第21卷第2期　　　　机　械　强　度　　　　Vol. 21　No. 2
1999 年 6 月　　JOURNAL OF MECHANICAL STRENGTH　　June　1999

一种频响函数灵敏度分析方法*

A METHOD FOR SOLVING THE SENSITIVITIES OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION

瞿祖清**　华宏星　傅志方
(上海交通大学振动、冲击与噪声国家重点实验室, 上海 200030)
Qu Zuqing　Hua Hongxing　Fu Zhifang
(*National Key Laboratory for Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030, *China*)

摘要　频响函数灵敏度分析在结构动力优化和振动控制等许多领域中有着广泛的应用。基于模态展开和幂级数展开原理, 提出了一种频响函数灵敏度分析的模态展开法。为了减少模态展开时的模态截断误差, 文中同时给出了一种模态加速方法, 该方法可大大提高模态截断时的灵敏度分析精度。通过对一数值实例计算表明, 文中提出的方法非常有效。

关键词　频响函数　灵敏度　模态展开　模态加速　幂级数展开　结构优化

中图分类号　O327　O231　TB123

Abstract　It is very important to calculate the sensitivities of the Frequency Response Function (FRF) in the areas of vibration control, structural optimization and so on. Based on the theory of modal superposition and power series expansion, a modal superposition method for the sensitivity analysis of FRF is proposed in this paper. In order to reduce the error of modal truncation in modal superposition, a modal acceleration method is derived at the same time. The acceleration algorithm can improve the accuracy of the sensitivities quickly when modal truncation is adopted. Numerical example is also provided to demonstrate the efficiency of the proposed methods.

Key words　frequency response function, sensitivity, modal superposition, modal acceleration, power series expansion, structural optimization

1　引言

在结构的振动控制、动力修改、故障诊断等领域中, 频响函数的计算是一个重要环节。如何快速精确地计算出系统的频响函数, 在实际工程中具有重要意义。由于频响函数的特殊性, 目前大多用模态展开法来求解[1]。然而, 在实际工程中, 我们往往很难求得一个结构所有模态, 因此实际的模态展开法都必须实施模态截断技术。此时, 如仍采用常规的模态展开法, 其计算精度通常较低。为了解决该问题, 文献[2]提出了一种幂级数展开法, 该方法可大大减少模态截断时的误差。尽管基于频响函数的结构动力优化存在许多问题(如收敛性和稳定性等), 但与基于系统固有频率和振型的优化相比, 其具有许多优点, 因此该方法引起了许多科技工作者的关注[3,4]。频响函数灵敏度分析是对其进行优化的一个关键, 目前关于这方面的研究还很少。

一般来说, 频响函数灵敏度分析方法有两种, 其一是直接计算法, 即运用线性方程组理论直接进行求解。该方法的缺点是, 当所考察的频率点较多和系统模型较大时, 其计算量非常大; 其二是半模态展开法, 它是通过对频响函数的模态展开式直接求导而得的。该方法的缺点是需要求给定频段内的所有特征对的灵敏度。本文基于模态展开和幂级数展开原理, 提出了一种可计算频响函数灵敏度的模态展开方法。当所考察的频率点较多和系统模型较大时, 该方法的计算效率明显高于上面两种方法。为了减少模态截断时的截断误差, 本文还给出了一种模态加速方法。本文在讨论过程中未考虑系统的阻尼, 但其基本思想可应用于有阻尼的情况。

2　理论基础

设 N 自由度无阻尼系统的动力学方程为

$$\mathrm{M}\ddot{\mathrm{X}}(t) + \mathrm{K}\mathrm{X}(t) = \mathrm{F}(t) \tag{1}$$

其中 K 和 M 分别为系统的刚度矩阵和质量矩阵(本文假定刚度矩阵对称正定, 当刚度矩阵奇异时, 可采用移频技术来解决[2]); $\mathrm{F}(t)$ 为外载荷列向量; $\mathrm{X}(t)$ 和 $\ddot{\mathrm{X}}(t)$

* 19971031 收到初稿, 19971226 收到修改稿。

** 瞿祖清, 男, 1970 年 12 月生, 汉族。振动、冲击与噪声国家重点实验室博士研究生。从事结构动态性能分析、动力优化、振动控制等研究, 已有近 20 篇论文被国内外刊物录用与发表。

分别为在外载荷作用下系统的位移响应和加速度响应。对式(1)进行傅里叶变换,并假定初始条件为零,则可得其在频域中的动力学方程为[1]

$$(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})\mathrm{X}(\omega)=\mathrm{F}(\omega) \quad (2)$$

式中 ω 为外激励的频率,假定其不等于系统的固有频率。当只计算系统的频响函数时,方程(2)右边的外载荷向量通常取为常向量,故在以后的讨论中把它简写为 F。由上式可得系统的频响函数为

$$\mathrm{X}(\omega)=(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})^{-1}\mathrm{F} \quad (3)$$

假定系统的刚度矩阵和质量矩阵均为设计参数 p_j ($j=1,2,\cdots,m$) 的函数,则把方程(2)对该设计参数求导,并整理可得

$$(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})\mathrm{X}_{,j}(\omega)=-(\mathrm{K}_{,j}-\omega^2\mathrm{M}_{,j})\mathrm{X}(\omega) \quad (4)$$

其中下标“$,j$”表示对 p_j 求偏导。从上式可得频响函数的灵敏度为

$$\mathrm{X}_{,j}(\omega)=-(\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M})^{-1}(\mathrm{K}_{,j}-\omega^2\mathrm{M}_{,j})\mathrm{X}(\omega) \quad (5)$$

上式即为频响函数灵敏度的控制方程。直接计算法就是首先由式(3)求得系统的频响函数,然后再用式(5)去求其灵敏度。显然,由于需要反复对矩阵($\mathrm{K}-\omega^2\mathrm{M}$)求逆,故计算量必然会很大。

3 频响函数灵敏度分析的模态展开法

假定系统的特征值和特征向量矩阵分别为 Λ、Φ 且有 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$,($\lambda_1\ \lambda_2\cdots\ \lambda_N$)

$$\Phi=[\phi_1\ \ \phi_2\ \ \cdots\ \ \phi_N] \quad (6)$$

$$\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{K}\Phi=\Lambda \qquad \Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\Phi=\mathrm{I} \quad (7)$$

从式(7)中易得 $\mathrm{K}^{-1}=\Phi\Lambda^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}$ (8)

因此,系统的频响函数及其灵敏度可用模态参数表示为

$$\mathrm{X}(\omega)=\Phi(\Lambda-\omega^2\mathrm{I})^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{F}$$

$$\mathrm{X}_{,j}(\omega)=\Phi(\Lambda-\omega^2\mathrm{I})^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{R}(\omega) \quad (9)$$

其中 $\mathrm{R}(\omega)=-(\mathrm{K}_{,j}-\omega^2\mathrm{M}_{,j})\mathrm{X}(\omega)$ (10)

式(9)可用模态展开的形式表示为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{X}(\omega)&=\sum_{r=1}^{N}\frac{\phi_r^{\mathrm{T}}\mathrm{F}}{\lambda_r-\omega^2}\phi_r\\ \mathrm{X}_{,j}(\omega)&=\sum_{r=1}^{N}\frac{\phi_r^{\mathrm{T}}\mathrm{R}(\omega)}{\lambda_r-\omega^2}\phi_r\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

由于在实际工程中往往很难求得系统的所有模态,因此在计算时必须实施模态截断。假定截断模态数为 L,则有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{X}(\omega)&=\sum_{r=1}^{L}\frac{\phi_r^{\mathrm{T}}\mathrm{F}}{\lambda_r-\omega^2}\phi_r\\ \mathrm{X}_{,j}(\omega)&=\sum_{r=1}^{L}\frac{\phi_r^{\mathrm{T}}\mathrm{R}(\omega)}{\lambda_r-\omega^2}\phi_r\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

上式即为用模态展开法来计算系统频响函数及其灵敏度的基本方程。其计算过程为,首先由上式中的第一式求得系统的频响函数,然后代入式(10)中求 $\mathrm{R}(\omega)$,最后再用上式中的第二式来求频响函数的灵敏度。由于在频响函数计算中采用了模态截断技术,其必然存在误差,而在求频响函数的灵敏度时又进行了一次模态截断,因此灵敏度的误差通常较大,故必须进行模态加速来提高其精度。

4 频响函数灵敏度分析的模态加速技术

可以证明,式(9)中矩阵($\Lambda-\omega^2\mathrm{I}$)的逆阵可以用幂级数展开为[2]

$$(\Lambda-\omega^2\mathrm{I})^{-1}=\Lambda^{-1}\sum_{h=0}^{H}(\omega^2\Lambda^{-1})^h+(\omega^2\Lambda^{-1})^{H+1}(\Lambda-\omega^2\mathrm{I})^{-1} \quad (13)$$

把上式代入式(9)的第二式,有

$$\mathrm{X}_{,j}(\omega)=(\mathrm{X}_{,j}(\omega))_{\mathrm{P}}+(\mathrm{X}_{,j}(\omega))_{\mathrm{R}} \quad (14)$$

其中,等号右边的两项分别表示由幂级数前 $H+1$ 项之和与相应的余项确定的频响函数灵敏度,它们分别为

$$(\mathrm{X}_{,j}(\omega))_{\mathrm{P}}=\Phi\Lambda^{-1}\sum_{h=0}^{H}(\omega^2\Lambda^{-1})^h\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{R}(\omega) \quad (15)$$

$$(\mathrm{X}_{,j}(\omega))_{\mathrm{R}}=\Phi(\omega^2\Lambda^{-1})^{H+1}(\Lambda-\omega^2\mathrm{I})^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{R}(\omega) \quad (16)$$

之所以把频响函数灵敏度分成两部分,是因为这两部分分别与模态加速和模态截断有关。

首先讨论由幂级数前 $H+1$ 项之和确定的频响函数灵敏度。从式(15)中可以看到,该部分灵敏度是以模态参数的形式给出的,而实际中又无法知道系统的全部模态参数,这必然给模态加速带来困难,为此有必要把它转化为用系统的物理参数来表示。利用式(8),矩阵 $\mathrm{K}^{-1}(\omega^2\mathrm{M}\mathrm{K}^{-1})^h$ 可展开为

$$\mathrm{K}^{-1}(\omega^2\mathrm{M}\mathrm{K}^{-1})^h=\omega^{2h}\Phi\Lambda^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\underbrace{(\mathrm{M}\Phi\Lambda^{-1}\Phi^{\mathrm{T}})\cdots(\mathrm{M}\Phi\Lambda^{-1}\Phi^{\mathrm{T}})}_{h} \quad (17)$$

考虑到式(7),上式可简化为

$$\mathrm{K}^{-1}(\omega^2\mathrm{M}\mathrm{K}^{-1})^h=\Phi\Lambda^{-1}(\omega^2\Lambda^{-1})^h\Phi^{\mathrm{T}} \quad (18)$$

把上式代入式(15)中,可得

$$(\mathrm{X}_{,j}(\omega))_{\mathrm{P}}=\mathrm{K}^{-1}\sum_{h=0}^{H}(\omega^2\mathrm{M}\mathrm{K}^{-1})^h\mathrm{R}(\omega) \quad (19)$$

式(19)实现了用系统物理参数来表示频响函数灵敏度,显然等式右边的各参数都是事先知道的。

由幂级数前 $H+1$ 项之和的余项决定的频响函数式(16)可改写为

$$(\mathrm{X}_{,j}(\omega))_{\mathrm{R}}=\Phi\mathrm{G}(\omega)\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{R}(\omega) \quad (20)$$

上式中 $\mathrm{G}(\omega)$ 为对角矩阵,其第 r 个对角元为

$$g_r=\left(\frac{\omega^2}{\lambda_r}\right)^{H+1}\frac{1}{\lambda_r-\omega^2} \qquad (r=1,2,\cdots,N) \quad (21)$$

为了保证在实施模态截断后,频响函数灵敏度的截断误差会随着幂级数展开的项数的增加而减少,对被截断的模态而言必须有 $|\omega^2/\lambda_r|<1$,即 $\omega_{\max}^2<\lambda_{L+1}$。

综上所述,频响函数的灵敏度可由式(10)和下面

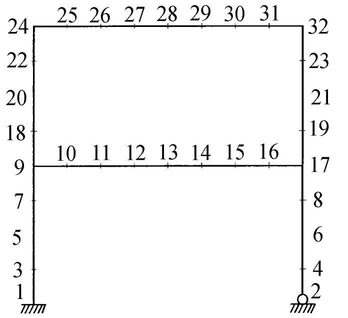
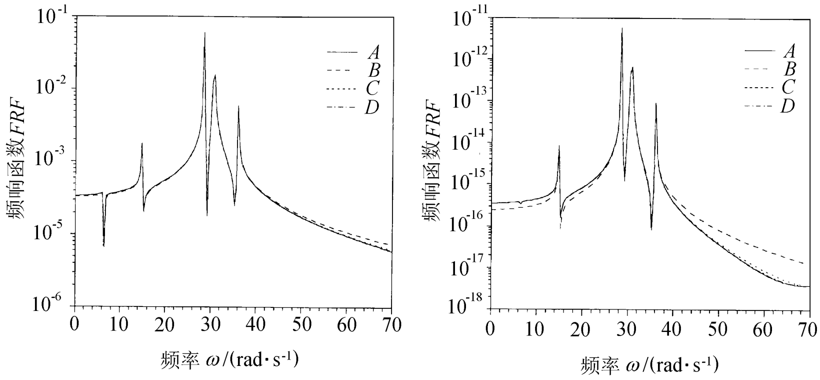


图 1　二维框架结构简图

Fig. 1　The schematic of a two-dimensional frame



(a) 频响函数　　(b) 频响函数灵敏度

图 2　频响函数及其灵敏度

Fig. 2　FRFs and their sensitivities

两式来求解

$$X(\omega) = K^{-1}\sum_{h=0}^{H}(\omega^2 M K^{-1})^h F + \sum_{r=1}^{L}\left(\frac{\omega^2}{\lambda_r}\right)^{H+1}\frac{\phi_r^T F}{\lambda_r - \omega^2}\phi_r \tag{22}$$

$$X_{,j}(\omega) = K^{-1}\sum_{h=0}^{H}(\omega^2 M K^{-1})^h R(\omega) + \sum_{r=1}^{L}\left(\frac{\omega^2}{\lambda_r}\right)^{H+1}\frac{\phi_r^T R(\omega)}{\lambda_r - \omega^2}\phi_r \tag{23}$$

用以上两式计算的截断误差为

$$E(\omega) = \sum_{r=L+1}^{N}\left(\frac{\omega^2}{\lambda_r}\right)^{H+1}\frac{\phi_r^T Y(\omega)}{\lambda_r - \omega^2}\phi_r$$

$$(Y(\omega) = F, R(\omega)) \tag{24}$$

在式(22)至式(24)中, H 取大于或等于 -1 的整数。当 $H = -1$ 时, 式(22)和式(23)等价于式(12), 即未实施模态加速。而当 $H \geq 0$ 时, 频响函数及其灵敏度的截断误差会随着 H 的增加而迅速减小。

5　数值示例

图 1 所示为两维框架结构, 其左下端为刚性固定, 右下端仅约束垂向位移。其层高和层宽分别为 2.0 m 和 4.0 m, 梁的截面为 0.012 m × 0.02 m 的矩形。材料的弹性模量为 2.1×10^{11} N/m², 密度为 7 830 kg/m³。采用有限元建模, 把该结构分为 32 个梁单元, 共 32 个节点, 96 个自由度。在该划分情况下, 系统的前 6 阶圆频率为 6.379 67 rad/s、14.755 2 rad/s、28.426 2 rad/s、30.614 0 rad/s、35.930 7 rad/s 和 81.124 9 rad/s。

假定激励点与响应点均为 28 节点, 方向垂直向下, 设计参数为载荷作用点左边那个单元的弹性模量, 外激励的频段为 0～70 rad/s。根据模态加速法的要求, 取 $L = 5$, 即对系统第六阶以上的模态进行截断和加速。用本文提出的方法计算而得的频响函数及其灵敏度见图 2(图中给出的均为绝对值), 其中 A、B、C 和 D 分别表示精确值和 H 为 -1、0、1 时的结果。

从图 2 中可以看到, 由未实施模态加速的模态截断法计算得的频响函数误差相对较小, 而频响函数灵敏度的误差却较大, 这是因为后者实施了两次模态截断。因此由单纯的模态截断法计算所得的频响函数灵敏度精度通常是不够的, 必须实施模态加速技术; 实施模态加速技术后的误差可大大减小, 如当 $H = 0$ 时, 其结果已接近精确值; 而当 $H = 1$ 时, 计算值和精确值已基本吻合。

6　结论

基于模态展开和幂级数展开原理, 本文导出了一种计算频响函数灵敏度的模态截断和模态加速方法, 后者可大大提高模态截断时的计算精度。通过一数值实例计算表明, 由于在频响函数灵敏度分析中需要两次实施模态截断, 如果不采取模态加速技术, 其计算精确通常低于频响函数本身; 模态加速的效果非常明显, 一般只需计入幂级数的前少数几项, 即可使模态截断下的频响函数灵敏度非常接近其精确值。本文提出的方法可推广到有阻尼系统。由于篇幅的关系, 此处不作具体讨论。

参　考　文　献

1　傅志方主编. 振动模态分析与参数辨识. 北京: 机械工业出版社, 1990. 35

2　瞿祖清, 傅志方. 频响函数计算的高精度级数展开法. 计算力学学报, 1998, 15(2): 144～148

3　张令弥, 何柏庆. 利用试验数据的结构动力学数学模型修正统一方法. 南京航空航天大学学报, 1995, 27(1): 33～41

4　Mottershead J E, Friswell M I. Modal updating in structural dynamics: a survey. Journal of Sound and Vibration, 1993, 167(2): 347～375