

基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析方法¹⁾

宋述芳²⁾ 吕震宙³⁾

(西北工业大学航空学院, 西安 710072)

摘要 针对工程实际中大量存在的小失效概率问题, 提出了基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析方法. 在子集模拟重要抽样可靠性分析方法中, 通过引入合理的中间失效事件, 将小的失效概率表达为一系列较大的条件失效概率的乘积, 而较大的条件失效概率则可通过构造中间失效事件的重要抽样密度函数来高效求解. 基于子集模拟重要抽样可靠性分析的思想, 论文将可靠性灵敏度转化为条件失效概率对基本变量分布参数的偏导数形式, 推导了基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度估计值及估计值方差的计算公式, 并采用算例对所提方法进行了验证. 算例结果表明所提方法具有较高的计算精度和效率, 并且适用单个和多个失效模式系统.

关键词 可靠性灵敏度, 子集模拟, 重要抽样, 条件失效概率, 方差分析

中图分类号: TB114.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2008)05-0654-09

引 言

可靠性灵敏度分析可以提供结构失效概率对基本变量分布参数的敏感性, 从而有效指导可靠性优化设计. 常用的可靠性灵敏度分析方法中, 有的方法适用范围有限, 如基于一次二阶矩 (FOSM) 的灵敏度分析方法仅适用于正态变量情况下的线性极限状态函数的分析^[1,2], 有的方法在计算小失效概率问题时, 巨大的工作量难以被接受, 如基于有限差分法和基于 Monte Carlo 模拟的可靠性灵敏度分析方法等^[3,4].

子集模拟^[5~8]是一种针对小失效概率问题的高效可靠性分析方法, 它通过引入合理的中间失效事件, 将概率空间划分为一系列具有序列包含关系的子集, 从而将小失效概率表达为一系列较大的条件失效概率的乘积, 而较大的条件失效概率可由数字模拟方法高效获取. 与适用于非线性隐式极限状态方程的直接 Monte Carlo 法相比, 子集模拟可靠性分析方法的显著优点是适用于小概率问题; 与方向抽样^[10], 线抽样^[11]等适用于小失效概率的可靠性分析方法相比, 子集模拟则十分适用于隐式的非线性极限状态方程. 文献 [5,8] 提出了基于 MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 的子集模拟可靠性分析方法, 但

是 MCMC 方法的先期产生的样本不成熟, 且所产生的条件样本点具有相关性, 这在一定程度上影响了该方法的效率. 文献 [9] 提出了基于子集模拟的序列重要抽样法, 该方法继承了子集模拟和重要抽样法的优点, 且避免了 MCMC 模拟的缺点, 有很高的计算精度和效率. 本文在此基础上, 提出了基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析方法, 将定义为失效概率对基本变量分布参数的偏导数的可靠性灵敏度转化成了条件失效概率对基本随机变量分布参数的偏导数, 利用中间失效事件的重要抽样密度函数抽取的条件样本点来高效估计条件失效概率对随机变量分布参数的偏导数, 得出可靠性灵敏度的计算公式, 并进一步分析了可靠性灵敏度估计值的方差. 本文通过算例对所提方法与 Monte Carlo 数字模拟进行了比较, 结果表明所提方法有较高的计算效率和精度.

1 基于子集模拟重要抽样的可靠性分析

1.1 子集模拟的基本原理

文献 [5] 发展了适用于高维小失效概率分析的子集模拟法, 其基本思路是通过引入合理的中间失

2007-06-06 收到第 1 稿, 2008-04-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10572117), 新世纪优秀人才支持计划 (NCET-05-0868), 航空科学基金 (2007ZA53012), 国家高技术研究发展计划 (863 计划 2007AA04Z401) 和西北工业大学博士论文创新基金资助项目.

2) E-mail: songshufangssf@mail.nwpu.edu.cn

3) E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

效事件, 将小概率问题转化为一系列较大的条件概率的乘积 (见图 1). 设功能函数 $g(\mathbf{x})$ 定义的失效域为 $F = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$, 通过引入一系列临界值 $b_1 > b_2 > \cdots > b_m = 0$, 构成中间失效事件 $F_k = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) \leq b_k\} (k = 1, 2, \cdots, m)$, 即有 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_m = F$, 且有 $F_k = \bigcap_{i=1}^k F_i$, 依据概率论中乘法定理及事件的关系, 失效概率可表达为

$$P_f = P(F) = P(F_1) \cdot \prod_{i=2}^m P(F_i|F_{i-1}) \quad (1)$$

记 $P_1 = P(F_1)$, $P_i = P(F_i|F_{i-1}) (i = 2, \cdots, m)$, 则式 (1) 可改写成

$$P_f = \prod_{i=1}^m P_i \quad (2)$$

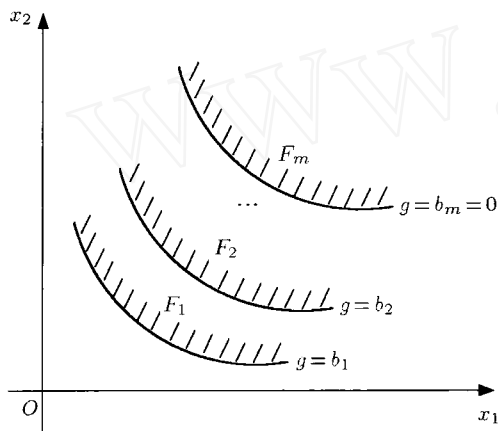


图 1 子集模拟示意图

Fig.1 Subset simulation

从上述变换可知, 通过引入中间失效事件, 小概率可转化为较大的条件概率的乘积, 而采用数字模拟法去计算较大的条件概率的效率要比计算小概率的效率要高很多 [5].

1.2 子集模拟过程

P_1 的估计值 \hat{P}_1 可以通过直接 Monte Carlo 法模拟, 而 $P_i (i = 2, \cdots, m)$ 的估计值 \hat{P}_i 则可以通过抽取条件样本点来进行估计.

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} I_{F_1}[\mathbf{x}_k^{(1)}] \quad (3)$$

$$\hat{P}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] \quad (i = 2, \cdots, m) \quad (4)$$

上述两式中 $I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是指示函数, 当样本点 $\mathbf{x}_k^{(i)} \in F_i$ 时, $I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] = 1$, 否则 $I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] = 0$.

$\mathbf{x}_k^{(1)}$ 是从基本随机变量的联合概率密度函数 $f_X(\mathbf{x})$ 中抽取的 N_1 个独立同分布样本中的第 k 个样本; $\mathbf{x}_k^{(i)} (i = 2, \cdots, m)$ 是从基本随机变量的条件概率密度函数 $q(\mathbf{x}|F_{i-1}) = I_{F_{i-1}}[\mathbf{x}]f_X(\mathbf{x})/P(F_{i-1})$ 中抽取的 N_i 个独立同分布样本中的第 k 个样本.

尽管可以直接用 Monte Carlo 法抽取服从分布 $q(\mathbf{x}|F_{i-1})$ 的条件样本点, 但是这种抽样方法的效率很低, 需要 $1/\prod_{j=1}^{i-1} P_j$ 次抽样才能得到符合要求的样

本点. 文献 [5] 采用 MCMC 方法模拟条件样本点, 但是 MCMC 方法先期产生的样本不成熟, 另外所产生的条件样本点的相关性在一定程度上也影响了该方法的效率. 文献 [9] 将子集模拟和重要抽样相结合进行可靠性分析, 解决了 MCMC 方法的缺点.

1.3 中间失效事件的选择 [9]

中间失效事件 $\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$ 的选择在子集模拟过程中起着重要作用. 如果引入的中间失效事件很多, 则 $b_i (i = 1, \cdots, m)$ 下降缓慢, 对应的条件失效概率可以用较少的样本进行模拟, 但总的抽样点数 $N = \sum_{i=1}^m N_i$ 将会增加; 反之, 若引入的中间事件很少, 则模拟每个较小的条件失效概率需要较多的样本, 也会增加总的抽样点数. 对于中间失效事件的选择, 需要在模拟条件失效概率的抽样点数 N_i 和中间失效事件的个数 m 上采取折衷的方法. 子集模拟可以通过自适应分层的方法来实现, 具体过程如下:

(1) 用直接 Monte Carlo 模拟法产生 N_1 个服从联合概率密度函数为 $f_X(\mathbf{x})$ 的独立同分布的样本 $\{\mathbf{x}_k^{(1)} : k = 1, \cdots, N_1\}$.

(2) 计算得到这 N_1 个样本对应的功能函数响应值 $\{g(\mathbf{x}_k^{(1)}) : k = 1, \cdots, N_1\}$, 并这 N_1 个响应值从小到大排序, 取第 $p_0 N_1$ 个响应值作为中间事件 $F_1 = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) < b_1\}$ 的临界值 $b_1 = g(\mathbf{x}_{p_0 N_1}^{(1)})$ (p_0 是设定的较大的概率值, 一般可取为 0.1), 同时可得 F_1 事件概率的估计值 $\hat{P}(F_1) = \hat{P}_1 = p_0$.

(3) 从落在 $F_{i-1} (i = 2, \cdots, m)$ 域内的 $p_0 M_{i-1}$ 个样本中选取概率密度值最大的点作为重要抽样密度函数 $h_i(\mathbf{x})$ 的抽样中心, 并产生 N_i 个服从密度函数 $h_i(\mathbf{x})$ 的样本, 其中落在失效域 $F_{i-1} (i = 2, \cdots, m)$ 的 M_i 个样本点服从分布 $h_i(\mathbf{x}|F_{i-1})$, 记为 $\{\mathbf{x}_k^{(i)} : k = 1, \cdots, M_i\}$.

(4) 计算 M_i 个条件样本点对应的功能函数响应值 $\{g(\mathbf{x}_k^{(i)}) : k = 1, \cdots, M_i\}$, 并对响应值进行从小

到大排序, 取第 $p_0 M_i$ 个值作为中间事件 $F_i = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) < b_i\}$ 的临界值 $b_i = g(\mathbf{x}_{p_0 M_i}^{(i)})$, 求得条件失效概率 $P(F_i|F_{i-1})$ 的估计值如下

$$\hat{P}(F_i|F_{i-1}) = \hat{P}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] q_X(\mathbf{x}_k^{(i)}|F_{i-1})}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})} \quad (5)$$

且有 $\hat{P}(F_{i-1}) = \prod_{j=1}^{i-1} \hat{P}_j$.

(5) 重复步骤 (3) 和 (4) 过程, 直到满足第 $p_0 M_m$ 个响应值 $g(\mathbf{x}_{p_0 M_m}^{(m)})$ 的值小于 0, 则令 $b_m = 0$, 自动分层结束.

(6) 分层结束后可得到结构的失效概率估计值为

$$\hat{P}_f = \prod_{i=1}^m \hat{P}_i \quad (6)$$

由于在各子空间中采用重要抽样法所获得样本点都是独立同分布的, 所以各条件失效概率的估计值是相互独立的, 由式 (6) 可对失效概率的估计值 \hat{P}_f 进行方差分析, 求得 \hat{P}_f 的方差 $\text{Var}(\hat{P}_f)$ 如下

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{P}_f) &= \\ \text{Var}\left(\prod_{i=1}^m \hat{P}_i\right) &= E\left(\prod_{i=1}^m \hat{P}_i^2\right) - \left[E\left(\prod_{i=1}^m \hat{P}_i\right)\right]^2 = \\ \prod_{i=1}^m E(\hat{P}_i^2) - \prod_{i=1}^m [E(\hat{P}_i)]^2 &= \\ \prod_{i=1}^m [E(\hat{P}_i)^2 + \text{Var}(\hat{P}_i)] - \prod_{i=1}^m [E(\hat{P}_i)]^2 \end{aligned} \quad (7)$$

式中, $E(\cdot)$ 为数学期望数子.

由于每个条件失效概率的估计值均为无偏估计, 则式 (7) 可写为

$$\text{Var}(\hat{P}_f) = \prod_{i=1}^m [E(\hat{P}_i)^2 + \text{Var}(\hat{P}_i)] - \hat{P}_f^2 \quad (8)$$

由于估计值 \hat{P}_1 是用直接 Monte Carlo 法求得的, 故其方差 $\text{Var}(\hat{P}_1)$ 可求得如下

$$\text{Var}(\hat{P}_1) = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_1^2)}{N_1 - 1} = \frac{(p_0 - p_0^2)}{N_1 - 1} \quad (9)$$

由式 (5), 可求得估计值 $\hat{P}_i (i = 2, \dots, m)$ 的方差 $\text{Var}(\hat{P}_i)$ 如下所示

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{P}_i) &= \text{Var}\left(\frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] q_X(\mathbf{x}_k^{(i)}|F_{i-1})}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})}\right) = \\ \frac{1}{N_i - 1} &\left[\frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left(\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] q_X(\mathbf{x}_k^{(i)}|F_{i-1})}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})}\right)^2 - \hat{P}_i^2\right] \end{aligned} \quad (10)$$

将式 (9) 和式 (10) 代入式 (8), 即可得出失效概率估计值 \hat{P}_f 的方差 $\text{Var}(\hat{P}_f)$.

2 基于重要抽样子集模拟的可靠性灵敏度分析

2.1 可靠性灵敏度分析

定义可靠性灵敏度为失效概率对基本随机变量分布参数的偏导数, 基于上述子集模拟重要抽样的可靠性分析方法的基本思想, 可靠性灵敏度可转化成条件失效概率 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 对基本随机变量分布参数的偏导数, 并可利用重要抽样的条件样本点来估计条件失效概率对分布参数的偏导数, 具体推导过程如下.

式 (2) 两边对基本变量的分布参数 θ 求偏导, 可得

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^m \frac{P_f}{P_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \theta} \quad (11)$$

由于 $P_1 = \int \dots \int_{F_1} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, 且 $P_i = \int \dots \int_{F_i} q(\mathbf{x}|F_{i-1}) d\mathbf{x} (i = 2, 3, \dots, m)$, 所以式 (11) 可以写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial \theta} &= \frac{P_f}{P_1} \cdot \int \dots \int_{F_1} \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta} d\mathbf{x} + \\ \sum_{i=2}^m \frac{P_f}{P_i} &\cdot \int \dots \int_{F_i} \frac{\partial q(\mathbf{x}|F_{i-1})}{\partial \theta} d\mathbf{x} = \\ \frac{P_f}{P_1} &\cdot \int \dots \int_{\Omega} \frac{I_{F_1}[\mathbf{x}]}{f_X(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta} \cdot f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\ \sum_{i=2}^m \frac{P_f}{P_i} &\cdot \int \dots \int_{\Omega} \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}]}{h_i(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial q(\mathbf{x}|F_{i-1})}{\partial \theta} \cdot h_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, Ω 表示整个变量空间.

式 (12) 可用数学期望表示为式 (13) 所示的形式

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial \theta} &= \frac{P_f}{P_1} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^m \frac{P_f}{P_i} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \\ \frac{P_f}{P_1} &\cdot E\left[\frac{I_{F_1}[\mathbf{x}]}{f_X(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta}\right] + \\ \sum_{i=2}^m \frac{P_f}{P_i} &\cdot E\left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}]}{h_i(\mathbf{x})} \cdot \frac{\partial q(\mathbf{x}|F_{i-1})}{\partial \theta}\right] \end{aligned} \quad (13)$$

以样本均值来估计数学期望 $E[\cdot]$, 可得式 (13) 中可靠性灵敏度的各分项的估计值 $\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \theta}$ 和 $\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta} (i = 2, \dots, m)$ 如下所示.

$$\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \theta} = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \left[\frac{I_{F_1}[\mathbf{x}_k^{(1)}]}{f_X(\mathbf{x}_k^{(1)})} \cdot \frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(1)})}{\partial \theta} \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta} = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})} \cdot \frac{\partial q(\mathbf{x}_k^{(i)}|F_{i-1})}{\partial \theta} \right] \quad (i = 2, \dots, m) \quad (15)$$

将 $q(\mathbf{x}|F_{i-1}) = I_{F_{i-1}}(\mathbf{x})f_X(\mathbf{x})/P(F_{i-1})$ 代入式 (15) 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta} &= \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\partial \theta} P(F_{i-1}) - \frac{\partial P(F_{i-1})}{\partial \theta} f_X(\mathbf{x}_k^{(i)}) \right) \right] = \\ &= \frac{1}{P(F_{i-1})} \cdot \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left\{ \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})} \cdot \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\partial \theta} - \frac{f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{P(F_{i-1})} \cdot \frac{\partial P(F_{i-1})}{\partial \theta} \right] \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

再将 $P(F_{i-1}) = P(F_{i-1}|F_{i-2}) \cdots P(F_2|F_1)P(F_1) = \prod_{j=1}^{i-1} P_j$ 代入上式有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta} &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1} P_j} \cdot \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left\{ \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})} \cdot \left[\frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\partial \theta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{j=1}^{i-1} \frac{f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{P_j} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial \theta} \right] \right\} \quad (i = 2, \dots, m) \quad (17) \end{aligned}$$

将式 (17) 和式 (14) 代入式 (13), 即可由基于子集模拟和重要抽样的方法估计出可靠性灵敏度, 由于该方法是由样本均值来估计数学期望, 因此还需对估计值进行方差分析, 以掌握估计值的收敛性。

2.2 可靠性灵敏度估计值的方差分析

将灵敏度各分项的估计值及失效概率、条件概率估计值代入式 (11), 可得到可靠性灵敏度的估计值为

$$\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^m \frac{\hat{P}_f}{\hat{P}_i} \cdot \frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta} \quad (18)$$

在可靠性灵敏度分析中近似认为失效概率估计值 \hat{P}_f 和各条件失效概率估计值 $\hat{P}_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 为常数, 则上式可靠性灵敏度估计值的方差可近似推导如下

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta}\right) &= \sum_{i=1}^m \text{Var}\left(\frac{\hat{P}_f}{\hat{P}_i} \cdot \frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[\text{Var}\left(\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\hat{P}_f}{\hat{P}_i}\right)^2 \right] \quad (19) \end{aligned}$$

其中 $\text{Var}(\partial \hat{P}_i / \partial \theta) (i = 1, 2, \dots, m)$ 在实际计算中可用下列公式求解

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \theta}\right) &= \frac{1}{N_1 - 1} \left\{ \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \left[\frac{I_{F_1}[\mathbf{x}_k^{(1)}]}{f_X(\mathbf{x}_k^{(1)})} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(1)})}{\partial \theta} \right]^2 - \left(\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial \theta}\right)^2 \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta}\right) &= \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^{i-1} \hat{P}_j\right)^2 \cdot (N_i - 1)} \left\{ \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{h_i(\mathbf{x}_k^{(i)})} \cdot \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\partial \theta} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\hat{P}_j} \cdot \frac{\partial \hat{P}_j}{\partial \theta} \right) \right]^2 - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial \hat{P}_i}{\partial \theta}\right)^2 \right\} \quad (i = 2, \dots, m) \quad (21) \end{aligned}$$

由于可靠性灵敏度估计值的变异系数 $\text{Cov}(\partial \hat{P}_f / \partial \theta)$ 可以反映估计值的相对分散性, 因此在文章算例中将采用式 (22) 来求解可靠性灵敏度估计值的变异系数。

$$\text{Cov}\left(\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta}\right) = \sqrt{\text{Var}\left(\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta}\right)} / \left| \frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta} \right| \quad (22)$$

3 算例分析

本节采用算例验证所提可靠性灵敏度分析方法的效率和精度, 在算例的可靠性及其灵敏度分析结果对照表中, 基于 Monte Carlo 法模拟的可靠性灵敏度分析方法记为 MC_RS, 并将抽样点数很大时的可靠性及其灵敏度分析结果作为近似精确解, 在失效概率估计值的变异系数相同的情况下, 对可靠性及其灵敏度估计值、估计值的变异系数、抽样点数进行了比较。

算例 1 非线性蠕变疲劳失效模型是在线性损伤积累准则基础上建立的, 总的疲劳蠕变损伤为 $D = D_c + D_f$, 其中 D_c 是蠕变损伤, D_f 是疲劳损伤。考虑 D_c 和 D_f 的相互作用影响时, 极限损伤应是疲劳损伤和蠕变损伤的非线性函数。基于材料的蠕变和疲劳试验数据, 并考虑一级载荷水平, 文献 [12] 采用如下非线性极限状态方程来定义失效与

安全的边界

$$g(N_c, N_f, n_c, n_f, \theta_1, \theta_2) =$$
$$2 - e^{\theta_1 D_c} + \frac{e^{\theta_1} - 2}{e^{-\theta_2} - 1} (e^{-\theta_2 D_c} - 1) - D_f = 0$$

其中 θ_1 和 θ_2 是从试验数据中得到的两个参数. N_c 与 N_f 分别为蠕变和疲劳寿命, n_c 和 n_f 分别为蠕变和疲劳载荷作用的实际周次. $D_c = n_c/N_c$, $D_f = n_f/N_f$. 假定上述极限状态方程中的基本随机变量 N_c, N_f, n_c, n_f 均服从对数正态分布, θ_1 和 θ_2 服从正态分布, 基本随机变量的分布参数见表 1. 可靠性及其灵敏度分析结果列于表 2. 图 2 给出了本文方法和 MC.RS 方法的失效概率估计值随抽样点数增加的关系曲线, 图中的横坐标为对数坐标,

从图中可以看出, 本文方法在样本点数大于 1.0×10^5 时, 失效概率几乎不再随样本点数的增加而波动, 而 Monte Carlo 在样本点数大于 10^7 时, 结果还有微小波动. 失效概率估计值的方差和变异系数分析结果表明, 当失效概率估计值的变异系数为 0.015 左右时, MC.RS 和本文方法的抽样点数分别为 2.5×10^7 和 1.2×10^5 , 此时可靠性灵敏度估计值的计算精度在允许的范围內.

表 1 基本变量的分布参数

Table 1 The distribution parameters of basic variables

Variables	N_c	N_f	n_c	n_f	θ_1	θ_2
Mean	5 490	17 100	549	4 000	0.42	6.0
Cov.	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20

表 2 算例 1 的可靠性及其灵敏度分析结果

Table 2 Reliability and sensitivity results of example 1

	MC.RS				Present method		
	Exact results	Estimation	Cov.	Error/%	Estimation	Cov.	Error/%
$\partial P_f / \partial \mu_{N_c}$	-1.8921×10^{-7}	-1.9080×10^{-7}	0.0249	0.84	-1.8886×10^{-7}	0.0187	0.18
$\partial P_f / \partial \mu_{N_f}$	-1.3748×10^{-7}	-1.4068×10^{-7}	0.0198	2.33	-1.4294×10^{-7}	0.0248	3.97
$\partial P_f / \partial \mu_{n_c}$	1.2235×10^{-6}	1.2781×10^{-6}	0.0243	4.46	1.2234×10^{-6}	0.0025	0.008
$\partial P_f / \partial \mu_{n_f}$	2.5188×10^{-7}	2.5834×10^{-7}	0.0198	2.56	2.5865×10^{-7}	0.0214	2.68
$\partial P_f / \partial \mu_{\theta_1}$	-0.002 215	-0.002 303	0.0226	3.97	-0.002 217	0.0099	0.09
$\partial P_f / \partial \mu_{\theta_2}$	9.5097×10^{-5}	9.6514×10^{-5}	0.0285	1.49	9.3305×10^{-5}	0.0422	1.88
$\partial P_f / \partial \sigma_{N_c}$	1.9972×10^{-7}	1.9787×10^{-7}	0.0254	0.93	1.9641×10^{-7}	0.0268	1.66
$\partial P_f / \partial \sigma_{N_f}$	2.1486×10^{-7}	2.1974×10^{-7}	0.0244	2.27	2.1085×10^{-7}	0.0157	1.86
$\partial P_f / \partial \sigma_{n_c}$	1.3922×10^{-6}	1.4671×10^{-6}	0.0417	5.38	1.4349×10^{-6}	0.0292	3.07
$\partial P_f / \partial \sigma_{n_f}$	7.5584×10^{-7}	7.8068×10^{-7}	0.0241	3.28	7.7632×10^{-7}	0.0232	2.71
$\partial P_f / \partial \sigma_{\theta_1}$	0.002 723	0.002 831	0.0359	3.96	0.002 657	0.0278	2.42
$\partial P_f / \partial \sigma_{\theta_2}$	6.1065×10^{-5}	6.7142×10^{-5}	0.0683	9.95	5.8486×10^{-5}	0.0461	4.22
P_f	1.4345×10^{-4}	1.4715×10^{-4}	0.015	2.58	1.4687×10^{-4}	0.015	2.38

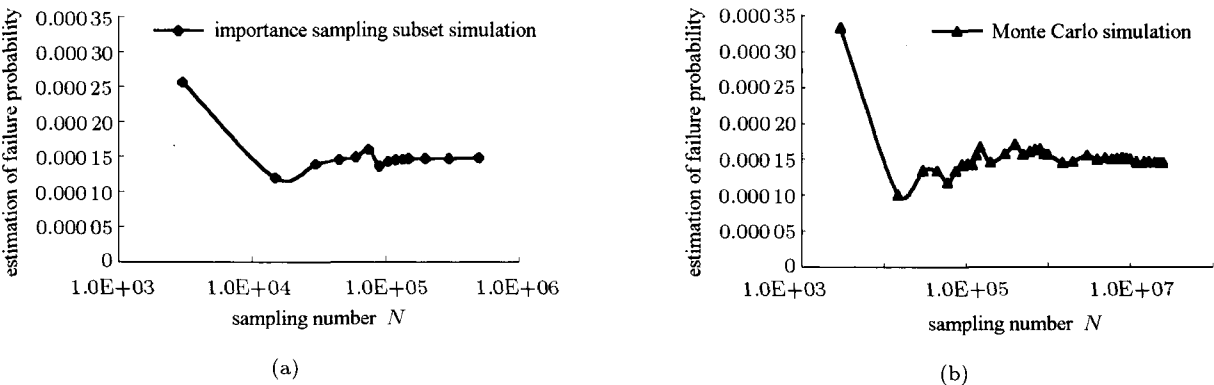


图 2 失效概率估计值随抽样样本点数的变化曲线 ($p_0 = 0.1$)

Fig.2 The curve of failure probability estimation with sampling number increase at $p_0 = 0.1$

算例 2 如图 3 所示的屋架^[13], 屋架的上弦杆和其他压杆采用钢筋混凝土杆, 下弦杆和其它拉杆采用钢杆. 设屋架承受均布载荷 q 作用, 将均

布载荷 q 化成节点载荷后有 $P = ql/4$. 结构力学分析可得 C 点沿垂直地面方向的位移为 $\Delta C = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{3.81}{A_C E_C} + \frac{1.13}{A_S E_S} \right)$, 其中 A_C, E_C, A_S, E_S, l 分别

为混凝土和钢杆的横截面积、弹性模量、长度. 考虑屋架的安全性和适用性, 以屋架顶端 C 点的向下挠度不大于 3 cm 为约束条件. 根据约束条件可给出结构的极限状态函数 $g = 0.03 - \Delta_C$. 假设所有随机变

量均服从独立的正态分布, 它们的分布参数参见表 3. 屋架结构的可靠性及其灵敏度分析结果见表 4, 失效概率估计值的变异系数为 0.01 左右时, MC.RS 和本文方法的抽样点数分别为 10^6 和 8×10^4 .

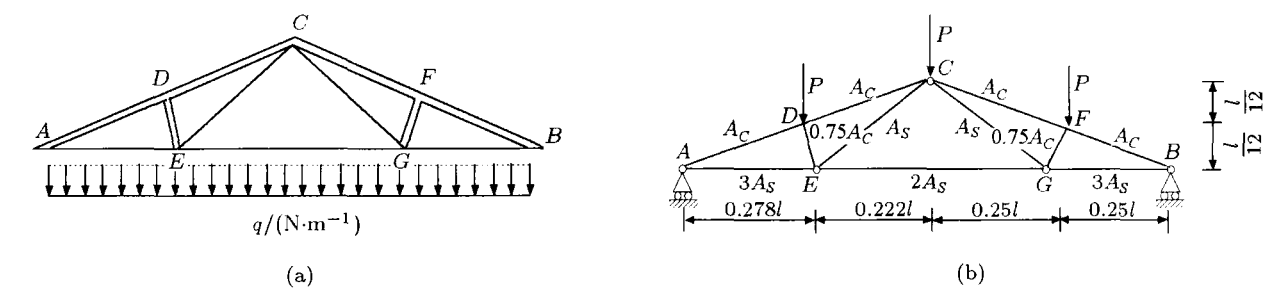


图 3 屋架结构的简单示意图
Fig.3 The schematic diagram of roof truss structure

表 3 基本变量的分布参数

Table 3 The distribution parameters and distribution forms of basic variables

Variables	$q/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	l/m	A_S/m^2	A_C/m^2	$E_S/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	$E_C/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$
Mean	20000	12	9.82×10^{-4}	0.04	1×10^{11}	2×10^{10}
Cov.	0.07	0.01	0.06	0.12	0.06	0.06

表 4 算例 2 的可靠性及其灵敏度分析结果

Table 4 Reliability and sensitivity results of example 2

	MC.RS				Present method		
	Exact results	Estimation	Cov.	Error/%	Estimation	Cov.	Error/%
$\partial P_f / \partial \mu_q$	1.1059×10^{-5}	1.1174×10^{-5}	0.0114	1.04	1.1067×10^{-5}	0.0091	0.072
$\partial P_f / \partial \mu_l$	0.04068	0.04038	0.0222	0.74	0.04196	0.0105	3.15
$\partial P_f / \partial \mu_{A_S}$	-186.262	-190.015	0.0133	2.01	-185.459	0.0087	0.43
$\partial P_f / \partial \mu_{A_C}$	-2.1299	-2.1250	0.0143	0.23	-2.0761	0.0084	2.52
$\partial P_f / \partial \mu_{E_S}$	-1.8265×10^{-6}	-1.8476×10^{-6}	0.0132	1.15	-1.8205×10^{-6}	0.0072	0.33
$\partial P_f / \partial \mu_{E_C}$	-3.7592×10^{-6}	-3.7819×10^{-6}	0.0239	0.604	-3.7558×10^{-6}	0.0154	0.094
$\partial P_f / \partial \sigma_q$	1.5886×10^{-5}	1.6157×10^{-5}	0.0161	1.71	1.5828×10^{-5}	0.0120	0.36
$\partial P_f / \partial \sigma_l$	0.01845	0.01798	0.0782	2.54	0.01759	0.0156	4.66
$\partial P_f / \partial \sigma_{A_S}$	205.932	217.410	0.0427	5.57	202.147	0.0161	1.84
$\partial P_f / \partial \sigma_{A_C}$	2.5381	2.4920	0.0139	1.82	2.4412	0.0227	3.81
$\partial P_f / \partial \sigma_{E_S}$	2.0119×10^{-6}	2.0313×10^{-6}	0.0227	0.96	1.9503×10^{-6}	0.0302	3.06
$\partial P_f / \partial \sigma_{E_C}$	1.9986×10^{-6}	1.9944×10^{-6}	0.0103	0.21	1.9369×10^{-6}	0.0112	3.08
P_f	0.009373	0.009455	0.01	0.875	0.009346	0.01	0.288

算例 3 如图 4 所示单框单层弹塑性框架^[14]具有如下所示的 4 个线性极限状态方程表明了系统的潜在失效模式.

$$g_1 = 2M_1 + 2M_3 - 4.5S$$
$$g_2 = 2M_1 + M_2 + M_3 - 4.5S$$
$$g_3 = M_1 + M_2 + 2M_3 - 4.5S$$
$$g_4 = M_1 + 2M_2 + M_3 - 4.5S$$

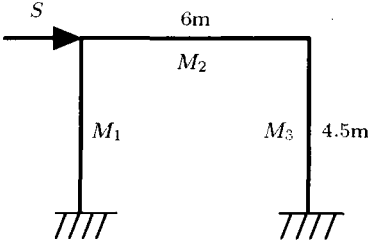


图 4 单框单层框架
Fig.4 One-story one-bay elastoplastic frames

上述 4 个失效模式为串联关系, 且 $M_i (i = 1, 2, 3)$ 是力矩, S 是外载荷. 设 $M_i (i = 1, 2, 3)$ 和 S 相互独立并且均服从正态分布, 它们的均值 μ_{M_i} , μ_S 和标准差 σ_{M_i} , σ_S 分别为 $\mu_{M_i} = 5.2872$, $\sigma_{M_i} = 0.1492$

($i = 1, 2, 3$), $\mu_S = 3.8378$, $\sigma_S = 0.3853$. 框架的可靠性及其灵敏度分析结果参见表 5, 失效概率估计值的变异系数为 0.011 左右时, MC_RS 和本文方法的抽样点数分别为 4×10^5 和 4×10^4 .

表 5 算例 3 的可靠性及其灵敏度分析结果

Table 5 Reliability and sensitivity results of example 3

	MC_RS				Present method		
	Exact results	Estimation	Cov.	Error/%	Estimation	Cov.	Error/%
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{M_1}$	-0.03834	-0.03777	0.0409	1.48	-0.03743	0.0415	2.37
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{M_2}$	-0.02394	-0.02088	0.0734	12.8	-0.02467	0.0164	3.05
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{M_3}$	-0.03823	-0.03756	0.0403	1.75	-0.03732	0.0426	2.38
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_S$	0.1131	0.1127	0.0118	0.35	0.1147	0.0106	1.41
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{M_1}$	0.01746	0.02203	0.1069	26.2	0.01684	0.0141	3.55
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{M_2}$	0.01971	0.01892	0.1222	4.01	0.02059	0.0423	4.46
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{M_3}$	0.01816	0.01582	0.1416	12.9	0.01826	0.0135	0.55
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_S$	0.2318	0.2309	0.0126	0.39	0.2350	0.0137	1.38
$P_f^{(s)}$	0.01813	0.01808	0.011	0.276	0.01839	0.011	1.71

算例 4 如图 5 所示为一刚架结构^[10], 文献[10]根据虚功原理, 定义了 3 个失效模式, 对应的极限状态函数 g_1, g_2 和 g_3 如下

$$g_1 = X_2 + 2X_3 + X_4 - Gb$$

$$g_2 = X_1 + X_2 + X_4 + X_5 - Fa$$

$$g_3 = X_1 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 - Fa - Gb$$

三模式之间为串联关系, 铰接点的屈服力矩 $X_j (j = 1, 2, \dots, 5)$ 服从独立同分布的对数正态分布, 其均值 $\mu_{X_j} = 1 (j = 1, 2, \dots, 5)$, 变异系数为 $\text{Cov}(X_j) = 0.25$, 侧向力 F , 垂直力 G , 距离 a 和 b 看作是常数, 且有 $Gb = 1.15$, $Fa = 2.40$ ^[10]. 刚架结构的可靠性及其灵敏度分析结果参见表 6, 失效概率估计值的变

异系数为 0.019 左右时, MC_RS 和本文方法的抽样点数分别为 10^8 和 6×10^5 .

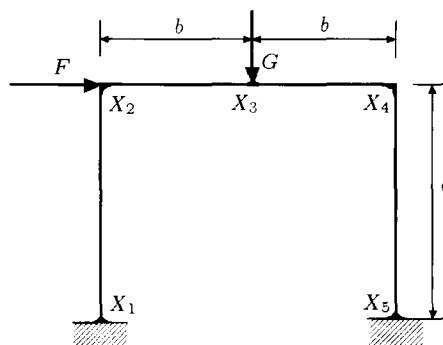


图 5 单跨刚架结构

Fig.5 Portal frame modeled as rigid-plastic system

表 6 算例 4 的可靠性及其灵敏度分析结果

Table 6 Reliability and sensitivity results of example 4

	MC_RS				Present method		
	Exact results	Estimation	Cov.	Error/%	Estimation	Cov.	Error/%
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{X_1}$	1.1059×10^{-5}	1.1174×10^{-5}	0.0114	1.04	1.1067×10^{-5}	0.0091	0.072
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{X_2}$	0.04068	0.04038	0.0222	0.74	0.04196	0.0105	3.15
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{X_3}$	-186.262	-190.015	0.0133	2.01	-185.459	0.0087	0.43
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{X_4}$	-2.1299	-2.1250	0.0143	0.23	-2.0761	0.0084	2.52
$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{X_5}$	-1.8265×10^{-6}	-1.8476×10^{-6}	0.0132	1.15	-1.8205×10^{-6}	0.0072	0.33
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{X_1}$	0.01845	0.01798	0.0782	2.54	0.01759	0.0156	4.66
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{X_2}$	205.932	217.410	0.0427	5.57	202.147	0.0161	1.84
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{X_3}$	2.5381	2.4920	0.0139	1.82	2.4412	0.0227	3.81
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{X_4}$	2.0119×10^{-6}	2.0313×10^{-6}	0.0227	0.96	1.9503×10^{-6}	0.0302	3.06
$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{X_5}$	1.9986×10^{-6}	1.9944×10^{-6}	0.0103	0.21	1.9369×10^{-6}	0.0112	3.08
$P_f^{(s)}$	0.009373	0.009455	0.01	0.875	0.009346	0.01	0.288

从上述算例的可靠性及其灵敏度分析结果列表以及失效概率估计值随抽样样本点数的变化曲线可以看出, 与 Monte Carlo 可靠性灵敏度分析方法相比, 本文所提的基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度计算方法有较高的计算效率和精度. 在失效概率的变异系数相同的情况下, 本文方法比 Monte Carlo 可靠性灵敏度分析方法的抽样点数有约 1 到 2 个量级的减少, 尤其对小失效概率问题, 计算量的下降更为明显. 此外, 所提方法也适用于非正态变量和多模式结构系统的可靠性及其灵敏度问题的求解.

4 结 论

本文提出了一种适用于小失效概率问题的基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析方法, 给出了其实现的原理与步骤, 并通过算例验证了其精度与效率. 子集模拟重要抽样法通过引入合理的中间失效事件将失效概率表达为一系列较大的条件失效概率的乘积, 并利用重要抽样法来高效地估计条件失效概率. 论文在子集模拟重要抽样法可靠性分析的基础上, 通过推导条件失效概率对基本随机变量分布参数的偏导数, 给出了基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析方法. 对于采用子集模拟和重要抽样组合方法来估计失效概率的问题, 只需要增加很少的计算工作量即可相应求出可靠性灵敏度. 此外, 基于子集模拟和重要抽样的可靠性灵敏度分析对极限状态方程的表达形式完全没有要求, 且适用于非正态变量和多模式结构系统的可靠性及其灵敏度问题的求解.

参 考 文 献

- 1 Melchers RE, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability. *Computers and Structures*, 2004, 82: 55~61
- 2 Ahammed M, Melchers RE. Gradient and parameter sensitivity estimation for systems evaluated using Monte Carlo analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91: 594~601
- 3 Wu YT. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis. *AIAA Journal*, 1994, 32(8): 1717~1723
- 4 Wu YT, Sitakanta M. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91: 634~647
- 5 Au SK, Beck JL. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, 16: 263~277
- 6 Koutsourelakis PS, Pradlwarter HJ, Schueller GI. Reliability of structures in high dimensions. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19: 409~423
- 7 Ching J, Beck JL, Au SK. Hybrid subset simulation method for reliability estimation of dynamical systems subject to stochastic excitation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20: 199~214
- 8 Au SK. Reliability-based design sensitivity by efficient simulation. *Computers and Structures*, 2005, 83: 1048~1061
- 9 宋述芳, 吕震宙. 高维小失效概率可靠性分析的序列重要抽样法. 西北工业大学学报, 2006, 24(6): 782~786 (Song Sufang, Lu Zhenzhou. A high-precision and effective sequential importance sampling method for reliability analysis of small failure probability in high dimensions. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2006, 24(6): 782~786 (in Chinese))
- 10 Jinsuo N, Ellingwood BR. Directional methods for structural reliability analysis. *Structural Safety*, 2000, 22: 233~249
- 11 Schuller GI, Pradlwarter HJ, Koutsourelakis PS. A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimension. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19: 463~474
- 12 Hongyin M, Sankaran M. Reliability analysis of creep-fatigue failure. *International Journal of Fatigue*, 2000, 22: 789~797
- 13 史志华, 胡德忻, 陈基发等. 钢筋混凝土结构构件正常使用极限状态可靠性的研究. 建筑科学研究报告, 1999. 10 (Shi Zhihua, Hu Dexin, Chen Jifa, et al. Reliability analysis of reinforced concrete component based on serviceability limit states. *Building Research Report*, 1999.10 (in Chinese))
- 14 Zhao YG, Alfredo HS. System reliability assessment by method of moments. *Structure Engineering*, 2003, 129(10): 1341~1349

RELIABILITY SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON SUBSET SIMULATION AND IMPORTANCE SAMPLING¹⁾

Song Shufang²⁾ Lu Zhenzhou³⁾

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract Reliability sensitivity algorithm is presented on the basis of subset simulation and importance sampling due to the small failure probability highly experienced in engineering. Firstly, a small failure probability is expressed as a product of larger conditional failure probabilities of some intermediate failure events. Secondly, the larger conditional failure probabilities can be estimated efficiently by constructing the importance sampling density functions of the intermediate failure events. Thirdly, the reliability sensitivity is transformed into the partial derivatives of conditional failure probabilities with respect to the distribution parameters of the basic variables in the paper. The estimation of the reliability sensitivity and its variance are then derived for the presented algorithm. The results from several cases show that the present method is efficient, precise and applicable to the structural system with single and multiple failure modes.

Key words reliability sensitivity, subset simulation, importance sampling, conditional failure probability, variance analysis

Received 6 June 2007, revised 3 April 2008.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572117), New Century Excellent Talents in University (NCET-05-0868), Aviation Science Foundation (2007ZA53012), National High Technology Research and Development Program of China (863 project (2007AA04Z401) and the Doctorate Foundation of Northwestern Polytechnical University.

2) E-mail: songshufangssf@mail.nwpu.edu.cn

3) E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn