第 23 卷 第 2 期　　甘 肃 工 业 大 学 学 报　　Vol 23 No. 2
1997 年 6 月　　Journal of Gansu University of Technology　　Jun. 1997

状态转移问题的图论法建模

陈　义　华

(甘肃工业大学技术工程学院, 兰州　730050)

摘　要　针对带有约束条件的一类状态转移问题, 提出了图论建模法, 将这类状态转移问题转化为利用 Dijkstra 算法求最短路, 并通过典型实例论述了这种方法的建模技巧及求解法. 该方法比逻辑思索的结果容易推广, 能在本质上体现图论方法的优势.

关键词　状态转移　约束条件　图论方法　数学模型　最短路

分类号　O 157. 2

应用图论方法解决实际问题, 最关键的就是如何采用图论方法构造问题的数学模型. 图论中的图很适用于表示系统, 不管是在数学、物理还是在社会学领域等. 这是因为系统的定义中包含了一些元素, 而这些元素则与其它元素相关联[1]. 许多带有约束条件的状态转移问题, 通过图论方法建立数学模型后, 可以归结为利用 Dijkstra[2]算法求解一个无向连通图 $G(V, E)$ 的最短路.

凡系统可以允许存在的状态称为可取状态, 否则称为不可取状态.

所谓状态转移问题, 是研究在一定条件下, 系统由一个状态向另一个状态转移能否实现, 如果可以转移, 应如何具体实现.

1　状态转移问题的图论法

1) 人、狼、羊、菜过河问题[3]

人、狼、羊、菜均要过河, 船需要人划, 且船小至多还能载一物, 当人不在时, 狼会吃羊, 羊会吃菜, 如何设计安全的过河方案?

这是一个有趣的智力游戏问题. 这类智力游戏虽然经过逻辑思考(如递推方法)就可以解决, 但这里用数学模型求解, 将问题转化为状态转移问题后建立图论模型. 这类模型可以解决相当广泛的一类问题, 比逻辑思考的结果更容易推广, 尤其是可以利用计算机去求解.

建立数学模型很重要的一步是用什么数学语言表述实际问题, 并如何描述系统的状态. 引入 4 维向量 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 表示人、狼、羊、菜在左岸或右岸. 规定当某物在左岸时, 记相应分量 $\alpha_i = 1$, 否则 $\alpha_i = 0$, 如 $v_1(1, 0, 1, 0)$ 表示人和羊在左岸, 狼和菜在右岸, 并称为一个状态, 根据约束条件, 显然是一个可取状态. 但 $v_i(0, 0, 1, 1)$ 就是不可取状态.

将船的一次运载也用 4 维向量表示, 当一物 α_j 在船上, 记 $\alpha_j = 1$, 否则 $\alpha_j = 0$. 如 $B_1(1, 1, 0,$

收稿日期: 1997-01-05

0) 表示人和狼在船上, 羊和菜未在船上, 由于船允许载两物, 知 $B_1(1, 1, 0, 0)$ 是可取运载, 但 $B_2(1, 0, 1, 1)$ 是不可取运载, 因船无法载三物.

建模　(1) 系统共有 $2^4 = 16$ 种状态, 可取状态 A 共有 10 个:

$$v_1(1, 1, 1, 1), v_2(1, 1, 1, 0), v_3(1, 1, 0, 1), v_4(1, 0, 1, 1), v_5(1, 0, 1, 0)$$

$$v_6(0, 0, 0, 0), v_7(0, 0, 0, 1), v_8(0, 0, 1, 0), v_9(0, 1, 0, 0), v_{10}(0, 1, 0, 1)$$

其中, $v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}$ 恰为 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 的相反状态.

(2) 可取运载 B 共有 4 个: $B_1(1, 1, 0, 0), B_2(1, 0, 1, 0), B_3(1, 0, 0, 1), B_4(1, 0, 0, 0)$.

(3) 可取运算. 规定向量 A 与 B 相加时对每一分量按二进制运算 $(0+0=0, 1+0=0+1=1, 1+1=0)$. 一次过河就是一个可取状态向量与一个可取运载向量相加, 若可取状态经过这种加法运算后仍是可取状态, 称这种运算为可取运算 (其中, × 表示不可取, √ 表示可取).

$$(1,1,1,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,0,1,1)\times\\(0,1,0,1)\surd\\(0,1,1,0)\times\\(0,1,1,1)\times\end{cases}\qquad(1,1,1,0)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,0,1,0)\surd\\(0,1,0,0)\surd\\(0,1,1,1)\times\\(0,1,1,0)\times\end{cases}$$

$$(1,1,0,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,0,0,1)\surd\\(0,1,1,1)\times\\(0,1,0,0)\surd\\(0,1,0,1)\surd\end{cases}\qquad(1,0,1,1)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}(0,1,1,1)\times\\(0,0,0,1)\surd\\(0,0,1,0)\surd\\(0,0,1,1)\times\end{matrix}$$

$$(1,0,1,0)+\begin{cases}(1,1,0,0)\\(1,0,1,0)\\(1,0,0,1)\\(1,0,0,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,1,1,0)\times\\(0,0,0,0)\surd\\(0,0,1,1)\times\\(0,0,1,0)\surd\end{cases}$$

构造图 G. 令 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_{10}\}$, 表示系统的 10 个可取状态, $v_iv_j \in E(G) \Leftrightarrow v_i$ 和 v_j 表示的两种状态可用载人 (或加一物) 的船互相转变 $\Leftrightarrow v_i$ 表示的可取状态经过系统的运算仍为可取状态 v_j.

于是构成一个 10 阶无向简单连通图 G_1 (数学模型), 如图 1 所示

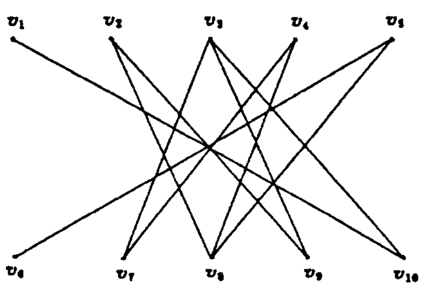

图 1　图 G_1 (数学模型)

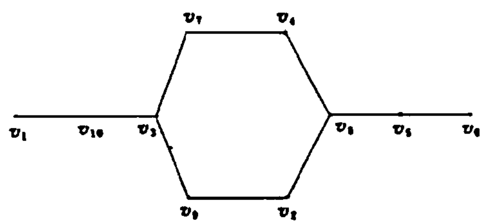

图 2　数学模型的解

问题转化为求一条从 v_1 到 v_6 的路, 如果各边赋权为 1, 即化为求图 G_1 的一条这样的最短路. 利用 Dijkstra 算法易求出两条最短路 $P_1 = v_1v_{10}v_3v_7v_4v_8v_5v_6$ 和 $P_2 = v_1v_{10}v_3v_9v_2v_8v_5v_6$. 显然这两种过河方案等优, 均是经 7 次运载即可, 见图 2

2) 夫妻过河问题(第一种情形)[3,4]

有 3 对夫妻要过河, 船至多可载 2 人, 条件是任一女子不能在其丈夫不在场的情况下与另外的男子在一起, 问如何设计这 3 对夫妻的过河方案?

这是阿拉伯早期的一道趣味数学题, 初看与问题 1) 类似, 但要复杂得多, 状态变量和运算选取有较大差异.

建模 用向量(H, W)表示有H个男子和W个女子在左岸, 其中$0 \le H, W \le 3$. (i, i)表示i对夫妻, $i = 0, 1, 2, 3$.

(1) 可取状态: 一共有 10 个, 记为$v_1(3, 3)$, $v_2(3, 2)$, $v_3(3, 1)$, $v_4(3, 0)$, $v_5(2, 2)$, $v_6(1, 1)$, $v_7(0, 3)$, $v_8(0, 2)$, $v_9(0, 1)$, $v_{10}(0, 0)$.

(2) 可取运载: 取可取运载向量为

$$(-1)^k (m, n)$$

其中, $m, n = 0, 1, 2$, 且 $1 \le m + n \le 2$, $k = 1, 2, \cdots$. 当k为奇数时, 负向量表示过河; 当k为偶数时, 正向量表示由对岸返回.

(3) 可取运算: 按普通向量加法运算, 一次过河相当于一个可取状态向量与一个可取运载向量相加后仍为可取状态向量.

构作图G. 令$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_{10}\}$, 表示系统的 10 个可取状态,

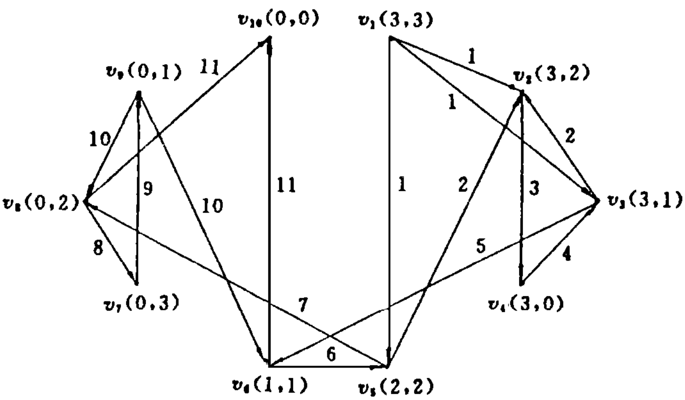

图 3 图G_2(数学模型)

$v_i v_j \in E(G) \Leftrightarrow v_i$表示的可取状态经过运算向量运算后为可取状态$v_j$. 得到一个图$G_2$, 如图 3 所示(其中××表示重复).

$k = 1$ 时

$$(3,3) + \left\{\begin{array}{l}(0,-1)\\(0,-2)\\(-1,-1)\\(-1,0)\\(-2,0)\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}(3,2)\surd\\(3,1)\surd\\(2,2)\surd\\(2,3)\times\\(1,3)\times\end{array}\right.$$

$k = 2$ 时

$$(3,2) + \left\{\begin{array}{l}(0,1)\\(0,2)\\(1,1)\\(1,0)\\(2,0)\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}(3,3)\times\times\\(3,4)\times\\(4,3)\times\\(4,2)\times\\(5,2)\times\end{array}\right.$$

$$(3,1) + \left\{\begin{array}{l}(0,1)\\(0,2)\\(1,1)\\(1,0)\\(2,0)\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}(3,2)\surd\\(3,3)\times\times\\(4,2)\times\\(4,1)\times\\(5,1)\times\end{array}\right.$$

$$(2,2) + \left\{\begin{array}{l}(0,1)\\(0,2)\\(1,1)\\(1,0)\\(2,0)\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}(2,3)\times\\(2,4)\times\\(3,3)\times\times\\(3,2)\surd\\(4,2)\times\end{array}\right.$$

$k=3$ 时

$$(3,2)+\begin{cases}(0,-1)\\(0,-2)\\(-1,-1)\\(-1,0)\\(-2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(3,1)\times\times\\(3,0)\surd\\(2,1)\times\\(2,2)\times\times\\(1,2)\times\end{cases}$$

$k=4$ 时

$$(3,0)+\begin{cases}(0,1)\\(0,2)\\(1,1)\\(1,0)\\(2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(3,1)\surd\\(3,2)\times\times\\(4,1)\times\\(4,0)\times\\(5,0)\times\end{cases}$$

$k=5$ 时

$$(3,1)+\begin{cases}(0,-1)\\(0,-2)\\(-1,-1)\\(-1,0)\\(-2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(3,0)\times\times\\(3,-1)\times\\(2,0)\times\\(2,1)\times\\(1,1)\surd\end{cases}$$

$k=6$ 时

$$(1,1)+\begin{cases}(0,1)\\(0,2)\\(1,1)\\(1,0)\\(2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(1,2)\times\\(1,3)\times\\(2,2)\surd\\(2,1)\times\\(3,1)\times\times\end{cases}$$

$k=7$ 时

$$(2,2)+\begin{cases}(0,-1)\\(0,-2)\\(-1,-1)\\(-1,0)\\(-2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(2,1)\times\\(2,0)\times\\(1,1)\times\times\\(1,2)\times\\(0,2)\surd\end{cases}$$

$k=8$ 时

$$(0,2)+\begin{cases}(0,1)\\(0,2)\\(1,1)\\(1,0)\\(2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,3)\surd\\(0,4)\times\\(1,3)\times\\(1,2)\times\\(2,2)\times\times\end{cases}$$

$k=9$ 时

$$(0,3)+\begin{cases}(0,-1)\\(0,-2)\\(-1,-1)\\(-1,0)\\(-2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,2)\times\times\\(0,1)\surd\\(-1,2)\times\\(-1,3)\times\\(-2,3)\times\end{cases}$$

$k=10$ 时

$$(0,1)+\begin{cases}(0,1)\\(0,2)\\(1,1)\\(1,0)\\(2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,2)\surd\\(0,3)\times\times\\(1,2)\times\\(1,1)\surd\\(2,1)\times\end{cases}$$

$k=11$ 时

$$(0,2)+\begin{cases}(0,-1)\\(0,-2)\\(-1,-1)\\(-1,0)\\(-2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(0,1)\times\times\\(0,0)\surd\\(-1,1)\times\\(-1,2)\times\\(-2,2)\times\end{cases}\qquad(1,1)+\begin{cases}(0,-1)\\(0,-2)\\(-1,-1)\\(-1,0)\\(-2,0)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(1,0)\times\\(1,-1)\times\\(0,0)\surd\\(0,1)\times\times\\(-1,1)\times\end{cases}$$

问题归结为求一条从 $v_1(3,3)$ 到 $v_{10}(0,0)$ 的路 根据限制条件, 随着船的来往, 左岸滞留的人数或增或减, 括号中向量的和即为左岸的滞留人数, 则所求路经过的点相应括号中向量和必须是增减交替变化

图 G_2 中给出箭头沿着数字所示的路即为所求过河方案, 共有 4 种等优过河方案, 均是经 11 次运载完成 这 4 种方案是:

$$P_1=v_1v_3v_2v_4v_3v_6v_5v_8v_7v_9v_8v_{10},\qquad P_2=v_1v_3v_2v_4v_3v_6v_5v_8v_7v_9v_6v_{10},$$

$$P_3=v_1v_5v_2v_4v_3v_6v_5v_8v_7v_9v_8v_{10},\qquad P_4=v_1v_5v_2v_4v_3v_6v_5v_8v_7v_9v_6v_{10}$$

按照 P_1 路径的实际含义是:

v_1(3 对夫妻) $\xrightarrow{\text{去 2 女}}$ v_3(3 男 1 女) $\xrightarrow{\text{回 1 女}}$ v_2(3 男 2 女) $\xrightarrow{\text{去 2 女}}$ v_4(3 男) $\xrightarrow{\text{回 1 女}}$ v_3(3 男 1

女) $\xrightarrow{\text{去 2 男}} v_6$(一对夫妻) $\xrightarrow{\text{回 1 夫妻}} v_5$(2 对夫妻) $\xrightarrow{\text{去 2 男}} v_8$(2 女) $\xrightarrow{\text{回 1 女}} v_7$(3 女) $\xrightarrow{\text{去 2 女}} v_9$(1 女) $\xrightarrow{\text{回 1 女}} v_8$(2 女) $\xrightarrow{\text{去 2 女}} v_{10}$(无人).

3) 夫妻过河问题(第二种情形)

在第一种情形下, 又假定每一个丈夫会划船, 但只有一个妻子会划船, 问如何设计这 3 对夫妻的过河方案?

建模　由于增加了约束条件, 比第一种情形复杂得多, 为了区别会划船的妻子, 记 H_i 为第 i 个丈夫, W_i 为第 i 个妻子, 不妨设 W_1 会划船 留在左岸允许的状态有如下 22 种(分类标号):

(1) 3 对夫妻均在左岸: $A_6(H_{1,2,3}, W_{1,2,3})$;

(2) 有 5 人在左岸: $A_5(H_{1,2,3}, W_{1,2})$, $B_5(H_{1,2,3}, W_{1,3})$, $C_5(H_{1,2,3}, W_{2,3})$;

(3) 有 4 人在左岸: $A_4(H_{1,2}, W_{1,2})$, $B_4(H_{1,3}, W_{1,3})$, $C_4(H_{2,3}, W_{2,3})$, $D_4(H_{1,2,3}, W_1)$, $E_4(H_{1,2,3}, W_2)$, $F_4(H_{1,2,3}, W_3)$;

(4) 有 3 人在左岸: $A_3(H_{1,2,3})$, $B_3(W_{1,2,3})$;

(5) 有 2 人在左岸: $A_2(H_1, W_1)$, $B_2(H_2, W_2)$, $C_2(H_3, W_3)$, $D_2(W_{1,2})$, $E_2(W_{1,3})$, $F_2(W_{2,3})$;

(6) 只有 1 人在左岸: $A_1(W_1)$, $B_1(W_2)$, $C_1(W_3)$;

(7) 左岸无人: $A_0(0, 0)$.

用 22 个顶点表示上述 22 种状态(仍用此记号), 两种状态可互相转化, 则相应的两个顶点连一条边, 得到一个 22 阶简单连通图 G_3, 如图 4 所示

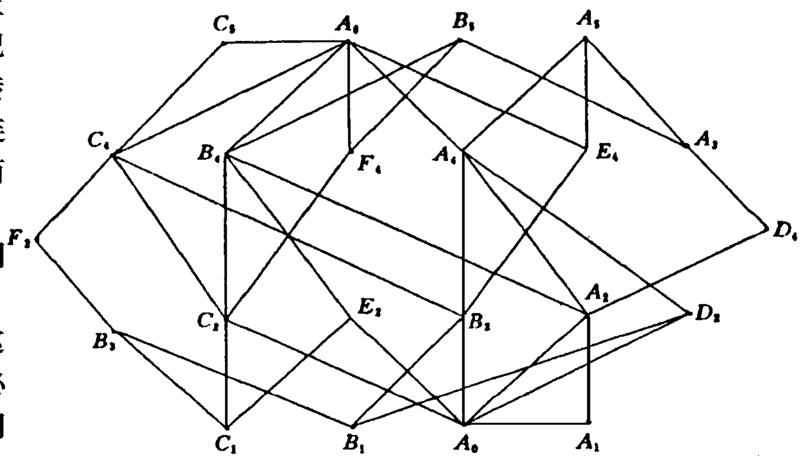

图 4　图 G_3(数学模型)

于是问题转化为求图 G_3 中一条从 $A_6(H_{1,2,3}, W_{1,2,3})$ 到 $A_0(0, 0)$ 的路, 这条路上经过的点的下标必须是增、减交替变化. 同问题 2), 随着船从左到右岸或从右返回左岸, 使得左岸滞留的人数或增或减, 相应顶点的下标亦即括号中对应的人数和是交替变化的

从图 G_3 中知, 按照上述限制条件, 从 A_6 到 A_0 的最短路不止一条, 比如 $P = A_6A_4A_5A_3D_4A_2A_4B_2C_4F_2B_3B_1B_2A_0$ 所表示的路就是一种可行过河方案, 经如下 13 次运载即可实现:

$A_6(H_{1,2,3}, W_{1,2,3}) \xrightarrow{H_3, W_3 \text{过河}} A_4(H_{1,2}, W_{1,2}) \xrightarrow{H_3 \text{返回}} A_5(H_{1,2,3}, W_{1,2}) \xrightarrow{W_1, W_2 \text{过河}} A_3(H_{1,2,3}) \xrightarrow{W_1 \text{返回}} D_4(H_{1,2,3}, W_1) \xrightarrow{H_2, H_3 \text{过河}} A_2(H_1, W_1) \xrightarrow{H_2, W_2 \text{返回}} A_4(H_{1,2}, W_{1,2}) \xrightarrow{H_1, W_1 \text{过河}}$

$B_2(H_2, W_2) \xrightarrow{H_3, W_3 \text{返回}} C_4(H_{2,3}, W_{2,3}) \xrightarrow{H_2, H_3 \text{过河}} F_2(W_{2,3}) \xrightarrow{W_1 \text{返回}} B_3(W_{1,2,3}) \xrightarrow{W_1, W_2 \text{过河}} B_1(W_2) \xrightarrow{H_2 \text{返回}} B_2(H_2, W_2) \xrightarrow{H_2, W_2 \text{过河}} A_0(0, 0)$.

2　结　论

1) 针对具体问题, 适当地设置状态和确定状态转移规律, 是有效地解决很广泛的一类问题的建模方法

2) 求解状态转移问题的图论建模方法, 比逻辑思维的结果容易推广, 尤其是对于较复杂的具有约束条件的状态转移问题, 图论法建模是很有效的方法

参　考　文　献

1　陈义华. 数学模型的图论方法. 甘肃工业大学学报, 1995, 21(4): 85～90
2　邦迪 J A, 默幕 U S R 著. 图论及其应用. 吴望名译. 北京: 科学出版社, 1984. 1～20
3　陈义华. 数学模型. 重庆: 重庆大学出版社, 1995. 100～117
4　姜启源. 数学模型. 北京: 高等教育出版社, 1993. 14～17

Mathematical modeling of state transition by means of graph theory

Chen Yihua
(College of Technological Engineering, Gansu Univ. of Tech., Lanzhou　730050)

Abstract　A method of graph theory is presented for mathematical modeling of the problem category of state transition with constraints. By using this method, the problems of state transition is transformed to the determination of the shorted path using Dijkstra algorithm. Modeling technique and solving procedure with this method is illustrated by a typical example. The result obtained by using this method can more readily be generalized than that obtained by logic envision showing the superiority of graph theory in nature.

Key words　state transition; constraint condition; graph theory method; mathematical model; the shortest path