第21卷 第4期　　甘肃工业大学学报　　Vol.21 No.4
1995年12月　　Journal of Gansu University of Technology　　Dec. 1995

数学模型的图论方法

陈义华　　　　刘树群

（甘肃工业大学基础课部，兰州 730050）（甘肃工业大学计算中心，兰州 730050）

摘　要　阐述了数学模型及其本质，以典型实例论述了数学模型的图论方法，并介绍用图研究的一些领域.

关键词　二元关系；模拟；图论方法；数学模型；离散模型

分类号　O157.5

图论中的“图”，代表了某些对象集合之间的关系，是一些点以及连接的边的总体.这种连接方式可具有许多特征，从本质上讲图论就是研究这种特征的[1].图论中的问题主要有两种形式：一是“具有某种特性的对象是否存在？如果存在有几个？或者最多有几个？”，二是“怎样”构造一个满足某一些性质的图或子图，即如何建立一个数学模型.应用图论方法解决实际问题，最关键的就是如何采用图论方法构造问题的数学模型.

1　数学模型及其本质[2]

数学模型是对现实世界的一个特定对象，为了某个特定目的，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构.数学模型被看成是能实现某个特定目标的有用工具，它或能解释特定现象的现实形态，或能预测对象的未来状态，或能提供处理对象的最优决策或控制.从本质上说，数学模型是一个以“系统”概念为基础的，关于现实世界的一小部分或几个方面抽象的“映像”.

2　数学模型的图论方法

图论为任何1个包含了某种二元关系的系统提供了1个数学模型，如事物关系、物质结构、电气网络、交通运输、信息传递和工作调配等都可用图来模拟；而且随着图的理论的发展，许多同类问题可得到较满意的解决[1,3,4].

1）七桥问题

18世纪，普鲁士的哥尼斯堡镇上有一个小岛，岛旁流过一条河的两条支流，7座桥跨在两条支流上（图1a）.假设 A 表示岛，B 表示河的左岸，C 表示右岸，D 为两支流间地区，a，b，c，d，e，f 和 g 分别表示7座桥.问题：

（1）1个人能否经过每座桥恰好1次？

（2）能否恰好经过每座桥1次，并且最后回到原出发点？

欧拉解决七桥问题采用了“数学模型”法.

收稿日期：1995-08-09

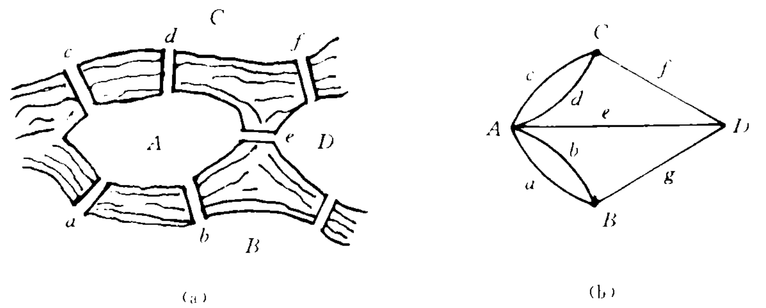

图1　哥尼斯堡七桥问题

建模　既然岛与陆地是桥梁的连接地点,两岸陆地是桥梁通往的地点,就不妨把4处地点缩小(抽象)成4个点,并把7座桥表示(抽象)成7条边,便得到了七桥问题的模拟图,见图1b.于是七桥问题等价于一笔画出上述图形的问题(每条边必须且只须经过1次).此处,图2就是七桥问题的数学模型.

对于模拟图,显然图必须是连通的,当且仅当图为Euler图时,问题(2)才能实现;仅当图只有两个奇顶点,问题(1)才能实现.由图1b可知,该问题无解.

Euler将七桥难题通过建模化为一个图论问题(仅用点和边来描述),并加以解决,这种高度的抽象把问题表述得非常突出和清晰.进一步可知,对于任意一个河道图和任意有限座桥的问题都解决了.上述思想方法用图2表示.

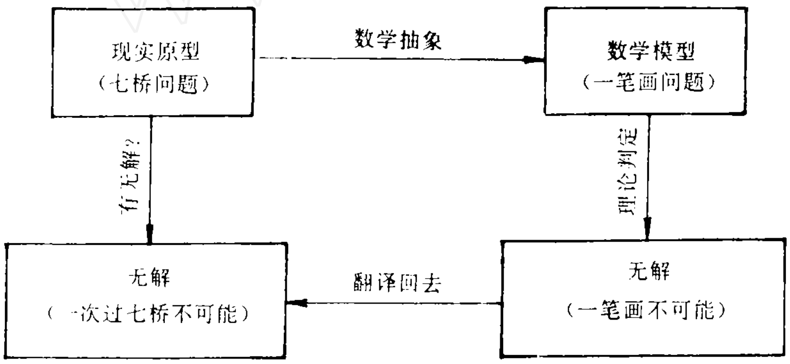

图2　哥尼斯堡问题的数学模型

2) **相识问题**[5]

1947年,匈牙利数学竞赛中有这样1道试题:"证明,任意6个人中,总有3个人,要么相互认识,要么互不认识".该题引起了国际数学界的广泛注意.1953年,在美国著名图论专家F.Harary建议下,此题被选为Putnam大学生数学竞赛试题.1958年,美国著名数学杂志《数学月刊》第5,6期把它收入,编为征解问题E1321.1988年,加拿大又出了这样的竞赛题:"有6人聚会,任意2人要么相互认识,要么互不认识.证明,必有两个组,每组3个人,同组的3个人要么彼此认识,要么互不认识",1道试题,竟然如此轰动,实在罕见.

这个表面看来似乎无法下手的问题,可以通过数学模型的图论法轻易获解.

建模　用6个顶点表示6个人,其集合记作$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_6\}$.对于$v_i,v_j\in V,v_iv_j\in E$

(G)，当且仅当 v_i 和 v_j 所表示的 2 个人相互认识，于是得到一个 6 路简单图 G(该问题的数学模型). 显见，G 的补图 $\overline{G}$ 的 1 条边表示对应于它的关联顶点的人互不相识. 于是问题转化为证明下列命题：

对于一个任意的 6 路简单图 G，要么 G 本身，要么 $\overline{G}$ 含有 1 个三角形(即具有 3 个顶点的完全图 K_3).

证明　不失一般性，考虑 v_1 与其余 5 个顶点不在 G 中相邻就在 $\overline{G}$ 中相邻，因而在 G 中或 $\overline{G}$ 中，至少与 3 个点相邻，不妨假定在 G 中，有边 $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 \in E(G)$. 见图 3.

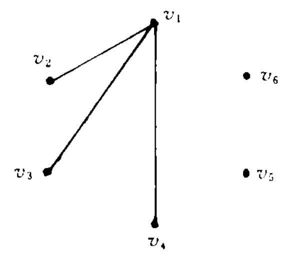

图 3　相识问题数学模型

(1) 若 v_2, v_3, v_4 这 3 个点有 2 个点在 G 中相邻，比如说，$v_2v_3 \in E(G)$，则 G 含有 v_1, v_2, v_3 这 3 个顶点的 K_3，即为所求.

(2) 若 v_2, v_3, v_4 这 3 个点在 G 中均不相邻，则在 $\overline{G}$ 中，v_2, v_3, v_4 这 3 个顶点的完全图 K_3 即为所求. 至此问题得证.

相识问题也可用图的染色来解决，此时建立的数学模型为二色完全图 K_6.

建模　仍用 6 个顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_6$ 表示 6 个人，作此 6 个顶点的完全图 K_6，用红、黄两色去染 K_6 的边，若某 2 个人互相认识，连结相互 2 个点的边就染红，否则染黄色. 这样，K_6 的边都染红色或黄色，每边只染一色，由此得到二色完全图 K_6.

如果在 6 个人中，有 3 个人彼此认识，则相应的 3 个顶点连的都是红边，即有 1 个红色三角形，否则，有 3 个人互不认识，则相应的 3 个顶点连的都是黄边，得到的是黄色三角形，3 边同色的三角形叫单色三角形 . 于是相识问题就转化为下述命题：

任意一个二色完全图 K_6 都含有单色三角形(可采用同色边数分析法证明此命题).

这里的建模方法是很典型的，主要是构造 1 个二色完全图 K_6，也是建立有关边染色的图论问题数学模型的一种重要方法. 上述问题可推广：当 $n \geqslant 6$ 时，任意一个 n 路二色完全图 K_n 总含有单色三角形.

3) *人、狼、羊和菜渡河问题*[6]

1 个摆渡人 F 希望用 1 条小船把 1 只狼 W，1 头羊 G 和 1 篮白菜 C 从一条河的左岸渡到右岸去，而船小只能容纳 F，W，G 和 C 中的 2 个，决不能在无人看守情况下，留下狼和羊或羊和白菜在一起，应怎样渡河才能将 W，G 和 C 都运过去？

建模　在研究状态或位置发生变更的问题中，常常构造有向图(数学模型)来解决.

首先，对两岸上允许的组合加以分类，比如用(FWG/C)表示 F，W 和 G 在左岸上，而 C 在右岸上，“O”意味着在相应的岸上均无.

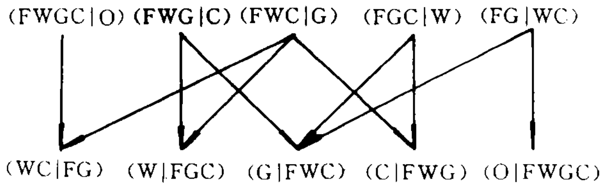

图 4　渡河问题数学模型

将每一可取状态(系统允许存在的状态，共 10 个)用 1 个点表示，若某次船从左岸划往右岸时，使状态 u 变为 v，就作 1 条 u 到 v 的弧(有向边)，由此构造 1 个有向图，得到该问题的数

学模型(图 4). 注意到船是在两岸间往返的,该问题即在图 4 中找 1 个从初始状态(FWGC|O)到(O|FWGC)的弧的序列. 这个序列中相邻的两条弧或都是由同一点引出的,或都是进入同一个顶点的. 图 5 中粗线所表示的弧即为一个解. 此问题亦可构造一个无向图来模拟求解[2].

3 应用[1,3,4,7]

目前,图已经用来作为许多与对象的离散安排有关问题的模型,比如计算机科学、运筹学、通讯科学、电网络分析、量子物理、结构化学、建筑学、经济学、语言学、生物学、社会学、遗传学、法律学、人类学、家系学和定理证明等.

在计算机科学中,利用图的单向树和有序树作为一种数据结构,可用于分析算法的好坏;在编码理论和程序设计中,利用图的霍夫曼树可以得到解决;利用最小树的概念及算法可以解决数据存放的问题;利用线图结构可处理数据管理系统. 比如在一个单位的人事档案中,需要将每个人的姓名、年龄、籍贯及职务等记录下来,把这样的信息存放在存储装置中,称为一个记录,记录间有各种各样的联系. 可把一个复杂的数据结构通过建立标号有向图来模拟:用图的顶点表示记录,从顶点 v_i 到 v_j 的一条带标号为 a 的有向边 v_iv_j 表示记录 i 和 j 有关系 a,这个数学模型可反映整个数据结构,利用它可系统地存放和检索信息.

运筹学中许多问题如最短路径、人员配置、生产计划和投资安排等可归结为二元关系的问题. 比如用图的点表示某种货物可以储藏或装船的实际位置,从一处到另一处的一条有向边和记在这条边上的一个正数代表一条运输货物的水道和它的能力,这个能力给出同时可以通过的最大允许数目.

图与通讯网有极其相似之处,因而用图论方法解决通讯网络问题很自然. 通过图可以研究通讯网络的结构性质、布线设计、控制方法以及阻塞的可能性等问题.

用图模拟电网络,可将一个电网络和其中的电阻、电容和电感等抽象化. 基尔霍夫在 1847 年就是采用这种方法,求解描述一个电网络的每一支路和环绕每一个回路电流的线性方程组.

在理论物理和统计力学的研究中,可用点表示分子,2 个点邻接表示存在某种物理形式的最邻近的相互作用,如磁的吸力或斥力. 著名物理学家李政道和杨振宁在理论物理研究中,就用了图论方法:点代表欧几里得空间的小立方体,其中每 1 个立方体可能被 1 个分子占有或者不能被分子占有,2 个点邻接就表示两个空间均被占有.

化学是最早引入图论的学科,有机化合物的分子结构和有机化学中的同分异构体的计数问题均可用树来研究.

采用网络图可描述、分析和优化复杂过程的进程. 比如大型建筑的建造,需要对局部过程的完成时间、中间时间和寻求节省时间进行规划;为了缩短时间、降低成本和提高利用率而确定局部过程的最优顺序;提出控制系统和限定职责范围.

许多经济问题如税率涨落、供求关系引起商品流通动态特性的变化等都可用图来描拟并加以研究.

生物学非数值特性中有一种常见的两个对立面状态的二元不连续性特性,如脊椎动物与无脊椎动物,神经组织的传递功能是处于兴奋状态还是抑制状态等可用图论方法描述,生物系统其中包括多种子系统,可用图来模拟,研究其规律,并进行有效分析.

在模式识别研究中,也可采用图论方法,借助关系树作有效的波形分析,用树构造指纹模

式研究自动识别，特别是随着计算机功能的增强，自动模式识别的需要必将日益增长，高度复杂的模式识别问题，十分需要用图作模型来研究.

在心理学研究中，用点代表人，而人与人之间的关系比如爱、恨、交往和支配，用边表示，可以得到较好的研究.

由于社会科学和决策科学的定量化需要离散模型，从而应用图来构造现实生活问题的模型不失为好方法，且必将继续发展.

例　儿童的分组问题

在一群儿童中，有些小孩比较要好，有些则不然，而且甲对乙有好感，不一定乙对甲也有好感，可以把这要好与否用一个有向图来模拟：

用顶点表示每个儿童，从 v_i 到 v_j 的一条弧表示 v_i 对 v_j 有好感. 图 5a 表示 6 个儿童的要好关系. 易写出其邻接矩阵 A，采用矩阵方法可从 A 计算出反映强连通矩阵 R^*（略去计算过程）. 找出哪些儿童会经常在一起游玩.

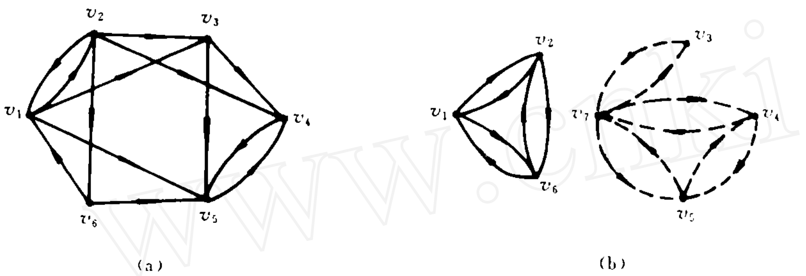

图 5　分组问题的数学模型

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad R^*=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_6 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_6 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_5 \end{array} \end{array}$$

$\{v_1, v_2, v_6\}$，$\{v_3\}$，$\{v_4, v_5\}$构成了三个强连通子图，它反映出 v_1，v_2 和 v_6 经常在一起，v_4 和 v_5 常在一起，但 v_3 都比较孤独，无人理睬他. 他的老师或家长、保育人员应对他特别关心. 若再编入一个和 v_4，v_5 及 v_3 都要好的小孩$_7$，这时强连通子图变成图 5b，图中虚线反映 v_7 的加入而引起的变化.

4　结论

1）在研究以某种特定方式相互联系的一些物件之间的相互关系时，图论几乎总是一个很有用的工具，在许多实例中，这些物件可以用一个图的顶点来表示，而它们之间的相互联系可以用顶点之间的连线表示.

2）图很适用于表示系统，不管是数学的、物理的或社会学的等等，这是因为系统的定义中

包含了一些元素,而这些元素则与其它元素相关联.

3)图可被用于构造模型,但在什么形式下以及解决何种类型的问题具有多样性,不过只要具体问题具体分析、构模,且多实践,总结规律,可以逐渐掌握数学模型的图论方法.

参 考 文 献

1 邦迪 J A,默蒂 R S R 著.图论及其应用.吴望名等译.北京:科学出版社,1984.1~15,55~57

2 陈义华.数学模型.重庆:重庆大学出版社,1995.2~17,112~117

3 陈树柏著.网络图论及其应用.北京:科学出版社,1982.7~12,479~518

4 楼世博.图论及其应用.北京:人民邮电出版社,1982.367~386

5 李炯生.数学竞赛中的图论方法.合肥:中国科技大学出版社,1992.59~60

6 单 墫.趣味的图论问题.上海:上海教育出版社,1980.90~91

7 寿纪麟.数学建模——方法与范例.西安:西安交通大学出版社,1993.27~55

Graph Theory Methods for Mathematical Model

Chen Yihua

(Division of Basic Courese, Gansu Univ. of Tech., Lanzhou 730050)

Liu Shuqun

(Conputer Centre, Gansu Univ. of Tech., Lanzhou 730050)

Abstract Through the graph formed by points and edges, graph theory provides a mathematical model for the system that contains a certain binary relation, analyses the properties of the graphs and presents a smart method for studying various systems. The illustrates mathematical model and its natures, demonstrates the graph theory methods for mathematical model.

Key words binary relation; simulation; graph theory method; mathematical model; discrete model