第 29 卷第 3 期 喀什师范学院学报 Vol. 29 No. 3
2008 年 5 月 Journal of Kashgar Teachers College May 2008

两个图论问题的 0 - 1 规划模型*

梁彩霞
(肇庆学院 数学与信息科学学院,广东 肇庆 526061)

摘 要:引进图的覆盖向量和独立向量概念,以向量和矩阵为工具,把图的最小覆盖和最大独立集问题转化为 0 - 1 规划问题,从而给出了寻找图的最小覆盖和最大独立集的一个方法.

关键词:最小覆盖;最大独立集;0 - 1 规划
中图分类号:O157.6 **文献标识码**:A **文章编号**:1006-432X(2008)03-0021-02

最小覆盖和最大独立集是图论中的两个重要概念.人们对它们作了大量研究工作,并指出求图的最小覆盖和最大独立集是 NP-困难的.虽然目前已有不少求图的最小覆盖和最大独立集的近似算法,如启发式算法及逻辑算法,但使用这些方法求解过程比较复杂.本文旨在探索求图的最小覆盖和最大独立集的方法.为此,我们引进图的覆盖向量和独立向量的概念,以向量和矩阵为工具,把任意一个图的最小覆盖和最大独立集问题转化为 0 - 1 规划问题,从而给出求图的最小覆盖与最大独立集的一个简洁的方法.

1 基本概念和定义

本文考虑的图皆为有限、无向、无环的简单图.凡未加说明的术语和记号均同[3].给定一个 n 阶 m 边图 $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$, $K\subseteq V$, $I\subseteq V$. K 称为图 G 的一个覆盖,是指 G 的每条边都至少有一个顶点在 K 之中.我们用符号 $|K|$ 表示 K 中所包含的元素的个数,设 $|K^0|=\min\{|K|\,|\,K$ 是 G 的覆盖$\}$,则称 K^0 为 G 的一个最小覆盖. I 称为图 G 的一个独立集,是指 I 中任意两点都是不相邻的.设 $|I^0|=\max\{|I|\,|\,I$ 是 G 的独立集$\}$,则称 I^0 为 G 的一个最大独立集;最小覆盖、最大独立集所含的顶点数分别称为覆盖数和独立数.

设 K 是图 G 的一个覆盖,我们定义图 G 的对应于 K 的覆盖向量是这样一个 n 维向量:

$$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T,$$

其中

$$c_i=\begin{cases}1, 当\ v_i\in K;\\ 0, 当\ v_i\in V\setminus K.\end{cases}$$

设 I 是图 G 的一个独立集,我们定义图 G 的对应于 I 的独立向量是这样一个 n 维向量:

$$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T,$$

其中

$$b_i=\begin{cases}1, 当\ v_i\in I;\\ 0, 当\ v_i\in V\setminus I.\end{cases}$$

称 m 维向量 $F=(1,1,\cdots,1)^T$ 为图 G 的一个完全向量.

2 主要结果

引理 1 $M=(m_{ij})_{n\times m}$ 是图 G 的关联矩阵, $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T$ 是图 G 对应于非空覆盖 K 的覆盖向量的充要条件是 $M^TC\geq F$.

证明 充分性 由 $M^TC\geq F$,得 $\sum_{j=1}^{n}m_{ij}c_j\geq 1\ (i=1,2,\cdots,m)$.又 $m_{ij}=0$ 或 1, $c_j=0$ 或 $1\ (j=1,2,\cdots,n)$,则 $\exists\, i_k\in\{1,2,\cdots,n\}$,使得 $m_{ii_k}=1$ 且 $c_{i_k}=1$,这表明 v_{i_k} 是 e_i 的一个端点,且在 K 中.

必要性 反证.若 $M^TC\geq F$ 不成立,则 $\exists\, i\in\{1,2,\cdots,m\}$,使得 $\sum_{j=1}^{n}m_{ij}c_j=0$.由 $m_{ij}\geq 0$, $c_j\geq 0$,有 $m_{ij}c_j=0\ (j=1,2,\cdots,n)$.再由 $m_{ij}c_j=0$ 知,若 $m_{ij}\neq 0$,则 $c_j=0$,这表明如果 v_j 是 e_i 的端点,则 $v_j\in V\setminus K$.这与 K 是 G 的覆盖矛盾.

定理 2 图 G 的最小覆盖对应的覆盖向量是下面 0 - 1 规划问题的最优解:

$$\min\sum_{j=1}^{n}c_j$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}M^TC\geq F,\\ c_j=0\ 或\ 1\ (j=1,2,\cdots,n).\end{cases}\qquad (P_1)$$

证明 由引理 1,0 - 1 规划问题 (P_1) 的约束条件限制了 C 必须是非空覆盖的覆盖向量,又由目标函数 $\min\sum_{j=1}^{n}c_j$ 的极小性知 (P_1) 的最优解就是图 G 的最小覆盖所对应的覆盖向量.

引理 3 $M=(m_{ij})_{n\times m}$ 是图 G 的关联矩阵, $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是图 G 对应于非空独立集 I 的独立向量的充要条件是 $M^TB\leq F$.

定理 4 图 G 的最大独立集对应的覆盖向量是下面 0 - 1 规划问题的最优解:

* **收稿日期**:2007-12-26
作者简介:梁彩霞(1978-),女,广东茂名人,硕士,助教,主要研究方向为图论与组合最优化.

$$\max \sum_{j=1}^{n} b_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} M^T B \le F \\ b_j = 0 \text{ 或 } 1\ (j = 1,2,\cdots,n). \end{cases} \qquad (P_2)$$

引理 3 和定理 4 的证明可分别仿照引理 1 和定理 2 完成,在此不再赘述.

根据定理 2 和定理 4 寻找一个图的最小覆盖便转换为求解 0 - 1 规划问题(P_1),(P_1)的一个最优解向量的所有 1 分量的个数就是图的覆盖数,由所有 1 分量所对应的下标集合便得到图的最小覆盖;寻找一个图的最大独立集便转换为求解 0 - 1 规划问题(P_2),(P_2)的一个最优解向量的所有 1 分量的个数就是图的独立数,由所有 1 分量所对应的下标集合便得到图的最大独立集.

例　设图 G 的关联矩阵是

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

则图 G 的最小覆盖对应的覆盖向量及最大独立集对应的独立向量分别就是下述 0 - 1 规划问题(1)和(2)的最优解:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} c_1 + c_2 \ge 1 \\ c_2 + c_3 \ge 1 \\ c_3 + c_4 \ge 1 \\ c_1 + c_4 \ge 1 \\ c_2 + c_5 \ge 1 \\ c_3 + c_5 \ge 1 \\ c_4 + c_5 \ge 1 \\ c_j = 0 \text{ 或 } 1\ (j = 1,2,\cdots,n); \end{cases} \qquad (1)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} b_1 + b_2 \le 1 \\ b_1 + b_2 \le 1 \\ b_2 + b_3 \le 1 \\ b_3 + b_4 \le 1 \\ b_1 + b_4 \le 1 \\ b_2 + b_5 \le 1 \\ b_3 + b_5 \le 1 \\ b_4 + b_5 \le 1 \\ b_j = 0 \text{ 或 } 1\ (j = 1,2,\cdots,n). \end{cases} \qquad (2)$$

尽管 0 - 1 规划问题也是 NP - 困难的,但关于 0 - 1 问题的一些算法,如隐枚举法、割平面法等都是行之有效的[4-5].值得一提的是,当前已有不少软件具备解 0 - 1 规划问题的功能,如 lingo、lindo 等.因此,我们把求图的最小覆盖问题、最大独立集问题转化为 0 - 1 规划问题,再借助计算机进行求解,此法比传统的启发式算法,逻辑算法要简洁、准确.

另外,一个图的最小覆盖和最大独立集并不是唯一的.

参考文献:

[1] 张先迪,李正良.图论及其应用[M].北京:高等教育出版社,2005:101-104,191-195.

[2] 费培之,程中瑗.数学模型实用教程[M].成都:四川大学出版社,1998:72-83.

[3] Ja Bondy, Usr Murty. Graph Theory With Application [M]. London: Macmillan Press Ltd,1976:1-4,70-80.

[4] 刁在筠,等.运筹学[M].北京:高等教育出版社,2001:76-90.

[5] 刘建勇,等.运筹学算法与编程实践[M].北京:高等教育出版社,2004:138-148.

The 0 - 1 Programming Model of Two Graph Theory Problems

LIANG Cai-xia

(Faculty of Mathematics and Information Sciences, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, Guangdong, China)

Abstract: We introduce the idea of Covering vector and Independent vector for a graph, and transfer the problems of a Minimum Covering and maximum Independent Set of a graph into 0 - 1 Programming problem, and then simple methods of finding a Minimum Covering and maximum Independent Set of a graph are given.

Key words: Minimum covering set; Maximum independent set; 0 - 1 Programming