文章编号:1008 - 5394(2005)02 - 0042 - 03

基于图论的带模糊约束最小费用与最小时间问题*

马志宏,张海燕

(天津农学院 基础课部,天津 300384)

摘 要:为了寻求工程实施中费用与时间的最小化问题,在构造多因素隶属度 PERT 图和建立隶属函数模型的基础上,给出了最短路径的算法,并运用模糊约束量来解决带最小化时间因素的最小费用流问题。同时,给出了相应的数学模型及算法。

关 键 词:图论;模糊约束;最小费用;最短路径;数学模型

中图分类号:TP393;O159 **文献标识码**:A

Minimum-cost and Minimum-time Problem Based on Graph Theory and Fuzzy Constraint

MA Zhi-hong, ZHANG Hai-yan

(Department of Basic Courses, Tianjin Agricultural College, Tianjin 300384, China)

Abstract: In order to solve the problem for minimum cost and time in the process of carrying out the project, based on creating the PERT chart containing grade of membership and constructing membership function model, the Shortest Path Algorithm was found out, and the minimum-cost and minimum-time problems were solved by fuzzy constraint and graph theory. Meanwhile, the corresponding mathematical model and algorithm were also constructed.

Key words: graph theory; fuzzy constraint; minimum-cost; shortest path; mathematical model

人们在运用图论和网络分析工具解决工程计划或企业管理等许多领域中的问题时,在寻求工程实施的最小时间和最小费用等最优化[1]方案时,常会受到一些不确定性因素影响。例如,在解决费用流问题时,由于既要考虑运输费用,又要考虑运输时间和运输能力,而运输时间主要由路程决定,运输能力中往往都带有一些人为的主观因素,因此要建立最优的数学模型,做到时间和费用的相对最小化,从而做到决策的科学化和合理化。

1 PERT 图[2]及问题的提出

为了解决多因素对工程实施的影响,下面构建了带有多因素的 PERT 图。

1.1 PERT 图定义

设 $D=<V,E,F,L,C>$ 是一个 n 阶有向带权图,其中 $\forall <v_i,v_j>\in E$,ω_{ij}($\forall\omega_{ij}\in F$)表示边 $<v_i,v_j>$ 上的流量;ξ_{ij}($\forall\xi_{ij}\in L$)表示边 $<v_i,v_j>$ 上的距离;ζ_{ij}($\forall\xi_{ij}\in C$)表示边 $<v_i,v_j>$ 上的单位流量费用;ϕ 表示总流量。

1.2 问题的提出

对于运输货物这样的问题,在众多的线路及不同线路的容量等因素的影响下,怎样制定运输方案才能使得运输费用最小且时间最合理?在文献 3～6 中都分别解决了有关最小费用、最大流及最佳费用问题,可是都没有考虑时间这个重要因素。为此,本文综合流量与路径等因素,解决费用与时间的最优化问题。

---

* **收稿日期**:2004 - 10 - 14
基金项目:天津农学院科学研究发展基金项目“构建我院网络数学建模的服务体系”
作者简介:马志宏(1975 -),男,宁夏中卫人,助教,硕士在读,主要从事数学教学及应用数学研究工作。联系电话:(022)23369227。

仔细分析文献 3 最小费用流问题中最优运输方案可发现,其仅满足以下 3 点要求:

(1) 从 v_1 到 v_n 运送所有的总量 ϕ;

(2) 总运输费用最小;

(3) 在容量大的路径上适当多运输。

以上 3 点要求虽然考虑了决策者在制定运输方案时兼顾"容量大多运输"能使费用降低,但没有考虑有关路径的选择问题,即路径长度与运输时间等因素对最小费用的影响。为此,在以上 3 点的基础上,本文提出了怎样保证时间最小(其实主要是路径最短)。

2　基本数学模型的建立

基本思想是:先在文献 3、4 的基础上建立容量大的隶属函数,然后在寻求最短路径的算法时把得到隶属度作为一个重要条件带入算法,最后求得带有隶属度的最优化路径(即时间最小化问题)。得到运输路线后,再建立各个模糊约束量,最后求解。

2.1　有关容量隶属函数模型的建立

2.1.1　最小费用流模型 I[7]

根据条件(1)、(2)建立最小费用流模型 I:

$$\min \sum_{<v_i,v_j>\in E} \zeta_{ij}\omega'_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases} \sum\limits_{<v_1,v_j>\in E}\omega'_{1j} - \sum\limits_{<v_j,v_1>\in E}\omega'_{1s} = \phi \\ \sum\limits_{<v_n,v_j>\in E}\omega'_{nj} - \sum\limits_{<v_j,v_n>\in E}\omega'_{jn} = -\phi \\ \sum\limits_{<v_i,v_j>\in E}\omega'_{ij} - \sum\limits_{<v_j,v_i>\in E}\omega'_{ji} = 0 \\ 0 \le \omega'_{ij} \le \omega_{ij} \end{cases}$$

2.1.2　建立隶属函数

根据条件(3)建立"容量大"的隶属函数[8]。

记 $\underset{\sim}{E} = \{<v_i, v_j> \mid \omega_{ij}\text{大}, <v_i, v_j> \in E\}$,则把 $\underset{\sim}{E}$ 看作 E 上的一个模糊子集,定义其隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{E}}: E \to [0,1]$ 为

$$\mu_{ij} \overset{\triangle}{=} \mu_{\underset{\sim}{E}}<v_i, v_j> = \begin{cases} 0, & 0 \le \omega_{ij} \le \overline{\omega} \\ 1 - e^{-d(\omega_{ij}-\overline{\omega})/\phi}, & \omega_{ij} > \overline{\omega} \end{cases}$$

其中,$\overline{\omega} = \frac{1}{|E|}\left[\sum\limits_{<v_i,v_j>\in E}\omega_{ij}\right]$

$$d = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{|E|}\left[\sum\limits_{<v_i,v_j>\in E}(\omega_{ij}-\overline{\omega})^2\right] \le 1 \\ \lg\sqrt{\frac{1}{|E|}\left[\sum\limits_{<v_i,v_j>\in E}(\omega_{ij}-\overline{\omega})^2\right]}, & \text{否则} \end{cases}$$

当 ω_{ij} 都大于 1 时,u_{ij} 就类似于型 Γ 分布[9]。

2.1.3　文献 3 中已经讨论了 μ_E 的合理性。

2.2　带隶属度最短路径算法

为了解决条件怎样保证时间最小这个问题,下面给出带隶属度最短路径算法。

2.2.1　有关定义

主要先取 D 中主要因素 $D' = <V, E, L, U>$。若 v_i 与 v_j 为不相邻且可达,$U = \left\{u_{ij} \mid u_{ij} \ne 0\right\}$ 令 $\xi_{ij} = \infty$,求 D 中顶点 v_1 到顶点 v_n 的最短路径。先给出如下定义。

(1) 设 $l_i^{(r)*}$ 为顶点 v_1 到 v_i 的最短路径的权,若顶点 v_i 获得了标号 $l_i^{(r)*}$,称 v_i 第 r 步获得了 P 标号 $l_i^{(r)*}$,其中 $r \ge 0$。

(2) 设 $l_i^{(r)}$ 为 v 到 v_i 的最短路径权的上界,若 v_j 获得 $l_i^{(r)}$,称 v_j 在第 r 步获得 t 标号 $l_i^{(r)}$,其中 $r \ge 0$。

(3) 设 $P_r=\{v|\ v$ 已获得 P 标号$\}$为第 r 步通过集, $r\geq 0$。

(4) 设 $T_r=v-P_r$ 为第 r 步未通过集, $r\geq 0$。

(5) 设 U 为通过路径的隶属度函数集。U 是所寻找的一个最优区域集[10]。

2.2.2 带隶属度的最优路径算法

开始 $r\leftarrow 0$, v_1 获得 P 标号: $l_i^{(0)*}=0$, $P_0=\{v_1\}$, $T_0=v-\{v_1\}$, $v_j(j\neq 1)$ 的 t 标号: $l_j^{(0)}=\xi_{1j}$。

①求下一个 P 标号顶点。

(Ⅰ) 若 $l_i^{(r)*}=\min\limits_{v_j\in T_{r-1}}\{l_i^{(r-1)}\}$, $r\geq 1$ 同时 $u_{ji}\in U$, 则将 $l_i^{(r)*}$ 标在相应顶点 v_i 处, 表明 v_i 获得 P 标号。修改通过集、未通过集和通过路径的隶属度函数集:

$P_r=P_{r-1}\cup\{v_i\}$, $T_r=T_{r-1}-\{v_i\}$, $U'=\{u_{ji}\}$, 否则(Ⅱ)。

(Ⅱ) 若 $l_i^{(r)*}=\min\limits_{v_j\in T_{r-1}}\{l_i^{(r-1)}\}$, $r\geq 1$ 但 $u_{ji}\notin U$, 则查找 $l_i^{(r)*\prime}>l_i^{(r)*}=\min\limits_{v_j\in T_{r-1}}\{l_i^{(r-1)}\}$, $r\geq 1$, 同时使 $u_{ji}\in U$。找到, 则记 $l_i^{(r)*}=l_i^{(r)*\prime}$, 转(Ⅰ)。

查 v_i, 若 $v_i=v_n$, 则算法结束; 否则转②。

②修改 T_r 中各顶点的 t 标号:

$l_i^{(r)}=\min\{l_i^{(r-1)}, l_i^{(r)*}+\xi_{ij}\}$, $l_i^{(r)*}$ 是刚刚获得 P 标号顶点的 P 标号。令 $r\leftarrow r+1$, 转①。

2.3 模糊约束量的建立

在得到了 U 以后, 对其中的各个元素进行量化。即对 μ_E 中的一些元素进行"适当多运输"的模糊要求, 对容量大边 ω_{ij} 可适当地多运输, 同时人为地降低运价, 得到函数关系如下:

$$\overline{\zeta_{ij}}=\zeta_{ij}(1-\mu_{ij}^{k})$$

其中 k 为一正参数, 它反映了条件(2)、(3)在决策者心中的地位, k 最好能通过对一定数量的实际数据进行模拟、检验后得到。

2.4 问题的解决

2.4.1 带时间约束的最小费用

在计算出 $\bar{\zeta}$ 后, 把数据带入 2.2.1 的模型便可求出最小费用。

2.4.2 最小完成时间

通过上述算法可求得最短路径集 $P\subset V$, 可以得到相应 U'。如果在 2.2.2 的算法中去掉通过路径的隶属度函数集的限制条件, 略做修改, 就可得到完全最短路径的算法, 就可求出相应的最短路径, 即最小完成时间, 在此没有考虑路径的容量。

3 结束语

本文给出了解决 PERT 图中最短路径与最小费用的问题, 但是要使两者达到真正的最优化, 在实际应用中可能还会遇到很多因素的影响。本文在 2.2.1 中运用了在最大流基础上寻找最优路径的算法, 使其基本上能满足决策者的要求。

参 考 文 献:

[1] 刁在筠, 郑汉鼎, 刘家壮. 运筹学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004. 14 - 15.

[2] 耿素云, 屈婉玲, 张立昂. 离散数学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999. 147 - 161.

[3] 谢政, 汤泽滢. 带模糊约束的最小费用流问题[J]. 模糊系统与数学, 1999, 13(2): 90 - 94.

[4] 汤泽滢, 唐斌兵. 带模糊约束的最大流问题[J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(4): 77 - 80.

[5] 汤泽滢. 最佳费用流[J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(1): 93 - 97.

[6] 谢政, 汤泽滢. 带有模糊容量限制的网络中的最佳最小费用最大流[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(1): 64 - 70.

[7] 谢政, 李建平. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1995. 55 - 175.

[8] 杨纶标, 高英仪. 模糊数学[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2004. 51 - 82.

[9] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. 159 - 169.

[10] 宋业新, 姜礼平, 陈绵云. 一类模糊线性规划模型的模糊最优区间值[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(2): 86 - 90.