第 43 卷第 10 期　　机　械　工　程　学　报　　Vol.43　No.10
2007 年 10 月　　CHINESE JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING　　Oct.　2007

基于响应面方法的可靠性灵敏度分析方法*

闫　明　孙志礼　杨　强
(东北大学机械工程与自动化学院　沈阳　110004)

摘要：简要叙述应用响应面方法获取极限状态函数(该极限状态函数具有响应面函数的特点)的过程。提出利用这种极限状态函数进行可靠性灵敏度分析的方法，并推导了计算公式。该方法的优点是：① 可用于极限状态函数未知的情况。② 此极限状态函数是形式简单的二次多项式，便于实现方差和偏导计算，使可靠性灵敏度的计算简单易行。③ 该极限状态函数包括一、二次项和交叉项的信息，使可靠性灵敏度的计算精度大大提高。④ 通用、规范，易于实现程序化。最后计算航空发动机附件传动机匣散热的可靠度及各个变量的可靠性灵敏度，为附件传动散热系统的设计提供了理论依据，算例表明了所给出的计算公式的正确和有效性。

关键词：灵敏度分析　响应面方法　Box-Behnken 取样　蒙特卡罗法　附件机匣
中图分类号：TB114.3

0　前言

可靠性灵敏度分析对研究影响结构可靠性的主要因素提供了一种有效方法，但这种方法还存在一些不足。文献[1-2]提出以摄动法为基础的可靠性灵敏度的计算方法并应用于汽车零部件的设计。该文提供的计算可靠性灵敏度的方法有两点不足：一是极限状态函数必须是显式函数，实际中的极限状态函数往往是隐式函数或者是未知函数，因此该方法的应用范围受到限制。二是只能把极限状态函数在随机参数矢量的均值点进行一阶 Tarlor 展开，忽略一阶以上项，因此计算精度不高。

附件机匣是飞机发动机的重要传动部件。它的内部有多对高速齿轮啮合传动，采用喷油润滑。机匣壳体是重要的散热部件，其散热量对于内部传动系统的工作性能、抗胶合能力、热变形等传动问题有重要影响，由于各因素对机匣壳体散热影响程度不同，因此研究机匣壳体散热的可靠性和随机参数对散热可靠性的灵敏度有重要意义。本文以此为例，首先用响应面方法得到机匣壳体散热量的极限状态函数，由该方法得到的极限状态函数是形式简单的二次函数，不仅包括一次项、二次项信息，而且含有二次交叉项信息，因此大大提高了可靠度和可靠性灵敏度的计算精度。

1　响应面方法

响应面方法最早由 BOX 和 WILSON 提出，目前已广泛应用于化工、制药、农业和机械工程等领域[3-6]。该方法的思想是：在结构的真实响应 Y 未知的情况下，假定 Y 与影响结构的随机参数矢量 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_{N_R})$的关系可用某含有交叉项的二次函数描述，如式(1)所示。用某种取样方法得到随机参数矢量的 N_S 个样本点，对这 N_S 个样本点进行试验或数值分析得到结构响应的一组样本点$(y_1, y_2,\cdots, y_{N_S})$，回归分析得到响应面函数中待定因子的最小二乘法估计，从而得到响应面函数，在以后的分析中用响应面函数代替结构的真实响应。

$$\hat{Y}=C_0+\sum_{i=1}^{N_R}C_iX_i+\sum_{i=1}^{N_R}\sum_{j=i}^{N_R}C_{ij}X_iX_j \tag{1}$$

式中 C_0、C_i、$C_{ij}(i=1,\cdots,N_R; j=i,\cdots,N_R)$为待定系数，共 $n+1+n(n+1)/2$ 个。

一种好的取样方法不仅可以减少样本点的数量而且可以提高响应面的精度。本文采用一种高效的取样方法——Box-Behnken 取样。该方法对每个随机变量取三个水平点，然后按照一定的规则组合出中心点和边中点作为样本点[7]。图 1 表示三变量(X_1, X_2, X_3)的 Box-Behnken 样本点。

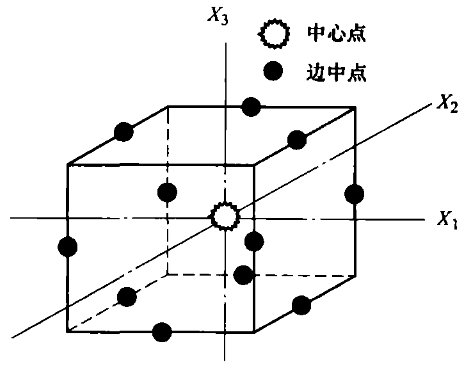

图 1　三变量的 Box-Behnke 样本点

* 国防十五规划预研基金资助项目(APTD-1002-005)。20061020 收到初稿，20070720 收到修改稿

对于任意分布的随机变量可用式(2)确定随机变量水平点值 x_s

$$\int_{-\infty}^{x_s} f(x)\,\mathrm{d}x = p_n \quad n=1,\ 2,\ 3 \tag{2}$$

式中 $f(x)$——随机变量的分布密度函数

p_n——随机变量水平，取 $p_1 = 0.01$，$p_2 = 0.50$，$p_3 = 0.99$

对于正态分布的随机变量

$$x_s = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p_n) \tag{3}$$

式中 μ——平均值

σ——标准差

$\Phi(\cdot)$——标准正态分布函数，$\Phi^{-1}(p_n)$的值可由标准正态分布函数表得到

对随机参数的 N_S 个样本点进行数值计算，得到 N_S 个输出点($y_1, y_2, \cdots, y_{N_S}$)，对这些数据用最小二乘法进行回归分析

$$s = \sum_{i=1}^{N_S} \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{N_S}\left[y_i - \left(C_0 + \sum_{i=1}^{N_R} C_i x_i + \sum_{i=1}^{N_R}\sum_{j=i}^{N_R} C_{ij} x_i x_j\right)\right]^2 \tag{4}$$

式中 N_S 是样本点个数，N_R 是随机输入变量个数，ε 为误差项。使误差项为最小，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial C_0} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial C_i} = 0 \quad i=1,2,\cdots,N_R \\ \dfrac{\partial s}{\partial C_{ij}} = 0 \quad i=1,2,\cdots,N_R \quad j=i,\cdots,N_R \end{cases} \tag{5}$$

对式(5)进行求解，可以得到式(1)中各系数的估计值，从而得到响应面函数。

2 计算可靠度

假定设计要求的机匣壳体的最小散热量为 $Q_{\lim}$，则极限状态函数为

$$g(X) = \hat{Y} - Q_{\lim} = C_0 + \sum_{i=1}^{N_R} C_i X_i + \sum_{i=1}^{N_R}\sum_{j=i}^{N_R} C_{ij} X_i X_j - Q_{\lim} \tag{6}$$

极限状态函数可表示结构的两种状态：$g(X) \leqslant 0$ 是失效状态，$g(X) > 0$ 是安全状态。式(6)中各随机参数相互独立，均值矩阵和方差矩阵分别为 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{N_R})$、$\boldsymbol{D} = (D_1, D_2, \cdots, D_{N_R})$，则

$$E(X_i^2) = E^2(X_i) + D(X_i) = \mu_i^2 + D_i \tag{7}$$

$$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j) = \mu_i \mu_j \tag{8}$$

$$D(X_i^2) = 4\mu_i^2 D_i + 2D_i \tag{9}$$

$$D(X_i X_j) = \mu_i^2 D_j + \mu_j^2 D_i + D_i D_j \tag{10}$$

由此可得

$$E[g(x)] = \mu_g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{N_R}, D_1, D_2, \cdots, D_{N_R}) \tag{11}$$

$$D[g(x)] = D_g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{N_R}, D_1, D_2, \cdots, D_{N_R}) \tag{12}$$

可靠性指标定义为

$$\beta = \frac{\mu_g}{\sqrt{D_g}} \tag{13}$$

若 $g(X)$ 服从正态分布，可以得到可靠度

$$R = \Phi(\beta) \tag{14}$$

对任意分布都可用 Monte Carlo 模拟法计算可靠度[8]。

3 可靠性灵敏度

可靠度对基本随机参数矢量的均值矩阵 $\boldsymbol{\mu}$ 和方差矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的灵敏度为

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial R}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g}\frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g}\frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}}\right) \tag{15}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}} = \frac{\partial R}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \mu_g}\frac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}} + \frac{\partial \beta}{\partial D_g}\frac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}}\right) \tag{16}$$

式中

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial \beta} = \Phi(\beta) \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial \mu_g} = \dfrac{1}{\sqrt{D_g}} \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial D_g} = -\dfrac{\mu_g}{2} D_g^{-3/2} \\ \dfrac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}} = \left(\dfrac{\partial \mu_g}{\partial \mu_1}, \dfrac{\partial \mu_g}{\partial \mu_2}, \cdots, \dfrac{\partial \mu_g}{\partial \mu_{N_R}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{\partial \mu_g}{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}} = \left(\dfrac{\partial \mu_g}{\partial D_1}, \dfrac{\partial \mu_g}{\partial D_2}, \cdots, \dfrac{\partial \mu_g}{\partial D_{N_R}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}} = \left(\dfrac{\partial D_g}{\partial \mu_1}, \dfrac{\partial D_g}{\partial \mu_2}, \cdots, \dfrac{\partial D_g}{\partial \mu_{N_R}}\right)^{\mathrm{T}} \\ \dfrac{\partial D_g}{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}} = \left(\dfrac{\partial D_g}{\partial D_1}, \dfrac{\partial D_g}{\partial D_2}, \cdots, \dfrac{\partial D_g}{\partial D_{N_R}}\right)^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{17}$$

4 算例

在机匣内部润滑油吸收传动部件散发的热量并

与机匣内壁对流换热。机匣壳体是热的良导体，热量从机匣内壁传导到外壁。机匣外壁完全暴露在高速流动的两股气流中，与两股气流进行强烈的对流换热。在飞机的某个飞行状态两股气流的温度θ_1、外壁与两股气流的对流换热系数α_1、润滑油的温度θ_2、内壁与润滑油的对流换热系数α_2是随机变量。假定以上随机变量服从正态分布，其均值和标准差在表 1 中列出。

表 1　各变量的平均值和标准差

变量	平均值μ	标准差σ
气流温度θ_1 /°C	10	2
对流换热系数 α_1/(W・m^{-2}・K^{-1})	100	4
润滑油温度θ_2 /°C	160	4
对流换热系数 α_2 /(W・m^{-2}・K^{-1})	300	8

根据 Box-Behnken 抽样方法和式(3)计算出样本点数值列入表 2 中。

表 2　Box-Behnke 取样样本点及响应值

样本点	气流温度θ_1/℃		润滑油温度θ_2/℃		对流换热系数 α_1/(W・m^{-2}・K^{-1})		对流换热系数 α_2/(W・m^{-2}・K^{-1})		输出 y_i/W
	水平	取值	水平	取值	水平	取值	水平	取值	
1	p_2	10.00	p_2	160.00	p_2	100.00	p_2	300.00	2 940.14
2	p_1	5.35	p_1	150.69	p_2	100.00	p_2	300.00	2 848.94
3	p_3	14.65	p_1	150.69	p_2	100.00	p_2	300.00	2 466.65
4	p_1	5.35	p_3	169.31	p_2	100.00	p_2	300.00	3 213.73
5	p_3	14.65	p_3	169.31	p_2	100.00	p_2	300.00	3 031.33
6	p_2	10.00	p_2	160.00	p_1	90.69	p_1	281.39	2 693.04
7	p_2	10.00	p_2	160.00	p_3	109.31	p_1	281.39	3 081.10
8	p_2	10.00	p_2	160.00	p_1	90.69	p_3	318.61	2 772.15
9	p_2	10.00	p_2	160.00	p_3	109.31	p_3	318.61	3 185.79
10	p_1	5.35	p_2	160.00	p_2	100.00	p_1	281.39	2 981.82
11	p_3	14.65	p_2	160.00	p_2	100.00	p_1	281.39	2 802.41
12	p_1	5.35	p_2	160.00	p_2	100.00	p_3	318.61	3 076.44
13	p_3	14.65	p_2	160.00	p_2	100.00	p_3	318.61	2 891.33
14	p_2	10.00	p_1	150.69	p_1	90.69	p_2	300.00	2 564.84
15	p_2	10.00	p_3	169.31	p_1	90.69	p_2	300.00	2 904.11
16	p_2	10.00	p_1	150.69	p_3	109.31	p_2	300.00	2 941.29
17	p_2	10.00	p_3	169.31	p_3	109.31	p_2	300.00	3 330.35
18	p_1	5.35	p_2	160.00	p_1	90.69	p_2	300.00	2 819.30
19	p_3	14.65	p_2	160.00	p_1	90.69	p_2	300.00	2 649.67
20	p_1	5.35	p_2	160.00	p_3	109.31	p_2	300.00	3 233.09
21	p_3	14.65	p_2	160.00	p_3	109.31	p_2	300.00	3 038.56
22	p_2	10.00	p_1	150.69	p_2	100.00	p_1	281.39	2 712.70
23	p_2	10.00	p_3	169.31	p_2	100.00	p_1	281.39	3 071.53
24	p_2	10.00	p_1	150.69	p_2	100.00	p_3	318.61	2 798.78
25	p_2	10.00	p_3	169.31	p_2	100.00	p_3	318.61	3 169.00

注：样本点 1 为中心点，其余点为边中点。

表 2 中的样本点经过 25 次有限元模拟得到 25 个响应值，列入表 2 的最后一列。根据表 2 中数据和式(4)、(5)得到壳体散热量的响应面函数

$$\hat{Y}=-17.520-0.278T_1+0.278T_2+0.418\alpha_1-0.005\alpha_2-0.058\alpha_1^2-0.006\alpha_2^2-0.144T_1\alpha_1-0.016T_1\alpha_2+0.144T_2\alpha_1+0.016T_2\alpha_2+0.037\alpha_1\alpha_2$$

假定机匣壳体允许的最小散热量 $Q_{\lim}=2\,400$ W，根据式(6)得到

$$g(X)=-2\,417.5-0.278T_1+0.278T_2+0.418\alpha_1-0.005\alpha_2-0.058\alpha_1^2-0.006\alpha_2^2-0.144T_1\alpha_1-0.016T_1\alpha_2+0.144T_2\alpha_1+0.016T_2\alpha_2+0.037\alpha_1\alpha_2$$

对上式应用 Monte Carlo 模拟得到 $g(X)$的频率直方图(图 2)，在正态概率纸上作出 $g(X)$分布图(图 3)，呈直线分布，因此 $g(X)$服从正态分布。此外通过对上式的 Monte Carlo 模拟还得到如下数据

$$\mu_g=541.126\qquad \sigma_g=125.312$$

于是

$$\beta = 4.32 \quad R = 0.952\,199$$

由式(7)、(8)、(11)得到

$$\mu_g = E[g(X)] = -2\,467.5 - 0.277\,8\mu_1 + 0.277\,8\mu_2 + 0.418\mu_3 - 0.005\mu_4 - 0.058(\mu_3^2 + D_3) - 0.006(\mu_4^2 + D_4) - 0.144\mu_1\mu_3 - 0.016\mu_1\mu_4 + 0.144\mu_2\mu_3 + 0.016\mu_2\mu_4 + 0.037\mu_3\mu_4$$

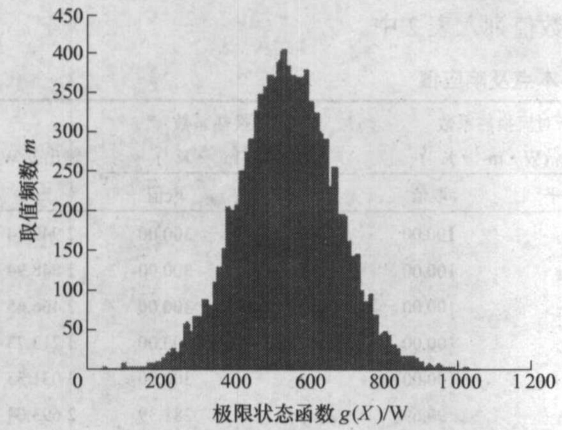

图2 $g(X)$的频率直方图

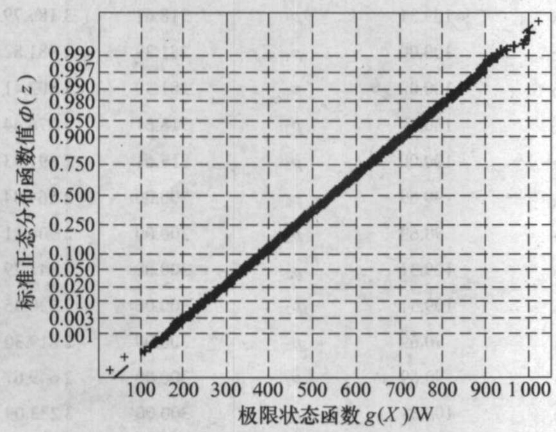

图3 $g(X)$正态分布检验图

由式(9)、(10)、(12)得到

$$D_g = D[g(X)] = 0.278^2 D_1 + 0.278^2 D_2 + 0.418^2 D_3 + 0.005^2 D_4 + 0.058^2(4\mu_3^2 D_3 + 2D_3) + 0.006^2 \times (4\mu_4^2 D_4 + 2D_4) + 0.144^2(\mu_1^2 D_3 + \mu_3^2 D_1 + D_1 D_3) + 0.016^2(\mu_1^2 D_4 + \mu_4^2 D_1 + D_1 D_4) + 0.144^2 \times (\mu_2^2 D_3 + \mu_3^2 D_2 + D_2 D_3) + 0.016^2(\mu_2^2 D_4 + \mu_4^2 D_2 + D_2 D_4) + 0.037^2(\mu_3^2 D_4 + \mu_4^2 D_3 + D_3 D_4)$$

于是$\mu_g = 541.275$，$\sigma_g = 124.892$与Monte Carlo模拟所得数据相近。

μ_g和D_g对$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{D}$的偏导过程略去，得到

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}} = \left(\frac{\partial R}{\partial \mu_1} \quad \frac{\partial R}{\partial \mu_2} \quad \frac{\partial R}{\partial \mu_3} \quad \frac{\partial R}{\partial \mu_4}\right)^{\mathrm{T}} = (-0.556 \quad 0.498 \quad 0.539 \quad 0.059)^{\mathrm{T}} \times 10^{-5}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}} = \left(\frac{\partial R}{\partial D_1} \quad \frac{\partial R}{\partial D_2} \quad \frac{\partial R}{\partial D_3} \quad \frac{\partial R}{\partial D_4}\right)^{\mathrm{T}} = (-0.113 \quad -0.113 \quad -0.384 \quad -0.017)^{\mathrm{T}} \times 10^{-5}$$

从可靠度对随机参数矢量的均值的灵敏度矩阵$\partial R/\partial \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}$可以看出，外壁与两股气流的对流换热系数$\alpha_1$、润滑油的$\theta_2$、内壁与润滑油的对流换热系数$\alpha_2$的均值增加机匣壳体散热的可靠度增加，两股气流的$\theta_1$的均值增加机匣壳体散热的可靠度降低，机匣散热的可靠度对θ_1的均值的灵敏性较强，对α_2的均值的灵敏性较差。从可靠度对随机参数矢量方差的灵敏度矩阵$\partial R/\partial \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$可以看出，基本随机参数方差的增加都会降低壳体散热可靠度。对可靠度敏感的参数在设计中应该严格控制。上面的计算与通常的定性分析的结果吻合，为附件机匣的设计提供了定量的理论依据。

5 结论

所提出的计算可靠性灵敏度的方法具有以下四个优点。

(1) 可用于极限状态函数未知的情况。

(2) 极限状态函数是形式简单的二次函数，便于进行方差和偏导计算，使可靠性灵敏度计算简单易行。

(3) 极限状态函数天然地包括一、二次项和交叉项的信息，计算精度大大提高。

(4) 方法规则，易于实现程序化。算例表明所给出的基于响应面方法的可靠性灵敏度计算公式是有效和正确的。

计算了附件传动机匣壳体的散热可靠度，发现机匣散热的可靠度对θ_1均值的灵敏性较强，对α_2均值的灵敏性较差。为附件机匣的设计提供了定量的理论依据。

参 考 文 献

[1] ZHANG Y M, LIU Q L. Reliability-based design of automobile components[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part D, Journal of Automobile Engineering Science, 2002, 216 (D6)：455-471.

[2] 张义民. 影响车辆前轴可靠性的参数灵敏度分析[J]. 农业机械学报, 2004, 35(3)：5-8.

[3] KHURI D, ANDRE I. Response surfaces designs and analysis[M]. New York：Marcel Dekker Inc, 1997.

[4] VINING G, GEOFFREY. Response surface designs within a split-plot structure[J]. Journal of Quality Technology,

2005, 37(4)：115-129.

[5] SOO E. Response surface methodological study on lipase-catalyzed synthesis of amino acid surfactants[J]. Process Biochemistry, 2004, 39(6)：1 511-1 518.

[6] JARMOLUK A, PIETRASIK Z. Response surface methodology study on the effects of blood plasma, microbial transglutaminase and κ-carrageenan on pork batter gel properties[J]. Journal of Food Engineering, 2003, 60(10)：327-334.

[7] BOX G, BEHNKEN D. Some new three level designs for the study of quantitative variables[J]. Technometrics, 1960, 2(4)：455-476.

[8] 孙志礼，陈良玉. 实用机械可靠性设计理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2003.

ANALYSIS METHOD OF RELIABILITY SENSITIVITY BASED ON RESPONSE SURFACE METHODS

YAN Ming　SUN Zhili　YANG Qiang
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110004)

Abstract: A process of applying the response surface method to get the ultimate state function (Which takes the characteristics of response surface function) is briefly depicted. A new method to analyze the reliability sensitivity through the ultimate state function is presented and the correlative formulas are deduced. The advantages of this method are as follows: ① It is available even the ultimate state function is unknown. ② The ultimate state function, a simple quadric polynomial, is convenient for calculating the variance, partial derivative and reliability sensitivity. ③ The function includes the information of linear, quadratic and crossing quadratic terms, which makes the accuracy of reliability sensitivity greatly improved. ④ Owning to its regularity, programming is achievable. Finally, the reliability of heat-emission of the accessory gearbox of aero-engine and reliability sensitivity of various influencing factors are calculated, which provides theoretical warranties for the designing of heat-emission system of accessory gearbox. The example shows these theories and formulas are rational and efficient.

Key words: Sensitivity analysis　Response surface method　Box-Behnken sampling　Monte Carlo methods　Accessory gearbox

作者简介：闫明，男，1978 年出生，博士研究生。主要研究方向为热应力、热疲劳可靠性。

E-mail：yanming7802@163.com

孙志礼，男，1957 年出生，博士研究生导师。主要研究方向为可靠性设计和智能设计。

E-mail：zlsun@mail.neu.edu.cn