

热 - 应力耦合结构灵敏度分析方法¹⁾

顾元宪 赵红兵 陈颢松 亢 战

(工业装备结构分析国家重点实验室, 大连理工大学工程力学系, 大连 116024)

摘要 研究稳态 / 瞬态热传导灵敏度分析、以及热与机械荷载同时作用的热结构应力灵敏度分析问题. 考虑了温度场随设计变量的变化及其对热应力的影响, 提出温度场与结构热应力耦合问题的灵敏度计算方法. 特别指出了热 - 应力耦合灵敏度分析中温度场导数的影响, 说明了在热 - 应力耦合结构灵敏度分析中必须考虑耦合灵敏度. 在应用软件系统 JIFEX 中实现了所提出的方法, 数值算例验证了灵敏度算法的精度.

关键词 灵敏度, 热传导, 热应力, 热结构, 耦合系统

引 言

热结构的分析和设计问题广泛存在于工程中, 在航空和航天飞行器、发动机、热力机械、能源和化工等工业装备等结构设计, 以及铸造、焊接、轧钢、热处理等工艺设计中, 传热与热 - 应力耦合问题普遍存在. 这类问题的重要特点是结构力学响应与热传导的耦合作用, 这种热 - 结构耦合系统的优化设计也是目前发展迅速的多学科优化 (即 Multidisciplinary Optimization) 领域的研究方向之一^[1~3]. 在传热分析和结构优化两方面已有深入的研究, 将两方面的研究结合起来解决热 - 力耦合结构优化设计问题, 具有重要的理论意义和应用价值. 而且其中许多研究方法, 如热传导与结构热响应的灵敏度分析, 在热传导反问题和控制等研究中具有重要作用^[4].

在热传导优化设计的研究基础上^[5], 本文研究了稳态 / 瞬态传热与机械荷载同时作用的热结构优化设计以及反问题的重要基础 - 灵敏度计算问题, 在结构热 - 应力耦合问题中, 考虑了温度场随设计变量的变化及其对热应力的影响, 提出瞬态温度场与结构热应力耦合的灵敏度分析方法. 特别是指出了热 - 应力耦合灵敏度分析中温度场导数的影响, 在热 - 应力耦合结构灵敏度分析中必须考虑耦合灵敏度, 数值算例验证了耦合灵敏度算法的精度. 本文方法在有限元分析与优化设计软件系统 JIFEX^[6] 中实现, 为热结构优化设计及其工程应用建立了基础.

1 温度场及其灵敏度的计算

瞬态热传导问题的控制方程、初始温度条件和三类热边界条件定义如下

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_s = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$T(x, y, z)|_{t=0} = T_0(x, y, z) \quad (2)$$

2000-02-21 收到第一稿, 2000-12-29 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (19872017, 59895410) 和国家重点基础研究专项经费 (G1999032805) 资助项目.

$$T(x, y, z)|_{S_1} = T_b(x, y, z), \quad \kappa_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_2} = -q(x, y, z), \quad \kappa_n \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{S_3} = h(T - T_e) \quad (3)$$

其中: T 是温度, T_0 是初始时刻温度, T_b 是给定温度值, T_e 是环境温度, t 是时间, $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ 是热传导率, q_s 是热源强度, ρ 是材料密度, c 是热容系数, S_i 表示不同热交换条件的边界, n 表示边界法线方向, q 是流过物体表面的热流强度. 上述问题的有限元方程是

$$M\dot{T} + KT = Q \quad (4)$$

$$Q = P + P_b \quad (5)$$

式中, T 是节点温度向量, 其上的点号表示对时间的导数. 向量 P_b 由边界 S_1 上的给定温度产生. M 是热容矩阵, 矩阵 K 是热传导阵, 向量 P 是热源、热流、对流引起的等效有端项, P_b 是由指定温度边界条件引起等效右端项. 稳态热传导有限元方程为 (4) 式中不考虑左端第一项, 它的求解为一般的线性代数方程.

瞬态热传导方程求解用隐式 θ 时间差分法, 在时刻 t_n 的温度为 T^n , t_{n+1} 时刻的温度 T^{n+1} 由下式计算

$$(a_n M + K)T^{n+1} = (a_n M - bK)T^n + P/\theta - (a_n M + K)T_b$$

$$a_n = 1/(\theta \Delta t_n), \quad b = (1 - \theta)/\theta, \quad 0 < \theta < 1 \quad (6)$$

其中 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 是时间步长.

结构优化中的灵敏度分析, 通常是计算结构响应量对设计变量的一阶导数. 在热-应力耦合结构灵敏度分析中首先是求解温度的灵敏度. 温度场灵敏度分析有直接法和伴随法两种方法, 其中直接法的稳态/瞬态灵敏度方程可由式 (4) 求导得出.

稳态热传导灵敏度方程为

$$K \frac{dT}{d\alpha} = \frac{dQ}{d\alpha} - \frac{dK}{d\alpha} T \quad (7)$$

瞬态热传导灵敏度方程为

$$M \frac{d\dot{T}}{d\alpha} + K \frac{dT}{d\alpha} = \frac{dQ}{d\alpha} - \frac{dM}{d\alpha} \dot{T} - \frac{dK}{d\alpha} T \quad (8)$$

其中 α 是设计变量. 同理式 (7) 为求解线性方程组; 与式 (6) 类似, 求解式 (8) 的隐式 θ 差分格式为

$$(a_n M + K) \frac{dT^{n+1}}{d\alpha} = (a_n M - bK) \frac{dT^n}{d\alpha} + \left(a_n \frac{dM}{d\alpha} - b \frac{dK}{d\alpha} \right) T^n +$$

$$\frac{dP}{d\alpha} - \left(a_n \frac{dM}{d\alpha} + \frac{dK}{d\alpha} \right) (T_b + T^{n+1}) \quad (9)$$

因为 M, K, P 和时间、温度无关, 它们对设计变量的导数可以在积分前计算. 然后集成求解灵敏度方程式 (7) 或式 (8). 灵敏度分析半解析法的通用性好, 且具有较高求解效率, 在热传导这种标量场问题中可得到较高计算精度.

灵敏度方程的具体求解过程是: (1) 稳态热传导, 在求解出温度向量后, 将结果代入式 (7); (2) 瞬态热传导, 在每一个时间点, 先求解式 (6) 温度向量 T^{n+1} , 然后将其代入式 (8), 求解得到

T^{n+1} 对设计变量的一阶导数. 在求解式 (9) 过程中, 相应的系数矩阵已经三角化, 因此只须执行回代过程, 计算效率高. 文献 [5] 给出的算例验证了这种瞬态温度场灵敏度计算方法的精度.

2 热 - 应力和热 - 变形的耦合灵敏度分析方法

在结构热应力优化的简化处理方法中, 通常假定温度场在优化过程中或者一个迭代步中保持不变, 在应力和位移灵敏度分析中假定温度载荷不变. 但是温度场对热应力以及热变形的耦合作用, 是热结构问题的重要特征. 这种耦合作用包含两方面的含义: (1) 在优化过程中的每一次迭代后改变了设计变量及结构模型, 随之温度场和变形、应力也相应发生变化, 这就需要在每一步优化迭代结束后重新计算结构的温度场和变形、应力. (2) 不仅热应力和热变形与温度荷载有关, 而且它们的灵敏度也与温度场的灵敏度有关. 特别是当温度荷载起主要作用时, 温度场的导数将对热应力和热变形的灵敏度起着决定作用. 本文在瞬态温度场与机械荷载同时作用的热结构灵敏度分析中, 在热应力和热变形灵敏度计算中完整地包含了温度场的导数项, 从而精确地计算了耦合热应力和热变形的灵敏度. 文中给出的算例表明, 忽略温度场导数项会给热应力灵敏度带来很大误差. 因此, 在热结构的位移和应力灵敏度分析中必须考虑温度场的导数.

将温度场作为等效荷载考虑, 对于稳态热传导问题, 结构对应的是静力问题; 对于瞬态热传导问题, 认为结构的热应力变化是拟静态过程, 即结构平衡方程中忽略惯性项的作用, 方程仍为静力平衡方程. 结构热弹性力学问题的有限元控制方程为

$$Ru = F + E_T T \quad (10)$$

$$\sigma = Su_e - S_T T_e \quad (11)$$

其中, u 是结构总体位移向量, R 是结构弹性刚度矩阵, F 是机械荷载向量, E_T 是等效热荷载矩阵, u_e 和 T_e 是单元的节点位移向量和节点温度向量, S 和 S_T 是弹性应力和热应力矩阵. 位移灵敏度分析采用拟荷载法, 将式 (10) 对设计变量求导数得到热位移的灵敏度计算公式

$$R \frac{du}{d\alpha} = \frac{dF}{d\alpha} - \frac{dR}{d\alpha} u + \frac{dE_T}{d\alpha} T + E_T \frac{dT}{d\alpha} \quad (12)$$

在上式的右端项中, 前两项与通常的结构静力优化问题相同, 后两项则与温度场有关, 反映了温度场的耦合作用, 特别是最后一项依赖于温度场的导数.

将式 (11) 对设计变量求导数得到热应力的灵敏度计算公式

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \frac{dS}{d\alpha} u_e + S \frac{du_e}{d\alpha} - \frac{dS_T}{d\alpha} T_e - S_T \frac{dT_e}{d\alpha} \quad (13)$$

同样地, 上式右端项的前两项与结构静力优化问题相同, 后两项与温度场有关, 而且最后一项依赖于温度场的导数. 此外应当指出, 等效热荷载矩阵 E_T 和热应力矩阵 S_T 的导数, 通常与形状设计变量有关, 而对单元尺寸设计变量为零.

以上分析表明, 温度场的导数在热应力和热变形的灵敏度计算中反映了温度场与结构响应之间的耦合效应, 这种耦合效应正是传热 - 结构这种多学科优化问题中的重要因素. 不仅温度场和热应力分析、而且它们的灵敏度分析, 是相互关联的.

在温度场、热变形和热应力的灵敏度方程式 (7), (8), (12), (13) 中, 矩阵 M, K, R, E_T, S, S_T 和向量 P, F 对设计变量的导数, 可以推导出解析表达式来计算, 这样的灵敏度分析方法称作

解析法. 但是, 对于各种类型单元以及形状设计变量或其它特殊设计变量的一般情况, 这些矩阵和向量导数的解析表达式推导和编程, 往往十分复杂. 因此可以采用半解析灵敏度分析方法^[7,8], 即在单元一级采用差分法计算这些矩阵和向量对设计变量的导数, 然后代入灵敏度方程求解. 灵敏度分析半解析法的通用性好, 且具有较高求解效率, 在热传导和热应力问题可得到较高计算精度. 在获得结构热位移灵敏度后, 热应力灵敏度计算采用的差分公式为

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = (\sigma^{\text{new}} - \sigma^{\text{old}})/\Delta\alpha \quad (14)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{\text{new}} &= \sigma \left(u + \frac{du}{d\alpha} \Delta\alpha, T + \frac{dT}{d\alpha} \Delta\alpha, \alpha + \Delta\alpha \right) \\ \sigma^{\text{old}} &= \sigma(u, T, \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

热位移的灵敏度方程式 (12) 与热位移计算公式 (10) 在形式上相同, 而且方程左端的矩阵分解已经在式 (10) 求解中完成. 所以, 灵敏度分析可以利用有限元分析的模块, 主要工作是式 (12) 右端向量计算和回代求解方程.

3 算 例

例 1 温度载荷和机械载荷作用下的结构热应力灵敏度分析. 平面结构及其有限元网格如图 1 所示, 边长 $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 1 \text{ cm}$, 厚度 $h = 1 \text{ cm}$. 材料的弹性模量 $E = 2.0 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 热膨胀系数 $\alpha = 10^{-4}$, 导热系数 $\lambda = 2.58 \times 10^3 \text{ W/(cm} \cdot ^\circ\text{C)}$, 热容 $\rho_c = 6.2 \times 10^5 \text{ J/(cm}^3 \cdot ^\circ\text{C)}$. 结构所有节点的初始温度为 $T_0 = 10^\circ\text{C}$. 上、下表面为绝热边界, 在边界 AD 上有 $q = 5.0 \times 10^6 \text{ W/cm}^2$ 的热流输入, 边界 BC 上的节点给定温度均为 $T_b = 10^\circ\text{C}$. AD 边固支, 在 BC 边上作用有均匀拉伸的机械荷载, 单位长度荷载密度为 20 N/cm^2 . 取 CD 边和 AB 边中点的纵坐标做为设计变量, 分别控制 CD 边和 AB 边形状按二次曲线变化. 计算 $t = 1 \text{ s}$ 时刻 A 点处 von Mises 应力对设计变量的导数, 并用有限差分方法校核其精度.

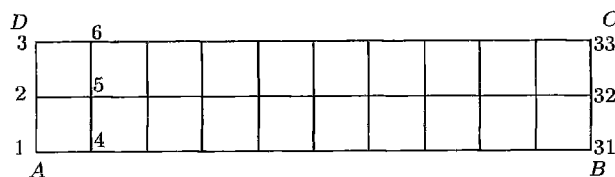


图 1 平面结构板有限元网格
Fig.1 Finite element mesh of plate

图 2 和图 3 分别为温度载荷和机械载荷在总载荷中所占相对比例不同时, 应力灵敏度计算结果及其与有限差分计算的比较. 其中, 耦合灵敏度分析是完整地采用式 (12) 和 (13), 非耦合灵敏度分析是略去了式 (12) 和 (13) 中的温度场导数项. 图 2 的计算是机械荷载密度 $F_x = 20 \text{ N/cm}^2$ 不变, 热流密度从零开始逐步增加. 图 3 的计算是输入的热流密度 $q = 5.0 \times 10^6 \text{ W/cm}^2$ 不变, 机械荷载密度从零开始逐步增加. 从计算结果可以明显看出: (1) 无论两种载荷的比例如何, 耦合热应力灵敏度分析的计算精度都很好, 在图中与有限差分几乎重合的; (2) 忽略温度场导数的非耦合热应力灵敏度分析是不精确的, 其误差随着温度载荷所占比例增加而增大.

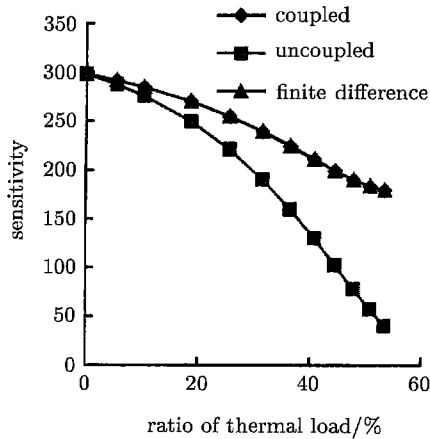


图 2 不同温度载荷比例下热应力灵敏度
Fig.2 Thermal stress sensitivity vs.
ratio of thermal load

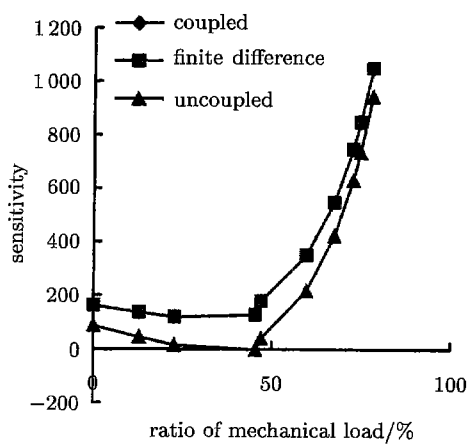


图 3 不同机械载荷比例下热应力灵敏度
Fig.3 Thermal stress sensitivity vs.
ratio of mechanical load

例 2 火车车轮轮辐截面形状优化的灵敏度分析, 见图 4. 该课题分析车轮在制动过程中同时受到轮轨集中力和制动摩擦热引起的热载荷情况下, 结构应力对截面形状设计变量的灵敏度. 车轮在制动过程产生的温度高达 500°C , 因此结构热应力占的比重相当大. 由于是轴对称结构受非轴对称集中力载荷和轴对称热载荷作用, 计算中采用了有限元轴对称单元, 对集中力做 Fourier 单元展开. 结构的最大应力出现在腹板的外侧面 (1 区域) 和内侧面 (2 区域), 见图 5 箭头所示. 截面形状采用映射单元描述 (见图 5), 设计变量为映射单元边界上的控制点的坐标值, 其中腹板的边界采用了样条函数来模拟, 结构的有限元网格由映射单元通过映射法生成.

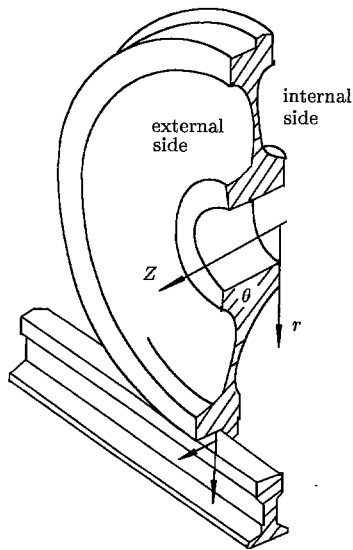


图 4 火车车轮示意图
Fig.4 Train wheel

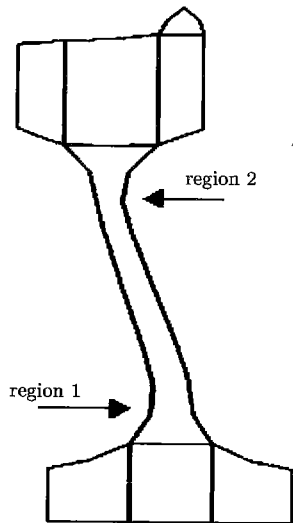


图 5 车轮截面映射单元
Fig.5 Sectional figure of train wheel
and mapping element mesh

表 1 和表 2 给出腹板高应力区域对应的设计变量的灵敏度计算结果, 考虑了耦合灵敏度和非耦合灵敏度 (不考虑温度场灵敏度), 设计变量为结构腹板边界上的控制点. 与有限差分得到的灵敏度相比, 耦合灵敏度分析给出了良好的计算精度, 而非耦合灵敏度分析在某些情况下能得出较好的结果, 但是在很多情况下精度很低、甚至是给出错误的计算结果, 原因是非耦合的分析没用考虑温度场的灵敏度在热应力中的耦合作用. 从表 1 和表 2 还可以看出 1 区域的热耦合作用较大, 因为这一区域的温度梯度大, 热应力的作用显著. 本例的灵敏度计算结果表明, 在车轮的截面形状优化中必须考虑热耦合作用.

表 1 区域 1 热应力灵敏度
Table 1 Sensitivity of thermal stress of region 1

No. of design node	16			18			20		
No. of finite element	245	246	247	245	246	247	245	246	247
finite difference method	2.453	1.324	-0.162	-1.162	0.206	1.450	-1.315	-1.609	-1.653
coupled method	2.538	1.227	-0.086	-1.070	0.121	1.554	-1.212	-1.675	-1.557
uncoupled method	-0.124	1.192	2.515	1.516	0.090	-1.097	-1.609	-1.730	-1.264

表 2 区域 2 热应力灵敏度
Table 2 Sensitivity of thermal stress of region 2

No. of design node	25			27			30		
No. of finite element	530	531	532	530	531	532	530	531	532
finite difference method	1.233	1.268	0.913	-2.331	-1.372	0.101	0.228	-1.184	-2.225
coupled method	1.185	1.445	0.993	-2.366	-1.222	0.145	0.170	-1.054	-2.184
uncoupled method	1.280	1.538	1.079	-2.074	-0.949	0.382	0.379	-0.835	-1.978

参 考 文 献

1 Sobieski JS, Haftka RT. Multidisciplinary aerospace design optimization: survey of recent developments. *Structural Optimization*, 1997, 14(1): 1~23

2 Livne E. Multidisciplinary design optimization of aerospace systems. *J Aircraft*, 1999, 36(1): 9~10

3 Xu S, Grandhi RV. Structural optimization with thermal and mechanical constraints. *J Aircraft*, 1999, 36(1): 29~35

4 Alifanov OM. *Inverse Heat Transfer Problems*. Berlin: Springer-Verlag, 1994

5 顾元宪, 赵红兵, 亢战, 关振群. 瞬态热传导问题的优化设计与灵敏度分析. 大连理工大学学报, 1999, 39(2): 158~165 (Gu Yuanxian, Zhao Hongbing, Kang Zhan, Guan Zhenqun. Design optimization and sensitivity analysis of transient heat transfer problems. *Journal of Dalian University of Technology*, 1999, 39(2): 158~165 (in Chinese))

6 Gu YX, Zhang HW, Guan ZQ et al. New generation software of structural analysis and design optimization—JIFEX. *Int J Struct Eng Mech*, 1999, 7(6): 589~599

7 Cheng GD, Gu YX, Zou YY. Accuracy of semi-analytic sensitivity analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1989, 6: 113~128

8 Gu YX, Cheng GD. Structural shape optimization integrated with CAD environment. *Structural Optimization*, 1990, 2(1): 23~28

SENSITIVITY ANALYSIS AND DESIGN OPTIMIZATION OF THERMAL-STRESS COUPLED STRUCTURES¹⁾

Gu Yuanxian Zhao Hongbing Chen Biaosong Kang Zhan

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dept. of Engineering Mechanics,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract Design sensitivity analysis concerns the relationship between the design variables and structural response and state variables. Sensitivity information is very important for design optimization, inverse problem, stochastic analysis and probability analysis of engineering structures. This paper addresses the research on the sensitivity analysis of thermal structures subjected to the steady/transient heat conduction and mechanical load. The formulas of sensitivity analysis for steady/transient heat conduction are presented in conjunction with semi-analytical method. The conventional time difference method, θ -time difference scheme, is employed to solve the sensitivity equations of transient heat conduction. It is pointed out that the method of sensitivity analysis for heat conduction has good numerical accuracy and computational efficiency. The variation of temperature field and its influence on the thermal stresses are considered. The thermal deformation is viewed as a steady or quasi-static process. The method of sensitivity analysis for coupled thermal stresses has been proposed. The coupling effect of the temperature derivatives with respect to design variable on the thermal stress sensitivity is particularly presented. Detailed analysis shows that the coupling factor makes a great effect on the sensitivities of thermal stresses. The methods presented in the paper can be applicable for shape and size design variables. Two numerical examples are given to demonstrate the correctness of the methods. One is the shape sensitivity analysis of a plate subjected to different ratio of thermal load and mechanical load. The other is the sensitivity analysis of sectional shape optimization of train wheel. Numerical results validate the methods and show that for design optimization of thermal-stress coupling structures, the coupling sensitivity should not be neglected.

Key words sensitivity, heat conduction, thermal stress, thermo-structure, coupled structure

Received 21 February 2000, revised 29 December 2000.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (19872017, 59895401) and the Special Funds for National Key Basic Research of China the NKBRF of China (G1999032805).