

非线性模态综合法的灵敏度分析 方法及其应用

林砺宗 王晓锋 徐晓莉

(南京理工大学)

摘要 灵敏度分析对结构重新设计和结构修改工作是非常重要的。本文引用非线性模态综合法^[1]导出了分块线性系统的积分型非线性灵敏度分析方程组;讨论了迭代求解方法;编制了计算机程序。本法可用于求解分块线性系统的响应对非线性连接参数的灵敏度。文中所给算例证明了本法原理的正确性。最后介绍了灵敏度分析的应用实例。

关键词 非线性系统 模态综合 灵敏度分析 应用软件 积分方程

工程中的振动系统有很多是非线性系统,非线性系统的振动分析是比较困难的。但有许多非线性系统是由多个线性系统通过一些本构关系呈非线性的元件连接而成的。这种系统称为分块线性(的非线性)系统。文献 1 的以连接元件变形量为广义坐标的非线性模态综合法,可方便地求解这种系统的响应。为了使分块线性系统的分析方法更加完善,建立优化设计方法,本文在文献 1 的基础上导出了位移和速度等对非线性连接元件参数的灵敏度。

1 非线性模态综合法^[1]简介

该法的基本思想是:(1)将分块线性系统假想地分割成各块独立的线性系统,即子系统,各块间的相互作用由等效于连接的非线性元件力的作用来模拟;(2)各块线性子系统的振动可用线性振动的模态理论加以描述;(3)根据子系统间相连自由度上的力和位移(或相对状态)满足该等效元件的本构关系的原则,将各子系统装配在一起。如此可以得到,以等效非线性元件的变形状态为广义坐标的非线性模态综合积分型方程组^[1]

$$\hat{x}(t) = \hat{\bar{x}}(t) - 2 \cdot \text{Re}[\Phi \cdot q(t)] - \Psi \cdot G(t) \quad (1.1)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = \dot{\hat{\bar{x}}}(t) - 2 \cdot \text{Re}[\Phi \cdot \Lambda \cdot q(t)] - \Psi \cdot \dot{G}(t) \quad (1.2)$$

式中 $\hat{x}(t)$ 是非线性元件的变形列阵; $\hat{\bar{x}}(t)$ 是假想的非线性元件内力恒为零时同等载荷下的 $\hat{x}(t)$; $\text{Re}[\]$ 表示取括号内的实部; $G(t)$ 是非线性元件的内力列阵; $q(t)$ 为总体的模态响应列阵,是各子系统的模态响应列阵 $q^a(t)$ 的排列,即 $q(t) = ([q^1(t)]^T \cdots [q^n(t)]^T \cdots [q^1(t)]^T)^T$; Ψ 是综合得到的剩余柔度矩阵, $\Psi = \sum_{a=1}^n (T^a)^T \Psi^a T^a$; Ψ^a 为第 a 个子系统的剩余柔度矩阵; Λ 是与 $q(t)$ 对应的复特征值组成的对角阵; Φ 是综合后的复模态振型矩阵,各子系统振型的转置排列,即

1992 年 2 月收稿,1993 年 4 月定稿。

$$\Phi = [(T^1)^T \Phi^1 \dots (T^a)^T \Phi^a \dots (T^J)^T \Phi^J] \quad (1.3)$$

Φ^a 为第 a 个子系统的振型矩阵; T^a 是第 a 个系统的装配矩阵 (或称变换阵), 其元素 T_{ij}^a 表示第 j 非线性元件与 a 子系统的第 i 自由度之间的方向余弦, 元件的方向定义为由连接点指向另一端点; 当元件 j 与自由度 i 所在的点不连接时, 有 $T_{ij}^a = 0$ 。 $q(t)$ 可以写成

$$q(t) = \int_0^t [\Lambda^a(t-\tau)] \cdot Q(\tau) \cdot d\tau \quad (1.4)$$

式中 $\Lambda^a(t)$ 为子系统 a 的模态坐标下的单位脉冲响应函数组成的对角阵; $Q(t)$ 为模态坐标下广义力列阵, 且有 $Q(t) = \Phi^T \cdot G(t)$ 。而 $G(t)$ 列阵中的元素由元件的本构关系确定

$$G_j(t) = G_j[\hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t), t] \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (1.5)$$

式中 J 为总的非线性连接的数目。方程 (1.1)、(1.2) 和 (1.5) 构成了非线性模态综合法的积分型方程组。

2 灵敏度分析

毫无疑问, (1.5) 式是由许多已知参数决定的, 任一参数的变化都将影响到响应的历程。利用这一点, 可通过改变这些参数来控制系统响应的分布情况和幅值大小, 达到优化结构的目的。但不同参数对响应的的影响程度不同, 究竟调整哪些参数最有效? 因此, 首先要解决结构响应对参数变化的敏感度问题, 这可用灵敏度分析方法来达到。设 p 为某非线性元件本构关系中的一个参数, 在 (1.1)、(1.2) 式两边求对 p 的偏导数, 于是有

$$\dot{\hat{x}}_{\cdot p} = -2 \cdot \text{Re}[\Phi \cdot q_{\cdot p}(t)] \quad (2.1)$$

$$\dot{\hat{x}}_{\cdot p} = -2 \cdot \text{Re}[\Phi \cdot A \cdot q_{\cdot p}(t)] \quad (2.2)$$

其中下标 “ $\cdot p$ ” 表示对 p 的偏导数, 这里注意到 (1.1)、(1.2) 式中右边第一项与元件本构关系永远无关的事实, 故其对 p 的偏导数为零; 右边最后一项为高阶模态的剩余柔度项, 其贡献一般说来很小, 再考虑到 Ψ 为方阵, 占用计算机内存较大, 该项矩阵乘积的运算量也较大, 故本文建议将此项忽略, 而用多取几阶模态的办法来保证分析结果满足工程的精度要求。方程 (2.1) 和 (2.2) 中的 $q_{\cdot p}(t)$ 可以写成

$$q_{\cdot p}(t) = \int_0^t [\Lambda^a(t-\tau)] \cdot Q_{\cdot p}(t) \cdot d\tau \quad (2.3)$$

$$\text{且有} \quad Q_{\cdot p}(t) = \Phi^T \cdot G_{\cdot p}(t) \quad (2.4)$$

由于非线性元件的本构关系不仅与所在连接自由度的状态有关, 还可能与其它自由度的变形量、运动和内力有关, 所以 $G_{\cdot p}(t)$ 的表达式较为复杂, 就其中的第 j 个元素而言, 其灵敏度表达式为

$$G_{j \cdot p}(t) = \frac{\partial G_j(t)}{\partial \hat{x}^T} \cdot \hat{x}_{\cdot p}(t) + \frac{\partial G_j(t)}{\partial \dot{\hat{x}}^T} \cdot \dot{\hat{x}}_{\cdot p}(t) + \frac{\partial G_j(t)}{\partial p} \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2.5)$$

式中最后一项只表示 $G_j(t)$ 对其中显含的 p 的导数, 若 p 不属于 $G_j(t)$ 表达式中的参数, 则此项为零。

显然, (2.1) ~ (2.5) 式构成了灵敏度问题的非线性积分方程组, 用数值迭代法可解得未知函数 $\hat{x}_{\cdot p}(t)$, $\dot{\hat{x}}_{\cdot p}(t)$ 和 $G_{\cdot p}(t)$ 。作者根据上法, 在 IBM-PC 微机上编制了应用程序。

值得注意的是, 在进行灵敏度分析求解时, 应同时对响应求解, 因为 (2.1) 式中要

求响应值确定非线性元件的变形和运动状态。

3 应用实例

3.1 在结构重新设计中的应用

对于弹性炮架火炮, 发射时炮架受到比膛合力小得多的后坐力, 它的大小和变化规律与膛合力有关, 很大程度上还决定于炮架与后坐部分之间的缓冲装置或反后坐装置的力学特征。由于过大的后坐力是引起全炮振动和跳动的主要原因, 所以控制后坐力的大小或改变它的变化规律是提高火炮射击精度的重要措施之一。

某高炮的缓冲装置为弹簧式缓冲机, 主要组成部分为弹簧和阻尼轮^[2]。阻尼轮利用摩擦消耗后坐部分的运动能量。另外, 后坐部分靠导轨支撑, 相对运动时接触面处有较大的摩擦力。这样, 除了缓冲机提供阻力之外, 还有导轨的摩擦力, 构成了非线性问题。文献 2 给出了缓冲机的分块线性系统力学模型和物理参数, 以及用非线性模态综合法求解的后坐位移响应曲线和后坐力计算曲线。本文用前述原理求解了后坐力对弹簧刚度值 K 和初力 F_0 的灵敏度。

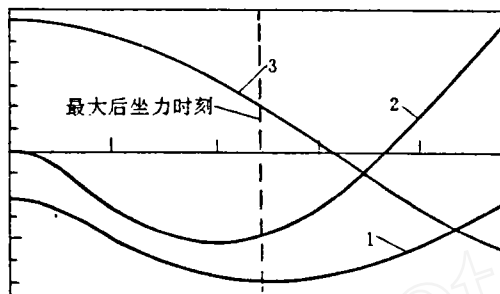


图 3.1 第一后坐过程的后坐力及其灵敏度
Fig. 3.1 The recoil force and its sensitivity in the first recoiling procedure

图 3.1 中曲线 (1) 为第一次后坐复进阶段的后坐力, 曲线 (2) 为对 K 的灵敏度, 曲线 (3) 为对 F_0 的灵敏度。因第一次复进结束后有剧烈的撞击出现, 导致灵敏度增大了很多, 难以与前面的同时绘出 (数量级相差太大), 图中已截断。

一般说, 最大 (指绝对值) 后坐力是主要参数, 图 3.1 中最大后坐力为 29681N, 而实际测量值为 31262N。最大后坐力对 K 的灵敏度值为 -1.4188×10^{-2} , 负号表明增大刚度可使后坐力变小, 即绝对值变大; 反之可使最大后坐力变小。此即表明减小缓冲簧刚度可减小最大后坐力, 有利于提高射击精度。图中最大后坐力对 F_0 的灵敏度为 0.342。

在重新设计的方案中, 对 K 取增量 $\Delta K = -686 \times 10^3 \text{N/m}$, 对 F_0 取增量 $\Delta F_0 = -980 \text{N}$ 。根据灵敏度概念, 最大后坐力的增量近似地为

$$\Delta F_{\max} = -(-1.4188 \times 10^2 \cdot \Delta K + 0.342 \cdot \Delta F_0) = -9.398 \text{N}$$

即最大后坐力将减小 9398N。实测结果表明, 按上述方案进行重新设计的火炮, 最大后坐力减小了 9702N, 与估计值相差不大。可见, 灵敏度分析具有明显的工程实用意义, 只要应用本文方法就可进行方案的评价, 无需逐个方案进行实验, 从而缩短时间, 降低费用, 提高工作效率。

3.2 在最优化设计中的应用

某双管高炮结构上设有炮管支点 (或称三支点), 即从摇架前端伸出一根悬臂梁与外伸的炮管固接, 从而提高了炮管的刚度, 减小了炮管自身的弯曲振动。根据分块线性系统的分析方法, 全炮可分为 5 个子结构, 其中 3 个为弹性子结构, 2 个为刚性体。在非线性的连接方面, 考虑到了部件 (即子结构) 之间的间隙和火炮与土壤之间的单面约束。数值分析结果表明, 若将三支点分离, 则双方之间的相对位移达 8mm 之多。显然, 如此大

的相对位移适合于安装摩擦式减振器, 这种减振器只需将原来的连接方式改为摩擦力的相互作用即可实现。但究竟需要多大的摩擦力仍是一个问题。下面以第一发至第二发之间的炮口响应曲线加以讨论。

首先假设摩擦力 $f = 1000\text{N}$ 。图 3.2 给出了此时的新响应曲线与原响应曲线的对比。可以看出, 减振效果差别不大。但是, 图中的新灵敏度曲线即新响应对 f 的灵敏度表明, 减小 f 值可使新响应曲线的后两个波峰降低, 而使波谷上升, 即对该频率的振动起到减振作用。于是取 $f = 100\text{N}$, 图 3.3 给出了类似的 3 条曲线, 将新响应曲线 ($f = 100\text{N}$) 与新灵敏度曲线对照可知, 增大 f 值可使该振动的幅值更小。可知, 在 $100\text{N} \sim 1000\text{N}$ 之间存在 f 的最佳值。

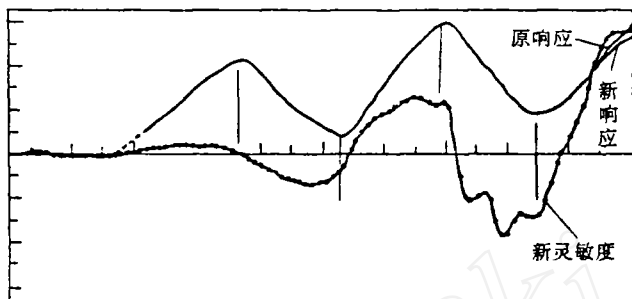


图 3.2 三支点采用 1000N 的摩擦力连接的响应和灵敏度

Fig. 3.2 The response and its sensitivity in the case of 1000N friction force at the third supporting point

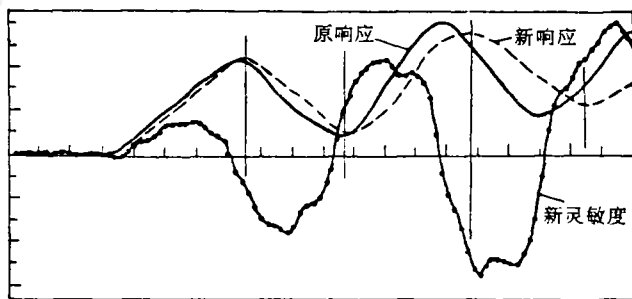


图 3.3 三支点采用 100N 摩擦力连接时响应及灵敏度

Fig. 3.3 The response and its sensitivity in the case of 100N friction at the third supporting point

进一步的分析结果表明, $f = 250\text{N}$ 具有很好的减振效果。图 3.4 给出了原响应曲线与 $f = 250\text{N}$ 时的新响应曲线的比较。可以看出振荡的幅值明显减小。图中新灵敏度曲线为 $f = 250\text{N}$ 时的响应对 f 的灵敏度。可以看出第二个波峰和波谷对应的灵敏度都接近于零, 此即说明, 再改变 f 值几乎不会使振动幅值减小, 显然 $f = 250\text{N}$ 已经接近了局优或全优解。

因此, 应用本文的灵敏度分析技术, 某些复杂非线性系统的响应优化问题也可容易

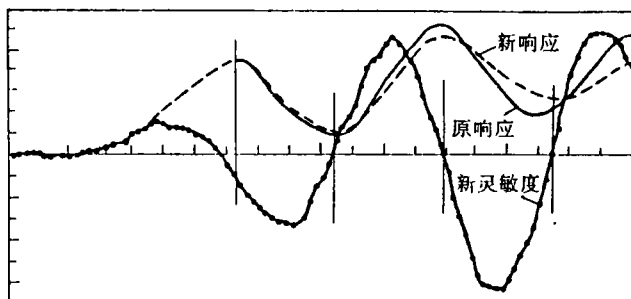


图 3.4 三支点摩擦力为最佳值时的响应和灵敏度

Fig. 3.4 The response and its sensitivity in the case of an optimum friction force at the third supporting point

地得到解决。

4 结论

- (1) 本文导出的灵敏度分析方法是正确的, 数值求解的方法是可行的;
- (2) 本文所编灵敏度分析软件是成功的, 具有较高的计算精度和较强的适应性;
- (3) 本文的灵敏度分析方法具有很大的实用价值, 可用于指导结构的重新设计和最优优化设计。

参考文献

- 1 林砺宗. 结构分析的非线性模态综合法. 振动与冲击, 1991 (4)
- 2 林砺宗. 用非线性模态综合法模拟某高炮的后坐运动. 工程力学, 1991 (4): 138

SENSITIVITY ANALYSIS BY THE NONLINEAR MODAL SYNTHESIS METHOD

Lin Lizong Wang Xiaofeng Xu Xiaoli

(Nanjing University of Science & Technology)

Abstract The paper presents the integral equation-set for the sensitivity analysis of nonlinear systems of piece-by-piece linearity using nonlinear modal synthesis equation-set taking the deformations of the nonlinear elements as the generalized coordinates. A program software has been built up on IBM-PC computers. It can be used to calculate the sensitivity of responses of nonlinear systems to the parameters of the nonlinear interfaces. Applications on the redesign and optimization of structures are then taken as illustrative examples.

Key words nonlinear system, modal synthesis, sensitivity analysis, application software, integral equation