上海电力大学
SHANGHAI UNIVERSITY OF ELECTRIC POWER

信号与线性系统分析

第十二章

电子与信息工程学院

目　录

目录

CATALOG

一．输入－输出法（端口法）

- 研究单输入－单输出系统；
- 用系统输入、输出变量之间的关系来描述系统的特性；
- 基本模型为系统函数，着重运用频率响应特性的概念。
- 模型建好之后不关心系统内部的情况。

二．状态变量分析法

- 产生于20世纪50至60年代；卡尔曼（R.E.Kalman)引入；
- 利用描述系统内部特性的状态变量取代仅描述系统外部特性的系统函数。
- 通常运用于多输入－多输出系统；
- 用*n*个状态变量的一阶微分（或差分）方程组来描述系统 。

三．状态变量分析法优点

(1)提供了系统的内部特性以供研究；

(2)一阶微分（或差分）方程组便于计算机进行数值计算；

(3)便于分析多输入 - 多输出系统；

(4)容易推广应用于时变系统或非线性系统；

(5)引出了可观测性和可控制性两个重要概念。

卡尔曼是一位出生于匈牙利的美国工程师和数学家。他最重要的发明是卡尔曼滤波算法，这个算法促成了50年以来许多基础性的技术发明，几乎所有需要从噪声数据中估算现实世界状态的技术都需要卡尔曼滤波器。

- 这样一项伟大发明的出现却并不顺利，当卡尔曼提出他的滤波算法时，主流观点对他的算法质疑很多，认为他提出的时域微分方程模型离经叛道，一些数学家认为他的推导并不严格，使得论文只能发表在机械工程杂志，而不是系统工程或应用数学杂志上。甚至另一位物理学家早前发表的类似的滤波算法也使得卡尔曼备受非议。直到卡尔曼滤波算法成功帮助阿波罗飞船成功登月，卡尔曼的开创性工作才得到了承认。

无独有偶，另一位伟大的科学家傅里叶的成果发表也并不顺利，傅里叶在论文“热的传播”中提出“任何连续周期信号可以由一组适当的正弦曲线组合而成”，这就是我们在高数里学过的傅里叶级数展开。这一观点遭到数学家拉格朗日的强烈反对，未能发表。之后他又提交了相关的论文给发过科学院，评委仍从文章的严格性和普遍性上给予了批评，以致这篇论文又未能正式发表。直到十几年后傅里叶将论文扩充成为专著，才终于发表，并成为数学史，乃至科学史上公认是一部划时代的经典性著作。

- 同学们，从这两位科学家的经历中我们可以看出人生不如意之事十之八九，挫折是我们生活中的常客，就算是大科学家也会遇到挫折，也不可能事事一帆风顺，那么应该如何应对挫折呢？从两位科学家的经历中我们可以看到面对挫折不低头，不放弃，积极面对，化压力为动力才能最终克服它。同学们，我们在日常的学习生活中也会遇到这样那样的困难和挫折，我们要像这两位科学家一样坚持不懈，相信一定会有战胜困难海阔天空的一天。

四．名词定义

状态：表示动态系统的一组最少变量（被称为状态变量），只要知道 $t=t_0$ 时这组变量和 $t\geq t_0$ 时的输入，那么就能完全确定系统在 $t\geq t_0$ 任何时间 的行为。

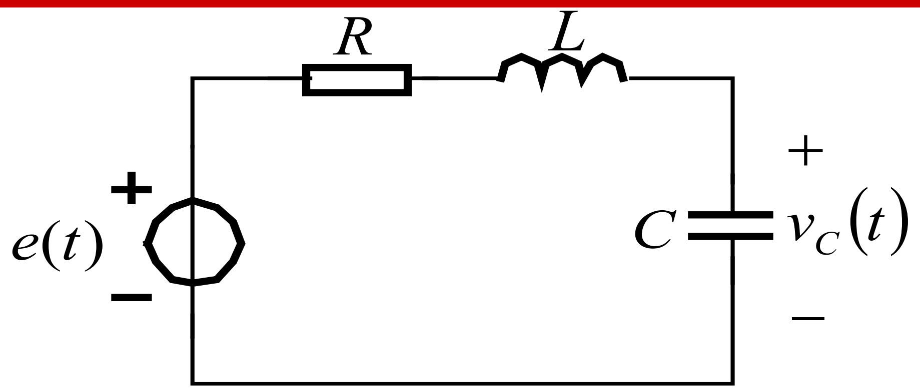
状态变量：能够表示系统状态的那些变量成为状态变量。

状态矢量：能够完全描述一个系统行为的*k*个状态变量，可以看作矢量 $\lambda(t)$ 的各个分量的坐标，$\lambda(t)$称为状态矢量。

状态空间：状态矢量 $\lambda(t)$ 所在的空间。

状态轨迹：在状态空间中状态矢量端点随时间变化而描出的路径称为状态轨迹。

例



分析如图所示的电路系统

输入：$e(t)$　输出：$v_C(t)$

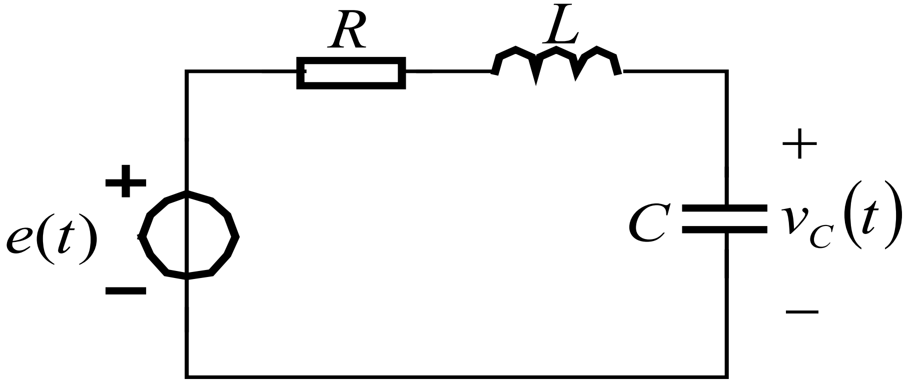
微分方程（输入 - 输出描述法）：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}v_C(t)+2\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)+\omega_0{}^2v_C(t)=\omega_0{}^2e(t)$$

其中

$$\alpha=\frac{R}{2L}\qquad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

以$v_C(t), i_L(t)$为变量列方程：



$$R i_L(t) + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) + v_C(t) = e(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_L(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_C(t) = \frac{1}{C} i_L(t)$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) = -\dfrac{R}{L} i_L(t) - \dfrac{1}{L} v_C(t) + \dfrac{1}{L} e(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_C(t) = \dfrac{1}{C} i_L(t) \end{cases}$$

写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [e(t)]$$

只要知道 $i_L(t), v_C(t)$ 的初始状态及输入$e(t)$即可完全确定电路的全部行为。

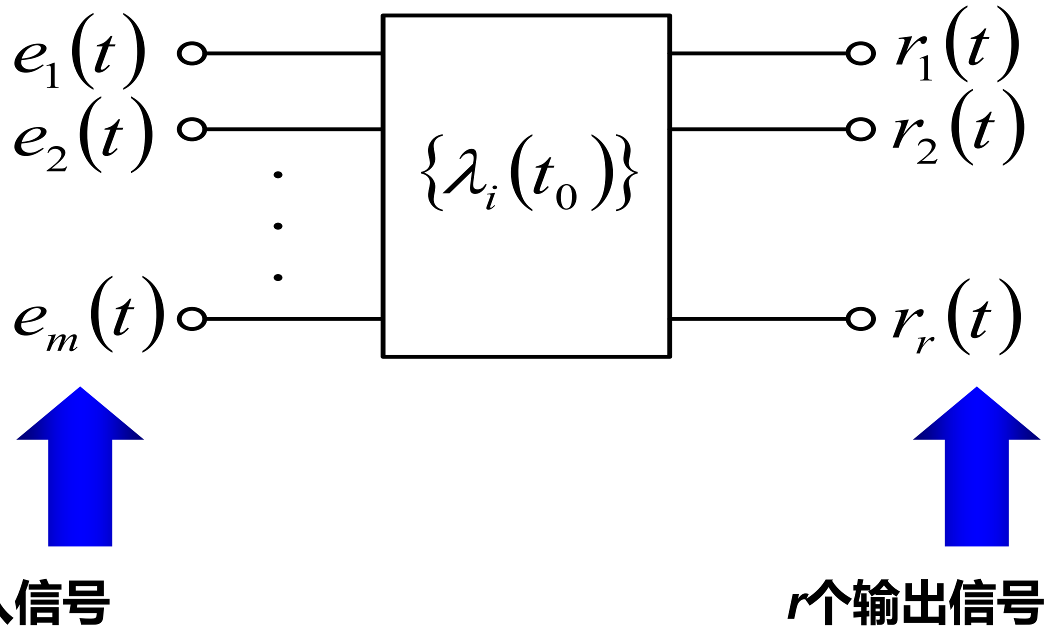
$$r(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

此方法称为状态变量或状态空间分析法；$i_L(t), v_C(t)$ 是状态变量。

§12.3 连续时间系统状态方程的建立

一．状态方程的一般形式和建立方法概述

一个动态连续系统的时域数学模型可利用信号的各阶导数来描述。作为连续系统的状态方程表现为状态变量的联立一阶微分方程组，即



$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t)$ **为系统的k个状态变量。**

状态方程

一个动态连续系统的时域数学模型可利用状态变量的各阶导数来描述。作为连续系统的状态方程表现为状态变量的联立一阶微分方程组.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t) = f_1[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_k(t);e_1(t),e_2(t),\cdots,e_m(t),t] \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t) = f_2[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_k(t);e_1(t),e_2(t),\cdots,e_m(t),t] \\
\cdots \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_k(t) = f_k[\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_k(t);e_1(t),e_2(t),\cdots,e_m(t),t]
\end{cases}
$$

- **状态方程组由每个状态变量的一阶导数方程组成**
- **状态变量的导数是所有状态变量和输入信号的函数;**
- **每一微分方程中只包含有一个状态变量对时间的导数;**

输出方程

$$\begin{cases} r_1(t) = h_1[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \cdots, e_m(t), t] \\ r_2(t) = h_2[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \cdots, e_m(t), t] \\ \cdots \\ r_r(t) = h_r[\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t); e_1(t), e_2(t), \cdots, e_m(t), t] \end{cases}$$

- 输出方程是由r个输出信号的方程组成
- 每个输出信号的方程是状态变量和输入信号的函数

如果系统是线性时不变的，则状态方程和输出方程是状态变量和输入信号的线性组合，即：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\lambda_1(t) = a_{11}\lambda_1(t) + a_{12}\lambda_2(t) + \cdots + a_{1k}\lambda_k(t) \\
\qquad\qquad + b_{11}e_1(t) + b_{12}e_2(t) + \cdots b_{1m}e_m(t) \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\lambda_2(t) = a_{21}\lambda_1(t) + a_{22}\lambda_2(t) + \cdots + a_{2k}\lambda_k(t) \\
\qquad\qquad + b_{21}e_1(t) + b_{22}e_2(t) + \cdots b_{2m}e_m(t) \\
\cdots \\
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\lambda_k(t) = a_{k1}\lambda_1(t) + a_{k2}\lambda_2(t) + \cdots + a_{kk}\lambda_k(t) \\
\qquad\qquad + b_{k1}e_1(t) + b_{k2}e_2(t) + \cdots b_{km}e_m(t)
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} r_1(t) = c_{11}\lambda_1(t) + c_{12}\lambda_2(t) + \cdots + c_{1k}\lambda_k(t) + d_{11}e_1(t) \\ \qquad\qquad + d_{12}e_2(t) + \cdots d_{1m}e_m(t) \\ r_2(t) = c_{21}\lambda_1(t) + c_{22}\lambda_2(t) + \cdots + c_{2k}\lambda_k(t) + d_{21}e_1(t) \\ \qquad\qquad + d_{22}e_2(t) + \cdots d_{2m}e_m(t) \\ \cdots \\ r_r(t) = c_{r1}\lambda_1(t) + c_{r2}\lambda_2(t) + \cdots + c_{rk}\lambda_k(t) + d_{r1}e_1(t) \\ \qquad\qquad + d_{r2}e_2(t) + \cdots d_{rm}e_m(t) \end{cases}$$

表示为矢量矩阵形式

状态方程 $$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda(t)\right]_{k\times1}=\boldsymbol{A}_{k\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(t)+\boldsymbol{B}_{k\times m}\boldsymbol{e}_{m\times1}(t)$$

输入方程 $$[r(t)]_{r\times1}=\boldsymbol{C}_{r\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(t)+\boldsymbol{D}_{r\times m}\boldsymbol{e}_{m\times1}(t)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\\ \vdots\\ \lambda_k(t)\end{bmatrix}\qquad\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\lambda}(t)\right]=\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t)\\ \vdots\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_k(t)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & ba_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rk} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{r}(t)=\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_r(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e}(t)=\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ \vdots \\ e_m(t) \end{bmatrix}$$

若系统是线性时变的，则A,B,C,D 矩阵是*t* 的函数；对于线性时不变系统，A,B,C,D的各元素都为常数，不随*t*改变。

状态变量的特性

- 每一状态变量的导数是所有状态变量和输入激励信号的函数；
- 每一微分方程中只包含有一个状态变量对时间的导数；
- 输出信号是状态变量和输入信号的函数；
- 通常选择动态元件的输出作为状态变量，在连续系统中是选积分器的输出。离散系统中选择延时器的输出作为状态变量。

建立给定系统的状态方程的方法分为直接法和间接法两类：

- 直接法——主要应用于电路分析、电网络（如滤波器）的计算机辅助设计；
- 间接法——常见于控制系统研究。

二．由电路图直接建立状态方程

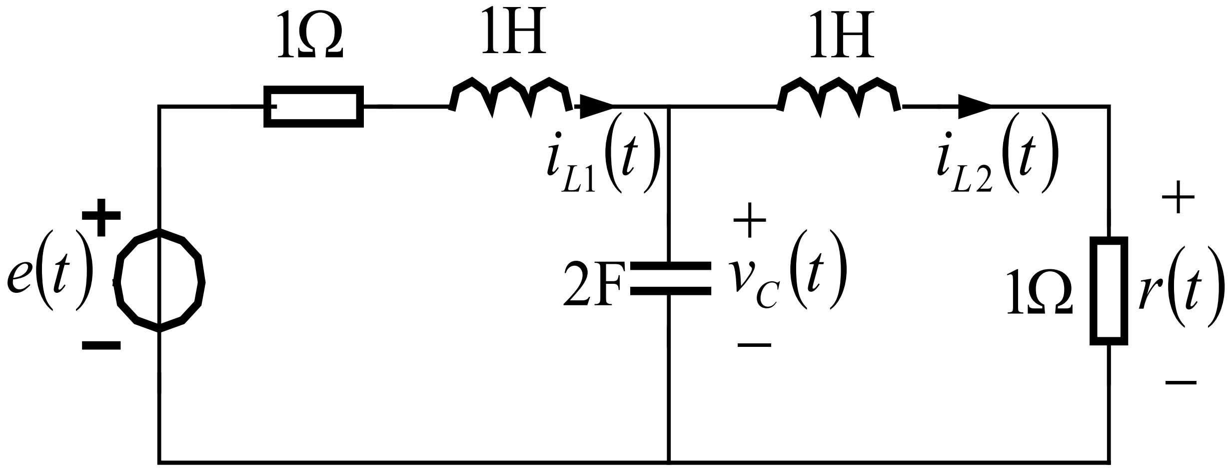
(1)选取独立的电容上电压和电感中电流为状态变量，有时也选电容电荷与电感磁链。

(2)对包含有电感的回路列写回路电压方程，其中必然包括 $L\frac{\mathrm{d}\,i_L(t)}{\mathrm{d}\,t}$ **，对连接有电容的结点列结点电流方程，其中必然包含** $C\frac{\mathrm{d}\,v_C(t)}{\mathrm{d}\,t}$ **，注意只能将此项放在方程左边。**

(3)把方程中非状态变量用状态变量表示。

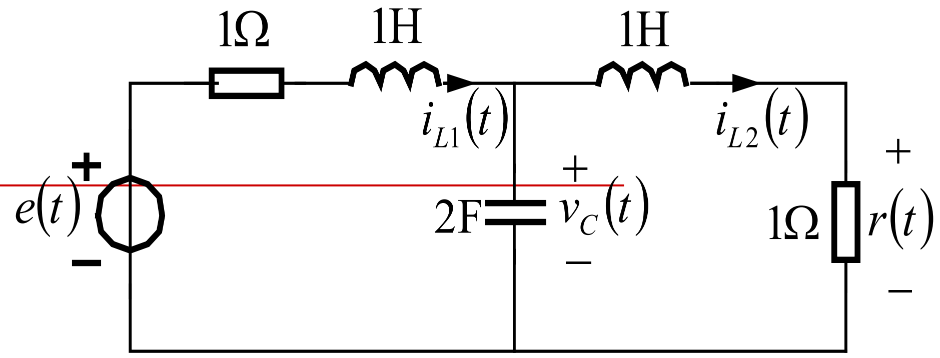
(4)把状态方程和输出方程用矩阵形式表示。

例. 写出下图所示电路的状态方程和输出方程。



解答

选电感电流 $i_{L1}(t), i_{L2}(t)$ 和电容两端电压 $v_C(t)$ 作为状态变量



对连接电容的结点A列结点电流方程

$$i_{L1}(t)=i_{L2}(t)+2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)$$

对包含电容的回路 $i_1(t),i_2(t)$ 列回路电压方程

$$e(t)=i_{L1}(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{L1}(t)+v_C(t)$$

$$v_C(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{L2}(t)+i_{L2}(t)$$

整理

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_C(t)=\frac{1}{2}i_{L1}(t)-\frac{1}{2}i_{L2}(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{L1}(t) = -i_{L1}(t) - v_C(t) + e(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{L2}(t) = v_C(t) - i_{L2}(t)$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_C(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{L1}(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{L2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_C(t) \\ i_{L1}(t) \\ i_{L2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程为 $\quad r(t) = i_{L2}(t)$

状态变量的个数k等于系统的阶数。

对于较简单的电路，用直观的方法容易列写状态方程。当电路结构相对复杂时，往往要借助计算机辅助设计（CAD）技术。

三．由系统的输入-输出方程或流图建立状态方程

思路：根据系统函数画出信号流图，选择连续时间系统的积分器输出或离散时间系统延时器的输出作为状态变量，根据流图列写状态方程

对于连续时间系统，选择信号流图中增益是s^{-1}的支路的输出结点作为状态变量

对于离散时间系统，选择信号流图中增益是z^{-1}的支路的输出结点作为状态变量

三．由系统的输入-输出方程或流图建立状态方程

若某一连续时间系统可用如下微分方程表示

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}r(t)+a_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}r(t)+\cdots+a_{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+a_k r(t)$$

$$=b_0\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}e(t)+b_1\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}}e(t)+\cdots+b_{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+b_k e(t)$$

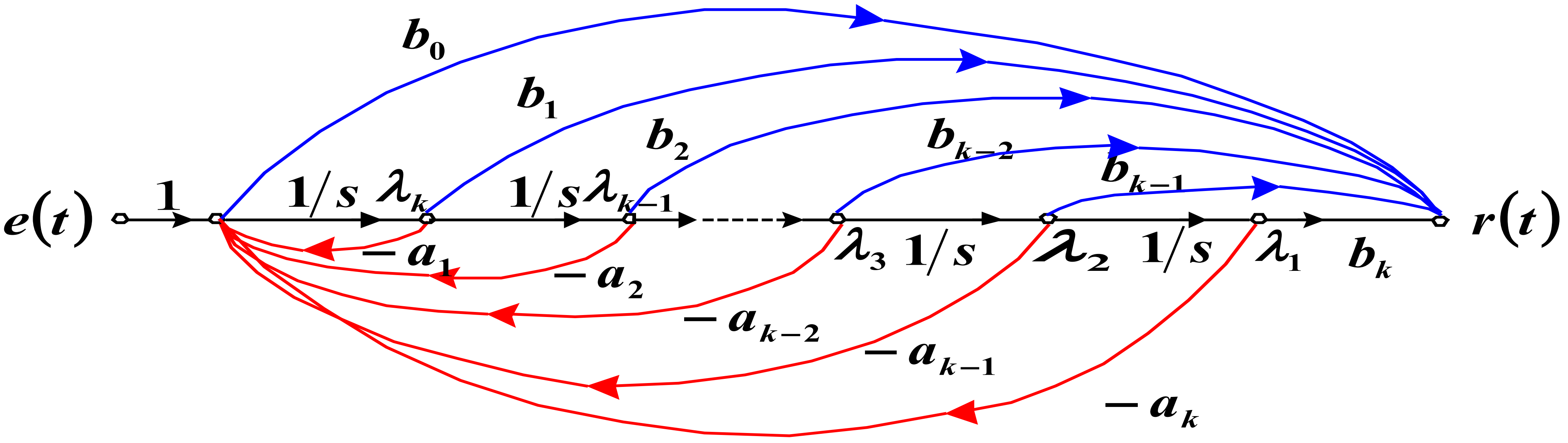
此系统为*k* 阶系统，输入信号的最高次导数也为*k* 次系统函数为

$$H(s)=\frac{b_0 s^k+b_1 s^{k-1}+\cdots+b_{k-1}s+b_k}{s^k+a_1 s^{k-1}+\cdots+a_{k-1}s+a_k}$$

为便于选择状态变量，系统函数表示成

$$H(s)=\frac{b_0+b_1 s^{-1}+\cdots+b_{k-1}s^{1-k}+b_k s^{-k}}{1+a_1 s^{-1}+\cdots+a_{k-1}s^{1-k}+a_k s^{-k}}$$

当用积分器来实现该系统时，其流图如下



取积分器的输出作为状态变量，如图中所标的

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t)$$

状态方程

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \\
\dot{\lambda}_2 = \lambda_3 \\
\vdots \\
\dot{\lambda}_{k-1} = \lambda_k \\
\dot{\lambda}_k = -a_k\lambda_1 - a_{k-1}\lambda_2 - \cdots - a_2\lambda_{k-1} - a_1\lambda_k + e(t)
\end{cases}
$$

输出方程

$$
\begin{aligned}
r(t) &= b_k\lambda_1 + b_{k-1}\lambda_2 + \cdots + b_2\lambda_{k-1} + b_1\lambda_k \\
&\quad + b_0\left[-a_k\lambda_1 - a_{k-1}\lambda_2 - \cdots - a_2\lambda_{k-1} - a_1\lambda_k + e(t)\right] \\
&= (b_k - a_k b_0)\lambda_1 + (b_{k-1} - a_{k-1}b_0)\lambda_2 + \cdots + (b_2 - a_2 b_0)\lambda_{k-1} \\
&\quad + (b_1 - a_1 b_0)\lambda_k + b_0 e(t)
\end{aligned}
$$

表示成矢量矩阵的形式

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_{k-1} \\ \dot{\lambda}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

输出方程

$$r(t) = [(b_k - a_k b_0), (b_{k-1} - a_{k-1} b_0), \cdots, (b_2 - a_2 b_0), (b_1 - a_1 b_0)] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \\ \lambda_k \end{bmatrix} + b_0 e(t)$$

简化成
$$\begin{cases}\dot{\lambda}(t)=\boldsymbol{A}\lambda(t)+\boldsymbol{B}e(t)\\ \boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{C}\lambda(t)+\boldsymbol{D}e(t)\end{cases}$$

对应A,B,C,D的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\left[(b_k-a_kb_0),(b_{k-1}-a_{k-1}b_0),\cdots,(b_2-a_2b_0),(b_1-a_1b_0)\right]$$

$$\boldsymbol{D}=b_0$$

例

四．将系统函数分解 建立状态方程

将系统函数的分母分解因式，可以对应构成并联或串联形式的流图结构，即可列出不同形式的状态方程。

（一）用流图的并联结构形式列状态方程

并联：$H(s)=H_1(s)+H_2(s)+\cdots+H_l(s)$

（二）用流图的串联结构形式列状态方程

级联$H(s)=H_1(s)\bullet H_2(s)\cdots H_l(s)$

子系统可以选择简单的一阶或二阶函数：

$$H(s)=\frac{b_0+b_1s^{-1}+b_2s^{-2}}{1-(-a_1s^{-1}-a_2s^{-2})}$$

$$H(s)=\frac{b_0+b_1s^{-1}}{1-(-a_1s^{-1})}$$

注意：子系统中各个系数必须是实数，也就是对实极点可构成一阶子系统，对共轭复数极点构成二阶子系统.

例

$$H(s)=\frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}$$

用流图的并联结构形式建立状态方程。

解答

将*H*(s) 作部分分式展开，得到

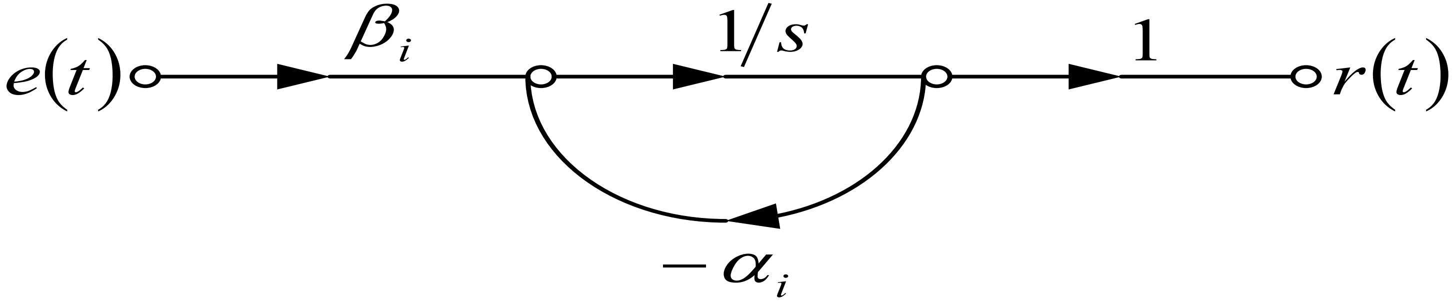
$$H(s)=\frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}=\frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$=\frac{3/2}{s+1}+\frac{-2}{s+2}+\frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

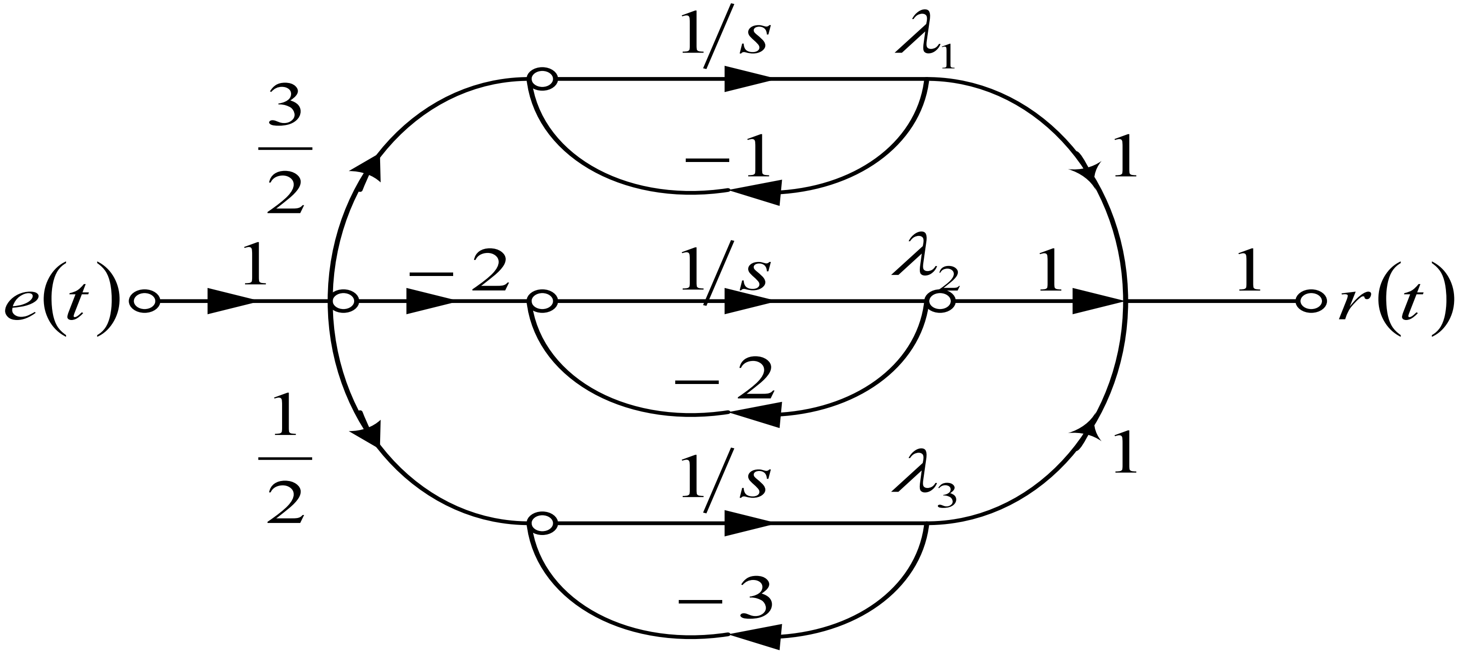
$$=H_1(s)+H_2(s)+H_3(s)$$

$$H_i(s)=\frac{\beta_i}{s+\alpha_i}$$

表示成流图为



这样，$H(s)$ 的流图形式可表示为



取积分器的输出为状态变量，则有

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 + \dfrac{3}{2}e(t) \\ \dot{\lambda}_2 = -2\lambda_2 - 2e(t) \\ \dot{\lambda}_3 = -3\lambda_3 + \dfrac{1}{2}e(t) \end{cases}$$

$$r(t) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

表示成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -2 \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} e(t)$$

$$r(t) = [1,1,1] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

例

用并联结构形式表示下式为状态方程的形式

$$H(p)=\frac{(s+4)}{(s+1)^3(s+2)(s+3)}$$

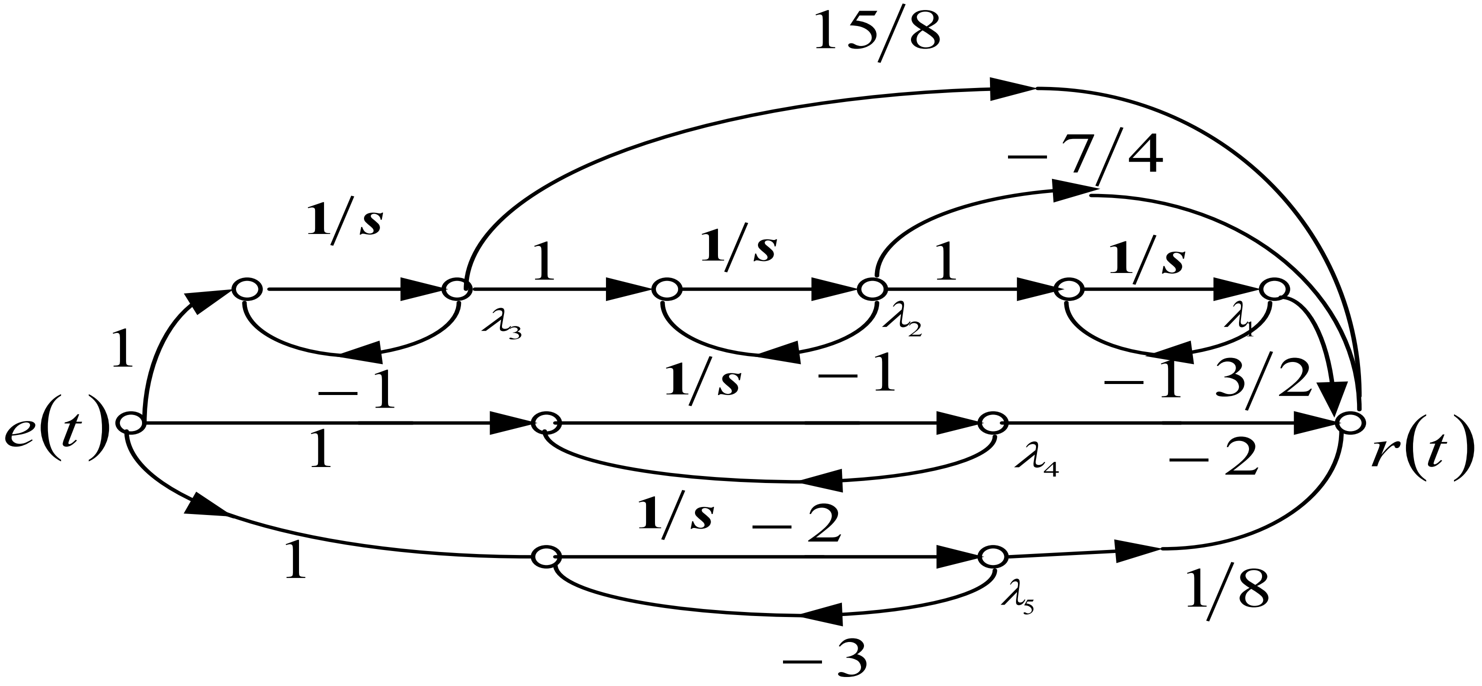
解答

用并联结构形式表示时，对上式用部分分式展开

$$H(s)=\frac{3/2}{(s+1)^3}+\frac{-7/4}{(s+1)^2}+\frac{15/8}{(s+1)}+\frac{-2}{(s+2)}+\frac{1/8}{(s+3)}$$

对应此式的流图结构形式如图（a）所示。

$$
\begin{cases}
\dot{\lambda}_1 = -\lambda_1 + \lambda_2 \\
\dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 + \lambda_3 \\
\dot{\lambda}_3 = -\lambda_3 + e(t) \\
\dot{\lambda}_4 = -2\lambda_4 + e(t) \\
\dot{\lambda}_5 = -3\lambda_5 + e(t)
\end{cases}
$$



(a)

$$
r(t) = \frac{3}{2}\lambda_1 - \frac{7}{4}\lambda_2 + \frac{15}{82}\lambda_3 + (-2)\lambda_4 + \frac{1}{8}\lambda_5
$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \\ \dot{\lambda}_4 \\ \dot{\lambda}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$r(t) = \left[\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, \frac{15}{8}, -2, \frac{1}{8}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}$$

四．将系统函数分解 建立状态方程

将系统函数的分母分解因式，可以对应构成并联或串联形式的流图结构，即可列出不同形式的状态方程。

（二）用流图的串联结构形式列状态方程

例

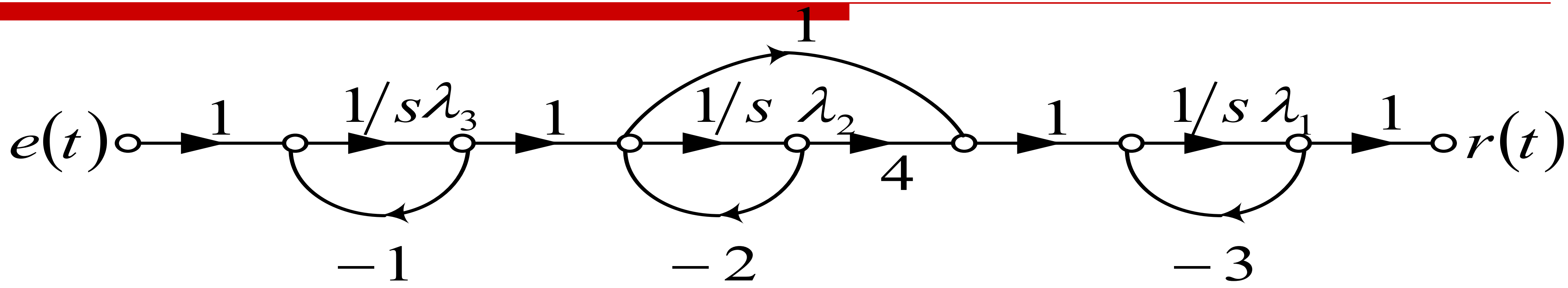
$$H(s)=\frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}$$

用流图的串联结构形式建立状态方程。

解答

$$H(s)=\frac{s+4}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$H(s)=\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s+4}{s+2}\right)\left(\frac{1}{s+3}\right)$$



选积分器输出为状态变量

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -3\lambda_1 + 4\lambda_2 + (\lambda_3 - 2\lambda_2) = -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_2 = -2\lambda_2 + \lambda_3 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_3 + e(t) \end{cases}$$

$$r(t) = \lambda_1$$

或 $$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t)$$

$$r(t) = [1,0,0] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

§12.4 连续时间系统状态方程的求解

一．用拉普拉斯变换法求解状态方程

方程 $\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{A\lambda}(t) + \boldsymbol{Be}(t) \\ \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{C\lambda}(t) + \boldsymbol{De}(t) \end{cases}$ **，起始条件** $\boldsymbol{\lambda}(0_-) = \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_2(0_-) \\ \vdots \\ \lambda_k(0_-) \end{bmatrix}$

$$s\boldsymbol{\Lambda}(s) - \boldsymbol{\lambda}(0_-) = \boldsymbol{A\Lambda}(s) + \boldsymbol{BE}(s)$$

$$\boldsymbol{R}(s) = \boldsymbol{C\Lambda}(s) + \boldsymbol{DE}(s)$$

整理得

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\Lambda}(s) = \boldsymbol{\lambda}(0_-) + \boldsymbol{BE}(s)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{\lambda}(0_-) + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{BE}(s)$$

将$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$记为$\boldsymbol{\Phi}(s)$，称为特征矩阵或预解矩阵，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Lambda}(s)=\boldsymbol{\Phi}(s)\lambda(0_-)+\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}(s) \\ \boldsymbol{R}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(s)\lambda(0_-)+[\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{E}(s) \end{cases}$$

因而时域表示式为

$$\begin{cases} \lambda(t)=L^{-1}\left[\Phi(s)\lambda(0_-)\right]+L^{-1}\left[\Phi(s)\mathrm{B}\right]*L^{-1}\mathrm{E}(s) \\ \mathrm{r}(t)=\underbrace{\mathrm{C}L^{-1}\left[\Phi(s)\lambda(0_-)\right]}_{\text{零输入解}}+\underbrace{L^{-1}\left\{\left[\mathrm{C}\Phi(s)\mathrm{B}+\mathrm{D}\right]\mathrm{E}(s)\right\}}_{\text{零状态解}} \end{cases}$$

可见，在计算过程中最关键的一步是求 $\boldsymbol{\Phi}(s)$ **。**

若系统为零状态的，则 $R(s)=[C\Phi(s)B+D]E(s)$

则系统的转移函数矩阵为 $H(s)=C\Phi(s)B+D$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ H_{n1}(s) & H_{n2}(s) & \cdots & H_{nm}(s) \end{bmatrix}$$

$H_{ij}(s)$**是第*i*个输出分量对第*j*个输入分量的转移函数。**

设$\mathbf{\Phi}(s)$的拉氏反变换为 $\boldsymbol{\varphi}(t)$，$\mathbf{H}(s)$的拉氏反变换为$\mathbf{h}(t)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\lambda}(0_-)+\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{B}*\boldsymbol{e}(t) \\ \boldsymbol{r}(t)=\underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varphi}(t)\boldsymbol{\lambda}(0_-)}_{\text{零输入解}}+\underbrace{\boldsymbol{h}(t)*\boldsymbol{e}(t)}_{\text{零状态解}} \end{cases}$$

例

已知系统的状态方程和起始条件为

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1(0_-) \\ \lambda_1(0_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

试求系统的状态变量。

解答

(1)求特征矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(s)$

$$s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ -1 & s-4 \end{bmatrix}$$

其行列式和伴随矩阵分别为

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=(s-2)(s-3)$$

$$\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix} s-4 & -2 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}$$

所以预解矩阵为 $\Phi(s)$

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=\frac{\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}=\begin{bmatrix} \dfrac{s-4}{(s-2)(s-3)} & \dfrac{-2}{(s-2)(s-3)} \\ \dfrac{1}{(s-2)(s-3)} & \dfrac{s-1}{(s-2)(s-3)} \end{bmatrix}$$

则状态变量矩阵为

$$\Lambda(s)=\Phi(s)\lambda(0_-)+\Phi(s)BE(s)$$

因为 $E(s)=0$

$$所以\Lambda(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s-4}{(s-2)(s-3)} & \dfrac{-2}{(s-2)(s-3)}\\ \dfrac{1}{(s-2)(s-3)} & \dfrac{s-1}{(s-2)(s-3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-7}{s-3}+\dfrac{10}{s-2}\\ \dfrac{7}{s-3}-\dfrac{5}{s-2}\end{bmatrix}$$

$$\lambda(t)=\begin{bmatrix}-7e^{3t}u(t)+10e^{2t}u(t)\\ 7e^{3t}u(t)-5e^{2t}u(t)\end{bmatrix}$$

例

已建立状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_1(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

起始状态为 $\begin{bmatrix} \lambda_1(0_-)=1 \\ \lambda_1(0_-)=0 \end{bmatrix}$ **输入矩阵为** $\begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix}$

用拉氏变换法求响应 $r(t)$ 和转移函数矩阵 $H(s)$ 。

解答

(1)求特征矩阵

$$s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=s\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-1 & -2\\0 & s+1\end{bmatrix}$$

其行列式和伴随矩阵分别为

$$\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=(s-1)(s+1)$$

$$\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]=\begin{bmatrix}s+1 & 2\\0 & s-1\end{bmatrix}$$

所以预解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(s)$为

$$\boldsymbol{\Phi}(s)=\frac{\operatorname{adj}[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}{\det[s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}]}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s-1)(s+1)}\\0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

（2）求转移函数矩阵 $\boldsymbol{H}(s)$

$$\boldsymbol{H}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s-1)(s+1)}\\ 0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s-1} & \dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{s}{s+1} & 0\end{bmatrix}$$

（3）求输出矩阵 $r(t)$

$$\boldsymbol{R}(s)=\boldsymbol{C\Phi}(s)\lambda(0_{-})+\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{E}(s)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & \dfrac{2}{(s-1)(s+1)}\\0 & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{s}{s-1} & \dfrac{1}{s-1}\\\dfrac{s}{s+1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{s}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s-1}-\dfrac{1}{s}\\0\end{bmatrix}$$

所以 $r(t)=\begin{bmatrix}2\mathrm{e}^{t}u(t)-u(t)\\0\end{bmatrix}$

§12.5 离散时间系统状态方程的建立

一．状态方程的一般形式和建立方法概述

离散系统的状态方程：一阶差分方程组

$\lambda_1(n),\lambda_2(n),\cdots\lambda_k(n)$ **为系统的状态变量；**

$x_1(n),x_2(n),\cdots,x_m(n)$**为系统的*m* 个输入信号；**

$y_1(n),y_2(n),\cdots y_r(n)$ **为系统的*r* 个输出信号。**

- **状态方程组由*k*个状态变量的一阶差分方程组成**
- **每个状态变量的差分方程都是所有状态变量和输入信号的函数；**
- **每一差分方程中只包含有一个状态变量的差分；**

状态方程：

$$
\begin{cases}
\lambda_1(n+1) = f_1[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \cdots \lambda_k(n); x_1(n), x_2(n), \cdots, x_m(n), n] \\
\lambda_2(n+1) = f_2[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \cdots \lambda_k(n); x_1(n), x_2(n), \cdots, x_m(n), n] \\
\cdots \\
\lambda_k(n+1) = f_k[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \cdots \lambda_k(n); x_1(n), x_2(n), \cdots, x_m(n), n]
\end{cases}
$$

输出方程：

$$
\begin{cases}
y_1(n) = h_1[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \cdots \lambda_k(n); x_1(n), x_2(n), \cdots, x_m(n), n] \\
y_2(n) = h_2[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \cdots \lambda_k(n); x_1(n), x_2(n), \cdots, x_m(n), n] \\
\cdots \\
y_r(n) = h_r[\lambda_1(n), \lambda_2(n), \cdots \lambda_k(n); x_1(n), x_2(n), \cdots, x_m(n), n]
\end{cases}
$$

如果系统是线性时不变系统，则状态方程和输出方程是状态变量和输入信号的线形组合，即

状态方程：

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = a_{11}\lambda_1(n) + a_{12}\lambda_2(n) + \cdots + a_{1k}\lambda_k(n) + b_{11}x_1(n) \\ \qquad + b_{12}x_2(n) + \cdots + b_{1m}x_m(n) \\ \lambda_2(n+1) = a_{21}\lambda_1(n) + a_{22}\lambda_2(n) + \cdots + a_{2k}\lambda_k(n) + b_{21}x_1(n) \\ \qquad + b_{22}x_2(n) + \cdots + b_{2m}x_m(n) \\ \cdots \\ \lambda_k(n+1) = a_{k1}\lambda_1(n) + a_{k2}\lambda_2(n) + \cdots + a_{kk}\lambda_k(n) + b_{k1}x_1(n) \\ \qquad + b_{k2}x_2(n) + \cdots + b_{km}x_m(n) \end{cases}$$

输出方程：

$$\begin{cases} y_1(n)=c_{11}\lambda_1(n)+c_{12}\lambda_2(n)+\cdots+c_{1k}\lambda_k(n)+d_{11}x_1(n) \\ \qquad\qquad +d_{12}x_2(n)+\cdots+d_{1m}x_m(n) \\ y_2(n)=c_{21}\lambda_1(n)+c_{22}\lambda_2(n)+\cdots+c_{2k}\lambda_k(n)+d_{21}x_1(n) \\ \qquad\qquad +d_{22}x_2(n)+\cdots+d_{2m}x_m(n) \\ \cdots \\ y_r(n)=c_{r1}\lambda_1(n)+c_{r2}\lambda_2(n)+\cdots+c_{rk}\lambda_k(n)+d_{r1}x_1(n) \\ \qquad\qquad +d_{r2}x_2(n)+\cdots+d_{rm}x_m(n) \end{cases}$$

表示成矢量方程形式

$$\begin{cases} \text{状态方程} & \boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(n+1)=\boldsymbol{A}_{k\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(n)+\boldsymbol{B}_{k\times m}\boldsymbol{x}_{m\times1}(n) \\ \text{输出方程} & \boldsymbol{y}_{r\times1}(n)=\boldsymbol{C}_{r\times k}\boldsymbol{\lambda}_{k\times1}(n)+\boldsymbol{D}_{r\times m}\boldsymbol{x}_{m\times1}(n) \end{cases}$$

可见：

•*n*+1时刻的状态变量是*n*时刻状态变量和输入信号的函数。

•在离散系统中，动态元件是延时单元，因而状态变量常常选延时单元的输出。

•在信号流图中选择z-1支路的输出为状态变量。

根据z变换的性质，$x(n-1)\leftrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1)$

当起始值$x(-1)=0$时，$x(n-1)\leftrightarrow z^{-1}X(z)$

各矩阵说明

$$\boldsymbol{\lambda}(n)=\begin{bmatrix}\lambda_1(n)\\ \lambda_2(n)\\ \vdots\\ \lambda_{\mathrm{k}}(n)\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}(n)=\begin{bmatrix}x_1(n)\\ x_2(n)\\ \vdots\\ x_m(n)\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{y}(n)=\begin{bmatrix}y_1(n)\\ y_2(n)\\ \vdots\\ y_r(n)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm}\end{bmatrix}$$

二．由系统的输入 —输出差分方程建立状态方程

对于离散系统通常用下列 K阶差分方程描述（输入—输出方程）

$$y(n)+a_1 y(n-1)+a_2 y(n-2)+\cdots+a_{k-1}y[n-(k-1)]+a_k y(n-k)$$
$$=b_0 x(n)+b_1 x(n-1)+b_2 x(n-2)+b_{k-1}x[n-(k-1)]+b_k x(n-k)$$

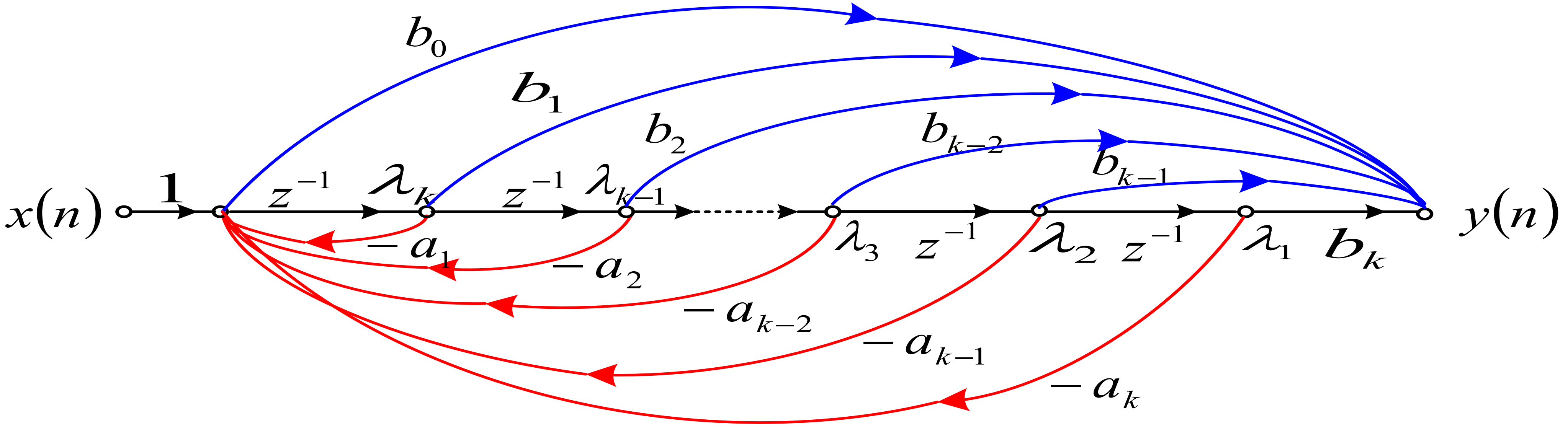
其系统函数为

$$H(z)=\frac{b_0 z^k+b_1 z^{k-1}+\ldots+b_{k-1}z+b_k}{z^k+a_1 z^{k-1}+\cdots+a_{k-1}z+a_k}$$

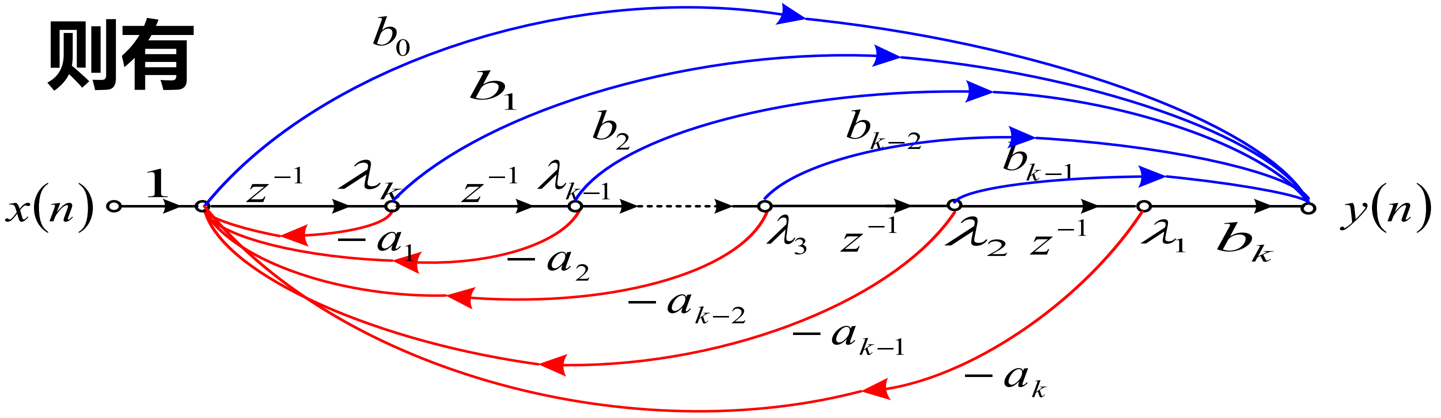
$$H(z)=\frac{b_0+\dfrac{b_1}{z}+\dfrac{b_2}{z^2}\cdots+\dfrac{b_{k-1}}{z^{k-1}}+\dfrac{b_k}{z^k}}{z^k+\dfrac{a_1}{z}+\dfrac{a_2}{z^2}\cdots+\dfrac{a_{k-1}}{z^{k-1}}+\dfrac{a_k}{z^k}}$$

$$H(z)=\frac{b_0+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}\cdots+\frac{b_{k-1}}{z^{k-1}}+\frac{b_k}{z^k}}{z^k+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}\cdots+\frac{a_{k-1}}{z^{k-1}}+\frac{a_k}{z^k}}$$

其流图形式



选延时单元输出作为状态变量，则有



$$\begin{cases} \lambda_1(n+1)=\lambda_2(n) \\ \lambda_2(n+1)=\lambda_3(n) \\ \cdots \\ \lambda_{k-1}(n+1)=\lambda_k(n) \\ \lambda_k(n+1)=-a_k\lambda_1(n)-a_{k-1}\lambda_2(n)-\cdots-a_2\lambda_{k-1}(n)-a_1\lambda_k(n)+x(n) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y(n)=&\,b_k\lambda_1(n)+b_{k-1}\lambda_2(n)+\cdots+b_2\lambda_{k-1}(n)+b_1\lambda_k(n) \\ &+b_0\left[-a_k\lambda_1(n)-a_{k-1}\lambda_2(n)-\cdots-a_2\lambda_{k-1}(n)-a_1\lambda_k(n)+x(n)\right] \\ =&\,(b_k-a_kb_0)\lambda_1(n)+(b_{k-1}-a_{k-1}b_0)\lambda_2(n)+\cdots \\ &+(b_2-a_2b_0)\lambda_{k-1}(n)+(b_1-a_1b_0)\lambda_k(n)+b_0x(n) \end{aligned}$$

表示成矢量方程形式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(n+1) = \boldsymbol{A\lambda}(n) + \boldsymbol{Bx}(n) \\ \boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C\lambda}(n) + \boldsymbol{Dx}(n) \end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \left[(b_k - a_k b_0), (b_{k-1} - a_{k-1} b_0), \cdots, (b_2 - a_2 b_0), (b_1 - a_1 b_0)\right]$$

$$\mathbf{D} = b_0$$

例

描述系统的差分方程为

$$y(n)+2y(n-1)-3y(n-2)+4y(n-3)=x(n-1)+2x(n-2)-3x(n-3)$$

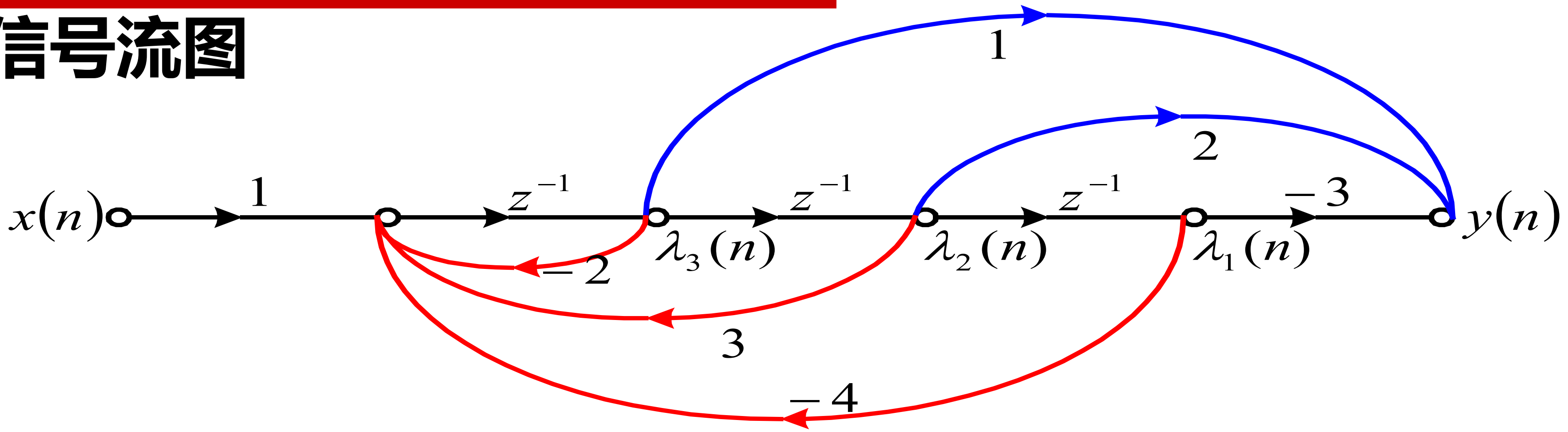
写出其状态方程和输出方程。

解答

由差分方程写出该系统的系统函数

$$H(z)=\frac{z^{-1}+2z^{-2}-3z^{-3}}{1+2z^{-1}-3z^{-2}+4z^{-3}}$$

画出其信号流图



以延时器的输出作为状态变量，分别为 $\lambda_1(n), \lambda_2(n), \lambda_3(n)$

这样即可写出状态方程与输出方程为：

$$\begin{cases} \lambda_1(n+1) = \lambda_2(n) \\ \lambda_2(n+1) = \lambda_3(n) \\ \lambda_3(n+1) = -4\lambda_1(n) + 3\lambda_2(n) - 2\lambda_3(n) + x(n) \end{cases}$$

$$y(n) = -3\lambda_1(n) + 2\lambda_2(n) + \lambda_3(n)$$

表示成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \\ \lambda_3(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \lambda_3(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \\ \lambda_3(n) \end{bmatrix}$$

三．给定系统的方框图或流图建立状态方程

给定离散系统的方框图或流图，很容易建立系统的状态方程，只要取延时单元的输出作为状态变量即可。

四．将系统函数分解建立状态方程

将系统函数分解构成串联或并联形式的流图

级联：$H(z)=H_1(z) \bullet H_2(z) \cdots \bullet H_l(z)$

并联：$H(z)=H_1(z)+H_2(z)+\cdots+H_l(z)$

例

§12.6 离散时间系统状态方程的求解

概述

离散系统状态方程的求解和连续系统的求解方法类似，包括时域和变换域两种方法。

一．离散系统状态方程的Z变换解

和连续系统的拉氏变换方法类似，离散系统的Z变换方法也使状态方程的求解显得容易一些。

由离散系统的状态方程和输出方程

$$\begin{cases} \lambda(n+1) = \boldsymbol{A}\lambda(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(n) \\ \boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\lambda(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(n) \end{cases}$$

两边取Z 变换

$$\begin{cases} z\Lambda(z) - z\lambda(0) = \boldsymbol{A}\Lambda(z) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z) \\ \boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}\Lambda(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(z) \end{cases}$$

整理,得到

$$\begin{cases} \Lambda(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z\lambda(0) + (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z) \\ \boldsymbol{Y}(z) = \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} z\lambda(0) + \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{X}(z) \end{cases}$$

取其逆变换即得时域表示式为:

$$\begin{cases} \lambda(n) = Z^{-1}\left[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z\right]\lambda(0) + Z^{-1}\left[(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right] * Z^{-1}\left[\boldsymbol{X}(z)\right] \\ \boldsymbol{y}(n) = Z^{-1}\left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}z\right]\lambda(0) + Z^{-1}\left[\boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right] * Z^{-1}\left[\boldsymbol{X}(z)\right] \end{cases}$$

系统函数为

$$H = C\left(z\mathrm{I}-\mathrm{A}\right)^{-1}B + D$$

例题

例

某离散系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(n+1) \\ \lambda_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n) \qquad y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(n) \\ \lambda_2(n) \end{bmatrix}$$

求描述该系统输入、输出关系的差分方程。

解答

由给定的状态方程，可得特征矩阵

$$[zI - A] = \begin{bmatrix} z & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & z-1 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵

$$[zI-A]^{-1}=\frac{\mathrm{adj}[zI-A]}{\det[zI-A]}=\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} z-1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & z \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{z-1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \\ \dfrac{-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} & \dfrac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \end{bmatrix}$$

系统函数

$$H(z)=C[zI-A]^{-1}B+D$$

考虑到 $D=0$ ，得

$$H(z)=[1\quad 1]\cdot\frac{1}{z^2-z+\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} z-1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{z+\frac{1}{2}}{z^2-z+\frac{1}{4}}$$

由 $H(z)$ 不难写出，描述该系统的差分方程为

$$y(n)-y(n-1)+\frac{1}{4}y(n-2)=x(n-1)+\frac{1}{2}x(n-2)$$

谢　　谢！