图论模型的建立及转化方法

蒋　建,孙　蕊
(郑州华信学院,河南　郑州　451150)

摘　要: 图论模型的建立在程序设计过程中有着重要作用,文章介绍了图论模型建立中的两个要点:适当取舍原型中的要素和选择合适的理论体系。另外,在图论模型的转化中,拆分转化应用得较为广泛,这也是本文的一个重点。

关键词:图论模型;要素;理论体系;拆分转化
中图分类号: O157. 1　**文献标识码**: B　**文章编号**: 1009 - 1750 (2006) 02 - 0207 - 02

一、图论模型的建立

图论模型的建立和其他模型一样,在建立模型之前,都首先要对研究对象进行全面的研究,根据求解目标将原型理想化、简单化;然后对原型进行初步分析,分清其中的各个要素及求解目标,理出它们之间的联系,然后建立合适的模型来描述这些要素及联系。

1. 提取要素

在研究一个对象时,对象涉及到的要素很多,而这些要素并不一定符合我们的求解目标,为了突出与求解目标息息相关的要素,降低思考的复杂度,我们必须要舍去一部分要素。下面我们就通过例子来分析一下,怎么舍去不必要的要素。

例如,导线排布:一个圆圈上共有 2N个点,分别编号 1, 2, 3……2N - 1, 2N。以这 2N个点为端点进行连线,如果每个端点只能够被一个导线所联结,那么就有 N条导线。每条导线均有自己的编号,导线的编号是按端点中编号较小的点的编号排序的。此题目涉及的要素有圆圈、N条导线、2N个端点、编号规则、导线的交叉,等等,求解目标是构造一种符合所给的导线交叉情况的导线排布方案。已经知道了各条导线之间的交叉情况,请你帮助工作人员找出一种可能的方法去安排这些导线,使其符合要求。

先来分析求解目标,所谓的构造导线排布方案,也就是找出每根导线两个端点的编号,而编号要满足的条件就是导线交叉的情况。接着我们就来分析编号与导线交叉之间的关系。第 i根导线两端点的标号为 A_i和 B_i($A_i < B_i$),两根导线的交叉情况有 3种,对应的编号情况如图 1所示。

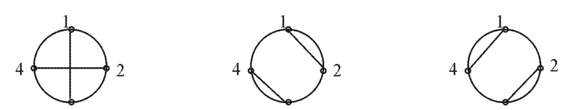


图 1　两根导线的三种交叉情况

它们的共同点是 $A1 > B1, A2 > B2, A1 > A2$ (根据编号规则),不同的是 (a)满足 $A2 > B1, B1 > B2$, (b)满足 $B1 > A2$,而 (c)满足 $B2 > B1$。显然,这是一种偏序关系 (有点不确切,它只满足反对称性和传递性,但不满足自反性),而我们的任务就是根据这种偏序关系求得全序关系,即拓扑排序。

我们用图中的有向边来表示偏序关系,若有向边构成环,则问题无解。以上三种情况对应的有向图,如图 2所示。

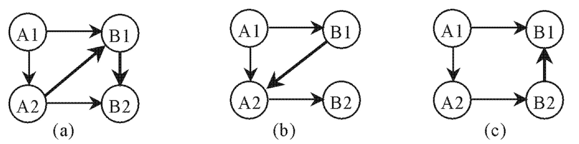


图 2　两根导线交叉情况有向示意

若两导线交叉,则如 (a);若不交叉,则必是 (b)、(c)其中之一,至于选择哪一个,就要看它们中哪一个不会导致无解。

在建模过程中,忽略掉原型中与求解目标关系不大的要素,能够适当地简化问题。但事物都是一分为二的,如果简化得过了度,反而会使模型变得不够准确,甚至是不正确的,因此,只有在"简明"和"准确"之间找到平衡点,才能建立起具有最佳效果的模型。

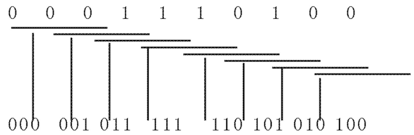
2. 确定理论体系

图由点、边、权三部分组成,根据这三部分性质的不同,就有着不同的图论模型,有着不同的理论和算法,也就构成了不同的理论体系,形成了图论模型的多样化,使图论模型可以广泛地适应各类问题,但这些丰富的选择同时也增加了图论建模的难度。对于有些题目,我们可能很自然地就联想到某种图论模型,例如,看到表达式,就会联想起表达式树,但对于另一些题目,分析的角度不同,就会得出不同的模型,产生不同的效果。

[问题简述]:求一个长度为 $2n + (n - 1)$的 01序列,要

收稿日期: 2006 - 01 - 12
作者简介:蒋　建 (1976 -),男,河南永城人,从事计算机教学与研究工作。

求序列中包含所有长度为 n的 01排列 (共 2n个)。



当 n = 3时 ,序列如上面所示。

[模型 A]如果以每个长度为 n的 01排列为点 ,以它们之间的重叠关系为边 ,就构成了一个有向图 (如图 3所示)。求解目标就是在这个图上找一个回路 (图中粗线部分) ,使得通过每点一次且仅一次 ——Hamilton回路问题。

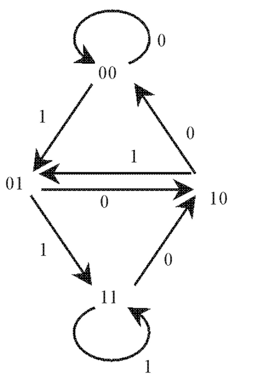


图 3　模型 A

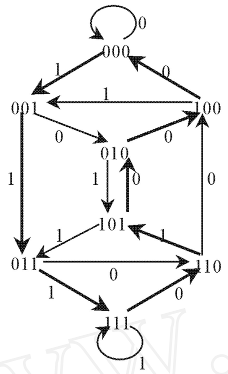


图 4　模型 B

[模型 B]如果以 01排列之间的重叠部分为点 ,以 01排列为边 ,就构成了一个如图 3所示的有向图 ,求解目标就是在这个图上找一个回路 ,使得不重复地遍历每条边 ——Euler回路问题。

从图 4中不难看出 ,图上每点都是连通的 ,而且入度和出度都等于 2,因此图中存在 Euler回路 ,也并不难求。相比较之下 , Hamilton回路问题是 NP完全问题 ,也就是说 ,模型 A的建立并没有给问题的解决带来任何便利。

由此可见 ,不同理论体系的图论模型很可能会产生完全不同的效果 ,这也就突出了选择合适的理论体系的重要性。有时可能会有多个看似都正确的模型可供选择 ,只有仔细分辨出它们之间细微但又关键的差别 ,才能够选出适于求解的模型。这就要求我们既要熟悉图论的算法和理论 ,也要对图论模型的原型有着清楚的认识。

无论是决定要素的取舍 ,还是面对不同理论体系的选择 ,总的原则都是 :准确、清晰、简明。

二、图论模型的转化

在用图论模型解决问题时 ,我们往往会遇到这样的情况 :在很轻松地建立起一个模型之后 ,却不知该如何分析 ,求解 ,或是发现建立起的模型无法表现原型的一个很重要的性质。这时 ,我们必须要放弃现有的模型吗 ? 不 ,如果运用一些方法和技巧的话 ,现有的模型很可能就会转化为能够准确描述原型而又易于求解的新模型。

在这些方法和技巧中 ,有一些只适用于特定的图论模型 ,例如把多叉树转化为二叉树 (见图 5)处理的技巧。此外 ,还有另一些作用范围更广的方法和技巧 ,“拆分转化”就是其中之一。“拆分转化”可分为三类 :点 →边、点 →点、边 →边。其中第一类很常用 ,但拆法较简单 ;第二类不仅常用 ,而且灵活多变 ;第三类的拆法和作用则与第二类很相似。

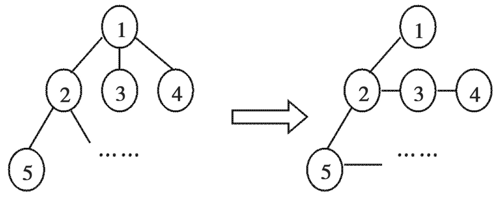


图 5　多叉树转化为二叉树示意

“拆点为边”是“拆分转化”中十分常用的一类 ,当要求现有模型中的点具有边的性质时 ,“拆点为边”就是一个好办法。在实际应用中 ,“拆点为边”的例子很多 ,“拆法”也大同小异 :把每点 i拆成两个点 i和 i′,以 i为弧头的弧都改为以 i′为弧头 ,以 i为弧尾的弧都改为以 i′为弧尾 ;并且添加一条 i′指向 i的弧 ,把点 i具有的属性赋给这条弧。

点 →点是把一个点拆成若干个点。它主要用于把一个点拥有的好几个不同的性质分离开 ,分别赋给几个新的点 ,使每个点的性质单一 ,再通过一些改造来统一处理它们。这与“拆点为边”是截然不同的。这里是为了把一个点具有的各种性质分离开 ,有几种性质需要分离 ,就要拆成几个点 ;而“拆点为边”是为了使点具有边的性质 ,所以总是固定地把一个点拆成两个 ,并在两个新点之间添边。

边 →边是把一条边拆成若干条边。它和上面的点 →点一样 ,也是用于因素分离。

通过对这三类点和边的“拆分转化”的分析和总结不难发现 ,它们的目的和应用范围各异 ,但方法都是一个“拆”字。在它们的应用上 ,我们完全不必拘泥于具体形式 ,只要是建模的需要、解题的需要 ,就可以按需“拆分”。只要“拆分”得当 ,上面的三类“拆分转化”就可以应用得更广。

三、结　语

我们可以看出 ,图论模型的建立有两个要点 ,其一是要素提取 ,其二是选择合适的理论体系。图论模型建好了 ,还要掌握模型转化方法 ,本文重点介绍了模型转化的几个技巧。在实际建模过程中 ,它们是密不可分的 :正确提取原型中的要素 ;对应到特定理论体系中相应的元素上 ;建立起初步的模型 ;然后根据需要进行适当转化。至此 ,一个适于求解的图论模型才建立成功。在这其中 ,无论是对建模原则的把握 ,还是模型转化方法的运用 ,都遵循着一点 :原型本身的性质决定了模型。如果硬要把原型套到不合适的模型上去 ,反而会破坏原型的关键性质 ,这时 ,即使建立的模型再怎么巧妙、经典 ,也是经不住考验的。

图论算法和理论十分独特精妙 ,然而难以灵活运用 ;图论模型的建立和转化十分灵活 ,就是因为太灵活 ,所以难以掌握。因此 ,对图论模型的研究并非一朝一夕的事 ,必须持之以恒 ,才能熟练运用。

参考文献 :

[1]谢　政 ,李建平. 网络算法与复杂性理论 [M]. 北京 :国防科技大学出版社 , 1995.

[2]吴文虎 ,王建德 . 图论的算法与程序设计 [M]. 北京 :清华大学出版社 , 1997.

责任编辑 :孙咏梅