多目标决策中灵敏度分析的方法探讨

浙江大学　左　军

摘要　对于多目标决策中的多属性决策，国内外至今还很少有文献讨论其灵敏度分析的一般方法。为此，本文推导了几个进行灵敏度分析的基本公式，并提出了灵敏度区间和灵敏度矩阵的概念，从而为多属性决策的灵敏度分析提供了一种简单、有效、实用的分析方法。

一、引　　言

近十多年来，国内外的许多决策理论方面的专家学者都在致力于多目标决策问题的研究，如文献[1～4]中就比较全面地介绍了多种多目标决策的理论和方法。但是，在已有的文献中，研究和探讨多目标决策灵敏度分析问题的理论和方法却不多，而灵敏度分析对于多目标决策问题来说，恰恰又有着十分重要的意义。

首先，多目标决策过程中，许多参数都是由人主观估计的，带有一定的偏好性，也可能含有不准确的成份在内，这就需要通过灵敏度分析来检查这种不准确性是否可以容忍，即检查所估计的参数是否敏感。若敏感的话，须进一步谨慎准确地进行参数估计，否则决策结果会不稳定，致使决策可靠性低。其次，多目标决策问题中的某些参数也许是可以控制的，那么这些可控参数的变动是如何影响决策结果的分析也正属于灵敏度分析的范围。通过灵敏度分析可确定这些可控参数的合理变动范围，从而进一步进行决策分析。另外，在文献[5]中，美国多目标决策理论专家、大系统理论权威Haimes,Y.Y.也说明了灵敏度分析的重要性。

多目标决策（multiple criteria decision making,简作MCDM）一般可分成两大类型[2,4,6]：多目标规划决策(multi objective decision making，简写MODM)和多属性决策（multi attribute decision making，简作MADM)。对于MODM的灵敏度分析，文献[1、3、7、8、9]等中进行了不同程度的研究，这些研究主要是以单目标数学规划的灵敏度分析为基础的。对于MADM的灵敏度分析却还缺乏系统的、理论上的研究和探讨。现有的分析基本上都是采用所谓参数摄动法进行，而参数摄动法尽管原理简单，却有许多缺点，如分析的盲目性大，计算量大，且不能有效地确定参数的敏感点和合理变化的范围等，因而有必要研究简便实用的MADM灵敏度分析方法。

一般说来，MADM大多可以用表1的形式表述。

表中，$A_i(i=1,2,\cdots,n)$为第i方案；$O_j(j=1,2,\cdots,m)$为第j个目标；$w_j(j=1,2,\cdots,m)$

本文于1986年7月3日收到。

表1 多属性决策表

目标 / 目标权重 / 价值 / 方案	O_1	O_2	…	O_m	综合价值
	w_1	w_2	…	w_m	
A_1	v_{11}	v_{12}	…	v_{1m}	F_1
A_2	v_{21}	v_{22}	…	v_{2m}	F_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	v_{n1}	v_{n2}	…	v_{nm}	F_n

为第 j 个目标的权重，一般有$\sum_{j=1}^{m} w_j=1$；v_{ij}为第i方案在第j目标下的价值，这种价值常用评分值、效用值等来表示；F_i为第i方案的综合价值，可用$Fi=\sum_{j=1}^{m} w_j v_{ij}$进行计算，其结果可用来对各方案进行排序，从而进行决策。

在理论研究和实际应用中，这类MADM方法是很多的。如文献[2]中的简单加权和法(SAW法)；文献[10,11]中的层次分析法(AHP法)；文献[12,13]中的多属性效用函数法(MUF法)；文献[14]中的多因素模糊集法(MAFS法)；文献[15]中的多重两两比较决策法(MBDM)；文献[16]中的二项系数加权和法；文献[17]中的价值评分法；文献[18]中的等效系数法等等。这些方法基本上都是解决表1形式的多属性决策问题的。因此对表1形式的多属性决策问题进行灵敏度分析的方法探讨显得更为重要。

本文给出了一种对这类MADM的灵敏度进行分析的方法。文中首先推导出当两个目标权重变化时，导致各方案综合价值排序变化的边际权重计算公式，继而推导出引起各方案综合价值排序发生变化时的边际价值的计算公式；与此同时，文中提出了灵敏度区间和灵敏度矩阵的概念；最后通过一分析实例说明了这类MADM灵敏度分析的过程和内容。

二、目标权重的灵敏度分析与边际权重的计算公式

由前面的讨论可知，MADM的灵敏度分析任务主要有：①确定某个参数(w_j或v_{ij})变化时，是否对决策结果产生影响，即这个参数在什么范围内变化会（或不会）影响决策的排序结果；②原决策问题中的某些参数是否敏感，即这些参数若稍有变动是否影响决策结果。

为区分清楚起见，这里用下列符号表示原决策问题中的参数：$\bar{w}_j(j=1,2,\cdots,m)$——目标权重；$\bar{v}_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$——各方案在各目标下的价值；$\bar{F}_i(i=1,2,\cdots,n)$——综合价值。相应用下列符号表示变化的参数：$w_j(j=1,2,\cdots,m)$，$v_{ij}(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m)$，$F_i(i=1,2,\cdots,n)$。在这一节中我们首先讨论目标权重的灵敏度分析方法，下一节讨论方案价值的灵敏度分析方法。

对于目标权重，在大多数情况下，其值都为归一化的，即满足：

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1 \tag{1}$$

$$w_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

因而当某个目标权重变化时，必然引起其它权重的变化。为了使分析简单，这里假定当一个目标权重变化时，仅使其它目标权重中的某一个发生相应的变化，除这两个外的目标权重仍保持为原决策问题中的值。在这种假定下，我们来研究当这两个目标权重相互变化时，是怎样影响决策结果的。

设这两个目标权重分别为第 r 目标和第 s 目标的，即为 w_r 和 w_s，则由(1)式可得

$$w_r + w_s = \bar{w}_r + \bar{w}_s \tag{3}$$

(3)式说明 w_r 和 w_s 的最大变动范围为 $[0, \bar{w}_r + \bar{w}_s]$。当 w_r 和 w_s 在这个范围内相互变化时，可能存在某值，正好使某两个方案的综合价值变为相等，这时的目标权重即为所谓的边际目标权重。若设某两个方案为 p 方案和 q 方案，则边际目标权重 $w_r\binom{r\,s}{p\,q}$ 和 $w_s\binom{r\,s}{p\,q}$ 可由下式推得

$$F_p = F_q \tag{4}$$

因此

$$\begin{aligned} F_p &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r,s}}^{m} \bar{w}_j \bar{v}_{ij} + w_r\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{pr} + w_s\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{ps} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \bar{w}_j \bar{v}_{pj} - \bar{w}_r \bar{v}_{pr} - \bar{w}_s \bar{v}_{ps} + w_r\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{pr} + w_s\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{ps} \\ &= \bar{F}_p - \bar{w}_r \bar{v}_{pr} - \bar{w}_s \bar{v}_{ps} + w_r\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{pr} + w_s\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{ps} \end{aligned}$$

同理

$$F_q = \bar{F}_q - \bar{w}_r \bar{v}_{qr} - \bar{w}_s \bar{v}_{qs} + w_r\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{qr} + w_s\binom{r\,s}{p\,q}\bar{v}_{qs}$$

将 F_p、F_q 代入(4)式并整理可得：

$$\bar{F}_p + \bar{F}_q + w_r\binom{r\,s}{p\,q}(\bar{v}_{pr} - \bar{v}_{qr}) + w_s\binom{r\,s}{p\,q}(\bar{v}_{ps} - \bar{v}_{qs}) = \bar{w}_r(\bar{v}_{pr} - \bar{v}_{qr}) + \bar{w}_s(\bar{v}_{ps} - \bar{v}_{qs}) \tag{5}$$

又由(3)式可得：

$$w_r\binom{r\,s}{p\,q} + w_s\binom{r\,s}{p\,q} = \bar{w}_r + \bar{w}_s \tag{6}$$

由(5)、(6)式联立求解可得边际目标权重如下：

$$w_r\binom{r\,s}{p\,q} = \bar{w}_r - (\bar{F}_p - \bar{F}_q)/[(\bar{v}_{pr} - \bar{v}_{qr}) - (\bar{v}_{ps} - \bar{v}_{qs})] \tag{7}$$

$$w_s\binom{r\,s}{p\,q} = \bar{w}_s - (\bar{F}_p - \bar{F}_q)/[(\bar{v}_{ps} - \bar{v}_{qs}) - (\bar{v}_{pr} - \bar{v}_{qr})] \tag{8}$$

$$r=1,2,\cdots,m-1;\quad s=r+1,\cdots,m;\quad p=1,2,\cdots,n-1;\quad q=p+1,\cdots,n$$

其中 $w_r\binom{r\,s}{p\,q}$ 和 $w_s\binom{r\,s}{p\,q}$ 分别表示在 r、s 目标权重变动的情况下，正好使 p、q 方案的综合价值相等的第 r 目标和第 s 目标的边际权重。

求出边际目标权重后，即可进行目标权重的灵敏度分析。

由于 w_r 和 w_s 的最大变化范围为 $[0, \bar{w}_r + \bar{w}_s]$ 区间，因此若求出的 $w_r\binom{r\,s}{p\,q}$ 和 $w_s\binom{r\,s}{p\,q}$ 在此区间外，则说明 w_r 和 w_s 在 $[0, \bar{w}_r + \bar{w}_s]$ 内变化不会对原决策结果产生影响，即这时的 w_r 和 w_s 变化不影响 p、q 方案的原排序结果，或可以说此时对 p、q 方案而言，$\bar{w}_r$ 和 $\bar{w}_s$ 是不敏感的。这种情况下 $w_r\binom{r\,s}{p\,q}$ 和 $w_s\binom{r\,s}{p\,q}$ 的取值一般有两种：①都为无穷大（分母项为零），②两者之中

有一个为负值，另一个为大于 $\bar{w}_r+\bar{w}_s$ 的值。

当求出的边际目标权重的值 $w_r\binom{rs}{pq}$ 和 $w_s\binom{rs}{pq}$ 落在区间 $[0,\bar{w}_r+\bar{w}_s]$ 内时，说明 w_r 和 w_s 的变化将影响 p、q 方案的原排序结果，其影响的情况如下（不失一般性，设 p、q 方案的原排序结果为 $\bar{F}_p>\bar{F}_q$）：

1．当 $w_r\binom{rs}{pq}>\bar{w}_r$ 时（此时有 $w_s\binom{rs}{pq}<\bar{w}_s$，下面仅讨论 w_r 变化的影响，对 w_s 有相应的结论），即边际目标权重大于原目标权重时，则①若 w_r 的变化小于 $w_r\binom{rs}{pq}$，即 $w_r<w_r\binom{rs}{pq}$ 时，排序结果不变，仍有 $F_p>F_q$；②若 w_r 等于 $w_r\binom{rs}{pq}$，有 $F_p=F_q$；③若 w_r 变到大于 $w_r\binom{rs}{pq}$ 时，即 $w_r>w_r\binom{rs}{pq}$，则排序发生变化，这时有 $F_p<F_q$。

2．当 $w_r\binom{rs}{pq}<\bar{w}_r$ 时（此时 $w_s\binom{rs}{pq}>\bar{w}_s$），则①若 $w_r>w_r\binom{rs}{pq}$，排序不变，仍有 $F_p>F_q$；②若 $w_r=w_r\binom{rs}{pq}$，有 $F_p=F_q$；③若 $w_r<w_r\binom{rs}{pq}$，排序变化，有 $F_p<F_q$。

3．当 $\bar{w}_r=\bar{w}_r\binom{rs}{pq}$ 时（此时 $w_s\binom{rs}{pq}=\bar{w}_s$），由式（7）、（8）知，这时原排序结果只能是 $\bar{F}_p=\bar{F}_q$。当 w_r 在 $w_r\binom{rs}{pq}$（或 $\bar{w}_r$）左右时，将导致不同的决策排序结果，或是 $F_p>F_q$，或是 $F_p<F_q$，具体视参数 $\bar{v}_{pr}$、$\bar{v}_{ps}$、$\bar{v}_{qr}$、$\bar{v}_{qs}$ 的大小而定。

根据上面的讨论，可以将 w_r 的变化范围分为使原排序不变区间和使原排序变化区间，并可用图1表示之（仅画出第1种情形的讨论结果）：

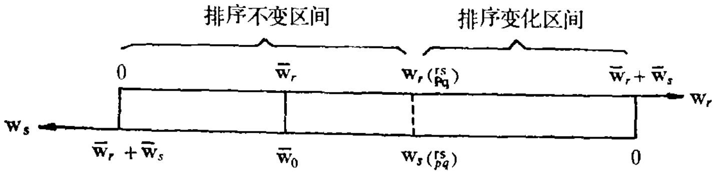

图1　目标权重的灵敏度区间（$w_r\binom{rs}{pq}>\bar{w}_r$）

借助于区间图，既可以直观而方便地分析 w_r 的变化对 p、q 方案排序的影响，又可以检查原决策问题中 $\bar{w}_r$ 的灵敏度，即检查 $\bar{w}r$ 与 $w_r\binom{rs}{pq}$ 差的绝对值 $\delta=|\bar{w}_r-w_r\binom{rs}{pq}|$ 是否足够大，若 δ 很小（如小于某一给定的容差），则说明 $\bar{w}_r$ 是一敏感参数，需谨慎细致地估计确定。

由于图1便于直观地进行灵敏度分析，因而这里定义其为所谓目标权重的灵敏度区间

表2　目标权重的灵敏度矩阵

权重对 / 边际权重对 / 权重最大变化范围 / 方案对	w_1/w_2	…	w_r/w_s	…	w_{m-1}/w_m
	$\bar{w}_1+\bar{w}_2$	…	$\bar{w}_r+\bar{w}_s$	…	$\bar{w}_{m-1}+\bar{w}_m$
A_1-A_2	$w_1\binom{12}{12}/w_2\binom{12}{12}$	…	$w_r\binom{rs}{12}/w_s\binom{rs}{12}$	…	$w_{m-1}\binom{m\text{-}1m}{12}/w_m\binom{m\text{-}1m}{12}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_p-A_q	$w_1\binom{12}{pq}/w_2\binom{12}{pq}$	…	$w_r\binom{rs}{pq}/w_s\binom{rs}{pq}$	…	$w_{m-1}\binom{m\text{-}1m}{pq}/w_m\binom{m\text{-}1m}{pq}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$A_{n-1}-A_n$	$w_1\binom{12}{n-1n}/w_2\binom{12}{n-1n}$	…	$w_r\binom{rs}{n-1n}/w_s\binom{rs}{n-1n}$	…	$w_{m-1}\binom{m\text{-}1m}{n\text{-}1\ n}/w_m\binom{m\text{-}1m}{n\text{-}1\ n}$

图。此外，利用(7)、(8)式计算出的任两目标权重对的边际权重后，可以构成表2形式的矩阵。根据这个矩阵即可方便地画出某目标权重对的灵敏度区间图，借此可分析该目标权重的变化对多目标决策的总排序结果的影响(此为纵向分析)；另外还可分析某一对方案的排序易受哪些目标权重对变化的影响（此为横向分析)。因此表2所示的矩阵可称为目标权重的灵敏度矩阵。

上述目标权重灵敏度分析的内容和过程，具体可见第四节中的实例说明。

三、边际价值的计算公式和方案价值的灵敏度分析

对于各方案在各目标下的价值v_{pr}的灵敏度分析，视其是绝对值（如评分值、效用值、模糊判定值等）还是相对值（即归一化值）而存在两种分析公式和方法。

1. 绝对价值的灵敏度分析

设v_{pr}为第p方案在第r目标下的价值变化值，则当v_{pr}变到某个正好使第p方案的综合价值等于第q方案的综合价值时的值即为边际价值，设其为v_{pr}^{q}，则其可由下式来确定：

$$F_p = \bar{F}_q \qquad (9)$$

将$F_p = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r,s}}^{m} \bar{w}_j \bar{v}_{pj} + \bar{w}_r v_{pr}^{q} = \bar{F}_p + \bar{w}_r (v_{pr}^{q} - \bar{v}_{pr})$代入(9)式整理后可得：

$$v_{pr}^{q} = \bar{v}_{pr} - (\bar{F}_p - \bar{F}_q)/\bar{w}_r \qquad r=1,2,\cdots,m;\ \ p,q=1,2,\cdots,n;\ \ p\neq q \qquad (10)$$

利用(10)式即可计算任一方案的边际价值，进而进行价值的灵敏度分析如下：

当原决策问题中的$\bar{v}_{pr}$离v_{pr}^{q}很近时，说明原排序结果不稳定，即$\bar{v}_{pr}$为敏感性参数；当p方案的v_{pr}由$\bar{v}_{pr}$所在的区间经v_{pr}^{q}变到另一区间时，会使原排序结果发生变化。

应当注意的是，用(10)式计算出的边际价值v_{pr}^{q}若在价值的允许取值范围外（如效用值一般为0～1，评分值为0～10等)，则说明无论v_{pr}在允许取值范围内怎样变化都不会使p、q

表3　绝对价值的灵敏度矩阵

边际价值 \ 目标 方案对	O_1	…	O_r	…	O_m
A_1 — A_2 ⋮ A_1 — A_n	V_{11}^{2} ⋮ V_{11}^{n}	… … …	V_{1r}^{2} ⋮ V_{1r}^{n}	… … …	V_{1m}^{2} ⋮ V_{1m}^{n}
⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
⋮　⋮ A_p——A_q $(p\neq q)$ ⋮　⋮	⋮ V_{p1}^{q} ⋮	… … …	⋮ V_{pr}^{q} ⋮	… … …	⋮ V_{pm}^{q} ⋮
⋮	⋮	…	⋮	…	⋮
A_n — A_1 ⋮ A_n — A_{n-1}	V_{n1}^{1} ⋮ V_{n1}^{n-1}	… … …	V_{nr}^{1} ⋮ V_{nr}^{n-1}	… … …	V_{nm}^{1} ⋮ V_{nm}^{n-1}

方案的排序发生变化，这时的 v_{pr} 为绝对的不敏感。

v_{pr}^{q} 也可构成所谓的绝对价值灵敏度矩阵（见表3）。根据表3，可以进行灵敏度分析，纵向可判断 v_{pr} 的变化是如何影响 p 方案与其它方案的排序的，横向可了解到 p 方案与其它方案的排序变化受到哪些目标下的价值变化影响及其影响的程度等。

2. 相对价值的灵敏度分析

当方案的价值为归一化值时（如文献[10、12] 中的Saaty判断矩阵的特征向量值），有

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_{ij}=1 \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{11}$$

实际上许多多属性决策中的方案绝对价值都可化成归一化的相对值。最简单的归一化方法是利用

$$\bar{v}_{ij}=\bar{v}'_{ij}\Big/\sum_{k=1}^{n}\bar{v}'_{kj} \qquad i=1,2,\cdots,n;\quad j=1,2,\cdots,m \tag{12}$$

其中 $\bar{v}'_{ij}$ 为归一化前的绝对值，$\bar{v}_{ij}$ 为归一化后的相对值。因此相对价值的灵敏度分析显得更为普遍一些。

由于归一化的原因，当某个 v_{ij} 变化时，必然引起该目标 j 下其它方案价值的变化，类似于目标权重灵敏度分析的思路，这里也讨论某目标下两个方案价值相互变化而其它方案价值保持原值不变时对该两方案排序的影响。

设第 r 目标下某两个方案 p、q 的变化价值分别为 v_{pr} 和 v_{qr}，则两者变化时应满足

$$v_{pr}+v_{qr}=\bar{v}_{pr}+\bar{v}_{qr} \tag{13}$$

并且可能存在一正好使(4)式成立的值，即所谓相对边际价值，设其为 v_{pr}^{pq} 和 v_{qr}^{pq}，则仿目标边际权重的推导过程可得

$$v_{pr}^{pq}=\bar{v}_{pr}-(\bar{F}_p-\bar{F}_q)/2\bar{w}_r \tag{14}$$

$$v_{qr}^{pq}=\bar{v}_{qr}-(\bar{F}_q-\bar{F}_p)/2\bar{w}_r \tag{15}$$

$$r=1,2,\cdots,m;\quad p=1,2,\cdots,n-1;\quad q=p+1,\cdots,n$$

利用 v_{pr}^{pq} 和 v_{qr}^{pq}，可进行如下的灵敏度分析：若 $\bar{v}_{pr}$ 愈接近 v_{pr}^{pq}，则原排序愈不稳定，$\bar{v}_{pr}$ 愈敏感；若 v_{pr} 从 v_{pr}^{pq} 的一侧区间变到另一侧时，将使排序发生变化。同样，类似于目标权重灵敏度的分析，若由(14)、(15)计算出的值落在$[0,\bar{v}_{pr}+\bar{v}_{qr}]$外，说明 v_{pr} 和 v_{qr} 在$[0,\bar{v}_{pr}+\bar{v}_{qr}]$内变化不会对 p、q 方案的排序产生影响。相对边际价值的灵敏度矩阵见表4。根据矩阵的纵向(列)和横向(行)可分别分析某目标下各方案价值的变化对各方案排序的影响和任两方案的排序会受哪些价值变化的影响及影响的程度等。

表4 相对价值的灵敏度矩阵

边际价值 \ 目标 方案对	O_1	$\cdots$	O_r	$\cdots$	O_m
$A_1—A_2$	V_{11}^{12}/V_{21}^{12}	$\cdots$	V_{1r}^{12}/V_{2r}^{12}	$\cdots$	V_{1m}^{12}/V_{2m}^{12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$A_{n-1}—A_n$	$V_{n-1\,1}^{n-1\,n}/V_{n1}^{n-1\,n}$	$\cdots$	$V_{n-1\,r}^{n-1\,n}/V_{nr}^{n-1\,n}$	$\cdots$	$V_{n-1\,m}^{n-1\,n}/V_{nm}^{n-1\,n}$

四、灵敏度分析的内容、过程及实例说明

综上所述，可以将MADM的灵敏度分析的内容和过程归纳如下：

1． 计算边际目标权重和边际方案价值，构成灵敏度矩阵。

2． 进行目标权重的灵敏度分析。

① 利用权重灵敏度矩阵中的某一列（即某一对权重所对应的列）构成这对权重变化的灵敏度区间图，然后分析这对权重变化影响各方案总排序的情况。

② 利用权重灵敏度矩阵的某一行（即某一对方案所对应的行）分析这对方案的排序可能受到哪些权重对变化的影响及影响的程度。若给出容差指标（即能够容忍的参数估计误差），还可判定哪些权重对的原值对所分析的方案对来说是敏感的。

3． 进行方案价值的灵敏度分析

视具体的MADM问题中的价值形式，进行绝对价值或/和相对价值的灵敏度分析。或分析某目标下某方案价值的变化是如何影响该方案与其它方案的排序关系的，或分析任一对方案的排序关系是受哪些目标下两方案价值变化的影响的，并进而确定哪些为敏感性的参数。

当然，上面所列内容并不一定要求样样分析到，任何决策者或决策分析者都可根据自己所面临的问题需要而选其中的某些内容进行，如分析某个参数的灵敏度、分析某对参数的灵敏度、分析某对方案的排序稳定性等等。

下面就以文献[2]中的一MADM例来进行灵敏度分析，从而具体说明灵敏度分析的方法和内容。

表5为文献[2]中给出的购买喷气式战斗机的多属性决策的原始问题，其中有四种机型（即四种购买方案），要考虑六种目标属性。

表5 文献[2]中的MADM问题

方案属性 \ 目标属性	最高速度（马赫数）	越海连续飞行距离（海里）	最大有效负荷（磅）	购买成本（百万美元）	可靠性（高—低）	灵活性（高—低）
购买方案 \ 属性值 \ 目标权重	0.2	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3
A_1	2.0	1500	20000	5.5	中等	非常高
A_2	2.5	2700	18000	6.5	低	中等
A_3	1.8	2000	21000	4.5	高	高
A_4	2.2	1800	20000	5.0	中等	中等

表6为转化成无量纲价值形式的MADM问题，其中表6(1)为绝对价值形式，表6(2)为相对价值形式（利用(12)式从表6(1)转化而来）。限于篇幅，本文仅说明表6(1)形式的灵敏度分析，对于表6(2)形式的灵敏度分析，作者只给出了其灵敏度矩阵，有兴趣者可据之分析。

由表6可知，这个MADM的排序结果为$A_3>A_1>A_4>A_2$（即$\bar F_3>\bar F_1>\bar F_4>\bar F_2$）。

表6 无量纲价值形式的MADM

表6(1) ORIGINAL PROBLEM OF MADM: FORM OF ABSOLUTE VALUES

ATTRIBUTE(G.j)	1	2	3	4	5	6	SUM
WEIGHT(W.j)	0.200	0.100	0.100	0.100	0.200	0.300	
A_1	0.800	0.560	0.950	0.820	0.710	1.000	0.8350
A_2	1.000	1.000	0.860	0.690	0.430	0.560	0.7090
A_3	0.720	0.740	1.000	1.000	0.000	0.780	0.8520
A_4	0.880	0.670	0.950	0.900	0.710	0.560	0.7380

表6(2) ORIGINAL PROBLEM OF MADM: FORM OF RELATIVE VALUES

ATTRIBUTE(G.j)	1	2	3	4	5	6	SUM
WEIGHT(W.j)	0.200	0.100	0.100	0.100	0.200	0.300	
A_1	0.235	0.189	0.253	0.240	0.249	0.345	0.2685
A_2	0.294	0.337	0.229	0.202	0.151	0.193	0.2237
A_3	0.212	0.249	0.266	0.293	0.351	0.269	0.2741
A_4	0.259	0.226	0.253	0.264	0.249	0.193	0.2337

表7为目标权重的灵敏度矩阵，其中表7(1)为绝对价值形式MADM的，表7(2)为相对价值形式MADM的。表中的值若为9.999，则表示此处的值或是无穷大，或是负值，即落在$[0, \bar{w}_r + \bar{w}_s]$区间外的值。

根据表7(1)，即可进行权重的灵敏度分析。

① 分析某一对权重变化对排序结果的影响。这里选其中的w_1/w_3和w_2/w_6两列进行分析。对于w_1/w_3列，由于全为9.999，意味着无论w_1和w_3如何变化，都不会影响原排序的结果。对于w_2/w_6列，由这列的数值可构成如下的灵敏度区间图(图2)：

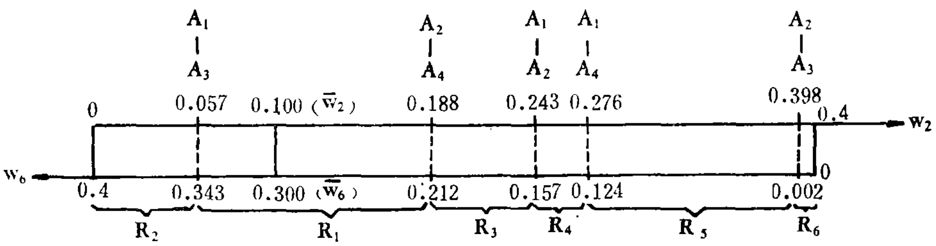

图2 w_2/w_6的灵敏度区间

由图2可知，当w_2和w_6落在R_1区时，原排序不变，仍有$A_3>A_1>A_4>A_2$；当落在R_2区时，排序变为$A_1>A_3>A_4>A_2$；当落在R_3区时，排序变为$A_3>A_1>A_2>A_4$；当落在R_4区时，排序变为$A_3>A_2>A_1>A_4$；当落在R_5区时，排序变为$A_3>A_2>A_4>A_1$；当落在R_6区时，排序变为$A_2>A_3>A_4>A_1$。如果w_2或w_6为可控参数，则可由上分析确定适当的值来得到所需的决策结果。

② 分析任一对方案的排序稳定性。这里选原排序结果中的最优方案A_3和次优方案A_1来进行分析。

由A_1—A_3行可知共有11对目标权重的变化可能会使最优方案变成次优方案，即w_1/w_2、

表 7　目标权重的灵敏度矩阵

表 7 (1)　MATRIX OF MARGINAL WEIGHTS: VALUES ARE ABSOLUTE

w_r+w_s	0.300	0.300	0.300	0.400	0.500	0.200	0.200	0.300	0.400	0.200	0.300	0.400	0.300	0.400	0.500
w_r/w_s	w_1/w_2	w_1/w_3	w_1/w_4	w_1/W_5	w_1/w_6	w_2/w_3	w_2/w_4	w_2/w_5	w_2/w_6	w_3/w_4	w_3/w_5	w_3/w_6	w_4/w_5	w_4/w_6	w_5/w_6
A_1	9.999	9.999	9.999	9.999	0.397	9.999	9.999	0.275	0.243	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_2	9.999	9.999	9.999	9.999	0.103	9.999	9.999	0.025	0.157	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_1	0.265	9.999	0.265	0.246	0.079	9.999	9.999	0.255	0.057	9.999	0.171	0.037	0.255	0.057	0.167
A_3	0.035	9.999	0.035	0.154	0.421	9.999	9.999	0.045	0.343	9.999	0.129	0.363	0.045	0.343	0.333
A_1	9.999	9.999	9.999	9.999	0.387	9.999	9.999	9.999	0.276	9.999	9.999	0.320	9.999	0.287	0.420
A_4	9.999	9.999	9.999	9.999	0.113	9.999	9.999	9.999	0.124	9.999	9.999	0.080	9.999	0.113	0.080
A_2	9.999	9.999	9.999	0.368	0.486	9.999	9.999	0.272	0.398	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_3	9.999	9.999	9.999	0.032	0.014	9.999	9.999	0.028	0.002	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_2	0.026	9.999	0.288	0.272	0.442	0.169	0.154	0.148	0.188	9.999	0.253	9.999	9.999	9.999	0.096
A_4	0.238	9.999	0.012	0.128	0.058	0.031	0.046	0.152	0.212	9.999	0.047	9.999	9.999	9.999	0.404
A_3	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_4	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999

表 7 (2)　MATRIX OF MARGINAL WEIGHTS: VALUES ARE RELATIVE

w_r+w_s	0.300	0.300	0.300	0.400	0.500	0.200	0.200	0.300	0.400	0.200	0.300	0.400	0.300	0.400	0.500
w_r/w_s	w_1/w_2	w_1/w_3	w_1/w_4	w_1/w_5	w_1/w_6	w_2/w_3	w_2/w_4	w_2/w_5	w_2/w_6	w_3/w_4	w_3/w_5	w_3/w_6	w_4/w_5	w_4/w_6	w_5/w_6
A_1	9.999	9.999	9.999	9.999	0.413	9.999	9.999	0.282	0.249	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_2	9.999	9.999	9.999	9.999	0.087	9.999	9.999	0.018	0.151	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_1	0.266	9.999	0.273	0.244	0.094	9.999	9.999	0.235	0.059	9.999	0.163	0.038	0.213	0.057	0.169
A_3	0.034	9.999	9.027	0.156	0.406	9.999	9.999	0.065	0.341	9.999	0.137	0.362	0.087	0.343	0.331
A_1	9.999	9.999	9.999	9.999	0.398	9.999	9.999	9.999	0.284	9.999	9.999	0.329	9.999	0.298	0.429
A_4	9.999	9.999	9.999	9.999	0.102	9.999	9.999	9.999	0.116	9.999	9.999	0.071	9.999	0.102	0.071
A_2	9.999	9.999	9.999	0.378	9.999	9.999	9.999	0.275	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_3	9.999	9.999	9.999	0.022	9.999	9.999	9.999	0.025	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_2	0.068	9.999	9.999	0.275	0.484	0.174	0.158	0.148	0.190	9.999	0.235	9.999	9.999	9.999	0.098
A_4	0.232	9.999	9.999	0.125	0.016	0.026	0.042	0.152	0.219	9.999	0.065	9.999	9.999	9.999	0.402
A_3	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.990	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999
A_4	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999	9.999

w_1/w_4、w_1/w_5、w_1/w_6、w_2/w_5、w_2/w_6、w_3/w_5、w_3/w_6、w_4/w_5、w_4/w_6、w_5/w_6，如当$w_1>0.265$和$w_2<0.035$时，则有$A_3<A_1$等等。若设容差为0.05，则11对目标权重中的下列4对权重对于A_3和A_1的排序影响是敏感的：$w_1/w_5(\delta=0.046)$、$w_2/w_6(\delta=0.043)$、$w_4/w_6(\delta=0.043)$，$w_5/w_6(\delta=0.033)$。

表8为方案价值的灵敏度矩阵，其中表8(1)为绝对价值形式的，表8(2)为相对价值形式的。表8(1)中的值大于1或小于0都表示对于某对方案的排序而言该处所对应的原值是不敏感的。

表8 方案价值的灵敏度矩阵

表8(1) MATRIX OF ABSOLUTE MARGINAL VALUES

ATTRIBUTE(G.j)		1	2	3	4	5	6
A_1	A_2	0.170	—0.700	—0.310	—0.440	0.080	0.580
	A_3	0.885	0.730	1.120	0.990	0.795	1.057
	A_4	0.315	—0.410	—0.020	—0.150	0.225	0.677
A_2	A_1	1.630	2.260	2.120	1.950	1.060	0.980
	A_3	1.715	2.430	2.290	2.120	1.145	1.037
	A_4	1.145	1.290	1.150	0.980	0.575	0.657
A_3	A_1	0.635	0.570	0.830	0.830	0.915	0.723
	A_2	0.005	—0.690	—0.430	—0.430	0.285	0.303
	A_4	0.150	—0.400	—0.140	—0.140	0.430	0.400
A_4	A_1	1.365	1.640	1.920	1.870	1.195	0.883
	A_2	0.735	0.380	0.660	0.610	0.565	0.463
	A_3	1.450	1.810	2.090	2.040	1.280	0.940

表8(2) RELATIVE MARGINAL VALUES

ATTRIBUTE(G.j)	1	2	3	4	5	6
A_1	0.123	—0.035	0.029	0.017	0.137	0.270
A_2	0.406	0.561	0.453	0.426	0.263	0.268
A_1	0.249	0.216	0.280	0.268	0.263	0.354
A_3	0.198	0.221	0.238	0.265	0.337	0.260
A_1	0.148	0.015	0.079	0.067	0.162	0.287
A_4	0.346	0.399	0.426	0.438	0.336	0.251
A_2	0.420	0.588	0.480	0.454	0.277	0.277
A_3	0.086	—0.003	0.014	0.042	0.225	0.185
A_2	0.319	0.387	0.279	0.253	0.176	0.210
A_4	0.234	0.175	0.203	0.214	0.224	0.176
A_3	0.111	0.048	0.064	0.092	0.250	0.202
A_4	0.360	0.427	0.454	0.466	0.350	0.260

由表8(1)可知，当方案A_3的价值作下述变化时，其最优位置将由A_1取代：或$v_{31}<0.635$，或$v_{32}<0.57$，或$v_{33}<0.83$，或$v_{34}<0.83$，或$v_{35}<0.915$，或$v_{36}<0.723$。这中间若以0.1为容差，则对于A_3和A_1的排序而言，$\bar{v}_{31}(\delta=|\bar{v}_{31}-v_{3}{}^{1}{}_{1}|=|0.720-0.635|=0.085)$、$\bar{v}_{35}(\delta=|\bar{v}_{35}-v_{3}{}^{1}{}_{5}|=0.085)$、$\bar{v}_{36}(\delta=0.057)$为敏感性参数。限于篇幅，其它情形的分析就不再进行了。

五、结　束　语

本文所给出的MADM类型的多目标决策问题的灵敏度分析原理与方法，简单、实用，特别适用于目标属性多、方案多的决策问题。用此方法既可确定原问题中的哪些参数是敏感的，又可知道各参数的变化是如何影响决策结果的，从而为利用可控参数来调节控制决策结果提供了可能。此外，作者已将此种分析方法编制成计算机分析程序，只要将MADM问题的原始参数（权重和价值）输入，既可得到全部灵敏度分析的数据和结果，从而决策者或决策分析者可作进一步的灵敏度分析。

由于篇幅所限，一些分析结论的证明过程本文没有给出，有兴趣者可向作者索取。

参　考　文　献

[1] Chankong, V. & Haimes, Y. Y.: Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology, New York, North-Holland, 1983.

[2] Hwang, Ching-Lai & Yoon, Kwangsun: Multiple Attribute Decision Making: Methods and Application, Berlin, Springer-Verlag, 1981.

[3] Fandel, G. & Gal, T. (eds.): Multiple Criteria Dcsieion Making: Theory and Application, Proceedings, Berlin, Springer-Verlag, 1980.

[4] 顾基发、魏权龄：多目标决策问题，《应用数学与计算数学》，1980 年第 1 期 第28—47 页。

[5] Haimes, Y. Y.: *Multiple-Criteria Decision Making: A Retrospective Analysis*, IEEE trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-15, No. 3, 1985, pp. 313-315.

[6] 叶弟豪：多目标决策方法探讨及若干新见解，《系统工程理论与实践》，1983 年第 4 期，第27—31页。

[7] Kornbluth, J. B. H.: *Duality, Indifference and Sensitivity Analysis in Multiple Objective Linear Programming*, Operational Research Quarterly, Vol. 25, No. 4, 1974, pp. 519—614.

[8] Harry, M. R. & Haimes, Y. Y.: *Risk/Dispersion Index Method*, IEEE trans. on System,s Man, and Cybernetics, Vol. SMC-13, No. 3, 1983, pp. 317—328.

[9] Seo, F. & Sakawa, M.: *An Experimental Method for Diversified Evaluation and Risk Assessment with Conflicting Objectives*, IEEE trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-14, No. 2, 1984, pp. 213—223.

[10] Saaty, T. L.: The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation, New York, McGraw-Hill, 1980.

[11] 刘豹、许树柏、赵焕臣、和金生：层次分析法——规划决策的工具，《系统工程》，1984 年第 2 期，pp. 23—30.

[12] White, III, C. C., Sage, A. P. & Dozono, S.: *A Model of Multiattribute Decisionmaking & Trade-off Weight Determination Under Uncertainty*, IEEE trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-14, No. 2, 1984, pp. 223—229.

[13] 朱松春、杨砾：军事决策过程的一种综合分析新方法，《系统工程理论与实践》，1985 年第 3 期，第33—39页。

[14] Baas, S. M. & Kuabernaak, H.: *Rating and Ranking of Multiple Aspects Alternatives Using Fuzzy Sets*, Automatica, Vol. 13, No. 1.

[15] Marazzi, C. A.: *A Value Analysis Method for the Evaluation of Telecommunication Systems Bid Proposals*, IEEE trans. on Engineering Management, Vol. EM-32, No. 2, 1985, pp. 55—62.

[16] 程明熙：处理多目标决策问题的二项系数加权法，《系统工程理论与实践》，1983 年第 4 期，第23—26 页。

[17] 陶化成：处理多目标决策问题的一个方法，《系统工程理论与实践》，1982年第2期，第25—28 页。

[18] 赵建中：多目标决策中目标转化的一种等效系数法，《系统工程》，1985 年第 3 期，第 44—48 页。