基于重要抽样马尔可夫链模拟的可靠性参数灵敏度分析方法°

马 超, 吕震宙, 傅 霖

(西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 针对重要抽样法求解失效概率的问题, 提出了一种基于重要抽样马尔可夫链模拟的快速可靠性参数灵敏度分析方法。该方法首先采用Metropolis准则和马尔可夫链模拟, 将重要抽样法抽取的落入失效域中的样本点转化为条件样本点, 这些条件样本点是落在失效域中的基本变量的实现, 它们服从失效域条件下基本变量的概率分布, 利用这些样本点替代Monte Carlo法抽取的条件样本点, 可以通过加权回归分析快速得到隐式极限状态方程的近似, 进而得到可靠性灵敏度。所提方法的显著优点是效率高, 它只要在重要抽样法计算失效概率的结果中增加非常小的工作量, 即可以快速得到可靠性参数灵敏度, 算例结果充分说明所提方法的效率和合理性。

关 键 词: 可靠性, 灵敏度分析, 马尔可夫链模拟, 重要抽样

中图分类号: TB114.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-2758(2007)01-0051-05

可靠性参数灵敏度体现了基本设计变量的分布参数对失效概率的影响程度, 可为可靠性设计提供重要信息。计算可靠性参数灵敏度主要有解析法[1,2]和数值法[3,4]。以文献[1,2]为代表的一次二阶矩灵敏度分析的解析法不适合隐式极限状态方程和极限状态方程为高度非线性情况。以文献[3,4]为代表的Monte Carlo数字模拟法不适合高维小失效概率问题。对于高维小失效概率的计算, 较多采用重要抽样法, 然而按重要抽样密度函数 $h(\mathrm{x})$ 产生的样本不服从原始基本变量的概率密度函数 $f(\mathrm{x})$, 不能直接用来统计分析。本文针对这种情况, 提出了一种基于重要抽样马尔可夫链模拟的可靠性参数灵敏度分析方法。以重要抽样马尔可夫链模拟得到的服从条件概率密度函数 $f(\mathrm{x}|F)$ 的条件样本点(服从 $f(\mathrm{x}|F)$ 的样本点实质上是基本变量落在失效域中的观察值)替代Monte Carlo抽取的条件样本点, 可以较大幅度地提高抽样的计算效率, 而后采用加权线性回归来得到极限状态方程的线性近似, 则充分体现设计点对失效概率的较大贡献。

1 可靠性灵敏度分析的基本思想

设所研究问题包含的基本随机向量 $\mathrm{x}=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的联合概率密度函数为 $f(\mathrm{x})$, 由于非正态相关变量的情况可以方便地转化成正态独立的情况, 因此本文主要讨论正态变量且基本变量相互独立的情况。设 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相互独立且服从正态分布, $\mu=[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n]$ 和 $\sigma=[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n]$ 分别为 x 的均值和标准差向量。结构的极限状态函数为 $g(\mathrm{x})$, 此时结构的失效域以 $F=\{g(\mathrm{x})\leq 0\}$ 表示, 失效概率则为 $P_F=P\{F\}=P\{g(\mathrm{x})\leq 0\}$。结构的可靠性参数灵敏度分析即是求 P_F 对 μ_i 和 σ_i 的偏导数。当 $g(\mathrm{x})$ 为基本变量的线性函数时, 即

$$g(\mathrm{x})=a_0+\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \tag{1}$$

则可以由基本变量的分布参数求得功能函数的均值 μ_g 和标准差 σ_g 如(2)式所示, 并进而由一次二阶矩法求得相应的可靠度指标 β 和失效概率 P_F 如(3)式所示。

° 收稿日期: 2006-04-10 基金项目: 国家自然科学基金(10572117)与新世纪优秀人才培养计划联合资助
作者简介: 马 超(1981-), 西北工业大学硕士生, 主要从事结构可靠性的研究。

$$\mu_g = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i \quad \sigma_g = \left[\sum_{i=1}^{n}(a_i\sigma_i)^2\right]^{1/2} \tag{2}$$

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sigma_g} \quad P_F = \Phi(-\beta) \tag{3}$$

根据复合函数求导法则,可求得 $\partial P_F/\partial\mu_i$ 和 $\partial P_F/\partial\sigma_i$ 如下(4)式和(5)式所示。

$$\frac{\partial P_F}{\partial\mu_i} = \frac{\partial P_F}{\partial\beta}\times\frac{\partial\beta}{\partial\mu_i} = -\frac{a_i}{\sqrt{2\pi}\sigma_g}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \tag{4}$$

$$\frac{\partial P_F}{\partial\sigma_i} = \frac{\partial P_F}{\partial\beta}\times\frac{\partial\beta}{\partial\sigma_i} = \frac{a_i^2\sigma_i\mu_g}{\sqrt{2\pi}\sigma_g^3}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_g}{\sigma_g}\right)^2\right] \tag{5}$$

对于一般的工程可靠性分析问题, $g(\mathrm{x})$ 为 x 的隐式非线性函数,此时不能直接采用上述方法求解可靠性灵敏度。

文献[4]针对Monte Carlo 法计算失效概率的情况,提出了一种利用失效域中的条件样本点进行线性回归分析来得到 $g(\mathrm{x})$ 的线性近似 $\overline{g}(\mathrm{x})$,然后再采用上述方法进行可靠性灵敏度分析的近似方法。落入失效域中的条件样本点服从条件概率密度分布 $f(\mathrm{x}|F)$, $f(\mathrm{x}|F)$ 与 $f(\mathrm{x})$ 之间存在以下关系

$$f(\mathrm{x}|F) = I_F(\mathrm{x})f(\mathrm{x})/P_F \tag{6}$$

式中, $I_F(\mathrm{x})$ 为指示函数,当 $\mathrm{x}\in F$ 时, $I_F(\mathrm{x}) = 1$,否则 $I_F(\mathrm{x}) = 0$。

对于失效概率很小的可靠性分析问题,采用Monte Carlo 法来产生服从条件概率分布 $f(\mathrm{x}|F)$ 的条件样本点的效率是很低的,在这种情况下多采用重要抽样法来计算失效概率。然而按重要抽样密度函数 $h(\mathrm{x})$ 产生的失效域的条件样本点的分布为 $h(\mathrm{x}|F) = I_F(\mathrm{x})h(\mathrm{x})/P_F$,它们不服从分布密度 $f(\mathrm{x}|F)$,因而不能直接由这些重要抽样的条件样本点通过线性回归分析来得到隐式极限状态方程的近似表达式。若能将服从 $h(\mathrm{x}|F)$ 的条件样本点转化为近似服从 $f(\mathrm{x}|F)$ 分布的条件样本点,则可以很容易地求得隐式极限状态方程的近似,并进而求得可靠性灵敏度。

2 h(x|F)条件样本点向 f(x|F)条件样本点的转化方法

重要抽样法是通过构造重要抽样密度函数将(7)式所示的失效概率计算公式等价地变换成(9)式,而相应的失效概率估计值 $\overline{P_F}$ 也由(8)式转化为(10)式来求得。

$$P_F = \int\cdots\int f(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int\cdots\int I_F(\mathrm{x})f(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{E}\{I_F(\mathrm{x})\} \tag{7}$$

$$\overline{P_F} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I_F(\mathrm{x}_i^{(f)}) \tag{8}$$

式中, $\mathrm{x}_i^{(f)}$ 为从 $f(\mathrm{x})$ 中抽取的 N 个样本中的第 i 个。

$$P_F = \int\cdots\int I_F(\mathrm{x})f(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \int\cdots\int\frac{I_F(\mathrm{x})f(\mathrm{x})}{h(\mathrm{x})}h(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{E}\left\{\frac{I_F(\mathrm{x})f(\mathrm{x})}{h(\mathrm{x})}\right\} \tag{9}$$

$$\overline{P_F} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} I_F(\mathrm{x}_j^{(h)})\frac{f(\mathrm{x}_j^{(h)})}{h(\mathrm{x}_j^{(h)})} \tag{10}$$

式中, $h(\mathrm{x})$ 是构造重要抽样概率密度函数, $\mathrm{x}_j^{(h)}$ 是按 $h(\mathrm{x})$ 抽取的 M 个样本中的第 j 个。

显然如果构造的重要抽样函数 $h(\mathrm{x}) = I_F(\mathrm{x})f(\mathrm{x})/P_F$,则可使得(10)式所求得的估计值的方差为零。然而由于 P_F 未知,因此不可能得到最优的重要抽样密度函数。若将重要抽样获得的 $h(\mathrm{x}|F)$ 条件样本点转化为 $f(\mathrm{x}|F)$ 条件样本点,则间接实现了最优的重要抽样密度函数选取。马尔可夫链模拟为这种转换提供了一种可行的方法[5],以下将给出这种转换的具体步骤。

(1) 记由 $h(\mathrm{x})$ 抽取的 M 个样本点中落入失效域的 M_F 个条件样本点为

$$\mathrm{x}_k^{(h)}\ (k = 1, 2, \cdots, M_F)$$

(2) 取马尔可夫链的初始点 $\mathrm{z}_1 = \mathrm{x}_1^{(h)}$,并由下式计算比值 $r(\mathrm{z}_k, \mathrm{z}_{k+1})\ (k = 1, 2, \cdots, M_F - 1)$;

$$r(\mathrm{z}_k, \mathrm{z}_{k+1}) = \frac{f(\mathrm{x}_{k+1}^{(h)})h(\mathrm{z}_k)}{f(\mathrm{z}_k)h(\mathrm{x}_{k+1}^{(h)})}\quad (k = 1, 2, \cdots, M_F - 1)$$

(3) 根据Metropolis-Hasting 准则确定马尔可夫链的下一个状态 $\mathrm{z}_{k+1}(k = 1, 2, \cdots, M_F - 1)$;

$$\mathrm{z}_{k+1} = \begin{cases}\mathrm{x}_{k+1}^{(h)} & \min(1, r) > \mathrm{Random}[0, 1]\\ \mathrm{z}_k & \min(1, r)\le\mathrm{Random}[0, 1]\end{cases}\quad (k = 1, 2, \cdots, M_F - 1)$$

(4) 由 $\mathrm{z}_k(k = 1, 2, \cdots, M_F)$ 构成的重要抽样马尔可夫链样本即是近似服从条件概率密度分布 $f(\mathrm{x}|F)$ 的变量的实现,文献[5]给出了其证明。

由重要抽样马尔可夫链模拟获得 $f(\mathrm{x}|F)$ 的条件样本点后,即可由下节的方法求得可靠性灵敏度的计算结果。

3 加权线性回归近似极限状态方程

设由上节得到的的 $f(\mathrm{x}|F)$ 条件样本点 $\mathrm{z}_k =$

$[z_{k1}, z_{k2}, \cdots, z_{kn}]$ $(k = 1, 2, \cdots, M_F)$, 记 $\mathbf{z}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, M_F)$ 对应的极限状态函数值组成的列向量为 $\mathbf{y} = [g(\mathbf{z}_1), g(\mathbf{z}_2), \cdots, g(\mathbf{z}_{M_F})]^{\mathrm{T}}$。根据文献[4] 的方法, 可通过线性回归分析得到隐式极限状态函数 $g(\mathbf{x})$ 的线性近似 $\overline{g}(\mathbf{x})$ 如下

$$\overline{g}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{11}$$

记回归系数列向量 $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$ 它可通过回归样本点解线性方程组来求得。记回归样本点 $\mathbf{z}_k$ 组成的 $M_F \times (n+1)$ 组矩阵如下

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ 1 & z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_{M_F 1} & z_{M_F 2} & \cdots & z_{M_F n} \end{bmatrix}$$

则由最小二乘法求得回归系数 $\mathbf{a}$ 如下

$$\mathbf{a} = (\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$$

值得指出的是失效域中不同区域对失效概率贡献的大小是不一样的, 而每个样本点的概率密度函数的相对大小能客观反映每个样本点对失效概率贡献的大小, 因此, 以每个样本点对应的概率密度函数值与所有样本点最大概率密度函数值的比值作为该样本点在线性回归分析中的权数 ω, 采用加权线性回归的方法来近似极限状态方程能更合理地得到极限状态方程的近似。

$$\omega = f(\mathbf{z}_i)/\max\{f(\mathbf{z}_i)\} \quad (i = 1, \cdots, M_F)$$

记权矩阵 $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{diag}(w_i)$, 则由加权线性回归分析可得 $\mathbf{a}$ 矩阵如下

$$\mathbf{a} = (\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\mathbf{y}$$

求得 $\mathbf{a}$ 后即可由第 1 节的方法快速得到 $\partial P_F/\partial \mu_i$ 和 $\partial P_F/\partial \sigma_i$。

4　算　　例

算例 1　非线性极限状态函数为 $g(\mathbf{x}) = -0.16(x_1 - 1)^2 - x_2 + 80$, x_1, x_2 相互独立, $x_1 \sim N(10, 5^2)$, $x_2 \sim N(8, 4^2)$。可靠性灵敏度计算结果如表 1 所示。表中 AFORM 表示基于改进一次二阶矩的灵敏度求解方法; Finite 表示与蒙特卡洛法求解失效概率相结合的有限差分法求解灵敏度; Monte Carlo 表示基于蒙特卡洛抽样的快速可靠性灵敏度求解方法; IS-Markov 表示基于重要抽样马尔可夫链模拟的灵敏度求解方法。以下各例表示均与此相同。

表 1　算例 1 的可靠性灵敏度计算结果

	$\partial P_F/\partial \mu_1$ $(\times 10^{-3})$	$\partial P_F/\partial \sigma_1$ $(\times 10^{-2})$	$\partial P_F/\partial \mu_2$ $(\times 10^{-4})$	$\partial P_F/\partial \sigma_2$ $(\times 10^{-4})$	投点数
AFORM	4.180	1.006 9	6.21	1.78	——
Finite	3.81	0.954	3.82	1.90	8×10^8
Monte Carlo	4.108	0.973 4	5.88	1.49	10^8
IS-Markov	4.131	0.997 6	5.88	1.62	200

算例 2　非线性极限状态方程为 $g(\mathbf{x}) = \exp(0.2x_1 + 1.4) - x_2$, x_1, x_2 相互独立, 且服从标准正态分布。可靠性灵敏度计算结果如表 2 所示。

表 2　算例 2 的可靠性灵敏度计算结果

	$\partial P_F/\partial \mu_1$ $(\times 10^{-4})$	$\partial P_F/\partial \sigma_1$ $(\times 10^{-3})$	$\partial P_F/\partial \mu_2$ $(\times 10^{-3})$	$\partial P_F/\partial \sigma_2$ $(\times 10^{-3})$	投点数
AFORM	-7.290	1.219 4	1.265	3.671 4	——
Finite	-6.55	0.956 3	1.241 1	3.010	8×10^7
Monte Carlo	-6.938	1.156 5	1.215 3	3.548 8	10^6
IS-Markov	-6.941	1.158 5	1.214 2	3.544 3	200

算例 3　三跨度梁的可靠性灵敏度分析。

本例分析了如图 1 所示的三跨度梁可靠性, 其中 $L = 5$ m。考虑三跨度梁挠度最大允许值为 $L/360$, 可以建立极限状态函数如下

$$g(w_0, E_0, I_0) = L/360 - 0.006\,9 w_0 L^4/E_0 I_0$$

式中, w_0 为分布载荷, E_0 为弹性模量, I_0 为惯性矩,

基本随机变量均服从正态分布, 且相互独立, 其分布参数见表 3。可靠性参数灵敏度计算结果见表 4。

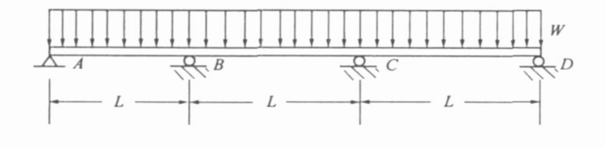

图 1 三跨度梁示意图

表 3 算例 3 基本随机变量的分布参数

随机变量 x	均值 μ_x	标准差 σ_x
w_0/kN · m^{-1}	10	0.4
E_0/kN · m^{-2}	2×10^7	0.5×10^7
I_0/m^4	8×10^{-4}	1.5×10^{-4}

表 4 算例 3 的可靠性灵敏度计算结果

	$\partial P_F/\partial\mu_{w_0}$ ($\times10^{-4}$)	$\partial P_F/\partial\sigma_{w_0}$ ($\times10^{-5}$)	$\partial P_F/\partial\mu_{E_0}$ ($\times10^{-10}$)	$\partial P_F/\partial\sigma_{E_0}$ ($\times10^{-9}$)	$\partial P_F/\partial\mu_{I_0}$	$\partial P_F/\partial\sigma_{I_0}$	投点数
AFORM	2.194	2.407 5	-4.997 8	1.561 2	-3.113 1	1.817 2	——
Monte Carlo	1.476	1.097 1	-4.953	1.544 3	-3.334 6	2.099 9	10^6
IS-Markov	1.585	1.607 9	-4.423 9	1.397 7	-2.754 5	1.639 2	300

从上面的算例可以看出, 本文提出的方法求解可靠性灵敏度分析结果和其它方法所求的结果一致, 但有限差分法和蒙特卡洛法需要大量计算结构状态的响应值, 而本文方法只需要在重要抽样方法的基础上增加非常有限的计算工作量, 即可得高精度的计算结果, 充分说明本文方法是高效可行的。

5 结 语

本文发展了一种新的可靠性灵敏度分析方法, 通过重要抽样法产生重要样本, 选择落入失效域中的样本进行马尔可夫链样本模拟, 进而得到服从要求条件概率密度函数分布的条件样本点。将这些样本点进行加权线性回归, 得到极限状态方程的线性近似, 最终利用一次二阶矩可靠性灵敏度分析方法进行可靠性灵敏度分析。相比标准蒙特卡洛样本模拟, 本文方法的计算效率高, 而且计算结果准确, 文中的算例充分说明了所提方法是高效合理的。

参考文献:

[1] Bjerager P, Krenk S. Parametric Sensitivity in First Order Reliability Analysis. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1989, 115(7): 1577～1582

[2] Karamchandani A, Cornell G A. Sensitivity Estimator within First and Second Order Reliability Methods. Structural Safety, 1992, 11(2): 95～107

[3] Lataillade A D, Blanco S, Clergent Y, et al. Monte Carlo Method and Sensitivity Estimations. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 2002, 75(5): 529～538

[4] Melchers R E, Ahammed M. A Fast Approximate Method for Parameter Sensitivity Estimation in Monte-Carlo Structural Reliability. Computers and Structures, 2004, 82: 55～61

[5] Au S K. Probabilistic Failure Analysis by Importance Sampling Markov Chain Simulation. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2004, 130(3): 303～311

Making Importance Sampling (IS) Method Suitable for Sensitivity Analysis of Reliability Parameter Sensitivity

Ma Chao, Lu Zhenzhou, Fu Lin
(College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: IS method is known to be fast for sensitivity analysis of reliability parameters but unfortunately it cannot be used for such analysis because it does not satisfy a necessary condition required by such analysis. We propose combining IS method with Markov chain simulation in such a way that IS-Markov method can be used for sensitivity analysis of reliability parameters. In the full paper, we explain our IS-Markov method in detail; in this abstract, we just add some pertinent remarks to listing the three topics of explanation: (1) the basic line of thinking of reliability sensitivity analysis, (2) the method of transforming importance sampling conditional samples into conditional samples, (3) obtaining approximate limit state function by weighted linear regression analysis; under topic 1, we point out that the reliability parameter sensitivities can be obtained with eqs. (4) and (5) in the full paper taken from the open literature; under topic 2, we explain how to combine Markov chain simulation with IS method; also under topic 2, we list the four steps given by S. K. Au in Ref. 5 for transforming importance sampling conditional samples into conditional samples; under topic 3, we use the conditional samples obtained in topic 2 to obtain by weighted linear regression analysis the approximate limit state function, which is needed in calculating sensitivities with eqs. (4) and (5). To illustrate our IS-Markov method, we give three numerical examples, whose sensitivity results calculated by several different methods, including IS-Markov method, are summarized respectively in Tables 1, 2, and 4 in the full paper. These results show preliminarily that, by comparison, IS-Markov method is remarkably high in efficiency.

Key words: reliability, sensitivity analysis, Markov chain simulation, importance sampling (IS)

2005 年《工程索引》(EI)年刊收录 40 行以上论文
大陆 13 校 11 篇大陆其它校 15 篇共 26 篇

大陆 13 校中 6 校	华东理工	西安交通		清华						哈尔滨工业	南京	北京								13 校中 6 校	
大陆其它 13 校			中国地质		大连海事	中国农业	华南理工	中国石油	长沙理工				中国矿业	中国人民	南开	中南	南京气象学院	河北工业	复旦		其它 13 校
EI 年刊收录在 40 行以上篇数	4	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	15
最高行数	99	51	47	45	44	49	49	48	47	43	43	41	41	41	41	41	40	40	40	99	49

胡沛泉
2007 年 1 月 8 日