第1章 时域离散信号和时域离散系统

1.1 引言

信号分类：连续信号和离散信号； 一维信号和多维信号

时域连续信号：信号的自变量和函数值都取连续值，又称为模拟信号。

时域离散信号：自变量取离散值，而函数值取连续值。

数字信号：信号的自变量和函数值均取离散值。

系统分类：模拟系统，时域离散系统和数字系统。

例题:

例如： $x_a(t)=0.9\sin(50\pi t)$ ，这是一个模拟信号，如果对它按照时间采样间隔 T=0.005s进行等间隔采样，便得到时域离散信号$x(n)$，即

$$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}=0.9\sin(50\pi nT)=0.9\sin(0.25\pi n)$$

={ … ， <u>0.0</u>， 0.6364， 0.9， 0.6364， 0.0，-0.6364， -0.9， -0.6364, … }

显然, 时域离散信号是时间离散化的模拟信号。

如果用四位二进制数表示该时域离散信号，便得到相应的数字信号$x[n]$，即

$x[n]$={ … ， <u>0.000</u>，0.101，0.111，0.101，0.000，1.101，1.111，1.101, …}

显然，数字信号是幅度、时间均离散化的模拟信号，或者说是幅度离散化的时域离散信号。

数字信号处理最终要处理的是数字信号，但为简单，在理论研究中一般研究时域离散信号和系统。

时域离散信号和数字信号之间的差别，仅在于数字信号存在量化误差，本书将在第9章中专门分析实现中的量化误差问题。

本章作为全书的基础，主要学习时域离散信号的表示方法和典型信号、时域离散线性时不变系统的时域分析方法，最后介绍模拟信号数字处理方法。

1.2　时域离散信号

假设模拟信号为$x_a(t)$，以采样间隔T对它进行等间隔采样，得到时域离散信号$x(n)$：

$$x(n)=x_a(t)\big|_{t=nT}=x_a(nT)\qquad -\infty<n<\infty$$

式中的n取整数，将 $n=\cdots,0,1,2,3,\cdots$ 代入上式, 得到：

$$x(n)=\{\cdots,x_a(-T),x_a(0),x_a(T),x_a(2T),\cdots\}$$

显然, $x(n)$是一个有序的数字，因此时域离散信号也可以称为序列。注意这里n取整数，非整数时无定义。

时域离散信号有三种表示方法：

1） 用集合符号表示序列

数的集合用集合符号{·}表示。时域离散信号是一个有序的数的集合，可表示成集合:

$$x(n)=\{x_n,\ n=\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$$

例如，一个有限长序列可表示为

$$x(n)=\{1,2,3,4,3,2,1;\ n=0,1,2,3,4,5,6\}$$

也可简单地表示为

$$x(n)=\{\underline{1},2,3,4,3,2,1\}$$

集合中有下划线的元素表示n=0时刻的采样值。

2） 用公式表示序列

例如： $x(n)=a^{|n|}$　　　$0<a<1, -\infty<n<\infty$

3） 用图形表示序列

例如, 时域离散信号$x(n)=\sin(\pi n/5)$，$n= -5, -4, \dots, 0, \dots, 4, 5$, 图1.2.1就是它的图形表示。

这是一种很直观的表示方法。为了醒目，常常在每一条竖线的顶端加一个小黑点。

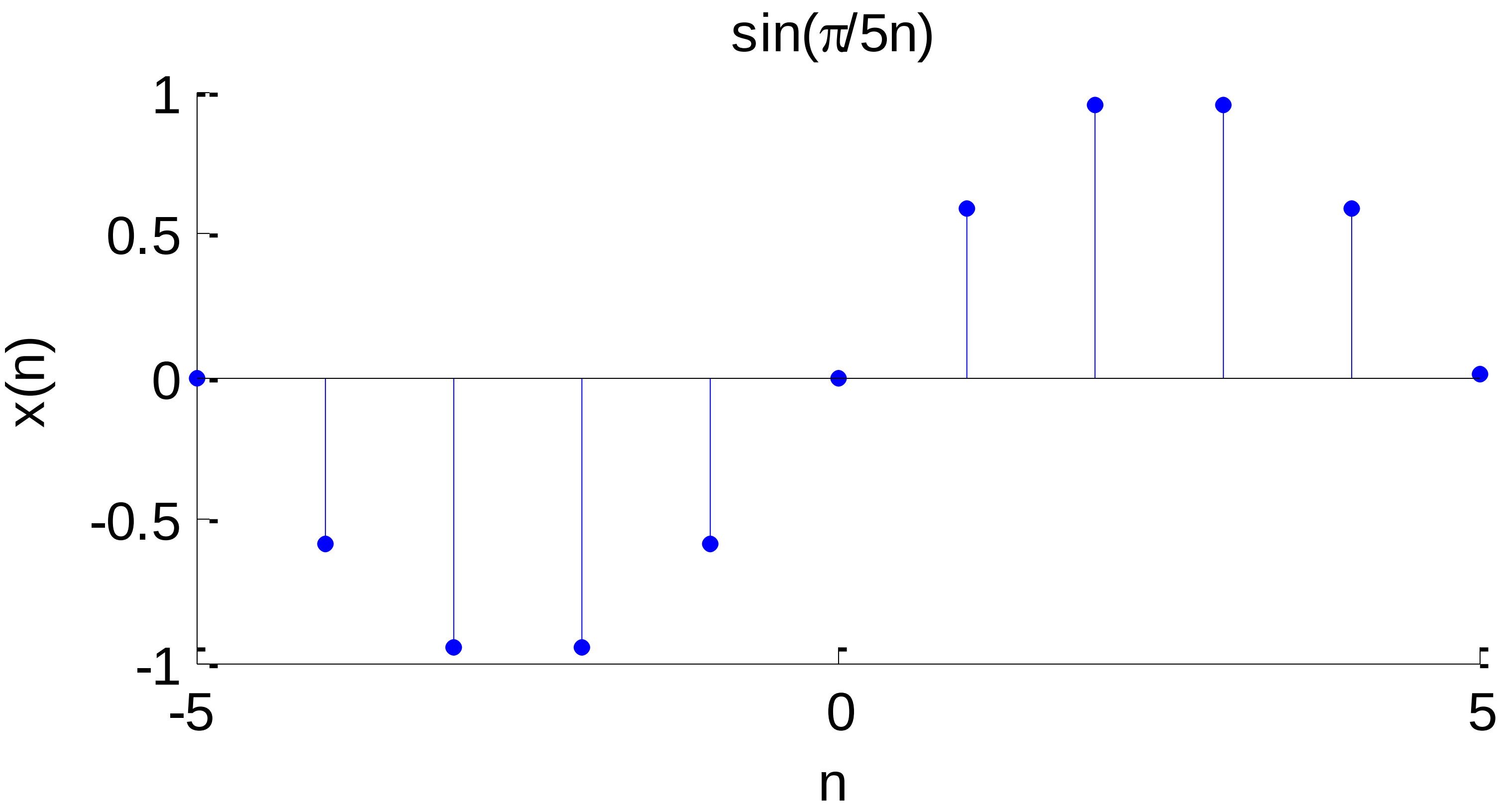


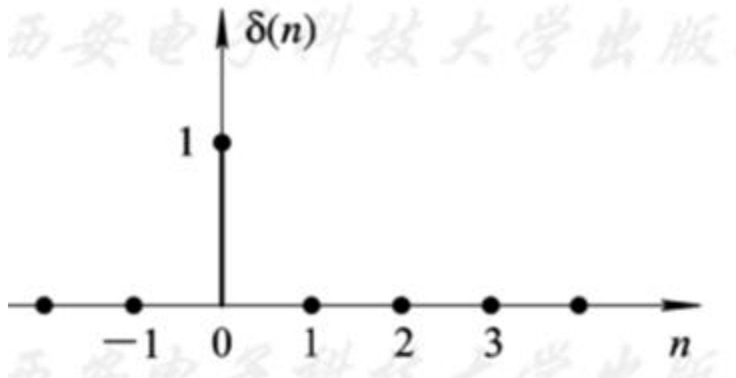
图1.2.1　$x(n)=\sin(\pi n/5)$的波形图

1.2.1 常用的典型序列

1. 单位采样序列$\delta(n)$

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$$

单位采样序列也称为单位脉冲序列，特点是仅在$n=0$时取值为1，其它均为零。



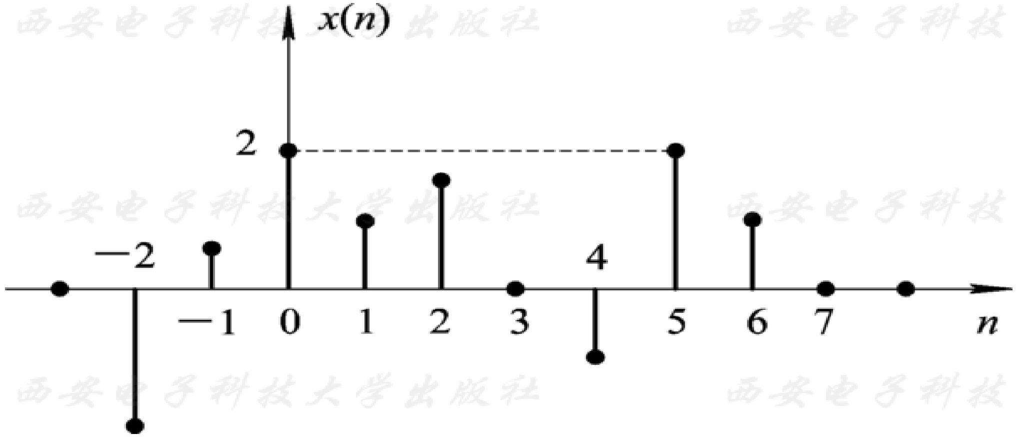
(a) 单位采样序列

对于任意序列，可以用单位采样序列的移位加权和表示，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

这种任意序列的表示方法，在信号分析中是一个很有用的公式。

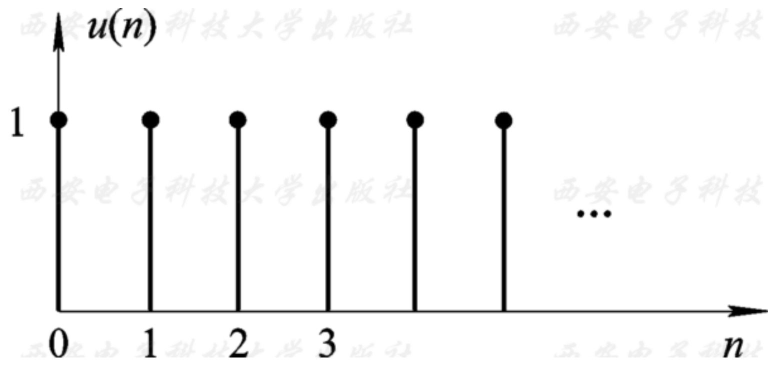
例:



$$x(n)=-2\delta(n+2)+0.5\delta(n+1)+2\delta(n)+\delta(n-1)+1.5\delta(n-2)$$
$$-\delta(n-4)+2\delta(n-5)+\delta(n-6)$$

2. 单位阶跃序列 *u*(*n*)

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$



单位阶跃序列如图1.2.3所示。它类似于模拟信号中的单位阶跃函数*u*(*t*)。

δ(*n*)与*u*(*n*)之间的关系如下列式所示：

$$\delta(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)$$

3. 矩形序列$R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & \text{其它}n\end{cases}$$

式中，N称为矩形序列的长度。

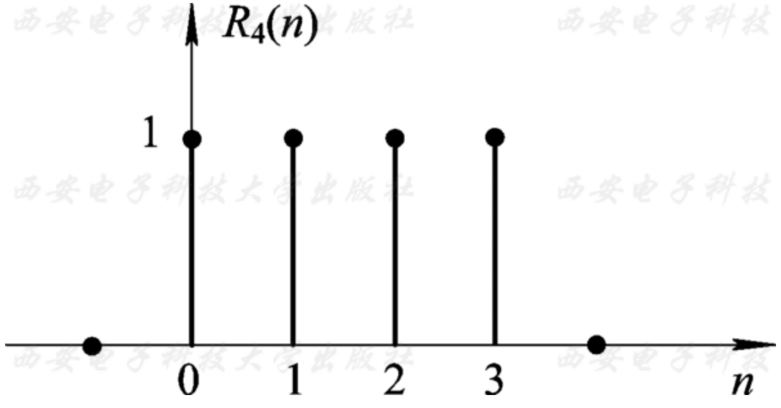


图1.2.4　N=4时矩形序列

矩形序列可用单位阶跃序列表示，如下式：

$$R_N(n)=u(n)-u(n-N)$$

4. 实指数序列

$$x(n)=a^n u(n) \qquad a\text{为实数}$$

如果$|a|<1$, $x(n)$的幅度随n的增大而减小，称$x(n)$为收敛序列；如果$|a|>1$，则称为发散序列。

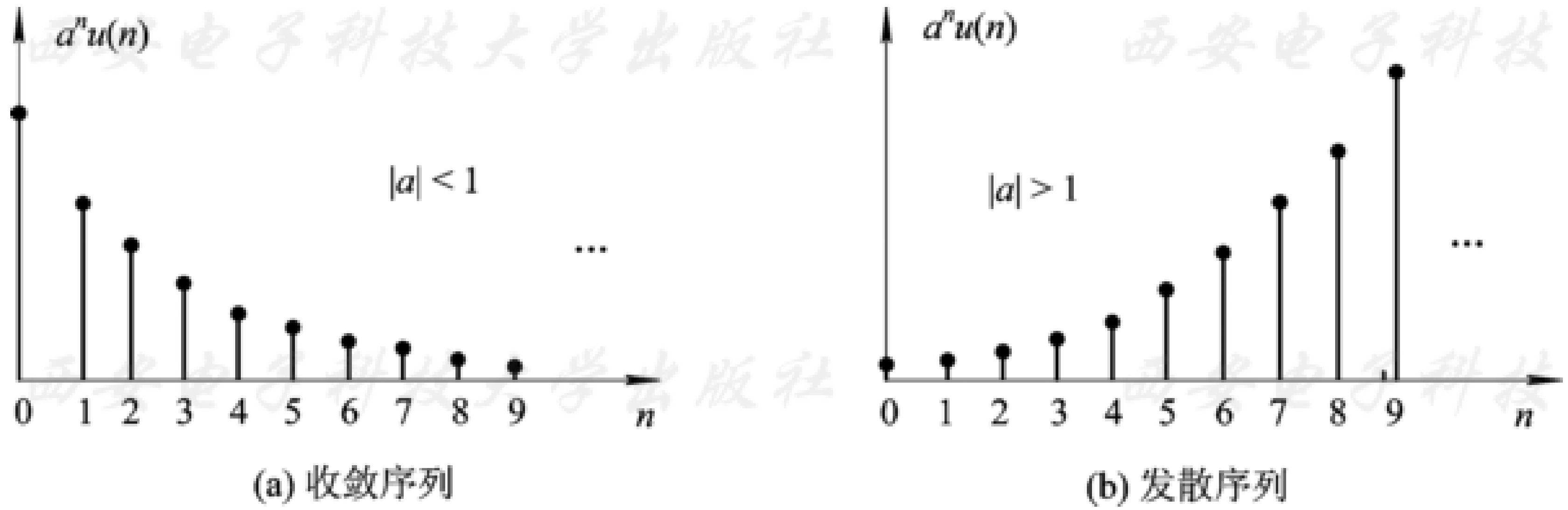
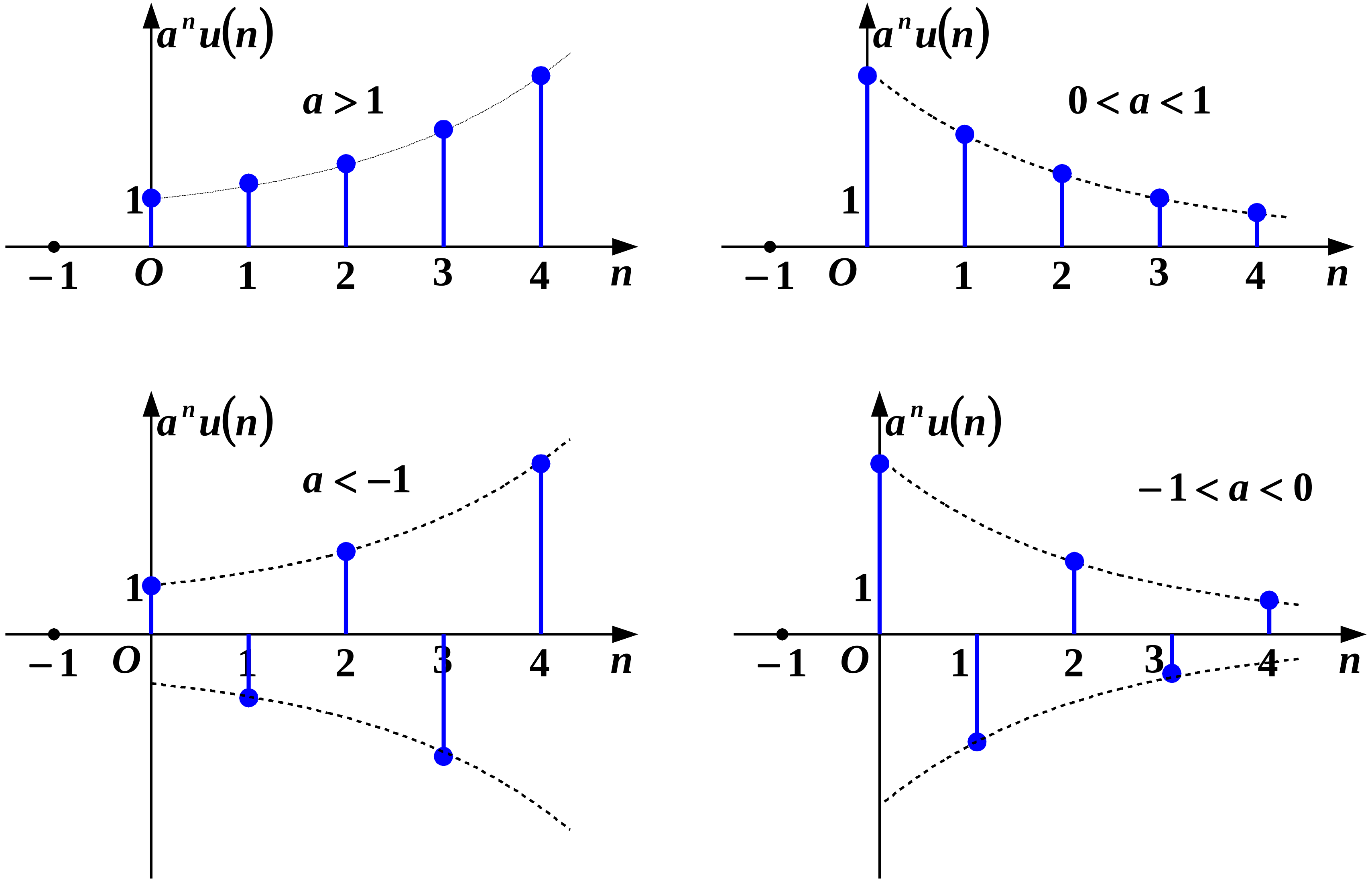


图1.2.5 实指数序列



$a^n u(n)$
$a > 1$
1
-1 O 1 2 3 4 n
$a^n u(n)$
$0 < a < 1$
1
-1 O 1 2 3 4 n
$a^n u(n)$
$a < -1$
1
-1 O 1 2 3 4 n
$a^n u(n)$
$-1 < a < 0$
1
-1 O 1 2 3 4 n

5. 正弦序列

$$x(n)=\sin(\omega n)$$

式中，ω 称为正弦序列的数字域频率(也称数字频率)，单位是弧度(rad)，它表示序列变化的速率，或者说表示相邻两个序列值之间变化的弧度数。

如果正弦序列是由模拟信号$x_a(t)$采样得到的，那么

$$x_{\mathrm{a}}(t)=\sin(\Omega t)$$

$$x(n)=x_{\mathrm{a}}(t)|_{t=nT}=\sin(\Omega nT)=\sin(\omega n)$$

因此得到数字频率ω与模拟角频率Ω之间的关系为

$$\omega=\Omega T$$

$$\omega = \Omega T$$

它表示凡是由模拟信号采样得到的序列，模拟角频率$\boldsymbol{\Omega}$与序列的数字域频率$\boldsymbol{\omega}$成线性关系。

由于采样频率$\boldsymbol{F_s}$与采样周期$\boldsymbol{T}$互为倒数，因而有

$$\omega = \frac{\Omega}{F_s}$$

上式表示数字域频率是模拟角频率对采样频率的归一化频率。

本书中用ω表示数字域频率，Ω和f表示模拟角频率和模拟频率。

6. 复指数序列

复指数序列用下式表示：

$$x(n)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)n}$$

式中, ω为数字域频率。

设 σ=0，用极坐标和实部虚部表示如下式：

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}=\cos(\omega n)+\mathrm{j}\sin(\omega n)$$

由于n取整数，下面等式成立：

$$\boxed{\cos[(\omega+2\pi M)n]=\cos(\omega n)} \quad \boxed{\sin[(\omega+2\pi M)n]=\sin(\omega n)}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega+2\pi M)n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}}$$

上面公式中M取整数，所以对数字域频率而言，正弦序列和复指数序列都是以2π为周期的周期信号。在以后的研究中，在频率域即ω域只分析研究一个周期就够了。

7. 周期序列

如果对所有***n***存在一个最小的正整数***N***，使下面等式成立：

$$x(n)=x(n+N), \qquad -\infty<n<\infty$$

则称序列***x*(*n*)**为周期性序列，周期为***N***。

下面讨论一般正弦序列的周期性。

$$x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)$$

那么 $x(n+N)=A\sin(\omega_0(n+N)+\varphi)=A\sin(\omega_0 n+\omega_0 N+\varphi)$

如果 $\boldsymbol{x(n+N)=x(n)=A\sin(\omega_0 n+\varphi)}$

则要求$\boldsymbol{\omega_0 N=2\pi k}$，即 $\boldsymbol{\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{N}{k}}$

式中，***k***与***N***均取整数，且***k***的取值要保证***N***是最小的正整数，满足这些条件，正弦序列才是以***N***为周期的周期序列。

具体正弦序列有以下三种情况：

（1） 当$2\pi/\omega_0$为整数时，k=1，正弦序列是以$2\pi/\omega_0$为周期的周期序列。

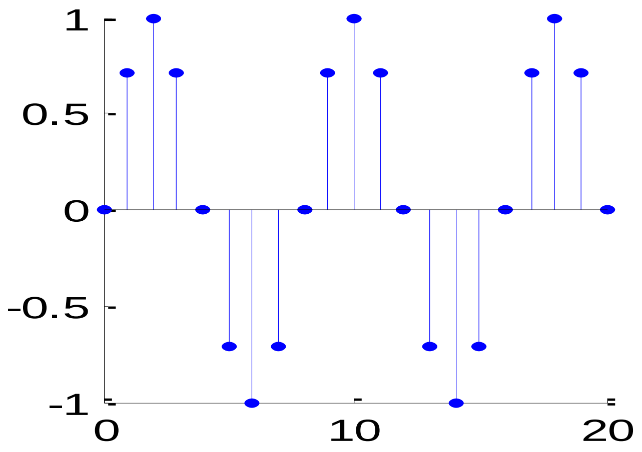
（2）$2\pi/\omega_0$不是整数，是一个有理数时，设$2\pi/\omega_0=P/Q$，式中P、Q是互为素数的整数，那么$N=P$。

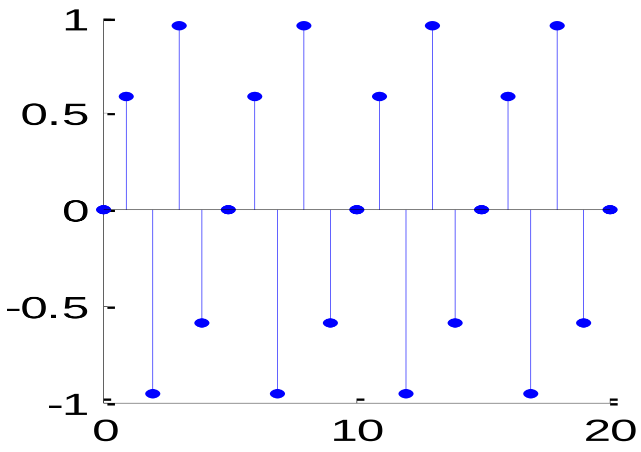
（3）$2\pi/\omega_0$是无理数，任何整数k都不能使N为正整数，因此，此时的正弦序列不是周期序列。例如，$\omega_0=1/4$, $\sin(\omega_0 n)$即不是周期序列。

对于复数指数序列 $e^{j\omega_0 n}$ 的周期性也有和上面同样的分析结果。

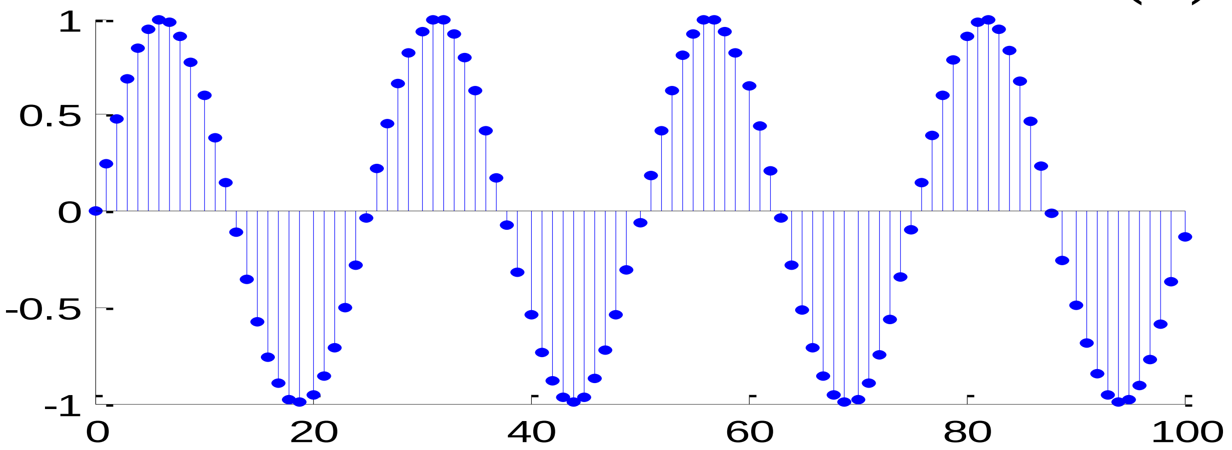
$$x(n)=\sin(\frac{\pi}{4}n)$$

$$x(n)=\sin(\frac{4\pi}{5}n)$$





$$x(n)=\sin\left[\frac{1}{4}n\right]$$



1.2.2　序列的运算

序列的简单运算有加法、乘法、移位、翻转及尺度变换。

1． 加法和乘法

序列之间的加法和乘法，是指它的同序号的序列值逐项对应相加和相乘。

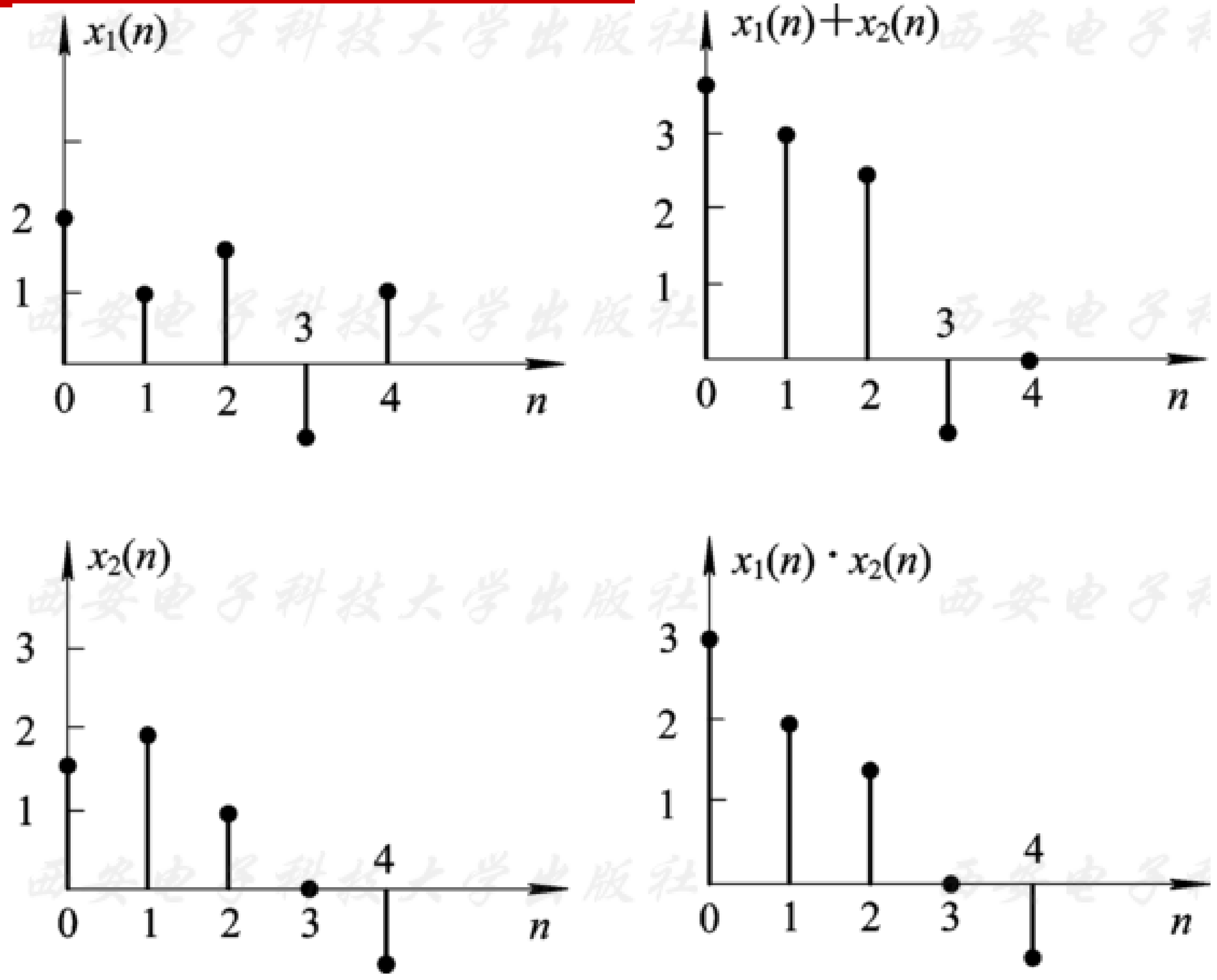
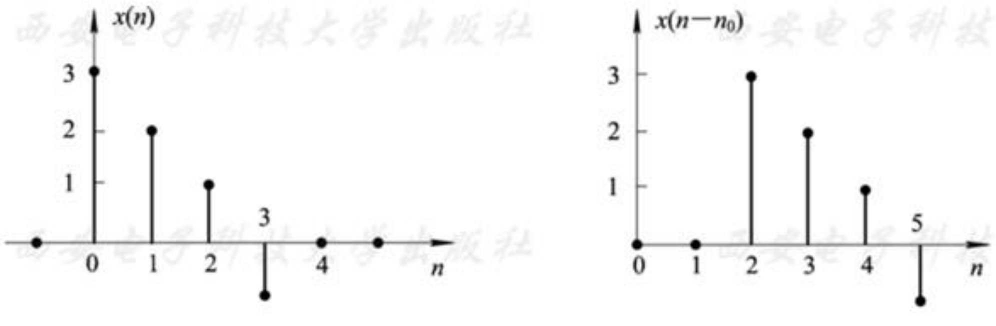


图1.2.8　序列的加法和乘法

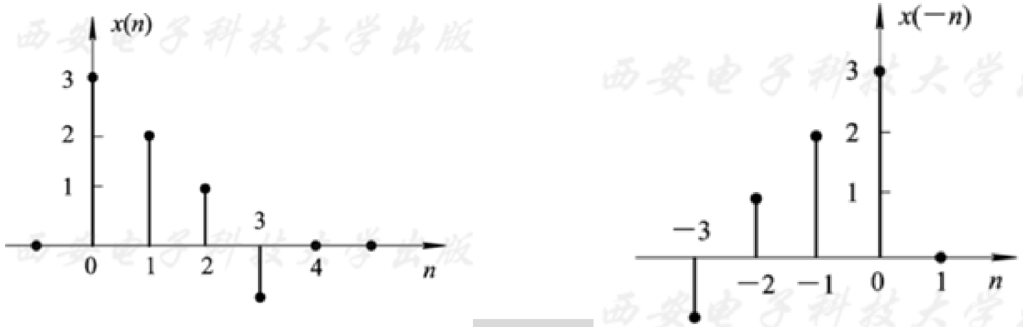
2．移位、翻转及尺度变换

移位：$y(n)=x(n-n_0)$,当$n_0>0$时, 称为$x(n)$的延时序列；当$n_0<0$时，称为$x(n)$的超前序列。



(a) (b)

翻转：$y(n)=x(-n)$,是$x(n)$的翻转序列。

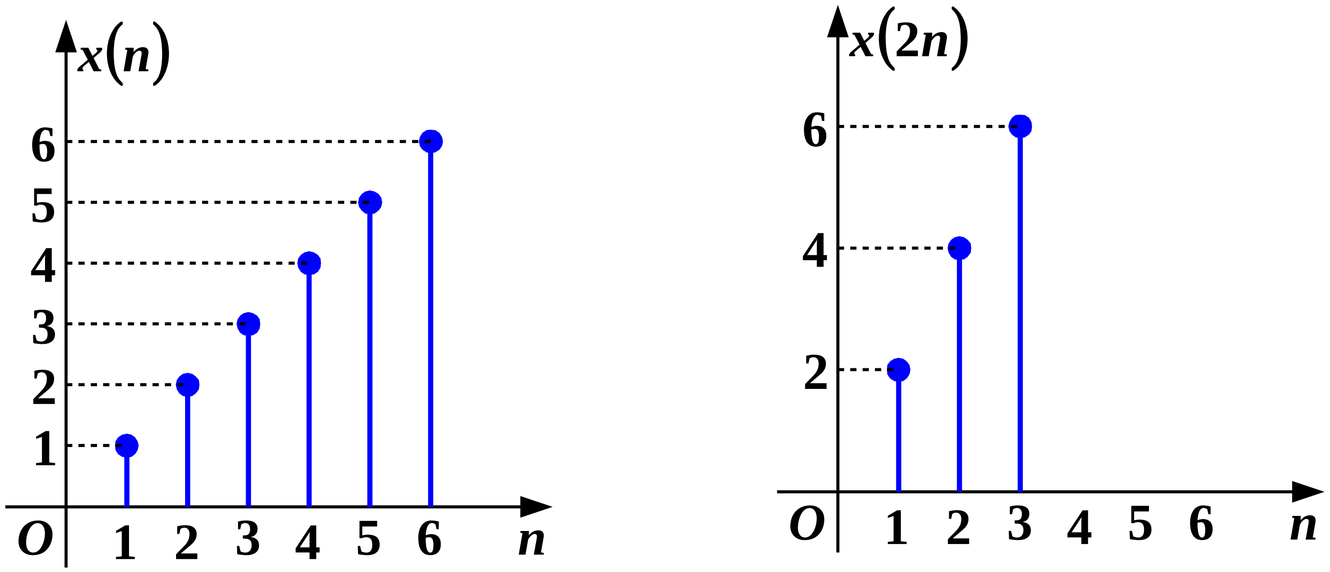


(a) (c)

尺度变换：

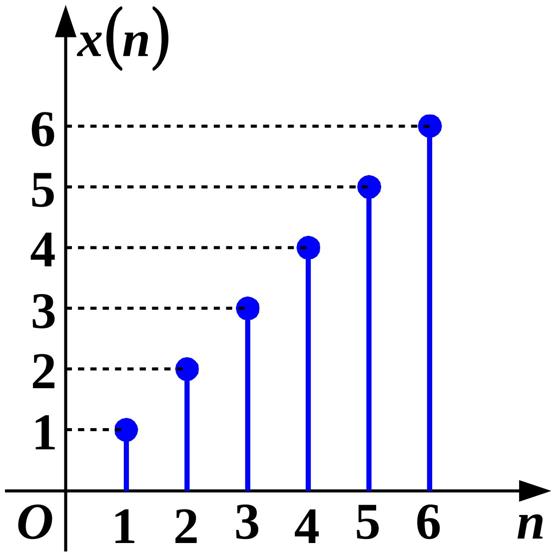
$y(n)=x(Mn)$，M为正整数。则$y(n)$是$x(n)$作M倍的抽取所产生的。

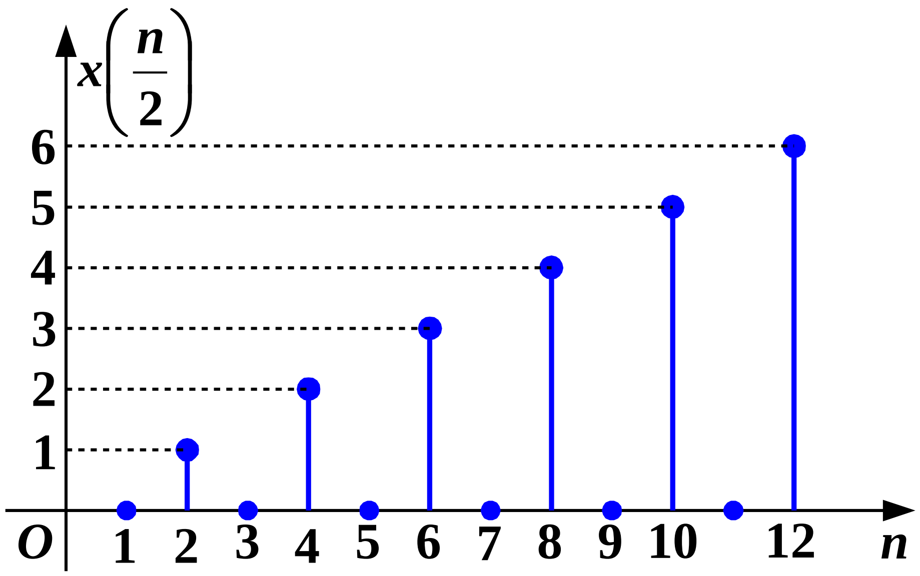
若$x(n)$的抽样频率为fs, 则$y(n)$的抽样频率为fs/M, 降低了M倍。



$y(n)=x(n/L)$，L为正整数。则$y(n)$是$x(n)$作L倍的插值所产生的。

若$x(n)$的抽样频率为fs, 则$y(n)$的抽样频率为fs$L$, 增加了L倍。

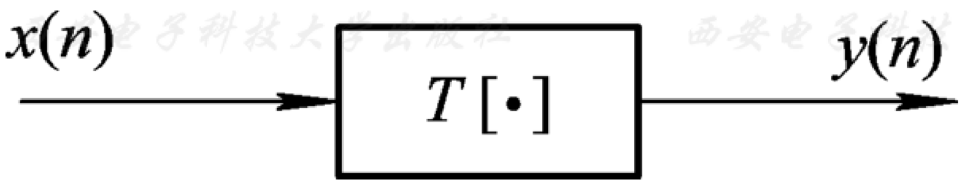




1.3 时域离散系统

设时域离散系统的输入为$x(n)$，经过规定的运算，系统输出序列用$y(n)$表示。运算关系用T［·］表示，输出与输入之间关系用下式表示：

$$y(n)=T\left[x(n)\right]$$



在时域离散系统中，最重要和最常用的是线性时不变系统，这是因为很多物理过程都可用这类系统表征，且便于分析、设计与实现。

1.3.1　线性系统

系统的输入、输出之间满足线性叠加原理的系统称为线性系统。设$x_1(n)$和$x_2(n)$分别作为系统的输入序列，其输出分别用$y_1(n)$和$y_2(n)$表示，即

$$y_1(n)=T\left[x_1(n)\right], y_2(n)=T\left[x_2(n)\right]$$

那么线性系统一定满足下面两个公式：

叠加性: $T\left[x_1(n)+x_2(n)\right]=y_1(n)+y_2(n)$　**齐次性:** $T\left[ax_1(n)\right]=ay_1(n)$

将齐次性和叠加性结合起来，可表示成

$$y(n)=T\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$$

上式中a_1和a_2均是常数。

【例1.3.1】 证明$y(n)=ax(n)+b$ (a和b是常数）所代表的系统是非线性系统。

证明

$$y_1(n)=T\left[x_1(n)\right]=ax_1(n)+b$$

$$y_2(n)=T\left[x_2(n)\right]=ax_2(n)+b$$

$$y(n)=T\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=a\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]+b$$

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1\left[ax_1(n)+b\right]+a_2\left[ax_2(n)+b\right]$$

因为 $$y(n)\neq a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$$

因此，该系统不是线性系统。

证明 $y(n)=x(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$所代表的系统是线性系统。

证明：

$$y_1(n)=T\left[x_1(n)\right]=x_1(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_2(n)=T\left[x_2(n)\right]=x_2(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y(n)=T\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=\left(a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=a_1x_1(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)+a_2x_2(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1x_1(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)+a_2x_2(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

因为 $y(n)=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)$

因此，该系统是线性系统。

1.3.2 时不变系统

如果系统对输入信号的运算关系***T***［·］在整个运算过程中不随时间变化，或者说系统对于输入信号的响应与信号加于系统的时间无关，则这种系统称为时不变系统，用公式表示如下：

$$\left.\begin{aligned} y(n) &= T\left[x(n)\right] \\ y(n-n_0) &= T\left[x(n-n_0)\right] \end{aligned}\right\}$$

式中$\boldsymbol{n_0}$为任意整数。检查一个系统是否是时不变系统，就是检查其是否满足上式。

【例1.3.2】 ***y*(*n*)=*ax*(*n*)+*b*所代表的系统是否是时不变系统，式中*a*和*b*是常数。**

解：

$$y(n) = ax(n) + b$$

$$y(n - n_0) = ax(n - n_0) + b$$

$$T\left[x(n - n_0)\right] = ax(n - n_0) + b$$

因为 $y(n - n_0) = T\left[x(n - n_0)\right]$

因此该系统是时不变系统。

【例】$y(n)=x(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$ 所代表的系统是否是时不变系统。

解：

$$y(n)=x(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y(n-n_0)=x(n-n_0)\sin\left(\omega_0(n-n_0)+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$T\left[x(n-n_0)\right]=x(n-n_0)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

因为 $y(n-n_0)\neq T\left[x(n-n_0)\right]$

因此该系统不是时不变系统。

方法二：

$$x(n)\xrightarrow{H}x(n)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)\xrightarrow{n_0}x(n-n_0)\sin\left(\omega_0(n-n_0)+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x(n)\xrightarrow{n_0}x(n-n_0)\xrightarrow{H}x(n-n_0)\sin\left(\omega_0 n+\frac{\pi}{4}\right)$$

二者不相等，因此该系统不是时不变系统。

1.3.3 线性时不变系统输入与输出之间的关系

设系统的输入$x(n)=\delta(n)$，系统输出$y(n)$的初始状态为零，定义这种条件下的系统输出为系统的单位脉冲响应，用$h(n)$表示。

单位脉冲响应即系统对于$\delta(n)$的零状态响应。用公式表示为

$$h(n)=T\left[\delta(n)\right]$$

设系统的输入用**x(n)**表示，表示成单位脉冲序列移位加权和为：

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

那么系统输出为

$$y(n)=T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)\right]$$

根据线性系统的叠加性质

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)T\left[\delta(n-m)\right]$$

又根据时不变性质

$$\boxed{y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)}$$

计算卷积有三种方法：图解法，解析法，利用**MATLAB**计算。

1） 图解法

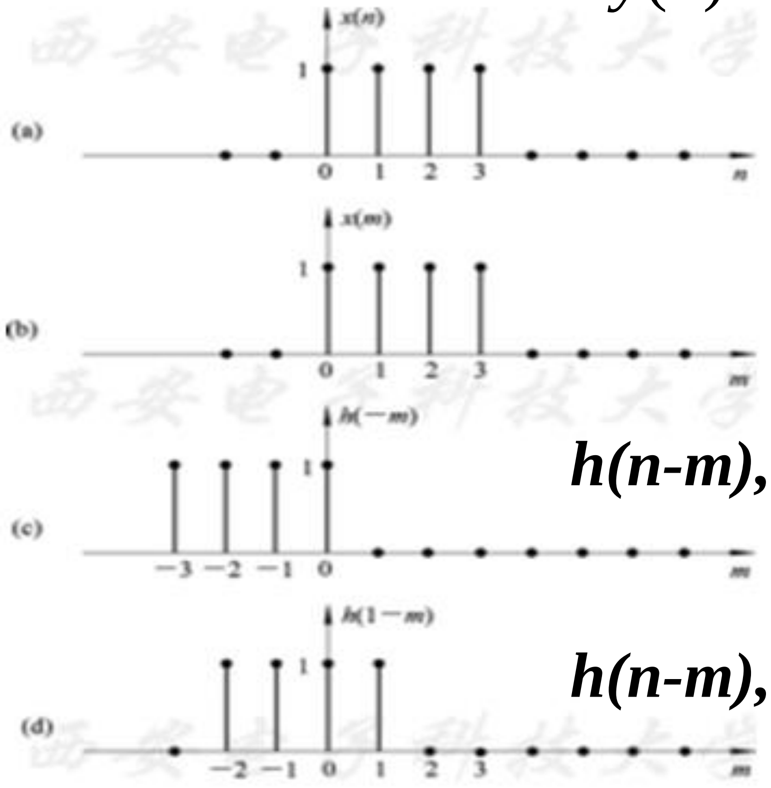
$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

卷积的基本运算是翻转、移位、相乘和相加，这类卷积称为序列的线性卷积。如果两个序列的长度分别为N和M，那么卷积结果的长度为$N+M-1$。

【例1.3.4】　已知*x*(*n*)=*R*$_4$(*n*), *h*(*n*)=*R*$_4$(*n*),　求*y*(*n*)=*x*(*n*)**h*(*n*)。**

解

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_4(m)R_4(n-m)$$



h*(*n*-*m*), *n=0

h*(*n*-*m*), *n=1

h*(*n*-*m*), *n=2

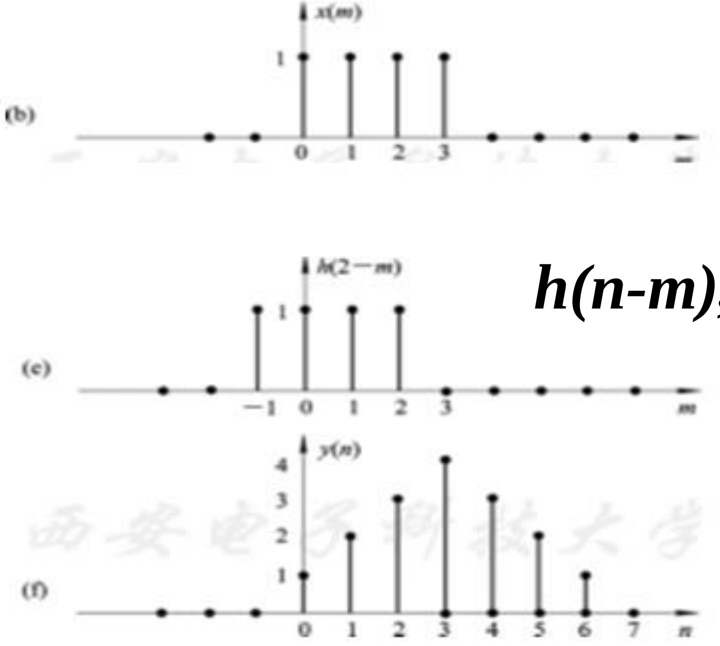


图1.3.2　例1.3.4线性卷积

***y*(*n*)={<u>1</u>,2,3,4,3,2,1}**

表1.3.1　图解法（列表法）

$x(m)$				1	1	1	1				
$h(m)$				1	1	1	1				
$h(-m)$	1	1	1	1							$y(0)=1$
$h(1-m)$		1	1	1	1						$y(1)=2$
$h(2-m)$			1	1	1	1					$y(2)=3$
$h(3-m)$				1	1	1	1				$y(3)=4$
$h(4-m)$					1	1	1	1			$y(4)=3$
$h(5-m)$						1	1	1	1		$y(5)=2$
$h(6-m)$							1	1	1	1	$y(6)=1$

$x(n)$				1	1	1	1	$n=0$开始
$h(n)$				1	1	1	1	$n=0$开始
				1	1	1	1	
			1	1	1	1		
		1	1	1	1			
	1	1	1	1				
$y(n)$	1	2	3	4	3	2	1	

$\uparrow$

$n=0$

注意：不能进位

$y(n)=\{\underline{1},2,3,4,3,2,1\}$

2) 解析法

如果已知两个卷积信号的解析表达式，则可以直接按照卷积式进行计算。

【例1.3.5】 设$x(n)=a^n u(n)$，$h(n)=R_4(n)$，求 $y(n)=x(n)*h(n)$。

解

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_4(m)a^{n-m}u(n-m)$$

要求：$m\le n$

$0\le m\le 3$

$n<0$时，$y(n)=0$

$0\le n\le 3$时，乘积的非零值范围为$0\le m\le n$，因此

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}a^{n-m}=a^n\frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}$$

$n\ge 4$时，乘积的非零区间为$0\le m\le 3$，因此

$$y(n)=\sum_{m=0}^{3}a^{n-m}=a^n\frac{1-a^{-4}}{1-a^{-1}}$$

$$y(n)=\begin{cases}0 & n<0\\ a^n\dfrac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}} & 0\le n\le 3\\ a^n\dfrac{1-a^{-4}}{1-a^{-1}} & 4\le n\le\infty\end{cases}$$

$$=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)-\frac{1-a^{n-3}}{1-a}u(n-4)$$

3） 用MATLAB计算两个有限长序列的卷积

MATLAB 信号处理工具箱提供了conv 函数，该函数用于计算两个有限长序列的卷积（或计算两个多项式相乘）。

C=conv(A, B)　计算两个有限长序列向量A和B的卷积。如果向量A和B的长度分别为N和M，则卷积结果向量C的长度为N＋M－1。

应当注意，conv函数默认A和B表示的两个序列都是从0开始，所以不需要位置向量。

卷积性质：交换律、结合律和分配律。

1、交换律 $$x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

2、结合律

$$x(n)*\left[h_1(n)*h_2(n)\right]=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$$

3、分配律

$$x(n)*\left[h_1(n)+h_2(n)\right]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

线性时不变系统

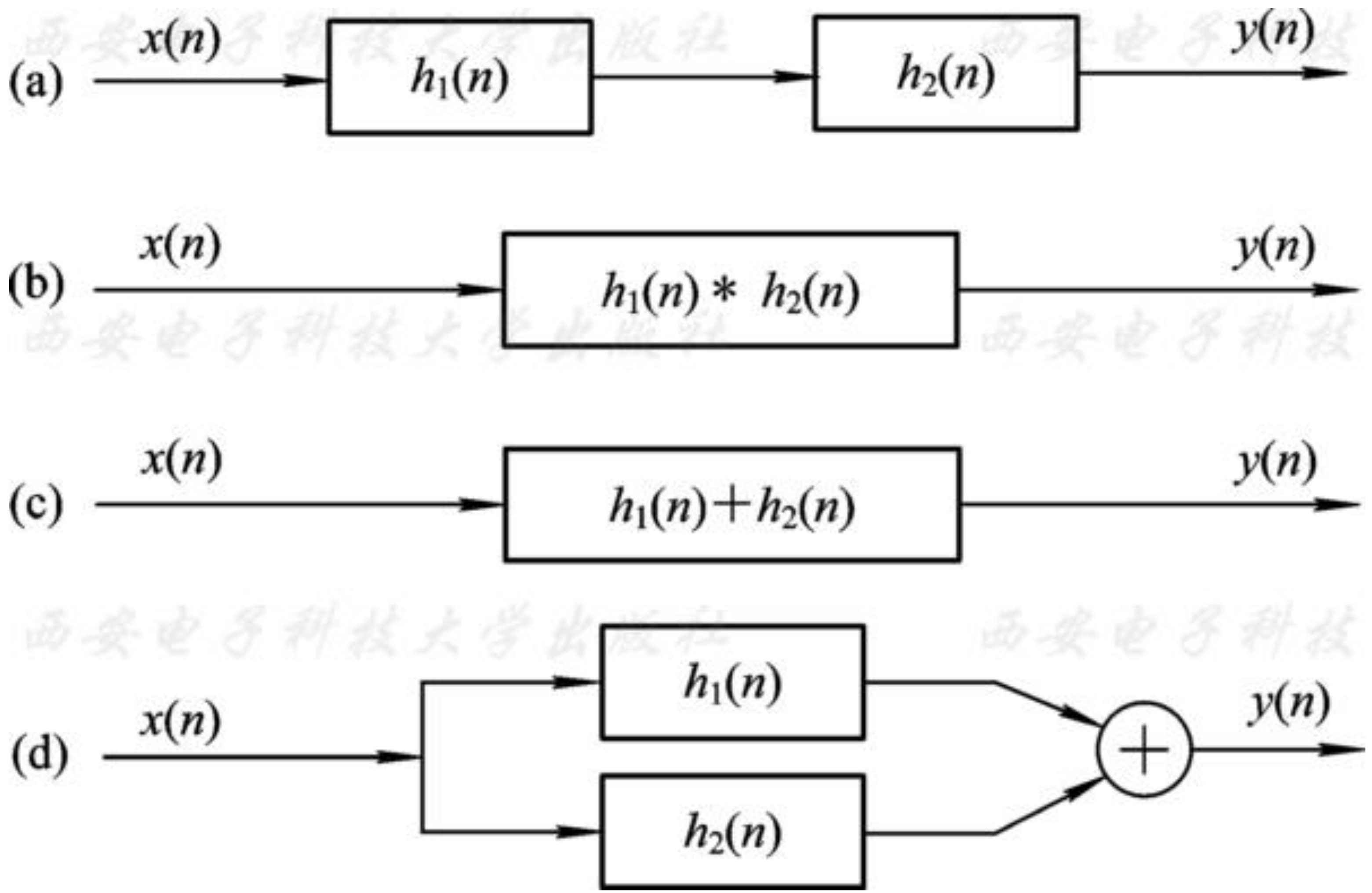


图1.3.3　卷积的结合律和分配律

4、 $$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)=x(n)*\delta(n)$$

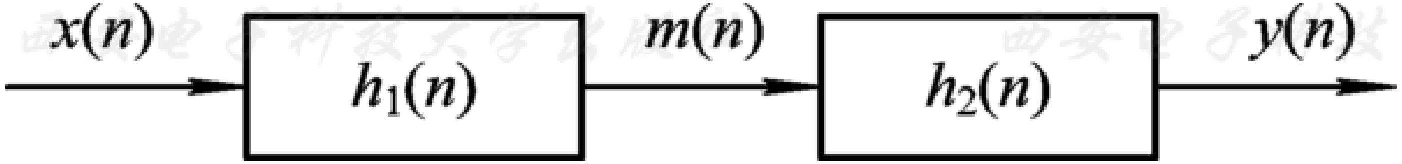
$$x(n)*\delta(n-n_0)=x(n-n_0)$$

5、若$\boldsymbol{x(n)=x_1(n)*x_2(n)}$

则$\boldsymbol{x(n-k_1-k_2)=x_1(n-k_1)*x_2(n-k_2)}$

$$\boldsymbol{=x_2(n-k_1)*x_1(n-k_2)}$$

【例1.3.6】 在图1.3.4中，$h_1(n)$系统与$h_2(n)$系统级联，设



$$x(n) = u(n)$$

$$h_1(n) = \delta(n) - \delta(n-4)$$

$$h_2(n) = a^n u(n), \qquad |a| < 1$$

求系统的输出$y(n)$和等效系统的单位冲激响应$h(n)$。

解　先求第一级的输出**$m(n)$**，再求**$y(n)$**。

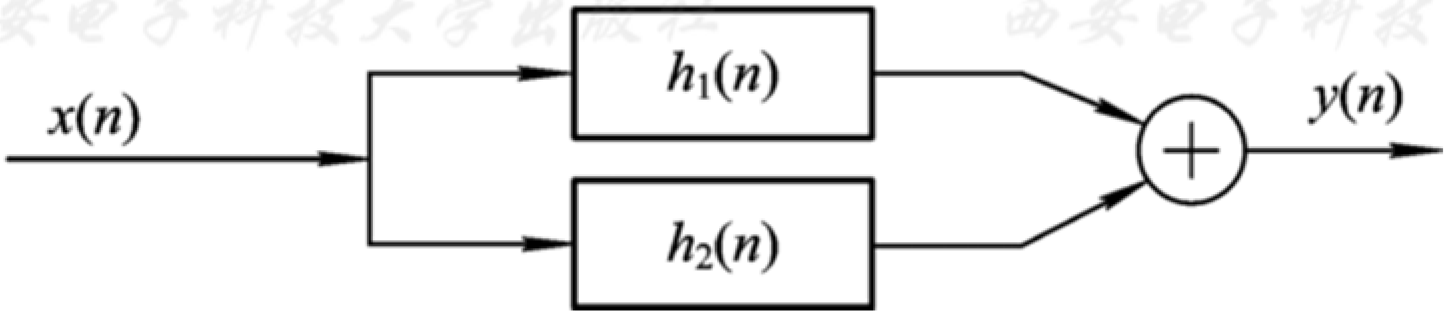
$$
\begin{aligned}
m(n) &= x(n) * h_1(n) \\
&= u(n) * [\delta(n) - \delta(n-4)] \\
&= u(n) * \delta(n) - u(n) * \delta(n-4) \\
&= u(n) - u(n-4) \\
&= R_4(n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(n) &= m(n) * h_2(n) \\
&= R_4(n) * a^n u(n) \\
&= a^n u(n) * [\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \delta(n-3)] \\
&= a^n u(n) + a^{n-1} u(n-1) + a^{n-2} u(n-2) + a^{n-3} u(n-3) \\
&= \sum_{i=0}^{3} a^{n-i} u(n-i)
\end{aligned}
$$

下面求单位冲激响应$h(n)$:

$$
\begin{aligned}
h(n) &= h_1(n) * h_2(n) \\
&= \left[\delta(n) - \delta(n-4)\right] * a^n u(n) \\
&= a^n u(n) - a^{n-4} u(n-4)
\end{aligned}
$$

【例】 如图所示：$h_1(n)$系统与$h_2(n)$系统并联



$$x(n) = a^n u(n) \qquad |a| < 1$$

$$h_1(n) = R_2(n)$$

$$h_2(n) = R_2(n-2)$$

求系统的输出$y(n)$和等效系统的单位冲激响应$h(n)$ 。

解：

$$h(n)=h_1(n)+h_2(n)$$
$$=R_2(n)+R_2(n-2)$$
$$=R_4(n)$$
$$y(n)=x(n)*h(n)$$
$$=a^n u(n)*R_4(n)$$
$$=a^n u(n)*\left[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)\right]$$
$$=a^n u(n)+a^{n-1}u(n-1)+a^{n-2}u(n-2)+a^{n-3}u(n-3)$$
$$=\sum_{i=0}^{3}a^{n-i}u(n-i)$$

1.3.4　系统的因果性和稳定性

如果系统n时刻的输出只取决于n时刻以及n时刻以前的输入序列，而和n时刻以后的输入序列无关，则称该系统具有因果性质，或称该系统为因果系统。

如果n时刻的输出还取决于n时刻以后的输入序列，在时间上违背了因果性，系统无法实现，则系统被称为非因果系统。

因此系统的因果性是指系统的可实现性。

线性时不变系统具有因果性的充分必要条件是系统的单位脉冲响应满足下式：

$$h(n)=0, \quad n<0$$

满足上式的序列称为因果序列，因此因果系统的单位脉冲响应必然是因果序列。

所谓稳定系统，是指对有界输入，系统输出也是有界的。

系统稳定的充分必要条件是系统的单位脉冲响应绝对可和，用公式表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

【例1.3.7】　设线性时不变系统的单位系统脉冲响应$h(n)=a^n u(n)$，式中a是实常数，试分析该系统的因果和稳定性。

解　由于$n<0$时，$h(n)=0$，因此系统是因果系统。

下面分析稳定性.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\sum_{n=0}^{\infty}|a|^n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1}|a|^n=\lim_{N\to\infty}\frac{1-|a|^N}{1-|a|}$$

只有当$|a|<1$时, 才有 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=\frac{1}{1-|a|}$

因此系统稳定的条件是$|a|<1$；否则，$|a|\geq 1$时，系统不稳定。

1.4　时域离散系统的输入输出描述法 ——线性常系数差分方程

描述一个系统时，可以不管系统内部的结构如何，将系统看成一个黑盒子，只描述或者研究系统输出和输入之间的关系，这种方法称为输入输出描述法。

模拟系统——微分方程。

时域离散系统——差分方程。

线性时不变时域离散系统——线性常系数差分方程。

1.4.1　线性常系数差分方程

一个*N*阶线性常系数差分方程用下式表示：

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)$$

或者

$$\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)\qquad a_0=1$$

差分方程的阶数是用方程 ***y*(*n* - *i*)**项中***i***的取值最大与最小之差确定的。

1.4.2 线性常系数差分方程的求解

已知系统的输入序列，通过求解差分方程可以求出输出序列。求解差分方程的基本方法有以下三种：

（1）经典解法。这种方法类似于模拟系统中求解微分方程的方法，它包括齐次解与特解，由边界条件求待定系数。信号与系统里详细介绍过。

（2）递推解法。这种方法简单，且适合用计算机求解，但只能得到数值解，但函数表达式需要自己总结。

（3）变换域方法。这种方法是将差分方程变换到z域进行求解，方法简便有效，这部分内容放在第2章学习。

MATLAB 信号处理工具箱提供的filter函数实现线性常系数差分方程的递推求解，调用格式如下：

yn=filter(B, A, xn)　计算系统对输入信号向量xn的零状态响应输出信号向量yn，yn与xn长度相等，其中，B和A是差分方程的系数向量，即

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) \qquad a_0 = 1$$

$B=[b_0, b_1, \ldots, b_M]$, $A=[a_0, a_1, \ldots, a_N]$

其中$a_0=1$，如果$a_0\neq1$，则filter用a_0对系数向量B和A归一化。

yn=filter(B, A, xn，xi) 计算系统对输入信号向量**xn**的全响应输出信号**yn**。所谓全响应，就是由初始状态引起的零输入响应和由输入信号**xn**引起的零状态响应之和。其中, **xi**是等效初始条件的输入序列，所以**xi**是由初始条件确定的。**MATLAB**信号处理工具箱提供的**filtic**就是由初始条件计算**xi**的函数, 其调用格式如下:

xi=filtic(B, A, ys, xs)

其中，**ys**和**xs**是初始条件向量：**ys=［y(-1)，y(-2)，y(-3)，…，y(-N)］，xs=［x(-1)，x（-2），x(-3)，…，x(-M)］**。如果**xn**是因果序列，则**xs=0**，调用时可缺省**xs.**

例：LTIS的差分方程 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=x(n)$

已知$x(n)=(2)^n u(n)$ $\quad y(-1)=1, y(-2)=-1$

求系统的零状态响应，零输入响应和全响应

解答

$$y_{zi}(n)=\left(-(-1)^n\right)u(n)$$

$$y_{zs}(n)=\left(-\tfrac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\tfrac{1}{3}2^n\right)u(n)$$

$$y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$$

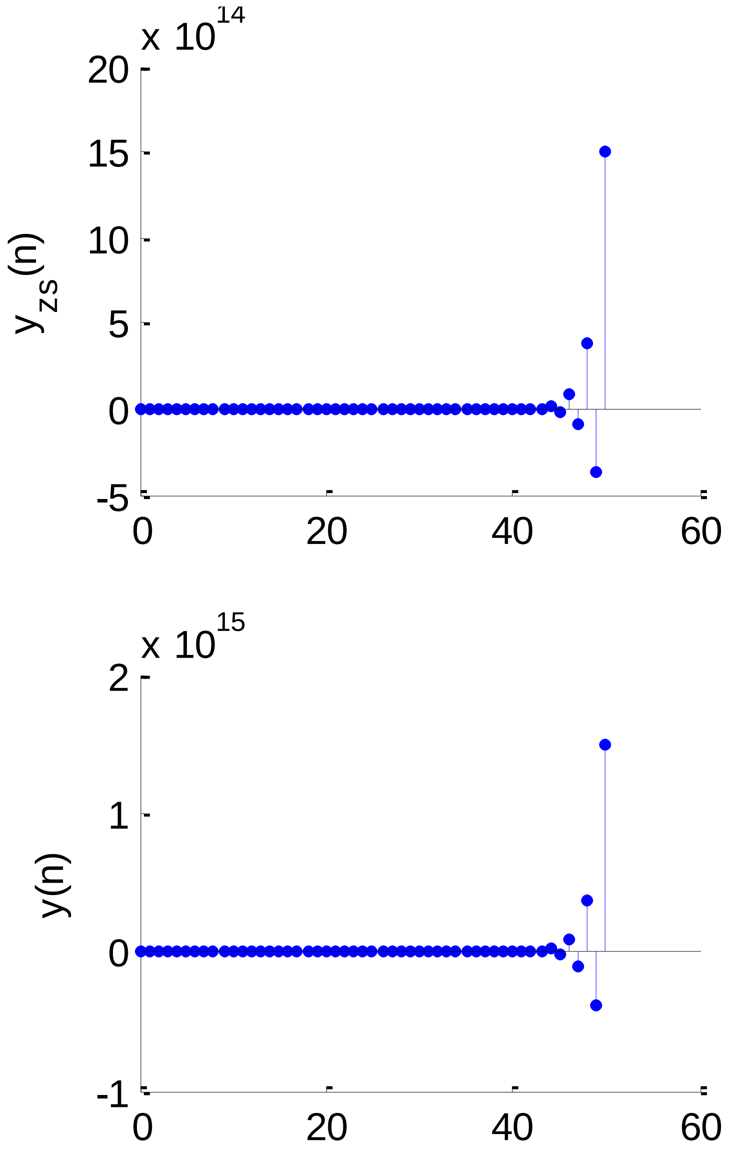
$$=-(-1)^n u(n)+\left(-\tfrac{1}{3}(-1)^n+(-2)^n+\tfrac{1}{3}2^n\right)u(n)$$

$$=\left(-\tfrac{4}{3}(-1)^n+(-2)^n+\tfrac{1}{3}2^n\right)u(n)$$

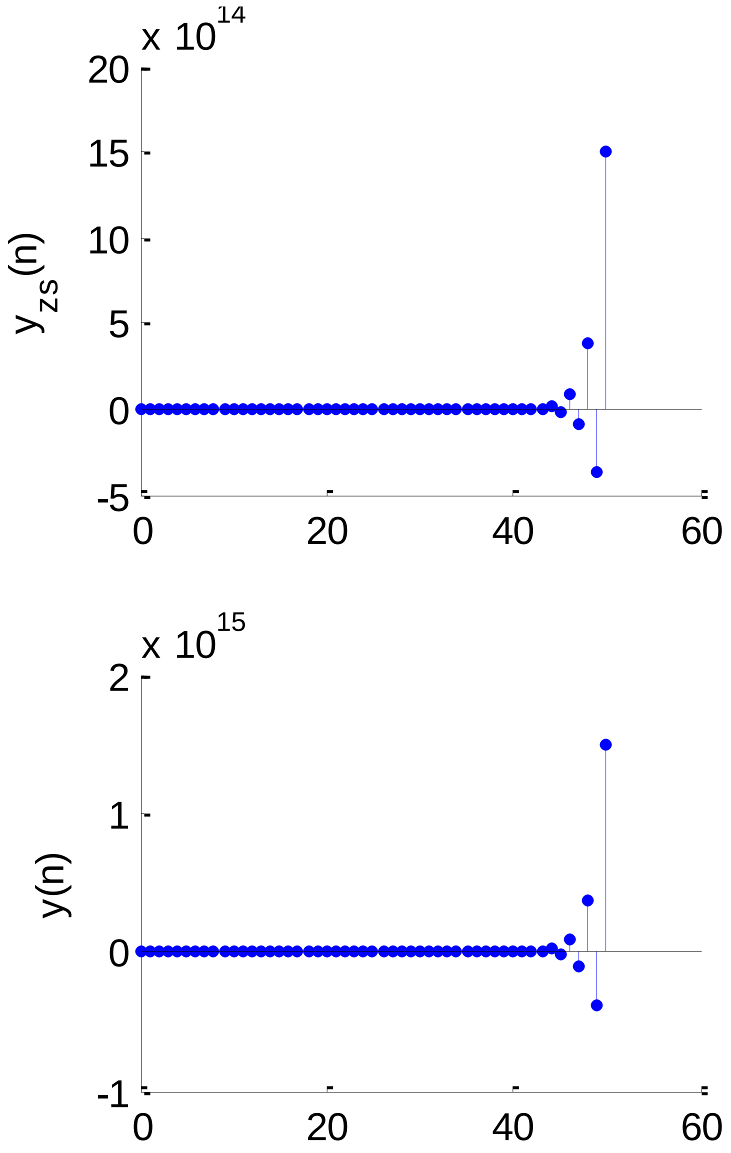
```
B=[1];
A=[1 3 2];
n=0:50;
xn=2.^n;
yzsn1=filter(B,A,xn);
yzsn2=(-1/3)*((-1).^n)+(-
2).^n+(1/3*2.^n);
subplot(2,2,1);stem(n,yzsn1,'.');
title('迭代求解结果');
ylabel('y_z_s(n)');
subplot(2,2,2);stem(n,yzsn2,'.');
title('计算求解结果');
ylabel('y_z_s(n)');
```

```
xi=filtic(B,A,[1 -1]);
yn1=filter(B,A,xn,xi);
yn2=(-4/3)*((-1).^n)+(-
    2).^n+(1/3*2.^n);
subplot(2,2,3);
stem(n,yn1,'.');
ylabel('y(n)');
subplot(2,2,4);
stem(n,yn2,'.');
ylabel('y(n)');
```

迭代求解结果



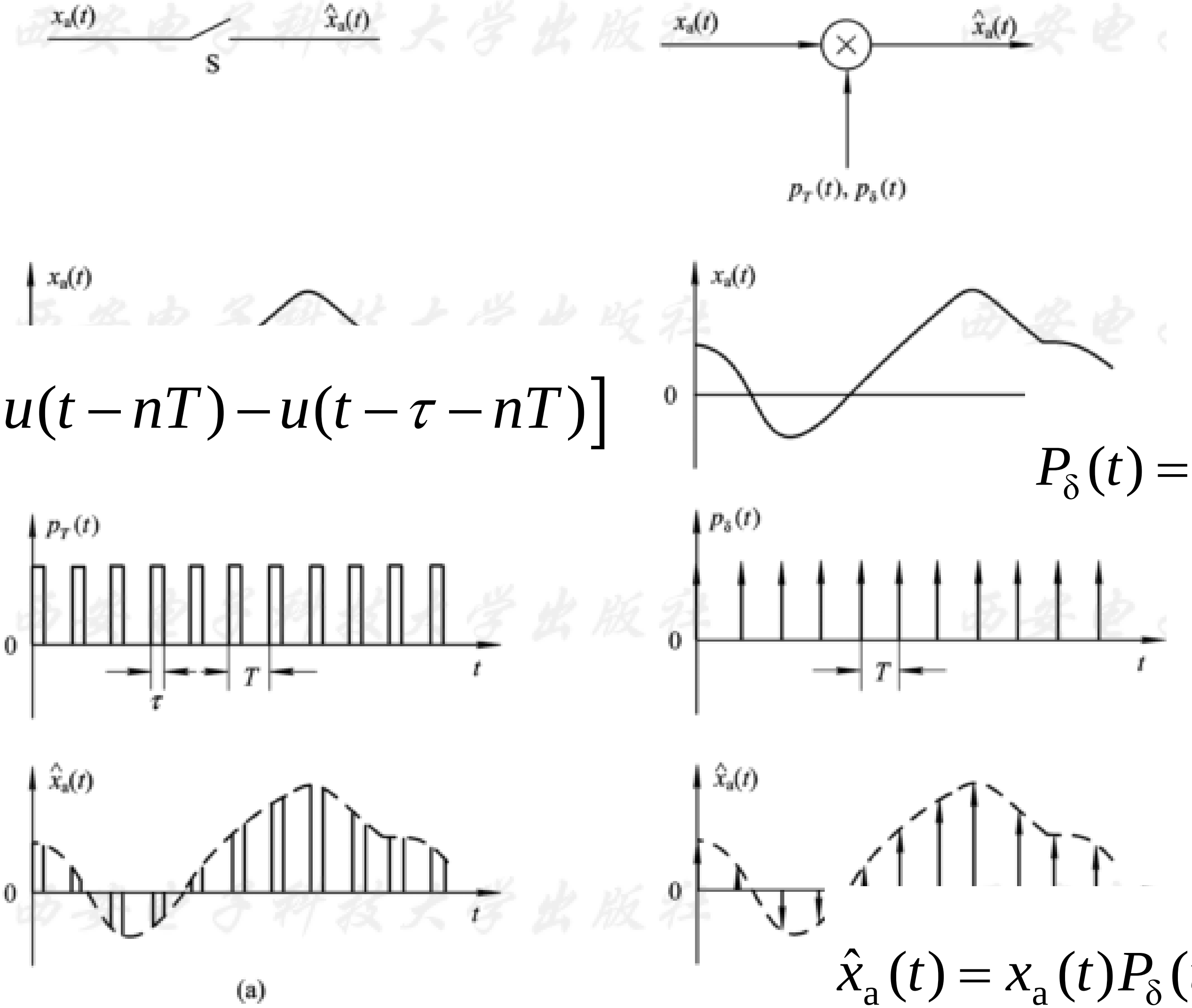
计算求解结果



1.5　模拟信号数字处理方法

图1.5.1　模拟信号数字处理框图

1.5.1 采样定理及A/D变换器



$$P_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[u(t-nT)-u(t-\tau-nT)\right]$$

$$P_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$\hat{x}_a(t)=x_a(t)P_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT)$$

图1.5.2　对模拟信号进行采样

$$P_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$\boxed{P_\delta(\mathrm{j}\Omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)}$$

式中，$\Omega_s=2\pi/T$，称为采样角频率，单位是rad/s。

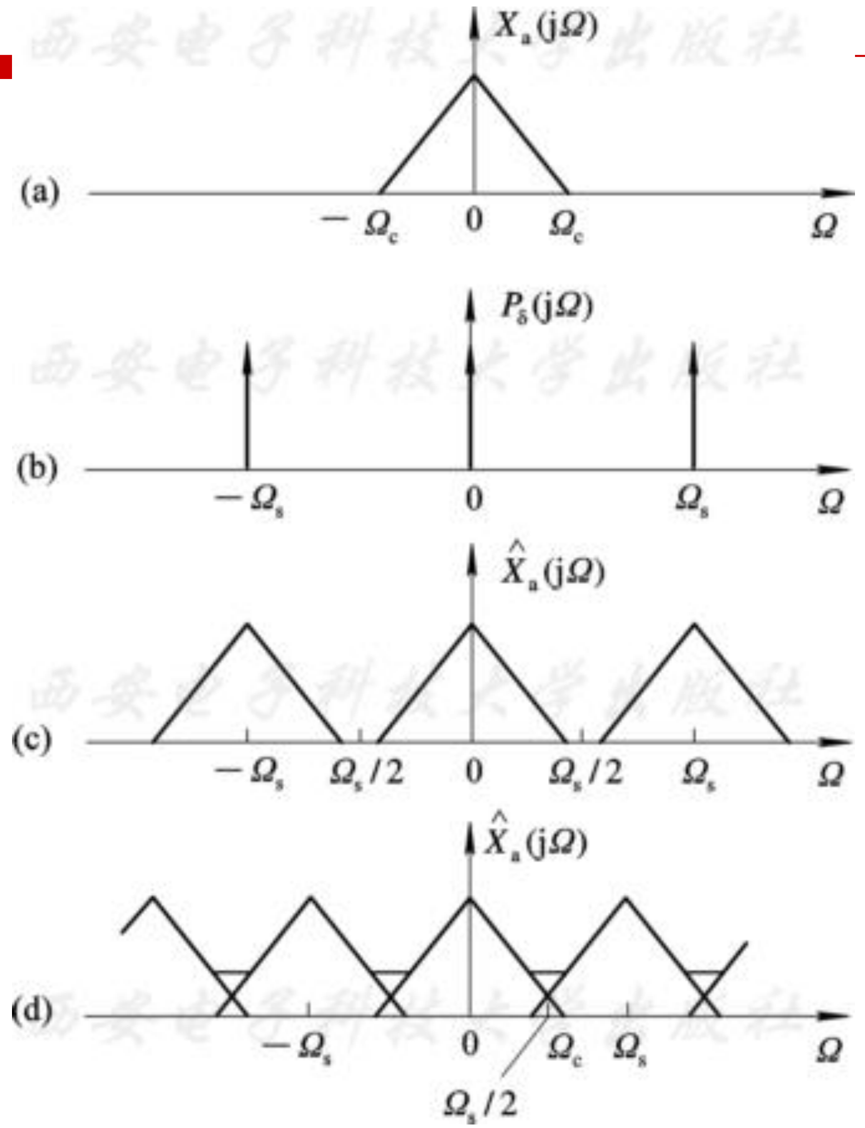
$$\hat{x}_a(t)=x_a(t)P_\delta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

$$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_a(\mathrm{j}\Omega)*P_\delta(\mathrm{j}\Omega)$$

$$=\frac{1}{2\pi}X_a(\mathrm{j}\Omega)*\left(\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_s)\right)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}k\Omega_s)$$

理想采样信号的频谱是原模拟信号的频谱以Ω_s为周期，进行周期性延拓而成的。



$\Omega_s \geq 2\Omega_c$

$\Omega_s < 2\Omega_c$

图1.5.3　采样信号的频谱

恢复原信号

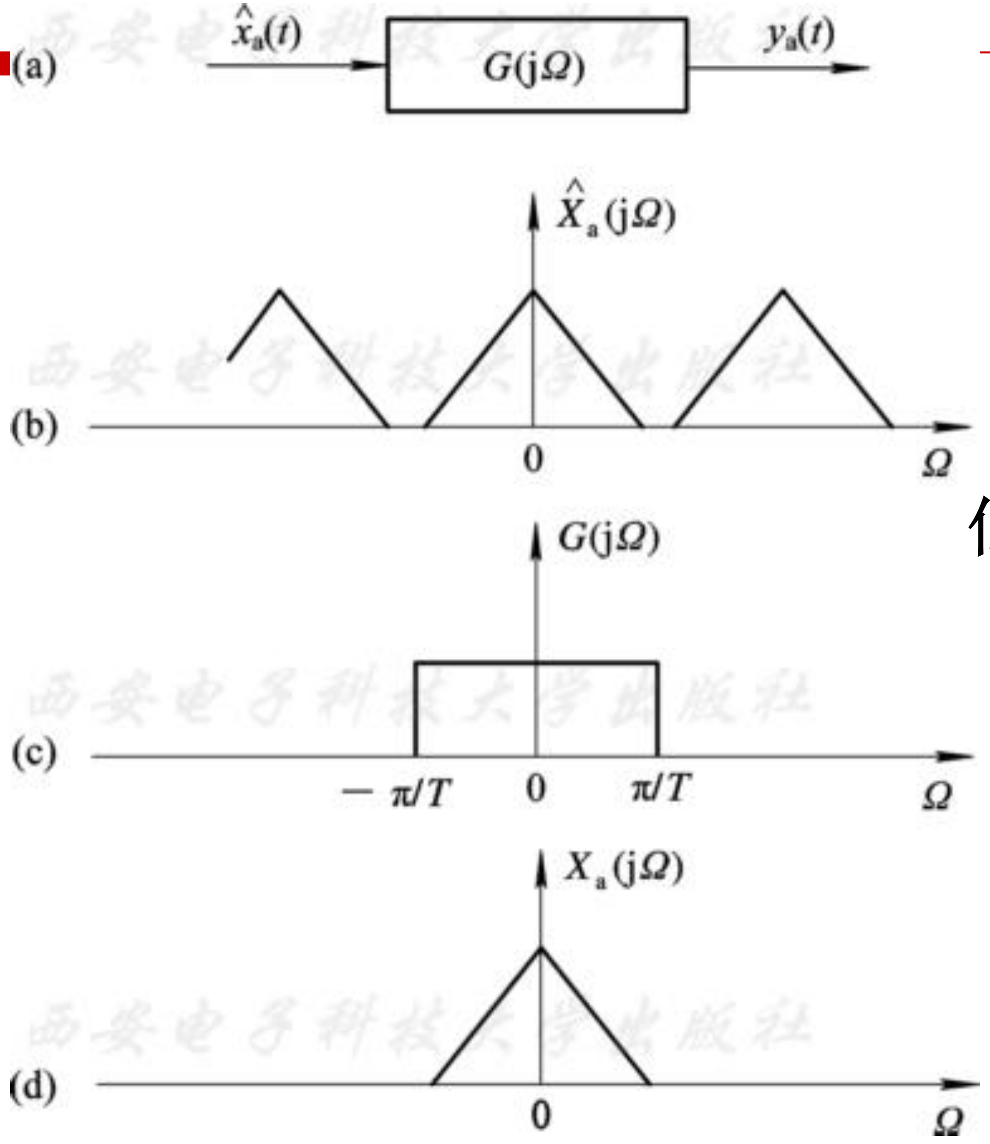


图1.5.4　采样恢复

低通滤波器 $G(j\Omega)=\begin{cases} T & |\Omega|<\frac{1}{2}\Omega_s \\ 0 & |\Omega|\geq\frac{1}{2}\Omega_s \end{cases}$

$$Y_a(j\Omega)=\mathrm{FT}[y_a(t)]=\hat{X}_a(j\Omega)\bullet G(j\Omega)$$

$$y_a(t)=\mathrm{FT}^{-1}[Y_a(j\Omega)]$$

$$y_a(t)=x_a(t)\qquad \Omega_c\leq\frac{1}{2}\Omega_s$$

$$y_a(t)\neq x_a(t)\qquad \Omega_c>\frac{1}{2}\Omega_s$$

采样定理叙述如下：

（1） 对连续信号进行等间隔采样形成采样信号

$$\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)=x_{\mathrm{a}}(t)P_{\delta}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(t)\delta(t-nT)$$

$$\hat{X}_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}k\Omega_{\mathrm{s}})$$

（2） 设连续信号$x_a(t)$属带限信号，最高截止频率为Ω_c;

采样角频率$\Omega_s \geq 2\Omega_c$，那么让采样信号 $\hat{x}_a(t)$通过一个增益为T、 截止频率为$\Omega_s/2$的理想低通滤波器，可以唯一地恢复出原连续信号$x_a(t)$。

否则, $\Omega_s<2\Omega_c$会造成采样信号中的频谱混叠现象，不可能无失真地恢复原连续信号。

一般称$F_s/2$为折叠频率，只有当信号最高频率不超过$F_s/2$时，才不会产生频率混叠现象，否则超过$F_s/2$的频谱会折叠回来而形成混叠现象，因此频率混叠在$F_s/2$附近最严重。

抗混叠的低通滤波器，滤去高于$\Omega_s/2$的一些无用的高频分量，以及滤除其它的一些杂散信号。这就是在图1.5.1中采样之前加预滤的原因。

抽样频率f_s=44,100 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz

抽样频率f_s=5,512 Hz, 有抗混叠滤波

采样定理表示的是采样信号$\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)$的频谱与原模拟信号$\boldsymbol{x_{\mathrm{a}}(t)}$的频谱之间的关系，以及由采样信号不失真地恢复原模拟信号的条件。

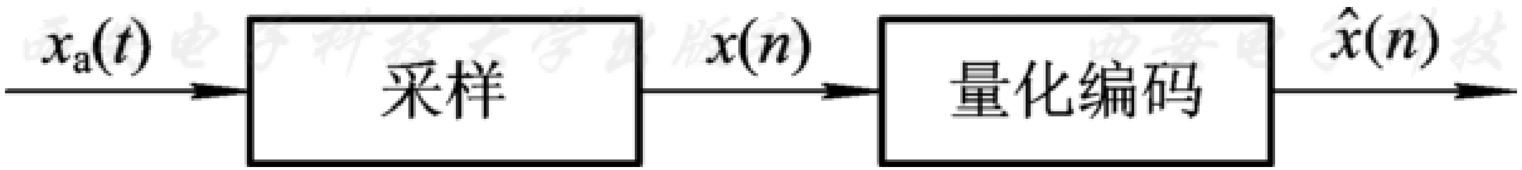
$$\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)\delta(t-nT)$$

时域离散信号（序列）$\boldsymbol{x(n)}$只有在$\boldsymbol{n}$为整数时才有定义，否则无定义，

$$\boldsymbol{x(n)=x_{\mathrm{a}}(nT)}$$

因此采样信号和时域离散信号不相同，但二者的频谱相同（见**2.4**节）。

模数转换器(Analog/Digital Converter, A/DC）：



采样得到的是时域离散信号。设A/DC有M位，那么用M位二进制数表示这一串样本数据，即形成数字信号。因此，采样以后到形成数字信号的这一过程是一个量化编码的过程。

若时域离散信号为

$$x(n)=\{\ \ldots,\ \underline{0.382\ 683,}\ 0.923\ 879,\ -0.382\ 683,\ -0.923\ 879,\ \ldots\ \}$$

用M=6进行量化编码，即上面的采样数据均用6位二进制码表示，其中一位为符号位，则数字信号用 $\hat{x}(n)$ 表示：

$$\hat{x}(n)=\{\ \ldots\ ,\ \underline{0.01100},\ 0.11101,\ 1.01100,\ 1.11101,\ \ldots\ \}$$

用十进制数表示的$\hat{x}(n)$为

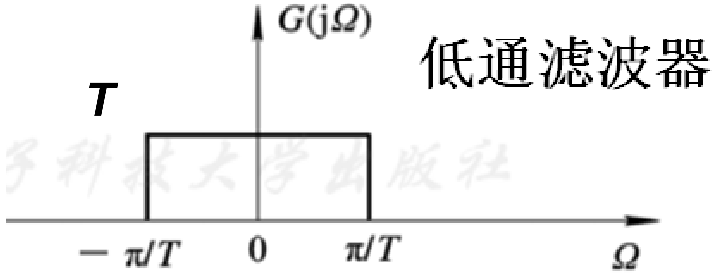
$$\hat{x}(n)=\{\ \ldots\ ,\ \underline{0.375\ 00},\ 0.906\ 25,\ -0.375\ 00,\ -0.906\ 25,\ \ldots\ \}$$

显然量化编码以后的$\hat{x}(n)$和原$x(n)$不同。这样产生的误差称为量化误差，这种量化误差的影响称为量化效应。

1.5.2 将数字信号转换成模拟信号

前面从$\hat{x}_a(t)$中恢复出$x_a(t)$是利用理想低通滤波器。

低通滤波器的传输函数$G(j\Omega)$推导其单位冲激响应$g(t)$：



$$g(t)=\frac{\sin(\Omega_s t/2)}{\Omega_s t/2}$$

因为 $\Omega_s=2\pi F_s=2\pi/T$，因此$g(t)$也可以用下式表示：

$$g(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

理想低通滤波器的输入、输出分别为$\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)$和$y_{\mathrm{a}}(t)$，

$$y_{\mathrm{a}}(t)=\hat{x}_{\mathrm{a}}(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_{\mathrm{a}}(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)\delta(\tau-nT)\right]g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)\delta(\tau-nT)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)g(t-nT)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)\frac{\sin(\pi(t-nT)/T)}{\pi(t-nT)/T}$$

由于满足采样定理，$y_a(t)=x_a(t)$，因此得到：

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

$g(t)$保证了在各个采样点上，即$t=nT$时，恢复的$x_a(t)$等于原采样值，而在采样点之间，则是各采样值乘以$g(t-nT)$的波形伸展叠加而成的。

$$x_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

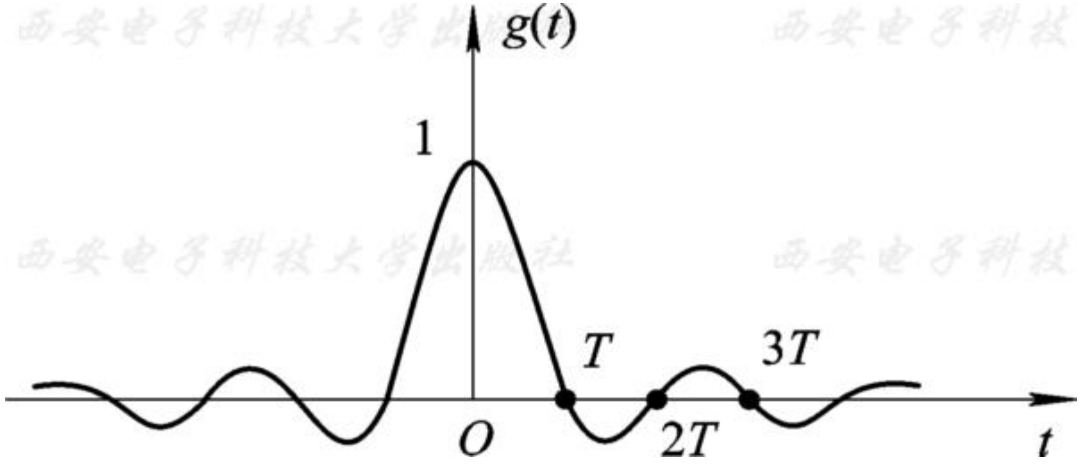


图1.5.6　内插函数g(t)波形

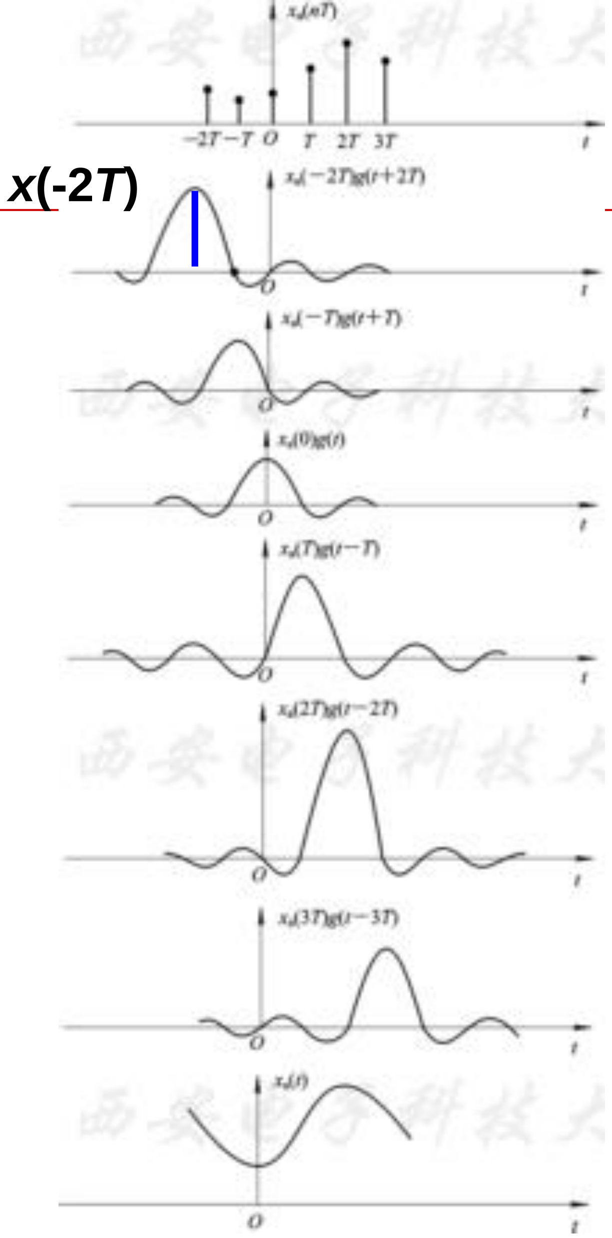


图1.5.7　理想恢复

$$x_{\mathrm{a}}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)g(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{\mathrm{a}}(nT)\frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

$g(t)$函数所起的作用是在各采样点之间内插，因此称为内插函数，而上式则称为内插公式。

这种用理想低通滤波器恢复的模拟信号完全等于原模拟信号$x_{\mathrm{a}}(t)$，是一种无失真的恢复。

但由于$g(t)$是非因果的，因此理想低通滤波器是非因果不可实现的。

下面介绍实际的数字信号到模拟信号的转换。

实际中采用**D/AC**（**Digital/Analog Converter**）完成数字信号到模拟信号的转换。**D/AC**包括三部分，即解码器、零阶保持器和平滑滤波器，**D/AC**方框图如图**1.5.8**所示。解码器的作用是将数字信号转换成时域离散信号$x_a(nT)$，零阶保持器和平滑滤波器则将$x_a(nT)$变成模拟信号。

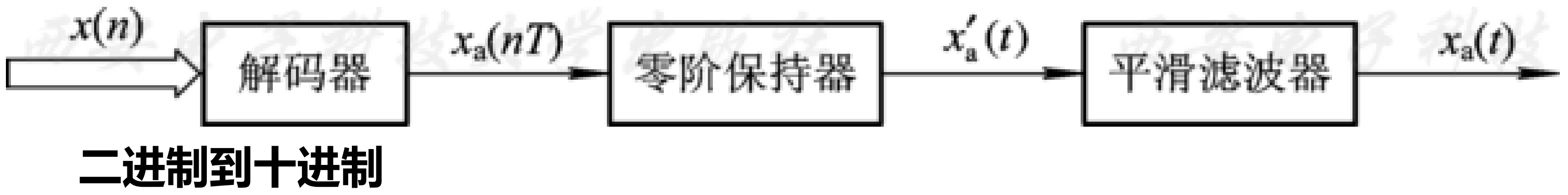


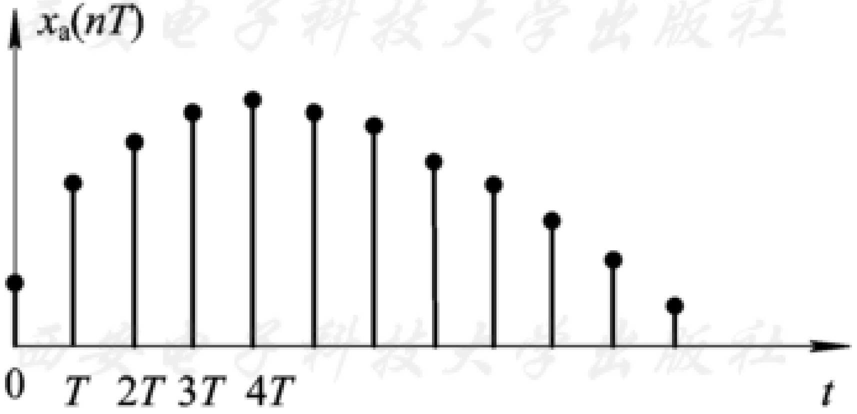
图**1.5.8**　　**D/AC**方框图

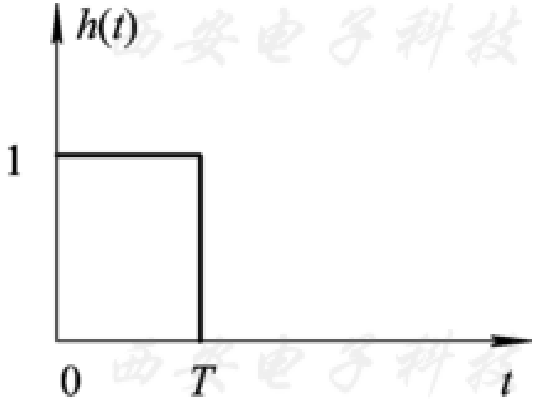
零阶保持器是将前一个采样值进行保持，一直到下一个采样值来到，再跳到新的采样值并保持，因此相当于进行常数内插。

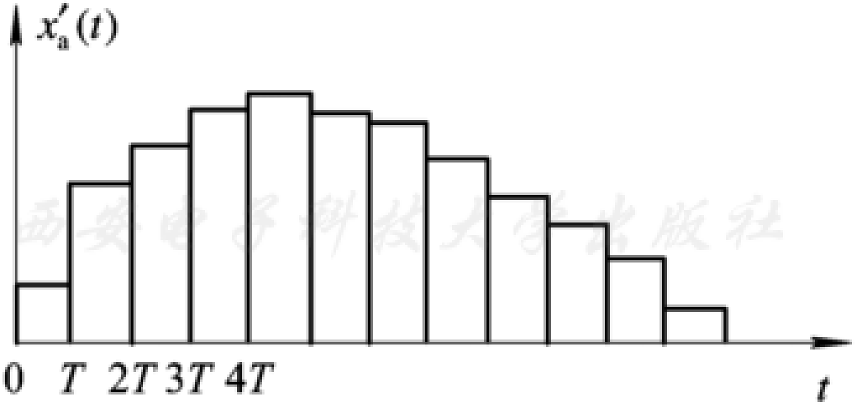
零阶保持器的单位冲激响应为：$h(t)=u(t)-u(t-T)$

$$\hat{x}_a(t)=x_a(t)P_\delta(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$







$$x'_a(t)=\hat{x}_a(t)*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)*\left[u(t)-u(t-T)\right]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\left[u(t-nT)-u(t-nT-T)\right]$$

图1.5.9　零阶保持器的输出波形

$$H(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t=\int_{0}^{T}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$$

$h(t)=u(t)-u(t-T)$

$$=T\frac{\sin(\Omega T/2)}{\Omega T/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega T/2}$$

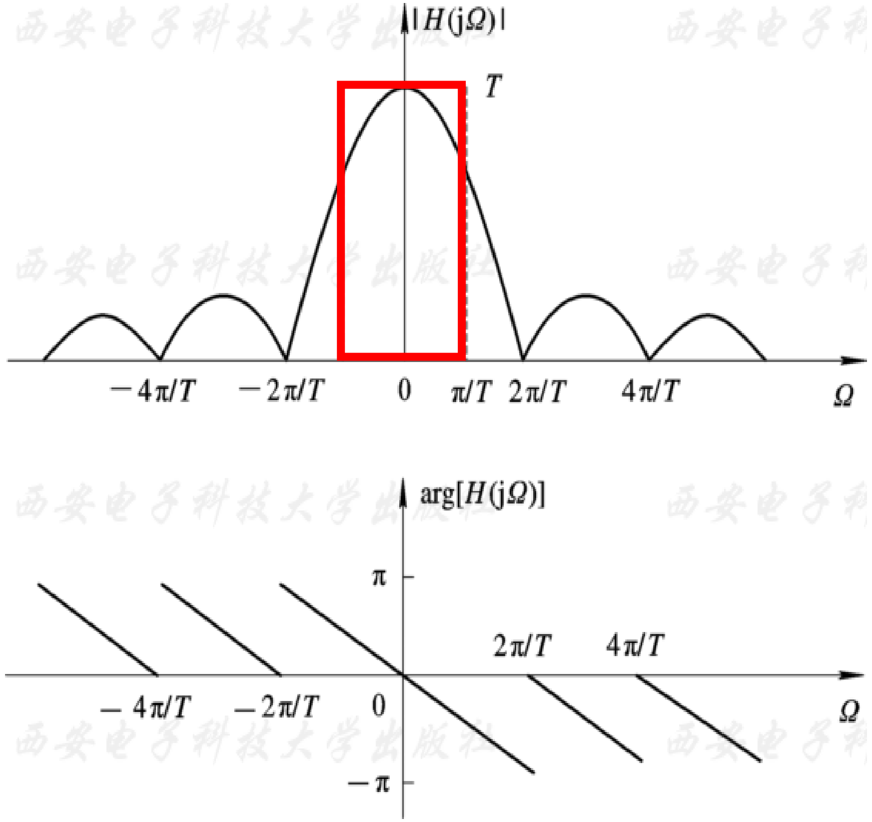


图 1.5.10　零阶保持器的频率特性

零阶保持器是一个低通滤波器。图中红线表示理想低通滤波器的幅度特性。零阶保持器的幅度特性与其有明显的差别，主要是在$|\Omega|>\pi/T$区域有较多的高频分量，表现在时域上，就是恢复出的模拟信号是台阶形的。

因此需要在**D/AC**之后加平滑低通滤波器，滤除多余的高频分量，对时间波形起平滑作用。

这也就是在模拟信号数字处理框中，最后加平滑滤波器的原因。

实际中，将解码器与零阶保持器集成在一起，就是工程上的**D/AC**器件。