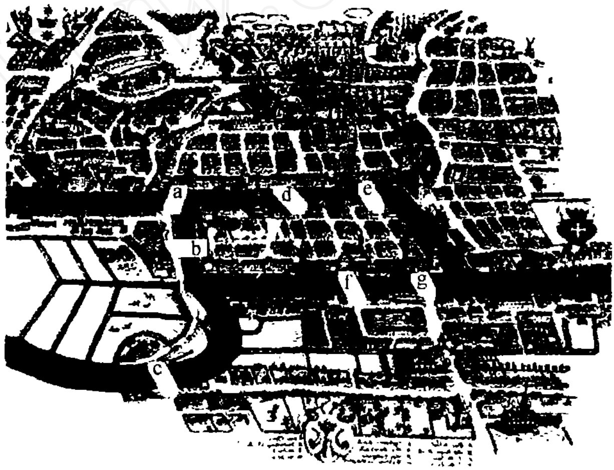
七桥问题·图论·拓扑学

江苏教育学院数学系　章　飞

2001 年 2 月 19 日上午，江泽民主席亲自将首届国家最高科学技术奖 500 万元颁发给我国著名数学家吴文俊院士，以表彰他在拓扑学和数学机械化等领域的杰出贡献．下面介绍一个最为古老的拓扑学问题——哥尼斯堡七桥问题．



18 世纪，东普鲁士的哥尼斯堡是一座风景迷人的城市，普勒格尔河横贯其境，并在这儿形成两个支流，把整座城市划分成四个区域，在四个区域间建有七座桥，如图 1．七座桥横跨在普勒格尔河及其支流上，把河岸、半岛和河心岛互相连结起来．迷人的风光、形态各异的小桥吸引了众多的游客．游人在陶醉于美丽的风景的同时，根据自己的游览经验，提出了这样一个有趣的问题：能不能从一个地方出发，穿过所有的桥各一次后，再回到出发点？

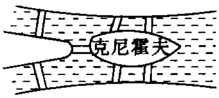


图 1

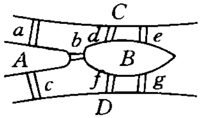


图 2

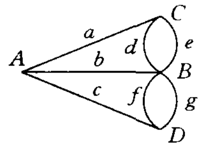


图 3

游人满怀热情地进行了尝试，但总未能找到一个合适的方法．于是，他们请教著名数学家欧拉（Euler，1707～1783）．我们一起追溯一下欧拉的思路．

为了表述方便，欧拉首先给七桥、四地标上了适当的记号，以 A、B、C、D 分别表示河中小岛和河流两岸，以 a、b、c、d、e、f、g 分别表示横跨河流的七座桥，得到图 2．

欧拉发现，本题要求穿过所有的桥各一次而回到出发点，与 A、B、C、D 各区域及 a、b、c、d、e、f、g 各桥的形状、大小没有关系，仅与它们相互之间的"连通"关系有关．因此，可将 A、B、C、D 四地看成点，而四地之间的联系纽带——a、b、c、d、e、f、g 七桥看成线，得到图 3，这样问题就转化为：能不能从图中 A、B、C、D 中任意一点出发，连续地（笔不离纸）经过每条线恰好一次最后回到出发点？这就是现在所熟悉的**"一笔画"问题**．

要一笔画成某个图形，必须选择某个点作为**起始点**，某个点作为**终点**，这是"两个"（也可能一个）特殊点，其余点是中途经过的点，不妨称为**中间点**．对于中间点而言，画图可以发现，有一条线"进入"该点，同时必须有一条线"走出"该点，"有进有出"，因而与该点相连的线的数目是偶数，称该点为**偶点**．相应地，称与某点相连的线的数目为奇数的点为**奇点**．由上分析可知，可以一笔画成的图中奇点数目至多 2 个．奇点个数为 0 时，可以以图中任一点为起点一笔画成并回到该点；奇点个数为 2 时，可以以其中一个奇点为出发点，另一个奇点为终止点一笔画成．（想一想，奇点数目可能是 1 个吗？）

现在，你知道哥尼斯堡七桥问题的答案了吗？

请大家再试一试下面图 4～图 7 是否可以一笔画成．

图 4

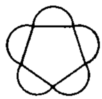


图 5

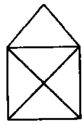


图 6

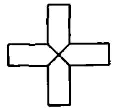


图 7

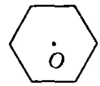


图 8

问题解决了，但欧拉毕竟是当时最伟大的数学家，他不满足于此.

他称图 3 中的 A、B、C、D 为**顶点**，而把联接顶点之间的线称为**边**，称由这些点和线组成的一个整体为**图**. 显然，图 3 中任两点都可以通过一系列线联系起来(未必是一条直接联接两点的线，如图 3 中 C、D 可由 d、f 两条线联系起来)，这样的图称为**连通图**. 图 3～图 7 都是连通图，而图 8 就不是连通图. 由图 3 中各条边将平面分成 5 个部分，称这 5 个部分为 5 个面.

大家分别研究一下图 3～图 7 这六个连通图中顶点个数 V、边数 E、面数 F，看看它们之间有什么联系.

事实上，欧拉发现，对于平面内的连通图有 $V+F-E=2$ (空间图形也有类似的性质)，而图 8 中 $V+F-E=3\neq 2$，称 $V+F-E$ 为图的**欧拉示性数**. 欧拉示性数不等，是平面内连通图与不连通图的本质区别. 另一方面，可以发现，对任何一个图进行拉伸、压缩等连续变形(如由图 4 变形到图 5)，其欧拉示性数都不变，这种性质称为**拓扑不变性**.

他把研究这类问题的方法加以推广，用点表示具体事物，用线表示两个具体事物之间的联系，那么把某类具体事物和这些事物之间的联系描绘出来就成了图. 这样就可以用图来研究事物及它们间的联系，欧拉正是这样创立了一门具有广泛应用的数学分支——**图论**. 另一方面，他继续研究图形在拉伸、压缩等连续变形下不变的性质(拓扑不变性)，形成了一门重要数学分支——**拓扑学**.

同学们，你能从欧拉解决"七桥问题"中获得什么启示呢?