平面图

李修成

计算机科学与技术学院

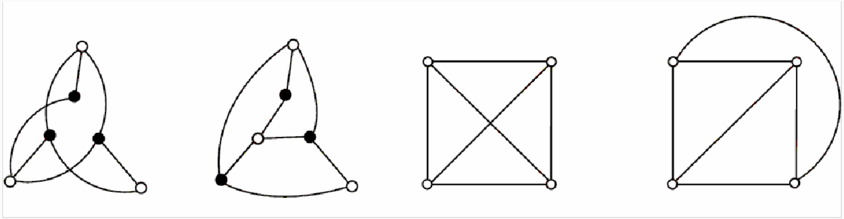
Outline

平面图的基本概念

平面图

定义 *1.1.* 给定无向图 G,

- 若能将 G 画在平面上使的除顶点外无边相交，则称 G 是可平面图，简称平面图.
- 画出的无边相交的图称为 G 的平面嵌入 planar representation.
- 无平面嵌入的图称为非平面图.

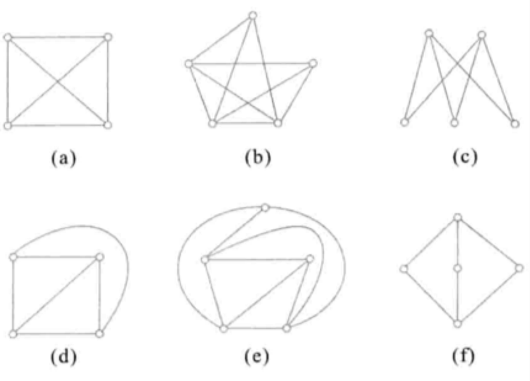


(1) **(2)** **(3)** **(4)**

(2) 是 (1) 的平面嵌入，(4) 是 (3) 的平面嵌入.

平面图的性质

- K_1, K_2, K_3, K_4 都是平面图.
- $K_5 - e$ 也是平面图.
- 完全二部图 $K_{1,n}\,(n \geq 1), K_{2,n}\,(n \geq 1)$ 是平面图.
- $K_5, K_{3,3}$ 是非平面图（推论 2.1）.



平面图的性质

命题 ***1.1.***

- 平面图的子图都是平面图, 非平面图的母图都是非平面图.
- 平行边与环不影响平面性.

由命题 1.1 可知,

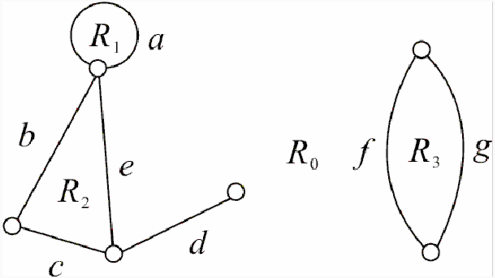
- $K_n\,(n \le 4)$ 和 $K_{2,n}\,(n \ge 1)$ 的所有子图均为平面图.
- 含 K_5 或 $K_{3,3}$ 为子图的图都是非平面图，如 $K_n\,(n \ge 5), K_{s,t}\,(s, t \ge 3)$.

平面图的面与次数

定义 *1.2.* 给定平面图 G 的平面嵌入，G 的边将平面划分成若干个区域，

- 每个区域都称为 G 的一个面；
- 其中有一个面的面积无限，称为无限面或外部面, 通常记为 R_0；
- 其余面的面积有限, 称为有限面或内部面，通常记为 $R_1, R_2, \ldots$；
- 包围每个面的所有边组成的回路组称为该面的边界；
- 边界的长度称为该面的次数，面 R 的次数记为 $\deg(R)$.

例子 ***1.1.***



$\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$,
$\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$.

次数的性质

定理 *1.1.* 平面图各面次数之和等于边数的两倍.

证明*.* 对每一条边 e，若 e 在两个面的公共边界上，则在计算这两个面的次数时，e 各提供 1. 而当 e 只在某一个面的边界上出现时，它必在该面的边界上出现两次，从而在计算该面的次数时，e 提供 2.

极大平面图

定义 ***1.3.*** G 为简单平面图, 若在 G 的任意两个不相邻的顶点之间加一条边所得图为非平面图, 则称 G 为极大平面图.

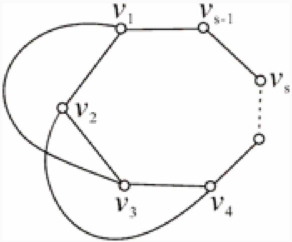
- K_1, K_2, K_3, K_4 都是极大平面图.
- $K_5, \cancel{K_{3,3}}$ 删去一条边后是极大平面图.

定理 ***1.2.*** 极大平面图是连通的，且当阶数大于等于 3 时没有割点和桥.

证明. 留作练习.

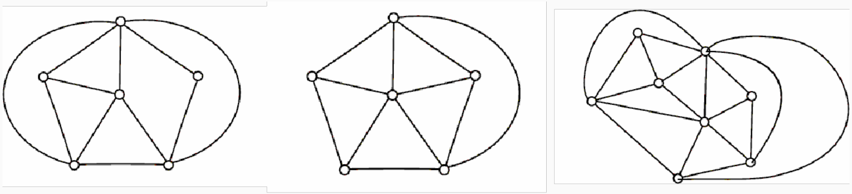
定理 *1.3.* 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶简单连通的平面图，若 G 为极大平面图，则 G 的每个面的次数均为 3.

证明. ($\Rightarrow$) 由 G 为简单平面图可知，G 中无环和平行边；由 G 连通且 $n \geq 3$ 知，G 中不存在 K_2 作为连通分支. 故 G 中各面次数均大于等于 3. 现证明各面次数都不可能大于 3. 假如 $\deg(R_i) = s \geq 4$，若 v_1 与 v_3 不相邻，则在 R_i 内加边 $\{v_1, v_3\}$ 不破坏平面性，与 G 是极大平面图矛盾. 因而 v_1 与 v_3 必相邻，且边 $\{v_1, v_3\}$ 必在 R_i 外部（为什么？）. 同理，v_2 与 v_4 也相邻且边 $\{v_2, v_4\}$ 在 R_i 的外部. 于是 $\{v_1, v_3\}$ 与 $\{v_2, v_4\}$ 相交于 R_i 的外部，与 G 是平面图矛盾.



定理的应用

例子 ***1.2.*** 如下各图是否为极大平面图?



(1) (2) (3)

极小非平面图

定义 *1.4.* 若在非平面图 G 中任意删除一条边，所得图为平面图，则称 G 为极小非平面图.

- $K_5, K_{3,3}$ 都是极小非平面图.
- 极小非平面图必为简单图.

欧拉公式

定理 *2.1.* 设 G 为 n 阶 m 条边 r 个面的连通平面图，则有

$$n - m + r = 2.$$

证明. 对 m 进行归纳证明. 当 $m = 0$ 时, G 为平凡图, $n = 1, m = 0, r = 1$, 成立.

假设 $m = k(k \geq 0)$ 时结论成立. 当 $m = k + 1$ 时:

1. 若 G 为树，令 v 为树中 1 度顶点，则 $G' = G - v$ 仍是连通的且 $n' = n - 1, m' = m - 1 = k, r' = r$. 由归纳假设, $n' - m' + r' = 2$. 于是

$$n - m + r = (n' + 1) - (m' + 1) + r' = n' - m' + r' = 2.$$

2. 若 G 不是树，则 G 中含有圈. 任取圈上一条边 e，则 $G' = G - e$ 仍连通且 $n' = n, m' = m - 1 = k, r' = r - 1$. 由归纳假设, $n' - m' + r' = 2$. 于是

$$n - m + r = n' - (m' + 1) + (r' + 1) = n' - m' + r' = 2.$$

欧拉公式的推广

定理 *2.2 (广义欧拉公式)*. 对于有 k 个连通分支的平面图 G, 令 G 的顶点数、边数和面数分别为 n, m, r, 则有

$$n - m + r = k + 1.$$

证明. 令 G 的连通分支为 $G_1, G_2, \ldots, G_k$. 由欧拉公式知

$$n_i - m_i + r_i = 2, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1}$$

G 的面数有 $r = \sum_{i=1}^{k} r_i - (k-1)$. Eq. 1 等式两边同时取 Σ 有,

$$2k = \sum_{i=1}^{k}(n_i - m_i + r_i) = n - m + r + k - 1,$$

即 $n - m + r = k + 1$.

与欧拉公式有关的定理

定理 ***2.3.*** 设 G 为连通的平面图, 每个面的次数至少为 $\ell \geq 3$，则

$$m \leq \frac{\ell}{\ell-2}(n-2).$$

证明. 由定理 1.1 及欧拉公式有,

$$2m = \sum_{i=1}^{r} \deg(R_i) \geq \ell \cdot r = \ell(2+m-n)$$

解的

$$m \leq \frac{\ell}{\ell-2}(n-2).$$

推论 *2.1.* $K_5, K_{3,3}$ 都是非平面图.

证明. 假设 K_5 是平面图, K_5 无环和平行边, 每个面的次数均大于等于 3，则

$$10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9,$$

出现矛盾. 假设 $K_{3,3}$ 是平面图, $K_{3,3}$ 中最短圈的长度为 4，每个面的次数均大于等于 4，则

$$9 \leq \frac{4}{4-2}(6-2) = 8,$$

出现矛盾.

与欧拉公式有关的定理

定理 *2.4.* 设 G 为 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的极大平面图，则 $m = 3n - 6$.

证明*.* 极大平面图是连通图，由欧拉公式得 $r = 2 + m - n$. 又 G 是极大平面图，由定理1.3知，G 的每个面的次数均为 3，所以 $2m = 3r$, 得 $m = 3n - 6$.

推论 *2.2.* 设 G 是 $n(n \geq 3)$ 阶 m 条边的简单平面图，则 $m \leq 3n - 6$.

推论 *2.3.* 设 G 是简单平面图，则 G 的最小度 $\delta \leq 5$.

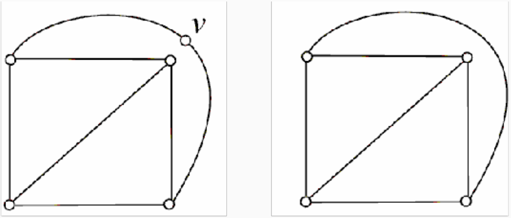
定理 *2.5.* 如果简单连通平面图 G 的每个面的次数都等于 3, 则 G 为极大平面图.

证明. 由定理 1.1 和欧拉公式知 $2m = 3r, r = 2 + m - n \Longrightarrow m = 3n - 6$. 若 G 不是极大平面图，则 G 中存在不相邻的顶点 u, v 使得 $G' = G \cup (u, v)$ 还是简单平面图. 而 $m' = m + 1$, $n' = n$，故 $m' > 3n' - 6$，与推论 2.2 矛盾.

平面图的判定

定义 *3.1.* 给定无向图 G,

- 令 $e = \{u, v\}$ 为图 G 的一条边，在 G 中删除 e，增加新的顶点 w，使 u, v 均与 w 相邻，称为在 G 中插入 2 度顶点w.
- 令 w 为 G 中与 u, v 相邻 2 度顶点，删除 w 增加新边 $\{u, v\}$，称为在 G 中消去 2 度顶点w.
- 若两个图 G_1 与 G_2 同构，或通过反复插入或消去 2 度顶点后同构，则称 G_1 与 G_2同胚.
- 若两个图 G_1 与 G_2 通过若干次插入或消去 2 度顶点后同构，则称 G_1 与 G_2同胚，G_1 is homeomorphic to G_2. The noun of homeomorphic is homeomorphism.



关于同胚

- 同胚 homeomorphism 是一个拓扑上的定义.
- 同态 homomorphism 是一个代数上的定义.
- 同构 isomorphism 是一种特殊的同态.

- A homomorphism $f\colon G \to G'$ is a map between two groups G, G' such that for all $a, b \in G$,

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

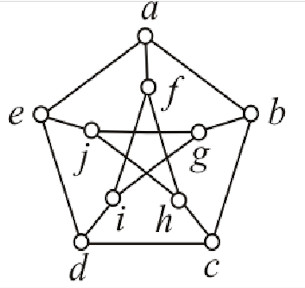
- An isomorphism $f\colon G \to G'$ from G to G' is a bijective homomorphism.
- A homeomorphism $f\colon X \to Y$ is a map between two topological spaces X, Y such that
  1. f is a bijection.
  2. f and its inverse function f^{-1} are both continuous.

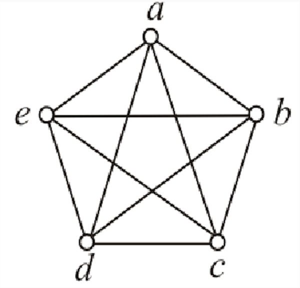
库拉图斯基 Kuratowski 定理

定理 ***3.1.*** G 是平面图 $\iff$ G 中不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

定理 ***3.2.*** G 是平面图 $\iff$ G 中无可收缩为 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

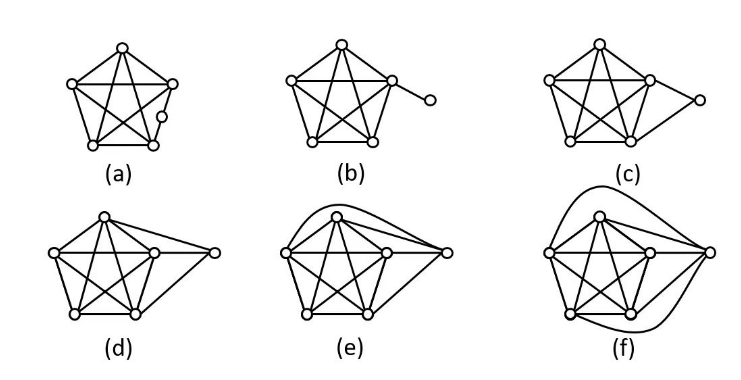
例子 3.1. 证明彼得森图为非平面图.



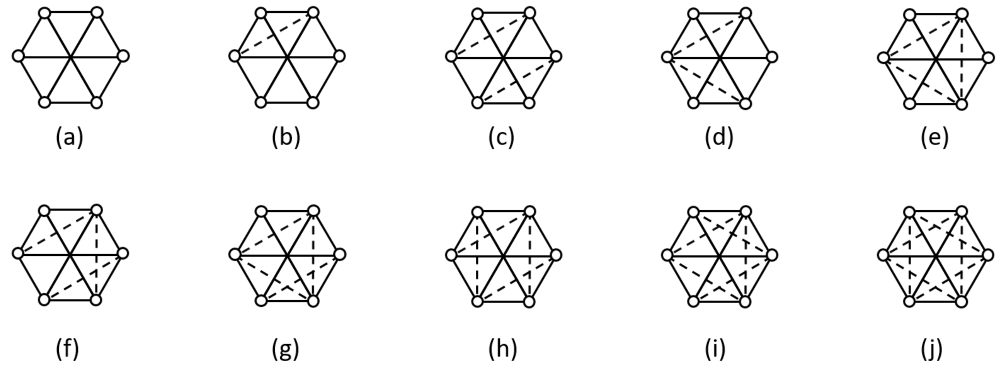


例题

例子 3.2. 对 K_5 插入一个 2 度顶点，或在 K_5 外放置一个顶点使其与 K_5 上的若干个顶点相邻，共可以产生多少个非同构的 6 阶简单连通非平面图?



例子 *3.3.* 由 $K_{3,3}$ 加若干条边能生成多少个非同构的 6 阶简单连通非平面图?



平面图的对偶图

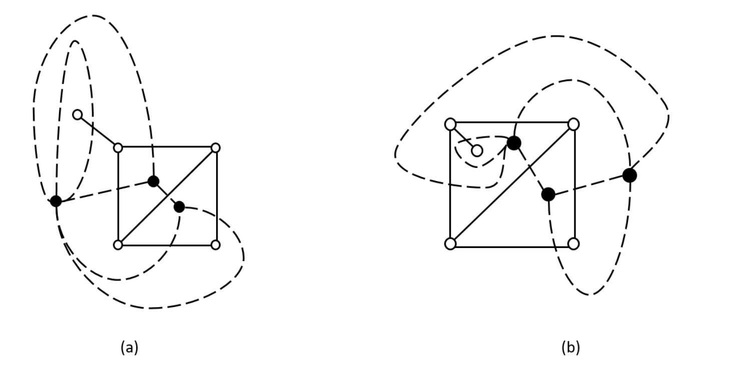
平面图的对偶图

定义 4.1. 设 G 是一个平面图的平面嵌入，构造图 G 的对偶图 G^* 如下：

- 在 G 的每一个面 R_i 中放置一个顶点 v_i^*，设 e 为 G 的一条边，
- 若 e 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上，则作边 $e^* = \{v_i^*, v_j^*\}$ 与 e 相交，且不与其他任何边相交；
- 若 e 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上，则作以 v_i^* 为端点的环 $e^* = \{v_i^*, v_i^*\}$.

平面图的对偶图

例子 *4.1.* 平面嵌入的对偶图，实线和空心点是平面嵌入，虚线和实心点是对偶图.



平面图的对偶图的性质

平面图 G 的对偶图 G^* 有以下性质.

- G^* 是平面图, 而且是平面嵌入.
- G^* 是连通图.
- 若边 e 为 G 中的环, 则 G^* 与 e 对应的边 e^* 为桥; 若 e 为 G 中的桥, 则 G^* 与 e 对应的边 e^* 为环.
- 在多数情况下,G^* 为多重图 (含平行边的图)
- 同一个平面图的不同平面嵌入的对偶图不一定同构.

平面图的对偶图的性质

定理 *4.1.* 设平面图 G 是连通的,G^* 是 G 的对偶图，n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^* = r,\ m^* = m.$

(2) $r^* = n.$

(3) 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中，则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i).$

证明. (1) 由对偶图定义可知成立.

(2) 由于 G 与 G^* 都连通，因而满足欧拉公式，$n - m + r = 2, n^* - m^* + r^* = 2$，又由 $n^* = r, m^* = m$ 可以推出 $r^* = n.$

(3) 设 G 的面 R_i 的边界为 C_i，C_i 中有 $k_1\,(k_1 \geqslant 0)$ 个桥、k_2 条非桥的边，于是 C_i 的长度为 $k_2 + 2k_1$，即 $\deg(R_i) = k_2 + 2k_1$. 而 k_1 条桥对应 v_i^* 处有 k_1 个环，k_2 条非桥的边对应从 v_i^* 处引出 k_2 条边，故 $d_{G^*}(v_i) = k_2 + 2k_1 = \deg(R_i).$

平面图的对偶图的性质

定理 ***4.2.*** 若平面图 G 有 $k(k \geq 1)$ 个连通分支，G^* 是 G 的对偶图，n^*, m^*, r^* 和 n, m, r 分别为 G^* 和 G 的顶点数、边数和面数，则

(1) $n^* = r, m^* = m$.

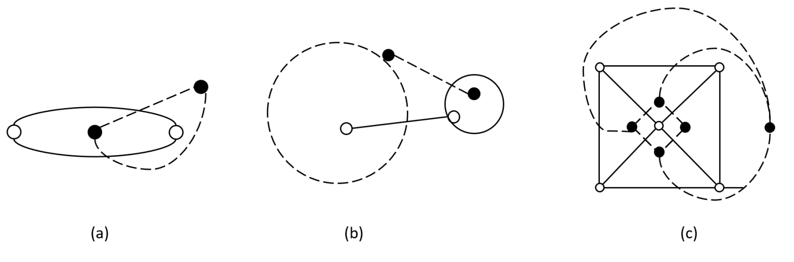
(2) $r^* = n - k + 1$.

(3) 设 G^* 的顶点 v_i^* 位于 G 的面 R_i 中，则 $d_{G^*}(v_i^*) = \deg(R_i)$.

自对偶图

定义 *4.2.* 若 G^* 是 G 的对偶图且 $G^* \cong G$，则称 G 为自对偶图.

例子 *4.2.* 下图三个实线的图都是自对偶图，虚线的图是其对偶图.

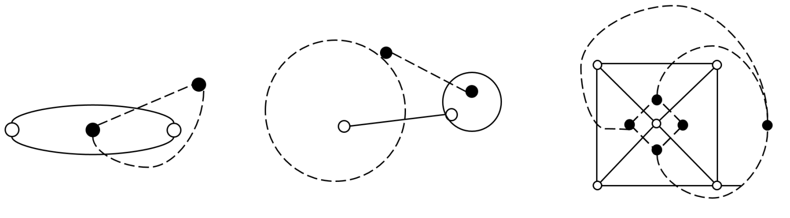


自对偶图

自对偶图

定义 4.3. 在 $n-1\,(n \geq 4)$ 边形 C_{n-1} 内放置一个顶点，连接这个顶点与 C_{n-1} 上的所有顶点. 所得的 n 阶简单图称作n 阶轮图，记作 W_n.

- n 为奇数的轮图称作奇阶轮图，n 为偶数的轮图称作偶阶轮图.
- 在图-(c) 中，实边图为 5 阶轮图 W_5.
- 轮图都是自对偶图.



(a) (b) (c)

作业

作业

习题 17：

- 4, 7, 14, 15.
- 17, 21, 24.