

# 结构灵敏度分析及计算方法概述

唐明裴, 阎贵平

(北方交通大学 土建学院, 北京 100044)

**摘要:** 从结构优化、系统的理解和条件、结构模型发展和参数识别等方面概述了采用灵敏度分析 (SA) 的原因, 又从设计变量、结构参数、结构响应和函数性态等四个不同角度上进行了 SA 的分类, 并从基于计算策略和实验数据两个方面介绍了 SA 的计算方法。简要回顾了形状和尺寸 SA、随机 SA、应力/应变 SA、位移 SA 和特征值/特征向量 SA 的最新进展和应用。对基于结构响应的 SA 综合考虑静态和动态响应, 重点关注特征值和特征向量的导数求解等难点问题。

**关键词:** 计算力学; 结构分析; 灵敏度分析; 动力优化; 综述

**中图分类号:** O39: TU311 **文献标识码:** A

## 1 引言

灵敏度即求导信息, 灵敏度分析 (SA) 是一种度量, 是一种评价因设计变量或参数的改变而引起结构响应特性变化率的方法。结构系统灵敏度的研究是一个很特别的领域, 它是当前计算力学和结构工程领域的主要研究方向之一。实际上, 在确立结构优化、可靠性评估和参数识别时, 结构 SA 是一个主要的先决条件。从 70 年代早期开始, 有关 SA 的解析公式已在许多著作中报道<sup>[1~5]</sup>, 为了提高求解效率和计算时间, 其后许多学者提出了 SA 的半解析公式<sup>[6~11]</sup>。从结构响应的角度考虑, 许多学者提出了不同的方法用于发展结构静态响应<sup>[5, 11~20]</sup>和结构动态响应<sup>[17, 21~29]</sup>的灵敏度计算。普通结构的 SA 是基于结构参数完全确定的假定, 而在随机优化和可靠性设计中, 设计变量和采用的执行函数包含不确定性参数, 有必要估计有关设计变量的随机灵敏度, 随机有限元法已经发展用于考虑不确定性参数的系统, 在许多论著中阐述了这方面的研究情况<sup>[26, 30~34]</sup>。

SA 在计算力学和结构分析中发展成为主要的研究领域, 并有广泛的应用。这一方面是由于理论公式的发展, 另一方面是计算机硬件和软件的进步。近三十年的研究表明, SA 有广阔的发展前景。

## 2 采用 SA 的原因

SA 用于估计因设计变量或参数的改变对结构行为的影响, 它之所以成为当前计算力学和结构工程的主要研究方向之一, 是因为人们已经认识到结构 SA 在确认系统的前后关系、优化算法、响应量测的仪器精度、系统性能的可靠性评估以及其他的结构过程等方面的各种用途<sup>[35]</sup>, 主要可从以下几个方面来看:

(1) 从结构优化来看, 第一, 评价结构优化求解的可行性; 第二, 当优化策略改变时, 识别结构的临界值、极限值或破坏值; 第三, 研究结构的子优化求解问题, 确定最优解的搜索方向, 建立近似方程或用于构造优化迭代计算公式以及进行结构动力设计修改。

(2) 从增加系统的理解和条件来看, 第一, 判断系统输入和输出变量间的关系; 第二, 加深理解系统输入和输出变量间的关系; 第三, 发展系统的假定条件。

(3) 从结构模型发展来看, 第一, 测度模型的有效性或精度; 第二, 搜寻模型中的错误信息; 第三, 简化模型, 节省计算时间; 第四, 校准模型, 以便确定那些具有不确定性试验所允许的参数估计, 有利于预防那些病态问题; 第五, 复制模型中

收稿日期: 2002-05-14

作者简介: 唐明裴 (1976—), 男, 湖南邵阳人, 硕士研究生。

缺少或丢失的数据；第六，区分获得信息的优先次序；第七，区别模型中取得最大值的实验条件。

(4) 从参数识别来看，第一，识别输入参数空间中的临界区域；第二，确定好几百个不确定输入的系统中有重大影响的参数；第三，如果一系列输入参数可以用来说明大部分输出方差，这有利于确认基于方差的 SA 技术；第四，识别最重要的参数降低所研究的空间维数；第五，确保依赖于模型中输入参数的输出参数有合理的物理解释；第六，确定一个数量基础，这个数量基础由两部分组成，一是所期望不确定性的部分应归于参数估计不确定性，二是有多少结构不确定性。

### 3 SA 的分类

SA 从设计变量的角度考虑，有形状灵敏度和尺寸灵敏度之分。形状灵敏度主要考虑节点位置等设计变量，尺寸灵敏度主要考虑截面尺寸等设计变量。按结构参数可分为确定性灵敏度和不确定性灵敏度，其中结构参数的不确定性实际包括两种类型的不确定性，即随机不确定性和客观不确定性<sup>[36]</sup>，当所研究的系统表现不同的行为方式时（如设计变量有许多不确定变量），发生随机不确定性；客观不确定性来自于人类存在的知识水平，这跟分析假定中的正确性有关。因此，随机不确定性是研究系统的属性，客观不确定性是执行研究分析的属性。从结构的静动态响应来分，跟静态响应有关的灵敏度有应力灵敏度、应变灵敏度和位移灵敏度，一般知道了节点位移灵敏度，就可以计算应力或应变灵敏度；跟动态响应有关的灵敏度有特征值/特征向量灵敏度、瞬态灵敏度、频率灵敏度和屈曲荷载灵敏度。从结构函数的性态来分，有线性灵敏度和非线性灵敏度<sup>[37]</sup>。不同类型的 SA 简要概括在图 1 中。

### 4 SA 的方法

SA 基于摄动技术，摄动法又称小扰动法，在确定性和非确定性的非线性问题中均有广泛的应用，这是一种本质上基于无穷小概念的分析思想，它的成功或失败与这种理想化的思想在多大程度上贴近所要研究的实际问题有关。通过线性规划中

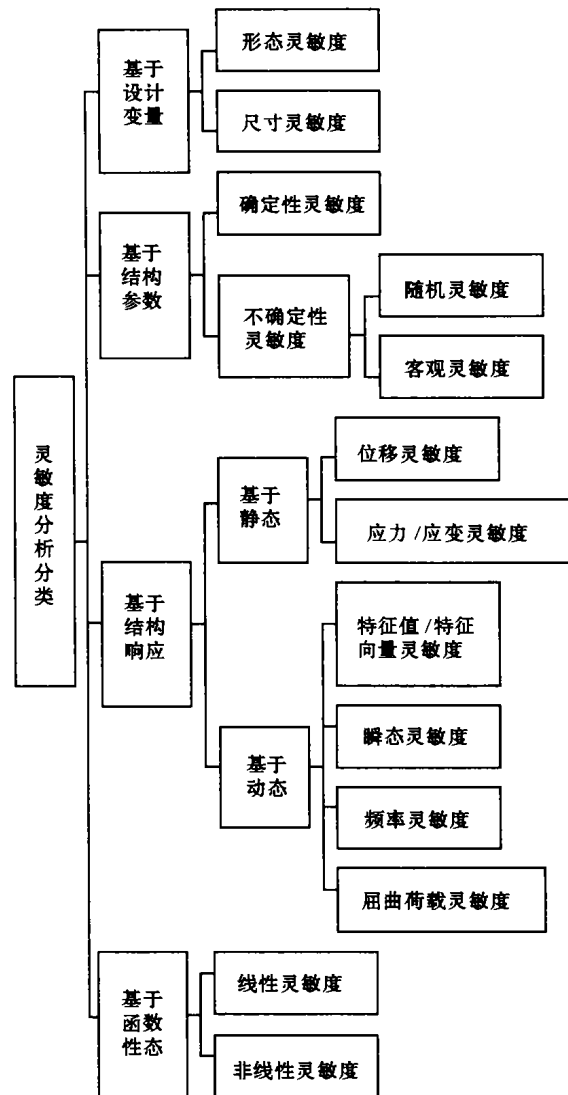


图 1 SA 的分类

SA 的一般方法，可以利用包含在线性规划求解算法的重要信息，去建立每一个目标函数的系数的灵敏度范围，这种构造不仅仅用于对时间的变化，而且从某种意义上说可用于灵敏度区域的构造，具体所属关系可从图 2 中表示出来。

给出线性规划形式，通过对系列结果进行分析、求解、计算，提供有价值的信息，来处理结构的不确定性，这些结构的不确定性范围可以通过执行不同类型的 SA 来获得，这些 SA 依赖于不确定性结构的本质特性：即摄动分析、容差分析、对称容差分析、参数 SA 和普通 SA。摄动分析提供了最大的摄动范围，容差分析提供了每个参数值的范围，对称容差分析提供了所有不确定性参数值的单侧范围，参数分析提供了非独立参数值的最大变化

幅值, 普通 SA 在所有其它参数保持额定值的条件下提供了特殊参数值的变化范围。

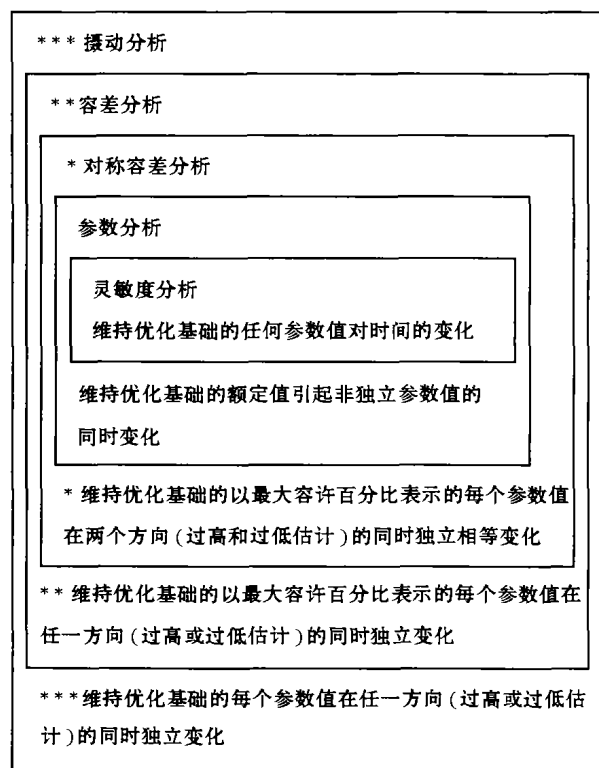


图2 线性规划中的 SA

SA 的方法按计算策略可分为离散法和变分法。其中离散法可从两大方面考虑：一方面基于理论公式，包括直接法和伴随法；另一方面基于有限元理论，有解析法、有限差分法、半解析法和随机有限元法。而变分法有直接法和伴随法两种。按实验数据可分为回归法和概率法<sup>[38,39]</sup>。具体 SA 的方法概括在图3中。

## 5 近几年 SA 的最新进展及其应用

对于形状和尺寸 SA, Bathma 和 Ronda<sup>[15]</sup> 发展了一套合适的离散公式用于大位移下形状和尺寸设计 SA, 能够把结构优化直接包含到已建立的有限元分析准则中。对桁架结构的大变形模型利用总体 Lagrangian 列式法, 通过伪有限元技术来离散 SA 程序中的变分公式, 在执行设计 SA 时选用直接微分方法, 通过 200 根桁架的灵敏度数据, 证实了改进的离散化伪有限元适合于不同类型的 SA, 这些离散形式具有通用性, 可以应用到任何已建立的有限元分析准则 ABAQUS 中去。

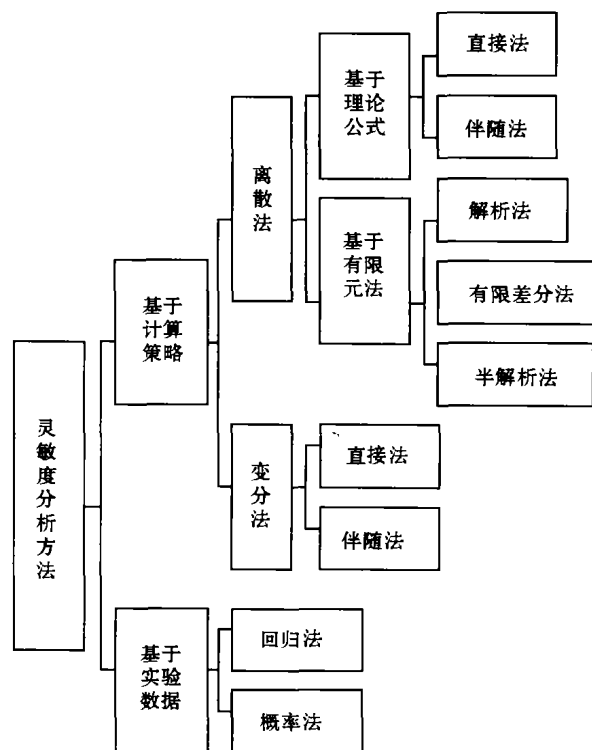


图3 SA 的方法

随机 SA 有两种求解方法, 即 Neumann 展开式求解和摄动法。Bhattacharyya 和 Chakraborty<sup>[34]</sup> 强调了 3D 粘弹性问题的 SA, 主要研究了自由响应 SA 中随机有限元法的应用。自由参数的随机模型基于普通的 2D 局部平均法, 可以推广到 3D 的情况, 利用 Choleski 分解技术进行数值模拟, 基于有限元模拟法的 Neumann 展开式扩展到随机 SA 中, 这种技术能有效节省计算时间。

在应力/应变 SA 方面已有许多学者做了大量的研究<sup>[11,15-17,20]</sup>。Bakshi 和 Pandey<sup>[11]</sup> 选用三类基于 Hellinger-Reissner 原理的混合有限单元, 并利用半解析法来计算应力灵敏度, 进而说明该算法的改进效果, 并将该方法应用到平面应力问题和悬臂梁问题中, 具有满意的精度和效果; Bothma 和 Ronda<sup>[15]</sup>, Sergeyev 和 Mroz<sup>[17]</sup> 分别通过离散 SA 程序中的变分公式、最大有效应力对应力灵敏度进行了分析, 得出了应力灵敏度分析表达式; Li 等<sup>[16]</sup> 在最小化结构的最大应力时描述了一个设计厚度变化的新的寻优标准, 通过有限元分析, 推导出应力灵敏度数目来估计因其他单元厚度变化而引起单元应力变化的影响。顾元宪等<sup>[20]</sup> 在结构热-应力耦合问题中, 考虑了温度场随设计变量的变化及其对热应力的影响, 提出瞬态温度场与结构热应力耦合的灵敏

度分析方法, 分别利用隐式  $\theta$  时间差分法、半解析法求解瞬态热传导方程和瞬态热传导灵敏度方程, 具有较高的求解效率, 在热传导这种标量场问题中可得到较高的计算精度, 并通过温度载荷和机械载荷作用下的结构热应力灵敏度分析以及火车车轮轮辐截面形状优化的灵敏度分析两个算例, 说明耦合灵敏度分析具有良好的计算精度。

在位移 SA 方面也有许多学者做了深入的研究<sup>[5,15,18,19]</sup>。Pandey 和 Bakshi<sup>[5]</sup>在修改的 Hu-Washizu 变分原理的基础上, 用改进的二维混合单元推导分析响应灵敏度表达式, 所阐明的计算方法用于灵敏度计算, 同样也可用部分符号算法来计算灵敏度, 并通过直线悬臂梁和曲线悬臂梁两个实例, 说明混合单元在计算灵敏度方面的优越性能。文献<sup>[15]</sup>中的变分公式同样适合于位移 SA。Moita 等<sup>[18]</sup>用高阶剪力变形理论发展的离散模型对具有非线性响应的分层板和壳结构进行 SA 和优化, 几何非线性分析基于更新的 Lagrangian 公式, 结合具有自动调节弧长过程的 Newton-Raphson 迭代技术, 并考虑规定节点的广义位移、结构材料体积、极限荷载等目标函数以及位移和应力约束失效准则。为了提高形状 SA 中伪载荷向量的有限差分估计, Parente 和 Vaz<sup>[19]</sup>提出一种新的方法来改进灵敏度的半解析法, 该方法基于自由体平衡条件和刚体模型的精确微分, 能够有效应用于线性和非线性结构, 并能消除传统半解析法中出现的误差。

对于特征值/特征向量 SA 的方法, 在许多论著中已提出<sup>[28,29]</sup>。Liu 等人<sup>[28]</sup>利用基于随机有限元的 SA, 建立了基本设计变量中结构模态参数的灵敏度矩阵, 来研究结构参数随机性对结构的自振频率和模态的影响。到目前为止, 在结构动力可靠性分析如耐震结构可靠性分析中, 仅仅考虑外部载荷变化而不包括结构参数的变化是合理的。由于系统动力参数(自振频率和模态)的灵敏度在不同损伤位置变化很大, 这有利于结构非破坏性损伤识别。Zhang 等人<sup>[29]</sup>通过 3D 有限元预测和现场振动量测来研究 Kap Shui Mun 斜拉桥的动力特性, 首先进行全面的特征值灵敏度研究, 说明不同结构参数(包括连接和边界条件)对所关心模型的影响, 然后选择一系列结构参数来调整, 用迭代方式来更新有限元模型, 使得预测和现场量测的自然频率差最小, 最终的有限元模型可以提供跟现场量测一致的自然频率, 有利于更精确的动力响应预测。

Sergeyev 和 Mroz<sup>[17]</sup>为确定线弹性空间框架的

最优节点位置和横截面参数, 在应力和自由频率约束下, 利用解析微分法执行单频和多频的 SA, 并通过连续二次规划问题获得最优设计, 发现所应用的方法既可靠又精确。

基于实验数据的 SA 方法在许多论著中也有报道<sup>[38,39]</sup>。Oh 和 Yang<sup>[38]</sup>论述了预应力混凝土箱梁桥的徐变和收缩影响的统计分析和 SA 的方法, 这些不确定的结构响应可能包括: 徐变和收缩模型的不确定性、参数变量和环境条件。对每个输入变量, 执行延时的结构分析来产生结构响应数据, 然后进行分析统计。在所观察的秩的计算中有部分秩相关系数和标准秩回归系数, 用所检测的两种量测来确定对于每个输入变量的输出灵敏度。对一个实际结构采用所推荐的方法, 结果表明, 相对模型输出不确定性, 徐变模型不确定性因素和相关湿度应该是最主要因素, 并提出了确定那些不确定结构分析的实际方法。Brownjohn 和 Xia<sup>[39]</sup>将基于灵敏度模型更新技术应用到 Safti Link 桥的动力评估上, 在基于补偿函数法的参数估计公式中, 真实响应或实验响应表示为分析响应、结构参数和灵敏系数矩阵的函数, 将 Taylor 级数展开式限定在线性项, 得出灵敏度矩阵。在原型测试测得的模型数据的基础上, 通过修改混凝土的弹性模量和结构几何等不确定结构参数, 相对于有限元分析获得的模拟动力属性有了明显的提高。

## 6 总 结

(1) 结构的 SA 方法从解析法发展到半解析法和改进的半解析法, 以便提高计算精度和收敛速度, 减少分析误差;

(2) 基于实验数据的 SA 方法是一种可靠有效的分析方法, 具有广阔的发展前景;

(3) 结构的 SA 从结构参数的确定性分析发展到不确定性分析, 其中许多学者对随机不确定性分析作了广泛深入的研究, 取得了很大的进步, 而对客观不确定性研究较少, 值得人们关注;

(4) 大部分研究对基于结构响应的 SA 只考虑了结构响应的一个方面, 如静态响应或动态响应, 而同时综合考虑静态响应和动态响应的 SA 的研究较少, 可作为今后研究的发展方向;

(5) 结构动力灵敏度分析将是结构动力优化研究中的热点课题。除了广泛深入地结构特征值、特征向量灵敏度和结构位移与单元应力响应灵敏度

的求解提出各种有效的计算方法之外,还应重点对特征值和特征向量的导数求解等难点问题予以关注。而其它一些与结构动力灵敏度分析密切相关的

研究课题,如结构动力重分析、结构动力修改和结构振动最优控制等,在未来亦将继续作为研究人员关注的热点。

### 参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz O C, Campbell J S. Shape Optimization and Sequential Linear Programming[M]. Optimum Structural Design, Theory and Applications, R. H. Gallagher and O. C. Zienkiewicz, eds., Wiley, London, 1973: 109—126.
- [2] Ramakrishnan C V, Francavilla A. Structural Shape Optimization Using Penalty Functions[J]. J. Struct. Mech., 1974, 3: 403—422.
- [3] Wang S Y, Sun Y, Gallagher R H. Sensitivity Analysis in Shape Optimization of Continuum Structures[J]. Comp. and Struct., 1985, 20: 855—867.
- [4] Kleiber M, Antunez H, Hien T D, Kowalczyk P. Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics[M]. Wiley, New York, 1997.
- [5] Pandey P C, Bakshi P. Analytical Response Sensitivity using Hybrid Finite Elements[J]. Comp. and Struct., 1999, 70: 525—534.
- [6] Pederson P, Cheng G, Rasmussen J. On Accuracy Problems of Semi-analytical Sensitivity Analysis[J]. Mechanics of Structures and Machines. 1989, 17(3): 373—384.
- [7] Cheng G, Gu Y, Zhou Y. Accuracy of Semi-analytical Sensitivity Analysis[J]. Finite Elements in Analysis and Design. 1989, 6: 113—128.
- [8] Cheng G, Gu Y, Wang X. Improvement of Semi-analytical Sensitivity Analysis and MCADS[C]. In: Eschenhaur HA, Mattheck C, Olhoff N, editors. Engineering Optimization in Design Processes. Berlin: Springer, 1991: 211—223.
- [9] Cheng G, Olhoff N. Rigid Body Motion Test in Semi-analytical Sensitivity Analysis[J]. Comp. and Struct., 1993, 46(3): 515—527.
- [10] Olhoff N, Rasmussen J, Lund E. A Method of Exact Numerical Differentiation for Error Elimination in Finite Element Based Semi-analytical Shape Sensitivity Analysis[J]. Mechanics of Structures and Machines, 1993, 21(1): 1—66.
- [11] Bakshi P, Pandey P C. Analytical Response Sensitivity using Hybrid Finite Elements[J]. Comp. and Struct., 2000, 70: 281—297.
- [12] Barthelmy B, Chen C T, Haftka R T. Sensitivity Approximation of the Static Structural Response[C]. In: First World Congress on Computational Mechanics, Austin, Tx, Sept, 1986.
- [13] Haftka R R, Adelman H M. Recent Development in Structural Sensitivity Analysis[J]. Structural Optimization I, Springer, New York, 1989: 137—151.
- [14] Hien T D, Kleiber M. Stochastic Structural Design Sensitivity of Static Response[J]. Comp. and Struct., 1991a, 38(5/6): 659—667.
- [15] Bothma A S, Ronda J. Sensitivity and Optimization Procedures for Truss Structures under Large Displacement[J]. Structural Engineering and Mechanics, ASCE, 1999, 7(1): 111—126.
- [16] Li Q, Steven G P, Xie Y M. Evolutionary Structural Optimization for Stress Minimization Problems by Discrete Thickness Design[J]. Comp. and Struct., 2000, 78: 769—780.
- [17] Sergeyev O, Mroz Z. Sensitivity Analysis and Optimal Design of 3D Frame Structures for Stress and Frequency Constraints[J]. Comp. and Struct., 2000, 76: 167—185.
- [18] Moita J S, Barbosa J I, Mota Soares C M, Mota Soares C A. Sensitivity Analysis and Optimal Design of Geometrically Non-linear Laminated Plates and Shells[J]. Comp. and Struct., 2000, 76: 407—420.
- [19] Parente Jr E, Vaz L E. Improvement of Semi-analytical Design Sensitivities of Non-linear Structures using Equilibrium Relations[J]. Int. J. Numer. Mech. Engng. 2001, 50: 2127—2142.
- [20] 顾元宪, 赵红兵, 陈飏松, 亢战. 热-应力耦合结构灵敏度分析方法[J]. 力学学报, 2001, 33(5): 685—691.
- [21] Camarda C J, Adelman H M. Implementation of Static and Dynamic Structural Sensitivity Derivative Calculation in the Finite Element Based Engineering Analysis Language System(EAL)[M]. NASA-TM-85743, 1984.
- [22] 林家浩. 结构动力优化中的灵敏度分析[J]. 振动与冲击, 1985, 4(1): 1—6.

- [23] 陈集风,许慰平. 振频、振型及振型节点坐标的灵敏度分析[J]. 航空学报, 1987, 8(10): B476—481.
- [24] 王成端,杨肃. 动态优化中的灵敏度分析研究[J]. 计算结构力学及其应用, 1991, 8(1): 77—83.
- [25] Hien T D, Kleiber M. Stochastic Design Sensitivity in Structural Dynamics[J]. Int. J. Numer. Mech. Engng. 1991b, 32: 1247—1265.
- [26] Datong S, Suhuan C, Zhipin Q. Stochastic Sensitivity Analysis of Eigen Values and Eigen Vectors. Comp. and Struct. [J], 1995, 54(5): 891—896.
- [27] 张慧生,张振宇,王文亮. 任意非亏损系统特征灵敏度分析的直接摄动法[J]. 上海力学, 1998, 19(1): 22—28.
- [28] Liu C, Wang T L, Qin Q. Study on Sensitivity of Modal Parameters for Suspension Bridges[J]. Structural Engineering and Mechanics, ASCE, 1999, 8(5): 453—464.
- [29] Zhang Q W, Chang T Y P, Chang C C. Finite-element Model Updating for the Kap Shui Mun Cable-stayed Bridge[J]. Bridge Engineering, ASCE, 2001, 6(4): 285—293.
- [30] 陈塑寰. 随机参数系统的随机特征值[J]. 吉林工业大学学报, 1987, 4: 12—18.
- [31] Yamazaki F, Shinozuka M, Dasgupta G. Neumann Expansion for Stochastic Finite Element Analysis[J]. Engng. Mech., ASCE, 1988, 114(8): 1335—1354.
- [32] Manohar C S, Ibrahim R A. Progress in Structural Dynamics with Stochastic Parameter Variations: 1987—1998[J]. Appl. Mech. Rev., 1999, 52(5): 177—197.
- [33] Chakraborty S, Dey S S. An Efficient Stochastic Finite Element Method for Random Field Problems[J]. Appl. Mech. and Engng., 1999, 4(2): 45—71.
- [34] Bhattacharyya B, Chakraborty S. Sensitivity Statistics of 3D Structures under Parametric Uncertainty[J]. Engng. Mech., 2001, 127(9): 909—914.
- [35] Arsham H. Perturbation Analysis of General LP Models: A Unified Approach to Sensitivity, Parametric Tolerance, and More-for-less Analysis[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1990, 12: 1437—1446.
- [36] Helton J C, Johnson J D, Shiver A W, Sprung J L. Uncertainty and Sensitivity Analysis of Early Exposure Results with the MACCS Reactor Accident Consequence Model[J]. Reliability Engng. and Sys. Safety, 1995, 48(2): 91—127.
- [37] Ryu Y S, Haririan M, Wu C C, Arora J S. Structural Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response[J]. Comp. and Struct., ASCE, 1985, 21(1/2): 245—255.
- [38] Oh B H, Yang H. Sensitivity Analysis of Time-dependent Behavior in PSC Box Girder Bridges[J]. Struct. Engng., ASCE, 2000, 126(2): 171—179.
- [39] Brownjohn J M W, Xia P Q. Dynamic Assessment of Curved Cable-stayed Bridge by Model Updating[J]. Struct. Engng., ASCE, 2000, 126(2): 252—260.

## Overview of Structural Sensitivity Analysis and Computation Method

TANG Ming-pei, YAN Gui-ping

(Northen Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** In the paper, the reasons why sensitivity analysis is adopted are summarized in view of structural optimization, understanding and qualification of the system, model development and parameter identification. The classification based on design variable, structural parameters, structural responses and property of function is given. The computational methods of sensitivity analysis based on computational strategy and the data of experiment are introduced. The new advances and applications of shape and size SA, stochastic SA, the stress and strain SA, displacement SA, and eigen values/ eigen vectors SA in recent years are overviewed. Only one of the static and dynamic response is taken into account in most researches on structural response SA. The emphasis about derivative solving of eigen values and eigen vectors is mainly considered.

**Key words:** Computational mechanics; Structural analysis; Sensitivity analysis; Power optimization; Overview

(责任编辑 贺振中)