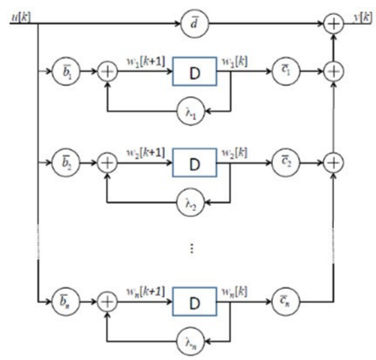
Aanvullingen

# Analyse in het tijdsdomein

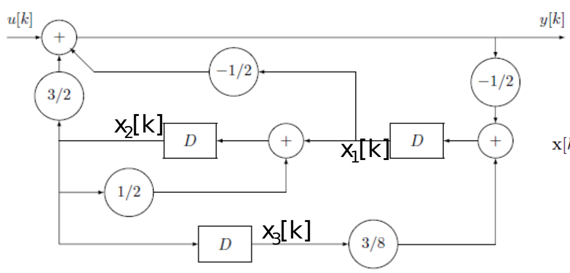



# Responsie op ingangssignalen en begintoestand

# Responsie berekenen

- Gegeven toestandsbeschrijving (A, B, C, D) , u[k] en x[0], wat zijn x[k] en y[k] ?
- Toestandsbeschrijving
  x[k+1] = A x[k] + B u[k]
  y[k] = C x[k] + D u[k]
- Exhaustieve berekening van x[k] en y[k]

# Voorbeeld




$$\mathbf{x}[k+1] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/4 & -3/4 & 3/8 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}[k]$$

$$y[k] = \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} u[k]$$

| $k$ | $u[k]$ | $x_1[k]$ | $x_2[k]$ | $x_3[k]$ | $y[k]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | $-1/2$ | 0 | 0 | $5/4$ |
| 2 | 1 | $-5/8$ | $-1/2$ | 0 | $9/16$ |
| 3 | 0 | $-9/32$ | $-7/8$ | $-1/2$ | $-75/64$ |
| 4 | 0 | $51/128$ | $-23/32$ | $-7/8$ | $-327/256$ |
| 5 | 0 | $159/512$ | $5/128$ | $-23/32$ | $-99/1024$ |

Gegeven

# “Oplossen” toestandsvergelijking

- Gegeven toestandsbeschrijving, u[k] en x[0], wat zijn x[k] en y[k] ?
- Toestandsbeschrijving
  x[k+1] = A x[k] + B u[k]
  y[k] = C x[k] + D u[k]
- Voorheen: x[k+1] = A x[k] ⇒ x[k] = $A^k$ x[0]
- Nu: k = 0: x[1] = A x[0] + B u[0]
  k = 1: x[2] = A x[1] + B u[1] = A (A x[0] + B u[0]) + B u[1]
  = $A^2$x[0] + ABu[0] + Bu[1]
  k = 2: x[3] = A x[2] + B u[2] = $A^3$x[0] + $A^2$Bu[0] + ABu[1] + Bu[2]

  Algemeer $\mathbf{x}[k] = \mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j]$ k > 0
- Uitgangssignaal
- y[0] = C x[0] + D u[0]

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k]$$ k > 0

# Nulingangs- en nultoestandsrespons

$$\mathbf{y}[k] = \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0]}_{\text{Nulingangs-responsie}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k]}_{\text{Nultoestands-responsie}}$$

- Nulingangsresponsie: y[k] als u[k] = 0 ∀k
- Nultoestandsresponsie: y[k] als x[0] = 0

# Toestandsbeschrijving en gelijkvormige matrices

# Toestandsbeschrijving is niet uniek

- $x[k] = P\,w[k]$ met $P = [p_1, \ldots, p_n]$ een nxn inverteerbare matrix
  - Is verandering van coördinaten: $w[k]$ zijn de coordinaten van $x[k]$ in de basis $\{p_1, \ldots, p_n\}$
- $P\,w[k+1] = A\,P\,w[k] + B\,u[k]$
  $\underbrace{P^{-1}P}_{= I}\,w[k+1] = \underbrace{P^{-1}AP}_{=}\,w[k] + \underbrace{P^{-1}B}_{=}\,u[k]$

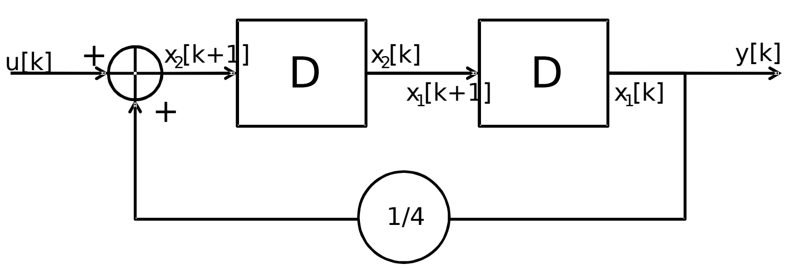
  $w[k+1] = \quad w[k] + \quad u[k]$
- $y[k] = C\,x[k] + D\,u[k] = \underbrace{C\,P}_{=}\,w[k] + \underbrace{D}_{=}\,u[k]$

  $y[k] = \quad w[k] + \quad u[k]$

# Toestandsbeschrijving is niet uniek

- In de nieuwe toestandsvector w[k] hebben we een equivalente toestandsbeschrijving:
  w[k+1] = w[k] + u[k]
  y[k] = w[k] + u[k]
- = $^{-1}$APP ; = $^{-1}$BP; = ; =
  A en zijn gelijkvormig
- Beide systemen zijn equivalent. Let wel op initiële toestand. Nulingangsresponsie:
  w[k] = $^{k}$ w[0] = P$^{-1}$A$^{k}$ P w[0]
  ⇔ P w[k] = A$^{k}$P w[0] ⇔ x[k] = A$^{k}$x[0]
  Zorg ervoor dat P w[0] = x[0], dan is ook P w[k] = x[k] voor k>0, en dus y[k] = w[k] = C x[k]

# Voorbeeld




$$\begin{bmatrix} [\ +1] \\ [\ +1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\,] \\ [\,] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\,]$$

$$[\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\,] \\ [\,] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ = \ [1\ ;\ 0] = \quad ;\ = 0$$

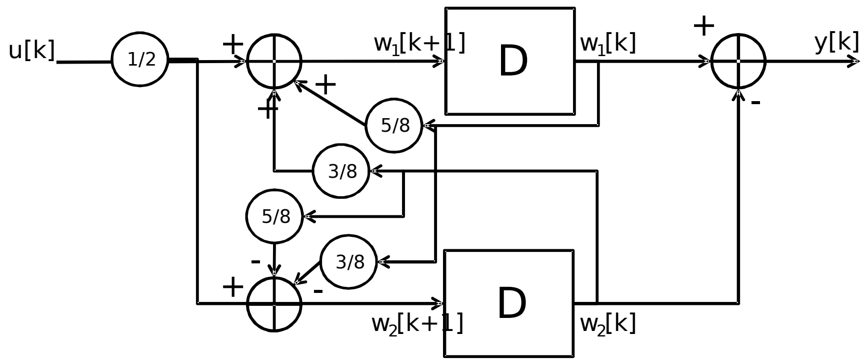
# Voorbeeld (2)

Kies $= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad = \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ zodat x[k] = P w[k]

$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} [+1] \\ [+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/8 & 3/8 \\ -3/8 & -5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [] \\ [] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} []$

$= \quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [=] \quad [1 \quad -1] \begin{bmatrix} [] \\ [] \end{bmatrix}$

$= \quad [1 = -1]$

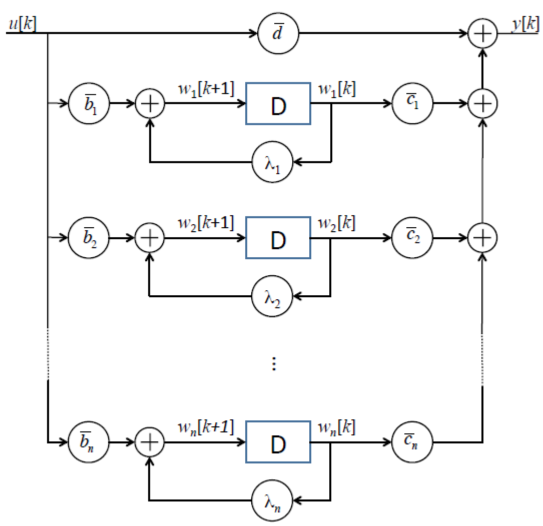



# Toestandsbeschrijving en matrixdiagonalisatie

# Diagonaalvorm

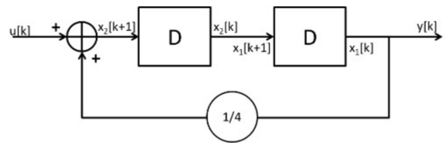
- Veronderstel dat A diagonaliseerbaar is
- Herinner x[k] = P w[k]
- Kies P = [$v_1$ … , $v_n$] met $v_i$ eigenvector van A met eigenwaarde $\lambda_i$
- Dan wordt $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda$
- $w[k+1] = \Lambda w[k] + u[k]$ ; $y[k] = w[k] + u[k]$
- Voor SISO systeem:
  $w[k+1] = \Lambda w[k] + \bar{b}u[k]$ ; $y[k] = \bar{c}w[k] + \bar{d}u[k]$
  $w_i[k+1] = \lambda_i w_i[k] + \bar{b}_i u[k]$ i = 1 … n
- Toestand i beinvloedt toestand $j \neq i$ niet

# Diagonaalvorm voor SISO systeem




- Som van eerste-orde systemen
- Plus directe verbinding met winst $\bar{d}$

# Voorbeeld



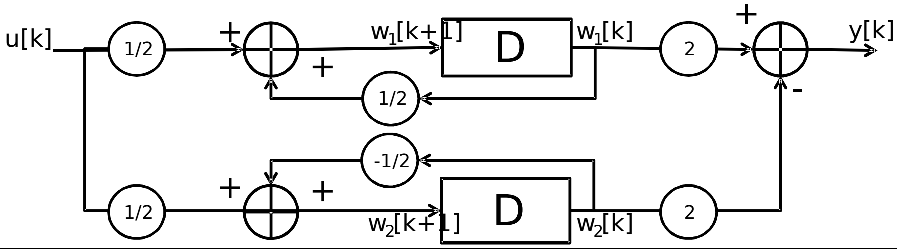

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix}$

K.P. $\lambda^2 - 1/4 = (\lambda - 1/2)(\lambda + 1/2)$

$\lambda_1 = ½ \Rightarrow , = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

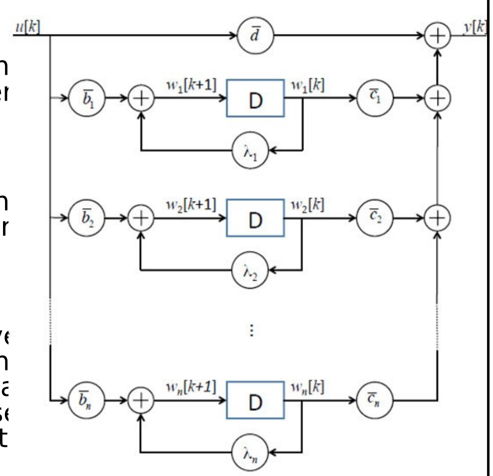
$\lambda_2 = -½ \Rightarrow , = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad = \quad \begin{bmatrix} / & 0 \\ 0 & -/ \end{bmatrix}$

$= \quad = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ = \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$




# Minimaliteit

- Voor sommige systemen kan / $_*$ = 0. De toestandsverander $w_i[k]$ kan dan niet beïnvloed worden. Het systeem is niet controleerbaar.
- Voor sommige systemen kan 0 $_*$ = 0. De toestandsverander $w_i[k]$ kan de uitvoer niet beïnvloeden. Het systeem is observeerbaar.
- Een systeem dat niet observe en/of niet controleerbaar is h niet-minimaal. Hetzelfde inga uitgangsgedrag kan gerealise worden met een kleiner aant geheugenelementen.



## Inwendige (interne) stabiliteit

- Een systeem is inwendig stabiel als $x[k] \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$ bij $u[k]=0$ en dit voor alle $x[0]$
- $x[k] = A^k x[0] = P\Lambda^k P^{-1} x[0] = P\Lambda^k w[0]$
  $= w_1[0]\lambda_1^k v_1 + \ldots + w_n[0]\lambda_n^k v_n$
- Inwendig instabiel zodra één $|\lambda_i| \geq 1$
- Inwendig stabiel $\Leftrightarrow |\lambda_i| < 1$ voor $i = 1 \ldots n$

## Nulingangsresponsie

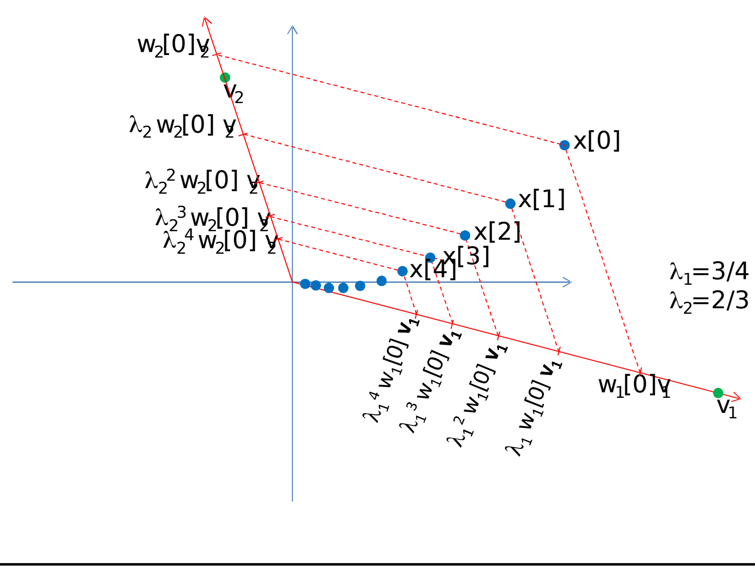
$$\mathbf{y}[k] = \underbrace{\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0]}_{\text{Nulingangs-responsie}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k]}_{\text{Nultoestands-responsie}}$$

- $A^k x[0]$ bestuderen
- $y[k] = c\,A^k x[0]$ (c = rijvector; SISO system)

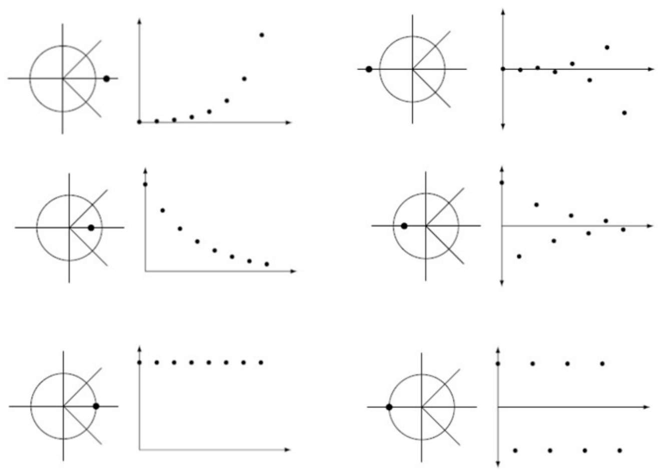
# Nulingangsresponsie

- $x[k] = A^k x[0] = P\Lambda^k P^{-1} x[0] = P\Lambda^k w[0]$
  $= w_1[0]\lambda_1^k v_1 + \dots + w_n[0]\lambda_n^k v_n$
- $w[0] = \begin{bmatrix} w_1[0] \\ \vdots \\ w_n[0] \end{bmatrix} = P^{-1} x[0]$ is de coördinatenvector van x[0] in de basis $\{v_1, \dots, v_n\}$
- $\Lambda^k w[0] = \begin{bmatrix} \lambda_1^k w_1[0] \\ \vdots \\ \lambda_n^k w_n[0] \end{bmatrix} = P^{-1} x[k]$ is de coördinatenvector van x[k] in de basis $\{v_1, \dots, v_n\}$
- $y[k] = c\,x[k] = (c\,v_1)\,w_1[0]\lambda_1^k + \dots + (c\,v_n)\,w_n[0]\lambda_n^k$
  is een gewogen som van exponentiële functies in k

# Nulingangsresponsie



## Bijdragen tot nulingangsresponsie



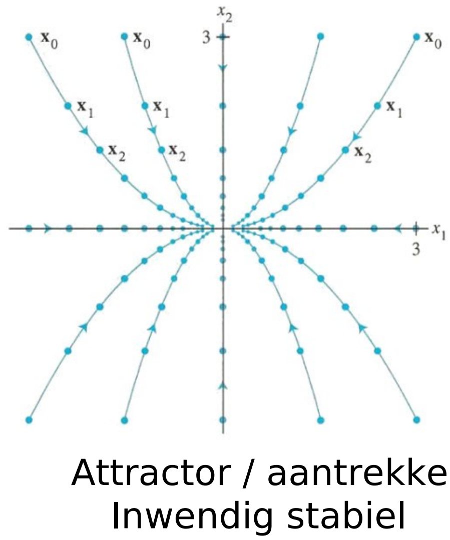
$|\lambda| > 1$

$|\lambda| < 1$

$|\lambda| = 1$

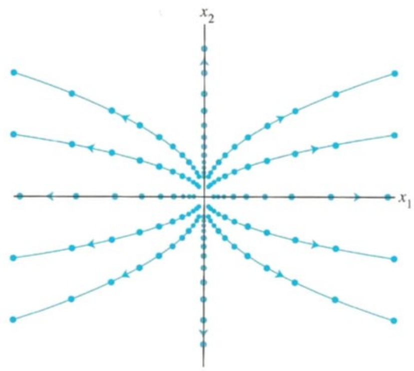
$\lambda > 0$ $\lambda < 0$

## $0 < \lambda_1 < 1$ ; $0 < \lambda_2 < 1$



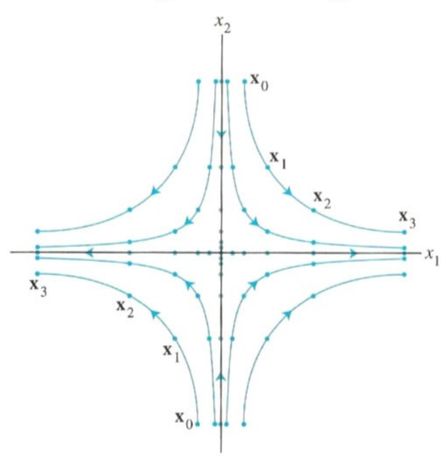

Attractor / aantrekker
Inwendig stabiel

## $1 < \lambda_1$; $1 < \lambda_2$




Repeller / afstoter
Inwendig onstabiel

## $1 < \lambda_1$; $0 < \lambda_2 < 1$




Saddle point / zadelpunt
Inwendig onstabiel

## Complexe eigenwaarden

- !∗ = 12*34 ; !∗5 = 12*34 = !∗

  ω is genormaliseerde frequentie. 0 < 7 < 1
- Eigenvectoren v_i en v_{i+1} = v̄_i
- Neem complex toegevoegde termen samen in

  $y[k] = (c_1 w_1[0]) \lambda_1^k + \ldots + (c_n w_n[0]) \lambda_n^k$

(cis een reële rijvector; E = 1 2 E *E34 )!

' (!E∗ ∗[0], G + !E∗ ∗[0], G) = 2 ' Re (!E∗ ∗[0], G)

= 21E' ( Re 2*E34 ∗[0], G)

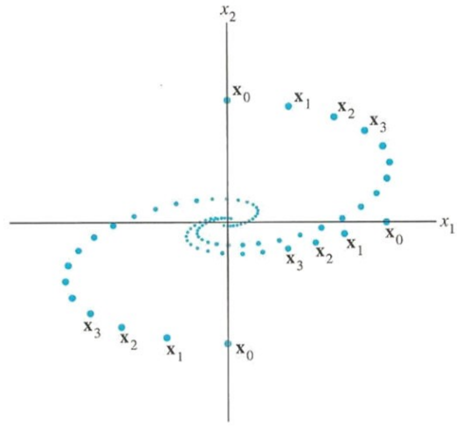
= 21E ( *E34 Re 2∗[0]', G)

## Complexe eigenwaarden (2)

- Noem ∗[0]' G = I 2*J

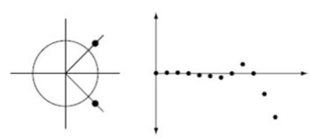
  $$2s\, r^k\, \mathrm{Re}(e^{i(\phi+k\pi\omega)}) = 2s\, r^k \cos(\phi + k\pi\omega)$$
- Bijdrage door complexe eigenwaarde in y[k] is product van:
  - Exponentieel verloop zie r^k reële eigenwaarde
  - Golvend verloop cos(K + L7)

# $0 < |\lambda_1| < 1 ; 0 < |\lambda_2| < 1$

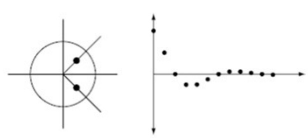



Complexe eigenwaarden
Inwendig stabiel

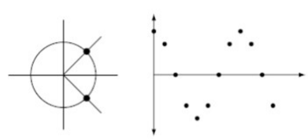
# Bijdrage tot nulingangsresponsie



r = $|\lambda|$ > 1



r = $|\lambda|$ < 1



r = $|\lambda|$ = 1

# Canonieke vorm en differentievergelijking

# Canonieke vorm

- Zoek transformatiematrix Q = [q1 … qn] zodat door de gelijkvormigheidstransformatie M= N N en & Q = N &

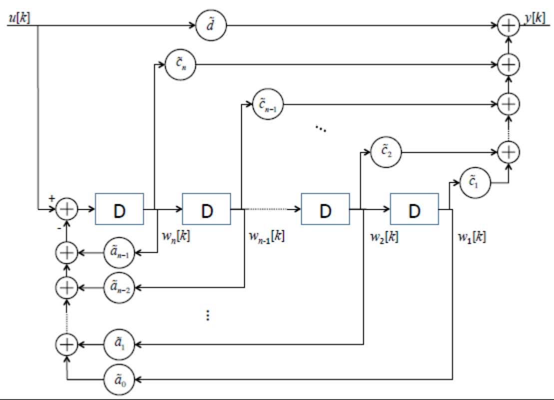
$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & \cdots & -\tilde{a}_{n-3} & -\tilde{a}_{n-2} & -\tilde{a}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- M= N N en & Q = N &
  ⇔ N M = N en N & Q = &
- K.P. is ! % + P % Q ! % + ⋯ + P ! Q + P R Q
  - M noemen we een compagnon-matrix
  - M en A hebben dezelfde K.P. want gelijkvormig
- Constructie van Q – zie later

# Waarom die Ã en &Q?

$$\begin{bmatrix} [+1] \\ [+1] \\ \vdots \\ \% \ [+1] \\ \% [+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & \cdots & -\tilde{a}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [] \\ [] \\ \vdots \\ \% \ [] \\ \% [] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} []$$

y[k] = $\tilde{0}w_1$[k] + $\tilde{0}w_2$[k] + ... + $\tilde{0}_{\%}w_n$[k] + $^{O}$u[k]




# Constructie van Q

- N = N $^{M}$en N$^{Q}$& = &
- 2$^{de}$ vergelijking: [T % ] $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ = & ⇒ T$_{\%}$ = & T

$$\mathbf{A}[\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n] = \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{A}}$$

$$= [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & \cdots & -\tilde{a}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} - [\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a}_0 & \tilde{a}_1 & \cdots & \tilde{a}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= [\mathbf{0} \ \ \mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_{n-1}] - \begin{bmatrix} \tilde{a}_0\mathbf{q}_n & \tilde{a}_1\mathbf{q}_n & \cdots & \tilde{a}_{n-1}\mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

## Constructie van Q

- T% = & ⇒ [T % ·]· &T= [U T% · ] − [ R PQ & % R PQ PQ
- Kolom n: T% = & + % &PQ
- Kolom n-1: T%V = T % + % & PQ
- Kolom 2: TW = T V + & PQ

## Waarom die Ã en & Q?

$$\begin{bmatrix} [+1] \\ [+1] \\ \vdots \\ \%[+1] \\ \%[+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & \cdots & -\tilde{a}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [] \\ [] \\ \vdots \\ \%[] \\ \%[] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} []$$

$w_1[k+1] = w_2[k]$ $w_1[k+1] = w_2[k]$

$w_2[k+1] = w_3[k]$ $w_1[k+2] = w_2[k+1] = w_3[k]$

$w_{n-1}[k+1] = w_n[k]$ $w_1[k+n-1] = w_2[k+n-2] = \ldots = w_n[k]$

$w_n[k+1] = -\tilde{a}_{n-1} w_n[k] - \tilde{a}_{n-2} w_{n-1}[k] - \ldots - \tilde{a}_0 w_1[k] + u[k]$

$w_1[k+n] + \tilde{a}_{n-1} w_1[k+n-1] + \tilde{a}_{n-2} w_1[k+n-2] + \ldots + \tilde{a}_0 w_1[k] = u[k]$

# Waarom die Ã en & Ô?

Dus:

$w_1[k+n] + ã_{n-1} w_1[k+n-1] + ã_{n-2} w_1[k+n-2] + \ldots + ã_0 w_1[k] = u[k]$

Uitgangsvergelijking:

$y[k] = õ w_1[k] + õ w_2[k] + \ldots + õ_{\%} w_n[k] + Ô u[k]$

Herschrijf:

$y[k] - Ô u[k] = õ w_1[k] + õ w_1[k+1] + \ldots + õ_{\%} w_1[k+n-1]$

# $w_1[k]$ elimineren

$w_1[k+n] + ã_{n-1} w_1[k+n-1] + \ldots + ã_0 w_1[k] = u[k]$ · õ

$w_1[k+n+1] + ã_{n-1} w_1[k+n] + \ldots + ã_0 w_1[k+1] = u[k+1]$ · õ

$w_1[k+2n-1] + ã_{n-1} w_1[k+2n-2] + \ldots + ã_0 w_1[k+n-1] = u[k+n-1]$ · õ_%

= (y[k+n]-d̃ u[k+n])

= ã_{n-1} (y[k+n-1]-d̃ u[k+n-1])

= ã_0 (y[k]-d̃ u[k])

= c̃_1 u[k] + c̃_2 u[k+1] + … + c̃_n u[k+n-1]

$y[k+n] + ã_{n-1} y[k+n-1] + ã_{n-2} y[k+n-2] + \ldots + ã_0 y[k]$

$= (õ + ã_0 Ô) u[k] + (õ + ã_1 Ô) u[k+1] + \ldots + (õ_{\%} + ã_{n-1} Ô) u[k+n-1] + Ô u[k+n]$

# Differentievergelijking

$y[k+n] + \tilde{a}_{n-1} y[k+n-1] + \tilde{a}_{n-2} y[k+n-2] + \ldots + \tilde{a}_0 y[k]$
$= Q\, u[k+n] + (Q_{\%} \tilde{o}\, \tilde{a}_{n-1} Q)\, u[k+n-1] + \ldots + (Q_1 \tilde{o}\, \tilde{a}_1 Q)\, u[k+1] + (Q_0 \tilde{o}\, \tilde{a}_0 Q)\, u[k]$
$= f_n u[k+n] + f_{n-1} u[k+n-1] + \ldots + f_1 u[k+1] + f_0 u[k]$

- Rechtstreeks verband tussen u[k] en y[k]
  - Dit heet een differentievergelijking
  - Alternatief voor de toestandsbeschrijving
- Is een verband tussen differentievergelijking en canonieke vorm
- M.a.w.: gegeven een differentievergelijking

$y[k+n] + \tilde{a}_{n-1} y[k+n-1] + \tilde{a}_{n-2} y[k+n-2] + \ldots + \tilde{a}_0 y[k]$
$= f_n u[k+n] + f_{n-1} u[k+n-1] + \ldots + f_1 u[k+1] + f_0 u[k]$

Dan komen daarmee toestandsbeschrijvingen overeen die allemaal dezelfde K.P. hebben: $!^{\%} + P_{\%}Q\ !^{\%} + \cdots + P_{!}Q + P_{R}Q$

- Ook: gegeven een toestandsbeschrijving (A, b, c, d), dan komt daarmee een differentievergelijking overeen waarbij de $\tilde{a}_i$ coëfficiënten van de K.P. van A zijn

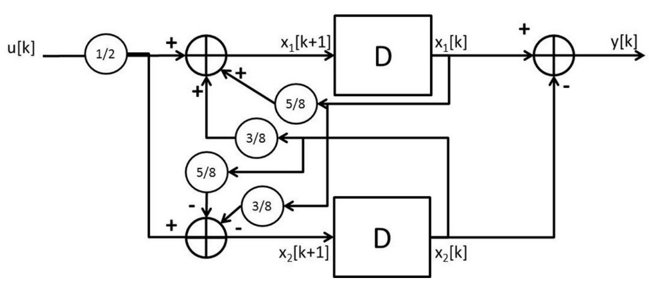
# Voorbeeld

$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$

$\& = = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$' = = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$

d=D = 0




- n=2
- K.P.: $\left(\frac{X}{Y} - !\right)\left(\frac{X}{Y} + !\right) + \frac{Z}{[-} = ! - \frac{[}{[-} = ! - \frac{}{-}$

  $PQ = 0$ ; $_R = -\frac{}{-}$ $PQ$
- $q_2 = b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $T_W = T_V + \& = \frac{}{[}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} PQ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

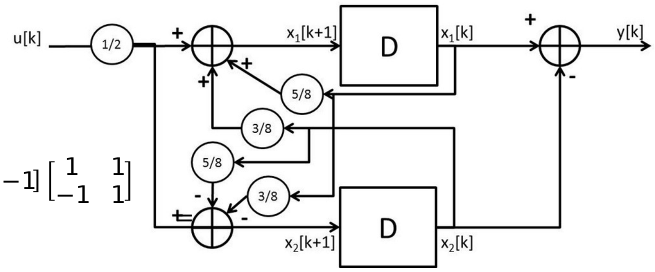
# Voorbeeld

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

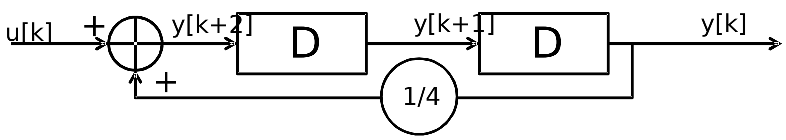
Q = M = $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Q = \ = N = $-\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Q = M = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ = 0




Met Q = $-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, canonieke vorm:




# Voorbeeld

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$

Q = M = $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Q = \ = N = $-\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

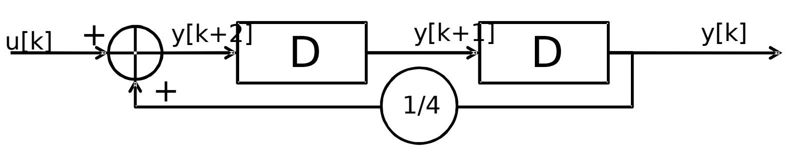
Q = M = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ = 0

PQ = 0 R = $-\frac{1}{4}$ PQ

0 = 1 = 0 0

] = Q = 0; ] = 0 + ã1 Q = 0 R = 0 + ã0 Q = 1

=




y[k+2] = u[k] +1/4 y[k]

y[k+2] – ¼ y[k] = u[k] de differentievergelijking gehaald uit de canonieke vorm

# Impulsresponsie en convolutie

# Impulsresponsie

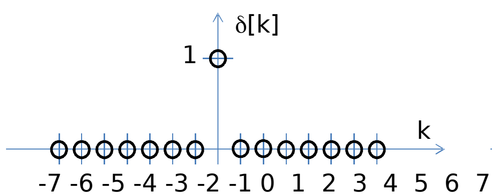
- Doel: berekenen van de responsie. We hadden al:

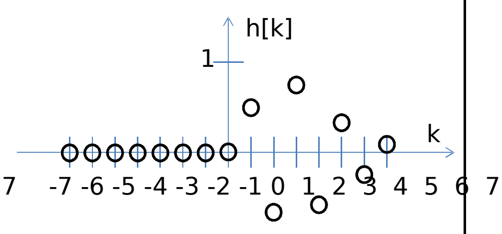
  Exhaustief

$$\mathbf{y}[k] = \mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0] + \sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k]$$

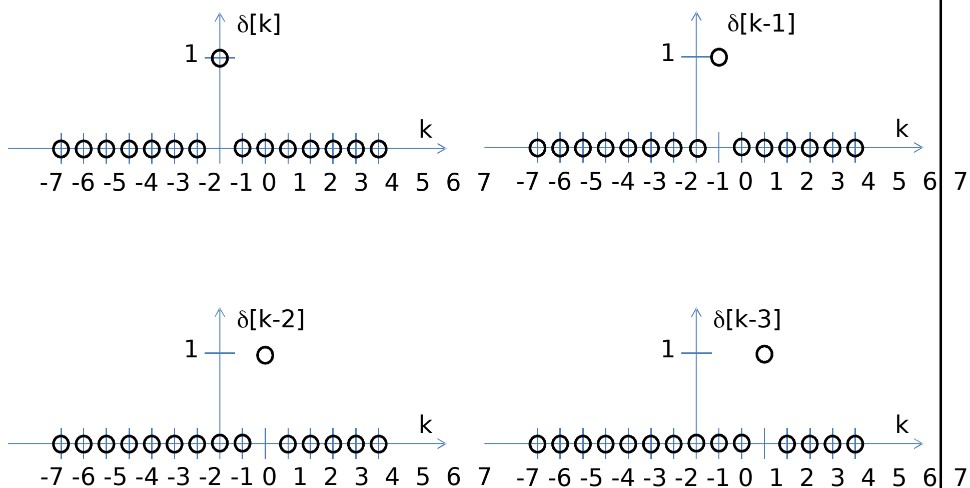
- Nultoestandsimpulsrespons (impulsrespons) h[k] van een SISO DTLTI systeem is y[k] wanneer u[k] = δ[k]

  δ[k] = 1 voor k = 0 en δ[k] = 0 voor k ≠ 0



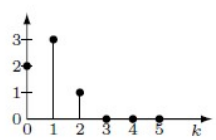



# Verschoven impuls



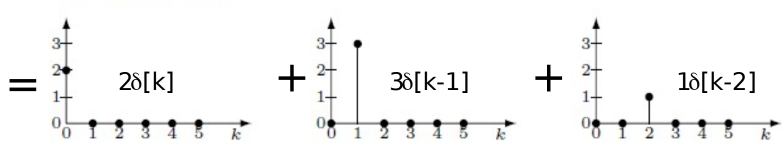

# Ontbinding u[k]

ingangssignaal $u[k]$



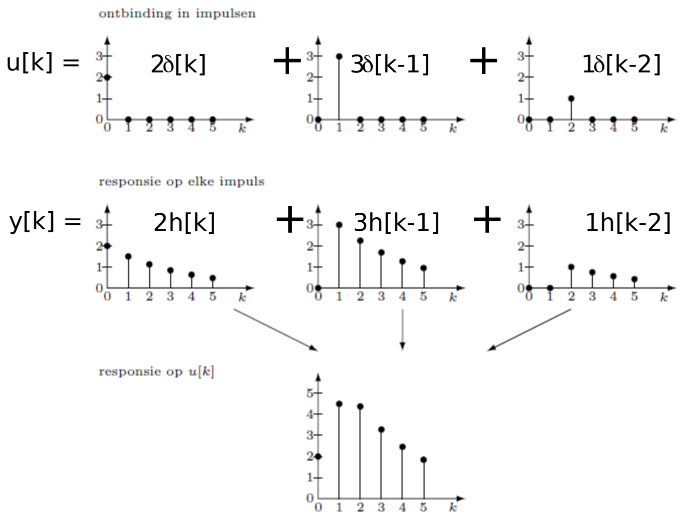
u[0]=2
u[1]=3
u[2]=1

ontbinding in impulsen




$$u[k] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u[j]\delta[k-j]$$

# Lineair en tijdsinvariant




# Convolutie

- Formeel

  [=]` [] (      )

  [=]` ( a (d, efd) b c[]− b] )

  [=] ∑ (d, efd) b[ ] c([ − b] )    Lineair

  [=] ∑ (d, efd) b[ ]  h[ − b]    Tijdsinvariant

  [=] ∗[ h][]
- Voor een systeem dat uit de nultoestand vertrekt !
- y[k] is de convolutie van u[k] en h[k]
- Uitvoer is convolutie van invoer en impulsresponsie

# Convolutie

- Commutatief: a[k] * b[k] = b[k] * a[k]
- Associatief: (a[k] * b[k]) * c[k] = a[k] * (b[k] * c[k])
- Neutraal element: a[k] * δ[k] = a[k]
- Lineair:
  (r a[k] + s b[k]) * c[k] = r (a[k]*c[k]) + s (b[k]*c[k])

- Enkelzijdige signalen a[k] = b[k] = 0 voor k<0 :

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a[j]\,b[k-j] = \sum_{j=0}^{k} a[j]\,b[k-j]$$

- Causaal systeem: h[k] = 0 voor k<0
  Geen respons vóór de excitatie

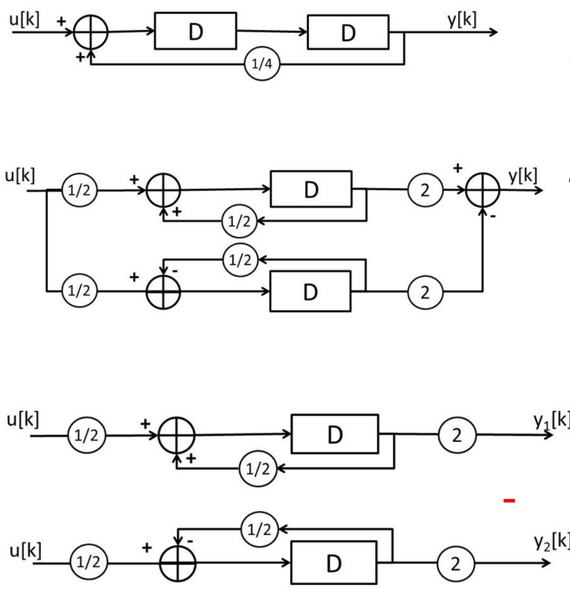
# Impulsresponsie

$\mathbf{y}[0] = \cancel{C\,x[0]} + D\,u[0]$ k=0

$$\mathbf{y}[k] = \underbrace{\cancel{\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}[0]}}_{\text{Nulingangs-responsie}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{B}\mathbf{u}[j] + \mathbf{D}\mathbf{u}[k]}_{\text{Nultoestands-responsie}} \qquad k > 0$$

- k= 0 : $y[k] = d\,\delta[0] = d$
- $u[k] = \delta[k]$ ⇒ in 2de term blijft enkel index j=0 staan
- k > 0: enkel 2de term: $y[k] = cA^{k-1}b$
- k = 0: y[k] = d

# Voorbeeld




$h[0] = d = 0$

$h[k] = ' ^E$ & voor k>0

$= [1 \quad 0]\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1/4 & 0\end{bmatrix}^E\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$h[k] = '$ E &

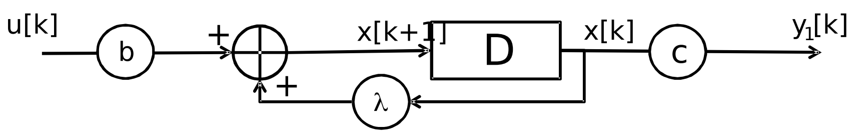
(= ' E & = ' E &)

$= [2 \quad -2]\begin{bmatrix}1/2 & 0\\ 0 & -1/2\end{bmatrix}^E\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$= [2 \quad -2]\begin{bmatrix}(-)^E & 0\\ 0 & (-)^E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$= \left(-\right)^E - \left(- -\right)^E$ voor k>0 ; h[0]=0

# Impulsresponsie van 1ste orde systeem




x[k+1] = λx[k] + b u[k] ; y[k] = c x[k]

u[k] = δ[k] ; nultoestand x[0]=0

k=0: u[0] = 1; x[1]=b ; y[k]=0

k=1: u[1] = 0 ; x[2] = λx[1] = λb ; y[1] = cb

k=2: u[2] = 0 ; x[3] = λx[2] = $λ^2$b ; y[2] = λcb

u[k] = 0 ; x[k+1] = $λ^k$ b ; y[k] = $λ^{k-1}$cb voor k>0 ; y[0]=0

y[k] = cb $λ^{k-1}$ - $\frac{op}{q}$ c[ ] voor k≥0

$h[k] = 2 \left(-\right)^E - 2\left(- -\right)^E = \left(-\right)^E - \left(- -\right)^E$ k>0 ; h[0]=0

# Vorm impulsresponsie

- $h[0]=d$ ; $h[k] = cA^{k-1}b$ voor $k > 0$
- Zelfde bespreking als nulingangsresponsie
  - vb. 1ste orde systeem: $cb\lambda^{k-1}$, zie boven
- Voor diagonaliseerbare A, som van:
  - Exponentiëel verloop ($\lambda$ reëel)
  - Schommelend exponentiëel verloop ($\lambda$ complex)