回文质数关于偶数位回文数非质数(除11)的证明

WinnieVenice

2020 年 4 月 3 日

因为一个n位数的数都可以表示成:$\sum_{i=1}^{n} a_i * 10^{i-1}$，所以一个偶数位回文数可以表示为:$\sum_{i=1}^{2k} a_i * 10^{i-1}$。根据回文性质又可以表示为$N = \sum_{i=1}^{k} a_i * (10^{2k-i} + 10^{i-1})$。

要证明N不是质数，只需要证明N是合数，根据合数的性质也就只需要证明$N \equiv 0 \bmod \alpha, \alpha \in$ **常数**。由于N的任意性即a_i的任意性，所以有个显然的想法是证明$\forall (10^{2k-i} + 10^{i-1}) \equiv 0 \bmod \alpha$。

证明

$$\because 1 \le i \le k$$

$$\therefore 2k - i \ge k > k - 1 \ge i - 1 \ge 0$$

$$\therefore 10^{2k-i} + 10^{i-1} \leftrightarrow 10^{i-1} * (10^{2*(k-i)+1} + 1)$$

$$\because i = 1, 10^{i-1} \equiv 1$$

$$\therefore \text{我们去证明：} \forall 10^{2*(k-i)+1} + 1 \equiv 0 \bmod \alpha$$

因为$11 \le 10^{2*(k-i)+1} + 1$(取等 $\leftrightarrow i = 1$),且11是个质数，所以我们大胆的认为$\alpha = 11$。所以需要证明 $10^{2*(k-i)+1} + 1 \equiv 0 \bmod 11$。

证明

$$\begin{aligned}
10^{2*(k-i)+1} + 1 &= 1 + (11-1)^{2*(k-i)+1} \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j}, T = 2*(k-i)+1 \\
&= 1 + C_T^0 * 11^0 * (-1)^T + \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j} \\
&= 1 + (-1)^T + \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j}
\end{aligned}$$

$\because T = 2 * (k-i) + 1 \in$ **奇数** $\quad \therefore (-1)^T = -1$

$$\Rightarrow 1 - 1 + \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j}$$

显然 $\quad \sum_{j=1}^{T} C_T^j * 11^j * (-1)^{T-j} \equiv 0 \bmod 11$

综上所述，可得除了非11外的偶数位回文数都不是质数。**证毕**。