

基于自适应重要抽样的可靠性灵敏度分析方法^{*}

RELIABILITY SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON ADAPTIVE IMPORTANCE SAMPLING METHOD

康春华^{**1,2}

(1. 中国船舶重工集团公司 第 705 研究所, 西安 710075)

(2. 西北工业大学 航海学院, 西安 710072)

KANG ChunHua^{1,2}

(1. China Ship Weight Industry Group 705 Institute, Xi an 710075, China)

(2. Department of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi an 710072, China)

摘要 针对隐式极限状态方程的小失效概率问题, 提出基于自适应重要抽样的可靠性灵敏度分析方法, 给出该方法的具体实现步骤。所提方法从重要抽样抽取的所有样本点中选取合适的样本, 利用回归分析和隐函数求导法则, 求取失效概率对基本变量分布参数的灵敏度。所提算法的精度首先用有精确解的问题进行验证, 然后在工程实例中进行应用。研究表明, 与 Monte Carlo 可靠性灵敏度方法相比, 所提方法具有计算精度相近但计算工作量小的优点, 这种优点在失效概率小的情况下体现得更加充分。

关键词 可靠性 灵敏度 回归分析 重要抽样

中图分类号 O213.2 TH14.3

Abstract For reliability model of implicit limit state equation with small failure probability, a reliability sensitivity algorithm is presented on the basis of adaptive importance sampling. The appropriate sampling points are selected from those of the importance sampling. Hereby the regression and the derivative rule for implicit function are employed to obtain the sensitivity of the failure probability to the distribution parameters of the basic variables. The precision of the presented method is illustrated by examples with accurate solution of sensitivity, and the presented method is then applied to an engineering example. Compared with the sensitivity analysis based on Monte Carlo method, the presented method has closer precision and cheaper computational cost, and these advantages are more significant for the sensitivity analysis with small failure probability.

Key words Reliability; Sensitivity analysis; Regression analysis; Importance sampling

Corresponding author: KANG ChunHua, E-mail: kangch@tom.com, Tel: +86-29-88327287, Fax: +86-29-88223445

Manuscript received 20050427, in revised form 20060313.

1 引言

可靠性极限状态方程中基本变量的分布参数均会对失效概率产生影响, 而可靠性灵敏度分析可以定量给出各种基本变量的分布参数对失效概率的影响程度, 因而有必要建立可靠性灵敏度分析方法, 以便为工程设计和优化提供指导性建议。对于大部分工程问题, 可靠性分析的极限状态方程是基本变量的隐函数, 而且失效概率也非常小, 此时常用自适应重要抽样法来求解失效概率, 如何利用计算失效概率的自适应重要抽样法的结果, 分析基本变量分布参数对失效概率的影响, 这是本文要解决的主要问题, 这类问题在工程中极具普遍性。目前可靠性灵敏度分析方法主要有改

进的一次可靠性方法、二次可靠性方法^[1]和 Monte Carlo 法^[2,3]等, 其中一次和二次可靠性灵敏度分析方法对极限状态方程的解析表达式有一定的依赖性, 当极限状态方程为隐式的情况下, 一次和二次可靠性灵敏度分析方法均较难实施, 因为此时需要大量的迭代运算来计算隐函数的导数。Monte Carlo 法虽然是隐式极限状态方程下求解可靠性灵敏度的一种较好方法, 但它对于小失效概率情况下的问题计算效率极低, 很难为工程所接受。重要抽样法^[4,5]作为一种改进的 Monte Carlo 法, 其在小概率问题的可靠性分析中得到广泛的应用。本文着重研究基于自适应重要抽样法的可靠性灵敏度分析方法, 为工程实际问题提供一种效率高且具有普遍性的可靠性灵敏度分析方法。给出所提方法

^{*} 20050427 收到初稿, 20060313 收到修改稿。

^{**} 康春华, 女, 1963 年 3 月生, 陕西省西安人, 汉族。705 所研究员, 工学硕士, 研究方向为武器装备质量与可靠性, 曾获国防科工委科技进步特等奖。

的基本步骤,用有精确解的算例验证其效率和精度,并以某粉末冶金涡轮盘的低周疲劳寿命可靠性灵敏度分析为算例,说明所提方法的工程应用。

2 可靠性灵敏度分析方法

本文研究的基于自适应重要抽样的可靠性灵敏度分析方法的基本思想是,利用自适应重要抽样法计算失效概率的结果,从所抽取的样本点中选取对失效概率贡献较大的样本,由这些样本点通过回归分析得到对失效概率贡献较大的区域的回归方程,进而求取失效概率对基本变量分布参数的灵敏度。

2.1 失效概率计算的自适应重要抽样法

设所研究问题包含的基本随机向量为 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 隐式极限状态方程为 $g(x) = 0$, 基本随机向量的联合概率密度函数为 $f_x(x)$, 此时失效概率 P_f 的精确计算公式如下式。

$$P_f = \dots I[\cdot] f_x(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1)$$

其中 $I[\cdot]$ 为指示函数,当 $g(x) < 0$ 时, $I[\cdot] = 1$, 否则, $I[\cdot] = 0$ 。

当采用 Monte Carlo 数值模拟法求解式(1)的失效概率时,其基本思路是从基本随机向量的联合概率密度函数 $f_x(x)$ 中抽取足够多的样本,以指示函数的样本均值替代式(1)中指示函数的数学期望,从而求得失效概率的估计值。为了提高抽样效率,加快样本均值向总体均值的收敛,可以采用重要抽样函数的方法计算失效概率的估计值。以 $h_x(x)$ 表示引入的重要抽样密度函数,则式(1)可以改写为式(2)。

$$P_f = \dots I[\cdot] \frac{f_x(x)}{h_x(x)} h_x(x) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2)$$

从重要抽样密度函数中抽取样本 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 计算总体的样本 $I[\cdot] \frac{f_x(x_i)}{h_x(x_i)}$ 均值,即可求得失效概率的估计值。为了使失效概率估计值的方差达到最小,构造 $h_x(x)$ 时应该使对失效概率贡献大的样本点出现的概率大。显然极限状态方程的设计点对失效概率的贡献最大,将重要抽样函数的密度中心放在设计点,可以减小求失效概率估计值的方差。自适应重要抽样法的基本思路就是逐步自适应的将重要抽样的密度中心移至失效域中 $f_x(x)$ 最大的点的。

2.2 回归分析中样本点的选取

对于复杂的非线性隐式极限状态方程,其失效概率是基本随机变量分布参数的非线性隐函数,此时较难求取失效概率对基本变量分布参数的灵敏度。针对工程可靠性分析中对失效概率贡献大的区域主要集中在极限状态方程设计点附近的特点,只

要能求得设计点附近极限状态方程的线性解析表达式,则可以较高精度地求取失效概率对基本变量分布参数的灵敏度,因此求取可靠性灵敏度的问题就转化成求设计点附近极限状态方程 $g(x) = 0$ 的线性回归方程 $\hat{g}(x) = 0$ 。由于需要得到的是 $g(x) = 0$ 在设计点附近的线性回归方程,所以提出如下选取回归点 x_i 的两个准则。

(1) x_i 应尽量落在 $g(x) = 0$ 附近,这可以通过控制 x_i 处的极限状态函数值 $|g(x_i)| \leq \delta_1$ 实现, δ_1 为预先给定的一个小正数。

(2) x_i 应处在设计点 x_i^* 附近,这可以通过控制 x_i 和 x_i^* 的距离 $|x_i - x_i^*| \leq \delta_2$ 实现, δ_2 为预先给定的一个正数,它可以取为所有基本随机变量中最大标准差的 $1 \sim 3$ 倍。

从自适应重要抽样法抽取的样本点中首先按准则(1)选取所有满足 $|g(x_i)| \leq \delta_1$ 的点,从中找出满足 $g(x) = 0$ 且 $f_x(x)$ 最大的点,此点即为 x_i^* ,然后按准则(2)选取回归分析点 $x_i (i = 1, 2, \dots, N_1, N_1$ 为按准则(1)和(2)选取的回归点的总数),则由回归分析可得如下设计点附近的线性回归方程 $\hat{g}(x) = 0$ 。

$$\hat{g}(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \quad (3)$$

其中 a_0 和 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为回归系数。

2.3 可靠性灵敏度分析

对于式(3)所示的线性方程,若基本变量相互独立且服从正态分布,即 $x_i \sim N(\mu_{x_i}, \frac{\sigma_{x_i}^2}{n}) (i = 1, 2, \dots, n)$, μ_{x_i} 和 $\frac{\sigma_{x_i}^2}{n}$ 分别为第 i 个基本变量 x_i 均值和方差,则可以推得可靠度指标 β 和失效概率 P_f ,并进而推得失效概率 P_f 对基本变量的均值与标准差的偏导数如下所示

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{x_i}} = - \frac{a_i}{\sqrt{2}} \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{\hat{g}}}{\sigma_{\hat{g}}} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{x_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{x_i}} = \frac{a_i^2 \mu_{x_i}}{\sqrt{2} \sigma_{\hat{g}}^3} \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{\hat{g}}}{\sigma_{\hat{g}}} \right)^2 \right] \quad (5)$$

至此完成失效概率对基本变量分布参数的灵敏度分析,上述过程可归纳为如下的步骤。

(a) 基于自适应重要抽样法抽取失效概率分析所需的样本点。

(b) 按准则(1)和(2)选取回归分析的回归点,并建立设计点附近极限状态方程的线性回归方程。

(c) 由方程(4)和(5)进行失效概率对基本变量分布参数的灵敏度分析。

3 可靠性灵敏度分析方法的效率和精度验证

为验证本文所提方法的精度和效率,给出有精确灵敏度解的 4 个算例。算例 1 的极限状态方程为 $g = x_1 + x_2 + 5 = 0$, 其中 $x_1 \sim N(0, 1)$, $x_2 \sim N(0, 1)$ 。算例 2 的极限状态方程为 $g = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2.5 = 0$, 其中 $x_1 \sim N(1, 0.002\ 5)$, $x_2 \sim N(0.3, 0.000\ 9)$, $x_3 \sim N(0.5, 0.000\ 4)$ 。算例 3 的极限状态方程 $g = 6x_1^2 - x_2 + 2.0 = 0$, 其中 $x_1 \sim N(1, 0.2)$, $x_2 \sim N(3, 0.09)$ 。算例 4 的极限状态方程 $g = x_1^2 x_2 / 4 - x_3 = 0$, $x_1 \sim N(29, 6.25)$, $x_2 \sim N(3, 0.09)$, $x_3 \sim N(100, 36)$ 。

对于算例 1, Monte Carlo 法抽取 11 990 000 个样本点, 计算出的失效概率为 0.000 208 507, 自适应重要抽样法抽取 10 000 个样本点, 计算出的失效概率为

0.000 201 682, 精确方法计算的失效概率为 0.000 203 508, 三种方法计算得到的敏度值列于表 1。对于算例 2, Monte Carlo 法抽取 17 690 000 个样本点, 计算出的失效概率为 0.000 141 323, 自适应重要抽样法抽取 20 000 个样本点, 计算出的失效概率为 0.000 147 775, 精确方法计算的失效概率为 0.000 146 273, 三种方法计算得到的敏度值列于表 2。对于算例 3, Monte Carlo 法抽取 1 160 000 个样本点, 计算出的失效概率为 0.002 170 69, 自适应重要抽样法抽取 10 000 个样本点, 计算出的失效概率为 0.002 124 54, 敏度分析结果列于表 3 中。对于算例 4, Monte Carlo 法抽取 960 000 个样本点, 计算出的失效概率为 0.002 617 71, 自适应重要抽样法抽取 10 000 个样本点, 计算出的失效概率为 0.002 558 04, 敏度分析结果列于表 4 中。

表 1 算例 1 可靠性灵敏度分析结果
Tab. 1 The results of reliability sensitivities for example 1

方法 Methods	失效概率对变量均值敏度 Sensitivities of failure probability to mean of variable		失效概率对变量标准差敏度 Sensitivities of failure probability to standard deviation of variable	
	x_1	x_2	x_1	x_2
精确方法 Accurate method	- 0.000 544 571	- 0.000 544 571	0.001 361 43	0.001 361 43
Monte Carlo 法 Monte Carlo method	- 0.000 544 569	- 0.000 544 571	0.001 361 42	0.001 361 43
Monte Carlo 法误差(%) The error of Monte Carlo method(%)	0.000 367	0	0.000 735	0
自适应重要抽样法 Adaptive importance sampling method	- 0.000 544 561	- 0.000 544 566	0.001 361 4	0.001 361 42
自适应重要抽样法误差(%) The error of adaptive importance sampling method(%)	0.001 84	0.000 918	0.002 20	0.000 735

表 2 算例 2 的可靠性灵敏度分析结果
Tab. 2 The results of reliability sensitivities for example 2

方法 Methods	失效概率对变量均值敏度 Sensitivities of failure probability to mean of variable			失效概率对变量标准差敏度 Sensitivities of failure probability to standard deviation of variable		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
精确方法 Accurate method	- 0.005 127 4	- 0.015 382 2	- 0.010 254 8	0.008 405 58	0.045 390 1	0.013 448 9
Monte Carlo 法 Monte Carlo method	- 0.005 127 42	- 0.015 382 2	- 0.010 254 8	0.008 405 62	0.045 390 2	0.013 448 9
Monte Carlo 法误差(%) The error of Monte Carlo method(%)	0.000 390	0	0	0.000 476	0.000 230	0
自适应重要抽样法 Adaptive importance sampling method	- 0.005 127 41	- 0.015 382 2	- 0.010 254 8	0.008 405 6	0.045 39	0.013 448 9
自适应重要抽样法误差(%) The error of adaptive importance sampling method(%)	0.000 195	0	0	0.000 238	0.000 230	0

表 3 算例 3 的可靠性灵敏度分析结果

Tab.3 The results of reliability sensitivities for example 3

方法 Methods	失效概率对变量均值敏感度 Sensitivities of failure probability to mean of variable		失效概率对变量标准差敏感度 Sensitivities of failure probability to standard deviation of variable	
	x_1	x_2	x_1	x_2
Monte Carlo 法 Monte Carlo method	- 0.032 281 3	0.006 090 36	0.088 786 3	0.004 740 45
自适应重要抽样法 Adaptive importance sampling method	- 0.032 239 1	0.006 081 85	0.088 684 9	0.004 734 21

表 4 算例 4 的可靠性灵敏度分析结果

Tab.4 The results of reliability sensitivities for example 4

方法 Methods	失效概率对变量均值敏感度 Sensitivities of failure probability to mean of variable			失效概率对变量标准差敏感度 Sensitivities of failure probability to standard deviation of variable		
	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
Monte Carlo 法 Monte Carlo method	- 0.001 040 97	- 0.024 700 6	0.000 268 063	0.000 944 642	0.063 823 7	0.000 150 339
自适应重要抽样法 Adaptive importance sampling method	- 0.001 039 91	- 0.024 623 0	0.000 262 562	0.000 946 572	0.063 682 7	0.000 144 822

从上述四例结果可以看出,对于线性问题 Monte Carlo 法与自适应重要抽样法都具有很高的精度,对于非线性问题,自适应重要抽样法与 Monte Carlo 法的结果近似。但就计算量而言,自适应重要抽样法比 Monte Carlo 法小得多。

4 工程实例

分析某型发动机粉末冶金涡轮盘在 6 000 次 0—起飞—0 循环载荷作用下失效概率对基本变量分布参数的敏度。已知粉末冶金材料的疲劳强度系数 S_f 、疲劳延性系数 ϵ_f 、寿命强度指数 b 、疲劳延性指数 c 、弹性模量 E 、循环数次数 n 的分布形式和相应的均值与标准差,并已知起飞状态的应力、应变的分布形式和相应的均值与标准差。各变量的分布及其参数见表 5。

疲劳寿命 N_f 可以通过考虑平均应力与平均应变影响的 Manson Coffin 公式进行计算,Manson Coffin 公式如下式所示。

$$1/2 = \left[\frac{S_f - S_m}{E} \right] (2N_f)^b + (\epsilon_f - \epsilon_m) (2N_f)^c \quad (6)$$

其中 ϵ 为应变变程, S_m 平均应力, ϵ_m 平均应变。

对 0—起飞—0 循环载荷而言,若得到起飞状态危险区域的应力 S 和应变 ϵ ,则有 $S = S_m + S/2$ 、 $\epsilon_m = \epsilon/2$ 。由式(6)算得疲劳寿命后,利用载荷—寿命干涉模型可建立寿命可靠性分析的极限状态方程如下

$$g = N_f - n = 0$$

表 5 涡轮盘可靠性分析的随机变量的分布及参数

Tab.5 The distribution form and parameters of basic random variables in reliability analysis of the turbo disk

随机变量 Basic random variable	分布形式 Distribution form	均值 Mean	标准差 Standard deviation
疲劳强度系数 Fatigue strength coefficient	正态 Normal	2 029	162.32
疲劳延性系数 Fatigue ductility coefficient	正态 Normal	0.001 6	0.001 336
寿命强度指数 Fatigue strength exponent	正态 Normal	- 0.096	0.001 92
疲劳延性指数 Fatigue ductility exponent	正态 Normal	- 0.41	0.000 82
弹性模量 The elastic modulus	正态 Normal	188 500	9 425
0—起飞—0 循环数次数 Cyclic number of 0-takeoff-0	对数正态 Logarithm normal	6 000	60
起飞状态的应力 The stress of takeoff	正态 Normal	1 077.63	20.281 4
起飞状态的应变 The strain of takeoff	正态 Normal	0.004 549 74	$8.751\ 59 \times 10^{-5}$

表 6 涡轮盘疲劳寿命可靠性敏感度分析结果

Tab. 6 The results of fatigue reliability sensitivities for the turbo disk

随机变量 Basic random variable	失效概率对变量均值敏感度 Sensitivities of failure probability to mean of variable		失效概率对变量标准差敏感度 Sensitivities of failure probability to standard deviation of variable	
	Monte Carlo 法 Monte Carlo method	自适应重要抽样法 Adaptive importance sampling method	Monte Carlo 法 Monte Carlo method	自适应重要抽样法 Adaptive importance sampling method
疲劳强度系数 Fatigue strength coefficient	- 8.29 973 $\times 10^{-6}$	- 8.337 31 $\times 10^{-6}$	2.627 2 $\times 10^{-5}$	2.638 61 $\times 10^{-5}$
疲劳延性系数 Fatigue ductility coefficient	- 0.086 116 2	- 0.086 433 1	0.023 279 3	0.023 340 9
寿命强度指数 Fatigue strength exponent	- 0.076 415 5	- 0.076 431 4	0.026 342 5	0.026 229 8
疲劳延性指数 Fatigue ductility exponent	- 0.011 192	- 0.010 158 7	0.000 241 337	0.000 197 897
弹性模量 The elastic modulus	4.112 17 $\times 10^{-8}$	4.127 88 $\times 10^{-8}$	3.765 34 $\times 10^{-8}$	3.755 66 $\times 10^{-8}$
0—起飞—0 循环次数 Cyclic number of 0-takeoff-0	0.001 257 97	0.001 277 06	3.718 1 $\times 10^{-5}$	3.813 82 $\times 10^{-5}$
起飞状态的应力 The stress of takeoff	4.139 08 $\times 10^{-6}$	4.213 4 $\times 10^{-6}$	8.163 91 $\times 10^{-7}$	8.420 04 $\times 10^{-7}$
起飞状态的应变 The strain of takeoff	2.081 85	2.073 31	0.891 206	0.879 763

分别采用 Monte Carlo 法与自适应重要抽样法计算的失效概率及其敏感度值, Monte Carlo 法抽取 6 300 000 个样本点, 算得的失效概率为 0.000 396 984; 自适应重要抽样法抽取 10 000 个样本点, 算得的失效概率为 0.000 402 375。两种方法计算得到的敏感度值列于表 6。

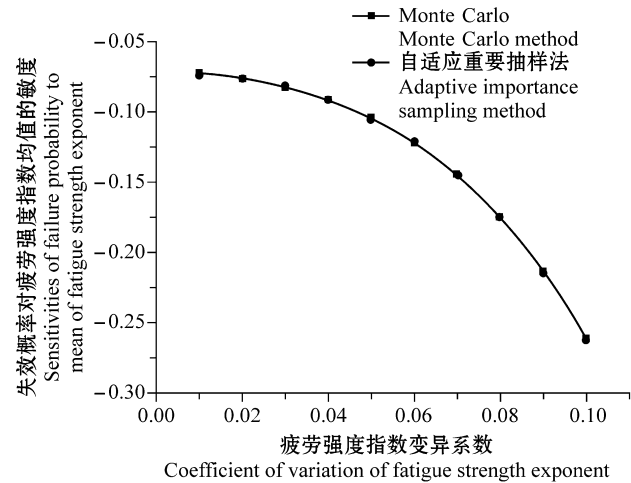


图 1 疲劳强度指数的变异系数对寿命强度指数均值可靠性敏感度的影响

Fig. 1 Relation between sensitivities of failure probability to mean of fatigue strength exponent and its coefficient of variation

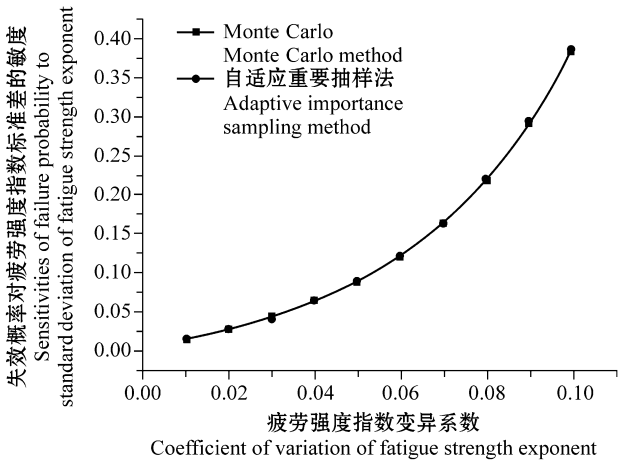


图 2 疲劳强度指数的变异系数对寿命强度指数标准差可靠性敏感度的影响

Fig. 2 Relation between sensitivities of failure probability to standard deviation of fatigue strength exponent and its coefficient of variation

表 6 给出表 5 列出的原始数据情况下的灵敏度分析结果, 图 1 和图 2 则给出寿命强度指数的变异系数发生变化时, 失效概率对于该变量均值与标准差的敏感度随变异系数变化的结果。

从灵敏度分析的结果看, 起飞状态的应变、起飞状

态的应力、0—起飞—0 循环数次数以及弹性模量的均值增加将引起系统失效概率的增加;疲劳强度系数、疲劳延性系数、寿命强度指数以及疲劳延性指数的均值增加将引起系统失效概率的减小;所有变量标准差的增加都将引起系统失效概率的增加。随着寿命强度指数变异系数的增大,失效概率对该变量的均值与标准差的灵敏度也逐渐增大。在所有变量中,起飞状态的应变的变化对系统失效概率的影响最大,这与定性分析的结果是一致的。重要抽样法得到的灵敏度分析结果与 Monte Carlo 法得到的灵敏度分析结果相一致,表明本文所提方法具有较高的精度。而本文方法与 Monte Carlo 法计算工作量的对比表明,基于自适应重要抽样法的可靠性灵敏度分析具有很高的效率。

5 结论

本文提出基于自适应重要抽样的可靠性灵敏度分析方法,给出该方法求解过程。采用具有精确解的线性算例,验证所提方法的精度,采用非线性算例,验证所提方法与 Monte Carlo 具有相近的处理非线性问题的功能,但是在计算效率方面,该方法比 Monte

Carlo 法有很大提高。将该方法用于某型发动机涡轮盘的疲劳寿命可靠性灵敏度分析,得到的定量结果与定性结果具有一致性,表明该方法是合理的。而该方法与 Monte Carlo 法计算的结果相一致,更加验证了该方法的精度,说明计算量小、精度高的基于自适应重要抽样的可靠性灵敏度分析方法可以用于工程实际问题。

参考文献 (References)

- 1 Karamchandani A, Cornell C A. Sensitivity estimation within first and second order reliability methods. *Structural Safety*, 1991, 11 (2): 95 ~ 107.
- 2 Melchers R E, Ahammed M A. Fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability. *Computers & Structures*, 2004, 82: 55 ~ 61.
- 3 Lataillade A D, Blanco S, Clergent Y, et al. Monte Carlo method and sensitivity estimations. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2002, 75 (5): 529 ~ 538.
- 4 Melchers R E. Search-based importance sampling. *Structural Safety*, 1990, (9): 117 ~ 128.
- 5 Yaacob Ibrahim. Observations on applications of importance sampling in structural reliability analysis. *Structural Safety*, 1991, (9): 269 ~ 281.