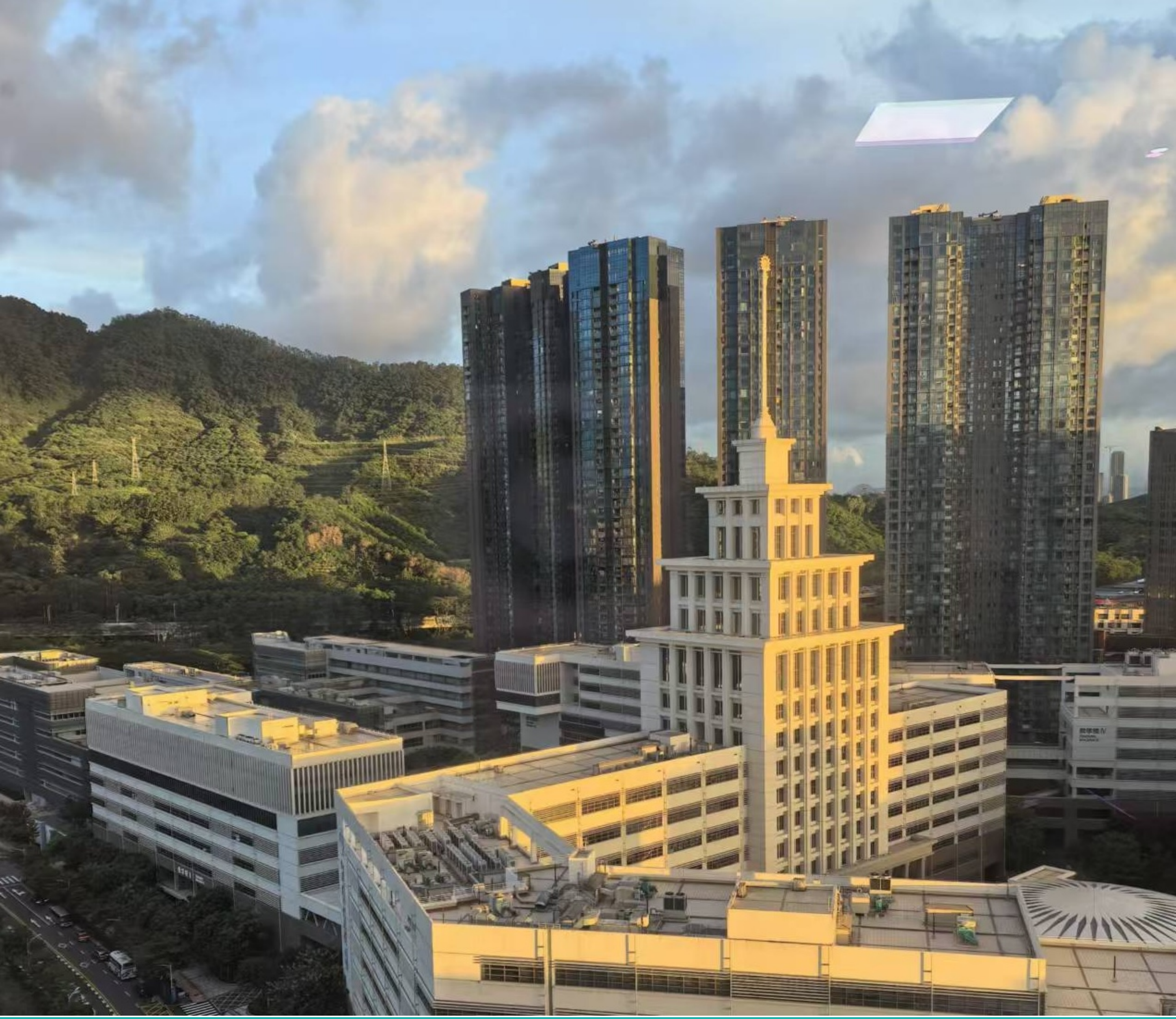


离散数学：补充阅读

作者：李修成 lixiucheng@hit.edu.cn

单位：计算机科学与技术学院

时间：2024/09/08

版本：0.1

目录

第一章 集合代数

内容提要

- 容斥原理 1.2
- 容斥原理推论 1.2

1.1 容斥原理

为证明容斥原理，我们先介绍二项式定理与其推论. 然后使用该推论计数任意元素 a 在容斥原理中被计数的次数.

定理 1.1 (二项式定理 Binomial Theorem)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1.1}$$

推论 1.1

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} = 1 \tag{1.2}$$

证明 令 Eq. 1.1 中 $x=-1, y=1$ 有，

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \Rightarrow 1 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1}.$$

定理 1.2 (容斥原理 Inclusion-Exclusion Principle)

令 U 为全集，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为其子集，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|, \tag{1.3}$$

证明 对任意 a，假设其出现在集合 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ 中，$1 \le m \le n$. 由集合并的定义可知，其在 Eq. 1.3 左侧被计数一次. 现只需证明其被 Eq. 1.3 右侧只计数一次即可.

注意，在等式右侧 a 被 $k=1$ 项 $\sum_{i_1} |A_{i_1}|$ 计数 m 次，被 $k=2$ 项 $-\sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|$ 计数 $-\binom{m}{2}$，更一般的，被第 k 项计数 $(-1)^{k-1}\binom{m}{k}$ 次. 因此，a 被 Eq. 1.3 右侧共计数，

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k}. \tag{1.4}$$

由推论 1.1 可知上式值为 1.

推论 1.2 (容斥原理推论)

令 U 为全集，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为其子集，则

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = |U| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|, \quad 1 \le i_1, i_k \le n.$$

证明 由 $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n = U - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 可知 $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = |U - \bigcup_{i=1}^{n} A_i|$.

$$
\begin{aligned}
\left|U-\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \\
&= |U| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|,
\end{aligned}
$$

其中，第一个等式成立由于 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 为 U 的子集，第二个等式使用定理 1.2.

第二章 函数

内容提要

2.1 函数的性质

回忆线性代数中关于线性函数的定义：

定义 2.1 (线性函数 Linear function)

令 V, W 为向量空间，对给定函数 $f: V \mapsto W$，如果对任意 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$，$a, b \in \mathbb{R}$ 有，

$$f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v}),$$

则称函数 f 为从向量空间 V 到 W 的线性函数.

♣

定理 2.1 (线性函数的单射)

向量空间 V 到 W 上的线性函数 f 为单射当且仅当 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

♡

证明 （假设 f 为单射，欲证 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$）由 f 为单射函数可知，

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) = 2f(\mathbf{0}),$$

故 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 又 f 为单射，因此 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

（现假设 $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$，欲证 f 为单射）对任意 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$，若 $f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2)$，则有

$$\mathbf{0} = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

由假设条件可知，$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$，即 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. 故 f 为单射.

注 定理 2.1告诉我们，一个线性函数为单射的充分必要条件为 f 的零空间（null space）只包含零向量，$\operatorname{null} f = \{\mathbf{0}\}$. 实际上，线性映射基本定理（fundamental theorem of linear maps）告诉我们，对于任何有限维向量空间上的线性映射 $f \in \mathcal{L}(V, W)$ 有 $\dim V = \dim \operatorname{null} f + \dim \operatorname{range} f$. 若 f 为矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则有 $n = \dim \operatorname{null}(\mathbf{A}) + \dim \operatorname{range}(\mathbf{A})$. 零空间只包含零向量则意味着 $\dim \operatorname{null}(\mathbf{A}) = 0$，此时 $\dim \operatorname{range}(\mathbf{A}) = n$，即矩阵 $\mathbf{A}$ 为列满秩 column full rank. 矩阵列满秩等价于其表示的线性映射为单射.

定理 2.2 (函数与集合的势)

令 A, B 为有穷集合，

1. 若从 A 到 B 存在单射函数则 $|A| \le |B|$;
2. 若从 A 到 B 存在满射函数则 $|A| \ge |B|$;
3. 若 $|A| = |B|$ 则 f 为单射 $\iff$ f 为满射 $\iff$ f 为双射.

♡

证明 (1) 假设 $f: A \mapsto B$ 为单射函数，则 $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \ne a_2$ 有 $f(a_1) \ne f(a_2)$. 由于 $f(a_1), f(a_2) \in B$，故 B 至少包含与 A 一样多的元素，即 $|A| \le |B|$.

(2) 假设 $f: A \mapsto B$ 为满射函数，则 $\forall b_1, b_2 \in B, b_1 \ne b_2$ 有 $f^{-1}(\{b_1\}), f^{-1}(\{b_2\})$ 非空. 由函数定义可知 $f^{-1}(\{b_1\}) \cap f^{-1}(\{b_2\}) = \emptyset$. 由于 $A = \cup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})$，故 $|A| = \cup_{b\in B}|f^{-1}(\{b\})| \ge |B|$.

(3)（由单射证满射）若 f 为单射，则 $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \ne a_2$ 有 $f(a_1) \ne f(a_2)$，故 $\operatorname{range}(f) = |A| = |B|$，即 f 为满射.

（由满射证单射）若 f 为满射，则由 (2) 可知 $A = \cup_{b\in B} f^{-1}(\{b\})$，其中 $f^{-1}(\{b\})$ 非空且两两不相交. 若 f 不为单射，则至少存在一个 $b \in B$ 有 $|f^{-1}(\{b\})| \geq 2$，从而 $|A| = \cup_{b\in B}|f^{-1}(\{b\})| \geq |B|+1$，与 $|A| = |B|$ 矛盾. 故 f 为单射.

注 定理 2.2-(1) 给了我们一种比较集合大小的方法. 如果能够建立从集合 A 到 B 的单射函数，则可以断定 $|A| \leq |B|$. 定理 2.2-(2) 则告诉我们，A 中只有包含足够多的元素才能覆盖集合 B（以函数映射的方式）. 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 可视为从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 上的线性函数，若 $\mathbf{A}$ 为单射，则定理 2.2 要求 $n \leq m$，即矩阵的列数要足够小，保证列线性无关；若 $\mathbf{A}$ 为满射，则定理 2.2 要求 $n \geq m$，即矩阵的行数要足够小，保证行线性无关.

推论 2.1

令 A, B 为有穷集合，$f : A \mapsto B$ 为从 A 到 B 的函数. 若从 A 到 B 存在双射函数则 $|A| = |B|$.

笔记 对于有穷集合，$|A| = |B|$ 为其上存在双射函数的充分必要条件. 实际上，定理 2.2 和推论 2.1 对无穷集合亦成立. 康托（Cantor）正是借助函数的单射、双射来比较无穷集合的大小，给 19 世纪末的数学家带来了思想上的巨大冲击，并促使了人类在哲学层面上对无穷和有穷进行了更深层次的思考和讨论.

定理 2.3 (函数的像)

令 $f : A \mapsto B$，$X_1 \subseteq A, X_2 \subseteq A$，则有

1. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$
2. $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$
3. $f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$
4. 若 f 为单射，则（2）（3）为等式.

证明 (1) 对任意 $y \in f(X_1 \cup X_2)$ 有

$$\begin{aligned}
y \in f(X_1 \cup X_2) &\iff \exists x(x \in X_1 \cup X_2 \ \wedge\ f(x) = y)\\
&\iff \exists x((x \in X_1 \vee x \in X_2)\ \wedge\ f(x) = y) \quad (2.1)\\
&\iff (\exists x \in X_1 \wedge f(x) = y) \vee (\exists x \in X_2 \wedge f(x) = y)) \quad (2.2)\\
&\iff y \in f(X_1) \vee y \in f(X_2)\\
&\iff y \in f(X_1) \cup f(X_2).
\end{aligned}$$

(2) 对任意 $y \in f(X_1 \cap X_2)$ 有

$$\begin{aligned}
y \in f(X_1 \cap X_2) &\iff \exists x(x \in X_1 \cap X_2 \ \wedge\ f(x) = y)\\
&\iff \exists x((x \in X_1 \wedge x \in X_2)\ \wedge\ f(x) = y) \quad (2.3)\\
&\implies (\exists x \in X_1 \wedge f(x) = y) \wedge (\exists x \in X_2 \wedge f(x) = y) \quad (2.4)\\
&\iff y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2)\\
&\iff y \in f(X_1) \cap f(X_2).
\end{aligned}$$

(3) 对任意 $y \in f(X_1) - f(X_2)$ 有

$$\begin{aligned}
y \in f(X_1) - f(X_2) &\iff y \in f(X_1) \wedge y \notin f(X_2)\\
&\iff (\exists x \in X_1 \text{ s.t. } f(x) = y) \wedge (\forall x \in X_2 (f(x) \neq y)) \quad (2.5)\\
&\implies \exists x \in X_1 - X_2 \text{ s.t. } f(x) = y \quad (2.6)\\
&\iff y = f(x) \in f(X_1 - X_2).
\end{aligned}$$

(4) Eq. 2.4无法推出 Eq. 2.3，因为 $\exists x_1 \in X_1 - X_2, x_2 \in X_2 - X_1, x_1 \neq x_2$ s.t. $f(x_1) = f(x_2)$. 但若 f 为单射，则 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$，此时 Eq. 2.4 $\Longrightarrow$ Eq. 2.3.

Eq. 2.6无法推出 Eq. 2.5，因为 $\exists x \in X_1 - X_2$ s.t. $f(x) = y$ 亦有可能 $\exists x \in X_2$ s.t. $f(x) = y$. 但若 f 为单射，则

只有一个 x s.t. $f(x)=y$，此时 Eq. 2.6 $\Longrightarrow$ Eq. 2.5.

例题 2.1 考虑从集合 $A=\{a,b,c\}$ 到 $B=\{1,2\}$ 上的函数 $f=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$. $X_1=\{a,b\}$, $X_2=\{c\}$.

- $f(X_1\cap X_2)=f(\emptyset)=\emptyset\subseteq\{1\}=f(X_1)\cap f(X_2)$.
- $f(X_1)-f(X_2)=\emptyset\subseteq\{1\}=f(X_1-X_2)$.

定理 2.4 (函数的原像)

令 $f:A\mapsto B$，$Y_1\subseteq B, Y_2\subseteq B$，则有

1. $f^{-1}(Y_1\cup Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)$
2. $f^{-1}(Y_1\cap Y_2)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)$
3. $f^{-1}(Y_1-Y_2)=f^{-1}(Y_1)-f^{-1}(Y_2)$

♡

证明 (1) 对任意 $x\in f^{-1}(Y_1\cup Y_2)$ 有

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(Y_1\cup Y_2) &\Longleftrightarrow f(x)\in Y_1\cup Y_2 \\ &\Longleftrightarrow f(x)\in Y_1\vee f(x)\in Y_2 \\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)\vee x\in f^{-1}(Y_2) \\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2) \end{aligned}\tag{2.7}$$

(2) 对任意 $x\in f^{-1}(Y_1\cap Y_2)$ 有

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(Y_1\cap Y_2) &\Longleftrightarrow f(x)\in Y_1\cap Y_2 \\ &\Longleftrightarrow f(x)\in Y_1\wedge f(x)\in Y_2 \\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)\wedge x\in f^{-1}(Y_2) \\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2) \end{aligned}\tag{2.8}$$

(3) 对任意 $x\in f^{-1}(Y_1-Y_2)$ 有

$$\begin{aligned} x\in f^{-1}(Y_1-Y_2) &\Longleftrightarrow f(x)\in Y_1-Y_2 \\ &\Longleftrightarrow f(x)\in Y_1\wedge f(x)\notin Y_2 \\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)\wedge x\notin f^{-1}(Y_2) \\ &\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y_1)-f^{-1}(Y_2) \end{aligned}\tag{2.9}$$

推论 2.2

令 $f:A\mapsto B$，$Y_1,Y_2\subseteq B$. 有

1. $f^{-1}(Y_1\cup Y_2\cup\ldots\cup Y_n)=f^{-1}(Y_1)\cup f^{-1}(Y_2)\cup\ldots\cup f^{-1}(Y_n)$.
2. $f^{-1}(Y_1\cap Y_2\cap\ldots\cap Y_n)=f^{-1}(Y_1)\cap f^{-1}(Y_2)\cap\ldots\cap f^{-1}(Y_n)$.

♡

笔记 为何定理 2.4 要比定理 2.3 的结论更简洁、证明更简单？定理 2.3 给定 $f(X)$，我们要分析 y 的原像 $f^{-1}(y)$，是一个集合，存在多个不同 x 映射到给定 y 的情况，除非 f 为单射. 而定理 2.4 给定 $f^{-1}(Y)$，我们要分析 x 的像 $f(x)$，根据函数定义其具有唯一性，我们无需对函数做出任何额外假设.

定理 2.5

给定 $f:A\mapsto B$，则有

1. 对任意 $X\subseteq A, X\subseteq f^{-1}(f(X))$.
2. 对任意 $Y\subseteq B, Y\supseteq f(f^{-1}(Y))$.
3. 如果 f 是单射，对任意 $X\subseteq A, X=f^{-1}(f(X))$.
4. 如果 f 是满射，对任意 $Y\subseteq B, Y=f(f^{-1}(Y))$.

♡

证明 留作练习.

笔记 定理 2.5 告诉我们，定义域 A 中的集合在经过 $X \xrightarrow{f} \xrightarrow{f^{-1}}$ 推、拉回来之后可能会膨胀，这是由于函数 f 非单射，在被 f^{-1} 拉回来后会引入额外元素；而陪域 B 中的集合在经过 $X \xrightarrow{f^{-1}} \xrightarrow{f}$ 推、拉回来之后可能会收缩，这是由于 f 非满射，在被 f^{-1} 推出去时，有些元素没有原像，只能被丢弃.

例题 2.2 考虑从集合 $A = \{a, b, c\}$ 到 $B = \{1, 2\}$ 上的函数 $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$. $X = \{a, b\}, Y = \{1, 2\}$.

- $X \subseteq f^{-1}(f(X)) = \{a, b, c\}$.
- $Y \supseteq f(f^{-1}(Y)) = \{1\}$.

2.2 函数的复合

定理 2.6 (函数的复合与态射)

令 $g : A \mapsto B, f : B \mapsto C$.

1. 若 f, g 都是单射的，则 $f \circ g : A \mapsto C$ 也是单射的.
2. 若 f, g 都是满射的，则 $f \circ g : A \mapsto C$ 也是满射的.
3. 若 f, g 都是双射的，则 $f \circ g : A \mapsto C$ 也是双射的.

证明 (1) 由 g 为单射可知 $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ 有 $g(a_1) \neq g(a_2)$；由 f 为单射可知 $f(g(a_1)) \neq f(g(a_2))$. 因此，我们有 $\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f \circ g(a_1) \neq f \circ g(a_2)$.

(2) 对任意 $c \in C$，由 f 为满射可知 $\exists b \in B$ s.t. $c = f(b)$. 又由 g 为满射可知 $\exists a \in A$ s.t. $b = g(a)$. 因此，对任意 $c \in C, \exists a \in A$ s.t. $c = f(g(a)) = f \circ g(a)$.

(3) 由 (1)(2) 可知，$f \circ g$ 既为单射亦为满射，即双射.

定理 2.7 (函数的复合与态射)

令 $g : A \mapsto B, f : B \mapsto C$.

1. 若 $f \circ g : A \mapsto C$ 是单射的，则 g 是单射的.
2. 若 $f \circ g : A \mapsto C$ 是满射的，则 f 是满射的.
3. 若 $f \circ g : A \mapsto C$ 是双射的，则 g 是单射的，f 是满射的.

证明 (1) 若 g 不为单射，则 $\exists a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ s.t. $g(a_1) = g(a_2)$. 故 $f \circ g(a_1) = f(g(a_1)) = f(g(a_2)) = f \circ g(a_2)$，与 $f \circ g$ 为单射矛盾. 因此假设不成立，即 g 为单射.

(2) 由 $f \circ g : A \mapsto C$ 为满射可知 $\forall c \in C, \exists a \in A$ s.t. $c = f \circ g(a)$. 令 $b = g(a)$, 由 $f \circ g(a) = f(g(a)) = f(b)$ 可知 $b = f^{-1}(c)$, 故 f 为满射.

(3) 由 (1)(2) 可知.

定理 2.8

令 $g : A \mapsto B, f : B \mapsto C$ 均为双射函数，则

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

证明 根据复合函数和逆函数的定义，$(f \circ g)^{-1}$ 与 $g^{-1} \circ f^{-1}$ 均为从 C 到 A 的函数，故定义域相同.

任取 $a \in A$，令 $b = g(a), c = f(b) = f(g(a))$. 根据逆函数定义，

$$(f \circ g)^{-1}(c) = a = g^{-1}(b) = g^{-1}(f^{-1}(c)) = g^{-1} \circ f^{-1}(c).$$

笔记 对于两个可逆矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$，线性代数的知识告诉我们 $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$. 实际上可逆矩阵可视为 $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ 上的双射函数，$\mathbf{AB}$ 可视作两个双射函数的复合，定理 2.8 可以从复合函数的逆函数角度得出上述结论.

第三章 二元关系

内容提要

❑

3.1 笛卡尔积

命题 3.1 (笛卡尔积对并交满足分配律)

设 A, B 为集合

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C), \quad (B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A),$$
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C), \quad (B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A).$$

证明 (1) 任取 $\langle a, b\rangle \in A \times (B \cup C)$,

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in A \times (B \cup C) &\iff a \in A \wedge b \in B \cup C \\
&\iff a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) \\
&\iff (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

(3) 任取 $\langle a, b\rangle \in A \times (B \cap C)$,

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in A \times (B \cap C) &\iff a \in A \wedge b \in B \cap C \\
&\iff a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in C) \\
&\iff (a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \in C) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in (A \times B) \cap (A \times C).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

命题 3.2

设 A, B 为集合. 若 $A \subseteq C \wedge B \subseteq D$, 则 $A \times B \subseteq C \times D$.

证明 任取 $\langle a, b\rangle \in A \times B$. 由笛卡尔积定义可知 $a \in A \subseteq C, b \in B \subseteq D$, 故 $\langle a, b\rangle \in C \times D$.

例题 3.1

1. 若 $A = B, C = D$, 则 $A \times C = B \times D$.
2. 若 $A \times C = B \times D$, 是否能推出 $A = B, C = D$?

解 (1) 任取 $\langle a, c\rangle \in A \times C$,

$$\begin{aligned}
\langle a, c\rangle \in A \times C &\iff a \in A \wedge c \in C \\
&\iff a \in B \wedge c \in D \\
&\iff \langle a, c\rangle \in B \times D.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

(2) 考虑 $A = \emptyset, D = \emptyset$ 或 $B = \emptyset, C = \emptyset$.

3.2 关系的定义与表示

定义 3.1 (关系矩阵)

假设 R 是一个从集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 到集合 $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ 的关系，则关系 R 可以使用矩阵 $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$ 表示，其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } (a_i, b_j) \in R, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

♣

例题 3.2 假设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$. R 为从 A 到 B 的关系，其包含的有序对 $\langle a, b\rangle$, $a \in A$, $b \in B$ 满足 $a > b$. R 的关系矩阵

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 关系的运算

定理 3.1

设 R 是任意二元关系，则

1. $(R^{-1})^{-1} = R$,
2. $\mathrm{domain}(R^{-1}) = \mathrm{range}(R)$, $\mathrm{range}(R^{-1}) = \mathrm{domain}(R)$.

♡

证明 (1) 任取 $\langle a, b\rangle \in (R^{-1})^{-1} \iff \langle b, a\rangle \in R^{-1} \iff \langle a, b\rangle \in R$.

(2) $b \in \mathrm{range}(R) \iff \exists a(\langle a, b\rangle \in R) \iff \exists a(\langle b, a\rangle \in R^{-1}) \iff b \in \mathrm{domain}(R^{-1})$.

$a \in \mathrm{domain}(R) \iff \exists b(\langle a, b\rangle \in R) \iff \exists b(\langle b, a\rangle \in R^{-1}) \iff a \in \mathrm{range}(R^{-1})$.

定义 3.2

给定关系 R，其逆运算 $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in R\}$.

♣

定义 3.3

给定关系 R_1, R_2，其复合运算定义为

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle a, b\rangle \mid \langle a, t\rangle \in R_1 \wedge \langle t, b\rangle \in R_2\}.$$

♣

笔记 若将有序对第一、第二个元素 a, b 分别视为矩阵的行、列，则根据定义 3.2, $\mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R^{\top}$; 矩阵 $\mathbf{M}_{R_1 \circ R_2} = \mathbf{M}_{R_1}\mathbf{M}_{R_2}$, 即 $m_{R_1 \circ R_2}[a, b] = \sum_s m_{R_1}[a, s] m_{R_2}[s, b]$, 其中的加法运算为布尔加法. 证明思路如下，根据关系复合和关系矩阵定义, $m_{R_1 \circ R_2}[a, b] = 1 \iff \langle a, b\rangle \in R_1 \circ R_2 \iff \exists t\,(\langle a, t\rangle \in R_1 \wedge \langle t, b\rangle \in R_2) \iff m_{R_1}[a, t] m_{R_2}[s, t] = 1 \iff \sum_s m_{R_1}[a, s] m_{R_2}[s, b] = 1$.

定理 3.2

设 R 为 A 上二元关系，则 $R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

♡

证明 任取 $\langle a, b\rangle \in R \circ I_A$,

$$\begin{aligned} \langle a, b\rangle \in R \circ I_A &\iff \exists t\,(\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in I_A) \\ &\iff \exists t\,(\langle a, t\rangle \in R \wedge t = b) \\ &\iff \langle a, b\rangle \in R. \end{aligned}$$

故 $R \circ I_A = R$. 同理可证 $I_A \circ R = R$.

定理 3.3 (关系复合的结合律)

设 R_1, R_2, R_3 是任意二元关系，则

1. $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$,
2. $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$.

证明 (1) 任取 $\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$,

$$
\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3 &\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R_1 \circ R_2 \wedge \langle t, b\rangle \in R_3) \\
&\iff \exists t(\exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \langle s, t\rangle \in R_2) \wedge \langle t, b\rangle \in R_3) \\
&\iff \exists t \exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \langle s, t\rangle \in R_2 \wedge \langle t, b\rangle \in R_3) \\
&\iff \exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \exists t(\langle s, t\rangle \in R_2 \wedge \langle t, b\rangle \in R_3)) \\
&\iff \exists s(\langle a, s\rangle \in R_1 \wedge \langle s, b\rangle \in R_2 \circ R_3) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3).
\end{aligned}
$$

(2) 任取 $\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2)^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in (R_1 \circ R_2)^{-1} &\iff \langle b, a\rangle \in R_1 \circ R_2 \\
&\iff \exists t(\langle b, t\rangle \in R_1 \wedge \langle t, a\rangle \in R_2) \\
&\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R_2^{-1} \wedge \langle t, b\rangle \in R_1^{-1}) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}.
\end{aligned}
$$

定理 3.4 (关系的逆与并交可交换)

设 R_1, R_2 为 A 上的关系，则

1. $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
2. $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.

证明 (1)

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (R_1 \cup R_2)^{-1} &\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2 \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \vee \langle y, x\rangle \in R_2 \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \vee \langle x, y\rangle \in R_2^{-1} \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \cup R_2^{-1}.
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in (R_1 \cap R_2)^{-1} &\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \cap R_2 \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R_1 \wedge \langle y, x\rangle \in R_2 \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \wedge \langle x, y\rangle \in R_2^{-1} \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R_1^{-1} \cap R_2^{-1}.
\end{aligned}
$$

定理 3.5 (关系复合的分配律)

设 R_1, R_2, R 为任意二元关系，

1. $R \circ (R_1 \cup R_2) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2$,
2. $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$,
3. $R \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2$,

4. $(R_1 \cap R_2) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R$.

证明 (1) 任取 $\langle a, b\rangle \in R \circ (R_1 \cup R_2)$,

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in R \circ (R_1 \cup R_2) &\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in R_1 \cup R_2) \\
&\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R \wedge (\langle t, b\rangle \in R_1 \vee \langle t, b\rangle \in R_2)) \\
&\iff \exists t((\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in R_1) \vee (\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in R_2)) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R \circ R_1 \vee \langle a, b\rangle \in R \circ R_2 \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R \circ R_1 \cup R \circ R_2.
\end{aligned}$$

故 $R \circ (R_1 \cup R_2) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2$.

(3) 任取 $\langle a, b\rangle \in R \circ (R_1 \cap R_2)$,

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in R \circ (R_1 \cap R_2) &\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in R_1 \cap R_2) \\
&\iff \exists t(\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in R_1 \wedge \langle t, b\rangle \in R_2) \qquad (3.4) \\
&\implies \exists t(\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in R_1) \wedge \exists t(\langle a, t\rangle \in R \wedge \langle t, b\rangle \in R_2) \qquad (3.5) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R \circ R_1 \wedge \langle a, b\rangle \in R \circ R_2 \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R \circ R_1 \cap R \circ R_2.
\end{aligned}$$

故 $R \circ (R_1 \cap R_2) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2$.

推论 3.1

设 $R_1, R_2, \ldots, R_n, R$ 为任意二元关系，

1. $R \circ (R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) = R \circ R_1 \cup R \circ R_2 \cup \ldots \cup R \circ R_n$,
2. $(R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R \cup \ldots \cup R_n \circ R$,
3. $R \circ (R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \subseteq R \circ R_1 \cap R \circ R_2 \cap \ldots \cap R \circ R_n$,
4. $(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) \circ R \subseteq R_1 \circ R \cap R_2 \circ R \cap \ldots \cap R_n \circ R$.

定理 3.6

设 R 为关系，A, B 为集合，则

1. $R|_{A\cup B} = R|_A \cup R|_B$.
2. $R|_{A\cap B} = R|_A \cap R|_B$.
3. $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$.
4. $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$.

证明 (1) 任取 $\langle a, b\rangle \in R|_{A\cup B}$,

$$\begin{aligned}
\langle a, b\rangle \in R|_{A\cup B} &\iff \langle a, b\rangle \in R \wedge a \in A \cup B \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R \wedge (a \in A \vee a \in B) \\
&\iff (\langle a, b\rangle \in R \wedge a \in A) \vee (\langle a, b\rangle \in R \wedge a \in B) \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R|_A \vee \langle a, b\rangle \in R|_B \\
&\iff \langle a, b\rangle \in R|_A \cup R|_B.
\end{aligned}$$

(2) 任取 $\langle a,b\rangle \in R|_{A\cap B}$,

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle \in R|_{A\cap B} &\iff \langle a,b\rangle \in R \land a \in A\cap B\\ &\iff \langle a,b\rangle \in R \land (a\in A \land a \in B)\\ &\iff (\langle a,b\rangle \in R \land a \in A) \land (\langle a,b\rangle \in R \land a\in B)\\ &\iff \langle a,b\rangle \in R|_A \land \langle a,b\rangle \in R|_B\\ &\iff \langle a,b\rangle \in R|_A \cap R|_B.\end{aligned}$$

(4) 任取 $b \in R[A\cap B]$,

$$\begin{aligned}b \in R[A\cap B] &\iff \exists a(\langle a,b\rangle \in R \land a \in A\cap B)\\ &\iff \exists a(\langle a,b\rangle \in R \land (a\in A \land a\in B))\\ &\iff \exists a((\langle a,b\rangle \in R \land a \in A) \land (\langle a,b\rangle \in R \land a \in B))\\ &\implies \exists a(\langle a,b\rangle \in R \land a\in A) \land \exists a(\langle a,b\rangle \in R \land a \in B)\\ &\iff b\in R[A] \land b \in R[B]\\ &\iff b \in R[A]\cap R[B].\end{aligned}$$

定义 3.4

令 R 为 A 上的关系，n 为自然数，则 R 的 n 次幂定义为：

1. $R^0 = \{\langle a,a\rangle \mid a \in A\} = I_A$.
2. $R^{n+1} = R^n \circ R$.

笔记 根据定义 3.4 和 3.3，使用归纳法容易验证 $\mathbf{M}_{R^n} = \mathbf{M}_R^n$.

定理 3.7

设 R 为集合 A 上的二元关系，$m,n\in\mathbb{N}$，则

1. $R^m \circ R^n = R^{m+n}$,
2. $(R^m)^n = R^{mn}$.

证明 (1) 令 m 为任意自然数, $n=1$ 时，根据幂运算的定义（定义 3.4）有 $R^m\circ R = R^{m+1}$. 假设其对 $n-1$ $(n\geq 2)$ 成立，即 $R^m \circ R^{n-1} = R^{m+n-1}$，则有

$$R^m\circ R^n = R^m \circ (R^{n-1}\circ R) = (R^m \circ R^{n-1})\circ R = R^{m+n-1}\circ R = R^{m+n}.$$

(2) 直接应用 (1) 可的.

定理 3.8

设 A 为集合且 $|A| = n$，R 为 A 上的二元关系，则存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$.

证明 对任意 $k\in\mathbb{N}$, R^k 均为 $A\times A$ 的子集，而 $A\times A$ 的不同子集共有 $|\mathcal{P}(A\times A)| = 2^{n^2}$ 个. 根据鸽笼原理 Pigeonhole Principle, 将 $R^0, R^1, R^2, \ldots$ 放入 2^{n^2} 个位置，必然存在 $s,t\in\mathbb{N}$ 落入同一个位置（对应同一个子集），即 $R^s = R^t$.

定理 3.9

设 A 为集合，R 为 A 上的二元关系，若存在 $s,t\in\mathbb{N}$ 且 $s<t$ 使得 $R^s = R^t$，则

1. 对任意 $k\in\mathbb{N}$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$.
2. 对任意 $k,r\in\mathbb{N}$ 有 $R^{s+k(t-s)} = R^s$ 或 $R^{s+k(t-s)+r} = R^{s+r}$.
3. $\bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \bigcup_{k=1}^{t-1} R^k$.

证明 (1) 根据定理 3.7，$R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$.

(2) 使用归纳法证明. 对 $k=0$，$R^{s+0} = R^s$, 结论成立. 假设对 $k=n$ 有 $R^{s+n(t-s)} = R^s$, 则

$$R^{s+(n+1)(t-s)} = R^{s+n(t-s)+t-s} = R^{s+n(t-s)} \circ R^{t-s} = R^s \circ R^{t-s} = R^{s+t-s} = R^t = R^s.$$

其中第 2、4 个等式根据定理 3.7，第 3 个等式根据归纳假设.

$$R^{s+k(t-s)} = R^s \Longrightarrow R^{s+k(t-s)} \circ R^r = R^s \circ R^r \Longrightarrow R^{s+k(t-s)+r} = R^{s+r}.$$

(3) 对任意 $n \in \mathbb{N}, n \geq t$ 有 $n = s + k(t-s) + r$, 其中 $k = \lfloor (n-s)/(t-s) \rfloor, 0 \leq r < t-s$. 故

$$R^n = R^{s+k(t-s)+r} = R^{s+r} \in \bigcup_{k=1}^{t-1} R^k,$$

其中，最后一步成立由于 $s \leq s+r < s+t-s = t$.

3.4 关系的性质

定义 3.5

设 R 为 A 上的关系，

1. 若 $\forall a(a \in A \rightarrow \langle a,a\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是自反的 reflexive.
2. 若 $\forall a(a \in A \rightarrow \langle a,a\rangle \notin R)$，则称 R 在 A 上是反自反的 anti-reflexive.

定义 3.6

设 R 为 A 上的关系，

1. 若 $\forall x \forall y(x, y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是对称的 symmetric.
2. 若 $\forall x \forall y(x \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \rightarrow x = y)$，则称 R 在 A 上是反对称的 anti-symmetric.

定义 3.7

设 R 为 A 上的关系，若 $\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$，则称 R 在 A 上是传递的 transitive.

笔记 自反与反自反只在对角线上施加约束，全部出现或全部不出现；对称、反对称与传递只在非对角线上施加约束. 因此，一个关系 R 如果只涉及对角线元素，它一定同时是对称、反对称和传递的，是否为自反与反自反则要看对角线是全部出现还是全部不出现.

定理 3.10

设 R 为 A 上的关系，则

1. R 在 A 上自反 $\iff I_A \subseteq R$.
2. R 在 A 上反自反 $\iff R \cap I_A = \emptyset$.
3. R 在 A 上对称 $\iff R = R^{-1}$.
4. R 在 A 上反对称 $\iff R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
5. R 在 A 上传递 $\iff R \circ R \subseteq R$.

证明 (1) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle a,a\rangle \in I_A$, 由 R 为 A 上自反关系可知 $\forall x \in A$ 有 $\langle x,x\rangle \in R$. 故 $\langle a,a\rangle \in R$, 即 $I_A \subseteq R$.

($\Longleftarrow$) $I_A \subseteq R$, 故 $\forall x \in A$ 有 $\langle x,x\rangle \in I_A \subseteq R \Longrightarrow \langle x,x\rangle \in R$. 故 R 在 A 上自反.

(2) ($\Longrightarrow$) 假设 $R \cap I_A \neq \emptyset$, 则 $\exists \langle x,y\rangle \in R \cap I_A \Rightarrow x = y \in A \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R$, 与 R 在 A 上反自反矛盾.

($\Longleftarrow$) 由 $R \cap I_A = \emptyset$ 可知 $\forall x \in A$ 有 $\langle x,x\rangle \notin R$. 故 R 在 A 上是反自反的.

(3) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R &\iff \langle y, x\rangle \in R \quad (R \text{ is symmetric})\\ &\iff \langle x, y\rangle \in R^{-1}.\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R &\iff \langle y, x\rangle \in R^{-1}\\ &\iff \langle y, x\rangle \in R \qquad (R = R^{-1})\end{aligned}$$

故 R 在 A 上对称.

(4) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1} &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R^{-1}\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R\\ &\Longrightarrow x = y \qquad (R \text{ is antisymmetric})\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle = \langle x, x\rangle \in I_A.\end{aligned}$$

故 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

($\Longleftarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle$ 若有 $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R$

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R^{-1}\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \cap R^{-1}\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in I_A \qquad \left(R \cap R^{-1} \subseteq I_A\right)\end{aligned}$$

故 R 在 A 上是反对称的.

(5) ($\Longrightarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle \in R \circ R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \circ R &\Longrightarrow \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in R)\\ &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R \qquad (R \text{ is transitive})\end{aligned}$$

故 $R \circ R \subseteq R$.

($\Longleftarrow$) 任取 $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R &\Longrightarrow \langle x, z\rangle \in R \circ R\\ &\Longrightarrow \langle x, z\rangle \in R \qquad (R \circ R \subseteq R)\end{aligned}$$

故 R 在 A 上是传递的.

例题 3.3 设 R_1, R_2 为 A 上的关系，则

1. 若 R_1, R_2 是自反和对称的，则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反和对称的.
2. 若 R_1, R_2 是传递的，则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的.

解 (1) 由 R_1, R_2 是 A 上的自反关系及定理 3.10 可知,

$$I_A \subseteq R_1, I_A \subseteq R_2.$$

故 $I_A \subseteq R_1 \cup R_2$. 由定理 3.10 可知 $R_1 \cup R_2$ 在 A 上是自反的.

由 R_1, R_2 是 A 上的对称关系及定理 3.10 可知,

$$R_1 = R_1^{-1}, R_2 = R_2^{-1}.$$

由定理 3.4 可知,

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2.$$

再次应用定理 3.10 可知，$R_1 \cup R_2$ 是 A 上的对称关系.

(2) 由 R_1, R_2 是 A 上的传递关系及定理 3.10 可知，

$$R_1 \circ R_1 \subseteq R_1, R_2 \circ R_2 \subseteq R_2. \tag{3.6}$$

由于，

$$\begin{aligned}
(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2) &\subseteq (R_1 \circ R_1) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) \cap (R_2 \circ R_2) && \text{(Theorem 3.5)} \\
&\subseteq R_1 \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) \cap R_2 && \text{(Eq. 3.6)} \\
&\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap (R_1 \circ R_2) \cap (R_2 \circ R_1) && (\cap \text{ is commutative}) \\
&\subseteq R_1 \cap R_2.
\end{aligned}$$

从而 $R_1 \cap R_2$ 为 A 上的传递关系.

定理 3.11

若 R 是集合 A 上的对称关系，则 $\overline{R} \triangleq A \times A - R$ 为对称关系.

证明 任取 $\langle x, y\rangle \in \overline{R}$ 有，$\langle x, y\rangle \notin R \Rightarrow \langle y, x\rangle \notin R \Rightarrow \langle y, x\rangle \in \overline{R}$, 故 $\overline{R}$ 为对称关系. 其中第一步成立由于 R 为对称关系.

笔记 关系运算的封闭性总结如下表. 对表中不满足封闭性的运算，可以尝试给出反例.

运算	原有性质				
	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	×	×
$R_1 - R_2$	×	✓	✓	✓	×
$R_1 \circ R_2$	✓	×	×	×	×

定理 3.12

若 R 是对称的，则 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 有 R^n 为对称关系.

证明 $n = 1$ 时 $R^1 = R$ 成立.

现假设结论对 R^n 成立，即 R^n 为对称关系. 则任取 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R^{n+1} &\iff \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R) \\
&\iff \exists t\,(\langle t, x\rangle \in R^n \wedge \langle y, t\rangle \in R) && \text{(Induction assumption)} \\
&\iff \exists t\,(\langle y, t\rangle \in R \wedge \langle t, x\rangle \in R^n) \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R^{n+1}.
\end{aligned}$$

故 R^{n+1} 满足对称性.

笔记 现对关系的性质总结如下.

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
矩阵	主对角线全 1	主对角线全 0	对称矩阵	$\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^\top$ 为对角阵	$\mathbf{M} - \mathbf{M}^2$ 逐项非负
图	每个顶点均有环	每个顶点均无环	无向图	两点之间至多一条边	$(a_i \to a_k, a_k \to a_j) \Rightarrow a_i \to a_j$

3.5 关系的闭包

定义 3.8

设 R 是非空集合 A 上的关系，R 的自反（对称或传递）闭包是 A 上的关系 R'，满足一下条件:

1. $R \subseteq R'$;
2. R' 是自反（对称或传递）的;
3. 对 A 上任何包含 R 的自反（对称或传递）关系 R'' 均有 $R' \subseteq R''$.

R 的自反闭包，对称闭包，传递闭包分别记为 $r(R), s(R), t(R)$.

笔记 令关系 R 的关系矩阵为 $\mathbf{M}$，其 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系矩阵分别记为 $\mathbf{M}_r, \mathbf{M}_s, \mathbf{M}_t$，则

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{M} \vee \mathbf{I}, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{M} \vee \mathbf{M}^{\top}, \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{M} \vee \mathbf{M}^2 \vee \mathbf{M}^3 \vee \ldots,$$

其中 $\vee$ 表示矩阵逐项进行逻辑或运算，$\mathbf{I}$ 为与 $\mathbf{M}$ 大小兼容的单位矩阵.

定理 3.13

设 R 是 A 上的关系，则有

1. $r(R) = R \cup R^0$;
2. $s(R) = R \cup R^{-1}$;
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$，若 $|A| = n$，则可在 R^n 处截断.

证明 (1) ① $R \subseteq R \cup R^0$.

② $R^0 = I_A \subseteq R \cup R^0$ 故 $R \cup R^0$ 是自反的.

③ 令 R'' 为 A 上包含 R 的自反关系，则 $R \subseteq R'', I_A \subseteq R''$. 故 $R \cup R^0 \subseteq R''$.

(2) ① $R \subseteq R \cup R^{-1}$.

② 任取 $\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1}$ 有,

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R \cup R^{-1} &\iff \langle x, y\rangle \in R \vee \langle x, y\rangle \in R^{-1} \\
&\iff \langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R^{-1} \vee \langle y, x\rangle \in R \\
&\iff \langle y, x\rangle \in R \cup R^{-1}
\end{aligned}$$

故 $R \cup R^{-1}$ 满足对称性.

③ 令 R'' 为 A 上包含 R 的对称关系，任取 $\langle x, y\rangle \in R$ 有

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R &\Longrightarrow \langle x, y\rangle \in R'' \\
&\Longrightarrow \langle y, x\rangle \in R''
\end{aligned}$$

故 $R^{-1} \subseteq R''$. 因此 $R \cup R^{-1} \subseteq R''$.

(3) ① $R \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} R^n$.

② 现证 $\cup_{n=1}^{\infty} R^n$ 满足传递性. $\forall \langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \cup_{n=1}^{\infty} R^n$ 有

$$\begin{aligned}
\exists t\left(\langle x, y\rangle \in R^t\right) \wedge \exists s\left(\langle y, z\rangle \in R^s\right) &\Longrightarrow \exists t \exists s\left(\langle x, z\rangle \in R^t \circ R^s\right) \\
&\Longrightarrow \exists t \exists s\left(\langle x, z\rangle \in R^{t+s}\right) \\
&\Longrightarrow \langle x, z\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n.
\end{aligned}$$

③ 令 R'' 为 A 上包含 R 的传递关系，现证 $\cup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R''$. 只需证明 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $R^n \subseteq R''$.

对 $n = 1$ 有 $R^1 \subseteq R''$ 成立.

现假设 $R^n \subseteq R''$. 任取 $\langle x, y\rangle \in R^{n+1}$ 有

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in R^{n+1} &\iff \langle x, y\rangle \in R^n \circ R \\
&\iff \exists t\,(x, t\rangle \in R^n \wedge \langle t, y\rangle \in R) \\
&\implies \exists t\,(\langle x, t\rangle \in R'' \wedge \langle t, y\rangle \in R'') && \text{(assumption)} \\
&\implies \langle x, y\rangle \in R'' && (R'' \text{ is tansitive})
\end{aligned}$$

故 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ 有 $R^n \subseteq R''$.

定理 3.14

设 R 是非空集合 A 上的关系，则

1. R 是自反的 $\iff r(R) = R$;
2. R 是对称的 $\iff s(R) = R$;
3. R 是传递的 $\iff t(R) = R$.

证明 通过闭包的定义可以直接验证.

定理 3.15

令 R_1 和 R_2 是非空集合 A 上的关系，且 $R_1 \subseteq R_2$，则

1. $r(R_1) \subseteq r(R_2)$,
2. $s(R_1) \subseteq s(R_2)$,
3. $t(R_1) \subseteq t(R_2)$.

证明 直接使用定理 3.13 可证.

定理 3.16

设 R 是非空集合 A 上的关系，

1. 若 R 是自反的，则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的;
2. 若 R 是对称的，则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的;
3. 若 R 是传递的，则 $r(R)$ 也是传递的.

证明 (1) $s(R) = R \cup R^{-1}, t(R) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R^n$. 由 R 是自反的可知 $I_A \subseteq R$. 从而 $I_A \subseteq s(R), I_A \subseteq t(R)$. 故 $s(R), t(R)$ 为自反的.

(2) $r(R) = R \cup I_A$, 从而

$$\begin{aligned}
r(R)^{-1} &= (R \cup I_A)^{-1} \\
&= R^{-1} \cup I_A^{-1} && \text{(Theorem 3.4)} \\
&= R \cup I_A && (R \text{ is symmetric}) \\
&= r(R).
\end{aligned}$$

故 $r(R)$ 为对称的.

$t(R) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. 任取 $\langle x, y\rangle \in t(R)$ 有

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in t(R) &\implies \exists n \in \mathbb{Z}^+\,(\langle x, y\rangle \in R^n) \\
&\iff \exists n \in \mathbb{Z}^+\,(\langle y, x\rangle \in R^n) && \text{(Theorem 3.12)} \\
&\implies \langle y, x\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = t(R)
\end{aligned}$$

(3) $r(R) = R \cup R^0, \forall \langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in R \cup R^0$ 有如下结论.

若 $\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle \in R$ ($\langle x,y\rangle,\langle y,z\rangle \in R^0 = I_A$), 则 $\langle x,z\rangle \in R \subseteq r(R)$ ($\langle x,z\rangle \in R^0 \subseteq r(R)$).

若 $\langle x,y\rangle \in R, \langle y,z\rangle \in R^0$ 则 $y=z$, 从而 $\langle x,z\rangle = \langle x,y\rangle \in R \subseteq r(R)$.

若 $\langle x,y\rangle \in R^0, \langle y,z\rangle \in R^0$ 则 $x=z$, 从而 $\langle x,z\rangle \in R^0 \subseteq r(R)$.

综上 $\langle x,z\rangle \in r(R)$. 故 $r(R)$ 满足传递性.

笔记 定理 3.16 告诉我们，构造对称闭包可能会丢失传递性. 令 $R = \{\langle 1,3\rangle\}$ 为 $A = \{1,2,3\}$ 上的传递关系，而 $s(R) = \{\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$ 并不具有传递性. 因此为构造 R 的自反、对称和传递闭包，应将传递闭包放置在对称闭包之后 $t(s(r(R)))$.

3.6 等价关系与划分

定义 3.9

设 R 是非空集合 A 上的关系，$\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \land xRy\},$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类（equivalence class），简称为 x 的等价类，简记为 $[x]$.

定义 3.10

设 A 为非空集合，若 A 的子集族 π ($\pi \subseteq \mathcal{P}(A)$) 满足:

1. $\emptyset \notin \pi$,
2. $\forall a,b \in \pi (a \neq b \to a \cap b = \emptyset)$,
3. $\bigcup\limits_{a\in\pi} a = A$,

则称 π 是 A 的一个划分（partition），称 π 中元素为 A 的划分块.

定理 3.17

令 R 是非空集合 A 上的等价关系，则对于 $a,b \in A$ 如下陈述是等价的:

1. aRb.
2. $[a]=[b]$.
3. $[a]\cap[b] \neq \emptyset$.

证明 由 (1) 证明 (2), 假设 aRb. $\forall c \in [a]$, 有 aRc. 由 R 对称性可知有 bRa, 由传递性可知 $bRa, aRc \Longrightarrow bRc$. 故 $c \in [b]$, 从而 $[a] \subseteq [b]$. 同理可证 $[b] \subseteq [a]$. 因此，$[a]=[b]$.

由 (2) 证明 (3), 假设 $[a]=[b]$. 由于 $[a]$ 包含元素 a 因此集合非空，故 $[a]\cap[b]\neq\emptyset$.

由 (3) 证明 (1), 假设 $[a]\cap[b]\neq\emptyset$. 由假设条件可知，至少存在元素 $c\in[a], c\in[b]$, 即 aRc, bRc. 由 R 对称性可知有 cRb. 由 R 传递性可知 $aRc, cRb \Longrightarrow aRb$.

注 定理 3.17 告诉我们，等价类要么相等，要么相交为空. 因为 $[a]\cap[b]\neq\emptyset \Longrightarrow [a]=[b]$, 故 $[a]\neq[b] \Longrightarrow [a]\cap[b]=\emptyset$.

推论 3.2

令 R 是非空集合 A 上的等价关系，则 R 的等价类 $[a]_R$ 构成了集合 A 的一个划分.

注 推论 3.2 成立由于如下观察：1) $[a]$ 包含 a，因此非空；2) 若 $[a]\neq[b]$, 则 $[a]\cap[b]=\emptyset$；3) $\bigcup\limits_{a\in A}[a] = A$, 这是因为 $\forall a\in A, a\in[a]$.

第四章 图的基本概念

内容提要

❏

4.1 图

定义 4.1 (无向图)

$G = \langle V, E \rangle$，其中

1. V 为非空有穷集合，称为顶点集，其元素为顶点 vertex；
2. E 为边集，每条边 $e \in E$ 有一或两个顶点 $v \in V$ 与其关联，被称其端点 endpoints.

♣

定义 4.2 (有向图)

$G = \langle V, E \rangle$，其中

1. V 为非空有穷集合，称为顶点集，其元素为顶点；
2. E 为 $V \times V$ 的多重有穷子集，称为边集，其元素为有向边，简称边.

♣

- 无向图和有向图通称图，给定图 G，其顶点记为 $V(G)$，边集记为 $E(G)$.
- 给定图 $G = \langle V, E \rangle$，$V_1, V_2 \subseteq V$ 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$，记 $E(V_1, V_2) = \{\{u, v\} \in E \mid u \in V_1, v \in V_2\}$.
- 若 $V(G) = n$，则称 G 为 n 阶图.
- 若 $E(G) = \emptyset$，则称 G 为零图 null graph; 若同时 $V(G) = n$，则称 G 为 n 阶零图.
- n 阶零图记作 N_n；N_1 被称为平凡图 trival graph.
- 顶点集为空集的图被称为空图 empty graph，记为 $\emptyset$.
- 对于图的图形表示，如果给每个顶点和每条边指定一个符号（symbol），则称该表示为标定图 labeled graph，否则为非标定图 unlabeled graph.
- 将有向图各有向边改成无向边后所得的无向图称为原图的基图 base graph.

令 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图，$e = \{u, v\} \in E$，

- 称 u, v 为 e 的端点 endpoints，u, v 是邻接的 adjacent，e 与 u, v 是关联的 incident.
- 若 $u \neq v$，则称 e 与 u (v) 的关联次数为 1.
- 若 $u = v$，则称 e 与 u 的关联次数为 2，并称 e 为环 loop.
- 若 $v \in V$ 不与边 $e \in E$ 关联，则称 e 与 v 的关联次数为 0.

令 $G = \langle V, E \rangle$ 为有向图，$e = \langle u, v \rangle \in E$，

- 称 u, v 为 e 的端点 endpoints，u, v 是邻接的 adjacent，e 与 u, v 是关联的 incident.
- u, v 分别为 e 的始点 initial vertex 和终点 terminal vertex.
- 若 $u = v$，则称 e 为环 loop.
- 若两个顶点之间有一条有向边，则称两个顶点相邻.
- 若一条边的终点是另一条边的始点，则称两条边相邻.

图中没有边关联的顶点称为孤立点 isolated vertex.

令 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图，$\forall v \in V$，

- $N_G(v) = \{u \mid u \in V \wedge \{u, v\} \in E \wedge u \neq v\}$ 被称为 v 的邻域 neighbors.
- $\overline{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ 被称为 v 的闭邻域.

- $I_G(v) = \{e \mid e \in E \wedge e \text{ is incident to } e\}$ 被称为 v 的关联集 incident set.

令 $G = \langle V, E\rangle$ 为有向图，$\forall u, v \in V$，

- $P_G^+(u) = \{v \mid v \in V \wedge \langle u, v\rangle \in E \wedge u \neq v\}$ 被称为 u 的后继元集 successors.
- $P_G^-(v) = \{u \mid u \in V \wedge \langle u, v\rangle \in E \wedge u \neq v\}$ 被称为 v 的先驱元集 predecessors.
- $N_G(v) = P_G^+(v) \cup P_G^-(v)$ 被称为 v 的邻域.
- $\overline{N}_G(v) = N_G(v) \cup \{v\}$ 被称为 v 的闭邻域.

定理 4.1 (握手定理)

在任何无向图中，所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

证明 设 G 中每条边（包括环）均有两个端点，所以在计算 G 中各顶点度数之和时，每条边均提供 2 度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理 4.2 (握手定理)

在任何有向图中，

- 所有顶点的入度之和等于所有顶点的出度之和，都等于边数；
- 所有顶点的度数之和等于边数的 2 倍.

推论 4.1

任何图（无向或有向）中，奇度顶点的个数是偶数.

证明 由握手定理，所有顶点的度数之和是偶数，而偶度顶点的度数之和是偶数，故奇度顶点的度数之和也是偶数. 因此，奇度顶点的个数为偶数.

定义 4.3 (完全图 complete graph)

- $n\,(n \geq 1)$ 阶无向完全图：每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n. $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $\Delta = \delta = n-1$.
- $n\,(n \geq 1)$ 阶有向完全图：每对顶点之间均有两条方向相反有向边的有向简单图. $m = n(n-1)$, $\Delta = \delta = 2(n-1) = 2\Delta^+ = 2\delta^+ = 2\Delta^- = 2\delta^-$.
- $n\,(n \geq 1)$ 阶竞赛图 tournament：基图为 K_n 的有向简单图. $m = \frac{n(n-1)}{2}$, $\Delta = \delta = n-1$.

定义 4.4

设 $G = \langle V, E\rangle$ 为 n 阶无向简单图，令

$$\overline{E} = \{\{u, v\} \mid u, v \in V \wedge u \neq v \wedge \{u, v\} \notin E\},$$

称 $\overline{G} = \langle V, \overline{E}\rangle$ 为 G 的补图 complement graph. 若 $G \cong \overline{G}$，则称 G 是自补图.

定义 4.5 (k-正则图)

$\Delta = \delta = k$ 的无向简单图为 k-正则图（k-regular graph），其边数 $m = kn/2$，当 k 是奇数时 n 必为偶数.

定义 4.6

设 $G = \langle V, E\rangle$ 为无向图：

- 若 $e \in E$，用 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e，称为删除边e；
- 又若 $E' \subset E$，用 $G - E'$ 表示从 G 中删除 E' 中的所有边，称为删除 E'.
- 若 $v \in V$，用 $G - v$ 表示从 G 中去掉 v 及所关联的所有边，称为删除顶点 v；
- 又若 $V' \subset V$，用 $G - V'$ 表示从 G 中删除 V' 中所有的顶点，称为删除 V'.

定义 4.7

设 $G=\langle V,E\rangle$ 为无向图:

- 设 $e=\{u,v\}\in E$, 用 $G\setminus e$ 表示从 G 中删除 e 后, 将 e 的两个端点 u,v 用一个新的顶点 w 代替，并使 w 关联除 e 以外 u,v 关联的所有边，称作边 e 的收缩 edge contraction.
- 设 $u,v\in V$，用 $G\cup\{u,v\}$ 表示在 u,v 之间加一条边 $\{u,v\}$，称为加新边.

在边收缩和加新边过程中可能产生环和平行边.

定义 4.8

设两个图 $G=\langle V,E\rangle, G'=\langle V',E'\rangle$, 同为无向图或同为有向图，

- 若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$，则称 G' 是 G 的子图 subgraph，G 为 G' 的母图，记作 $G'\subseteq G$.
- 又若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$，则称 G' 为 G 的真子图 proper subgraph.
- 若 $E'\subseteq E$ 且 $V'=V$，则称 G' 为 G 的生成子图 spanning subgraph.

定义 4.9

给定图 $G=\langle V,E\rangle$，

- 若 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$, 则以 V_1 为顶点集，以 G 中两个端点都在 V_1 中的边组成边集的图被称为 G 中 V_1 的导出子图 induced subgraph，记作 $G[V_1]$.
- 若 $E_1\subset E$ 且 $E_1\neq\varnothing$, 称以 E_1 为边集，以 E_1 中边关联的顶点为顶点集的图被称为 G 中 E_1 的导出子图，记作 $G[E_1]$.

4.2 通路与回路

定义 4.10

设图 $G=\langle V,E\rangle$, G 中顶点与边的交替序列 $P=v_0e_1v_1e_2\ldots v_{\ell-1}e_\ell v_\ell$，被称为从 v_0 到 v_ℓ 的通路 walk，其中 v_{i-1},v_i 是 e_i 的端点，$1\le i\le\ell$. P 中的边数 ℓ 称作它的长度.

- 若 $v_0=v_\ell$，则称 P 为回路 circuit.
- 一个通路或回路，若所有的边各异，则称为简单通路 trail 或简单回路 closed trail.
- 一个简单通路，若其所有顶点（除 v_0,v_ℓ 外）也各异则称其为初级通路或路径 path.
- 若简单通路有 $v_0=v_\ell,\ell\ge3$ 则称其为初级回路或圈 cycle.
- 长度为奇数的圈称为奇圈, 长度为偶数的圈称为偶圈.
- 若通路或回路中有边重复出现, 则称其为复杂通路或复杂回路.
- 简单图中可以只用顶点序列表示通路（回路），$v_0v_1\ldots v_\ell$.

定理 4.3

在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v（$u\neq v$）存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的通路.

证明 令 $P=v_0e_1v_1e_2\ldots v_{\ell-1}e_\ell v_\ell$（$u=v_0,v=v_\ell$）为从 u 到 v 的通路. 若 $\ell\le n-1$，则定理成立. 否则，$\ell\ge n$，即通路 P 上的顶点数 $n+1$ 大于 G 中顶点数，故通路上必存在 $0\le s<t\le\ell$ 使的 $v_s=v_t$. 因此，P 上存在从 v_s 到 v_s 长度至少为 1 的回路.

将此回路从 P 中删除后，得到的依然为从 u 到 v 的通路通路，且长度至少减 1. 由于 ℓ 为给定整数，重复此过程至多 $\ell-n+1$，可得从 u 到 v 长度小于等于 $n-1$ 的通路.

推论 4.2

在 n 阶图 G 中，若从顶点 u 到 v（$u \neq v$）存在通路，则从 u 到 v 存在长度小于等于 $n-1$ 的初级通路.

推论 4.3

在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的回路，则一定存在 v 到自身长度小于等于 n 的回路.

证明 直接应用定理 4.3，考虑 $P = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_{\ell-2} e_{\ell-1} v_{\ell-1}$.

推论 4.4

在 n 阶图 G 中，若存在 v 到自身的简单回路，则一定存在 v 到自身的长度小于等于 n 的初级回路.

4.3 图的连通性

定义 4.11

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$，若 $u, v \in V$ 之间存在通路，则称 u, v 是连通的，记作 $u \sim v$.

- 规定 $\forall v \in V$ 有 $v \sim v$.
- $\sim$ 是 V 上的等价关系, 具有自反性, 对称性和传递性.
- 若 G 是平凡图或 G 中任意两个顶点均连通, 则称 G 为连通图, 否则称 G 为非连通图.

定义 4.12

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $V' \subseteq V$ 为顶点连通关系的一个等价类, 则称导出子图 $G[V']$ 为 G 的一个连通分支 connected component. G 的连通分支数记为 $p(G)$.

定义 4.13

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$，若 $V' \subset V$ 使得 $p(G - V') > p(G)$ 且对任意 $V'' \subset V'$，均有 $p(G - V'') = p(G)$，则称 V' 是 G 的点割集 vertex cut. 若 $V' = \{v\}$, 则称 v 为割点 cut vertex.

定义 4.14

设无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 若 $E' \subseteq E$ 使得 $p(G - E') > p(G)$, 且对于任意的 $E'' \subset E'$ 均有 $p(G - E'') = p(G)$, 则称 E' 是 G 的边割集 edge cut, 简称为割集. 若 $E' = \{e\}$，则称 e 为割边 cut edge 或桥 bridge.

注意:

- 上述定义对由若干孤立点构成的图没有定义，其应用场景通常是连通（子）图.
- 在有些图论教材中，若 $V' \subset V$ 使的 $G - V'$ 不连通，则 V' 就被称为点割集.
- 边割集类似，这种定义可以扩大可定义图的范围.

定义 4.15

G 为连通非完全图, 称

$$\kappa(G) = \min\{|V'| \mid V' \text{ 为点割集}\}$$

为 G 的点连通度 vertex connectivity，简称连通度. 对于完全图规定 $\kappa(K_n) = n - 1$.

- $\kappa(G)$ 可以理解为从 G 中去除的最小顶点数使的 G 要么连通分支数增加，要么只包含一个顶点.
- $\kappa(G) = 0$ 当且仅当 $G = K_1$.
- 若 $\kappa(G) \geq k$，则称 G 为 k-连通图，$k \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

- 根据定义，若 G 是 k-连通图，则 G 亦是 j-连通图，$0 \le j \le k$.

定义 4.16

设 G 为连通图，称

$$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E' \text{ 为边割集}\}$$

为 G 的边连通度 edge connectivity. 若 $\lambda(G) \ge r$，则称 G 是 r 边-连通图，$r \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$.

定理 4.4

对于简单无向图 G 有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.

证明 若 G 为完全图 K_n，则 $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = n-1$，下面考虑非完全图. 令 $\lambda(G) = k \ge 1$, 则 G 存在边割集 $E' = \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \ldots, \{u_k, v_k\}\}$. 令 U 为 E' 中边的任意一端点构成的集合，比如 $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. 若去除 U 使的 G 连通分支数增加，则 U 为 G 的点割集且 $|U| \le k$，故 $\kappa(G) \le |U| \le k = \lambda(G)$; 否则，$u_1$ 最多有 k 个邻居. 因为可以将 E' 中的边分成两类，与 u_1 关联的边集 E_1'，以及 $E_2' \triangleq E' - E_1'$，$u_1$ 的邻居除了 E_1' 中的 v_i 之外，只能是 E_2' 的 u_i，而 $|E_1'| + |E_2'| = k$，故 u_1 至多有 k 个邻居. 如图 4.1 所示，$E' = \{\{u_1, v_1\}, \{u_1, v_2\}, \{u_2, v_2\}, \{u_3, v_2\}, \{u_4, v_3\}\}$，其中 $E_1' = \{\{u_1, u_1\}, \{u_1, v_2\}\}$, $\mathcal{N}(u_1) = \{v_1, v_2, u_2, u_3, u_4\}$. u_1 的所有邻居 $\mathcal{N}(u_1)$ 构成了图的一个点割集且 $|\mathcal{N}(u_1)| \le k$，故 $\kappa(G) \le k = \lambda(G)$.

由 $\delta(G)$ 定义可知，G 中存在一顶点 v 其度数为 $\delta(G)$，即 v 所关联的所有边个数为 $\delta(G)$，而这些边构成了 G 的一个边割集. 故 $\lambda(G) \le \delta(G)$. 综上，有 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$.

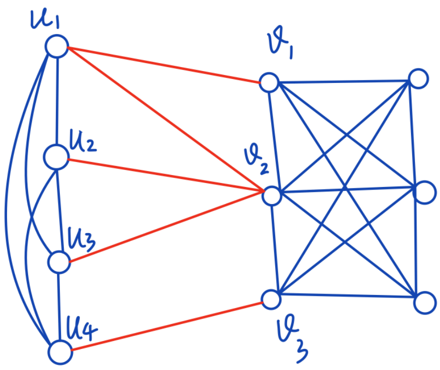
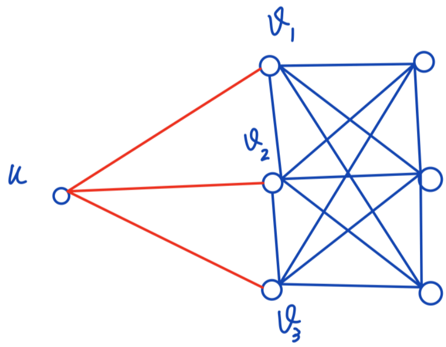
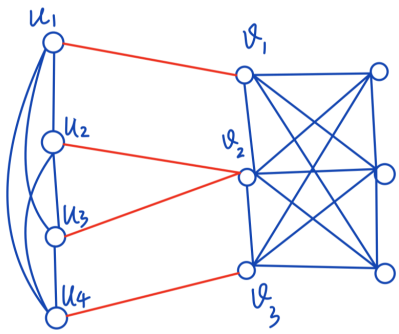


图 4.1: U 与 $V - U$ 通过边割集 E'（红色边）相连.



(a) $U = u, k = 3$.



(b) $U = u1, u_2, u_3, u_4, k = 4$.

图 4.2: 顶点集 U 与 $V - U$ 通过边割集 E' 相连.

笔记 上述证明过程针对简单图进行证明，但其证明过程和结论都可以推广到任意无向图，即上述结论对多重图 multigraph 也成立. 需要指出，上述示例图 4.1 并不会出现，因为不存在 $u_1 \in U$ 与 $V - U$ 中的多个顶点邻接，而剩余顶点 $u_3, u_4 \ne u_1$. 通过进一步分析，可以得出如下情况，1) 要么 U 中 k 条边割集都是由同一个顶点 u 出发指向 $V - U$，此时 $U = \{u\}$，如图 4.2a所示；2) 要么，U 中各顶点均不相同，且每个 $u_i \in U$ 都只与 $V - U$ 中的一个顶点邻接，其剩余 $k-1$ 个邻居都在 U 中，如图 4.2b所示.

✍ **练习 4.1** 令 C 为无向图 G 的一个圈，e_1, e_2 为 C 上的任意两条边，试证明 G 中存在包含边 e_1, e_2 的割集.

证明 由于 C 为圈，因此将 e_1, e_2 从 C 中删除，一定会将 C 分割成两个连通分量 C_1, C_2，令 E' 为 G 中连接 $V(C_1)$ 和 $V(G) - V(C_1)$ 的所有边 (构成的集合). 由其定义可知，E' 将 G 分割成两个连通分量 $G[V(C_1)], G[V(G) - V(C_1)]$，且其任意子集无法将两连通分量分开，故 E' 为 G 的割集，又 $e_1, e_2 \in E'$，因此 E' 为满足所求条件的割集.

注 此证明由 5 班薛卓阳、徐龙宇同学给出.

第五章 欧拉图与哈密顿图

内容提要

❏

5.1 欧拉图

定义 5.1 (欧拉图)

给定图（无向图或有向图）G，

1. 经过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的通过称为欧拉通路.
2. 经过图中所有边一次且仅一次行遍所有顶点的回路称为欧拉回路.
3. 具有欧拉回路的图称为欧拉图.
4. 具有欧拉通路而无欧拉回路的图称为半欧拉图.

♣

- 规定平凡图为欧拉图.
- 欧拉通路和欧拉回路都是简单的.
- 环不影响图的欧拉性.

定理 5.1

无向图 G 是欧拉图当且仅当 G 是连通的且没有奇度顶点.

♡

证明 ($\Rightarrow$) 令 G 为欧拉图，则 G 中存在欧拉回路连接了 G 中所有顶点. 由于是回路，对 $v \in V(G)$ 每在回路中出现一次，则必有一条边从 v 进入，同时有另一条边从 v 离开，从而使的 v 的度数加 2，故 v 的度数为偶数.

($\Leftarrow$) 令 G 是连通的且没有奇度顶点的无向图，边数为 m. 现对 m 进行归纳证明.

(1) $m = 1$ 时，由 G 为连通且无奇度顶点可知，G 为环，故为欧拉图.

(2) 假设 $m = k$ $(k \geq 1)$ 时结论成立，考虑 $m = k + 1$. 现从任意顶点出发，通过扩大路径法构造极大路径 $P = v_0v_1 \ldots v_\ell$，由于 $v_0v_1 \in E(G)$ 且 G 无奇度顶点故 $d(v_0) \geq 2$，又 v_0 为极大路径起点，故 v_0 在 P 中还存在另一邻居 $v_i, 2 \leq i \leq \ell$, 即 G 中存在长度大于等于 2 的圈，记为 $C = v_0v_1 \ldots v_i$.

(3) 现将 C 中的边从 G 中全部删除，得到 s 个连通分量 $G_1, \ldots, G_s$ $(s \geq 1)$, 则每个连通分量至多有 k 条边且顶点度数均为偶数（C 为圈，其为每个顶点贡献的度数均为偶数）. 由归纳假设知，G_i 中存在欧拉回路，记为 $C_i, 1 \leq i \leq s$. 由 G 为连通图可知，每个 C_i 均与 C 都至少有一个公共顶点.

(4) 对 G 中顶点重新编号，使的 C 与 C_i 的公共顶点编号为 v_i (若有多个则任选一个), $1 \leq i \leq s$. 现以如下方式构造 G 中的欧拉回路，从 C 中任意顶点 v 出发遍历 C 中顶点，若遇到 v_i 则沿着 C_i 行走再回到 v_i，最后回到 v.

第六章 树

内容提要

❑

6.1 树的定义与性质

定义 6.1 (无向树)

连通无回路的无向图称为无向树，简称树. 每个连通分支都是树的无向图称为森林. 平凡图称为平凡树. 在无向树中，悬挂顶点称为树叶，度数大于或等于 2 的顶点称为分支点.

引理 6.1

令 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m \geq n-1$.

证明 使用归纳法证明. $n=1$ 时，平凡图 $m \geq 0$，结论成立.

假设结论对 $n=k\,(k \geq 1)$ 成立，现证对 $n=k+1$ 成立. 从 G 中去掉任意顶点，令所得连通分支量为 $G_1, G_2, \ldots, G_s, 1 \leq s \leq k$，每个连通分量顶点数和边数分别记为 $n_i, m_i, 1 \leq i \leq s$. 则 $m \geq \sum_{i=1}^{s} m_i + s$，因为产生 s 个连通分量至少需要去掉 s 条边（考虑其逆操作，将 s 个连通分量经一个顶点连到一起）. 又由归纳假设知 $m_i \geq n_i - 1$. 故，

$$m \geq \sum_{i=1}^{s} m_i + s \geq \sum_{i=1}^{s}(n_i - 1) + s = \sum_{i=1}^{s} n_i = n-1.$$

定理 6.1

设 $G = \langle V, E\rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的:

1. G 是树.
2. G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径.
3. G 中无回路且 $m = n-1$.
4. G 是连通的且 $m = n-1$.
5. G 是连通的且 G 中任何边均为桥.
6. G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边后所得图中有唯一的一个含新边的圈.

证明

- (1) $\Rightarrow$ (2). 若路径不唯一，必有回路.
- (2) $\Rightarrow$ (3). 若 G 中有回路，则回路上任意两点之间的路径不唯一. 对 n 用归纳法证明 $m = n-1$.
  当 $n=1$ 时成立. 设 $n=k\,(k \geq 1)$ 时成立，现证 $n=k+1$ 时也成立. 任取一条边 e，由于 G 中无回路，故 $G-e$ 有两个连通分支 G_1, G_2 且 $n_1 \leq k, n_2 \leq k$. 由归纳假设知 $m_i = n_i - 1, i = 1, 2$. 故，
  $$m = m_1 + m_2 + 1 = n_1 + n_2 - 2 + 1 = n-1.$$
- (3) $\Rightarrow$ (4). 只需证明 G 连通. 用反证法. 否则 G 有 $s\,(s \geq 2)$ 个连通分支，它们都是树（连通无回路）. 于是，有 $m_i = n_i - 1$，
  $$m = \sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{i=1}^{s} n_i - s = n - s \quad (s \geq 2),$$
  这与 $m = n-1$ 矛盾.

- (4) $\Rightarrow$ (5). 只需证明 G 中每条边都是桥. $\forall e \in E$ 均有 $|E(G-e)| = n-1-1 = n-2$. 由引理 6.1可知 $G-e$ 不连通，故 e 为桥.
- (5) $\Rightarrow$ (6). 由 (5) 知 G 为树（连通无回路）. 由 (1) $\Rightarrow$ (2) 知，$\forall u, v \in V, u \neq v$ 有 u 到 v 存在唯一路径，加新边 $\{u, v\}$ 可得唯一的圈.
- (6) $\Rightarrow$ (1). 只需证明 G 连通. 考虑任意两个顶点 u, v，由于在 u, v 之间加边可以产生圈，故在原图中 $u \sim v$，即 G 连通.

6.2 生成树

定义 6.2 (最小生成树 minimum spanning tree)

设无向连通带权图 $G = \langle V, E, W\rangle$，$T$ 是 G 的一棵生成树，T 的各边权重之和称为 T 的权重，记作 $W(T)$. G 的所有生成树中权最小的生成树称为 G 的最小生成树. ♣

Kruskal 算法的朴素实现与使用 disjoint set 的实现.

Algorithm 1: Kruskal Algorithm

Input: A connected undirected weighted graph $G = \langle V, E, W\rangle$.

Output: A minimum spanning tree T of G.

```
T ← {};
Sort the edges E by weight W in decreasing order;
for {u, v} ∈ E do
    if no cycle in T ∪ {u, v} then
        T ← T ∪ {u, v};
return T;
```

Algorithm 2: Kruskal Algorithm with Disjoint Set

Input: A connected undirected weighted graph $G = \langle V, E, W\rangle$.

Output: A minimum spanning tree T of G.

```
for v ∈ V do
    makeset(v);
T ← {};
Sort the edges E by weight W in decreasing order;
for {u, v} ∈ E do
    if find(u) ≠ find(v) then
        add {u, v} to T;
        union(u, v);
return T;
```

笔记 **Kruskal 算法的正确性分析.** Kruskal 算法的核心思想在于每次都从剩余的边中选择不会形成回路、权重最小的一条. 这种贪心策略为何能保证算法的正确性？我们使用归纳的方式进行证明. 假设到当前步为止我们做出的边选择都是正确的，记已经被选择的边为集合 X，即 X 为某棵最小生成树 T 边集的子集，$X \subseteq E(T)$；X 已经将 G 中的顶点连接成了 k 个连通分支，$T_1, T_2, \ldots, T_k$，$1 \leq k \leq n$，根据我们的加边策略，每个连通分支 T_i 都是一棵子树.

令在下一步选择的边为 e，e 将 T_i, T_j 连接到一起，$1 \leq i, j \leq k$，那么我们断定 $X \cup \{e\}$ 亦可以作为某棵最小生成树边集的子集（从而 Kruskal 算法可以得到最小生成树），证明如下. 如果 $e \in E(T)$，那么证明结束；若不

然，我们考察图 $T \cup \{e\}$. 由树的性质（定理 6.1）可知，$T \cup \{e\}$ 一定含有回路，且 e 处在回路上. 此时，回路上必存在 $e' \in E(T)$ 且 e' 将 T_i, T_j 连接到一起，如图 6.1所示. 那么 $T' \triangleq T \cup \{e\} - \{e'\}$ 也是一棵树，因为其连通且有 $m-1$ 条边，由定理 6.1可知其为树. 现在检查 T' 的权重，

$$W(T') = W(T) + W(e) - W(e').$$

由于 e 和 e' 都连接 T_i, T_j，而根据我们的选边策略 $W(e) \leq W(e')$. 因此，$W(T') \leq W(T)$，又由于 T 是最小生成树，故 $W(T') = W(T)$，即 T' 也是一棵最小生成树.

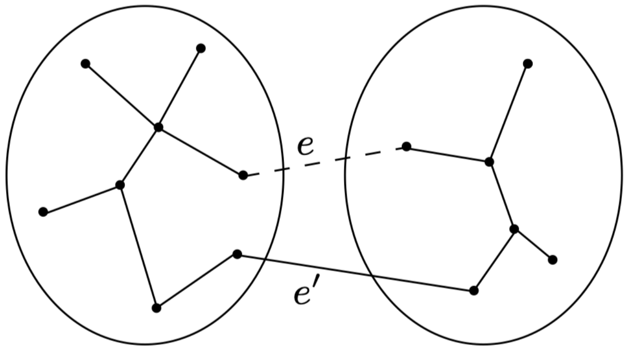


图 6.1

第七章 平面图

内容提要

- 欧拉公式 7.1

7.1 欧拉公式

定理 7.1 (欧拉公式 Eular's formula)

令 G 为连通的简单平面图，n, m, r 分别表示图的顶点数、边数、面数，那么有如下等式（拓扑不变量）成立

$$n - m + r = 2.$$

证明 如下的证明通过逐步加边来生成一个子图序列 $G_1, G_2, \ldots, G_m = G$ 进行归纳证明. 从 G 中任意选一条边构成 G_1. 假设已经得到 G_{k-1}，通过如下方式生成 G_k：任选一条与 G_{k-1} 一个顶点 a 关联的边 $\{a, b\}$，如果 b 不在 G_{k-1} 中，则将其加入 G_k. 由于 G 是连通图，上述构造方式可行，且会在第 m 步结束后得到图 G. 令 G_k 的顶点数、边数、面数分别为 n_k, m_k, r_k.

首先 $n_1 - m_1 + r_1 = 2$ 成立，假设结论对 $k \geq 1$ 成立，现证明对 $k+1$ 亦成立. 令 $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$ 为添加到 G_k 上的边. 若顶点 a_{k+1}, b_{k+1} 均在 G_k 中，则二者一定出现在某个面 R 的边界上，不然无法添加边 $\{a_{k+1}, b_{k+1}\}$，如图 7.1-(a) 所示. 此时 $m_{k+1} = m_k + 1$，同时面 R 被分割成两个区域，因此面数 $r_{k+1} = r_k + 1$，顶点数不变 $n_{k+1} = n_k$，故 $n_{k+1} - m_{k+1} + r_{k+1} = 2$ 成立. 若顶点 b_{k+1} 不在 G_k，则新加边不会改变面数，如图 7.1-(b) 所示. 此时，顶点数加一 $n_{k+1} = n_k + 1$，边数加一 $m_{k+1} = m_k + 1$，面数不变 $r_{k+1} = r_k$，故 $n_{k+1} - m_{k+1} + r_{k+1} = 2$ 亦成立.

综上，欧拉公式成立.

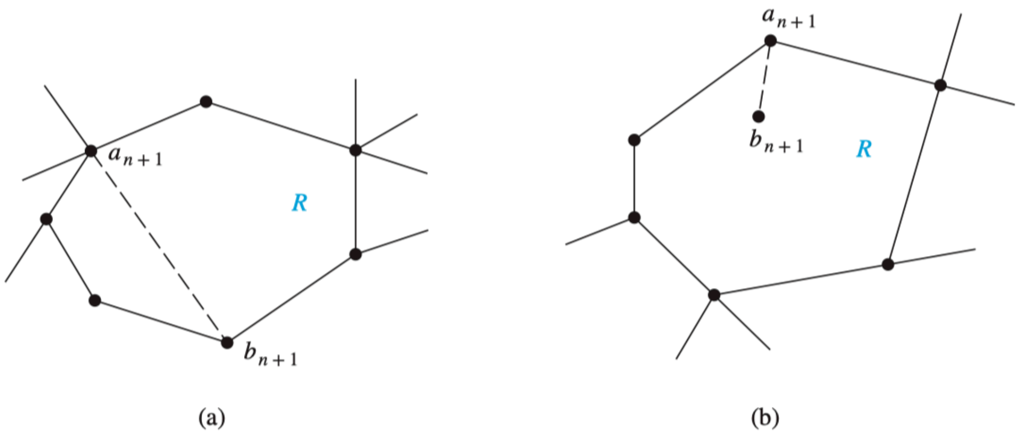


图 7.1: 加边示例