课程导论

李修成

计算机科学与技术学院

课程简介

课程信息

- 课程名称：离散数学（Discrete Mathematics）
- 授课教师：李修成，信息楼 1906
- 课程 QQ 群：718329495
- 课程主页：https://xiucheng.org/assets/courses/discrete-math.html
- 学时：64（理论）+ 0（实验）
- 成绩：30% 作业 + 70% 考试

教材

- 指定教材：《离散数学》第二版，屈婉玲，耿素云，张立昂.
- 推荐参考：《离散数学及其应用》，肯尼思 · 罗森[1].

[1] *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kenneth H. Rosen.

基本内容

- 数理逻辑
- 集合论（set theory）
  - 集合的基本概念
  - 函数
  - 二元关系
- 图论（graph theory）
  - 图的基本概念
  - 有向图、无向图、平面图、树
  - 图的着色、匹配

学习动机

- 集合论是始于 19 世纪末康托（Cantor）与戴德金（Dedekind）的研究.
- 集合论是现代数学的基础语言，催生了一大批数学理论.
- 戴德金基于集合论定义了实数，为数学分析奠定了基础.
- 基于集合论发展出的测度论成为了勒贝格积分的基础；
- 科莫戈洛夫（Kolomogorov）使用测度论和勒贝格积分公理化了概率论.
- 基于集合论发展出的点集拓扑理论，开辟了更宽广的数学空间.
- 布尔巴基学派（Bourbaki）使用集合论和公理化体系重建了现代数学.

学习动机

对计算机科学而言，集合论是进行抽象化和形式化描述的基础语言，是我们后续学习

- 图论
- 算法与数据结构
- 形式语言、编译原理
- 数据库的基础.

学习动机

- 图是我们描述和建模非欧式结构化数据（non-Euclidean structured data）的标准工具.
- 图论既是数学的分支也是理论计算机的主要研究对象，图上的算法应用极其宽广.
- 从传统的道路网络、社交网络、流量网络、最优匹配到推荐算法、知识图谱，
- 与深度学习融合产生的图神经网络，是 AI4Science，如
  - 气象预测
  - 蛋白质结构推断
  - 分子性质预测
  - 新药物（靶向药物、抗体）研发等的基础工具.

命题与逻辑

命题与其表示

- 命题（proposition）是一个可以判断真伪的声明式语句（declarative sentence），
- 其要么为真，要么为假，不能既真也假.

例子 2.1 (命题).

- 北京是中国的首都.
- $1 + 1 = 2$.
- $2 + 2 = 3$.

例子 2.2 (非命题).

- 现在是几点?
- 请把门打开.
- $x + 1 = 2$.

- 我们通常用字母 $p, q, r, s, \ldots$ 来表示命题.
- 如果一个命题为真命题，我们称其真值（truth value）为真，记为 T (True).
- 如果一个命题为假命题，我们称其真值（truth value）为假，记为 F (False).

定义 ***2.1.*** 令 p 为命题，命题的否定式（negation），“not p”，记作 $\neg p$. $\neg p$ 的真值为命题 p 真值的取反.

- p : Tom's PC runs Linux; $\neg p$: Tom's PC does not run Linux.
- $p : 1 + 1 = 2$; $\neg p : 1 + 1 \neq 2$.

命题与其表示

定义 2.2. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的合取式（conjunction）为命题 "p and q"，记作 $p \wedge q$. $p \wedge q$ 为真当 p, q 同时为真，否则为假.

定义 2.3. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的析取式（disjunction）为命题 "p or q"，记作 $p \vee q$. $p \vee q$ 为假当 p, q 同时为假，否则为真.

我们可以用一个表来枚举命题真值的各种可能，该表被称为真值表（truth table）.

合取式真值表		
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

析取式真值表		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

命题与其表示

定义 2.4. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的异或命题（exclusive or）为真当且仅当 p, q 其中一个为真另一个为假，否则命题为假，记作 $p \oplus q$.

定义 2.5. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的蕴含式（conditional statement）定义为 "if p, then q"，记为 $p \to q$. p 称为蕴含式的前件，q 称为蕴含式后件. 条件语句 $p \to q$ 只有当 p 为真 q 为假时为假，其他情况都为真.

异或真值表

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

蕴含式真值表

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- 条件语句 $p \to q$ 在英文中有多种表达,
- "if p, q", "q if p", "q when p"
- "p is sufficient for q"
- "q is a necessary condition for p"
- "q unless $\neg p$"

例子 *2.3.*

- "If I am elected, then I will lower taxes."
- "I will lower taxes when I am elected."
- "I will lower taxes unless I am not elected."

定义 2.6. 令 p 与 q 为命题. p 与 q 的等价式（biconditional statement）定义为 “p if and only if q”，记作 $p \leftrightarrow q$. 当 p 与 q 有相同的真值时，命题 $p \leftrightarrow q$ 为真，否则为假.

- $p \leftrightarrow q$ 在英文中的常见表达，
- “p is necessary and sufficient for q”
- “if p then q, and conversely”
- “p iff q”, “p exactly when q”

等价式真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

命题与其表示

给定命题 $p \to q$，其

- 逆命题（converse）为 $q \to p$,
- 否命题（inverse）为 $\neg p \to \neg q$,
- 逆否命题（contrapositive）为 $\neg q \to \neg p$.

一个命题与其逆否命题等价.

复合命题（compound proposition）的真值表

例子 2.4 (复合命题). 构造 $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$ 的真值表.

思路：这是一个条件命题，条件和结论分别是合取式和析取式，合取式里面又带有否定命题. 因此，我们可以从 p, q 出发，从里向外，先构造否定命题，然后构造析取式和合取式，最后是条件命题.

$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$ 的真值表.					
p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0

逻辑运算符的优先级

- 通过例子2.4，我们可以总结出如下逻辑算符优先级（precedence），
- “否定”优先于“与或”优先于“条件”.

逻辑算符优先级.

Operator	Precedence
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

命题的逻辑等价性

定义 ***2.7.*** 复合命题 p 与 q 被称为逻辑等价（logically equivalent）如果二者有相同的真值，记为 $p \equiv q$.

例子 ***2.5.*** 使用真值表验证 $\neg p \vee q \equiv p \to q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

命题的逻辑等价性

定理 ***2.1 (De Morgan Laws).***

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

证明. 使用真值表验证 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

命题的逻辑等价性

Equivalence	Name
$p \wedge \mathbf{1} \equiv p$ $p \vee \mathbf{0} \equiv p$	Identity laws 同一律
$p \vee \mathbf{1} \equiv \mathbf{1}$ $p \wedge \mathbf{0} \equiv \mathbf{0}$	Domination laws 支配律
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws 幂等律
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law 双重否定

逻辑等价性

Equivalence	Name
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws 交换律
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws 结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws 分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws 吸收律
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{0}$	Negation laws 否定律

谓词（predicate）是用来刻画个体词性质及个体词之间关系的词. 考虑如下陈述句:

1. $\sqrt{2}$ 是无理数.
2. x 是有理数.

- 在 (1) 中, $\sqrt{2}$ 是个体常项, “是无理数” 为谓词, 整个陈述句可以表示为 $P(\sqrt{2})$;
- 在 (2) 中, x 是个体变项, 整个陈述句可以表示为 $P(x)$;
- 更一般的, $P(x)$ 表示 x 具有性质 P;
- n 元谓词 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 表示 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足性质 P.

例子 *2.6.* 令 $P(x)$ 表示语句 "$x > 3$". 那么 $P(4)$ 和 $P(2)$ 的真值是什么?

$P(4)$ 和 $P(2)$ 的分别代表陈述 $4 > 3$ 和 $2 > 3$，故 $P(4)$ 为真，$P(2)$ 为假.

例子 *2.7.* 令 $P(x, y)$ 表示语句 "$x = y + 3$". 那么 $P(1, 2)$ 和 $P(3, 0)$ 的真值是什么?

$P(1, 2)$ 和 $P(3, 0)$ 的分别代表陈述 $1 = 2 + 3$ 和 $3 = 0 + 3$，故 $P(1, 2)$ 为假，$P(3, 0)$ 为真.

一阶逻辑

定义 *2.8 (*全称量词*)*. 全称量词（universal quantification）$P(x)$ 为语句，“$P(x)$ for all values of x in the domain.” 记作 $\forall x P(x)$，读作 “for all $xP(x)$”.

例子 *2.8*. 令 $P(x)$ 表示语句 “$x < x + 1$”, x 的定义域为实数. 那么全称量词 $\forall x P(x)$ 的真值为?

定义 *2.9 (*存在量词*)*. 存在量词（existential quantification）$P(x)$ 为语句，“There exists an element x in the domain such that $P(x)$.” 记作 $\exists x P(x)$.

例子 *2.9*. 令 $P(x)$ 表示语句 “$x > 3$”, x 的定义域为实数. 那么量词 $\exists x P(x)$ 的真值为?

- $\forall, \exists$ 比逻辑运算符有更高的优先级.
- 因此 $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 表示 $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$ 而不是 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$.

一阶逻辑

- 考虑陈述“每个离散数学课堂上的同学都上过微积分”．
- 令 $P(x)$ 表示“x 上过微积分”，定义域为离散课堂上的学生，$\forall x P(x)$
- 上述陈述的否定 $\neg\forall x P(x)$ 表示什么？
- “存在离散数学课堂上的同学没有上过微积分”．
- 更一般的，我们有

$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x).$$

一阶逻辑

- 考虑陈述“离散数学课堂上有同学自学过数学分析”.
- 令 $P(x)$ 表示“x 自学过数学分析”，定义域为离散课堂上的学生，$\exists x P(x)$.
- 上述陈述的否定 $\neg\exists x P(x)$ 表示什么?
- “离散数学课堂上的同学都没自学过数学分析”.
- 更一般的，我们有

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x).$$

例子 *2.10.* 陈述句 $\forall x\left(x^2 > x\right)$ 和 $\exists x\left(x^2 = 2\right)$ 的逻辑否定是什么?

- $\neg\forall x\left(x^2 > x\right) = \exists x \neg\left(x^2 > x\right) = \exists x\left(x^2 \leq x\right)$.
- $\neg\exists x\left(x^2 = 2\right) = \forall x \neg\left(x^2 = 2\right) = \forall x\left(x^2 \neq 2\right)$.

例子 *2.11.* 证明 $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$ 和 $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 是逻辑等价的.

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x(P(x) \to Q(x)) &\equiv \exists x(\neg(P(x) \to Q(x))) \\
&\equiv \exists x(\neg(\neg P(x) \vee Q(x))) \quad && \text{log. equiv. between } \to \text{ and } \vee \\
&\equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) && \text{De Morgan Laws.}
\end{aligned}
$$

小结

总结

The minimal material that is sufficient for our subsequent study in set and graph theory.