

# 基于线抽样的可靠性灵敏度分析方法<sup>1)</sup>

宋述芳<sup>2)</sup> 吕震宙<sup>3)</sup> 傅 霖

(西北工业大学航空学院, 西安 710072)

**摘要** 提出了一种基于线抽样的可靠性灵敏度分析方法. 线抽样可靠性分析中, 结构失效概率  $P_f$  是由每个抽样样本对应的失效概率  $P_{fj}$  的算术平均值来计算的, 由此可知  $P_f$  对基本变量分布参数  $\theta$  的灵敏度  $\partial P_f / \partial \theta$  可以表示为  $P_{fj}$  对  $\theta$  的偏导数  $\partial P_{fj} / \partial \theta$  的算术平均值, 而  $\partial P_{fj} / \partial \theta$  则可以很容易地由  $P_{fj}$  与基本变量分布参数  $\theta$  的解析关系求得.  $\partial P_{fj} / \partial \theta$  和  $\partial P_f / \partial \theta$  的计算公式被详细推导. 可靠性灵敏度分析的线抽样方法继承了线抽样法的优点, 诸如精度高、收敛快且适用于高维及多模式情况等. 这些优点由算例证实.

**关键词** 可靠性灵敏度, 线抽样, 重要方向, 失效概率, 分布参数

**中图分类号:** TB114.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2007)04-0564-07

## 引 言

由于可靠性灵敏度分析可以提供基本随机变量分布参数的变化引起的可靠性的变化率信息, 因而对可靠性设计具有重要指导作用. 但可靠性的度量指标 (失效概率) 是基本变量分布参数的高度非线性函数, 这给可靠性参数灵敏度分析带来了较大的困难. 目前已有的可靠性参数灵敏度分析方法主要有以下 3 种: 基于有限差分的灵敏度分析方法<sup>[1,2]</sup>, 基于一次二阶矩 (FOSM) 的灵敏度分析方法<sup>[1,2]</sup> 和基于失效概率积分的灵敏度分析方法<sup>[3,4]</sup>. 基于有限差分的可靠性灵敏度分析方法虽然概念简单易于实现, 但其步长较难确定, 不适合的步长可能带来错误的结果, 另外这种方法的重复计算工作量也非常大. 基于一次二阶矩的可靠性灵敏度分析方法对于线性极限状态方程且基本变量服从正态分布的情况可以求得可靠性灵敏度的精确解, 但它对极限状态方程的显式表达式有较大的依赖性. 此外, 基于一次二阶矩的可靠性灵敏度分析方法也较难推广到非线性程度大的极限状态方程和多模式系统的可靠性灵敏度分析. 基于失效概率积分的可靠性灵敏度分析方法利用失效概率的积分表达式将灵敏度分析转化为失效域上的数学期望, 从而可以通过数字模拟的方法实现可靠性灵敏度的求解, 这种方法的显著优点是利用 Monte-Carlo

模拟可以精确得出可靠性灵敏度分析结果, 并且不受极限状态方程的数量、非线性程度以及是否显式的影响<sup>[3]</sup>, 但基于 Monte-Carlo 直接模拟的可靠性灵敏度分析计算工作量在工程上不可接受. 基于自适应重要抽样的可靠性灵敏度分析虽然可以使问题的计算工作量有所下降, 但对于高维问题其计算工作量也很大. 线抽样方法作为一种针对高维小失效概率问题的高效可靠性分析方法, 其在失效概率计算中的优越性已在文献 [5,6] 中得到充分证明, 本文将在此基础上建立基于线抽样的可靠性灵敏度分析方法. 文中详细给出了所提方法的基本思想和实现步骤, 采用算例说明了所提方法的优越性.

## 1 线性极限状态方程正态变量情况下的可靠性灵敏度分析

为了便于理解, 本节先讨论线性极限状态方程正态变量情况下的可靠性灵敏度分析方法. 设所研究的问题包含基本随机变量  $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]$ , 其中  $y_i (i = 1, \dots, n)$  相互独立且服从正态分布, 即  $y_i \sim N(\mu_{y_i}, \sigma_{y_i}^2)$ ,  $\mu_{y_i}$  和  $\sigma_{y_i}^2$  分别为  $y_i$  的均值和方差, 极限状态函数  $g(\mathbf{y})$  是  $\mathbf{y}$  的线性函数, 即

$$g(\mathbf{y}) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i y_i \quad (1)$$

2006-06-22 收到第 1 稿, 2006-12-12 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10572117), 新世纪优秀人才支持计划 (NCET-05-0868) 资助项目.

2) E-mail: songshufangsf@mail.nwpu.edu.cn

3) E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

其中  $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为常数.

由式 (1) 可以求得  $g(y)$  的均值  $\mu_g$ , 方差  $\sigma_g^2$  与基本变量  $y_i$  的均值  $\mu_{y_i}$  和方差  $\sigma_{y_i}^2$  的关系如下

$$\mu_g = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{y_i} \quad (2)$$

$$\sigma_g^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{y_i}^2 \quad (3)$$

进一步可求得可靠度指标  $\beta$  和失效概率  $P_f$  如式 (4) 和式 (5) 所示

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{y_i}^2}} \quad (4)$$

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (5)$$

其中  $\Phi$  为标准正态分布函数.

可靠性灵敏度一般定义为失效概率对基本变量分布参数的偏导数, 因此由式 (2)~(5) 及复合函数求导法则, 可求得可靠性灵敏度如式 (6) 式和式 (7) 所示

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{y_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \mu_{y_i}} = -\frac{a_i}{\sigma_g \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \quad (6)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{y_i}} = \frac{\partial P_f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{y_i}} = \frac{a_i^2 \sigma_{y_i} \mu_g}{\sqrt{2\pi} \sigma_g^3} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \quad (7)$$

式 (6) 和式 (7) 可以精确给出线性极限状态方程正态变量情况下的可靠性灵敏度, 然而在大多数工程问题中的  $g(y)$  是非线性隐式的, 此时较难用上述式 (6) 和式 (7) 来直接求解可靠性灵敏度.

## 2 可靠性灵敏度分析的线抽样方法

### 2.1 基本思路

由于非正态相关随机变量可以转化为正态独立随机变量, 因此为描述简单起见, 本文将主要讨论相互独立正态变量情况的可靠性灵敏度分析.

可靠性灵敏度分析线抽样方法的基本思路是: 利用线抽样方法中失效概率  $P_f$  可以表达为标准正态空间内每个抽样样本对应的失效概率  $P_{fj}$  的算术平均值, 将求解  $P_f$  对基本变量分布参数的灵敏度转化为求  $P_{fj}$  对基本变量分布参数的灵敏度, 然后根据  $P_{fj}$  与基本变量分布参数的近似解析关系, 最终求得结构的可靠性灵敏度. 以下将详细给出基于线

抽样的单模式及多模式可靠性灵敏度分析方法的基本步骤.

### 2.2 基于线抽样的单模式可靠性灵敏度分析

设  $x = [x_1, \dots, x_n]$  为与相互独立正态向量  $y = [y_1, \dots, y_n]$  相对应的独立标准正态向量, 即  $y_i = \mu_{y_i} + \sigma_{y_i} x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). 从而原极限状态函数  $g(y)$  转化为标准正态空间的极限状态函数  $g(x)$ . 对于单个失效模式的情况, 失效概率则由式 (8) 表示

$$P_f = P\{g(x) < 0\} = \int \cdots \int_{g(x) < 0} f(x) dx \quad (8)$$

其中  $f(x)$  为标准正态随机向量  $x$  的联合概率密度函数.

为了高效地估计式 (8) 中的  $P_f$ , 并进行可靠性灵敏度分析, 可利用线抽样方法的原理按下列步骤求解.

#### 2.2.1 线抽样方法估算失效概率

##### 2.2.1.1 单位重要方向 $e_\alpha$ 的确定

由失效概率计算公式 (8) 可以看出, 失效域中概率密度函数  $f(x)$  最大点 (设计点), 对失效概率  $P_f$  的贡献最大, 文献 [6] 将标准正态空间中的坐标原点指向设计点的方向定义为重要方向  $\alpha$ . 将  $\alpha$  正则化, 得到单位重要方向  $e_\alpha$

$$e_\alpha = \alpha / \|\alpha\| \quad (9)$$

##### 2.2.1.2 抽样样本对应的失效概率 $P_{fj}$ 的估计

由基本变量的概率密度函数  $f(x)$  产生  $N$  个标准正态的样本点  $x_j (j = 1, \dots, N)$ , 则  $x_j$  对应的垂直于单位重要方向  $e_\alpha$  的向量  $x_j^\perp$  为

$$x_j^\perp = x_j - \langle e_\alpha, x_j \rangle e_\alpha \quad (10)$$

其中  $\langle e_\alpha, x_j \rangle$  表示  $e_\alpha$  与  $x_j$  的点乘积.

求得每个样本点  $x_j$  的对应向量  $x_j^\perp$  后, 即可由给定 3 个系数  $c_1, c_2$  和  $c_3$ , 得到与  $e_\alpha$  平行的直线  $l_j(c, e_\alpha)$  上的 3 个向量  $c_i e_\alpha + x_j^\perp (i = 1, 2, 3)$  及相应的极限状态函数值  $g(c_i e_\alpha + x_j^\perp)$ . 对这 3 个点进行二次插值, 就可以得到  $l_j(c, e_\alpha)$  与极限状态方程  $g(x) = 0$  的交点  $\tilde{x}_j$  及对应的系数  $\tilde{c}_j$ .

$$\tilde{x}_j = \tilde{c}_j e_\alpha + x_j^\perp \quad (11)$$

其中  $\tilde{c}_j$  为样本点  $\tilde{x}_j$  对应的可靠度指标. 由下式得

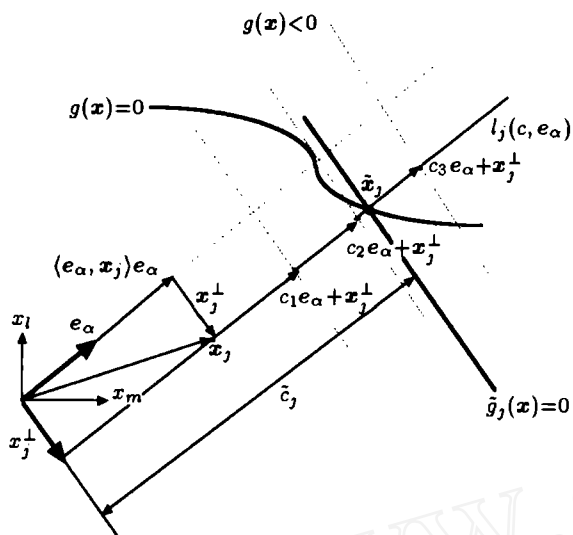


图 1 单个失效域的线抽样方法

Fig.1 Line sampling with single failure mode

到对应的失效概率  $P_{fj} (j = 1, \dots, N)$ .

$$P_{fj} = \Phi(-\tilde{c}_j) \quad (12)$$

### 2.2.1.3 单模式结构失效概率 $P_f$ 的估算

求得每个样本点对应的  $P_{fj}$  后, 可用  $P_{fj}$  的算术平均值来估算  $P_f$ , 即

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_{fj} \quad (13)$$

### 2.2.2 可靠性灵敏度分析

#### 2.2.2.1 $P_f$ 对分布参数 $\mu_{y_i}$ 和 $\sigma_{y_i}$ 的灵敏度

由式 (13) 两边分别对  $\mu_{y_i}$  和  $\sigma_{y_i}$  求偏导数, 可得到可靠性灵敏度  $\partial P_f / \partial \mu_{y_i}$  和  $\partial P_f / \partial \sigma_{y_i}$ .

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{y_i}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial P_{fj}}{\partial \mu_{y_i}}, \quad \frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{y_i}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial P_{fj}}{\partial \sigma_{y_i}} \quad (14)$$

#### 2.2.2.2 $P_{fj}$ 对分布参数 $\mu_{y_i}$ 和 $\sigma_{y_i}$ 的灵敏度

以  $\tilde{g}_j(\mathbf{x}) = 0$  表示过交点  $\tilde{\mathbf{x}}_j$  且垂直于单位重要方向  $\mathbf{e}_\alpha$  的超平面, 如图 1 所示. 则显然可由下式确定

$$\tilde{g}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_\alpha \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n e_{\alpha i} (\tilde{x}_{j,i} - x_i) = 0 \quad (15)$$

其中  $e_{\alpha i}$  和  $\tilde{x}_{j,i}$  分别表示  $\mathbf{e}_\alpha$  和  $\tilde{\mathbf{x}}_j$  的第  $i$  个分量.

由式 (12) 可知,  $P_{fj}$  等价于  $P\{\tilde{g}_j(\mathbf{x}) < 0\}$ , 因此, 可给出  $\tilde{c}_j$  与标准正态随机变量分布参数之间的解析关系.

$$\tilde{c}_j = \frac{\mu_{g_j}}{\sigma_{g_j}} = \frac{\sum_{i=1}^n e_{\alpha i} (\tilde{x}_{j,i} - \mu_{x_i})}{\left( \sum_{i=1}^n e_{\alpha i}^2 \sigma_{x_i}^2 \right)^{1/2}} \quad (16)$$

依据  $P_{fj}$  与  $\tilde{c}_j$ ,  $\mathbf{x}$  的分布参数及  $\mathbf{y}$  的分布参数的复合函数关系, 可求得  $\partial P_{fj} / \partial \mu_{y_i}$  和  $\partial P_{fj} / \partial \sigma_{y_i}$  ( $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, N$ ) 如式 (17) 和式 (18) 所示.

$$\frac{\partial P_{fj}}{\partial \mu_{y_i}} = \frac{\partial P_{fj}}{\partial \tilde{c}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mu_{x_i}} \cdot \frac{\partial \mu_{x_i}}{\partial \mu_{y_i}} \quad (17)$$

$$\frac{\partial P_{fj}}{\partial \sigma_{y_i}} = \frac{\partial P_{fj}}{\partial \tilde{c}_j} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \sigma_{x_i}} \cdot \frac{\partial \sigma_{x_i}}{\partial \sigma_{y_i}} \quad (18)$$

由式 (12) 知

$$\frac{\partial P_{fj}}{\partial \tilde{c}_j} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\tilde{c}_j^2}{2}\right) \quad (19)$$

由式 (16) 知

$$\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mu_{x_i}} = -\frac{e_{\alpha i}}{\left( \sum_{l=1}^n e_{\alpha l}^2 \sigma_{x_l}^2 \right)^{1/2}} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \sigma_{x_i}} = -\frac{e_{\alpha i} \sigma_{x_i} \sum_{l=1}^n e_{\alpha l} (\tilde{x}_{j,l} - \mu_{x_l})}{\left( \sum_{l=1}^n e_{\alpha l}^2 \sigma_{x_l}^2 \right)^{3/2}} \quad (21)$$

$\partial \mu_{x_i} / \partial \mu_{y_i}$  和  $\partial \sigma_{x_i} / \partial \sigma_{y_i}$  在文献 [4] 中证明为

$$\partial \mu_{x_i} / \partial \mu_{y_i} = 1 / \partial \sigma_{y_i}, \quad \partial \sigma_{x_i} / \partial \sigma_{y_i} = 1 / \partial \sigma_{y_i} \quad (22)$$

将式 (17)~式 (22) 代入式 (14) 可得单模式结构的可靠性灵敏度, 如式 (23) 和式 (24) 所示.

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{y_i}} = \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^N \frac{\exp(-\tilde{c}_j^2/2) \cdot e_{\alpha i}}{\sigma_{y_i} \left( \sum_{l=1}^n e_{\alpha l}^2 \sigma_{x_l}^2 \right)^{1/2}} \quad (23)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{y_i}} = \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^N \frac{\exp(-\tilde{c}_j^2/2) \cdot e_{\alpha i} \sigma_{x_i} \tilde{c}_j}{\sigma_{y_i} \left( \sum_{l=1}^n e_{\alpha l}^2 \sigma_{x_l}^2 \right)} \quad (24)$$

### 2.3 基于线抽样的多模式可靠性灵敏度分析

假设结构系统含有  $m$  个失效模式, 每个失效模式对应的极限状态函数和单位重要方向分别为  $g^{[i]}(\mathbf{x})$  和  $\mathbf{e}_\alpha^{[i]} (i = 1, \dots, m)$ , 相应的失效域为  $F_{[i]}$ .

#### 2.3.1 多个失效模式的失效域互不重叠时的可靠性灵敏度分析

当  $m$  个失效模式的失效域互不重叠时, 系统的失效概率  $P_f^{(s)}$  为每个失效模式对应的失效概率  $P_f^{[i]}$

之和, 即

$$P_f^{(s)} = \sum_{i=1}^m P_f^{[i]} \quad (25)$$

即当失效模式的失效域互不重叠时, 只要采用基于线抽样的单模式可靠性灵敏度分析方法求得  $\partial P_f^{[i]} / \partial \mu_{y_i}$  和  $\partial P_f^{[i]} / \partial \sigma_{y_i}$  后, 再利用关系  $\frac{\partial P_f^{(s)}}{\partial \mu_{y_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial P_f^{[i]}}{\partial \mu_{y_i}}$  和  $\frac{\partial P_f^{(s)}}{\partial \sigma_{y_i}} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial P_f^{[i]}}{\partial \sigma_{y_i}}$  即可求得多模式可靠性灵敏度分析结果。

### 2.3.2 多个失效模式的失效域互相重叠时的可靠性灵敏度分析

#### 2.3.2.1 互相重叠失效域向互不重叠失效域的转换

为叙述方便起见, 以两个失效模式失效域互相重叠的情况为例进行说明。设两失效域  $F_{[k]} = \{x : g^{[k]}(x) < 0\}$  与  $F_{[i]} = \{x : g^{[i]}(x) < 0\}$  具有重叠的区域, 如图 2 所示, 此时可用两失效模式的重要方向  $e_{\alpha}^{[k]}$  和  $e_{\alpha}^{[i]}$  的角平分线将  $F_{[k]}$  和  $F_{[i]}$  组成的串联失效域划分为互不重叠的部分  $\bar{F}_{[k]}$  和  $\bar{F}_{[i]}$ , 如图 3 所示。

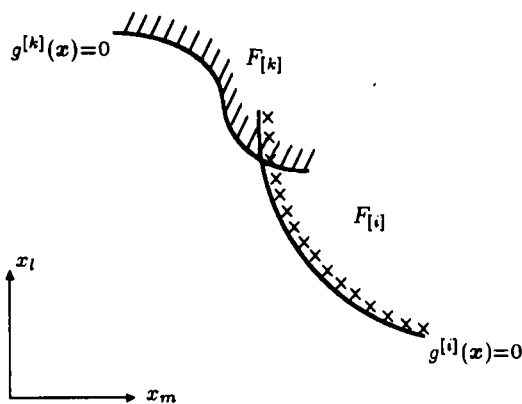


图 2 互相重叠的失效域  $F_{[k]}$  和  $F_{[i]}$

Fig.2  $F_{[k]}$  and  $F_{[i]}$  with overlapping regions

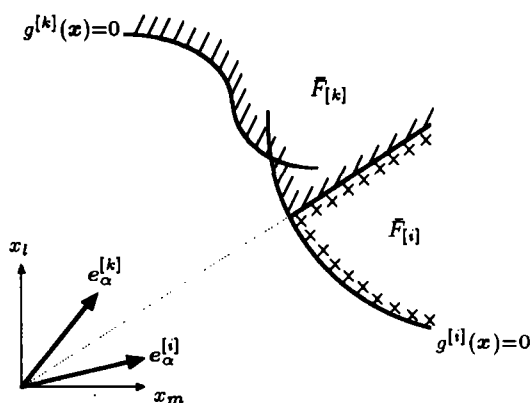


图 3 互不重叠的失效域  $\bar{F}_{[k]}$  和  $\bar{F}_{[i]}$

Fig.3  $\bar{F}_{[k]}$  and  $\bar{F}_{[i]}$  without overlapping regions

#### 2.3.2.2 不重叠失效域 $\bar{F}_{[k]}$ 上的失效概率 $\bar{P}_f^{[k]}$ 的估计

采用线抽样方法求解失效域  $\bar{F}_{[k]}$  上的失效概率  $\bar{P}_f^{[k]}$  与 2.2 节中求解单模式失效概率的线抽样方法稍有区别。  $\bar{F}_{[k]}$  的边界是由分段连续的函数组成的, 因此在求解  $\bar{P}_f^{[k]}$  的线抽样方法中应考虑  $\bar{F}_{[k]}$  区域边界极限状态方程的分段连续特性。

按基本变量的联合概率密度函数产生  $N$  个样本点  $x_j (j = 1, \dots, N)$ , 可以按照与单模式线抽样类似的方法, 沿  $F_{[k]}$  的重要方向  $e_{\alpha}^{[k]}$ , 求得与每个样本点  $x_j$  对应的极限状态方程上的样本点  $\tilde{x}_j^{[k]}$  及相应的可靠度指标  $c_j^{[k]}$ 。若  $\tilde{x}_j^{[k]} \in \bar{F}_{[k]} (j = 1, \dots, N)$ , 则  $\bar{P}_f^{[k]}$  可用下式求得

$$\bar{P}_f^{[k]} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(-c_j^{[k]}) \quad (26)$$

若  $\tilde{x}_j^{[k]} \notin \bar{F}_{[k]}$ , 则该点对应的可靠度指标需在  $c_j^{[k]}$  的基础上加以修正, 以  $\bar{c}_j^{[k]}$  表示修正的可靠度指标,  $\bar{c}_j^{[k]}$  可采用式 (27) 来计算 [5], 见图 4。

$$\bar{c}_j^{[k]} = c_j^{[k]} + \text{sign}(c_j^{[k]}) \frac{r^{[k]}(\tilde{x}_j^{[k]}) - r^{[i]}(\tilde{x}_j^{[k]})}{\sqrt{1 - (e_{\alpha}^{[k]}, e_{\alpha}^{[i]})^2}} \quad (27)$$

其中  $r^{[k]}(\tilde{x}_j^{[k]})$  和  $r^{[i]}(\tilde{x}_j^{[k]})$  分别表示极限状态方程上的样本点  $\tilde{x}_j^{[k]}$  到  $e_{\alpha}^{[k]}$  和  $e_{\alpha}^{[i]}$  的垂直距离。当以  $x$  表

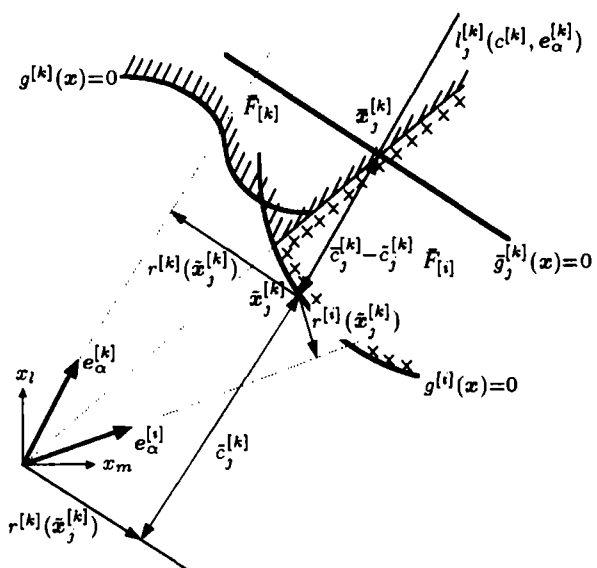


图 4 多个失效域的线抽样方法

Fig.4 Line sampling with multiple failure modes

示极限状态方程上的样本点时,  $r^{[k]}(\mathbf{x})$  可采用下式计算

$$r^{[k]}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \langle \mathbf{e}_\alpha^{[k]}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{e}_\alpha^{[k]}\| \quad (28)$$

由于是以  $\mathbf{e}_\alpha^{[k]}$  和  $\mathbf{e}_\alpha^{[i]}$  的角平分线来划分不重叠失效域  $\bar{F}_{[k]}$  和  $\bar{F}_{[i]}$  的, 因此,  $\mathbf{x} \in \bar{F}_{[k]}$  与  $\mathbf{x}$  到  $\mathbf{e}_\alpha^{[k]}$  的垂直距离  $r^{[k]}(\mathbf{x})$  最短等价, 即

$$\mathbf{x} \in \bar{F}_{[k]} : r^{[k]}(\mathbf{x}) \leq r^{[i]}(\mathbf{x}), \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (29)$$

利用修正后的可靠度指标  $\bar{c}_j^{[k]}$ , 可以求得  $\bar{F}_{[k]}$  区域的修正样本点  $\bar{\mathbf{x}}_j^{[k]}$ . 为表达统一起见, 将  $\bar{\mathbf{x}}_j^{[k]} \in \bar{F}_{[k]}$  时的可靠度指标和极限状态方程上的样本点也记为  $\bar{c}_j^{[k]}$  和  $\bar{\mathbf{x}}_j^{[k]}$ , 则  $\bar{F}_{[k]}$  区域的失效概率  $\bar{P}_f^{[k]}$  可采用式 (30) 计算

$$\bar{P}_f^{[k]} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(-\bar{c}_j^{[k]}) \quad (30)$$

而系统的失效概率  $P_f^{(s)}$  为

$$P_f^{(s)} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \Phi(-\bar{c}_j^{[k]}) \quad (31)$$

同 2.2 节单模式情况类似,  $\bar{c}_j^{[k]}$  实际上等价于过点  $\bar{\mathbf{x}}_j^{[k]}$  且垂直于  $\mathbf{e}_\alpha^{[k]}$  的超平面  $\bar{g}_j^{[k]}(\mathbf{x}) = 0$  的可靠度指标, 而超平面  $\bar{g}_j^{[k]}(\mathbf{x}) = 0$  的可靠度指标与基本随机变量  $\mathbf{x}$  的分布参数之间存在解析关系, 以此可以建立  $\bar{c}_j^{[k]}$  与标准正态空间基本随机变量分布参数的解析关系.

### 2.3.2.3 多模式系统的可靠性灵敏度分析

由式 (31) 以及 2.2 节类似的方法, 可推得  $P_f^{(s)}$  对基本变量  $y$  的分布参数  $\mu_{y_i}$  和  $\sigma_{y_i}$  的灵敏度.

$$\frac{\partial P_f^{(s)}}{\partial \mu_{y_i}} = \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \frac{\exp(-[\bar{c}_j^{[k]}]^2/2) \cdot \mathbf{e}_{\alpha i}^{[k]}}{\sigma_{y_i} \left( \sum_{l=1}^n (\mathbf{e}_{\alpha l}^{[k]})^2 \sigma_{x_l}^2 \right)^{1/2}} \quad (32)$$

$$\frac{\partial P_f^{(s)}}{\partial \sigma_{y_i}} = \frac{1}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^N \frac{\exp(-[\bar{c}_j^{[k]}]^2/2) (\mathbf{e}_{\alpha i}^{[k]})^2 \sigma_{x_i} \bar{c}_j^{[k]}}{\sigma_{y_i} \left( \sum_{l=1}^n (\mathbf{e}_{\alpha l}^{[k]})^2 \sigma_{x_l}^2 \right)} \quad (33)$$

## 3 算例

本节采用算例验证本文方法的效率和精度, 算例结果中, 文献 [3] 方法可看作精确解, 而基于一次二阶矩可靠性灵敏度分析方法 (记为 FOSM method) 的结果只能反映单模式情况下的线性极限状态函数的可靠性灵敏度.

**算例 1**  $g(\mathbf{x}) = (n + b\sigma\sqrt{n}) - \sum_{i=1}^n x_i$  其中随机变

量  $x_i$  服从均值  $\mu = 1$ , 标准差  $\sigma = 0.2$  的对数正态分布. 当  $n$  趋于无穷大时,  $\sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow{L} N(n, n\sigma^2)$  (渐进分布为均值为  $n$ , 标准差为  $\sqrt{n}\sigma$  的正态分布), 故失效概率可以表示为  $\Phi(-b)$ . 取  $n = 2000$ ,  $b = 3.0$  的可靠性灵敏度分析结果列于表 1.

**算例 2** 串联系统  $g(\mathbf{x}) = \min(g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}))$

$$g_1(\mathbf{x}) = c - 1 - x_2 + \exp\left(\frac{x_1^2}{10}\right) + \left(\frac{x_1}{5}\right)^4$$

$$g_2(\mathbf{x}) = \frac{c^2}{2} - x_1 x_2$$

其中, 随机变量  $x_1, x_2 \sim N(0, 1)$ . 取  $c = 3.0$  和  $c = 4.0$  的可靠性灵敏度分析结果分别列于表 2.

表 1 算例 1 的可靠性灵敏度计算结果

Table 1 Reliability sensitivity results of example 1

	$\partial P_f / \partial \mu_x$	$\partial P_f / \partial \sigma_x$	$P_f$	Sampling number
FOSM method	0.000 513 1	$-6.363 4 \times 10^{-5}$	$1.348 7 \times 10^{-3}$	—
method in Ref.[3]	0.000 512 2	$-6.423 9 \times 10^{-5}$	$1.351 2 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^6$
the presented method	0.000 522 1	$-6.515 6 \times 10^{-5}$	$1.388 9 \times 10^{-3}$	1 500

表 2 算例 2 的可靠性灵敏度计算结果

Table 2 Reliability sensitivity results of example 2

		$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{x_1}$	$\partial P_f^{(s)} / \partial \mu_{x_2}$	$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{x_1}$	$\partial P_f^{(s)} / \partial \sigma_{x_2}$	$P_f^{(s)}$	Sampling number
$c = 3.0$	method in Ref.[3]	0.001 747	0.007 311	0.004 895	0.019 35	0.002 533	$8 \times 10^6$
	the presented method	0.001 765	0.007 296	0.004 734	0.019 44	0.002 514	2 000
$c = 4.0$	method in Ref.[3]	$5.995 \times 10^{-5}$	$2.594 \times 10^{-4}$	$2.095 \times 10^{-4}$	$9.333 \times 10^{-4}$	$6.895 \times 10^{-5}$	$10^8$
	the presented method	$5.957 \times 10^{-5}$	$2.558 \times 10^{-4}$	$2.009 \times 10^{-4}$	$9.375 \times 10^{-4}$	$6.891 \times 10^{-5}$	2 000

**算例 3** 基于材料的蠕变和疲劳试验数据, 文献 [7] 在线性损伤累积准则基础上建立了非线性蠕变疲劳失效模型, 定义非线性极限状态函数为

$$g(N_c, N_f, n_c, n_f, \theta_1, \theta_2) = 2 - e^{\theta_1 D_c} + \frac{e^{\theta_1} - 2}{e^{-\theta_2} - 1} (e^{-\theta_2 D_c} - 1) - D_f \quad (34)$$

其中  $\theta_1$  和  $\theta_2$  是从试验数据中得到的两个参数,  $N_c$  与  $N_f$  分别为蠕变和疲劳寿命,  $n_c$  和  $n_f$  分别为蠕变和疲劳载荷作用循环数.  $D_c = n_c/N_c$ ,  $D_f = n_f/N_f$ . 基本随机变量  $N_c, N_f, n_c, n_f$  均服从对数正态分布,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  服从正态分布. 基本随机变量的分布参数如表 3 所示, 可靠性灵敏度分析结果见表 4.

表 3 算例 3 的基本随机变量的分布参数

Table 3 The distribution parameters and forms of the basic random variables

Basic variable	Mean	Coefficient of variation	Basic variable	Mean	Coefficient of variation
$N_c$	5 490	0.20	$n_f$	4 000	0.20
$N_f$	17 100	0.20	$\theta_1$	0.42	0.20
$n_c$	549	0.20	$\theta_2$	6.0	0.20

表 4 算例 3 的可靠性灵敏度计算结果

Table 4 Reliability sensitivity results of example 3

	$\partial P_f / \partial \mu_{N_c}$	$\partial P_f / \partial \mu_{N_f}$	$\partial P_f / \partial \mu_{n_c}$	$\partial P_f / \partial \mu_{n_f}$	$\partial P_f / \partial \mu_{\theta_1}$	$\partial P_f / \partial \mu_{\theta_2}$	$P_f$
FOSM method	$-1.763 \times 10^{-7}$	$-1.238 \times 10^{-7}$	$1.162 \times 10^{-6}$	$2.327 \times 10^{-7}$	-0.002 035	$9.005 \times 10^{-5}$	0.000 130 3
method in Ref.[3]	$-1.841 \times 10^{-7}$	$-1.375 \times 10^{-7}$	$1.233 \times 10^{-6}$	$2.514 \times 10^{-7}$	-0.002 222	$9.509 \times 10^{-5}$	0.000 143 7
the presented method	$-1.830 \times 10^{-7}$	$-1.353 \times 10^{-7}$	$1.248 \times 10^{-6}$	$2.395 \times 10^{-7}$	-0.002 232	$9.582 \times 10^{-5}$	0.000 146 2
	$\partial P_f / \partial \sigma_{N_c}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{N_f}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{n_c}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{n_f}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{\theta_1}$	$\partial P_f / \partial \sigma_{\theta_2}$	Sampling number
FOSM method	$1.776 \times 10^{-7}$	$1.902 \times 10^{-7}$	$1.238 \times 10^{-6}$	$6.852 \times 10^{-7}$	0.002 502	$6.999 \times 10^{-5}$	—
method in Ref.[3]	$1.884 \times 10^{-7}$	$2.156 \times 10^{-7}$	$1.418 \times 10^{-6}$	$7.537 \times 10^{-7}$	0.002 742	$6.106 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^7$
the presented method	$1.836 \times 10^{-7}$	$2.237 \times 10^{-7}$	$1.485 \times 10^{-6}$	$7.355 \times 10^{-7}$	0.002 759	$6.182 \times 10^{-5}$	2 000

从所列算例的结果表 1, 表 2 和表 4 可以看出, 本文方法的计算结果与文献 [3] 的近似精确解是一致的, 而且计算工作量比文献 [3] 小很多, 这种在效率上的优势在高维、小失效概率问题上表现得更为明显. 此外, 本文方法不仅适用于单个失效模式的情况 (算例 1 和算例 3), 还适用于多个失效模式的情况 (算例 2). 对于含有非正态随机变量的结构系统和高维问题, 本文方法也是适用的.

#### 4 结 论

本文提出了一种基于线抽样的可靠性灵敏度分析方法, 给出其实现的原理与步骤, 并通过算例验证其精度与效率. 本文方法不仅适用于单模式的情况, 对于多模式的情况, 尤其适用于高维、小失效概率的情况. 由于本文方法不依赖于极限状态方程的显式表达式, 因此在工程上将具有十分广泛的应用范围. 此外, 对于含有非正态随机变量的结构系统, 还可以先将非正态随机变量转化为标准正态随机变量后, 再运用本文方法求解其可靠性灵敏度.

#### 参 考 文 献

- 1 Melchers RE, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability. *Computers and Structures*, 2004, 82: 55~61
- 2 Ahammed M, Melchers RE. Gradient and parameter sensitivity estimation for systems evaluated using Monte Carlo analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91: 594~601
- 3 Wu YT. Computational methods for efficient structural reliability and reliability sensitivity analysis. *AIAA Journal*, 1994, 32(8): 1717~1723
- 4 Wu YT, Sitakanta M. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measures. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91: 634~647
- 5 Schuller GI, Pradlwarter HJ, Koutsourelakis PS. A comparative study of reliability estimation procedures for high dimension. *Proceedings of 16th ASCE Engineering Mechanics Conference*, University of Washington, Seattle, USA, 2003, paper777
- 6 Schuller GI, Pradlwarter HJ, Koutsourelakis PS. A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimension. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19: 463~474
- 7 Mao H, Mahadevan S. Reliability analysis of creep-fatigue failure. *International Journal of Fatigue*, 2000, 22: 789~797

RELIABILITY SENSITIVITY ALGORITHM BASED ON LINE SAMPLING<sup>1)</sup>Song Shufang<sup>2)</sup> Lu Zhenzhou<sup>3)</sup> Fu Lin

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** In this paper, reliability sensitivity algorithm based on line sampling is presented. In the line sampling for structural reliability analysis, the failure probability  $P_f$  of structure is calculated by averaging the failure probability  $P_{fj}(j = 1, \dots, N)$  corresponding to each simulated sample. From  $P_f$  in the line sampling, the reliability sensitivity of  $P_f$  with respect to the distribution parameter  $\theta$ , i.e.  $\partial P_f / \partial \theta$ , can be calculated by averaging  $\partial P_{fj} / \partial \theta$ , and  $\partial P_{fj} / \partial \theta$  can be obtained by using the analytical relationship between  $P_{fj}$  and  $\theta$ . The expressions of  $\partial P_{fj} / \partial \theta$  and  $\partial P_f / \partial \theta$  are derived in detail. With the use of the line sampling, reliability sensitivity algorithm enjoys the advantages of the line sampling, such as high precision, high efficiency and wide applicability in high dimensions and multiple failure modes. Examples are used to show the advantages of the presented reliability sensitivity algorithm.

**Key words** reliability sensitivity, line sampling, the important direction, failure probability, distribution parameter

---

Received 22 June 2006, revised 12 December 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572117) and the Program for New Century Excellent Talents in University (NCET-05-0868).

2) E-mail: songshufangsf@mail.nwpu.edu.cn

3) E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn