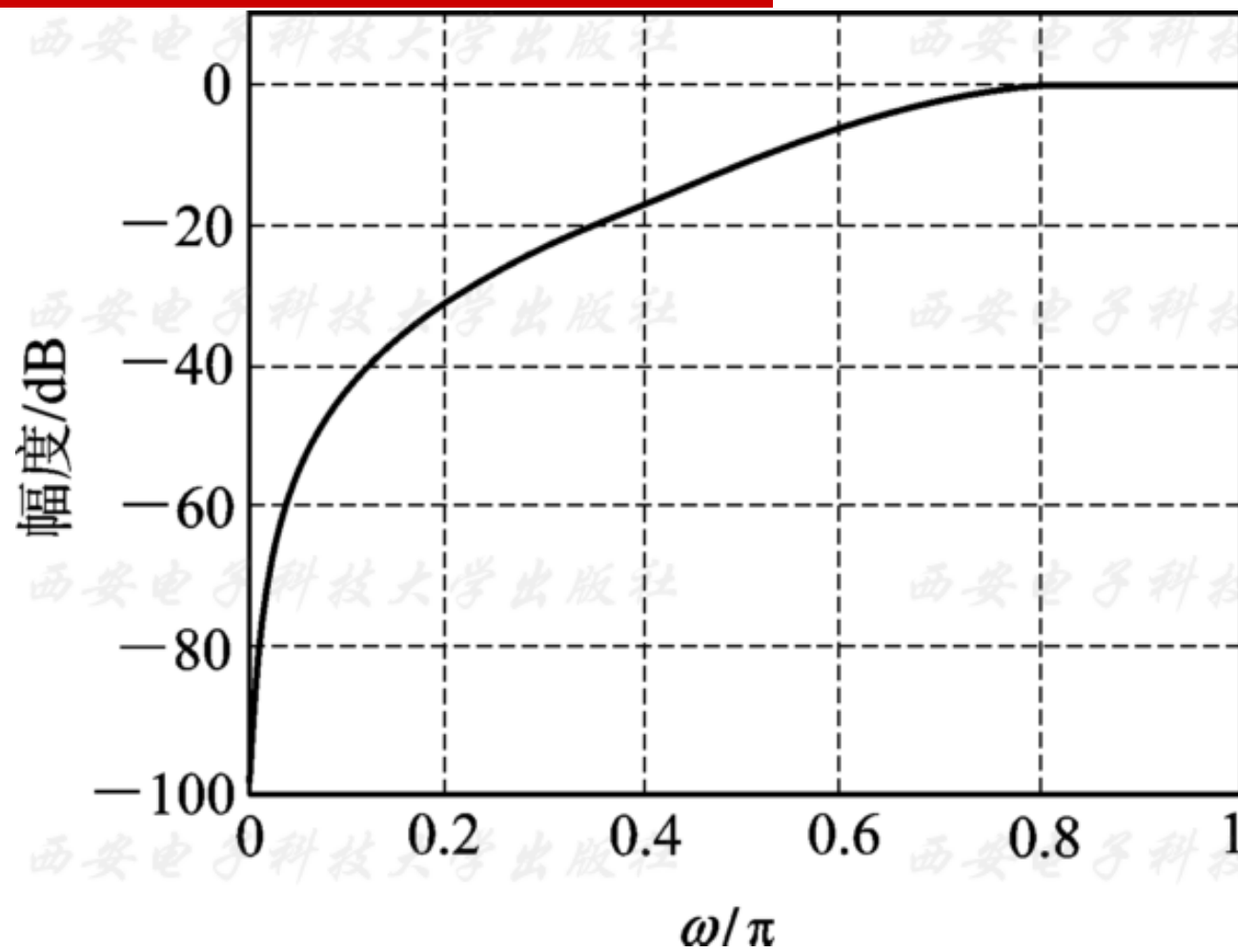
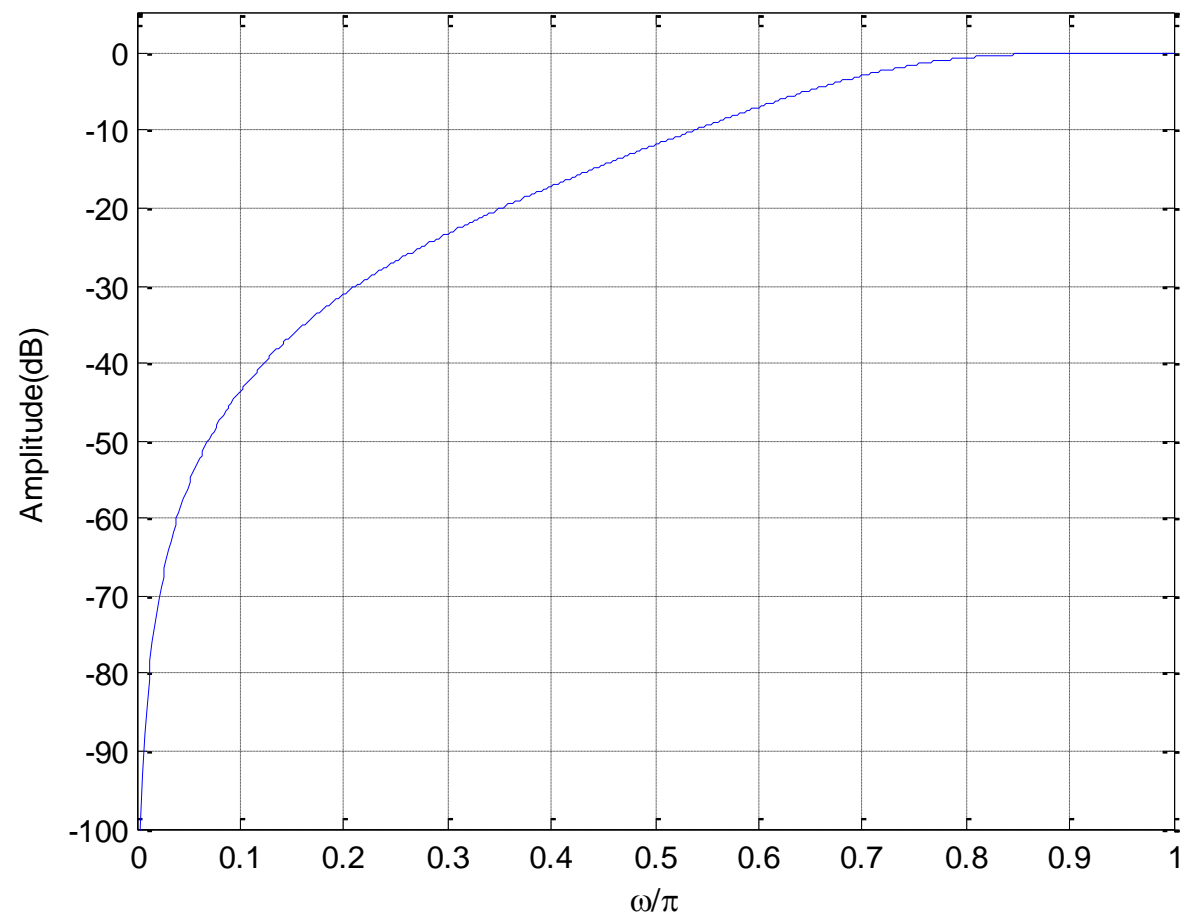


图6.5.1 高通数字滤波器损耗函数



## 第6章 无限脉冲响应数字滤波器的设计

- 1.巴特沃斯低通滤波器的设计原理。
- 2.低通到高通，带通，带阻的频率变换公式。
- 3.模拟到数字系统函数转换的两种方法：
  - 脉冲响应不变法
  - 双线性变换法