

基于支持向量机回归的结构系统可靠性及灵敏度分析方法

马 超 ** 吕震宙

(西北工业大学航空学院, 西安, 710072)

摘 要 提出了一种基于支持向量机回归近似极限状态方程的系统可靠性分析方法, 所提方法首先由支持向量机拟合系统各失效模式的极限状态方程, 将复杂或隐式极限状态方程近似等价于显式极限状态方程, 然后根据系统各个失效模式的逻辑结构, 由高精度的显式极限状态方程方法计算系统的失效概率和参数灵敏度. 与线性展开和响应面法近似极限状态方程相比, 文中方法由于采用了基于结构风险最小化原理的支持向量机回归, 因而在拟合非线性极限状态方程上表现优越, 计算精度高. 与直接蒙特卡洛模拟相比, 由于该方法采用较少的样本即可近似出概率等价的显式极限状态方程, 因而计算效率大幅提高. 工程实例表明: 所提方法可以处理串联、并联和混合系统的可靠性与可靠性灵敏度分析, 具有工程运用价值.

关键词 系统可靠性, 支持向量机回归, 参数灵敏度, 失效模式

0 引言

目前可靠性分析方法的研究大多基于解决单个失效模式问题, 工程实际中结构的失效模式往往有多个, 并且多个失效模式有一定的逻辑连接形式, 一般可分为串联系统、并联系统和串并联混合系统. 对串联系统可靠性分析常用的是二阶窄边界方法^[1,2], 然而, 二阶窄边界法有很多缺点, 其一, 该法给出的是失效概率可能发生的范围, 并不是确定的数值; 其二, 计算共失效概率的计算量大, 而且共失效概率计算量随失效模式增多而急剧增大; 其三, 无法直接给出系统的失效概率对基本变量分布参数的灵敏度. 文[3]发展了一种基于系统各失效模式最大可能点线性展开近似极限状态方程的系统可靠性分析方法. 当极限状态方程呈高度非线性时, 文[3]方法仅作线性近似, 误差非常大. 为了进一步提高计算精度和计算效率, 本文采用具有良好小样本学习能力和推广泛化性能的支持向量机回归拟合各个失效模式的极限状态方程, 结合文[3]思路, 发展一种快速高效的系统可靠性分析方法. 本文方法并不需要预先计算各个失效模式的最大可能失效点, 简化了计算步骤, 更加符合工程运用情况. 本文方法与极限状态方程线性展开法和响应面法拟合极限状态方程

作对比分析, 文中工程算例证明了本文方法的精度和效率.

1 基于支持向量机回归的系统失效概率求解和灵敏度分析

1.1 支持向量机回归基础

给定回归估计的一组样本为 $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, l\}$, 其中 $x_i \in R^N$ 为输入值, $y_i \in R$ 是对应的目标值, l 为样本数. 支持向量机回归就是寻找一函数 $f(x)$, 使得在定义的不敏感损失函数下函数估计的结构风险最小化.

由统计学习理论的结构风险最小化原则^[4], 寻找回归函数转化为如下的最优化问题

$$\begin{cases} \min_{w, \xi, \xi^*} \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^l (\xi_i + \xi_i^*) \\ \text{s. t.} \quad y_i - f(x) \leq \xi_i \\ f(x) - y_i \leq \xi_i^* \\ \xi_i \geq 0 \\ \xi_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (1)$$

式中 w 为回归函数法向量, ξ_i 和 ξ_i^* 为松弛变量放宽优化的约束条件, C 为对训练误差超出 不敏感误差带的样本进行惩罚的惩罚因子. 求解式(1)的优化问题, 可通过拉格朗日乘子法转化为原问题的对

* 国家自然科学基金(10572117)、航空基金(2007ZA53012)和新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0868)资助.
2006-09-29 收到第 1 稿, 2007-04-03 收到修改稿.

** 通讯作者. Tel: 029-88460480, E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn.

偶问题^[4,5]. 优化过程中, 用满足 Mercer 条件的核函数计算内积^[5], 常用的核函数有多项式核函数, 高斯基核函数等.

1.2 支持向量机回归拟合极限状态方程

支持向量机能够更好的拟合概率等价极限状态方程的前提是训练样本应分布在最大可能点附近. 然而预先求解最大可能点比较困难, 本文通过构造特别的迭代格式, 即可逐步获得概率等价极限状态方程的良好近似. 不失一般性, 设系统有 n 个基本随机变量 $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, M 个失效模式的功能函数为 $\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_M(x)\}$, 变量的均值向量为 $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]$, 标准差向量为 $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n]$, 对于每一个失效模式均按如下算法拟合极限状态方程.

第 1 次训练支持向量机

以基本变量的均值点为抽样中心, 按传统响应面法抽取 $2n+1$ 个样本点 $x_i (i=1, 2, \dots, 2n+1)$, 并计算各个样本点对应的该失效模式的结构响应值 y_i . 对每个样本点的各分量 $x_{ij} (j=1, 2, \dots, n)$ 作尺度变换 $\bar{x}_{ij} = (x_{ij} - \mu_j) / \sigma_j$, 记变换后的样本点为 \bar{x}_i . 由此形成 $2n+1$ 个训练样本对 $(\bar{x}_i, y_i) (i=1, 2, \dots, 2n+1)$, 作为支持向量机训练样本. 选取合适的一组支持向量机回归参数训练支持向量机. 对训练成功的支持向量机回归得到的极限状态方程, 采用显式极限状态方程可靠性分析方法计算设计点和可靠度指标. 以本次计算所得的设计点作为下一次抽样中心.

第 k 次训练支持向量机并判断迭代是否收敛

以前一次的设计点作为抽样中心, 按照第一步的方法抽取 $2n+1$ 个训练样本对, 将本次及本次迭代前抽取的所有训练样本合在一起作为该次支持向量机回归的训练样本, 训练第 k 次的支持向量机, 得到第 k 次迭代的极限状态方程的近似. 求解设计点和可靠度指标. 判断是否满足收敛条件 $|R^{(k)} - R^{(k-1)}| < \epsilon$ (ϵ 为预先设定的小数, $R^{(k)}$ 为第 k 次迭代所得的可靠度指标). 若满足条件则停止迭代计算, 以最后一次支持向量机回归拟合的极限状态方程作为该失效模式的近似, 否则重复本过程直至满足收敛条件为止.

从以上的迭代过程可以看出, 每次训练支持向量机都考虑了前面抽出的所有样本, 充分地利用了已经获得的样本所包含的信息. 从均值点开始抽取的一系列样本, 保证了在较广的区域内拟合极限状

态方程.

1.3 系统失效概率求解

上节的支持向量机回归分别拟合系统的各个极限状态方程后, 用高精度的数值模拟方法计算系统的失效概率. 假设 M 个失效模式串联, $F_i (i=1, 2, \dots, M)$ 为各失效模式的失效域, 则系统的总失效域可以表示为 $F = \{F_1, F_2, \dots, F_M\}$. 系统的失效概率 P_F 由下式计算

$$P_F = \int_F f(x) dx = \int_R I_F[x] f(x) dx \quad (2)$$

式中 $f(x)$ 是基本变量的联合概率密度函数, $I_F[x]$ 为指示函数, 若 $x \in F$, 则 $I_F[x] = 1$, 否则 $I_F[x] = 0$. 由拟合的显式极限状态方程作为真实极限状态方程的代理, 用蒙特卡洛法模拟系统的失效概率.

$$\hat{P}_F = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_F[x] \quad (3)$$

式中 N 是蒙特卡洛法抽样总数.

对于并联系统和串并联混合系统, 则蒙特卡洛法计算失效概率时, 只需要更改系统的逻辑连接形式即可.

1.4 系统参数灵敏度求解

记 $\theta_i^{(k)} (i=1, \dots, m)$ 为第 k 个基本随机变量的第 i 个参数, m 为该随机变量的分布参数个数. 系统可靠性参数灵敏度即求失效概率 P_F 对 $\theta_i^{(k)}$ 的偏导数.

$$\frac{\partial P_F}{\partial \theta_i^{(k)}} = \int_F \frac{\partial f(x)}{\partial \theta_i^{(k)}} dx \quad (4)$$

文[6]引入了式(5)所示的无量纲正则化灵敏度系数 $S_i^{(k)}$.

$$S_i^{(k)} = \frac{\partial P_F / P_F}{\partial \theta_i^{(k)} / \sigma_k} \quad (5)$$

其中 σ_k 为第 k 个基本随机变量的标准差. 将式(4)代入式(5)并作恒等变换, $S_i^{(k)}$ 由下式计算

$$S_i^{(k)} = \int_R \frac{\partial f(x)}{\partial \theta_i^{(k)}} \cdot \left[\frac{I_F[x] \cdot f(x)}{P_F} \right] dx \quad (6)$$

式中 $I_F[x] \cdot f(x) / P_F$ 是失效域样本所服从的概率分布, 显然灵敏度系数 $S_i^{(k)}$ 可表示为数学期望, 即

$$S_i^{(k)} = E \left[\frac{\partial f(x)}{\partial \theta_i^{(k)}} \right] \quad (7)$$

式(7)的数学期望可以用落入失效域中的样本均值来估计 $S_i^{(k)}$.

$$\hat{S}_i^{(k)} = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \frac{\partial f(x_j)}{\partial \theta_i^{(k)}} \quad (8)$$

式中 N_s 是失效样本总数, x_j 为失效域中的第 j 个样本.

经过上述分析,求解系统参数灵敏度只需要在计算失效概率的同时,记录落入失效域中的样本,代入式(8)即可求得失效概率对基本变量分布参数的灵敏度系数.

2 算例

算例 1 为线性极限状态方程,算例 2 取自文[3] 为非线性极限状态方程. 各算例所列表中 Linear 表示对极限状态方程在最大可能点线性展开的计算结果;RSM 表示响应面法拟合极限状态方程计算的结果;SVR 表示用支持向量机回归拟合极限状态方程的结果;MC 表示直接用蒙特卡洛法计算的结果.

算例 1. 如图 1 所示单层单框弹塑性框架. 系统的失效模式如下

$$g_1 = 2M_1 + 2M_3 - 4.5S$$
$$g_2 = 2M_1 + M_2 + M_3 - 4.5S$$

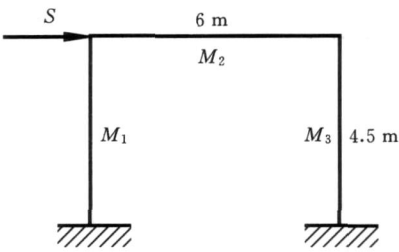


图 1 单层单框框架

$$g_3 = M_1 + M_2 + 2M_3 - 4.5S$$
$$g_4 = M_1 + 2M_2 + M_3 - 4.5S$$

该系统各失效模式间串联联结, $M_i (i = 1, 2, 3)$ 是力矩, S 是外载荷,基本随机变量相互独立并且均服从正态分布. 各变量均值和标准差分别为 $\mu_{M_i} = 5.287\ 2$, $\sigma_{M_i} = 0.149\ 2 (i = 1, 2, 3)$, $\mu_S = 3.837\ 8$, $\sigma_S = 0.385\ 3$. 四种方法的计算结果列于表 1.

表 1 算例 1 失效概率及灵敏度计算结果

	$\frac{\partial P_F}{\partial \mu_{M_1}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \mu_{M_2}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \mu_{M_3}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \mu_S}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \sigma_{M_1}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \sigma_{M_2}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \sigma_{M_3}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \sigma_S}$	P_F	抽 样 次 数
	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-1}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-1}$)	($\times 10^{-2}$)	
Linear	- 3.821 7	- 2.404 1	- 3.850 8	1.130 2	1.737 9	1.972 5	1.745 1	2.316 0	1.811 4	168
RSM	- 3.860 6	- 2.357 9	- 3.793 2	1.128 7	1.769 9	2.027 4	1.763 3	2.312 1	1.809 7	80
SVR	- 3.867 4	- 2.371 8	- 3.760 7	1.130 3	1.840 1	2.004 1	1.797 5	2.315 7	1.812 1	144
MC	- 3.821 7	- 2.404 1	- 3.850 8	1.130 2	1.737 9	1.972 5	1.745 1	2.316 0	1.811 4	10^7

算例 2. 一简支梁,施加均布载荷,3 个失效模式为

$$g_1 = M_0 - \frac{1}{8}w_0L^2$$
$$g_2 = V_0 - \frac{1}{2}w_0L$$
$$g_3 = 1 - \left[\frac{w_0L^2}{8M_0} + \frac{w_0M_0}{2V_0^2} \right]$$

其中 M_0 为梁所能承受的最大弯矩, V_0 是梁所能承受的最大剪力, w_0 为施加在梁上的均布载荷, L 为梁的长度, L 数值为 20(ft) 的确定量. 随机变量 M_0 ,

V_0 和 w_0 服从正态分布且相互独立,分布参数列于表 2. 计算结果列于表 3.

表 2 算例 2 的基本变量分布参数

基本变量	均值	变异系数
M_0	470(k · ft)	0.10
V_0	159(ksi)	0.15
w_0	6(k/ft)	0.25

表 3 算例 2 失效概率及灵敏度计算结果

	$\frac{\partial P_F}{\partial \mu_{M_0}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \mu_{V_0}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial \mu_{w_0}}$	$\frac{\partial P_F}{\partial M_0}$	$\frac{\partial P_F}{\partial V_0}$	$\frac{\partial P_F}{\partial w_0}$	P_F	抽 样 次 数
	($\times 10^{-3}$)	($\times 10^{-4}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-4}$)	($\times 10^{-4}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-2}$)	
Linear	- 1.084 9	- 5.322 9	6.892 9	7.527 3	1.370 1	9.653 7	5.802 1	107
RSM	- 1.200 1	- 6.293 6	7.678 7	9.989 9	4.382 0	10.404	6.681 1	64
SVR	- 1.126 6	- 7.304 7	7.321 6	8.004 7	4.940 8	10.006	6.275 9	68
MC	- 1.122 8	- 6.850 2	7.298 5	7.961 4	4.985 5	9.978 3	6.248 4	2.4×10^6

从算例 1 可以看出极限状态方程为线性时,线性展开法分析结果和蒙特卡洛法模拟的结果完全一致,这是因为在准确求得设计点的情况下,线性展开并没有改变极限状态方程的形式;当采用响应面法和支持向量机分析时,由于两种方法拟合极限状态方程都存在偏差,故两种方法不可能得到精确解,但是结果误差很小,并且响应面法的计算效率最高.对于算例 2 的非线性极限状态方程,本文方法和响应面法的计算效率相当,但在计算精度上有改善,本文方法的计算结果和蒙特卡洛法模拟的结果非常接近,这主要得益于支持向量机具有使用较少的样本量即可达到出色拟合极限状态方程的能力,并且其泛化适用能力要远比响应面法好.

3 结语

本文针对系统可靠性问题,发展了一种基于支持向量机回归拟合极限状态方程的失效概率及系统可靠性参数灵敏度分析方法.支持向量机回归分别拟合系统各失效模式的极限状态方程,充分发挥了支持向量机卓越的小样本学习能力以提高计算效率,其良好的推广泛化性能提高了计算精度.由支持向量机回归拟合系统的各个失效模式,将隐式或者复杂极限状态方程化为显式,解决了系统失效概率和可靠性灵敏度算法中的关键问题.本文方法与线性展开法以及响应面法的对比研究,结果表明:本文方法的效率和响应面法相当,但比蒙特卡洛法模拟

效率大为提高,并且计算精度与蒙特卡洛法模拟相当.实际工程算例表明本文方法具有很好的工程应用价值.

参 考 文 献

[1] Hunter D. An upper bounds for the probability of a union [J]. Journal of Applied Probability, 1976, 3(3):597-603.

[2] Ditlevsen O. Narrow reliabiltiy bounds for structural system[J]. Journal of Structural Mechanics, 1979, 7(4):453-472.

[3] Robert H S, Mark A C. System reliability and sensitivity factors via the MPPSS method[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(2):148-157.

[4] Vapnik V N. The Nature of Statistical Learning Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[5] Cristianini N, Shawe-Taylor J. An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[6] Wu Y T, Sitakanta Monhanty. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures [J]. Reliability Engineering and System Safety. 2006, 91(6): 634-647.

STRUCTURAL SYSTEM RELIABILITY AND SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON SUPPORT VECTOR MACHINE REGRESSION

Ma Chao Lu Zhenzhou

(*College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi an, 710072*)

Abstract Based on the support vector machine regression approximating the limit state function, a procedure is presented to analyze the reliability and corresponding sensitivity of the structural system. In the presented procedure, the complicated or implicit limit state functions of the system failure modes are firstly fitted by the support vector machine regression, then according to the system logicity, the methods for the system with explicit limit state function can be employed to estimate the reliability and corresponding sensitivity. Compared with the linear expansion polynomial and the response surface method, the support vector machine regression can match the limit state function better due to its underlying structural risk minimization inference rule, the support vector machine regression is more accurate therefore. Since the presented procedure constructs the surrogate of the implicit or the complicated limit state function by a small quantity of samples, its efficiency is much higher than that of Monte Carlo simulation. The presented procedure can treat the reliability and corresponding sensitivity analysis of the series, parallel and mixed systems, and it has wide applicability in engineering problem, which have been demonstrated by two engineering examples.

Key words system reliability, support vector machine regression, parameter sensitivity, failure modes