数学归纳法在图论中的应用

陈军 秦皇岛北戴河奇石艺术学校 066002

摘 要
本文根据图论中的点、边关系的特点，分析数学归纳法在图论中的重要作用，并用此方法证明两个定理。

关键词
图；二分图；匹配；邻集
中图分类号：O157.21
文献标识码：A

Abstract
Using the relation of vertex and boundry in the graph theory, the important role of mathematical induction is analyzed, followed by the proofs of two theorems are presented by the method of the mathematical induction.

Key words
graph；bipartite graph；matching；field

1、研究背景与预备知识

数学归纳法是一种非常重要的数学证明方法，典型的用于确定一个表达式在所有自然数范围内是成立的或者用于确定一个其他的形式在一个无穷序列是成立的。图论中的许多理论涉及到顶点个数、边数以及由此拓展开来的许多更深层次的知识，都可以利用数学归纳法给予证明，这种方法较之其他的方法更直观、更简洁。

定义1[1] 起点与终点重合的轨道叫做圈。

定义2[1] M是图G的边子集，且M中任二边在G中不相邻，则称M是图G中的一个匹配。

定理1[1] K_{2n+1}存在每个因子皆生成圈的2因子分解，共计n个生成圈。

定理2[1] （$Hall$定理）设G是二分图，顶集的二分图划分为X与Y，即$V(G)=X\bigcup Y$，$X\bigcap Y=\varnothing$，X中无邻顶对，Y中亦然；存在把X中顶皆许配的匹配的充要条件是$\forall S\subseteq X$，$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$，其中$N(S)$是$S$中每个顶的邻顶组成的所谓$S$的邻集。

注：关于“圈”、“因子分解”等概念参见文献[1]；“邻集”的概念参见定理2。

2、主要结果

定理1和定理2在参考文献[1]中都是采用图论的方法给予的证明，本节运用数学归纳法给出两个定理新的证明。

定理1 （数学归纳法）

证明：当$n=1$时，K_3存在每个因子皆生成圈的2因子分解，即一个三角形，共1个生成圈；

假设当$n=k$时，K_{2k+1}存在每个因子皆生成圈的2因子分解，共计k个生成圈；

当$n=k+1$时，K_{2k+3}较K_{2k+1}多了两个顶点v_1,v_2，顺次连接$2k+3$个顶点，可得每个顶点皆为2次，即K_{2k+3}可2因子分解，生成$k+1$个生成圈。

定理2 （数学归纳法）

证明：（充分性）如果X能够匹配到Y，那么$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$。

如果Y中存在唯一的顶点与X中的顶点相匹配，则可得到$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$；如果$Y$中存在两个或多于两个顶点与$X$中的顶点相匹配，则必$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$。

（必要性）如果$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$，那么$X$能够匹配到$Y$。

当$\left|S\right|=1$，$S=\{v_1\}$，因为$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$，则必存在$v_1'\in N(S)$，满足$v_1$与$v_1'$相匹配；

当$\left|S\right|=2$，$S=\{v_1,v_2\}$，由于$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$，则必存在不重合的两个顶点$v_1',v_2'\in N(S)$，满足$v_1$与$v_1'$相匹配，$v_2$与$v_2'$相匹配；

假设当$\left|S\right|=n-1$时结论成立，那么当$\left|S\right|=n$时，设$S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，由已知条件知$\{v_1,v_2,\ldots,v_{n-1}\}$与$\{v_1',v_2',\ldots,v_{n-1}'\}$相匹配，那么对于$S$中的$v_n$来说，若$v_n$与$\{v_1',v_2',\ldots,v_{n-1}'\}$中的顶点相匹配则与$\left|N(S)\right|\geq\left|S\right|$相矛盾，即$v_n$与$\{v_1',v_2',\ldots,v_{n-1}'\}$的顶点相匹配，所以有$X$能够匹配到$Y$。

参考文献

[1]王树禾. 图论[M]. 北京：科学出版社.2005.

[2]BONDY J A. Murty U.S.R. graph theory with application[M]. New Your: LTD Macmillan Press,1976.