图论中路径问题的矩阵算法及其在组合中的应用

龙 昌 满

(重庆师范大学,重庆 400047)

摘 要:在已有文献的基础上,归纳出路径问题矩阵算法的一般表示,并给出其在组合中的应用,比较了其相对于加法、乘法原理的优势。

关键词:路径问题;矩阵算法;组合;加法原理;乘法原理

中图分类号:O157 文献标识码:A 文章编号:1673-1980(2008)06-0134-03

图论和组合数学之间有着密切的联系,很多组合问题都可以转化成图论问题,而用图论的方法可,使问题更形象、直观,更易理解和掌握。本文将介绍路径问题的矩阵算法,这种算法在解决组合中较复杂的求路径数问题的优势显而易见。

1 路径问题的矩阵算法

路径问题是图论中经常讨论的问题, 在文献[1]中,编者用举例的方式提出了路径问题的矩阵算法。在此基础上归纳总结出算法的一般表示。

首先我们规定所讨论的图为简单的有向图 $D=(V,U)$,其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 表示非空顶点集合,$U\subseteq V\times V$,其元素称为弧。

定义矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,其中:

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点有边}(v_i,v_j)\text{相连}\\0,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点无边相连}\end{cases}$$

A 中元素 a_{ij} 为 1, 表示有 1 条从 v_i 一步到达 v_j 的道路。

我们再看 $A^2=A\cdot A=\left(a_{ij}^{(2)}\right)$,其中:

$$a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}=a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+\cdots+a_{in}a_{nj}$$

$a_{il}a_{lj}\neq 0$ 当且仅当 $a_{il}a_{lj}=1$,也就是说从 v_i 到 v_l 和从 v_l 到 v_j 都有直接的道路相通, 所以 $a_{ij}^{(2)}$ 的值表示从 v_i 点出发经过某一个中间点 v_l, 然后到 v_j 的路径数目, 或形象地说,$a_{ij}^{(2)}$ 是从 v_i 点出发两步到达 v_j 的路径数目。

进而,一般有 $A_k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)n\times n\ (k>n)$,其中 $\left(a_{ij}^{(k)}\right)=\sum_{t=1}^{n}a_{il}^{(k-1)}a_{tj}$,$a_{ij}^{(k)}$ 表示从点 v_i 出发 k 步到达 v_j 的路径数目。

2 矩阵算法与乘法原理、加法原理的统一性

2.1 加法、乘法原理

加法原理:如果完成一件工作,只要采取 n 类方式中的某一种方式就可以完成,第 1 类方式有 m_1 种做法,第 2 类方式有 m_2 种做法,……,第 n 类方式有 m_n 种做法,那么,完成这件工作共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种做法。

乘法原理:如果完成一件工作,必须依次经过 n 个步骤,第 1 步有 m_1 种做法,第 2 步有 m_2 种做法,……,第 n 步有 m_n 种做法,那么,完成这件工作共有 $m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$ 种做法。

2.2 建立模型

图 1 为回家的路线模型,问从重庆到义和共有多少种不同的走法?

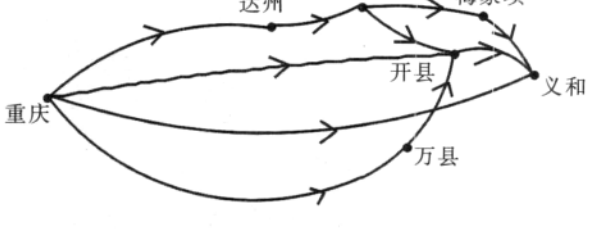

图 1 路线模型

收稿日期:2008-03-30

作者简介:龙昌满(1982-),女,重庆开县人,重庆师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,主要从事基础数学研究。

2.2.1 **用加法、乘法原理分析解决问题**

此类问题显然是组合中的路径数问题,此路线比较简单,用加法、乘法原理很容易解决,将其分成四类:

第一类,从重庆 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 义和,1 种走法;

第二类,从重庆 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 开县 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 义和,1×1 种走法;

第三类,从重庆 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 万县 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 开县 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 义和,1×1×1 种走法;

第四类,从重庆 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 达州 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ 开江县 $\xrightarrow{\text{汽车}}$ $\begin{cases}\text{梅家坝} \xrightarrow{\text{摩托车}} \text{义和} \\ \text{开县} \xrightarrow{\text{汽车}} \text{义和}\end{cases}$,1×1×1×2 种走法。

1+1×1+1×1×1+1×1×1×2=5,所以从重庆到义和共有 5 种不同的走法。

2.2.2 **用矩阵的方法分析解决问题**

为方便表示,用 $v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7$ 分别表示重庆、达州、开江县、梅家坝、义和、开县、万县,得到这样一个单向图 $D=(V,U)$,其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7\}$ 表示 7 个地点,U 表示路线,即图 2。我们的问题就转换成找出 v_1 到 v_5 共有几条不同的道路。

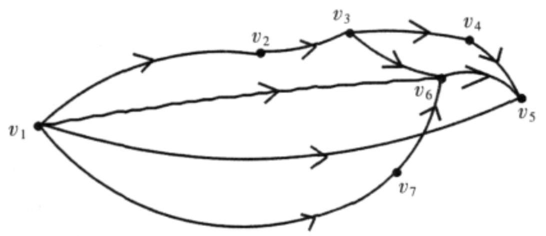

图 2 路线示意简图

引进矩阵 $A=(a_{ij})_{7\times7}$,其中:

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点有边}(v_i,v_j)\text{相边} \\ 0,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点无边相边}\end{cases}$$

得到:

$$A=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\v_7\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&1&0&0&1&1&1\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6&v_7\end{matrix}\end{array}$$

从 A 中可以看出 v_1 到 v_5 有一条直通道路,相当于上述分类中的第一类。

$$A^2=A\cdot A=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\v_7\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6&v_7\end{matrix}\end{array}=a_{ij}^{(2)}$$

由 A^2 知从 v_1 到 v_5 有一条经过一个车站的道路,相当于上述分类中的第二类。

同样可得到:

$$A^3=A^2\cdot A=A\cdot A^2=a_{ij}^{(3)}=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\v_7\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6&v_7\end{matrix}\end{array}$$

由 A^3 知从 v_1 到 v_5 有一条经过两个车站的道路,相当于上述分类中的第三类。

$$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A^3=a_{ij}^{(4)}=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\v_7\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6&v_7\end{matrix}\end{array}$$

由 A^4 知从 v_1 到 v_5 有两条经过三个车站的道路,相当于上述分类中的第四类。

接下来,$A^5=[0]_{7\times7}$,表示没有五步到达的道路,也就是说从 v_1 到 v_5 经过四个车站的道路不存在,为0 条。

2.2.3 **分析矩阵算法与乘法、加法原理的统一性**

不难看出,A,A^2,A^3,A^4 表示按步骤数将问题分成四类,将各矩阵得到的 $a_{15}^{(k)}(k=1,2,3,4)$ 相加,即 $\overset{1}{a}_{15}+\overset{2}{a}_{15}+\overset{3}{a}_{15}+\overset{4}{a}_{15}=1+1+1+2=5$,这便是我们所求的答案,充分体现了加法原理。而在得到 $a_{15}^{(k)}(k=2,3,4)$ 值的过程实质上就是应用了乘法原理。由此可见矩阵算法与乘法、加法原理具有统一性。

3 矩阵算法在组合中的应用

路径数问题在组合中极为重要,我们通常用加法、乘法原理进行分类、分步计算。现实生活中的问题错综复杂,比如交通网络如蜘蛛网般,要找到最想要的路线很不容易。如果我们用矩阵算法,就不会出现这样的问题。

现给出较复杂的实例,如图 3 所示,顶点 v_1, v_2 v_3, v_4, v_5, v_6 代表六座城市,有方向的边 $\overrightarrow{v_i v_j}$ 表示从 v_i 城 v_j 到城的单行车。问:(1)从 v_i 城到 v_j 城是否有直接到达的车道?(2)从 v_5 城到 v_6 城经过三步到达的,共有几条不同的道路?

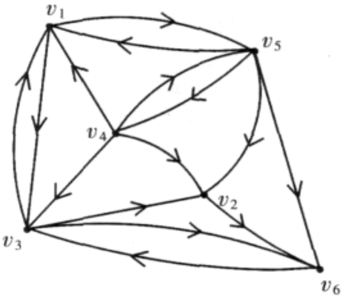

图 3 复杂实例路线图

解:

(1)引进矩阵 $A=(a_{ij})_{6\times6}$,其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点有边}(v_i, v_j)\text{相连;}\\ 0,\text{若从 } v_i \text{ 点到 } v_j \text{ 点无边相连}\end{cases}$$

可得到:

$$A=\begin{array}{cc}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&1\\1&1&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\\ & \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6\end{matrix}\end{array}$$

从矩阵 A 很容易看出:v_1 城有直接到达 v_3 和 v_5 城的车道;v_2 城只有直接到达 v_6 城的车道;v_3 城可以直接到达 v_1, v_2 和 v_6 城;v_4 城可直接到达 v_1, v_2, v_3, v_5 城;v_5 城可直接到达 v_1, v_2, v_4, v_6 城;v_6 城只有直接到达 v_3 城的车道。

解:

(2)v_5 城到 v_6 城要经过三步到达的道路,直接数,我们很难找准确,

用矩阵的算法如下:

$$A^2=A\cdot A=\begin{array}{cc}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\end{matrix} & \begin{bmatrix}2&2&0&1&0&2\\0&0&1&0&0&0\\0&0&2&0&1&1\\2&2&1&1&1&3\\1&1&3&0&2&1\\1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\\ & \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6\end{matrix}\end{array}$$

则有:

$$A^3=\begin{array}{cc}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&1&5&0&3&2\\1&1&0&0&0&1\\3&3&1&1&0&3\\3&3&6&1&3&4\\5&5&2&2&1&6\\0&0&2&0&1&1\end{bmatrix}\\ & \begin{matrix}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6\end{matrix}\end{array}$$

由 A^3 可看出,从城 v_5 出发经过三步到达 v_6 城有 6 条不同的道路。

在组合中用加法、乘法原理求解复杂的路径数问题比较麻烦而且也较困难,往往会数错。如果用矩阵算法,答案往往显而易见,且不易出错,只需找到 A,进而要求的 $A^k(k>1)$ 可以由 MATLAB 等程序完成。在解决复杂的组合问题时,矩阵算法的优势显而易见。

参考文献

[1] 卢开澄,卢华明.图论及其应用(第二版)[M].北京:清华大学出版社,1995.

[2] 王朝瑞.图论(第二版)[M].北京:北京理工大学出版社,1997.

[3] 陈景林,阎满富.组合数学与图论[M].北京:中国铁道出版社,2001.

On the Matrix Algorithm of Route Question in Graph Theory and Its Application in Combination Problem

LONG Chang-man

(Chongqing Normal University,Chongqing 400047)

Abstract: This article sums up the general expression of the route question of matrix algorithm on the base of reference , and discusses its application in the combination. Finally it analyzes the superiority compared with addition, multiplication principle.

Key words: route question; matrix algorithm; combination; addition principle; multiplication principle