

文章编号: 1000-6893(2008)02-0338-09

模糊随机可靠性灵敏度分析方法

何红妮, 吕震宙

(西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

Sensitivity Analysis for Fuzzy Random Reliability

He Hongni, Lu Zhenzhou

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

摘 要: 依据模糊随机可靠性灵敏度的基本概念, 提出了模糊随机可靠性灵敏度分析的通用数字模拟法, 推导了模糊随机可靠性灵敏度数字模拟解的方差和变异系数的计算公式。当模糊变量的隶属函数为正态型时, 可以将模糊随机可靠性灵敏度转化为随机可靠性灵敏度, 并利用复合函数求导法则求解模糊随机失效概率对正态型隶属函数分布参数的灵敏度。对于工程中常用的对称三角型隶属函数, 提出了两种近似等价正态化变换基础上的模糊随机可靠性灵敏度分析方法, 这两种将对称三角型隶属函数近似等价为正态型的方法分别是“3 规则”法和“最大最小”法。算例结果表明: 由于“最大最小”法比“3 规则”法所得的等价正态隶属函数能在形状上更好地近似对称三角型隶属函数, 因而“最大最小”变换法更适用于对称三角型隶属函数情况下模糊随机可靠性灵敏度的近似计算。

关键词: 模糊性; 随机性; 隶属函数; 灵敏度; 变异系数

中图分类号: O159; V215.7

文献标识码: A

Abstract: Based on the basic definition of fuzzy random reliability sensitivity, the general numerical simulation method is presented for fuzzy random reliability sensitivity estimation. The variance and the variation coefficient are derived for the numerical estimation of the fuzzy random reliability sensitivity. In case that the fuzzy basic variables possess Gaussian membership functions, the fuzzy random reliability sensitivity can be transformed into the random reliability sensitivity, which can be well solved by the available methods. After the fuzzy random reliability sensitivity is transformed into the random one, the chain rule is employed to obtain the sensitivity of the fuzzy random failure probability with respect to the distribution parameters of the Gaussian membership function. For a symmetric triangle membership, a commonly used function in engineering, two fuzzy random reliability sensitivity methods are constructed on the basis of two equivalent transformations from the symmetric triangle membership to the Gaussian one respectively. One of them is named as “3” criterion, the other is named as max.-min. method. Since the shape of the symmetric triangle membership function can be replaced by the max.-min. method more closely than by the “3” criterion, the max.-min. method is more applicable to estimate the fuzzy random reliability sensitivity in case of the symmetric triangle membership, which is demonstrated by the given examples.

Key words: fuzziness; randomness; membership function; sensitivity; variance coefficient

目前, 结构可靠性分析与设计的研究在中国航空工业的发展中发挥着越来越重要的作用。

在工程结构的可靠性分析与设计中, 可靠性灵敏度分析可以得到影响结构可靠性的各基本变量的相对重要程度^[1-2], 从而对结构可靠性分析预测和优化提供指导。目前, 结构变量只具有随机性的可靠性灵敏度分析方法已经发展得比较成熟, 但随着认识的发展, 人们发现在工程问题中存在随机不确定因素的同时, 还有很多模糊不确定因素^[3-7]。

由于模糊因素的多样性、复杂性及模糊不确定性与随机不确定性在数学描述上的区别, 很难应用传统的可靠性灵敏度分析方法对其进行分析, 因此有必要对模糊随机结构的可靠性灵敏度进行分析。

可靠性灵敏度分析方法与可靠性分析方法是密切相关的, 文献[6-7]提出一种基于模糊隶属函数向随机密度函数做等价变换的模糊随机失效概率求解方法, 该方法应用范围广, 可应用到多个模糊变量的情况。本文采用该方法的研究思路, 在可靠性灵敏度的基本概念基础上, 给出了模糊随机可靠性灵敏度分析的通用数字模拟法, 并推导了模糊随机可靠性灵敏度数字模拟解的方差和变异系数的计算公

收稿日期: 2007-04-28; 修订日期: 2007-12-11

基金项目: 国家自然科学基金(10572117); 新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0868); 航空基础基金(2007ZA53012)

通讯作者: 吕震宙 E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

式。由于基于模糊隶属函数向随机密度函数做等价变换的方法很难解决非正态隶属函数情况下的可靠性及其灵敏度分析问题,文中针对常用的对称三角型隶属函数提出了两种等价近似正态化方法,一种是“3 规则”近似等价正态化法,此方法简单易行,但其等价正态隶属函数不是在所有情况下都能很好地替代对称三角型隶属函数,从而使得计算结果产生偏差,甚至得到错误的结果。另一种是“最大最小”法,由于“最大最小”法保证了等价正态隶属函数与对称三角型隶属函数的最大误差达到了最小,因此该方法基础上的模糊随机可靠性灵敏度结果与精确解吻合和较好。文中给出了所提方法的实现原理及步骤,并通过算例对所提方法进行了比较。

1 模糊随机可靠性灵敏度分析的数字模拟法

假设所研究结构中有 $n(n = n_r + n_f)$ 个基本

变量 $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$, 其中:前 n_r 个变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n_r)$ 为服从正态分布且相互独立的基本随机变量,其概率密度函数分别为 $f_i(x_i) (i = 1, 2, \dots, n_r)$, 后 n_f 个变量 $x_j (j = n_r + 1, \dots, n)$ 为相互独立的只具有模糊性的模糊基本变量,其隶属函数分别为 $\mu_j(x_j) (j = n_r + 1, \dots, n)$ 。依据可靠性灵敏度的基本概念^[8-9],由式(1)定义的模糊随机失效概率 P_f 对基本随机变量 $x_k (k = 1, 2, \dots, n_r)$ 的分布参数 f_k (在正态分布中, f_k 包括随机变量 x_k 的均值 μ_{x_k} 和标准差 σ_{x_k}) 的模糊随机可靠性灵敏度 $\partial P_f / \partial f_k$ 可由式(2)给出。

$$P_f = \frac{\int_{F} \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx}{\int_{R^n} \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx} \quad (1)$$

式中: F 为失效域; R^n 为 n 维变量空间。

$$\frac{\partial P_f}{\partial f_k} = \frac{\left[\int_F \frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \right)}{\partial f_k} \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx \right] \cdot \left[\int_{R^n} \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx \right]}{\left[\int_{R^n} \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx \right]^2} - \frac{\left[\int_F \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx \right] \cdot \left[\int_{R^n} \frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \right)}{\partial f_k} \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx \right]}{\left[\int_{R^n} \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) dx \right]^2} \quad (2)$$

为了以数学期望的形式求得式(2)的值,将式(2)进行式(3)所示的变换。

$$\frac{\partial P_f}{\partial f_k} = \frac{\left[\int_F \frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \right) / \partial f_k \cdot \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j)}{\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i)} f_i(x_i) dx \right] \cdot \left[\int_{R^n} \frac{\prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j)}{\prod_{j=n_r+1}^n f_j(x_j)} f_i(x_i) dx \right]}{\left[\int_{R^n} \frac{\prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j)}{\prod_{j=n_r+1}^n f_j(x_j)} f_i(x_i) dx \right]^2} - \frac{\left[\int_F \frac{\prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j)}{\prod_{j=n_r+1}^n f_j(x_j)} f_i(x_i) dx \right] \cdot \left[\int_{R^n} \frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \right) / \partial f_k \cdot \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j)}{\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i)} f_i(x_i) dx \right]}{\left[\int_{R^n} \frac{\prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j)}{\prod_{j=n_r+1}^n f_j(x_j)} f_i(x_i) dx \right]^2} \quad (3)$$

其中引入的函数 $f_i(x_i)$ 是可以任意选取的 n_f 个独立变量的联合概率密度函数, 引入此函数的目的是希望以数学期望的形式来表示式(2)中的 n 重积分。

$$\text{记 } \mu_j(x_j)/f_j(x_j) = H(x),$$

$$\left[\frac{\partial \left(\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \right)}{\partial f_k} \right] \cdot \prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) = L_{f_k}(x), \text{ 则}$$

由数学期望的定义可将式(3)表示为式(4)。

$$\frac{\partial P_f}{\partial f_k} = \frac{E(I_F(x) L_{f_k}(x)) \cdot E(H(x))}{E^2(H(x))} - \frac{E(L_{f_k}(x)) \cdot E(I_F(x) H(x))}{E^2(H(x))} \quad (4)$$

式中: $I_F(x)$ 为失效域内的指示函数,

$$I_F(x) = \begin{cases} 1 & x \in F \\ 0 & x \notin F \end{cases}$$

由此可采用式(5)所示的数字模拟法来计算模糊随机失效概率 P_f 对基本随机变量 $x_k (i=1, 2, \dots, n_r)$ 的分布参数 f_k 灵敏度的估计值 $\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial f_k}$ 。

$$\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial f_k} = \frac{\left(\frac{1}{N_1} \prod_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1}) \right) \cdot \left(\frac{1}{N_2} \prod_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2}) \right)}{\left(\frac{1}{N_5} \prod_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right)^2} - \frac{\left(\frac{1}{N_3} \prod_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3}) \right) \cdot \left(\frac{1}{N_4} \prod_{l_4=1}^{N_4} L_{f_k}(x_{l_4}) \right)}{\left(\frac{1}{N_5} \prod_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right)^2} \quad (5)$$

式中: $N_m (m=1, 2, \dots, 5)$ 为抽样次数; $x_{l_m} (m=1, 2, \dots, 5)$ 为分别从联合概率密度函数 $f_i(x_i)$ 中抽取的第 l_m 个相互独立的样本点。

同理可得模糊随机失效概率 P_f 对只具有模糊性的变量 $x_k (k=n_r+1, \dots, n)$ 的分布参数 μ_k 的可靠性灵敏度估计值 $\partial \hat{P}_f / \partial \mu_k$ 如式(6)所示。

$$\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \mu_k} = \frac{\left(\frac{1}{N_1} \prod_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1}) \right) \cdot \left(\frac{1}{N_2} \prod_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{\mu_k}(x_{l_2}) \right)}{\left(\frac{1}{N_5} \prod_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right)^2} -$$

$$\frac{\left(\frac{1}{N_3} \prod_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3}) \right) \cdot \left(\frac{1}{N_4} \prod_{l_4=1}^{N_4} L_{\mu_k}(x_{l_4}) \right)}{\left(\frac{1}{N_5} \prod_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right)^2} \quad (6)$$

式中:

$$L_{\mu_k}(x_{l_m}) = \frac{\left[\frac{\partial \left(\prod_{j=n_r+1}^n \mu_j(x_j) \right)}{\partial \mu_k} \right] \cdot \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i)}{\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i)} \bigg|_{x=x_{l_m}} \quad (m=2, 4)$$

2 数字模拟法的方差分析

上节所述的模糊随机可靠性灵敏度估计值只是近似的, 它的取值在样本容量很小时有很大的随机性, 但依据大数定理, 式(5)和式(6)的估计值随样本容量的增加逐渐趋于真值。为了更加清楚地了解模糊随机可靠性灵敏度估计值的收敛性和精度, 对式(5)和式(6)式中所列估计值的方差进行分析。

为表述方便, 记式(5)估计值的分子和分母分别为 f_z 和 f_m 。要精确求得式(5)估计值的变异系数涉及商的数学期望和方差的估计, 文献[10]中提出如下处理方法: 在求解两变量 w 与 v 商的数学期望 $E(w/v)$ 和方差 $\text{var}(w/v)$ 时, 首先将此商式在两变量均值点 μ_w 和 μ_v 处泰勒展开并忽略二次以上项, 然后再求数学期望和方差, 所得结果为

$$E(w/v) = \frac{\mu_w}{\mu_v} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_{wv}}{\mu_v^2} - \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\mu_{vv}}{\mu_v^3} \right) \quad (7)$$

$$\text{var}(w/v) = \frac{1}{\mu_v^2} \left(\frac{\mu_{wv}^2}{\mu_v^2} + \frac{\mu_w^2}{\mu_v^2} - 2 \frac{\mu_w}{\mu_v} \frac{\mu_{vv}}{\mu_v^3} \right) \quad (8)$$

式中: ρ 为变量 w 与 v 的相关系数; μ_v 和 μ_w 分别为分母 v 和分子 w 的数学期望; μ_{vv}^2 和 μ_{wv}^2 分别为 v 和 w 的方差。

式(5)所示的估计值中, 由于样本点 $x_{l_i} (i=1, 2, \dots, 5)$ 与 $x_{l_j} (j=1, 2, \dots, 5; j \neq i)$ 相互独立, 则由概率论的基本理论可知: x_{l_i} 的函数也相互独立, 因此式

(5)中出现的和式 $\prod_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})$, $\prod_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})$, $\prod_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3})$, $\prod_{l_4=1}^{N_4} L_{f_k}(x_{l_4})$, $\left(\prod_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right)^2$ 均相互独立, 由此 f_z 与 f_m 相互独立, 即分子与分母的

相关系数为0。利用式(7)~式(8)可得式(5)估计值的数学期望和方差可转化为分子 f_z 和分母 f_m 的数学期望和方差的函数。

由于母体 x 与样本 x_{l_m} ($m = 1, 2, \dots, 5$) 独立同分布,因此对式(5)中的分子求数学期望 $E[\cdot]$ 和方差 $\text{var}[\cdot]$ 可得

$$E(f_z) = E(H(x)) \cdot E(I_F(x) L_{f_k}(x)) - E(I_F(x) H(x)) \cdot E(L_{f_k}(x)) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(f_z) = & \text{var}\left[\left(\frac{1}{N_1} \sum_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})\right) \cdot \left(\frac{1}{N_2} \sum_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})\right)\right] + \\ & \text{var}\left[\left(\frac{1}{N_3} \sum_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3})\right) \cdot \left(\frac{1}{N_4} \sum_{l_4=1}^{N_4} L_{f_k}(x_{l_4})\right)\right] \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)右端的第1项依据变量数字特征的性质可表示为

$$\begin{aligned} \text{var}\left[\left(\frac{1}{N_1} \sum_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})\right) \cdot \left(\frac{1}{N_2} \sum_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})\right)\right] = & \frac{1}{(N_1 N_2)^2} E\left[\left(\sum_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})\right)^2\right] \cdot \\ & E\left[\left(\sum_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})\right)^2\right] - E^2(H(x)) \cdot E^2(I_F(x) L_{f_k}(x)) \end{aligned} \quad (11)$$

在数字模拟过程中,母体的数学期望和方差是用样本的数学期望和样本方差来近似估计的,

因此式(9)和式(11)在数字模拟过程中是采用式(12)和式(13)来估计的。

$$E(f_z) = \left[\frac{1}{N_1} \sum_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})\right] \cdot \left[\frac{1}{N_2} \sum_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})\right] - \left[\frac{1}{N_3} \sum_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3})\right] \cdot \left[\frac{1}{N_4} \sum_{l_4=1}^{N_4} L_{f_k}(x_{l_4})\right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{var}\left[\left(\frac{1}{N_1} \sum_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})\right) \cdot \left(\frac{1}{N_2} \sum_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})\right)\right] = & \frac{1}{N_1^2} \left[\frac{N_1}{N_1 - 1} \sum_{l_1=1}^{N_1} (H(x_{l_1}))^2 + \frac{N_1 - 2}{N_1 - 1} \left(\sum_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})\right)^2 \right] \cdot \\ & \frac{1}{N_2^2} \left[\frac{N_2}{N_2 - 1} \sum_{l_2=1}^{N_2} (I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2}))^2 + \frac{N_2 - 2}{N_2 - 1} \left(\sum_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})\right)^2 \right] - \\ & \left[\left(\frac{1}{N_1} \sum_{l_1=1}^{N_1} H(x_{l_1})\right) \cdot \left(\frac{1}{N_2} \sum_{l_2=1}^{N_2} I_F(x_{l_2}) L_{f_k}(x_{l_2})\right) \right]^2 \end{aligned} \quad (13)$$

式(10)右端的第二项也可用类似的方法由式(14)进行估计。

$$\begin{aligned} \text{var}\left[\left(\frac{1}{N_3} \sum_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3})\right) \cdot \left(\frac{1}{N_4} \sum_{l_4=1}^{N_4} L_{f_k}(x_{l_4})\right)\right] = & \frac{1}{N_3^2} \left[\frac{N_3}{N_3 - 1} \sum_{l_3=1}^{N_3} (I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3}))^2 + \right. \\ & \left. \frac{N_3 - 2}{N_3 - 1} \left(\sum_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3})\right)^2 \right] \cdot \frac{1}{N_4^2} \left[\frac{N_4}{N_4 - 1} \sum_{l_4=1}^{N_4} (L_{f_k}(x_{l_4}))^2 + \frac{N_4 - 2}{N_4 - 1} \left(\sum_{l_4=1}^{N_4} L_{f_k}(x_{l_4})\right)^2 \right] - \\ & \left[\left(\frac{1}{N_3} \sum_{l_3=1}^{N_3} I_F(x_{l_3}) H(x_{l_3})\right) \cdot \left(\frac{1}{N_4} \sum_{l_4=1}^{N_4} L_{f_k}(x_{l_4})\right) \right]^2 \end{aligned} \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入(10)式即可得式(5)分子的方差 $\text{var}(f_z)$ 。对式(5)的分母 f_m 求数学

期望 $E[\cdot]$ 和方差 $\text{var}[\cdot]$ 可得

$$E(f_m) = \frac{1}{N_5} E\left[\left(\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5})\right)^2\right] = \frac{1}{N_5} \text{var}(H(x)) + E^2(H(x)) \quad (15)$$

$$\text{var}(f_m) = \frac{1}{N_5^4} \text{var}\left[\left(\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5})\right)^2\right] = \frac{1}{N_5^4} \left\{ E\left[\left(\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5})\right)^4\right] - E^2\left[\left(\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5})\right)^2\right] \right\} \quad (16)$$

式(15)在数字模拟过程中可采用式(17)近似估计。

$$E(f_m) = \frac{1}{N_5^2} \cdot \frac{N_5}{N_5 - 1} \sum_{l_5=1}^{N_5} (H(x_{l_5}))^2 +$$

$$\frac{1}{N_5^2} \cdot \frac{N_5 - 2}{N_5 - 1} \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^2 \quad (17)$$

式(16)右端的第1项中包含一个和式的四次

$$E \left[\left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^4 \right] = E \left[\left[\sum_{i=1}^{N_5} \sum_{j=1}^{N_5} H(x_i) H(x_j) \right]^2 \right] = N \cdot E[H(x)]^4 +$$

$$N(N-1) \{ (N-2)(N-3) E^4[H(x)] + 3 E^2[H(x)]^2 + 4 E[H(x)] \cdot E[H(x)]^3 \} + 6(N-2) E^2[H(x)] \cdot E[H(x)]^2 \} \quad (18)$$

由此可运用数字模拟法对式(18)进行估计,结果为

$$E \left[\left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^4 \right] = \sum_{l_5=1}^{N_5} (H(x_{l_5}))^4 + \frac{(N_5-1)(N_5-2)(N_5-3)}{N_5^3} \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^4 + \frac{3(N_5-1)}{N_5} \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} (H(x_{l_5}))^2 \right]^2 + \frac{4(N_5-1)}{N_5} \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right] \cdot \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} (H(x_{l_5}))^3 \right] + \frac{6(N_5-1)(N_5-2)}{N_5^2} \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} (H(x_{l_5}))^2 \right] \cdot \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^2 \quad (19)$$

式(16)右端第二项中包含的 $E^2 \left[\left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^2 \right]$ 在

$$E^2 \left[\left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^2 \right] = \left[\frac{N_5}{N_5-1} \sum_{l_5=1}^{N_5} (H(x_{l_5}))^2 + \frac{N_5-2}{N_5-1} \left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^2 \right]^2 \quad (20)$$

将式(19)和式(20)代入式(16)即可得到 f_m 的方差 $\text{var}(f_m)$ 。

通过以上过程求得式(5)中分子、分母的数学期望和方差后,再利用式(7)~式(8)即可得估计值 $\partial \hat{P} / \partial f_k$ 的数学期望 $E(\partial \hat{P} / \partial f_k)$ 和方差 $\text{var}(\partial \hat{P} / \partial f_k)$ 。估计值的变异系数反映估计值的相对分散性,其定义为估计值的标准差与估计值数学期望绝对值的比值。由此可得模糊随机失效概率对基本随机变量分布参数灵敏度估计值的变异系数为

$$\text{cov}(\partial \hat{P} / \partial f_k) = \frac{\sqrt{\text{var}(\partial \hat{P} / \partial f_k)}}{|E(\partial \hat{P} / \partial f_k)|} \quad (21)$$

模糊随机失效概率对基本模糊变量分布参数灵敏度估计值的变异系数 $\text{cov}(\partial \hat{P} / \partial \mu_j)$ 可由 $\text{cov}(\partial \hat{P} / \partial f_k)$ 类似的方法估计。

3 正态隶属函数下的模糊随机可靠性灵敏度分析

当模糊变量的隶属函数均为正态型时,其隶属函数为

$$\mu_j(x_j) = \exp \left[-\frac{(x_j - A_j)^2}{B_j^2} \right] \quad (j = n_{r+1}, \dots, n) \quad (22)$$

方求数学期望,即 $E \left[\left[\sum_{l_5=1}^{N_5} H(x_{l_5}) \right]^4 \right]$, 将此和式的四次方展开再求数学期望,所得结果如为

数字模拟的过程中可用式(20)进行估计。

式中: A_j 和 B_j 分别为正态隶属函数 $\mu_j(x_j)$ 的位置参数和形状参数。

将 $\mu_j(x_j)$ 做式(23)所示的变换^[6-7], 可得到相应于 $\mu_j(x_j)$ 的具有概率密度函数性质的函数 $f_j^{(\phi)}(x_j)$ 。

$$f_j^{(\phi)}(x_j) = \frac{\mu_j(x_j)}{\int \mu_j(x_j) dx_j} = \frac{1}{\sqrt{2} B_j / \sqrt{2}} \exp \left[-\frac{(x_j - A_j)^2}{2(B_j^2 / \sqrt{2})} \right] \quad (23)$$

由式(23)可见,与正态隶属函数相应的概率密度函数也为正态型,且两者之间的参数满足式(24)所示的关系。

$$\left. \begin{aligned} M_j^{(\phi)} &= A_j \\ S_j^{(\phi)} &= \sqrt{B_j^2 / 2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

式中: $M_j^{(\phi)}$ 和 $S_j^{(\phi)}$ 分别为概率密度函数 $f_j^{(\phi)}(x_j)$ 的均值和标准差。

将式(1)中所有模糊变量的隶属函数都做式(23)相同的变换,并将 $\mu_j(x_j) = f_j^{(\phi)}(x_j) \int \mu_j(x_j) dx_j$ 代入模糊随机失效概率的计算公式,则可得式(1)等价的 P_f 为

$$P_f = \prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n f_j^{(\phi)}(x_j) dx \quad (25)$$

式(25)所示的模糊随机失效概率为基本变量

的等价概率密度函数 $\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n f_j^{(e)}(x_j)$ 在失效域中的积分,也即模糊随机失效概率完全等价于随机失效概率问题。目前很多成熟的方法可以用来求解式(25)中 P_f 对等价概率密度函数 $\prod_{i=1}^{n_r} f_i(x_i) \prod_{j=n_r+1}^n f_j^{(e)}(x_j)$ 中等价分布参数 $M_j^{(e)}$ 和 $S_j^{(e)}$ 的灵敏度 $\partial P_f / \partial M_j^{(e)}$ 和 $\partial P_f / \partial S_j^{(e)}$,如高效的线抽样方法^[11-12]、重要抽样法^[13-14]等。

利用复合函数求导法则及式(24)的参数关系,并利用已有的随机可靠性灵敏度分析方法求得的 $\partial P_f / \partial M_j^{(e)}$ 和 $\partial P_f / \partial S_j^{(e)}$,可求得模糊随机失效概率对正态型隶属函数分布参数 A_j 和 B_j 的灵敏度 $\partial P_f / \partial A_j$ 和 $\partial P_f / \partial B_j$ 为

$$\partial P_f / \partial A_j = \partial P_f / \partial M_j^{(e)} \quad (26)$$

$$\partial P_f / \partial B_j = \sqrt{2}/2 \cdot \partial P_f / \partial S_j^{(e)} \quad (27)$$

由上述分析过程可知,正态型隶属函数情况下的模糊随机可靠性灵敏度可以转化为随机可靠性灵敏度分析问题,从而可以利用已有的高效方法(在本文算例中均采用线抽样方法)来求解模糊随机可靠性灵敏度问题。

4 非正态隶属函数下的模糊随机可靠性灵敏度分析

对于非正态隶属函数较难应用上节所述方法求解可靠性灵敏度,因为非正态隶属函数在做式(23)变换后相应的概率密度函数为非正态型。针对此问题本文以常用的对称三角型隶属函数为例,提出了两种对称三角型隶属函数近似正态化的方法。近似正态化方法的基本思想是:将对称三角型隶属函数近似转化为等价的正态型隶属函数,然后根据正态型隶属函数下模糊随机可靠性灵敏度的分析方法进行对称三角型隶属函数下模糊随机失效概率对基本变量参数灵敏度的求解。

4.1 “3 规则”法

假设结构中模糊变量 x_j 的隶属函数 $\mu_j(x_j)$ 为式(28)中所示的对称三角型。

$$\mu_j(x_j) = \begin{cases} 1 - \frac{|x_j - T_j|}{R_j} & T_j - R_j \leq x_j \leq T_j + R_j \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (28)$$

式中: T_j 为 $\mu_j(x_j)$ 的中心值; R_j 为模糊幅度。

“3 规则”法即是取等价正态隶属函数 $\mu_j^{(e)}(x_j)$ 的位置参数 $A_j^{(e)}$ 与 T_j 相等,而形状参数 $B_j^{(e)}$ 为 R_j 的 $1/3$,即

$$\begin{cases} A_j^{(e)} = T_j \\ B_j^{(e)} = R_j/3 \end{cases} \quad (29)$$

当对称三角型隶属函数 $\mu_j(x_j)$ 转化为等价正态型隶属函数 $\mu_j^{(e)}(x_j)$ 后,就可以利用上节的方法求得模糊随机失效概率 P_f 对等价参数 $A_j^{(e)}$ 和 $B_j^{(e)}$ 的灵敏度 $\partial P_f / \partial A_j^{(e)}$ 和 $\partial P_f / \partial B_j^{(e)}$ 。又由复合函数求导法则和式(29)的参数关系可求得模糊随机失效概率对对称三角型隶属函数参数 T_j 和 R_j 的灵敏度分别为

$$\partial P_f / \partial T_j = \partial P_f / \partial A_j^{(e)} \quad (30)$$

$$\partial P_f / \partial R_j = \frac{1}{3} \cdot \partial P_f / \partial B_j^{(e)} \quad (31)$$

该方法取自于工程中的“3 规则”,其思路简单、实现容易,有一定的应用价值。从后述的算例可以看出,这种等价变换方法在有些情况下可以求得合理的可靠性灵敏度,但由于这种变换并不能总是保证等价正态隶属函数与对称三角型隶属函数在形状上具有较好的相似性,因此有时会求出误差很大甚至是错误的结果。

4.2 “最大最小”法

“最大最小”法的思路是:选取适当的等价正态型隶属函数 $\mu_j^{(e)}(x_j)$ 的位置参数 $A_j^{(e)}$ 和形状参数 $B_j^{(e)}$,使得在对称三角型隶属函数 $\mu_j(x_j)$ 的取值范围 $T_j - R_j \leq x_j \leq T_j + R_j$ 内,误差 $|\mu_j^{(e)}(x_j) - \mu_j(x_j)|$ 的最大值达到最小。

由于对称三角型隶属函数 $\mu_j(x_j)$ 关于中心值 T_j 对称,因此可选 $A_j^{(e)} = T_j$,此时只要求得在 $T_j - R_j \leq x_j \leq T_j + R_j$ 内使 $|\mu_j^{(e)}(x_j) - \mu_j(x_j)|$ 的最大值达到最小的等价正态隶属函数的形状参数 $B_j^{(e)}$ 与对称三角型隶属函数模糊幅度 R_j 的关系 $B_j^{(e)} = kR_j$ (k 为待定常数)即可,也即求解下列优化模型。

$$\min_{B_j^{(e)} = kR_j} \left[\max_{T_j - R_j \leq x_j \leq T_j + R_j} (|\mu_j^{(e)}(x_j) - \mu_j(x_j)|) \right] \quad (32)$$

式(32)的优化模型很容易求解,采用适当的优化方法即可确定 $B_j^{(e)}$ 与 R_j 的关系 $B_j^{(e)} = kR_j$ 。采用上节方法可求得 $\partial P_f / \partial A_j^{(e)}$ 和 $\partial P_f / \partial B_j^{(e)}$,又根据复合函数求导法则可得模糊随机失效概率对对称三角形隶属函数参数的灵敏度分别为

$$\partial P_f / \partial T_j = \partial P_f / \partial A_j^{(e)} \tag{33}$$

$$\partial P_f / \partial R_j = k \cdot \partial P_f / \partial B_j^{(e)} \tag{34}$$

为说明“最大最小”法在近似等价正态化变换中的优越性,现举一对称三角型隶属函数的实例。假设模糊变量 y 的隶属函数为对称三角型,其位置参数 T_y 和形状参数 R_y 分别为: $T_y = 2, R_y = 1.2$,运用“3 规则”法和“最大最小”法将其近似等价正态化,结果对照如图 1 所示。

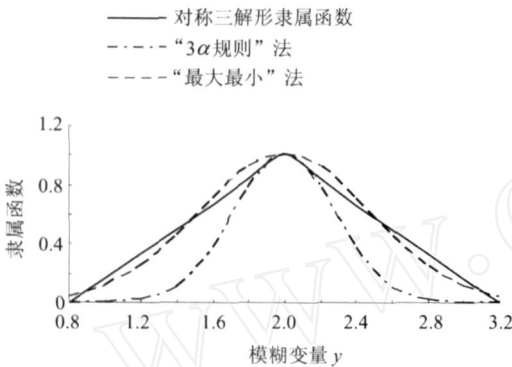


图 1 两种对称三角隶属函数近似等价正态化方法比较
Fig. 1 Comparison of two methods for equivalent transformations from symmetric triangle membership to the Gaussian one

由图 1 可看出:运用“最大最小”法比运用“3 规则”法所得等价正态隶属函数能在形状上更好地替代对称三角型隶属函数。

5 算 例

算例 1 $g(x, y) = 2.6 - x + \exp\left(\frac{-x^2}{10}\right) + \left(\frac{y}{5}\right)^5$, 其中 $x \sim N(0, 1^2)$; y 为具有对称三角型隶属函数的模糊变量,其中心值 T_y 和模糊幅度 R_y 分别为: $T_y = 0, R_y = 3\sqrt{2}$ 。采用 3 种不同方法所得的模糊随机可靠性灵敏度的计算结果如表 1 所示。

表 1 中 μ_x 和 σ_x 分别表示下标变量 x 的均值和标准差, N 表示抽样次数(式(5)中的抽样次数 $N_m = N(m = 1, 2, \dots, 5)$,即数字模拟法中总的抽样次数为 $5N$), N 越大,计算量越大,反之则小。表 2 中的表示方法相同。

算例 2 图 2 所示的三跨度梁的单跨长度 $L = 5$ m 为定值量。考虑三跨度梁挠度最大允许值为 $L/360$,可以建立功能函数为: $g(w, E, I) = L/360 - 0.0069wL^4/EI$,其中各变量相互独立,

表 1 算例 1 可靠性灵敏度分析结果

Table 1 Analysis results of reliability sensitivity of example 1

方法		$\partial P_f / \partial \mu_x$	$\partial P_f / \partial \sigma_x$	$\partial P_f / \partial T_y$	$\partial P_f / \partial R_y$	P_f	N
“3 规则”法	估计值	0.004 360 16	0.013 103 8	$-5.324 4 \times 10^{-5}$	$3.594 79 \times 10^{-6}$	0.001 325 01	2 000
	变异系数	0.000 482 01	0.000 431 27	0.000 482 01	0.000 431 27	0.000 509 2	
“最大最小”法	估计值	0.004 369 42	0.013 121 3	-0.000 102 808	0.000 033 004 8	0.001 328 71	2 000
	变异系数	0.002 190 44	0.001 922 81	0.002 190 44	0.001 922 81	0.002 431 98	
数字模拟	估计值	0.004 417 11	0.013 275 0	-0.000 123 471	0.000 032 869 5	0.001 344 38	10^8
	变异系数	0.003 629 85	0.003 692 87	0.017 728 8	0.055 229 8	0.003 607 93	

表 2 算例 2 可靠性灵敏度分析结果

Table 2 Results of reliability sensitivity of example 2

方法	“3 规则”法($N = 4\ 000$)		“最大最小”法($N = 4\ 000$)		数字模拟法($N = 5.0 \times 10^6$)	
	估计值	变异系数	估计值	变异系数	估计值	变异系数
$\partial P_f / \partial T_w$	0.000 410 962	0.011 838 8	0.000 411 085	0.011 840 9	0.000 364 473	0.287 371
$\partial P_f / \partial R_w$	0.000 164 425	0.009 534 16	0.000 164 018	0.009 535 16	0.000 151 019	0.567 405
$\partial P_f / \partial \mu_I$	$-9.552\ 3 \times 10^{-10}$	0.011 838 8	$-9.577\ 1 \times 10^{-10}$	0.011 840 4	$-9.661\ 93 \times 10^{-10}$	0.014 991
$\partial P_f / \partial I$	$2.650\ 86 \times 10^{-9}$	0.009 534 16	$2.658\ 12 \times 10^{-9}$	0.009 535 16	$2.677\ 53 \times 10^{-9}$	0.015 566 8
$\partial P_f / \partial \mu_E$	-11.062 3	0.011 838 8	-11.029 8	0.011 840 4	-11.114 7	0.023 327 9
$\partial P_f / \partial E$	18.456 3	0.009 534 16	18.472 3	0.009 535 16	18.136 5	0.034 501 9
P_f	0.001 600 3	0.014 112	0.001 600 8	0.014 114 7	0.001 605 3	0.014 712 2

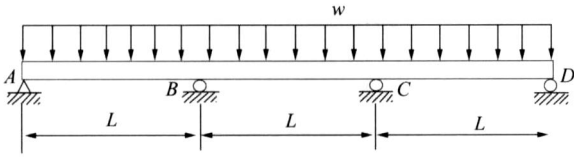


图2 三跨度梁示意图

Fig. 2 Three-span beam structure

w 为分布载荷并将其视为模糊变量,其隶属函数为对称三角形形式, E 和 I 分别为弹性模量和惯性矩,将 E 和 I 看做基本随机变量,且均服从正态分布。基本变量的参数分别为: $T_w = 12$ kN, $R_w = 0.3\sqrt{2}$ kN, $\mu_E = 2 \times 10^7$ kN/m², $\sigma_E = 0.5 \times 10^7$ kN/m², $\mu_I = 8 \times 10^{-4}$ m⁴, $\sigma_I = 1.5 \times 10^{-4}$ m⁴。采用3种不同方法所得的模糊随机可靠性灵敏度计算结果如表2所示。

算例2中采用数字模拟法计算可靠性灵敏度时,当提高抽样次数 N 至 2.0×10^8 次, $\partial P_f / \partial T_w$ 和 $\partial P_f / \partial R_w$ 及其变异系数计算结果分别为: $\frac{\partial P_f}{\partial T_w} = 0.000\ 357\ 136$, $\text{cov} \left\{ \frac{\partial P_f}{\partial T_w} \right\} = 0.046\ 344\ 6$, $\frac{\partial P_f}{\partial R_w} = 0.000\ 145\ 733$, $\text{cov} \left\{ \frac{\partial P_f}{\partial R_w} \right\} = 0.092\ 973\ 4$,将此结果与抽样次数为 5.0×10^6 时的进行比较可知:在抽样次数 N 为 5.0×10^6 时,虽然这两者的变异系数较大,但计算结果已经收敛。从算例2可靠性灵敏度分析结果可以看出,结构失效概率对材料弹性模量标准差的可靠性灵敏度值最大,即三跨度梁的材料弹性模量的标准差对此结构的失效概率影响最大,这对三跨度梁结构设计时应注重选材有一定的参考价值。

从所列数值算例和工程算例结果可以看出:文中所提的通用数字模拟法可有效计算模糊随机可靠性灵敏度,且该方法不受功能函数及变量形式、个数的制约,通常可将其收敛解视为精确解,但其得到收敛解所需的样本容量很大,计算效率太低。采用本文所提的对称三角型隶属函数等价正态化变换的方法,并结合随机可靠性灵敏度分析的高效线抽样方法,可大大减少求解模糊随机失效概率对基本变量参数灵敏度收敛解所需的抽样次数,提高了计算效率,此结论可从数字模拟法和所提两种等价正态化方法的变异系数的比较中看出。在所有算例中,数字模拟法在抽样次数大大高于等价转化法时的变异系数却大于等价转化法,说明等价转换法的效率大大高于数字模拟法。“3规则”等价近似正态化法并不是在所有情况

下都适用,如算例1中 $\partial P_f / \partial T_y$, $\partial P_f / \partial R_y$ 的结果与通用数字模拟法的结果相差较大,而“最大最小”法则在所列算例中均得到比较精确的结果。

6 结 论

针对基本变量具有随机或模糊不确定性的结构,提出了模糊随机可靠性灵敏度分析的通用数字模拟法,并在此基础上推导了数字模拟解的方差和变异系数的计算公式。由于正态型隶属函数情况下的模糊随机可靠性灵敏度分析可精确转化为随机可靠性灵敏度分析问题,提出了两种对称三角型隶属函数等价正态化的方法,其一是“3规则”法,其二是“最大最小”法。算例结果表明:数字模拟法可有效计算模糊随机失效概率对基本变量参数的灵敏度,若样本容量足够大,则所得结果可视为精确解,且数字模拟解的精度不受功能函数形式及变量形式、个数的制约,但该方法得到收敛解所需的抽样次数很大,尤其是在小失效概率情况下,计算效率低,不适于工程问题。文中所提的两种对称三角型隶属函数等价近似正态化方法,可与高效的随机可靠性灵敏度分析方法相结合,因而计算效率明显高于数字模拟法。相比于“3规则”等价近似正态化法,“最大最小”法可使所得等价正态隶属函数更好地在函数形状上替代对称三角型隶属函数,因而该方法更适用于对称三角型隶属函数情况下模糊随机可靠性灵敏度的近似估计。

参 考 文 献

- [1] Wu Y T, Monhanty S. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2006, 91(6): 634-647.
- [2] Wu Y T. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis [J]. AIAA J, 1994, 32(8): 1717-1723.
- [3] 董玉革,朱文予,陈心昭. 机械模糊可靠性计算方法研究[J]. 系统工程学报, 2000, 15(1): 7-12.
Dong Yuge, Zhu Wenyu, Chen Xinzhaoh. Study on a calculating method of machine fuzzy reliability[J]. Journal of Systems Engineering, 2000, 15(1): 7-12. (in Chinese)
- [4] 吕震宙,岳珠峰. 模糊随机可靠性分析的统一模型[J]. 力学学报, 2004, 36(5): 533-539.
Lu Zhenzhou, Yue Zhufeng. Unified reliability model for fuzziness and randomness of the basic variables and state variables in structure[J]. Acta Mechanica Sinica, 2004, 36(5): 533-539. (in Chinese)
- [5] 孙颖. 模糊随机可靠性分析方法研究[D]. 西安:西北工业大学, 2005.

- Sun Jie. Study on an analytical method of fuzzy and random reliability[D]. Xi'an: Northwest Polytechnical University, 2005. (in Chinese)
- [6] 刘长虹,陈虬. 基于信息熵理论中的含模糊参数的响应面法[J]. 机械强度, 2003, 25(2): 187-189.
Liu Changhong, Chen Qiu. Response surface method in fuzzy parameters under the entropy[J]. Journal of Mechanical Strength, 2003, 25(2): 187-189. (in Chinese)
- [7] 刘长虹,陈虬. 基于信息熵下的结构强度和外载的广义可靠度[J]. 机械科学与技术, 2003, 22(3): 444-446.
Liu Changhong, Chen Qiu. Analysis of structural general reliability of the loading and strength based on information entropy[J]. Mechanical Science and Technology, 2003, 22(3): 444-446. (in Chinese)
- [8] Melchers R E, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte-Carlo structural reliability[J]. Computers and Structures, 2004, 82(1): 55-61.
- [9] Bjerager P, Krenk S. Parametric sensitivity in first order reliability analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1989, 115(7): 1577-1582.
- [10] Rice J A. Mathematical statistics and data analysis[M]. Duxbury Press, Indio: 2003.
- [11] Schueller G I, Pradlwarter H J, Koutsourelakis P S. A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions[J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2004, 19: 463-473.
- [12] Schueller G I, Pradlwarter H J, Koutsourelakis P S. A comparable study of reliability estimation procedures for high dimensions[C]. In Turkiyyah, Editor, Proceedings of the 16th ASCE Engineering Mechanics Conference. Elsevier University of Washington, Seattle, USA, 2003.
- [13] Au S K. Probability failure analysis by importance sampling Markov chain simulation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, 130(3): 303-311.
- [14] 吴建成,吴剑国,吴亚舸. 一种基于马尔可夫链模拟样本的自适应重要样本法[J]. 华东船舶工业学院报: 自然科学版, 2003, 17(3): 8-12.
Wu Jiancheng, Wu Jianguo, Wu Yage. An adaptive important sampling method based on Markov chain sample simulation algorithm[J]. Journal of East China Shipbuilding Institute: Natural Science Edition, 2003, 17(3): 8-12. (in Chinese)

作者简介:

何红妮(1984 -) 女,硕士研究生。主要研究方向:飞行器可靠性工程。

E-mail: hehn84719@163.com

吕震宙(1966 -) 女,教授,博士生导师。主要研究方向:结构可靠性分析与设计。

(责任编辑:李铁柏)