

文章编号:1006-9798(2001)02-0001-05

基于常微分方程数学模型的多体系统动力学设计灵敏度分析方法^{*}

臧宏文^{**}, 潘振宽

(青岛大学电器自动化学院, 青岛 266071)

摘要:基于常微分方程数学模型建立了多体系统动力学设计灵敏度分析的伴随变量方法。系统的初始条件由隐函数给出,设计目标函数为通用的积分型,推导过程采用变分方法。最后,以简单的弹簧-滑块系统为例将本文方法的结果与理论结果进行比较。

关键词:多体系统动力学;常微分方程;设计灵敏度分析;伴随变量方法

中图分类号:O313.7

文献标识码:A

复杂机械系统、车辆系统、机器人系统、航天器系统及运动生物体等均可抽象为多个刚体/柔性体由不同的铰链相互联结构成的多体系统。多体系统动力学仿真与分析已经成为这些系统计算机辅助工程(CAE)的核心内容之一^[1-3]。传统的多体系统动力学仿真与分析包括系统的运动学分析、动力学分析、静力学分析、逆动力学分析、稳定性分析以及控制系统设计分析等内容,研究的过程包括系统数学模型的建立、所得到的数学模型的数值分析方法的研究、分析与仿真软件的研制及其在各类工程系统中的应用。自 20 世纪 70 年代末以来,多个流派的多体系统动力学建模理论体系已经形成^[3-6];系统数学模型数值分析方法的研究业已硕果累累^[7];大量基于多体方法的专用与通用仿真软件相继问世^[8-9],并在机械系统、车辆系统、机器人系统、航天器系统及运动生物体系统中普遍使用。

基于多体系统动力学的各类通用及专用软件无疑给复杂系统的计算机辅助工程注入了强大的活力,但实际工程中也提出了最优设计方案和设计方案对设计参数依赖性的迫切要求。由于各类复杂系统的数学模型往往为一组高维、强非线性的代数方程、微分方程或微分/代数混合方程,给基于通用多体模型设计最优方案带来了困难。借助于传统的仿真软件,工程师不得不针对不同设计参数进行反复

仿真,通过对仿真结果的观察分析确定较理想的方案。但由于问题的复杂性,每一次仿真过程需要花费较长的时间,且很难通过观察仿真结果直观地确定仿真的效果对仿真所采用的设计参数间的确切的依赖关系。这样,就必须求助于优化设计算法从数值上确定出最优化设计方案,并确定设计方案对设计参数变化的依赖性 or 敏感性。通常,基于给定的予设计找到理想设计方案的设计优化是一个反复迭代的过程。对于复杂多体系统的优化设计,由于在优化过程中需要对系统的动力学、运动学方程进行数值积分,选择的优化方法的效率与收敛性显得同等重要。大量数值实验表明^[10],SQP (Sequential Quadratic Programming) 方法是多体系统动力学优化设计的高效方法,并被大量使用。但该类方法必须使用性能指标与约束函数对设计变量的偏导数,即灵敏度函数。这样,灵敏度函数的计算成为传统的多体系统动力学分析与所采用的优化方法的桥梁,并成为多体系统动力学优化设计的核心问题。同时,系统性能指标的设计灵敏度也能够充分反映性能指标对设计参数的依赖关系。

设计灵敏度主要有三种计算方法。第一种为有限差分法,包括向前、向后和中间差分方案。该方法简单、直接,但计算精度和效率不高,故基本不被采用。第二种方法为直接微分法,该方法将系统方程

* 收稿日期:2001-03-22

基金项目:国家自然科学基金资助项目,项目编号为:19902006

** 作者简介:臧宏文(1966-),女,实验师 1989 年毕业于河北师范大学物理系。现为青岛大学电气及自动化学院实验师。

直接对设计变量进行微分,从而,必须对每个设计变量求解一组代数或微分方程,对于设计变量较多的情况效率较低。第三种方法为伴随变量方法,该方法最早由 Haug & Arola^[11]提出,由于其理论上的完美及计算效率、精度和收敛性等方面的优越性成为目前多体系统动力学灵敏度分析和优化的首选方法。20世纪90年代初,Bestle^[12]将符号计算与伴随变量方法结合用于多体系统动力学灵敏度分析和优化。此外,Eberhard^[13]还提出了设计灵敏度计算的自动微分方法(AD - Automatic Differentiation),该方法利用链式微分规则,能够自动计算系统中用户定义的非独立变量对对立变量的偏导数,并能产生源程序代码,具有较高的效率和精度,但限于规模较小的系统。本文针对用常微分方程数学模型描述的多体系统,采用变分方法建立了设计灵敏度分析的伴随变量方法。

1 多体系统优化设计数学模型

含设计参数的多体系统动力学常微分方程数学模型的一般形式为

$$\dot{v} = \dot{q}(t, b) \quad (1a)$$

$$M(t, q, b) \dot{v} = Q(t, q, v, b) \quad (1b)$$

其中, $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 为系统广义坐标矢量, $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ 为系统广义速度矢量, $Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n]^T$ 为系统广义力矢量, $b = [b_1, b_2, \dots, b_l]^T$ 为系统设计参数矢量, $M = [M_{ij}]_{n \times n}$ 为系统广义质量矩阵。

系统的初始条件由如下隐函数确定

$$(t^0, q^0, b) = 0, \quad : R \times R^n \times R^l \rightarrow R^n, \det(b) \neq 0 \quad (2a)$$

$$(t^0, q^0, \dot{q}^0, b) = 0, \quad : R \times R^n \times R^n \times R^l \rightarrow R^n, \det(\dot{v}) \neq 0 \quad (2b)$$

终止时间确定条件为

$$t^1: (t^1, q^1, \dot{q}^1, b) = 0, \quad : R \times R^n \times R^n \times R^l \rightarrow R$$

$$\dot{q}^1 = \dot{q}^0 + \dot{q}^1 \cdot t^1 + \dot{q}^1 \cdot t^1 = 0 \quad (2c)$$

设计目标函数可写为如下一般形式

$$(b) = G(q(t^1, b), (t^1, b), b, t^1(b)) + \int_0^{t^1} H(q, \dot{q}, \ddot{q}, b, t) dt \quad (3)$$

其中,第一部分仅与终态有关,第二部分与系统

中间过程有关。在优化设计问题中,设计变量和状态变量通常总是要受到某些限制,这些限制称为约束条件。约束条件一般可分为性能约束与界限约束。

性能约束又称为功能约束,或状态约束,该类约束反映系统性能或状态的要求。如对系统或结构的应力、位移、速度、加速度、屈曲条件等的要求。在多体系统中,该类约束可以写为

$$g(r(b, t), b, t) = 0 \quad (4a)$$

或

$$g(r(b, t), b, t) = 0 \quad (4b)$$

(4a)与(4b)式亦可写为以下离散形式

$$g_p(r(b, t^p), b, t^p) = 0, p = 1, \dots, n_n \quad (5a)$$

$$g_p(r(b, t^p), b, t^p) = 0, p = 1, \dots, n_e \quad (5b)$$

界限约束又称边界约束,或区域约束。它规定设计变量的允许取值范围,其一般形式为

$$b_k^d \leq b_k \leq b_k^u, k = 1 \text{ to } l \quad (6)$$

这样,基于多体系统动力学的最优化设计问题可归结为如下受等式和不等式约束的一般非线性受约束动态优化问题:

$$\begin{aligned} \min & (b) \\ b & \in R^l \\ \text{subject to} & \\ g_i(b) & = 0, i \in E \\ g_i(b) & \leq 0, i \in N \\ b_k^d & \leq b_k \leq b_k^u, k = 1 \text{ to } l \end{aligned} \quad (7)$$

2 设计灵敏度分析的伴随变量方法

设计灵敏度分析的主要任务是通过数值方式求解目标函数对设计变量的导数 ∇ ,为此,对目标函数变分,有

$$\begin{aligned} \delta J &= G + H^1 t^1 + \int_0^{t^1} H dt \\ &= (G_t^1 + H) t^1 + G_q^1 q^1 + \\ &G^1 \delta t^1 + G_b \delta b + \int_0^{t^1} (H_q \delta q + \\ &H_{\dot{q}} \delta \dot{q} + H_{\ddot{q}} \delta \ddot{q} + H_b \delta b) dt \end{aligned} \quad (8)$$

其中,

$$H^1 = H(t^1, q^1, \dot{q}^1, b) \quad (9)$$

(8)式中相关变量变分之间的关系为

$$\begin{aligned} t^1 &= t_b^1 \delta b, q = q_b \delta b \\ \dot{q}^1 &= \dot{q}_b \delta b, \ddot{q}^1 = \ddot{q}_b \delta b \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}^1 &= \dot{t}^1 + \dot{q}^1 \\ \dot{t}^1 &= \dot{t}^1 + \dot{t}^1 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{q}^1 = \dot{q}(t^1), \quad \dot{t}^1 = \dot{t}(t^1) \quad (12)$$

将上述关系代入(8)式后整理得

$$\begin{aligned} &= (\dot{G} + H^1) \dot{t}^1 + G_q^1 \dot{q}^1 + \\ &\int_0^1 H_q \dot{q} dt + G^1 \dot{t}^1 + \\ &\int_0^1 H \dot{t} dt + \int_0^1 H \dot{t} dt + \\ &(G_b + \int_0^1 H_b dt) \dot{b} \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\dot{G} = G_t^1 + G_q^1 \dot{t}^1 + G^1 \dot{t}^1 \quad (14)$$

以下对(1a-2c)各式变分,分别为

$$\dot{q} - \dot{q} = 0 \quad (15)$$

$$M^1 \dot{t}^1 + M^1 \dot{t}^1 - Q = 0 \quad (16)$$

$$= 0 \quad (17)$$

$$= 0 \quad (18)$$

$$= 0 \quad (19)$$

引进伴随变量 μ ,并将其转置后左乘以(15)式,然后将结果在 $[t^0, t^1]$ 上积分,有

$$\int_0^1 \mu^T (\dot{q} - \dot{q}) dt = 0 \quad (20)$$

对(20)式第一项进行分部积分,有

$$\begin{aligned} &\mu^1 T^1 \dot{q} - \mu^0 T^0 \dot{q} - \\ &\int_0^1 (\dot{\mu}^T \dot{q} + \mu^T \dot{q}) dt = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

引进伴随变量 λ ,将其转置后左乘以(16)式,然后将结果在 $[t^0, t^1]$ 上积分,有

$$\int_0^1 \lambda^T (M^1 \dot{t}^1 + M^1 \dot{t}^1 - Q) dt = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &= (\dot{G} + H^1 - \lambda^T) \dot{t}^1 + (G_q^1 - \lambda^T \dot{q}^1 - \mu^1 T) \dot{q}^1 + (\mu^0 T - \lambda^T \dot{q}^0 - \lambda^T \dot{q}^0) \dot{q}^0 + \\ &\int_0^1 [H_q + \dot{\mu}^T - (\lambda^T + \lambda^T) (M_q^1 \dot{q}^1 - Q_q)] \dot{q} dt + (G^1 - \lambda^T \dot{t}^1 - \lambda^1 T M^1) \dot{t}^1 + (\lambda^0 T M^0 - \lambda^T \dot{t}^0) \dot{t}^0 + \\ &\int_0^1 [H + \mu^T + \lambda^T M + \lambda^T \dot{M} + (\lambda^T + \lambda^T) Q] \dot{v} dt + \\ &\int_0^1 (H - \lambda^T M) \dot{t} dt + (G_b - \lambda^T \dot{b} - \lambda^T \dot{b} - \lambda^T \dot{b}) \dot{b} + \\ &\int_0^1 [H_b - (\lambda^T + \lambda^T) (M_b^1 \dot{b} - Q_b) dt] \dot{b} \end{aligned} \quad (32)$$

由于上述伴随变量取值任意,以下将选取伴随变量使得 $\dot{t}^1, \dot{t}^1 \dot{q}, \dot{q}^0 \dot{q}, \dot{q}, \dot{t}^1, \dot{t}^0, \dot{b}, \dot{b}$ 的系数分别

对(20)式第一项进行分部积分,并将其第二项展开,整理后可得

$$\begin{aligned} &\lambda^1 T M^1 \dot{t}^1 - \lambda^0 T M^0 \dot{t}^0 - \lambda^1 T M \dot{v} dt + \\ &\int_0^1 \lambda^T [- (\dot{M} + Q_v) \dot{v} + (M_q \dot{v} - Q_q) \dot{q} + \\ &(M_b \dot{v} - Q_b) \dot{b}] dt = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

因为(16)式既是位移的微分方程,同时又是速度的代数方程,必须对该方程考虑两次,故再引进新的伴随变量 ν ,得到类似(22)的结果,但不进行分部积分

$$\int_0^1 \lambda^T (M^1 \dot{t}^1 + M^1 \dot{t}^1 - Q) dt = 0 \quad (24)$$

展开第二项,得

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \lambda^T [M^1 \dot{t}^1 - Q + (M_q \dot{v} - Q_q) \dot{q} + \\ &(M_b \dot{v} - Q_b) \dot{b}] dt = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

以下分别引进伴随变量 ν, η, ζ ,并将它们转置后分别左乘以(17)、(18)、(19)式,再分别展开,得到

$$\lambda^T = 0 \quad (26)$$

$$\lambda^T \dot{t}^1 + \lambda^T \dot{q}^1 \dot{q}^1 + \lambda^T \dot{v}^1 + \lambda^T \dot{b}^1 = 0 \quad (27)$$

$$\lambda^T = 0 \quad (28)$$

$$\lambda^T \dot{q}^0 \dot{q}^0 + \lambda^T \dot{b}^0 = 0 \quad (29)$$

$$\lambda^T = 0 \quad (30)$$

$$\lambda^T \dot{q}^0 \dot{q}^0 + \lambda^T \dot{b}^0 + \lambda^T \dot{b}^0 = 0 \quad (31)$$

在(13)式中分别减去(21)、(23)、(25)、(27)、(29)、(31)不改变其值,将结果合并同类项后得

为0,以便使得目标函数的灵敏度为可计算的表达式。这样,上述伴随变量满足如下方程

$$= [\dot{G} + H] / \dot{\quad} \quad (33)$$

$$\mu^1 = G_q^T - \bar{q} \quad (34)$$

$$M^{1-1} = G^T - \bar{q} \quad (35)$$

$$M = H^T \quad (36)$$

$$\dot{\mu} = -H_q^T + (M_q^T - Q_q)^T (\quad + \quad) \quad (37)$$

$$M^T = -[H^T + \mu + \dot{M} + Q^T (\quad + \quad)] \quad (38)$$

$$\bar{q} = M^{0-0} \quad (39)$$

$$\bar{q}_q = \mu^0 - \bar{q}_q^T \quad (40)$$

这样,将伴随变量的结果代入(32)式后,该式变为如下可计算的形式

$$\begin{aligned} \nabla^T b &= (G_b - \bar{q}^T b - \bar{q}^T b - \\ &\quad \bar{q}^T b + \int_0^1 [H_b - \\ &\quad (\bar{q}^T + \bar{q}^T)(M_b^T - Q_b)] dt) b \end{aligned} \quad (41)$$

从而,目标函数的灵敏度为如下可计算的形式

$$\begin{aligned} \nabla &= (G_b^T - \bar{q}_b^T - \bar{q}_b^T - \bar{q}_b^T + \\ &\quad \int_0^1 [H_b^T - (M_b^T - Q_b)^T (\quad + \quad)] dt) \end{aligned} \quad (42)$$

3 例子

为了验证本文所给出方法的正确性,以图1所示弹簧—滑块系统为例将本文方法的结果与理论分析结果进行比较。

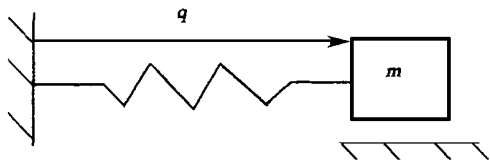


图1 弹簧—滑块系统

系统的动力学微分方程为

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \\ m\dot{\quad} &= -cq \end{aligned}$$

其中,滑块质量为 $m=1$,系统的初始条件为 $q(0)=0$, $\dot{q}(0)=0$,假设系统的终止时间为 $t^1=1/2$,弹簧的弹性系数为 c 。上述方程的解析解为

$$q(t) = 0 \sqrt{m/c} \sin(\sqrt{c/m} t)$$

假设系统设计参数为弹簧弹性系数和滑块的初始速度,即, $b = [b_1, b_2]^T = [c, 0]^T$,系统优化设计的目标函数为

$$= q^1 = 0 \sqrt{m/c} \sin(\sqrt{c/m} t^1)$$

则目标函数的灵敏度的解析表达式为

$$\nabla_1 = d/dc = \frac{0}{2c} \left[\frac{1}{2} \cos(\sqrt{c/m} \frac{1}{2}) - \sqrt{m/c} \sin(\sqrt{c/m} \frac{1}{2}) \right]$$

$$\nabla_2 = d/d0 = \sqrt{m/c} \sin(\sqrt{c/m} \frac{1}{2})$$

如果, $b = [1, 0.5]^T$, 则, $\quad = 0.5$,

$$\nabla_1 = -0.25, \quad \nabla_2 = 1$$

以下采用伴随变量方法进行计算,有

$$= t^1 - 1/2, \quad = q^0$$

$$= 0 - b_2, \quad = G = q^1$$

将上述表达式代入(33) - (40)及(42)得,

$$= \dot{q}^1 = 0, \quad \mu^1 = 1,$$

$$^1 = 0, \quad = 0$$

$$\dot{\mu} = c(\quad + \quad), \quad m^T = -\mu$$

$$= m^0, \quad = \mu^0$$

$$\nabla = - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} -q \\ 0 \end{bmatrix} (\quad + \quad) dt$$

$$= \begin{bmatrix} - \int_0^1 q dt \\ - \int_0^1 q dt \end{bmatrix}$$

从而得到关于 μ 的常微分方程终值问题

$$\dot{\mu} + \frac{c}{m} \mu = 0, \mu^1 = 1, \mu^1 = 0$$

其解为

$$\mu = a_1 \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} t) + a_2 \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} t)$$

其中, $a_1 = \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} t^1)$, $a_2 = \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} t^1)$, 从而,

$$= \frac{\dot{\mu}}{c} = \frac{a_1}{c} \sqrt{\frac{c}{m}} \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} t) +$$

$$\frac{a_2}{c} \sqrt{\frac{c}{m}} \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} t)$$

$$\nabla_1 = - \int_0^1 q dt = - \frac{0}{2c} \left[\sqrt{\frac{m}{c}} \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \cos(\sqrt{\frac{c}{m}} \frac{1}{2}) \right]$$

$$\nabla_2 = \sqrt{\frac{m}{c}} \sin(\sqrt{\frac{c}{m}} \frac{1}{2})$$

即与理论解析结果一致。

参考文献:

- [1] 刘延柱,洪嘉振,杨海兴.多刚体系统动力学[M].北京:高等教

- 育出版社,1989.
- [2] 洪嘉振. 计算多体系统动力学[J]. 北京高等教育出版社,1999.
- [3] Haug E J. Computer - Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems[J]. Vol. I:Basic Methods,Ally & Bacon,1989.
- [4] Amirouche F M L. Computational Methods in Multibody Dynamics[M]. Prentice Hall,Englewood,Cliffs,New Jersey,1993.
- [5] Manuel F O S Pereira,Jorge A C Ambrosio. Computational Dynamics in Multibody Systems[M]. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht,1994.
- [6] Shabana A A. Computational Dynamics[M]. John Wiley & Sons, New York,1995.
- [7] Schiehlen W (ed). Multibody Systems Handbook[M]. Springer, Heidelberg,1990.
- [8] Schiehlen W (ed). Advanced Multibody System Dynamics,Solid Mechanics & its Application[M]. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,1993.
- [9] Andrzejewski T,Bock H G,Eich E. Schwerin R V. Recent Advances in the Numerical Integration of Multibody Systems,Advanced Multibody System Dynamics,W. Schiehlen (ed) [M]. Kluwer Academic Publishers,Netherlands,1993,127 - 151.
- [10] Schoofs A J G. Experimental Design and Structural Optimization [C]. Ph. D. thesis,Eindhoven University of Technology,Eindhoven,(1987).
- [11] Haug E J,Arola J S,Applied Optimal Design: Mechanical and Structural Systems[M]. John Wiley & Sons,Inc.,New York,1979.
- [12] Bestle D,Analyse und Optimierung Von Mekrppersystemen[M]. Berlin: Springer,1994.
- [13] Eberhard P. Analysis and Optimization of Complex Multibody Systems using Advanced Sensitivity Analysis Methods[C]. Doctoral Dissertation,University of Stuttgart,1997.

SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION IN MULTIBODY SYSTEM DYNAMICS

Zang Hongwen Pan Zhenkuan
(Qingdao University ,Qingdao 266071 China)

Abstract : The adjoint variable method for design sensitivity analysis of multibody system dynamics based on ordinary differential equations is presented. The initial value conditions are given as implicit functions. The objective function is integral type. Variation method is used to generate the results. A simple example consisting of a spring and a mass is used to compare the results with those obtained by exact analytical method.

Key words : dynamics of multibody systems;ordinary differential equations;design sensitivity analysis;adjoint variable method