第35卷第5期 数学的实践与认识 Vol. 35 No. 5
2005年5月 MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY May, 2005

图论中矩阵的可实现性

卢建立, 杨明波

(河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘要: 对图的关联矩阵, 邻接矩阵, 基本割集矩阵, 基本圈矩阵的可实现性分别进行了论证, 并将邻接矩阵的可实现性推广到一般形式. 得到了同一个基本割集矩阵的奥凯达图形是不唯一的; 以及这些奥凯达图形所对应的图是互相同构的结果; 并且指出了基本圈矩阵的可实现性可以依靠基本割集矩阵的可实现性来解决.

关键词: 关联矩阵; 邻接矩阵; 基本割集矩阵; 基本圈矩阵; 奥凯达图形; 可实现性

图的矩阵表示是图论研究的重要内容. 我们知道, 给定一个图可以做出相应的关联矩阵, 邻接矩阵, 基本割集矩阵, 基本圈矩阵. 但是给出一个矩阵, 能否断定这个矩阵就是某个图的关联矩阵, 邻接矩阵, 基本割集矩阵, 或者基本圈矩阵呢, 我们把这个问题称为矩阵的可实现性.

1 关联矩阵的可实现性

任给一个(0, 1)矩阵, 只要它的每一列中1的个数不超过2, 那么我们就可以得到一个图G, 使得所给矩阵就是图G的关联矩阵. 得到图G的方法是: 若矩阵的行数是n, 则取$n+1$个顶点, 其中第$n+1$个顶点是参考点; 而矩阵的列数就是图的边数; 若矩阵的某一列有两个1, 则把这两个1所在的行对应的顶点连起来; 若矩阵的某一列只有一个1, 则把这个1所在的行对应的顶点与参考点连接起来. 这样可以得到一个图G, 图G的关联矩阵就是所给的矩阵. 从而得到下面的结论.

结论1 任何关联矩阵都是可实现的.

例1: 给定矩阵$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 我们可以用上述方法得到图1.

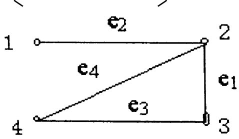

图1

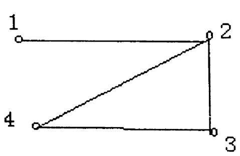

图2

2 邻接矩阵的可实现性

任给一个对称的(0, 1)矩阵, 那么我们就可以得到一个图G, 使得所给矩阵就是图G的邻接矩阵. 得到图G的方法是: 若矩阵的行数与列数都是n, 就取n个点代表矩阵的n个行与

收稿日期: 2004-07-01

列, 若矩阵的i 行j 列位置是1, 就将第i 个顶点与第j 个顶点连接起来　这样可以得到一个图G, 图G 的邻接矩阵就是所给的矩阵　从而得到下面的结论

结论2　任何邻接矩阵都是可实现的

例2: 给定矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

我们可以用上述方法得到图2

例3: 给定推广的(0, 1) 对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

我们可以用上述方法得到图3

例4: 给定推广的一般对称矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

我们可以用上述方法得到图4

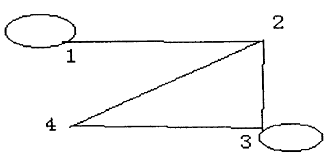

图3

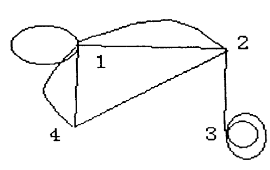

图4

3　基本割集矩阵的可实现性

任给一个基本割集矩阵, 都可以写成如下形式:

$$Q_f = [Q_{f11}, I] \tag{1}$$

其中Q_f 是$p-1$ 行q 列矩阵, Q_{f11}是$p-1$ 行$q-p+1$ 列矩阵, I 是$p-1$ 行$p-1$ 列的单位矩阵　我们能不能得到一个图G, 使得所给矩阵Q_f 就是图G 的基本割集矩阵, 关键是看矩阵Q_f 的奥凯达图形是否存在, 如果矩阵Q_f 的奥凯达图形存在, 就可以构造出一个图G, 使得矩阵Q_f 就是图G 的基本割集矩阵

所谓奥凯达图形, 就是根据(1) 式用平面上$p-1$ 个圆(或者$p-1$ 条简单闭曲线) 和$q-p+1$ 条线段(或弧) 构成　得到奥凯达图形的方法是: 这$p-1$ 个圆对应于(1) 式中矩阵的行, 分别记为$J_1J_2\cdots J_{p-1}$, 而$q-p+1$ 条线段对应于(1) 的矩阵Q_{f11}的列, 分别记为$I_1I_2\cdots I_{q-p+1}$. 它们满足以下条件

1) 没有任何两个圆是相交的, 但允许互相包含;

2) 没有线段 I_k 的端点落在圆 J_h 的边界上 $(k=1,2,\cdots,q-p+1,h=1,2,\cdots,p-1)$;

3) 如果(1)式中矩阵的 (h,k) 项位置上的元素是1, 则圆 J_h 与线段 I_k 恰好交于一点(穿过不是相切); 如果(1)式中矩阵的 (h,k) 项位置上的元素是0, 则圆 J_h 与线段 I_k 不相交;

4) 每条线段至少与一个圆相交, 两条线段允许互相交叉

例5: 求下面矩阵的奥凯达图形

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

根据上面的要求, 用五个圆(1) (2) (3) (4) (5)代表矩阵中的五行, 用十条线段1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 代表前十列, 可得图5.

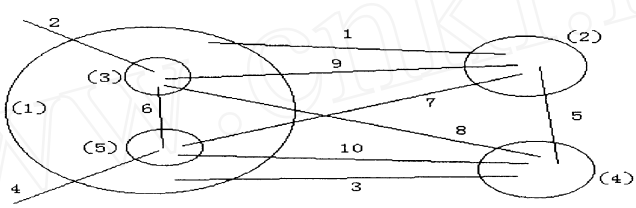

图5

结论3 基本割集矩阵的奥凯达图形不是唯一的

以例(5)中的基本割集矩阵为例 由图5的奥凯达图形可以得到其它奥凯达图形

方法1: 将圆(2)或圆(4)放大, 套在其余圆上 如图6所示 (圆(2)放大)

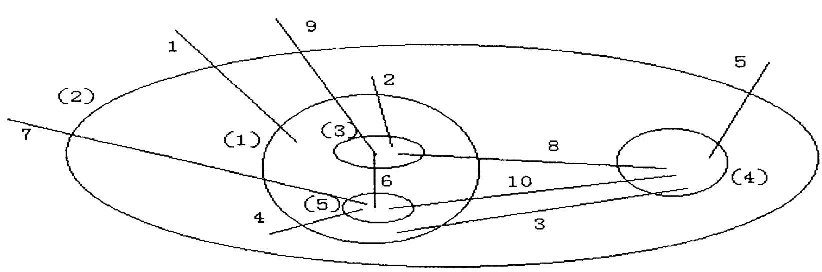

图6

方法2: 将图5中的圆(1)从圆(3) (5)上脱下来, 套在圆(2) (4)上从而得到图7.

方法3: 将图5中的圆(1)从圆(3) (5)上脱下来套在圆(2) (4)上后, 再把圆(3)或者圆(5)放大套在其余圆上 如图8. (圆(3)放大)

结论4 同一个基本割集矩阵的不同的奥凯达图形得到的图是同构的

由于 $p-1$ 条简单闭曲线 $J_1J_2\cdots J_{p-1}$ 把平面分成 p 个区域 $R_0R_1\cdots R_{p-1}$, 每个 J_k 恰好是其中两个区域的界, 我们记 R_0 为所有简单闭曲线的外部, 而 $R_h(h=0,1,2,\cdots,p-1)$ 是以 J_h 为外界的区域 以给定矩阵的奥凯达图形为基础, 构造以所给矩阵为基本割集矩阵的图的方法是: 对应于区域 $R_h(h=0,1,2,\cdots,p-1)$, 取顶点 $v_n(n=0,1,2,\cdots,p-1)$, 按以下规则作出 q 条边:

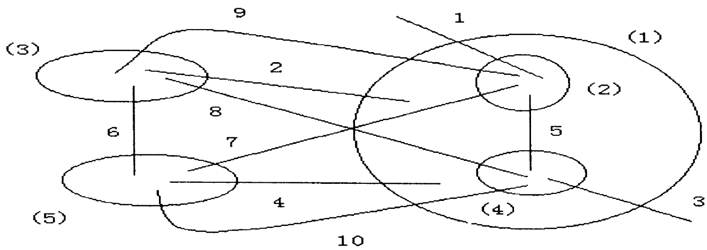

图 7

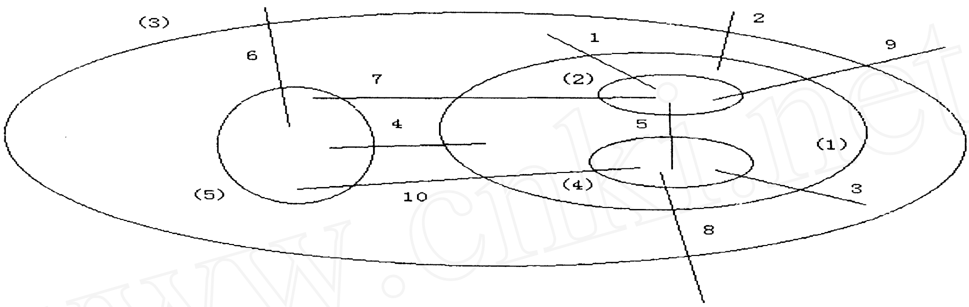

图 8

1) 对每个 $J_h (h=0, 1, 2, \cdots, p-1)$, 若 J_h 是 R_iR_j 的界, 则取一条边 e_h 连接 v_iv_j.

2) 对每个 $I_k (k=0, 1, 2, \cdots, q-p+1)$ 它的两个端点在不同的区域中, 如一端在 R_s 中另一端在 R_t 中 $(s\neq t)$, 我们就取一条边 e_k 连接 v_sv_t.

例 6: 已知矩阵 $\begin{pmatrix} 1001000 \\ 1100100 \\ 0110010 \\ 0010001 \end{pmatrix}$ 的奥凯达图形可以为图 9 的三种情况, 分别求图

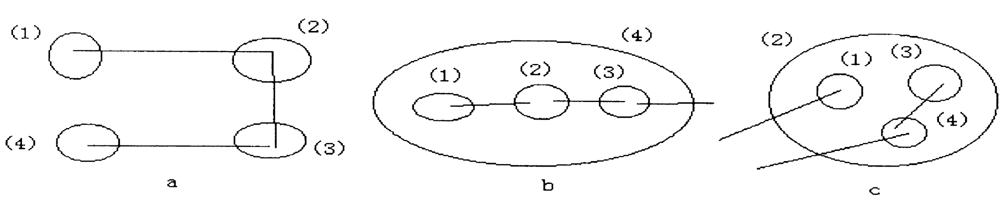

图 9

得到的图形分别如图 10 所示:

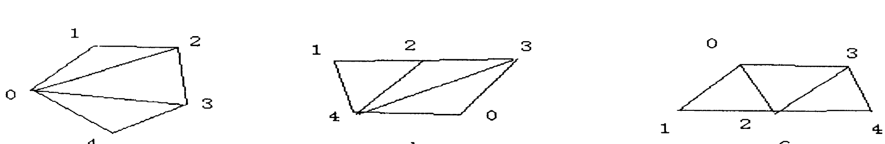

图 10

同理, 由图 5, 6, 7, 8 的奥凯达图形可以得到的图是六点完全图 K_6.

4 基本圈矩阵的可实现性

由于图的基本圈矩阵都可以写为

$$B_f = [I \quad B_{f_{12}}] \tag{2}$$

而由式(1)知基本割集矩阵

$$Q_f = [Q_{f_{11}} \quad I]$$

由于 $Q_{f_{11}} = B^T_{f_{12}}$，所以 $B_f = [Q \quad Q^T_{f_{11}}]$. 因此, 可以得到

结论5 基本圈矩阵的可实现性可以通过基本割集矩阵来实现

参考文献:

[1] 王朝瑞. 图论[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1997. 83—117.

[2] Béla Bollobás. Modern Graph theory[M]. 北京: 科学出版社, 2001. 3—11, 262—274.

[3] 王树禾. 图论[M]. 北京: 科学出版社, 2004. 184—187.

[4] 施劲松. (0, 1)实对称矩阵特征值的图论意义[J]. 高等数学研究, 2003, 6(1): 21—23.

[5] 卢建立. 穿脱原理及其在图论问题中的应用[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2005, 33(1): 22—24.

The Realizing of Matrix in Graph Theory

LU Jian-li, YANG Ming-bo

(Collige of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China)

Abstract: Through proving the realizing of Incidence matrix, Adjacent matrix, Fundamental cut-set matrix, Fundamental cycle matrix, this passage put forward a conclusion that the al-Qaeda graph of the same Fundamental cut- set matrix is not the only and the graph of these al-Qaeda graph are Isomorphism each other. The passage also point out the realizing of Fundamental cycle matrix may be solved by Fundamental cut-set matrix realizing.

Keywords: incidence matrix; adjacent matrix; fundamental cut-set matrix; fundamental cycle matrix; al-qaeda graph; realizing