第 20卷 第 4期
2007年 12月

张家口职业技术学院学报
Journal of Zhangjiakou Vocational College of Technology

Vol 20 No. 4
December, 2007

图论中邻接矩阵的应用

刘亚国

(河源职业技术学院,广东河源 517000)

摘要:本文介绍了邻接矩阵的定义及一个重要定理,揭示了 A^K 在图论中的实际意义;并运用邻接矩阵巧妙地解决了锁具装箱和商人过河两个问题。运用邻接矩阵的方法解决问题,简单易懂且容易推广,具有实际应用价值。

关键词:图论;邻接矩阵;顶点;边集;路径

中图分类号:O151. 21　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1008 - 8156(2007)04 - 0078 - 03

1. 引言

首先引入图论中邻接矩阵的定义;然后介绍关于邻接矩阵的一个重要定理。

定义:G是一个图,V(G)为 G的顶点集,E(G)为 G的边集。设 G中有 n个顶点 $v_1, v_2, \cdots v_n$;

$A = (a_{ij})_{n\times n}$为 G的邻接矩阵,其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_iv_j \in E(G) \\ 0 & v_iv_j \notin E(G) \end{cases} \qquad i,j = 1,2\cdots,n$$

定理:设 $A(G)$为图 G的邻接矩阵,则 G中从顶点 v_i到顶点 v_j,长度为 k的道路的条数为 A^k中的 i行 j列元素。

证:对 k用数学归纳法。

$k = 1$时,显然结论成立;假设 k时定理成立,考虑 $k+1$的情形。

记 A^l的 i行 j列元素为 $a_{ij}^{(l)}$ $l \geq 2$, 因为 $A^l \cdot A = A^{l+1}$, 所以

$$a_{ij}^{l+1} = a_{i1}^{l}a_{1j} + a_{i2}^{l}a_{2j} + \cdots + a_{in}^{l}a_{nj}$$

而从 v_i到 v_j长 $k+1$的道路无非是从 v_i经 k步到某顶 v_l $1 \leq l \leq n$,再从 v_l走一步到 v_j;由归纳假设从 v_i到 v_l长为 k的道路共计 a_{il}^{k}条,而从 v_l到 v_j长为 1的道路为 a_{lj}条,所以长为 $k+1$的从 v_i经 k步到 v_l再一步到 v_j的道路共有 $a_{il}^{(k)}a_{lj}$条,故从 v_i经 $k+1$步到 v_j的路径共有 $a_{ij}^{k+1} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{(k)}a_{lj}$条。

2. 邻接矩阵的应用

2. 1锁具装箱问题(1994年全国大学生数学建模竞赛试题 B题)

某厂生产一种弹子锁具,每个锁具的钥匙有 5个槽,每个槽的高度从{1, 2, 3, 4, 5, 6} 6个数(单位略)中任取一数。由于工艺及其他原因,制造锁具时对 5个槽的高度还有两个限制:至少有 3个不同的数,相邻两槽的高度之差不能为 5,满足以上条件制造出来的所有互不相同的锁具称为一批。销售部门在一批锁具中随意地取每 60个装一箱出售。问每一批锁具有多少个,装多少箱?

锁具装箱的这个问题是一个排列组合的数学问题,但在这里我们用图论中的邻接矩阵方法来解决这个问题。

每把锁都有 5个槽,每个槽有 6个高度,至少有三个不同高度的槽。且相邻槽高差不为 5。我们先求出无相邻高差为 5的锁具数量,再减去仅有一个、两个槽高的锁具数目。先计算由 1, 2, 3, 4, 5, 6构成无 1, 6相邻的情况的数目。为此,构造一个 6节点的图:将 1, 2, 3, 4, 5, 6这 6个数作为 6个节点,当两个数字可以相邻时,这两个节点之间加一条边,每个节点有自己到自己的一条边。我们得到了锁具各槽之间的关系示意图(图 1):

收稿日期:2007 - 10 - 21

作者简介:刘亚国(1979 -),男,湖北孝感人,河源职业技术学院助教。研究方向:高职基础数学与应用及数学模型。

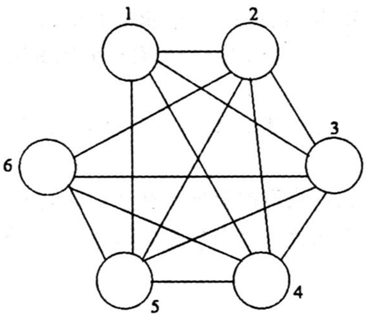

图1

该图的邻接矩阵为
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵 A的所有元素之和表示两个槽高无 1, 6相邻的锁具的个数,每个无 1, 6相邻的 5位数与图 1中长度为 4的一条链 1 - 1对应,如 12345, 11111, 22335等。A的 k次方 A^k中各元素之和就是长度为 k的链的个数。事实上,从这个具体问题可以看出,A^2中第 i行第 j列的元素指从 i开始经过两条边到达 j的链数,即从 i开始经过一条边到 k,再从 k经过一条边达到 j, i和 j就决定了中间顶点 k的数目。

于是,利用 Matlab就很容易得到

$$A^4 = \begin{bmatrix} 141 & 165 & 165 & 165 & 165 & 140 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 165 & 194 & 194 & 194 & 194 & 165 \\ 140 & 165 & 165 & 165 & 165 & 141 \end{bmatrix}$$

将 A^4中元素求和可得相邻高差不为 5的锁具数为 6306把。但这 6306把锁具中包含了仅有一个、两个槽高的锁具,需要从其中减去。需减去的锁具的个数为

$$6 + (C_6^2 - 1)(2^5 - 2) = 426$$

其中,第一个 6仅有 1个槽高的锁具; C_6^2为 1, 2, 3, 4, 5, 6这 6个数中取两个的取法,但扣除 1, 6这一种取法; $(2^5 - 2)$是 5个槽高每个都有两种选择 2^5,再减去都取相同数字的两种情况。

最后得到一批锁具的个数为 6306 - 426 = 5880,总共装 98箱。这样,就用图论的知识成功地解决了一批锁具的数量问题,这个方法比用别的方法简单,且容易推广。

2.2商人过河问题

三名商人各带一个随从乘船渡河,现有一只小船只能容纳两个人,由他们自己划行,若在河的任一岸的随从人数多于商人,他们就可能抢劫财物。但如何乘船渡河由商人决定,试给出一个商人安全渡河的方案。

下面分析及求解

假设渡河是从南岸到北岸, (m, n)表示南岸有 m个商人, n个随从,全部的允许状态共有 10个

$v_1 = (3, 3)$　$v_2 = (3, 2)$　$v_3 = (3, 1)$　$v_4 = (3, 0)$　$v_5 = (2, 2)$

$v_6 = (1, 1)$　$v_7 = (0, 3)$　$v_8 = (0, 2)$　$v_9 = (0, 1)$　$v_{10} = (0, 0)$

以 $V = \{v_1, v_2, \cdots\cdots v_{10}\}$为顶点集,考虑到奇数次渡河及偶数次渡河的不同,我们建立两个邻接矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \qquad B = A^T$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 A 表示从南岸到北岸渡河的图的邻接矩阵, $B = A^T$ 表示从北岸到南岸渡河的图的邻接矩阵。

由定理 1,我们应考虑最小的 k, $s \cdot t(AB)^k A$ 中 1行 10列的元素不为 0,此时 $2k+1$ 即为最少的渡河次数,而矩阵 $(AB)^k A$ 中 1行 10列的元素为最佳的路径数目。

经过计算 $K = 5$ 时, $(AB)^5 A$ 的第 1行 10列元素为 2,所以需 11次渡河,有两条最佳路径。

最后我们用图解法来描述:

前面我们已求出问题的 10种允许状态,允许决策向量集合 $D = \{(u, v): u + v = 1, 2\}$,状态转移方程为 $S_{k+1} = S_k + (-1)^k d_k$,如图 2,标出 10种允许状态,找出从 s_1 经由允许状态到原点的路径,该路径还要满足奇数次向左,向下;偶数次向右,向上。

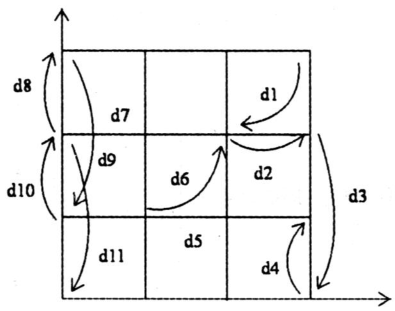

图2

$(3, 3) \xrightarrow{\text{去一商一随}} (2, 2) \xrightarrow{\text{回一商}} (3, 2) \xrightarrow{\text{去二随}} (3, 0) \xrightarrow{\text{回一随}} (3, 1) \xrightarrow{\text{去二商}} (1, 1) \xrightarrow{\text{回一商一随}} (2, 2) \xrightarrow{\text{去二商}} (0, 2) \xrightarrow{\text{回一随}} (0, 3) \xrightarrow{\text{去二随}} (0, 1) \xrightarrow{\text{回一随}} (0, 2) \xrightarrow{\text{去二随}} (0, 0)$

由图 2可得这样的过河策略,共分 11次决策 ,与应用邻接矩阵所求的结果吻合。

3. 总结:使用邻接矩阵描述问题方便直观,使问题变得简单易懂。应用邻接矩阵的方法不仅能够说明 v_i 到 v_j 的路径的长度为 k 时,是否可行,而且还能反映出可行的路径条数,从而能够寻找出最合实际的路径或最短路径,是一种简单且便于计算机求解的方法。

参考文献:

[1]阮晓青,周义仓. 数学建模引论. 高等教育出版社, 2005年 7月第一版.
[2]胡运权. 运筹学教程. 清华大学出版社, 1998年 6月第一版.
[3]王朝瑞. 图论 [M]. 国防工业出版社.

Adjacent Matrix Application in Graph Theory

LIU Ya - guo
(Heyuan Vocational Technical College, Guangdong China, 517000)

Abstract: This paper introduces adjacent matrix's definition, reveals practical significance in the graph theory, and by using adjacent matrix's method, works out a solution to the puzzles of "lock packing" and "merchants crossing river". Application of adjacent matrix makes it easier to solve problems and is easy to promote. It has shown a great practical value for application.

Key words: graph theory; adjacent matrix; apex; edge set; path