15.093 最优化方法

第 **7** 课：灵敏度分析

1 导学

1.1 问题 幻灯片 1

$$
\begin{aligned}
z = \min \quad & c'x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- 目标函数中的价值系数 c 的变化与目标函数值 z 的关系？资源数量 b 的变化与目标函数值 z 的关系？
- 改变 b, c, A 中的任意一个， z 会有什么变化？
- 如果加入新的约束条件，引入新的变量， z 会有什么变化？
- 重要性：找到线性优化与实际应用之间的相关性

2 概述 幻灯片 2

1. 全局灵敏度分析
2. 局部灵敏度分析
   （a）改变 b 的值
   （b）改变 c 的值
   （c）增加一个变量
   （d）增加一个约束条件
   （e）改变 A 的值
3. 具体例子

3 全局灵敏度分析

3.1 依赖于 c 幻灯片 3

$$
\begin{aligned}
G(c) = \min \quad & c'x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

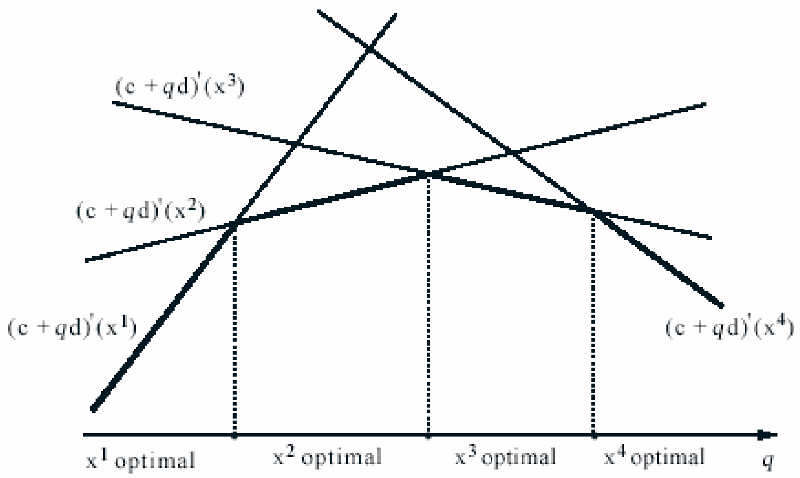
是 c 的一个凹函数

3.2 依赖于 b 幻灯片 4

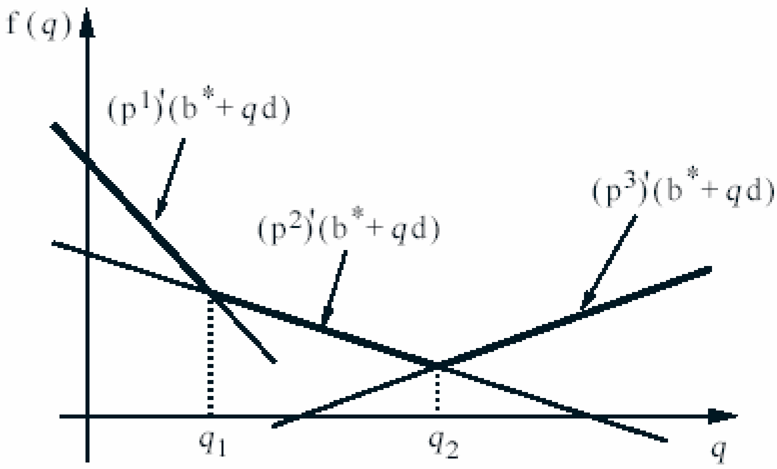
原函数 对偶函数

$$
\begin{aligned}
F(b) = \min \quad & c'x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
F(b) = \max \quad & p'b \\
s.t. \quad & p'A \leq c'
\end{aligned}
$$

是 b 的一个凸函数



(c + qd)'(x3)
(c + qd)'(x2)
(c + qd)'(x1)
(c + qd)'(x4)
x1 optimal
x2 optimal
x3 optimal
x4 optimal
q



f (q)
(p1)'(b*+ qd)
(p2)'(b*+ qd)
(p3)'(b*+ qd)
q1
q2
q

4 局部灵敏度分析

幻灯片 5

$$
\begin{aligned}
z = \min \quad & c'x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

基 B 最优的含义？

1． 可行性条件： $B^{-1}b \geq 0$

2． 最优性条件： $c'\text{-}c_B^{'}B^{-1}A \geq 0'$

幻灯片 6

- 以假设改变 b 或 c 为例
- 如何确定基 B 仍然是最优的？
- 需要检查是否符合可行性条件和最优性条件

5 局部灵敏性分析

5.1 改变 b 的值

幻灯片 7

b_i 发生变化，变为 $b_i + \Delta$

$$
\begin{aligned}
(P)\ \min \quad & c'x \\
s.t. \quad & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{aligned}
(P')\ \min \quad & c'x \\
s.t. \quad & Ax = b + \Delta e_i \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- B 是 (P) 的最优基
- B 是 $(P^{'})$ 的最优基吗？

需要进行检查：

幻灯片 8

1． 可行性：$B^{-1}(b + \Delta e_i) \geq 0$

2． 最优性：$c'\text{-}c_B^{'}B^{-1}A \geq 0'$

观察得到：

1． 改变 b 的值将影响可行性
2． 但不会改变最优性条件

幻灯片 9

$$
\begin{aligned}
& B^{-1}(b + \Delta e_i) \geq 0 \\
& \beta_{ij} = \left[B^{-1}\right]_{ij} \\
& \bar{b}_j = \left[B^{-1}b\right]_j \\
& \text{Thus,} \\
& (B^{-1}b)_j + \Delta(B^{-1}e_i)_j \geq 0 \Rightarrow b_j + \Delta\beta_{ji} \geq 0 \Rightarrow
\end{aligned}
$$

因此，

幻灯片 10

$$\max_{\beta_{ij}>0}\left(-\frac{\bar{b}_j}{\beta_{ij}}\right) \le \Delta \le \min_{\beta_{ji}<0}\left(-\frac{\bar{b}_j}{\beta_{ji}}\right)$$

$$\underline{\Delta} \le \Delta \le \overline{\Delta}$$

在这个范围内：

- 现有的基 B 是最优的
- $z = c_B^{'} B^{-1}(B + \Delta e_i) = c_B^{'} B^{-1} b + \Delta p_i$
- 如果 $\Delta = \overline{\Delta}$ 呢？
- 如果 $\Delta > \overline{\Delta}$ 呢？

现有的解不可行，但满足最优性条件 $\rightarrow$ 采用对偶单纯形法

5.2　改变 c 的值 幻灯片 11

现有的基 B 是否最优？

需要进行检查：

1．可行性：$B^{-1}(b + \Delta e_i) \ge 0$ ，不受影响

2．最优性：$c' \text{-} c_B^{'} B^{-1} A \ge 0'$ ，受影响

存在两种情况：

- x_j 为基变量
- x_j 为非基变量

5.2.1 x_j 为非基变量 幻灯片 12

c_B 不受影响

$(c_j + \Delta) - c_B^{'} B^{-1} A_j \ge 0 \Rightarrow \bar{c}_j + \Delta \ge 0$

如果 $\Delta \ge -\overline{c_j}$ ，解最优

如果 $\Delta = -\overline{c_j}$ 呢？

如果 $\Delta < -\overline{c_j}$ 呢？

5.2.2 x_j 为基变量 幻灯片 13

$$c_B \leftarrow \hat{c}_B = c_B + \Delta e_j$$

那么，

$$\left[c' - \hat{c}_B' B^{-1} A\right]_i \geq 0 \Rightarrow c_i - \left[c_B + \Delta e_j\right]' B^{-1} A_j \geq 0$$

$$\left[B^{-1} A\right]_{ji} = \bar{a}_{ji}$$

$$\bar{c}_i - \Delta \bar{a}_{ji} \geq 0 \Rightarrow \max_{\bar{a}_{ji} < 0} \frac{c_i}{a_{ji}} \leq \Delta \leq \min_{\bar{a}_{ji} > 0} \frac{\bar{c}_i}{\bar{a}_{ji}}$$

如果 Δ 的值超出了这个范围呢？采用原来的单纯形

5.3 加入一个新的变量 幻灯片 14

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & c'x + c_{n+1} x_{n+1} \\ s.t. \quad & Ax + A_{n+1} x_{n+1} = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

在新的问题中 $x_{n+1} = 0$ 还是 $x_{n+1} > 0$（i.e，这一改变是否有益处？） 幻灯片 15

现有的基为 B。解 是最优吗？

- 满足可行性条件
- 满足最优性条件：

$$c_{n+1} - c_B' B^{-1} A_{n+1} \geq 0 \Rightarrow c_{n+1} - p' A_{n+1} \geq 0 ?$$

- 如果满足，则解 为最优解
- 否则，采用原单纯形

5.4 增加一个约束条件 幻灯片 16

$$\begin{aligned} \min \quad & c'x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & c'x \\ s.t. \quad & Ax = b \\ & a_{m+1}' x = b_{m+1} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

如果现有的解可行，即为最优解；否则，应用对偶单纯形。

5.5 改变 A 的值 幻灯片 17

- 假设 $a_{ij} \leftarrow a_{ij} + \Delta$
- 假定 A_j 不属于基
- 可行性条件：$B^{-1}b \geq 0$ 不受影响
- 最优性条件：$c_l - c_B^{'} B^{-1} A_l \geq 0, l \neq j$ 不受影响
- 最优性条件：$c_j - p'(A_j + \Delta e_i) \geq 0 \Rightarrow \bar{c}_j - \Delta p_i \geq 0$
- 如果 A_j 是基呢？$BT, Exer.5.3$

6 例题

6.1 一个家具公司 幻灯片 18

- 一个家具公司制造书桌，餐桌和椅子
- 生产这些产品需要木材，修整工，木匠

	书桌	餐桌（ft）	椅子	**可得性**
利润	**60**	**30**	**20**	**-**
木材（ft）	**8**	**6**	**1**	48
修整工 hrs.	**4**	**2**	**1.5**	20
木匠 **hrs.**	2	1.5	0.5	8

6.2 表达式 幻灯片 19

决策变量：x_1 =# 书桌数，x_2 =#餐桌数，x_3 = 椅子数

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
s.t. \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

6.3 单纯形表 幻灯片 20

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & s_1 & s_2 & s_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & -60 & -30 & -20 \\
\text{初始表：} s_1 & = & 48 & 1 & & & 8 & 6 & 1 \\
s_2 & = & 20 & & 1 & & 4 & 2 & 1.5 \\
s_3 & = & 8 & & & 1 & 2 & 1.5 & 0.5
\end{array}
$$

最终表：

			s_1	s_2	s_3	x_1	x_2	x_3
		280	0	10	10	0	5	0
s_1	=	24	1	2	-8	0	-2	0
x_3	=	8	0	2	-4	0	-2	1
x_1	=	2	0	-0.5	1.5	1	1.25	0

6.4　表中的信息　幻灯片 21

- 基 B 的值？

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 8\\0 & 1.5 & 4\\0 & 0.5 & 2\end{bmatrix}$$

- B^{-1} 的值？

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\0 & 2 & -4\\0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}$$

幻灯片 22

- 最优解为多少？
- 最优解的函数值为多少？
- 结果是否符合常规？
- 对偶问题的最优解是多少？
- 木材这个约束条件的影子价格是多少？
- 整修时间这个约束条件的影子价格是多少？
- x_2 减少的成本是多少？

6.5　影子价格　幻灯片 23

整修时间这个约束条件的对偶价格为何为 10？

- 假设整修时间从 20 调整为 21
- 现在只生产书桌（x_1）和椅子（x_3）
- 整修时间和木匠时间为严格约束条件
- 这样改变后还存在最优解吗？

幻灯片 24

新的解：

$$\begin{aligned}8x_1+\quad x_3+s_1&=48\\4x_1+1.5x_3\quad&=21\\2x_1+0.5x_3\quad&=8\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}s_1&=26\quad 24\\x_1&=1.5\quad 2\\x_3&=10\quad 8\end{aligned}$$

解的改变：

$$z'-z=(60*1.5+20+10)-(60*2+20*8)10$$

幻灯片 25

- 假如你能以$7 每小时的价格雇用修整工加班，你会采用这样的方式吗？
- 检查

$$c_B^{'}B-^{1}=(0,-20,-60)\begin{pmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{pmatrix}=(0,-10,-10)$$

6.6　减少的成本 幻灯片 26

- x_2 减少的成本是 5 的含义？
- 假设你必须生产一张餐桌（$x_2=1$）
- 将会减少多少利润？

$$\begin{aligned}&8x_1+\quad x_3+s_1+\quad 6*1=48 && s_1=26\\ &4x_1+1.5x_3\quad +\quad 2*1=20 \quad\Rightarrow && x_1=0.75\\ &2x_1+0.5x_3\quad +1.5*1=\ 8 && x_3=10\end{aligned}$$

幻灯片 27

可以用另一种方法计算：如果 $x_2=1$

来自餐桌的直接利润为	$+30$
用去木材的费用	$-6*0=0$
整修所花的费用	$-2*10=-20$
木匠工作所花的费用	$-1.5*10=-15$
合计	-5

假设生产餐桌的收益从$30 上升到$34，应该生产餐桌吗？如果上升到$35，$36 呢？

6.7　成本范围 幻灯片 28

假设来自书桌的收益变为 60+Δ。Δ 为什么值时，现有的基仍是最优的？

最优性条件：

$$c_j-c_B^{'}B^{-1}A_j\geq 0\Rightarrow$$

$$p'=c_B^{'}B-1=[0,-20,-(60+\Delta)]\begin{bmatrix}1 & 2 & -8\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -0.5 & 1.5\end{bmatrix}$$

$$=-[0,10-0.5\Delta,10+1.5\Delta]$$

幻灯片 29

S_1,x_3,x_1　是基

非基变量的减少的成本

$$\bar{c}_2 = c_2 - p' A_2 = -30 + [0, 10 - 0.5\Delta, 10 + 1.5\Delta] \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = 5 + 1.25\Delta$$

$$\bar{c}_{s_2} = 10 - 0.5\Delta$$

$$\bar{c}_{s_3} = 10 - 1.5\Delta$$

现有的基为最优：

$$\left.\begin{array}{l} 5 + 1.25\Delta \geq 0 \\ 10 - 0.5\Delta \geq 0 \\ 10 + 1.5\Delta \geq 0 \end{array}\right\} \quad -4 \leq \Delta \leq 20$$

解仍为最优。

如果 $c_1 < 56$，或 $c_1 > 80$ 现有的基不是最优。

假设 $c_1 = 100(\Delta = 40)$ 该怎么做？

6.8 Rhs 范围 幻灯片 30

假设修整时间变化一个小的量Δ，变为（20+Δ），会有什么变化？

$$B^{-1}\begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20+\Delta \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 + 2\Delta \\ 8 + 2\Delta \\ 2 - 0.5\Delta \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq \Delta \leq 4$$

现有的基最优 幻灯片 31

注意：即使现有的基是最优，最优解也会发生改变：

$$\mathrm{s}_1 = 24 + 2\Delta$$

$$\mathrm{x}_3 = 8 + 2\Delta$$

$$x_1 = 2 - 0.5\Delta$$

$$z = 60(2 - 0.5\Delta) + 20(8 + 2\Delta) = 280 + 10\Delta$$

幻灯片 32

假设Δ=10，则

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 25 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \mathrm{inf.}$$（采用对偶单纯形）

6.9 新的措施 幻灯片 33

假设这家公司有机会生产利润为$15 的凳子；每生产一张凳子需要 1ft 的木材，1 小时的整修时间，1 小时的木工时间。则该公司应该生产凳子吗？

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 \\
& 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + s_1 = 48 \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 + s_2 = 20 \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + x_4 + s_3 = 8 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
c4 - c_B^{'} B - 1A4 = -15 - (0,-10,-10)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 5 \geq 0
$$

现有的基仍为最优。不应生产凳子。