

# 基于有限差分的温度分布模型

## 摘要

本题是传热学中多层壁一维非稳态热量传递的数值型求解问题。已知每层材料的物理参数和最外层温度,根据所建立的数学模型和传热学相关原理来计算求解指定位置 and 时间的温度。

第一问中,已知人体皮肤温度随时间的变化情况、加热室恒温温度以及各项物理参数,需要求解从隔热服到人体皮肤的每一层材料的任一位置随时间的温度变化和分布情况。这里需要根据传热学相关原理,建立基于有限差分的温度分布模型。首先,根据差分方程的稳定条件,避免出现内部节点温度高于起始点加热后温度或者低于初始温度的情况,对每层材料列相关不等式,并根据导热微分方程,确定距离步长,即确定了节点的位置,使得区域离散化;之后确定每层的时间步长最小值,为后续计算方便,取统一时间步长为上述步长中最小值;其次,在验证了所取参数符合各个差分方程稳定条件后,利用传热学中的一维非稳态导热原理,建立节点物理量的代数方程,将其展开为泰勒级数,并忽略高阶微量,用差商代替微商,建立起每层材料内部温度场的迭代式;根据表面层能量平衡方程和差分方程的稳定条件,建立层壁的温度场迭代式;根据人体温度变化和最外层加热室温度,通过编程,求解从加热室到人体皮肤间任一所取点随时间变化的温度数值,并绘制了三维图像。

第二问中,建立优化模型,厚度的最小值是目标函数,基于对冗杂的传热学公式的考虑,我们最终使用二分法作为第二题的主要求解思路。由于需要计算的数据数量级较大,计算一次耗时较长,我们将经过推测的第 II 层厚度数值代入第 I 层的模型,求解得到人体表皮温度随时间变化的数据以及图像。根据得到的结果一步步缩小最优解的范围,并将最优解精确到 0.1 毫米。最终,经过上述的分析与求解,我们测试了 4 次,得到了最优解为 9.2 毫米。

第三问中,利用二分法的思路,基于双目标下的数学规划模型,由第 II 层和第 IV 层构成的数组对组成二维网格,采用二分思想,逐步带入某一小区域内某一个点,利用第一问中的温度场迭代式,在所规定的时间和温度条件下进行判断,并绘制相对应的该小区域的布尔图,对布尔图进行放大,可提高所取厚度精确度;当精确度符合要求时,对符合要求的最靠近边界的点相加,得到 II 层和 IV 层厚度之和,根据经济性要求,取相加值最小的点,即为我们所要求的两层的厚度,这里我们分别取得 II 层和 IV 层厚度为 11.21 毫米和 4.82 毫米。

本题中主要采用了差分迭代模型和优化模型,利用导热学原理先验证稳定条件再建立迭代公式,保证了稳定性和正确性并进行了编程实现;后续基于优化模型,通过二分法思想进行求解,能更快速地得到精确度更高的结果。

**关键词:** 有限差分; 优化模型; 非稳态传热; 二分法; 一维传热

## 一、问题重述

很多需要人员在高温环境下的工作，人们穿着专用服饰以免灼伤。随着社会的进步和人们认识的提高，在生产过程中劳动者自身的健康与安全越来越受到重视。通过实验与分析的方法得出在外界热接触条件下测定假人皮肤外侧的温度变化情况、确定在合适的条件下服饰及服饰同人体皮肤外侧空隙的厚度和大小。为了更加简单易测、使用方便且能准确反映温度变化，我们将利用数学模型进行测定。

题目中给出了专用服饰和人体皮肤外侧的构造，并用相应的字符表示（专用服装通常由三层织物材料构成，记为 I、II、III 层，其中 I 层与外界环境接触，III 层与皮肤之间还存在空隙，将此空隙记为 IV 层）；专用服装材料不同层的密度、比热、热传导率及厚度；假人皮肤外侧的测量温度。让我们完成以下问题：

- (1) 通过假人皮肤外侧温度变化的数据，建立模型计算温度分布。
- (2) 在 IV 层厚度和环境温度确定的情况下，计算满足特定条件的 II 层厚度。
- (3) 在环境温度确定时，确定满足特定条件的 II 层和 IV 层的最优厚度。

## 二、问题分析和符号说明

### 2.1 问题假设

1. 假设空气质量、人的活动等外部因素不会对此问题造成明显影响；
2. 假设防火服每一层内材料均质，物理规律一致；
3. 假设系统热传递仅考虑热传导和热辐射等；
4. 假设人穿防火服进入高温室的瞬间，衣服外侧到人皮肤之间温度为 37 摄氏度；

### 2.2 模型流程

本次建模主要采用的差分迭代公式的建立流程图如下：

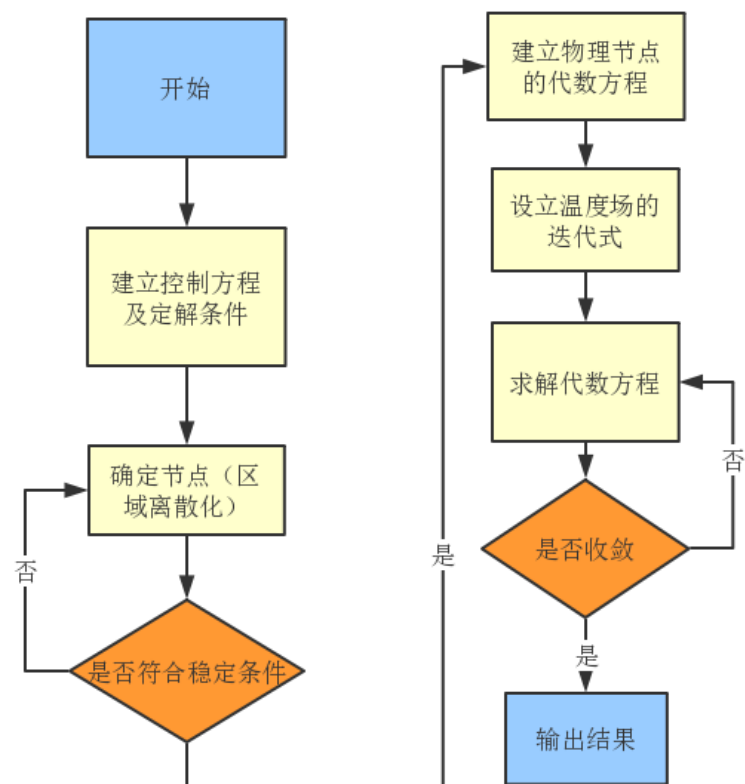


图 1 差分公式流程图

## 2.2 符号说明

符号	含义	符号	含义
$\alpha_{\Sigma}$	综合给热系数	$t_{2-1}^j$	最接近第 II、III 层层壁且在第 II 层内的点在时间为 j 时的温度
$\tau_1$	第 I 层的时间步长，角标代表层数	$t_{3+1}^j$	最接近第 II、III 层层壁且在第 III 层内的点在时间为 j 时的温度
$f_0'$	差分稳定状态值	$t_{4\lambda}^{j+1}$	第 IV 层与人交界处的在时间为 j+1 时的温度
$t_{li}^{j+1}$	第 I 层第 i 个位置在时间为 j 时的温度	$p$	时间份数

$t_{li-1}^j$	第 I 层第 i-1 个 位置在时间为 j 时的温度	$\alpha$	热传导系数
$t_{li+1}^j$	第 I 层第 i+1 个 位置在时间为 j 时的温度	$\lambda$	热传导率
$t_{l2}^j$	第 I、II 层层壁 在时间为 j 时的 温度	$C$	比热容
$t_{\lambda}$	人体温度	$\rho$	密度

三、基于有限差分的温度分布模型

对于固体材料单向导热过程的微分方程

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \alpha \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right) \tag{1}$$

式中 $\alpha$ 为导温系数，与导热能力（即导热系数 $\lambda$ ）成正比，而与其蓄热能力

（单位容积热容量 $C\rho$ ）成反比，即 $\alpha = \frac{\lambda}{C\rho}$ 。

（1）式的解是一个泛函数。对于某一具体的导热问题必须给出单值条件才能求得特解或定解，但是在工程计算中有时不能完全满足边界条件，所以分析解具有较大的局限性，而采用差分方程同样可以计算出系统内一些选定点的温度，这种方法与近似积分的数学方法是等价的。有限差分的实质是将微分方程中未知函数的导数用温度场各个节点的有限差分值的近似关系来代替，将所研究范围内的各个节点建立起封闭的代数方程组。在求解这些方程组时便可以用计算机进行程序运算。

差分模型的建立

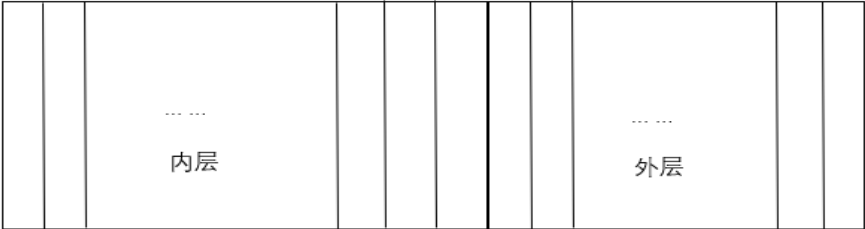


图 2 模拟差分模型的分层

如上图所示，将内层分为 $m$ 份，外层分为 $n$ 份，则内外层外层每个薄层厚度

为  $\Delta x_m = \frac{l_1}{m}$ ,  $\Delta x_n = \frac{l_2}{n}$ , 内表面层厚度为  $\frac{\Delta x_m}{2}$ , 外表面厚度为  $\frac{\Delta x_n}{2}$ 。

由于每个薄层厚度较小, 可近似用各薄层中心温度代表该层温度。另外将整个加热时间  $\tau$  分为  $p$  等份, 每份时间为  $\Delta\tau$ , 即  $p = \frac{\tau}{\Delta\tau}$ 。

将温度函数展成泰勒级数, 并忽略高阶微量, 即:

$$t_{i+1}^j = t_i^j + \frac{\Delta x}{1!} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \times \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right)_i \quad (2)$$

$$t_{i-1}^j = t_i^j - \frac{\Delta x}{1!} \left( \frac{\partial t}{\partial x} \right)_i + \frac{\Delta x^2}{2!} \times \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right)_i \quad (3)$$

(2) + (3) 式得:

$$\left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \right)_i = \frac{t_{i+1}^j - 2t_i^j + t_{i-1}^j}{\Delta x^2} \quad (4)$$

由于

$$\left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right)_i = \frac{t_i^{j+1} - t_i^j}{\Delta\tau} \quad (\text{用差代替微商}) \quad (5)$$

将 (4)、(5) 代入 (1) 式并整理, 于是有:

$$t_i^{j+1} = \frac{\alpha \Delta\tau}{\Delta x^2} (t_{i-1}^j + t_{i+1}^j) + \left( 1 - 2 \frac{\alpha \Delta\tau}{\Delta x^2} \right) t_i^j$$

令

$$f_{0m} = \frac{\partial \Delta\tau}{\Delta x^2}$$

则有:

$$t_i^{j+1} = f_{0m} (t_{i-1}^j + t_{i+1}^j) + (1 - 2f_{0m}) t_i^j \quad (6)$$

根据差分方程的稳定条件, 即  $\Delta\tau$  的选取应使 (6) 式各项系数大于或等于零, 这样可避免出现内部节点温度高于起始点加热后的温度, 以及低于初始温度的现象。因此要求

$$f_{0m} \leq \frac{1}{2} \quad (7)$$

$f_{0m}$  对于两层或多层的差分方程均应满足, 此外  $f_{0m}$  的选取还应满足对流及辐射边界条件下的差分方程的稳定条件。

### 外表面层温度计算

设外表面周围空气为  $t_{\text{气}}^j$ , 并假定  $t_{\text{气}}^j$  不随时间变化; 外表面层综合给热系数为

$\alpha_{\Sigma} = \alpha_{\text{对}} + \alpha_{\text{辐}}$ , 而在本题中, 由于温度较低, 热辐射在整个传热中占比非常小,

对最终结果产生的影响微乎其微，故不考虑热辐射产生的影响，只考虑热传导和热对流两种传热方式；在这个模型中，外表面层温度为 $t_n^j$ ；此外表面温度为 $t_{n-1}^j$ ，则根据表面层能量平衡方程

$$\lambda_n \frac{t_{n-1}^j - t_n^j}{\Delta x_n} - \alpha (t_n^j - t_{\infty}^j) = \frac{\Delta x_n}{2} C_n \rho_n \left( \frac{t_n^{j+1} - t_n^j}{\Delta \tau} \right) \quad (8)$$

$$f_{0n} = \frac{\lambda_n \Delta \tau_n}{\rho_n C_n \Delta x_n}$$

$$b_i = \frac{\alpha_n \Delta x_n}{\lambda_n}$$

$$t_n^{j+\lambda} = 1 f_{0n} (t_{n-1}^j + b_{in} t_{\infty}^j) + (1 - 2 f_{0n} b_{in} - 2 f_{0n}) t_n^j$$

根据差分方程的稳定条件

$$(1 - 2 f_{0n} b_{in} - 2 f_{0n}) \geq 0$$

$$f_{0n} \leq \frac{1}{2 b_{in} + 2} \quad (9)$$

$f_{0m}$ 、 $f_{0n}$ 可根据(7)、(9)式选取最小者，但同时还应满足界面层差分方程的稳定条件。

### 界面层温度的确定

根据接触面表层的能量平衡方程式

$$q_{\lambda} = \frac{\lambda_n}{\Delta x_m} (t_{m-1}^j - t_{mn}^j) \Delta \tau_m \quad (10)$$

$$q_{\text{出}} = \frac{\lambda_n}{\Delta x_n} (t_{mn}^j - t_n^j) \Delta \tau_n \quad (11)$$

(10) - (11) 得

$$q_{\lambda} - q_{\text{出}} = \frac{\Delta x_m}{2} \rho_m C_m (t_{mn}^{j+1} - t_{mn}^j) + \frac{\Delta x_n}{2} \rho_n C_n (t_{mn}^{j+1} - t_{mn}^j) \quad (12)$$

$$\text{令 } \frac{\lambda_m}{\Delta x_m} = R_m, \quad \frac{\lambda_n}{\Delta x_n} = R_n$$

$$R_m (t_{m-1}^j - t_{mn}^j) \Delta \tau_m - R_n (t_{mn}^j - t_n^j) \Delta \tau_n = \left( \frac{t_{mn}^{j+1} - t_{mn}^j}{2} \right) (\Delta x_m \rho_m C_m + \Delta x_n \rho_n C_n) \quad (13)$$

$$\text{令 } \Delta x_m \rho_m C_m + \Delta x_n \rho_n C_n = d_0,$$

则

$$\frac{2R_m \Delta \tau}{d_0} (t_{m-1}^j - t_{mn}^j) - \frac{2R_n \Delta \tau_n}{d_0} (t_{mn}^j - t_{n1}^j) = t_{mn}^{j+1} - t_{mn}^j \quad (14)$$

$$\text{再令 } \frac{2R_m \Delta \tau_m}{d_0} = e_m; \quad \frac{2R_n \Delta \tau_n}{d_0} = e_n$$

$$\text{则 } t_{mn}^{i+1} = (1 - e_m - e_n) t_{mn}^j + e_m t_{m-1}^j + e_n t_{n1}^j \quad (15)$$

由差分方程的稳定条件

$$\begin{cases} (1 - e_m - e_n) \geq 0 \\ e_m \geq 0 \\ e_n \geq 0 \end{cases}$$

即  $d_0 \geq 0$

$$\Delta x_m \rho_m C_m \geq \Delta x_n \rho_n C_n \quad (16)$$

$$1 - \frac{2}{d_0} (R_m \Delta \tau_m + R_n \Delta \tau_n) \geq 0$$

$$(\Delta x_m \rho_m C_m + \Delta x_n \rho_n C_n) \geq 2(R_m \Delta \tau_m + R_n \Delta \tau_n) \quad (17)$$

(16)、(17) 式为界面层差分方程的稳定条件。

## 四、模型求解

### 4.1 第一问求解（基于有限差分）

这一小问的模型抽象如图所示：

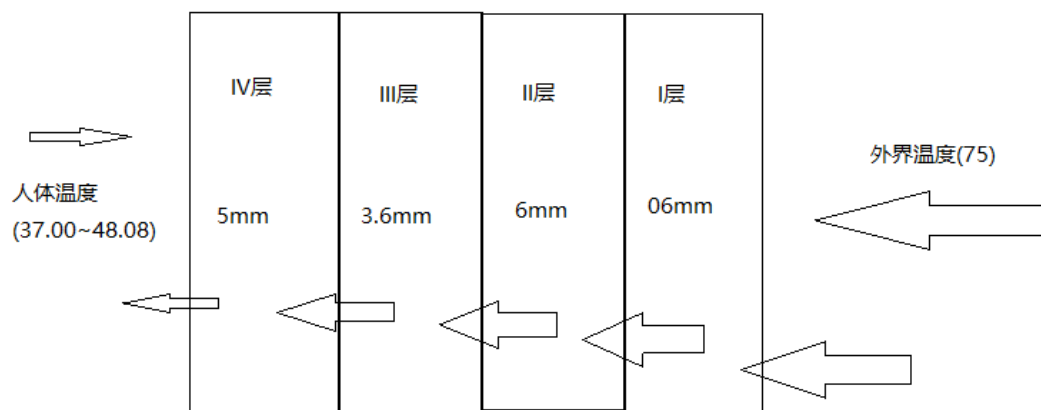


图3 第一问简化图

具体参数为：

表1 第一问所给物理量

分层	密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	比热 ( $\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$ )	热传导率 ( $\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$ )	厚度 (mm)
I层	300	1377	0.082	0.6
II层	862	2100	0.37	6
III层	74.2	1726	0.045	3.6
IV层	1.18	1005	0.028	5

根据前述所建立模型，确定稳定条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{01} \leq \frac{1}{2} \\ f_{02} \leq \frac{1}{2(b_2 + 1)} \\ f_{03} \leq \frac{1}{2(b_3 + 1)} \\ f_{04} \leq \frac{1}{2(b_4 + 1)} \end{array} \right.$$

对I：其中  $b = \frac{\alpha_\Sigma \Delta x}{\lambda}$ ，忽略热辐射的影响，这里  $\alpha_\Sigma = 29.5$ ；为方便计算，取

距离步长为统一值，取距离  $\Delta x = 0.2\text{mm} = 2 \times 10^{-4}\text{m}$



$$\begin{cases} b_1 = 1.998 \times 10^{-2} \\ b_2 = 4.429 \times 10^{-3} \\ b_3 = 3.642 \times 10^{-2} \\ b_4 = 5.853 \times 10^{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{01} \leq \frac{1}{2} \\ f_{02} \leq 0.490 \\ f_{03} \leq 0.482 \\ f_{04} \leq 0.472 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\frac{f_0 \Delta x^2}{\Delta \tau \alpha}} \text{ 确定 } \overrightarrow{\Delta \tau}$$

$$\begin{cases} \Delta \tau_1 = 2.799 \times 10^{-5} \\ \Delta \tau_2 = 2.664 \times 10^{-5} \\ \Delta \tau_3 = 1.524 \times 10^{-5} \\ \Delta \tau_4 = 2.221 \times 10^{-7} \end{cases}$$

$$\text{取 } \Delta \tau = \Delta \tau_4 = 2.221 \times 10^{-7},$$

$$\overrightarrow{f_0' = \frac{\Delta \tau \alpha}{\Delta x^2}} \quad \begin{cases} f_{01}' = 0.00397 \\ f_{02}' = 0.00409 \\ f_{03}' = 0.00702 \\ f_{04}' = 0.472 \end{cases}$$

I 层表面温度:

$$t_1^j = t_1^{j-1} + \frac{\Delta \tau (75 - 20)}{1.5} = t_1^{j-1} + 3.702 \times 10^{-6}$$

I 层内任意点:

$$t_{li}^{j+1} = f_{01}'(t_{li-1}^j + t_{li+1}^j) + t_{li}^j(1 - 2f_{02}') = 0.00397(t_{li-1}^j + t_{li+1}^j) + 0.992t_{li}^j$$

I、II 层分界:

$$q_{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\Delta x} (t_{1-1}^j - t_{12}^j) \Delta \tau_1$$

$$q_{\text{出}} = \frac{\lambda_1}{\Delta x} (t_{12}^j - t_{2+1}^j) \Delta \tau_2$$

$$e_1 = \frac{2R_1 \Delta \tau_1}{d_0} = \frac{2\lambda_1 \Delta \tau_1}{\Delta x d_0}, \quad e_2 = \frac{2\lambda_2 \Delta \tau_2}{\Delta x d_0}$$

$$d_0 = \Delta x (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)$$

$$t_{12}^{j+1} = 0.016t_{12}^j + 0.186t_{1-1}^j + 0.798t_{2+1}^j$$

$$t_{12}^{j+1} = (1 - e_1 - e_2)t_{12}^j + e_1t_{1-1}^j + e_2t_{2+1}^j$$

同理，对于 II、III、IV 层：

$$\text{II 层内任意点: } t_2^{j+1} = 0.00409(t_{2i-1}^j + t_{2i+1}^j) + 0.992t_{2i}^j$$

$$\text{II、III 层交界点: } t_{23}^{j+1} = -0.0213t_{23}^j + 0.915t_{2-1}^j + 0.0637t_{3+1}^j$$

$$\text{III 层内任意点: } t_3^{j+1} = 0.00702(t_{3i-1}^j + t_{3i+1}^j) + 0.986t_{3i}^j$$

$$\text{III、IV 层交界点: } t_{34}^{j+1} = -0.0363t_{34}^j + 0.955t_{3-1}^j + 0.00866t_{4+1}^j$$

$$\text{IV 层内任意点: } t_4^{j+1} = 0.472(t_{4i-1}^j + t_{4i+1}^j) + 0.056t_{4i}^j$$

$$\text{IV 层与人体交界: } t_{4人}^{j+1} = t_{4人}^j + 1.481 \times 10^{-7}(t_{人} - 37)$$

根据上述公式，我们使用 matlab 编程实现。计算出相应的温度分布数据，详见附件 X。下面给出由 matlab 生成的温度分布图象。

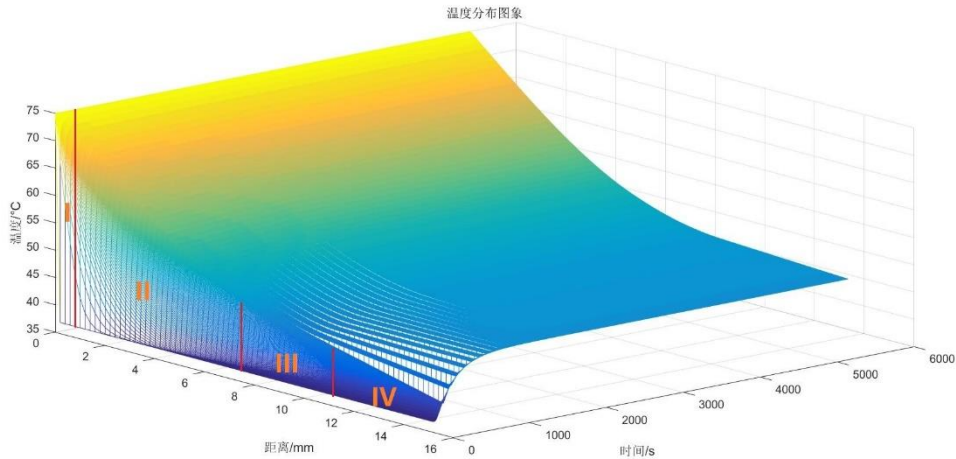


图 4 温度分布图像

根据图像可知，在从最外面的第 I 层到最靠近人皮肤的第 IV 层，温度呈现衰减趋势，并且，整个防护服在测试的 5400 秒过程中很快达到稳态，温度呈现定值的状态。

另外，图像第 IV 层上方的阶梯形状的产生原因，由于设定的基础数据均为 37°C，因此在迭代初期，部分点求得的温度数值是一样的，但这种情况会随着迭代次数的递增而逐渐消失，对后期的影响可以忽略不计。

## 4.2 第二问求解

### 4.2.1 模型的建立

对于问题二的求解我们原本的思路是建立一种思想类似于线性规划的模型，即把第 II 层的厚度设为变量  $x$  带入计算，得到温度关于  $x$  的一个方程式，然后对  $x$  进行约束得到解。但如第一问模型的建立所示，由于传热学的公式特别冗杂，得到的方程式也异常复杂，同时又很难建立起结果有效且精确的模型。因此对于第二个问题，我们求解的方法是二分法。我们的具体思路是通过第一问的公式，对第 II 层材料的厚度不断赋值进而确定最优解的大小范围。最终把得到的第二问的解精确到小数点后一位，即为 0.1 毫米。其中二分法模型的优化条件如下：

$$\begin{aligned} \min & \text{ 第二层厚度} \\ \text{s. t.} & \begin{cases} t_{77}^{60} \leq 47 \\ t_{77}^{55} \leq 44 \end{cases} \end{aligned}$$

### 4.2.2 分析与结论

由于每次计算量非常巨大，不适宜多次运算，因此我们设计了如下的测试赋值顺序。

首先是第一遍取 11 毫米作为防护服第 II 层的厚度带入问题一的模型。之所以选择 11 毫米的原因是，根据第一题的结果当第 IV 层厚度为 5 毫米，第 II 层厚度为 6 毫米的时候会超过第二题要求的“人皮肤外侧温度不超过  $47^{\circ}\text{C}$ ，且超过  $44^{\circ}\text{C}$  的时间不超过 5 分钟”，但温度数据又不是完全偏离于第二题的条件。并且第二题的第 IV 层厚度条件为 5.5 毫米接近于第一题的条件，因此我们大胆假设第二问的结果是大于 6 毫米的数，同时也不会超过 15 毫米。最终使用 11 毫米作为测试数据带入计算。得出结果如下图所示，当第 II 层厚度为 11 毫米时，温度数据符合题目要求，但并不贴近数值要求，即厚度过大。虽然保证了防护性，但是用此方案设计出来的防护服将会异常笨重，也提高了防护服的生产成本和使用门槛，不符合实际要求，因此我们进行第二遍测试。

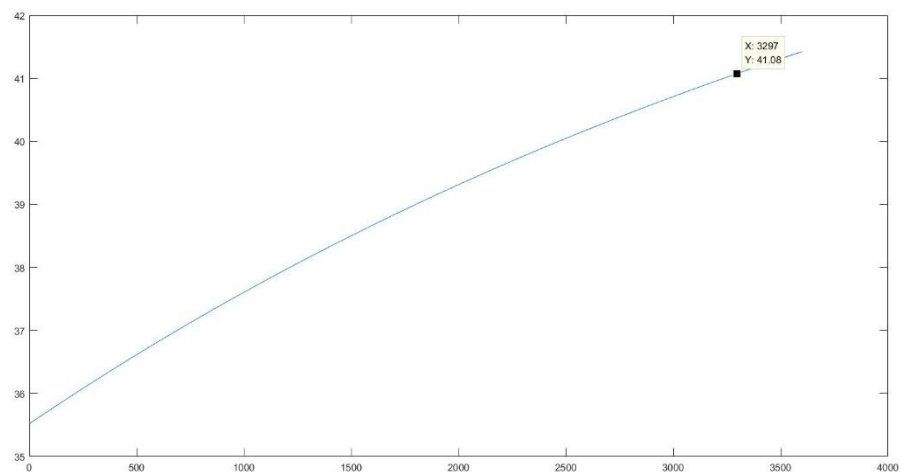


图 5 11mm 测试结果

为了进一步得到精确解，我们使用 9 毫米这个数据作为防护服第 II 层的数据带入计算。而我们选择 9 毫米而不是 8 毫米作为测试数据的原因是，相对于 6 毫米的测试结果，11 毫米测试结果更加贴近题目要求，因此精确解会更加靠近 11 毫米。类似于上面的分析，经过计算，结果如下图所示，9 毫米依然不符合题目要求。但已经得到了很贴近于题目要求的温度数值，因此我们使用稍高于 9 毫米的数值代入程序测试。

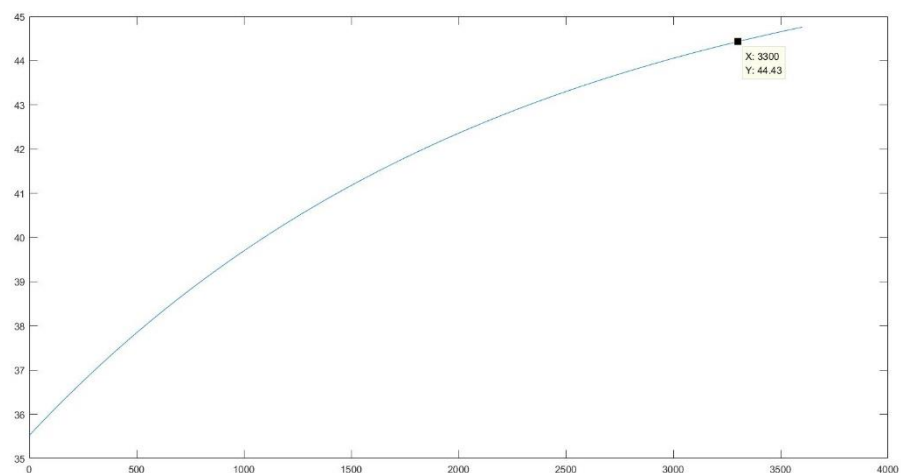


图 6 9mm 测试结果

这次我们尝试使用 9.1 毫米作为测试数据，得到结果如下图红色线所示，温度略微超过题目要求范围，于是我们再次使用 9.2 毫米带入程序计算得到结果如下图绿色线所示，几乎正好符合题目对于防护服“超过 44°C 的时间不超过 5 分钟”的要求。

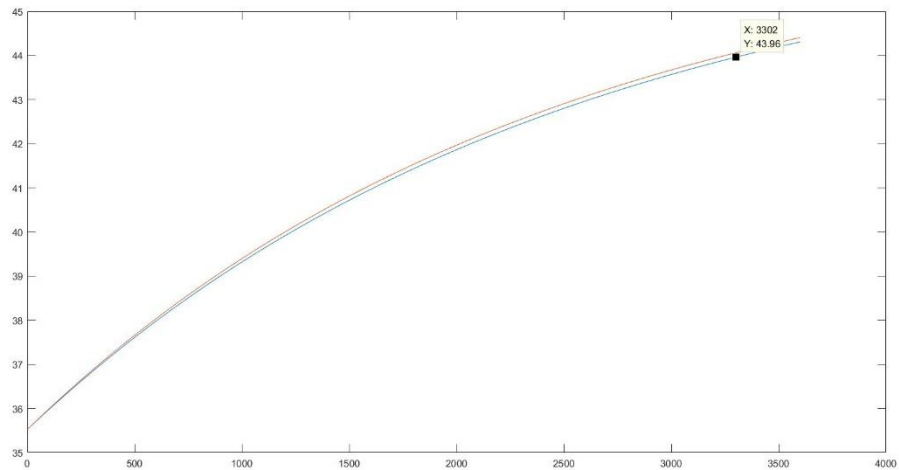


图 7 9.1、9.2mm 测试结果

基于上述的分析，我们得到问题二的结果——第 II 层的最优厚度是 9.2 毫米。

### 4.3 第三问求解（基于双目标规划方法）

根据前面所建立的模型和二分法的思想，我们重新取步长为 0.1mm，将第 II 层厚度 (0.6~25) 分成 0.6、0.7、…、24.9、25.0 这 245 份。将第 IV 层分为 0.6、0.7、…、6.3、6.4 这 59 份，组成二维数组对，并将数组对相加的结果记为 G，则 G 的范围为 [1.2, 31.4]。根据 5.1 节所示公式和二分法的思路，首先验证 1.2（即 0.6+0.6）、31.4（即 25+6.4）和 18.8（即 12.5+3.2），计算过程和代码与 5.1 求解过程相同，只是外界温度由 75 变为 80，第 II 层和第 IV 层厚度又所建立数组对进行替代，在这里不再赘述。结果显示 1.2 不可以，18.8 可以，31.4 可以，因此我们选取 [0.7, 12.5] 和 [0.7, 3.2] 这个区域进行计算，不断缩小区域和 G 的值，选取了部分结果如下表所示：

表 2 双目标下筛选表（1）

IV\II	10.9	11	11.1	11.2	11.3	11.4	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9	12
4.3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	Y
4.4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	Y	Y
4.5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	Y	Y	Y
4.6	X	X	X	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.7	X	X	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.8	X	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.9	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
5	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
5.1	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
5.2	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
5.3	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
5.4	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
5.5	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y

图中 X 为不适合（工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度超过了 47°C，或者超过 44°C 的时间超过了 5 分钟）Y 代表合适，选取图中灰色与白色交界处的点，并计算其 G 值；因 G 值代表了两层厚度之和，所以基于经济因素考量，我们需要取尽量小的 G 值所代表的区域进行再次二分计算，如此一步步进行寻优计算。我

们最终选取精确度为 0. 1mm 和 0. 1mm，所计算的到合适区域如下表所示：

表 3 双目标下筛选表（2）

IVII	11.15	11.16	11.17	11.18	11.19	11.2	11.21	11.22	11.23	11.24	11.25	11.26
4.75	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4.76	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4.77	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
4.78	X	X	X	X	X	X	Y	X	X	X	X	X
4.79	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	Y
4.8	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	Y
4.81	X	X	X	X	X	X	X	X	Y	Y	Y	Y
4.82	X	X	X	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.83	X	X	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.84	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.85	X	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.86	X	X	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
4.87	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y

在这个区域中，计算 G 值，并选取 G 值更小的数组对，在这里我们最终选取 (11. 21, 4. 82) 这个数组对，即在达到要求的基础上，并进行了经济考量后，第 II 层和第 IV 层最优厚度分别是 11. 21mm 和 4. 82mm。

## 五、模型分析

### 5. 1 模型优劣分析

#### 5.1.1 模型的优点

- （1）在模型计算前期进行傅里叶验证，以保证后期结果正确性。
- （2）结合传热学专业知识，利用差分方程，从问题本身出发，导出最核心的迭代公式。
- （3）在本题基础上建立的模型切合实际，原创性较强，可以更好地进行推广，结合实际情况对模型进行求证，所建立模型适用性广、稳定性好。
- （4）本文在正确、清楚地分析了题意地基础上，建立了合理、科学的计算模型，模型显示格式清晰明了，易于编程。

#### 5.1.2 模型的缺点

- （1）建立的模型对于此题数据量较为庞大，使得计算量大导致结果产生速度较慢。
- （2）本题第三问没有用多种算法进行分析验证，没有尝试更多方式。

### 5. 2 模型改进

- （1）我们可以取更多的点进行计算，增加结果的精确性。
- （2）在计算结果时，可以用不同的算法尝试计算。
- （3）可以尝试更多变量的计算，例如人体血液循环等方式，提高结果的精确性。

## 参考文献

- [1] 杨世铭. 传热学[J]. 传热学, 2006(08):44-258
- [2] 于易. 计算机求解多层复合壁面的非稳态导热[J]. 能源工程, 1988(Z1):24-25.
- [3] 弓自洁. 工业炉多层炉墙非稳态传热计算[J]. 钢铁, 1992(04):67-72.
- [4] 弓自洁. 圆筒形多层砌体非稳态热计算[J]. 工业加热, 1991(05):19-23.
- [5] 孙彩华. 传热学中的有限元法数值分析[J]. 青海师范大学学报(自然科学版), 2013, 29(01):31-33+44.

## 附录

%%主程序

```
z=zeros(5401,77);
suoxu=zeros(1,77);
jiegua=zeros(1,77);
for i=1:77
    if i==1
        suoxu(1,i)=75;
    else
        suoxu(1,i)=37;
    end
end

for i=1:(540000000/5)
    if i~=1
        suoxu=jiegua;
    end

    for j=2:76
        jiegua(j)=fun1(j,suoxu(j+1),suoxu(j-1),suoxu(j));
    end
    jiegua(1)=75;
    jiegua(77)=suoxu(77);

    if mod(i,500000)==0
        jiegua(77)=VarName2(i/500000,1);
        z((i/500000),:)=jiegua;
    end
    y1=47.06*exp(-1*t*10^(-7))-11.54*exp(-0.0004*t);
end
```

%%数值计算函数

```
function [ t_out ] = fun1( k,t1,t2,t3 )
dt=5*10^(-5);dx=0.0002;

a1=1.985*10^(-7);
```



```

a2=2.044*10^(-7);
a3=3.514*10^(-7);
a4=3.361*10^(-5);
a5=5.034*10^(-7);
a6=6.464*10^(-7);
a7=1.757*10^(-6);

temp1=(a1*dt)/(dx^2);
temp2=(a2*dt)/(dx^2);
temp3=(a3*dt)/(dx^2);
temp4=(a4*dt)/(dx^2);
temp5=(a5*dt)/(dx^2);
temp6=(a6*dt)/(dx^2);
temp7=(a7*dt)/(dx^2);

if k==4
    t_out=temp5*(t1+t2)+(1-2*temp5)*t3;
end
if k==34
    t_out=temp6*(t1+t2)+(1-2*temp6)*t3;
end
if k==52
    t_out=temp7*(t1+t2)+(1-2*temp7)*t3;
end
if k<4
    t_out=temp1*(t1+t2)+(1-2*temp1)*t3;
end
if k>4&& k<34
    t_out=temp2*(t1+t2)+(1-2*temp2)*t3;
end
if k>34&& k<52
    t_out=temp3*(t1+t2)+(1-2*temp3)*t3;
end
if k>52
    t_out=temp4*(t1+t2)+(1-2*temp4)*t3;
end

%t_out=p*(t1+t2)+(1-2*p)*t3;
end

```