

# 集合代数

---

李修成 lixiucheng@hit.edu.cn

计算机科学与技术学院

集合的基本概念

集合的基本运算

集合恒等式

集合计数

作业

# 集合的基本概念

---

# 集合的定义与表示法

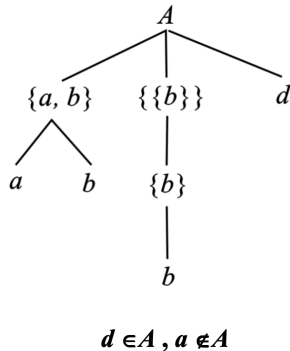
## 1. 集合的定义

- 集合 (set) 是由一系列对象 (object) 构成的整体, 这些对象被称为集合的元素.
- 通常用大写字母  $A, B, \dots$  表示集合, 用小写字母  $a, b, \dots$  表示集合的元素.
- 如果元素  $a$  属于集合  $A$ , 则记为  $a \in A$ ; 若不属于, 则记为  $a \notin A$ .
- 集合  $A$  中所包含的元素个数称为其基 (cardinality), 记为  $|A|$ .
- 数学中常见的集合:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合.

## 2. 集合表示法

- **枚举法**: 通过枚举出全体元素来表示集合.
- **谓词表示法**: 通过谓词概括出集合元素的性质.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .
- $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0\}$ .

- 集合元素的性质
  - 无序性：不关心集合中元素的顺序.
  - 相异性：集合中每个元素只计数一次.
  - 确定性：给定任意元素都可以确定是否属于一个给定集合.
  - 任意性：集合的元素也可以是集合.
- 例子：  $A = \{\{a, b\}, \{\{b\}\}, d\}$ .



集合与集合之间的关系： $\subseteq, =, \neq, \not\subseteq, \subset, \not\subset$

**定义 1.1.**  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ .

**定义 1.2.**  $A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ .

**定义 1.3.**  $A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$ .

**定义 1.4.**  $A \neq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B) \vee \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$ .

**定义 1.5.**  $A \subset B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$ .

**定义 1.6.**  $A \not\subset B \Leftrightarrow ?$

# 空集、全集与幂集

**定义 1.7 (空集).** 空集是不含有任何元素的集合，记为  $\emptyset$ .

**定理 1.1.** 空集是任何集合的子集.

**证明.** 给定任意集合  $A$ ，有  $\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$ ，（根据空集定义）恒为真.

**推论 1.1.**  $\emptyset$  具有唯一性.

**定义 1.8 (全集).** 全集 (universal set) 是包含所有研究对象的集合<sup>1</sup>，默认记为  $U$ .

**定义 1.9 (幂集).** 幂集 (power set):  $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ .

**例子 1.1.**  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ,  $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ,  $\mathcal{P}(\{a, b\}) = ?$ ,  $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = ?$ .

**思考:** 给定有穷集合  $A$ ，其幂集的大小  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$  是否成立，幂集与二进制表示有何关联？

---

<sup>1</sup>注意：全集具有相对性，是否为全集取决于问题设定.

## 集合的基本运算

---



## 定义 2.1 (基本运算).

- 并 (union)  $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$
- 交 (intersection)  $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$
- 差 (difference)  $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$
- 补 (complement)  $\overline{A} = U - A$ , 其中  $U$  为全集.
- 对称差 (symmetric difference)  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$

其中, 并和交运算可以推广至  $n$  个集合上,

- $\bigcup_{i=1}^n A_i \triangleq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\},$
- $\bigcap_{i=1}^n A_i \triangleq A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}.$

# 广义并与交

**定义 2.2 (广义并与交).** 令  $\mathcal{A}$  为一个集合的集合 (其每个元素  $A \in \mathcal{A}$  均为集合),  $\mathcal{A}$  中元素的广义并 (generalized union) 和广义交 (generalized intersection) 分别被定义

- $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ for at least one } A \in \mathcal{A}\}$ , 也记为  $\cup \mathcal{A}$ ,
- $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A \text{ for every } A \in \mathcal{A}\}$ , 也记为  $\cap \mathcal{A}$ .

**例子 2.1 (广义并与交).**

- $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ ,  $\cup \mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ ,  $\cap \mathcal{A} = \{1\}$ .
- $\mathcal{A} = \{\{a\}\}$ ,  $\cup \mathcal{A} = \{a\}$ ,  $\cap \mathcal{A} = \{a\}$ .
- $\mathcal{A} = \{a\}$ ,  $\cup \mathcal{A} = a$ ,  $\cap \mathcal{A} = a$ .

## 广义并与交的性质

- 广义并与广义交减少集合的层次（大括号减少一层）；
- 单元集  $\{a\}$  的广义并与广义交都等于  $a$ ；
- $\cup \emptyset = \emptyset$ ,  $\cap \emptyset$  无定义；
- 广义并与广义交通常情况下可以转化成初级运算
  - $\cup \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ ,
  - $\cap \{A_1, A_2, \dots, A_n\} = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ .

**例子 2.2 (广义并交运算).**  $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ , 计算  $\cap \cup \mathcal{A} \cup (\cup \cup \mathcal{A} - \cup \cap \mathcal{A})$ .

**解.** 先计算  $\cup \mathcal{A} = \{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\}$ ,  $\cap \mathcal{A} = \{a\} \cap \{a, b\} = \{a\}$ . 故,

$$\begin{aligned} & \cap \cup \mathcal{A} \cup (\cup \cup \mathcal{A} - \cup \cap \mathcal{A}) \\ &= \cap \{a, b\} \cup (\cup \{a, b\} - \cup \{a\}) \\ &= (a \cap b) \cup ((a \cup b) - a) \\ &= (a \cap b) \cup (b - a) = b. \end{aligned}$$

# 广义并与交（选学）

为什么要定义广义并与交运算？

- 广义并与交在点集拓扑（point set topology）中有着广泛运用.
- 点集拓扑是研究微分流形、微分几何（黎曼几何）、李群与李代数、代数拓扑等的基础.
- 其基本研究对象是拓扑空间（topology space），我们所熟知的度量空间（metric space）的推广.
- 拓扑可以直观理解为所研究对象的组织和邻近关系，度量空间的拓扑由 metric 指定.
- 在更一般的拓扑空间中，空间的拓扑则由其上定义的开集（open set）指定.
- 一个拓扑空间的开集数量可能是（大部分情况下）无穷个，因此需要**广义的并和交**来构造其他拓扑（如子空间拓扑，乘积拓扑）结构.

为什么要定义广义并与交运算?

- 在前期的数学学习中, 我们熟知欧式空间中开集和闭集的概念.
- $n$  个闭集的并集依然是闭集,  $n$  个开集之交依然是开集.
- $\bigcup_{n=2}^{\infty} [1/n, 1 - 1/n] = ?$ ,  $\bigcap_{n=2}^{\infty} (-1/n, 1 + 1/n) = ?$

## 集合恒等式

---

# 集合恒等式

Identity	Name
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Identity laws 同一律
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Domination laws 支配律 (零律)
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Idempotent laws 幂等律
$\overline{(\overline{A})} = A$	Complementation law 双重否定
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Complement laws 互补律

# 集合恒等式

Identity	Name
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Commutative laws 交换律
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Associative laws 结合律
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive laws 分配律
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan laws
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Absorption laws 吸收律



**例子 3.1 (De Morgan's laws).** 证明  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ .

**证明 (证明 1).** 首先, 证明  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ , 我们通过对任意  $x \in \overline{A \cap B}$  则必有  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$  来证明这一结论. 假设  $x \in \overline{A \cap B}$ , 根据集合补的定义有,  $x \notin A \cap B$ , 即  $x \in A \wedge x \in B$  为假, 亦即  $\neg(x \in A \wedge x \in B)$  为真. 使用命题的 De Morgan's law, 有  $\neg(x \in A) \text{ or } \neg(x \in B)$ . 即  $x \notin A \text{ or } x \notin B$ , 亦即  $x \in \overline{A} \text{ or } x \in \overline{B}$ . 根据集合并集的定义, 有  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ .

然后, 使用同样思路证明,  $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ . 假设  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ , 根据集合并的定义有,  $x \in \overline{A} \text{ or } x \in \overline{B}$ , 即  $x \notin A \text{ or } x \notin B$ . 故,  $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$  为真. 使用命题的 De Morgan's law, 有  $\neg(x \in A \wedge x \in B)$  为真. 根据集合交的定义有,  $\neg(x \in A \cap B)$  为真, 即  $x \notin A \cap B$ . 根据集合补的定义有,  $x \in \overline{A \cap B}$ .

证毕.

# 集合恒等式的证明

证明 (证明 2).

$\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\}$	by definition of complement
$= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\}$	by definition of does not belong symbol
$= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\}$	by definition of intersection
$= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\}$	by the first De Morgan law for propositions
$= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\}$	by definition of does not belong symbol
$= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\}$	by definition of complement
$= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}$	by definition of union
$= \overline{A} \cup \overline{B}$	by meaning of set builder notation

# 集合恒等式的证明

例子 3.2 (*Distributive laws*). 证明  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

证明.

$A \cup (B \cap C) = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B \cap C)\}$	by definition of union
$= \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C)\}$	by definition of intersection
$= \{x \mid (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)\}$	by the distributive law for prop.
$= \{x \mid (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)\}$	by definition of union
$= \{x \mid x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\}$	by definition of intersection

## 使用集合恒等式进行证明

在下面的例子，我们使用已经建立的集合恒等式证明或化简更一般的集合等式.

**例子 3.3.** 令  $A, B, C$  为集合，证明  $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$ .

证明.

$\overline{A \cup (B \cap C)}$	$= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}$	by the first De Morgan law
	$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$	by the second De Morgan law
	$= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A}$	by the commutative law
	$= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$	by the commutative law

**例子 3.4.** 化简  $((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A)$ .

根据吸收律有,

$$\begin{aligned} & ((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)) - ((A \cup (B - C)) \cap A), \\ &= (A \cup B) - A, \\ &= B - A. \end{aligned}$$

**定义 3.1.** 特征函数 (indicator function)  $\chi : U \rightarrow \{0, 1\}$ , 令  $A \subseteq U$ ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

- $\chi_A = \chi_B$  当且仅当  $A = B$ .
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$ .
- $\chi_{A \oplus B} = \chi_A +_2 \chi_B$ , 其中  $+_2$  定义为模 2 加法运算<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>即  $a +_2 b \triangleq (a + b) \pmod{2}$ .

**例子 3.5.** 集合的对称差运算满足结合律:  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ .

**证明.** 由于  $A = B \iff \chi_A = \chi_B$ , 故只需证明  $\chi_{(A \oplus B) \oplus C} = \chi_{A \oplus (B \oplus C)}$ .

$$\begin{aligned}\chi_{(A \oplus B) \oplus C} &= \chi_{(A \oplus B)} +_2 \chi_C \\ &= \chi_A +_2 \chi_B +_2 \chi_C \\ &= \chi_A +_2 (\chi_B +_2 \chi_C) \\ &= \chi_A +_2 \chi_{B \oplus C} \\ &= \chi_{A \oplus (B \oplus C)}.\end{aligned}$$

其中, 我们使用了模 2 加法运算的结合律.

**例子 3.6.** 已知:  $A \oplus B = A \oplus C$ , 求证  $B = C$ .

**证明.** 由于  $A \oplus B = A \oplus C$ , 故  $A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$ .

$$\begin{aligned} A \oplus (A \oplus B) &= A \oplus (A \oplus C) \\ \Rightarrow (A \oplus A) \oplus B &= (A \oplus A) \oplus C && \text{associativity of set } \oplus \\ \Rightarrow \emptyset \oplus B &= \emptyset \oplus C && \text{definition of set } \oplus \\ \Rightarrow B &= C. \end{aligned}$$



## 集合计数

---

## 容斥原理 (inclusion-exclusion principle)

1. 令  $A_1, A_2$  为集合, 从 Venn 图可以观察到如下结论:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

2. 对于三个集合  $A_1, A_2, A_3$ , 可以的到:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

3. 该结论可以推广至  $n$  个集合,

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{i_1} |A_{i_1}| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|, \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|. \end{aligned}$$

## 容斥原理 (inclusion-exclusion principle)

**定理 4.1 (容斥原理).** 令  $U$  为全集,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为其子集, 则

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|,$$

**推论 4.1.** 令  $U$  为全集,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为其子集, 则

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| = |U| + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|, \quad 1 \leq i_1, i_k \leq n.$$

**证明.** 使用定理证明, 留作练习.

**例子 4.1.** 求 1 到 1000 (包含 1 和 1000) 不能被 5, 6, 8 三个数整除的整数个数.

定义如下集合,

$$\begin{aligned}U &= \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 1000\}, \\A_1 &= \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod{5}\}, \\A_2 &= \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod{6}\}, \\A_3 &= \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod{8}\}.\end{aligned}$$

问题所求数即为  $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$ .

$$|A_1| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200, |A_2| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166, |A_3| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5, 6) \rfloor = 33, |A_1 \cap A_3| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5, 8) \rfloor = 25,$$

$$|A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/\text{lcm}(6, 8) \rfloor = 41, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/\text{lcm}(5, 6, 8) \rfloor = 8.$$

根据推论4.1,  $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$ .

# 集合计数

**例子 4.2.** 欧拉函数  $\phi(n)$  表示  $1, 2, \dots, n$  中与  $n$  互素数的个数, 定义  $\phi(1) = 1$ . 由于与 12 互素的数有 1, 5, 7, 11, 故  $\phi(12) = 4$ ; 同理,  $\phi(13) = 12$ . 假定整数有如下素因子分解

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

试计算  $\phi(n)$  的通项公式.

定义如下集合,

$$U = [n],$$

$$A_i = \{x \mid x \in U, x \equiv 0 \pmod{p_i}\}$$

则  $\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_k}|$ .

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

...

根据推论4.1,

$$\begin{aligned}\phi(n) &= n - \left( \frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k} \right) + \left( \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} \right) \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k} \\ &= n \left( 1 - \frac{1}{p_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right).\end{aligned}$$

实例:

- $\phi(60) = 60 \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{5} \right) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16.$
- 与 60 互素的正整数有: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

- 在计算机的算法设计与分析中，我们经常会碰到递推关系（recurrence relations），

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, c_k \neq 0.$$

- 被称为线性齐次递推（linear homogeneous recurrence）关系.
- Fibonacci 序列  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ ,  $f_0 = 0, f_1 = 1$ , 如何计算其通项  $f_n$ ?

## 组合计数 (选学)

- 线性齐次递推关系可以转化为矩阵表示, 以 Fibonacci 序列为例,

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} f_1 \\ f_0 \end{bmatrix}$$

- 令变换矩阵为  $\mathbf{A}$ , 则我们仅需计算出  $\mathbf{A}^n$ , 如何快速计算  $\mathbf{A}^n$ ?
- 回忆矩阵 eigenvector 和 eigenvalue 的定义,  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ .
- 如果矩阵  $\mathbf{A}$  存在两个线性独立的 eigenvectors  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ , 则矩阵可以对角化.

$$\mathbf{A}[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{D}$$

- $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$ .



## 组合计数 (选学)

- 求解特征方程 (characteristic equation) . 令  $f_n = r^n$ , 带入 Fibonacci 递推关系,

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}.$$

- 假设  $r \neq 0$ , 则有

$$r^2 = r + 1 \iff r^2 - r - 1 = 0.$$

- 特征方程存在根  $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ ,  $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ . 由递推关系的线性可知,

$$f_n = \alpha_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- 使用初始条件  $f_0 = 0, f_1 = 1$  计算出系数  $\alpha_1, \alpha_2$ .

## 组合计数（选学）

- 生成函数（generating function）是复杂组合计数问题的有效求解工具（通用、简洁）。
- 阅读推荐教材第 8 章，Advanced Counting Techniques.
- 生成函数与复数，
  - Find the number of subsets of  $\{1, 2, \dots, 2000\}$ , the sum of whose elements is divisible by 5.
  - [3Blue1Brown Olympiad level counting](#).
- 生成函数专著 [generatingfunctionology](#).

# 作业

---

指定教材习题 6.

- 4
- 8-(4), 8-(5), 8-(6)
- 9-(5)
- 15-(2)
- 18-(4)
- 21
- 30-(3), 30-(4)
- 35