

DOI: 10.3901/JME.2009.04.033

基于马尔可夫蒙特卡罗子集模拟的可靠性 灵敏度分析方法*

宋述芳 吕震宙

(西北工业大学航空学院 西安 710072)

摘要: 在小失效概率可靠性分析子集模拟法的基础上, 提出基于马尔可夫蒙特卡罗(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)子集模拟的可靠性灵敏度分析方法。在子集模拟的可靠性分析中, 通过引入合理的中间失效事件将概率空间划分为一系列的子集, 从而将小的失效概率表达为一系列易于模拟求解的较大条件失效概率乘积的形式, 然后利用 MCMC 抽取条件样本点来估计条件失效概率。基于 MCMC 子集模拟的可靠性灵敏度分析, 是将失效概率对基本变量分布参数的偏导数转化成条件失效概率对基本随机变量分布参数的偏导数。给出了偏导数通过 MCMC 模拟的条件样本点进行估计的原理和步骤, 推导出可靠性灵敏度分析的计算公式。利用简单数值算例和工程算例验证所提方法, 算例结果表明: 基于 MCMC 子集模拟的可靠性灵敏度分析方法有较高的计算效率和精度, 对于高度非线性极限状态方程问题亦有很强的适应性。

关键词: 子集模拟 可靠性灵敏度 条件概率 分布参数 马尔可夫蒙特卡罗模拟

中图分类号: TB114.3

Structural Reliability Sensitivity Analysis Method Based on Markov Chain Monte Carlo Subset Simulation

SONG Shufang LV Zhenzhou

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: Based on subset simulation for reliability analysis with small failure probability, a novel reliability sensitivity (RS) algorithm, Markov Chain Monte Carlo (MCMC) based subset simulation, is presented. By introducing a set of intermediate failure events in the subset simulation method, the original variable space is separated into a sequence of subsets. And then the small failure probability can be expressed as a product of larger conditional failure probabilities, which indicates the possibility of turning a rare failure event simulation problem into several more frequent event conditional simulation problems. MCMC simulation is implemented to efficiently generate conditional samples for estimating the conditional failure probabilities. Using the failure probability formula of the subset simulation, the RS of the failure probability with respect to the distribution parameter of the basic variable is transformed as that of a set of conditional failure probabilities with respect to the distribution parameter of the basic variable. By use of the conditional samples, a procedure is established to estimate the RS of the conditional failure probabilities, and estimate the RS of the failure probability finally. The results of the illustrations show that the presented RS algorithm is efficient and precise, and the presented algorithm is suitable for highly nonlinear limit state equation.

Key words: Subset simulation Reliability sensitivity Conditional probability Distribution parameter
Markov Chain Monte Carlo(MCMC) simulation

0 前言

可靠性灵敏度分析可以提供基本变量分布参

数的变化引起失效概率变化率的信息, 有助于认识哪些随机变量对结构可靠性的敏感性较大, 修改哪些随机变量的参数对可靠性最为有效, 从而可以有效指导可靠性设计工作。常用的可靠性灵敏度分析方法或适用范围有限, 如基于一次二阶矩(FOSM)的灵敏度分析方法^[1-2], 或计算量难以被接受, 如基于有限差分法和基于蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟的可

* 国家自然科学基金(10572117, 50875213)、西北工业大学博士论文创新基金(CX200801)、新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0868)、航空基础基金(2007ZA53012)和国家高技术研究发展计划(863 计划, 2007AA04Z401)资助项目。20080518 收到初稿, 20081118 收到修改稿

靠性灵敏度分析方法等^[3-4]。

子集模拟^[5-9]是一种针对小失效概率问题的高效可靠性分析方法,它通过引入合理的中间失效事件,将概率空间划分为一系列具有序列包含关系的子集,从而将小失效概率表达为一系列较大的条件失效概率乘积的形式,然后利用 MCMC 抽取条件样本点来估计大的条件失效概率,提高了失效概率估计的抽样效率。与适用于非线性隐式极限状态方程的直接 Monte Carlo 法相比,子集模拟可靠性分析方法的显著优点是适用于小概率问题,与方向抽样、线抽样等适用于小概率的方法相比,子集模拟则十分适用于隐式的非线性极限状态方程。本文将利用子集模拟可靠性分析方法的优点,提出了一种 MCMC 子集模拟基础上的可靠性灵敏度分析方法,所提出的方法通过 MCMC 产生的条件样本点来估计条件失效概率对基本随机变量分布参数的偏导数,得出可靠性灵敏度分析的计算公式。文中利用简单数值算例和工程算例进行验证,算例结果表明所提出的方法有较高的计算效率和精度,且本文方法适用于高度非线性极限状态方程问题。

1 基于 MCMC 子集模拟的可靠性分析

1.1 子集模拟的基本原理

由于大部分工程可靠性分析问题的失效概率很小,直接模拟小失效概率问题的计算工作量难以接受。为此, AU 等^[5]发展了子集模拟方法,其基本思路是通过引入合理的中间失效事件,将小概率问题转化为一系列较大的条件概率的乘积(图1)。由功能函数 $g(\mathbf{x})$ 定义的失效域为 $F = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) \leq 0\}$, 通过引入门槛值 $b_1 > b_2 > \dots > b_m = 0$ 而构成的失效事件 $F_k = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) \leq b_k\}$ ($k=1, 2, \dots, m$) 之间存在有关系 $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F$, 并且有 $F_k = \bigcap_{i=1}^k F_i$ ($i=1, 2, \dots, m$), 依据概率论中乘法定理及事件的关系,失效概率可表达为下式

$$P_f = P(F) = P(F_1) \cdot \prod_{i=2}^m P(F_i | F_{i-1}) \quad (1)$$

记 $P_1 = P(F_1)$, $P_i = P(F_i | F_{i-1})$ ($i=2, 3, \dots, m$), 则式(1)可改写成

$$P_f = \prod_{i=1}^m P_i \quad (2)$$

由式(2)显然可知,当取 $m=4$, 且 P_i 为 0.1 量级时, P_f 可以达到 10^{-4} 量级,采用数字模拟法直接来求 10^{-4} 量级的小概率的计算工作量是很大的,而计算 0.1 量级的概率效率则非常高。从上述变换的过程可

知,通过子集模拟,可以将小概率转化为较大的条件概率的乘积,从而可以采用数字模拟方法来提高小失效概率估算的效率。

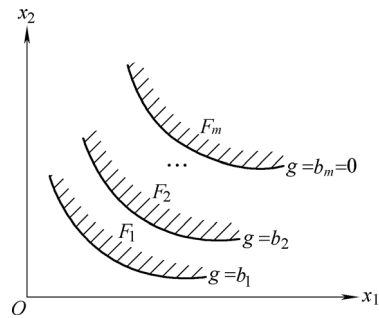


图1 子集模拟示意图

1.2 子集模拟过程

P_1 的估计值 \hat{P}_1 可以通过直接 Monte-Carlo 方法,而 P_i ($i=2, 3, \dots, m$) 的估计值 \hat{P}_i 则可以通过抽取条件样本点来进行计算^[5]。

$$\hat{P}_1 = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} I_{F_1}[\mathbf{x}_k^{(1)}] \quad (3)$$

$$\hat{P}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{k=1}^{N_i} I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] \quad i=2, 3, \dots, m \quad (4)$$

式(3)、(4)中 $I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]$ ($i=1, 2, \dots, m$) 是指示函数,当样本点 $\mathbf{x}_k^{(i)} \in F_i$ 时, $I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] = 1$, 否则 $I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] = 0$; $\mathbf{x}_k^{(1)}$ 是从基本随机变量的联合概率密度函数 $f_X(\mathbf{x})$ 中抽取的 N_1 个独立同分布样本中的第 k 个样本; $\mathbf{x}_k^{(i)}$ ($i=2, \dots, m$) 是从基本随机变量的条件概率密度函数 $q(\mathbf{x} | F_{i-1}) = I_{F_{i-1}}[\mathbf{x}] f_X(\mathbf{x}) / P(F_{i-1})$ 中抽取的 N_i 个独立同分布样本中的第 k 个样本,尽管可以直接用 Monte Carlo 法抽取服从分布 $q(\mathbf{x} | F_{i-1})$ 的条件样本点,但是这种抽样方法的效率很低,需要 $1/\prod_{j=1}^{i-1} P_j$ 次抽样才能得到符合要求的样本点,而采用马尔可夫链模拟则可以高效地抽取条件样本点^[5,8]。

1.3 中间失效事件的选择

中间失效事件 $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$ 的选择在子集模拟过程中起着重要作用。如果引入的中间失效事件很多(m 值很大),即 b_i ($i=1, 2, \dots, m$) 下降缓慢,则对应的条件失效概率比较大,可以用较少的条件样本点进行模拟,但总的抽样点数 $N = \sum_{i=1}^m N_i$ 将会增加;反之,若引入的中间事件很少,则模拟每个较小的条件失效概率需要较多的条件样本点,也会增加总的抽样点数。对于中间失效事件的选择,需要在模拟条件失效概率的抽样点数 N_i 和中间失效事件的个数 m 上采取折衷的方法^[5]。可以通过自动分层的

方法实现子集模拟, 具体过程如下所述^[8]。

(1) 用直接 Monte Carlo 模拟法产生 N 个服从联合概率密度函数为 $f_X(\mathbf{x})$ 的相互独立的样本 $\{\mathbf{x}_k^{(1)}: k=1, 2, \dots, N\}$ 。

(2) 通过功能函数 $g(\mathbf{x})$ 得到这 N 个样本对应的响应值 $\{g(\mathbf{x}_k^{(1)}): k=1, 2, \dots, N\}$, 把这 N 个响应值从大到小排序, 取第 $[(1-p_0)N]$ 个响应值作为中间事件 $F_1 = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < b_1\}$ 的临界值, 同时可知 $P(F_1) = p_0$ 。

(3) 从落在 $F_{i-1} (i=2, 3, \dots, m)$ 域内的 $p_0 N$ 个样本出发, 用马尔可夫链产生 $(1-p_0)N$ 个服从密度函数 $q(\mathbf{x} | F_{i-1})$ 的条件样本点, 构成总共 N 个条件样本 $\{\mathbf{x}_k^{(i)}: k=1, 2, \dots, N\}$ 。

(4) 通过功能函数 $g(\mathbf{x})$ 得到这 N 个条件样本对应的响应值 $\{g(\mathbf{x}_k^{(i)}): k=1, 2, \dots, N; i=2, 3, \dots, m\}$, 并对响应值进行从大到小排序, 取第 $[(1-p_0)N]$ 个值作为中间事件 $F_i = \{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) < b_i\}$ 的临界值, 同时得到 $P(F_i | F_{i-1}) = p_0$, $P(F_i) = p_0^i$ 。

(5) 重复步骤(3)和(4), 直到满足第 $[(1-p_0)N]$ 个响应值 $g(\mathbf{x}_{(1-p_0)N}^{(m)})$ 的值小于 0, 则令 $b_m = 0$, 自动分层结束。统计服从密度函数 $q(\mathbf{x} | F_{m-1})$ 的条件样本点中落入失效域 F 中的样本个数 N_f , 则 $P(F_m | F_{m-1}) = N_f / N$ 。

(6) 分层结束后可得到结构的失效概率估计值为 $P_f = p_0^{(m-1)} \times N_f / N$ 。

2 基于 MCMC 子集模拟的可靠性灵敏度分析

可靠性灵敏度为失效概率对基本随机变量分布参数的偏导数。基于 MCMC 子集模拟的可靠性灵敏度分析方法是利用子集模拟可靠性分析方法中失效概率 P_f 被表达成一系列条件失效概率乘积的形式, 将 P_f 灵敏度转化成一列条件失效概率灵敏度的乘积, 然后推导利用条件样本点对条件失效概率灵敏度进行估计的计算公式。

由式(2)确定的失效概率 P_f 对基本随机变量 x_i 的分布参数 θ (对于正态变量包括均值 μ_{x_i} 和标准差 σ_{x_i}) 的偏导数, 可以求得如下式

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^m \frac{P_i}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} \quad (5)$$

由于 $P_1 = \int \dots \int_{F_1} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, 且 $P_i = \int \dots \int_{F_i} q(\mathbf{x} | F_{i-1}) d\mathbf{x}$, ($i=2, 3, \dots, m$), 所以式(5)可以写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial \theta} &= \frac{P_f}{P_1} \int \dots \int_{F_1} \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta} d\mathbf{x} + \sum_{i=2}^m \frac{P_i}{P_i} \int \dots \int_{F_i} \frac{\partial q(\mathbf{x} | F_{i-1})}{\partial \theta} d\mathbf{x} = \\ &= \frac{P_f}{P_1} \int \dots \int_{\Omega} \frac{I_{F_1}[\mathbf{x}]}{f_X(\mathbf{x})} \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta} f_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{i=2}^m \frac{P_i}{P_i} \int \dots \int_{\Omega} \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}]}{q(\mathbf{x} | F_{i-1})} \frac{\partial q(\mathbf{x} | F_{i-1})}{\partial \theta} q(\mathbf{x} | F_{i-1}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, Ω 表示整个变量空间。

式(6)可用数学期望 $E[\cdot]$ 表示为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial \theta} &= \frac{P_f}{P_1} \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + \sum_{i=2}^m \frac{P_i}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \frac{P_f}{P_1} E \left[\frac{I_{F_1}[\mathbf{x}]}{f_X(\mathbf{x})} \frac{\partial f_X(\mathbf{x})}{\partial \theta} \right] + \\ &+ \sum_{i=2}^m \frac{P_i}{P_i} E \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}]}{q(\mathbf{x} | F_{i-1})} \frac{\partial q(\mathbf{x} | F_{i-1})}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

以样本均值来估计数学期望 $E[\cdot]$, 可得式(7)可靠性灵敏度各分项的估计值如下

$$\frac{\partial P_1}{\partial \theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\frac{I_{F_1}[\mathbf{x}_k^{(1)}]}{f_X(\mathbf{x}_k^{(1)})} \frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(1)})}{\partial \theta} \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{q(\mathbf{x}_k^{(i)} | F_{i-1})} \frac{\partial q(\mathbf{x}_k^{(i)} | F_{i-1})}{\partial \theta} \right] \quad (9)$$

将 $q(\mathbf{x} | F_{i-1}) = I_{F_{i-1}}(\mathbf{x}) f_X(\mathbf{x}) / P(F_{i-1})$ ($i=2, \dots, m$) 代入式(9)有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_i}{\partial \theta} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \times \\ &\times \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}] \left(P(F_{i-1}) \frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\partial \theta} - f_X(\mathbf{x}_k^{(i)}) \frac{\partial P(F_{i-1})}{\partial \theta} \right)}{P(F_{i-1}) f_X(\mathbf{x}_k^{(i)}) I_{F_{i-1}}[\mathbf{x}_k^{(i)}]} \right] = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})} \frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\partial \theta} - \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{P(F_{i-1})} \frac{\partial P(F_{i-1})}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

将 $P(F_{i-1}) = P(F_{i-1} | F_{i-2}) \dots P(F_2 | F_1) P(F_1)$ ($i=2, \dots, m$)

代入式(10)有

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[\frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})} \frac{\partial f_X(\mathbf{x}_k^{(i)})}{\partial \theta} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{I_{F_i}[\mathbf{x}_k^{(i)}]}{P_j} \frac{\partial P_j}{\partial \theta} \right] \quad (11)$$

将式(8)、(11)代入式(7), 最终可得到失效概率 P_f 对随机变量分布参数 θ 的偏导数。

3 算例分析

本节采用算例来验证所提出的可靠性灵敏度分析方法的效率和精度, 在算例的可靠性及灵敏度分析结果对照表中, 基于 Monte Carlo 大样本模拟的可靠性灵敏度分析结果可看作精确解, 记为

MC_RS。由于基于MCMC子集模拟可靠性灵敏度估计值的精确方差分析非常复杂,本文在算例1中比较了基于Monte Carlo模拟和基于MCMC子集模拟两种方法的估计值随抽样点数的变化曲线,以表征本文方法的效率。

算例1: 功能函数 $g(\mathbf{x}) = 4 - x_1 - 0.1 \times (x_2 + \alpha \sin \pi x_2)^2 - 0.1 \times (x_3 + \alpha \sin \pi x_3)^2$, 其中基本随机变量 x_1 、 x_2 和 x_3 均服从独立的标准正态分布, 分别对 $\alpha = 0$ 、 $\alpha = 0.5$ 和 $\alpha = 1.0$ 三种情况的功能函数进行了可靠性灵敏度分析。当 $\alpha = 0$ 时, 极限状态面为抛物面, 但随着 α 取值的增大, 极限状态面发生波浪式弯曲, 与抛物面的区别越来越大, 非线性程度渐强, 如图2所示。三种情况下的可靠性及灵敏度分

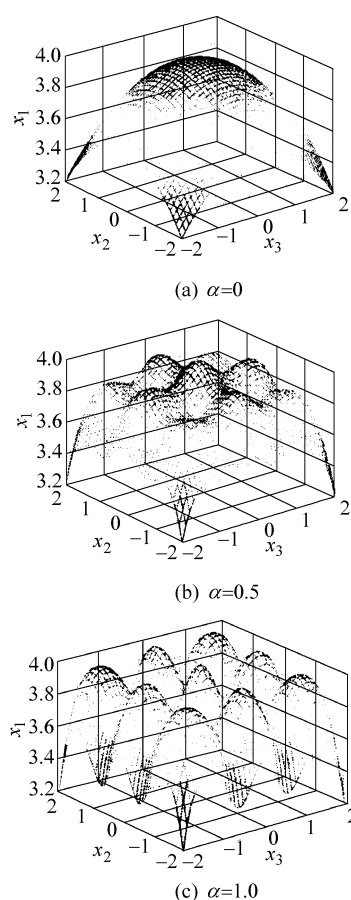
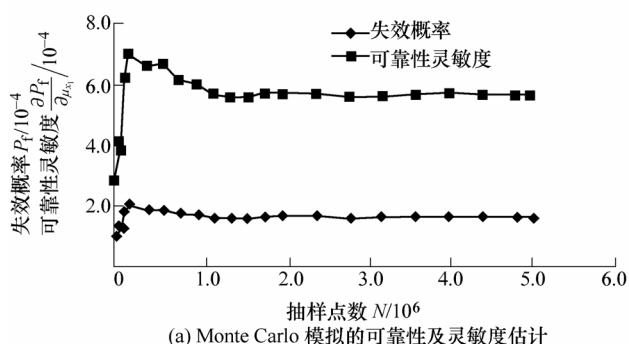


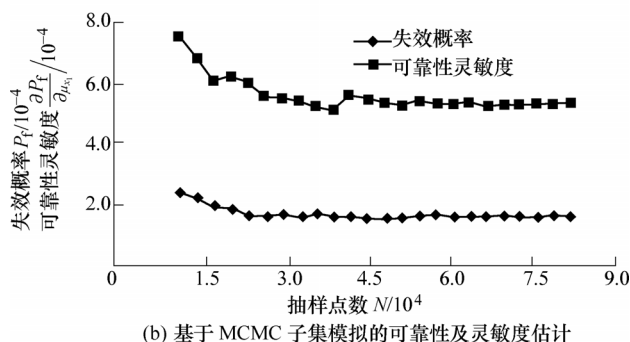
图2 极限状态面

析结果参见表1。表1中 μ_{x_i} 和 σ_{x_i} ($i=1,2,3$) 分别表示下标 x_i 的均值参数和标准差参数, 以下表示方法相同。取 $\alpha = 0.5$ 时, 两种方法的可靠性及灵敏度收敛性比较见图3所示。

结构可靠性灵敏度分析结果反映了随机变量 x_i 的均值和标准差对失效概率的影响程度, 从 $\partial P_f / \partial \mu_{x_i}$ 和 $\partial P_f / \partial \sigma_{x_i}$ 的正负号还可以判断随机变量 x_i 的均值和标准差对失效概率的影响趋势。 $\partial P_f / \partial \mu_{x_i}$ 为负表示随机变量 x_i 均值的增加能提高结构可靠度; $\partial P_f / \partial \sigma_{x_i}$ 为正表示随机变量 x_i 变异性增大使结构可靠度降低。通过引入量纲一的可靠性灵敏度因子 $S_{\mu_i} = (\partial P_f / \partial \mu_{x_i}) \times (\sigma_{x_i} / P_f)$ 和 $S_{\sigma_i} = (\partial P_f / \partial \sigma_{x_i}) \times (\sigma_{x_i} / P_f)$, 就可以定量地比较不同量纲随机变量的分布参数对失效概率影响程度的大小。



(a) Monte Carlo 模拟的可靠性及灵敏度估计



(b) 基于MCMC子集模拟的可靠性及灵敏度估计

图3 取 $\alpha = 0.5$ 时, 两种方法的可靠性及灵敏度收敛性比较

表1 算例1的可靠性及灵敏度分析结果

	方法	$\partial P_f / \partial \mu_{x_1}$	$\partial P_f / \partial \mu_{x_2}$	$\partial P_f / \partial \mu_{x_3}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{x_1}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{x_2}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{x_3}$	P_f	抽样 点数
$\alpha = 0$	MC_RS	0.000 441 8	-2.863×10^{-6}	1.704×10^{-6}	0.001 531	0.000 238 8	0.000 241 4	1.206×10^{-4}	10^7
	本文方法	0.000 454 3	-2.929×10^{-6}	1.746×10^{-6}	0.001 493	0.000 225 4	0.000 236 2	1.915×10^{-4}	6×10^4
$\alpha = 0.5$	MC_RS	0.000 550 1	-8.174×10^{-6}	2.421×10^{-5}	0.001 829	0.000 331 9	0.000 348 0	1.569×10^{-4}	10^7
	本文方法	0.000 528 0	-8.407×10^{-6}	2.198×10^{-5}	0.001 725	0.000 325 8	0.000 353 2	1.528×10^{-4}	6×10^4
$\alpha = 1.0$	MC_RS	0.000 962 6	-1.779×10^{-6}	2.578×10^{-5}	0.002 908	0.000 667 6	0.000 694 2	3.003×10^{-4}	10^7
	本文方法	0.000 973 5	-1.729×10^{-6}	2.633×10^{-5}	0.002 842	0.000 660 9	0.000 685 8	3.036×10^{-4}	6×10^4

算例 2: 如图 4 所示的九盒段结构, 由 64 个杆元, 42 个板元构成, 材料为铝合金, 原始数据取自文献[10], 已知外载荷与各个单元的强度均为随机变量, 且外载荷的均值与变异系数分别为 $\mu_p = 150 \text{ kg}$ 和 $\text{Cov}(p) = 0.25$, 单元强度 R_i 的均值为 $\mu_{R_i} = 83.5 \text{ kg}$, 变异系数为 $\text{Cov}(R_i) = 0.12$, 结构的功能函数为 $g = 4.0R_{78} + 4.0R_{68} - 3.9998R_{77} - p$, 其可靠性及灵敏度分析结果见表 2。

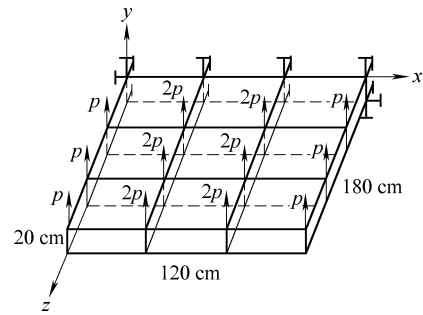


图 4 九盒段结构示意图

表 2 算例 2 的可靠性及灵敏度分析结果

方法	$\partial P_f / \partial \mu_{R_{68}}$	$\partial P_f / \partial \mu_{R_{77}}$	$\partial P_f / \partial \mu_{R_{78}}$	$\partial P_f / \partial \mu_p$	P_f	抽样点数
MC_RS	-0.001 335	0.001 331	-0.001 336	0.000 333	0.009 849	10^7
本文方法	-0.001 442	0.001 358	-0.001 360	0.000 340	0.010 045	4×10^4
方法	$\partial P_f / \partial \sigma_{R_{68}}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{R_{77}}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{R_{78}}$	$\partial P_f / \partial \sigma_p$		
MC_RS	0.001 582	0.001 576	0.001 587	0.000 370		
本文方法	0.001 530	0.001 538	0.001 614	0.000 384		

算例 3: 如图 5 所示矩形截面悬臂梁受到水平和竖直方向的载荷 X 和 Y 作用, 以其自由端位移不超过 D_0 为约束建立极限状态函数为 $g = D_0 - D(E, X, Y, b, \delta)$, 其中 $D(E, X, Y, b, \delta) = \frac{4L^3}{Eb\delta} \sqrt{\left(\frac{X}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\delta^2}\right)^2}$, 式中 E 、 b 和 δ 分别为弹性模量、梁的宽度和梁的厚度。其中 $D_0 = 2.2 \text{ m}$, $b = 2.448 4 \text{ m}$ 和 $\delta = 3.888 4 \text{ m}$ 为常数, 将 E 、 X 和 Y 看作是服从独立正态分布的随机变量, 其分布参数见表 3, 悬臂梁的可靠性及灵敏度分析结果见表 4。

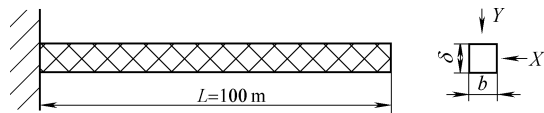


图 5 矩形截面悬臂梁

表 3 悬臂梁随机变量的数字特征

变量 x	分布形式	均值 μ_x	标准差 σ_x
X	正态	500	100
Y	正态	1 000	100
E	正态	2.9×10^7	1.45×10^6

取每层的条件失效概率 $p_0 = 0.1$, MCMC 样本点数为 $N = 10\ 000$, 采用具有对称性的超立方建议分布, 则按照第 2.3 节自适应分层方法将变量空间分为三层具有包含关系的中间失效事件, 即 $m = 3$, 得到各中间失效事件 F_1 、 F_2 、 F_3 的临界值为 $b_1 = 0.366\ 543$, $b_2 = 0.117\ 06$, $b_3 = -0.079\ 693\ 2$, 由于 $b_3 < 0$, 故统计落入失效域的样本点数 $N_f = 2\ 701$, 则依据 $P_f = p_0^{(m-1)} \times N_f / N = 0.002\ 701$ 。对应的条件失效概率 $P(F_1)$ 、 $P(F_2|F_1)$ 、 $P(F_3|F_2)$ 对随机变量分布参数的偏导数列表 5。

表 4 算例 3 的可靠性及灵敏度分析结果对照

方法	$\partial P_f / \partial \mu_X$	$\partial P_f / \partial \mu_Y$	$\partial P_f / \partial \mu_E$	P_f	抽样点数
MC_RS	$7.239\ 4 \times 10^{-5}$	$1.642\ 9 \times 10^{-5}$	$-2.618\ 0 \times 10^{-9}$	0.002 707	10^7
本文方法	$7.252\ 2 \times 10^{-5}$	$1.622\ 2 \times 10^{-5}$	$-2.579\ 5 \times 10^{-9}$	0.002 701	4×10^4
方法	$\partial P_f / \partial \sigma_X$	$\partial P_f / \partial \sigma_Y$	$\partial P_f / \partial \sigma_E$		
MC_RS	$1.750\ 9 \times 10^{-4}$	$1.088\ 3 \times 10^{-5}$	$3.332\ 7 \times 10^{-9}$		
本文方法	$1.798\ 6 \times 10^{-4}$	$1.125\ 6 \times 10^{-5}$	$3.226\ 4 \times 10^{-9}$		

表 5 算例 3 的条件失效概率灵敏度分析结果

$P(\cdot)$	$\partial P / \partial \mu_X$	$\partial P / \partial \mu_Y$	$\partial P / \partial \mu_E$	$\partial P / \partial \sigma_X$	$\partial P / \partial \sigma_Y$	$\partial P / \partial \sigma_E$
$P(F_1)$	0.001 561	0.000 417 3	$-4.815\ 7 \times 10^{-8}$	0.001 826	0.000 130 3	$2.361\ 2 \times 10^{-8}$
$P(F_2 F_1)$	0.000 729	0.000 178 7	$-3.468\ 3 \times 10^{-8}$	0.002 723	0.000 162 0	$6.458\ 3 \times 10^{-8}$
$P(F_3 F_2)$	0.001 067	0.000 012 4	-3.4199×10^{-8}	0.005 699	0.000 336 1	$8.442\ 5 \times 10^{-8}$

从上述算例的可靠性及灵敏度分析结果可以看出,与 Monte Carlo 可靠性灵敏度分析方法相比,本文提出的基于 MCMC 子集模拟的可靠性灵敏度计算方法有较高的计算效率和精度,尤其是针对非线性程度很大的极限状态方程及小失效概率问题。

4 结 论

(1) 在基于 MCMC 子集模拟可靠性分析的基础上,通过推导条件失效概率对基本随机变量分布参数的偏导数,得出基于子集模拟的可靠性灵敏度。

(2) 基于子集模拟的可靠性灵敏度分析对极限状态方程的表达形式完全没有要求,对于高度非线性极限状态方程问题有很强的适应性。对于采用子集模拟方法估计失效概率的问题,只需要增加很少的计算工作量即可求出可靠性灵敏度。

(3) 由于子集模拟中采用 MCMC 产生的条件样本点具有相关性,这一定程度上影响子集模拟的效率,由此引起的可靠性灵敏度的方差分析还有待进一步的研究。

参 考 文 献

- [1] MELCHERS R E, AHAMMED M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability[J]. Computers and Structures, 2004, 82(1): 55-61.
- [2] AHAMMED M, MELCHERS R E. Gradient and parameter sensitivity estimation for systems evaluated using Monte Carlo analysis[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2006, 91(5): 594-601.
- [3] WU Y T. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis[J]. AIAA Journal, 1994, 32(8): 1 717-1 723.
- [4] WU Y T, SITAKANTA M. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2006, 91(6): 634-647.
- [5] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2001, 16(4): 263-277.
- [6] KOUTSOURELAKIS P S, PRADLWARTER H J, SCHUELLER G I. Reliability of structures in high dimensions[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2004, 19(4): 409-423.
- [7] CHING J, BECK J L, AU S K. Hybrid subset simulation method for reliability estimation of dynamical systems subject to stochastic excitation[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(3): 199-214.
- [8] AU S K. Reliability-based design sensitivity by efficient simulation[J]. Computers and Structures, 2005, 83(14): 1 048-1 061.
- [9] 宋述芳,吕震宙. 高维小失效概率可靠性分析的序列重要抽样法[J]. 西北工业大学学报, 2006, 24(6): 782-786.
SONG Shufang, LV Zhenzhou. A high-precision and effective sequential importance sampling method for reliability analysis of small failure probability in high dimensions[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2006, 24(6): 782-786.
- [10] 宋笔锋. 结构体系失效概率计算方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 1994.
SONG Bifeng. A study on method for computing structural system failure probability[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 1994.

作者简介: 宋述芳,女,1982年出生,博士研究生。主要研究方向为飞行器可靠性工程。

E-mail: songshufangssf@mail.nwpu.edu.cn

吕震宙(通信作者),女,1966年出生,教授,博士研究生导师。主要研究方向为飞行器可靠性工程和航空航天安全工程。

E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn