# Traces écrites Sec07
## CHAPITRE 6 – Généralités sur les fonctions

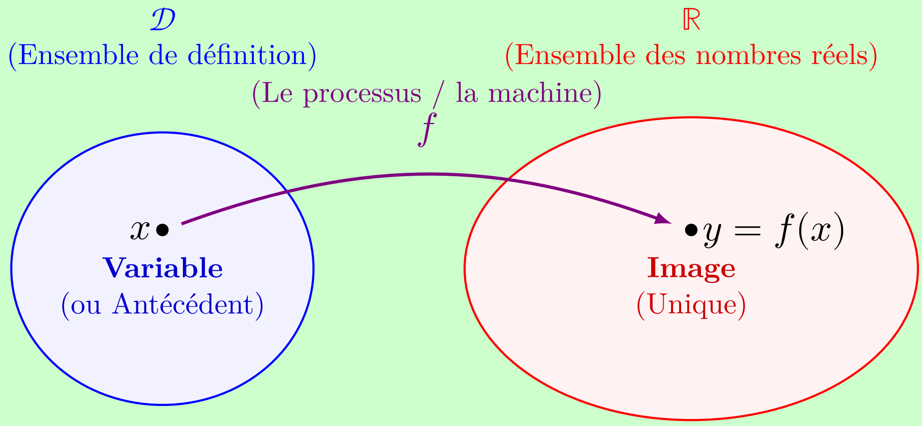
**26 janvier 2026**

# 1 Notion de fonction et vocabulaire

## 1.1 Définition

**Définition 1.1 :**
Une **fonction** $f$ est un processus (une "machine") qui, à tout nombre réel $x$ d'un ensemble de départ $\mathcal{D}$, associe un **unique** nombre réel noté $f(x)$.

- L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé **ensemble de définition** de la fonction $f$.
- Le nombre $x$ est la **variable**.
- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de $x$ par $f$.
- Si $y = f(x)$, on dit que $x$ est un **antécédent** de $y$ par $f$.




**Règle d'or :**
De chaque $x$ part une **seule** flèche.

**Remarque 1 :**
**Attention aux confusions fréquentes :**

- Un nombre $x$ a une **unique** image.
- Un nombre $y$ peut avoir **aucun**, **un** ou **plusieurs** antécédents.

**Exemple 1 :**
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.

- **Calcul de l'image de 3 :**
  $f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$.
  L'image de 3 par $f$ est 8.

- **Recherche des antécédents de 15 :**
  On cherche $x$ tel que $f(x) = 15$.

$$x^2 - 1 = 15 \iff x^2 = 16$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

  Le nombre 15 a deux antécédents : $-4$ et $4$.

**27 janvier 2026**

# 2 Tableau de signes

## 2.1 Lien entre Graphique et Algèbre

Avant de dresser des tableaux, il est essentiel de comprendre le lien entre la courbe représentative d'une fonction et son signe.

**Propriété 2.1 :**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que $f(x) > 0$ (positif) signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** de l'axe des abscisses.
- Dire que $f(x) < 0$ (négatif) signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en-dessous** de l'axe des abscisses.
- Dire que $f(x) = 0$ signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ **coupe** l'axe des abscisses.

## 2.2 Signe d'une fonction affine $ax + b$

C'est la "brique élémentaire" pour construire n'importe quel tableau de signes en classe de Seconde. Une fonction affine est définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Elle est représentée par une droite. Le nombre $a$ est le **coefficient directeur**.

### 2.2.1 Cas 1 : $a > 0$ (Fonction croissante)

Si $a > 0$, la fonction est croissante. Elle part des négatifs pour aller vers les positifs. Elle s'annule en $x = -\frac{b}{a}$.
**Représentation graphique :**

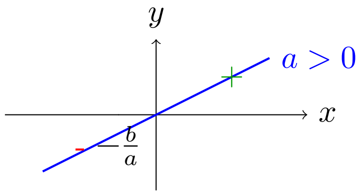



**Tableau de signes :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax + b$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

### 2.2.2 Cas 2 : $a < 0$ (Fonction décroissante)

Si $a < 0$, la fonction est décroissante. Elle part des positifs pour aller vers les négatifs.
**Représentation graphique :**

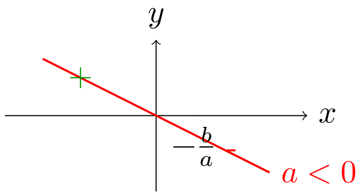


**Tableau de signes :**

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $ax+b$ | $+$ | $0$ | $-$ |

**Méthode 2.2 :**
**Moyen mnémotechnique (Règle du signe de $a$) :**
Dans le tableau de signes d'une fonction affine $ax + b$, on met toujours le **signe de $a$ à droite** du zéro.

## 2.3 Le Tableau de Signes – Produit

Pour étudier le signe d'une expression plus complexe, comme un produit de facteurs $(ax+b)(cx+d)$, on utilise la règle des signes (« moins par moins donne plus », etc.) résumée dans un tableau général.

**Méthode 2.3 :**
**Protocole de résolution :** Pour résoudre une inéquation du type $(2x - 4)(3 - x) \geqslant 0$ :

1. **Racines :** Trouver les valeurs qui annulent chaque facteur.
   - $2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2$
   - $3 - x = 0 \iff -x = -3 \iff x = 3$
2. **Tableau :** Construire un tableau avec une ligne pour $x$ et une ligne pour chaque facteur.
3. **Ordre :** Placer les valeurs de $x$ trouvées sur la première ligne **dans l'ordre croissant**.
4. **Signes :** Remplir les signes de chaque facteur (règle du signe de $a$).
5. **Bilan :** Faire le produit des signes pour la dernière ligne.
6. **Conclusion :** Lire l'ensemble des solutions $S$ correspondant à l'inégalité demandée.

**Exemple 2 :**
**Exemple résolu :** Étudier le signe de $P(x) = (2x - 4)(3 - x)$.

- Facteur 1 : $2x - 4$. Ici $a = 2$ (positif). Donc $+$ à droite du 0. S'annule en 2.
- Facteur 2 : $3 - x$. Ici $a = -1$ (négatif). Donc $-$ à droite du 0. S'annule en 3.

**Tableau de signes :**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $2x-4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| Signe de $3-x$ | | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Signe de $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

*Si on cherchait à résoudre $(2x - 4)(3 - x) \geqslant 0$, la solution serait $S = [2; 3]$.*

## 2.4 Le Tableau de Signes – Quotient

La méthode est identique, à une exception près : **la valeur interdite**.

**Définition 2.4 :**
Un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ n'existe pas si son dénominateur $B(x)$ est nul. Dans le tableau de signes, on indique cette **valeur interdite** par une **double barre** $||$ sur la ligne de résultat.

**Exemple 3 :**
**Exemple résolu :** Résoudre $\dfrac{x+1}{2x-6} \leqslant 0$.

1. **Valeur interdite (Dénominateur) :** $2x-6=0 \iff 2x=6 \iff x=3$.
2. **Numérateur :** $x+1=0 \iff x=-1$.
3. **Tableau :**
   - $x+1$ : $a=1(>0)$, s'annule en $-1$.
   - $2x-6$ : $a=2(>0)$, s'annule en $3$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | |
| $2x-6$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Quotient $Q(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert\vert$ | $+$ | |

**Conclusion :** On cherche où le quotient est négatif ou nul ($\leqslant 0$). On regarde la ligne "Bilan". C'est le cas entre $-1$ et $3$. * En $-1$, c'est égal à $0$ (autorisé par $\leqslant$), on ferme le crochet. * En $3$, c'est une valeur interdite (double barre), on ouvre **toujours** le crochet.

$$S = [-1; 3[$$

**2 février 2026**

# 3 Variations de fonctions

**Définition 3.1 :**
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. Soient $a$ et $b$ deux réels de $I$.

- **Croissante :** $f$ est croissante sur $I$ si elle conserve l'ordre.

$$Si \quad a \leqslant b \quad \text{alors} \quad f(a) \leqslant f(b)$$

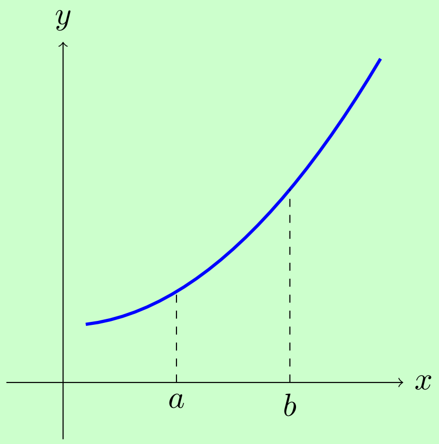
*(La courbe "monte" quand on la parcourt de la gauche vers la droite).*

- **Décroissante :** $f$ est décroissante sur $I$ si elle inverse l'ordre.

$$Si \quad a \leqslant b \quad \text{alors} \quad f(a) \geqslant f(b)$$

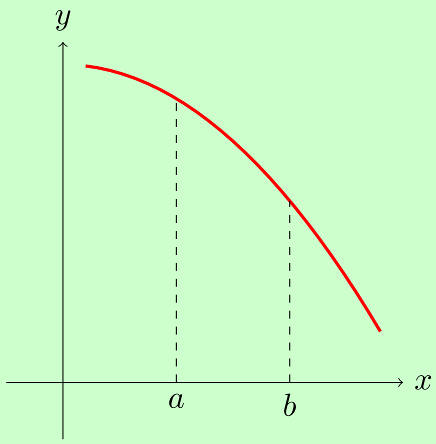
*(La courbe "descend").*

**Fonction Croissante**




Si $x$ augmente, $f(x)$ augmente

**Fonction Décroissante**




Si $x$ augmente, $f(x)$ diminue

## 3.1 Étudier le sens de variation – La méthode de la différence

Pour savoir comment une fonction $f$ évolue sur un intervalle $I$, on ne peut pas se contenter de regarder sa courbe (ce n'est pas une preuve). Il faut comparer les images de deux nombres quelconques.

**Définition 3.2 :**
**Rappel des définitions :**
Soient $a$ et $b$ deux nombres réels de l'intervalle $I$ tels que $a < b$.

- Si $f(a) \leqslant f(b)$ (l'ordre est conservé), la fonction est **croissante**.
- Si $f(a) \geqslant f(b)$ (l'ordre est inversé), la fonction est **décroissante**.

Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$ sans connaître leurs valeurs, la méthode la plus sûre est d'étudier le **signe de leur différence**.

**Propriété 3.3 :**
**Critère de la différence :** On calcule $f(b) - f(a)$.

1. Si $f(b) - f(a) > 0$, cela signifie que $f(b) > f(a)$.
   $\Longrightarrow$ La fonction a "monté", elle est **croissante**.

2. Si $f(b) - f(a) < 0$, cela signifie que $f(b) < f(a)$.
   $\Longrightarrow$ La fonction a "descendu", elle est **décroissante**.

**La Méthode pas à pas :**
Pour étudier les variations d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ :

**Méthode 3.4 :**

1. **Initialisation :** On choisit deux nombres quelconques $a$ et $b$ dans l'intervalle $I$ et on pose l'hypothèse de départ : $a < b$.

2. **Calcul :** On écrit la différence $f(b) - f(a)$.

3. **Transformation :** On développe, réduit et surtout **factorise** l'expression obtenue pour faire apparaître le terme $(b - a)$.

4. **Étude du signe :**

   - On sait que $(b - a) > 0$ (car on a choisi $a < b$).
   - On étudie le signe du reste de l'expression en utilisant le fait que $a$ et $b$ sont dans $I$.

5. **Conclusion :** On applique la règle des signes pour trouver si le résultat est positif ou négatif, et on conclut sur les variations.

**Exemple 4 :**
**Exemple d'application détaillé**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$. Démontrons que $f$ est **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
**Étape 1 : Initialisation**
Soient $a$ et $b$ deux nombres réels de l'intervalle $[0; +\infty[$ tels que $0 \leqslant a < b$.
**Étape 2 : Calcul de la différence**

$$f(b) - f(a) = (2b^2 + 3) - (2a^2 + 3)$$

$$f(b) - f(a) = 2b^2 + 3 - 2a^2 - 3$$

$$f(b) - f(a) = 2b^2 - 2a^2$$

**Étape 3 : Factorisation**
On met 2 en facteur :

$$f(b) - f(a) = 2(b^2 - a^2)$$

On reconnaît l'identité remarquable $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ :

$$f(b) - f(a) = 2(b - a)(b + a)$$

**Étape 4 : Étude du signe**
On regarde le signe de chaque morceau du produit :

- 2 est positif.
- $(b-a)$ est strictement positif (car on a supposé $a<b$).
- $(b+a)$ est strictement positif (car $a$ et $b$ sont dans $[0;+\infty[$ et ne sont pas tous les deux nuls).

**Étape 5 : Conclusion**
Le produit de nombres positifs est positif.
Donc : $f(b)-f(a)>0$.
Cela revient à dire que $f(b)>f(a)$.
L'ordre est conservé ($a<b \implies f(a)<f(b)$).
**La fonction $f$ est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.**

### 3.2 Tableau de variations

On résume les variations d'une fonction dans un tableau. Les flèches indiquent la croissance ou la décroissance.

| $x$ | $-6$ | | $-2$ | | $3$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-2$ | $\nearrow$ | $5$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $4$ |

*Lecture du tableau :*

- La fonction est définie sur $[-6;10]$.
- La fonction est croissante sur $[-6;-2]$ et sur $[3;10]$.
- La fonction est décroissante sur $[-2;3]$.
- Le **maximum** est 5 (atteint en $x=-2$).
- Le **minimum** est $-3$ (atteint en $x=3$).

## 4 Résolution graphique d'équations et inéquations

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

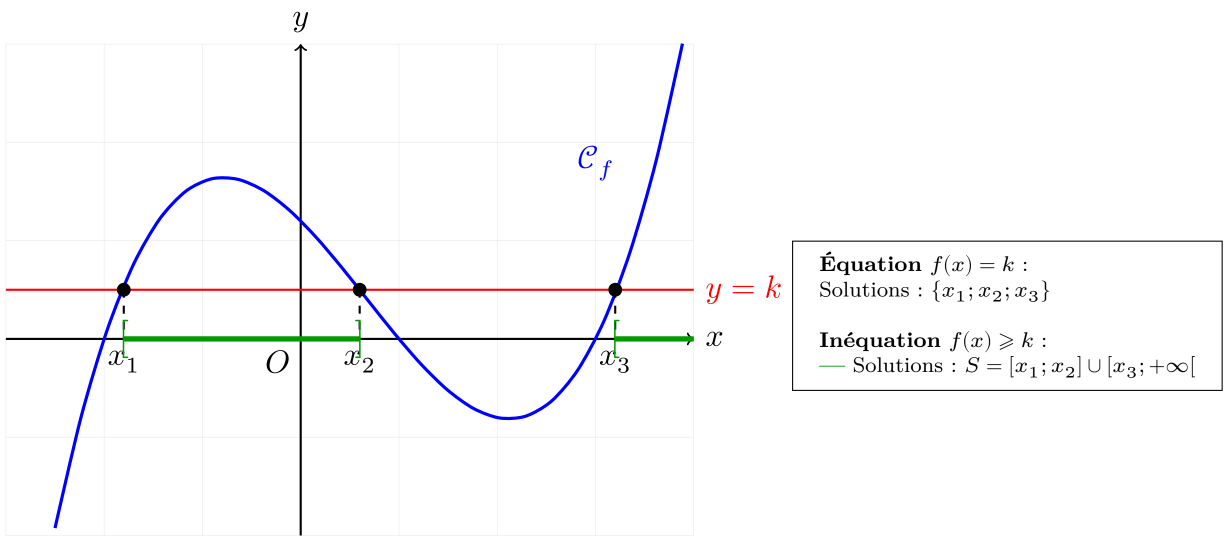
### 4.1 Équations $f(x)=k$

**Méthode 4.1 :**
Les solutions de l'équation $f(x)=k$ sont les **abscisses** des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y=k$.

### 4.2 Inéquations $f(x)<k$ (ou $f(x)>k$)

**Méthode 4.2 :**

- Les solutions de $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessous** de la droite $y = k$.
- Les solutions de $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessus** de la droite $y = k$.



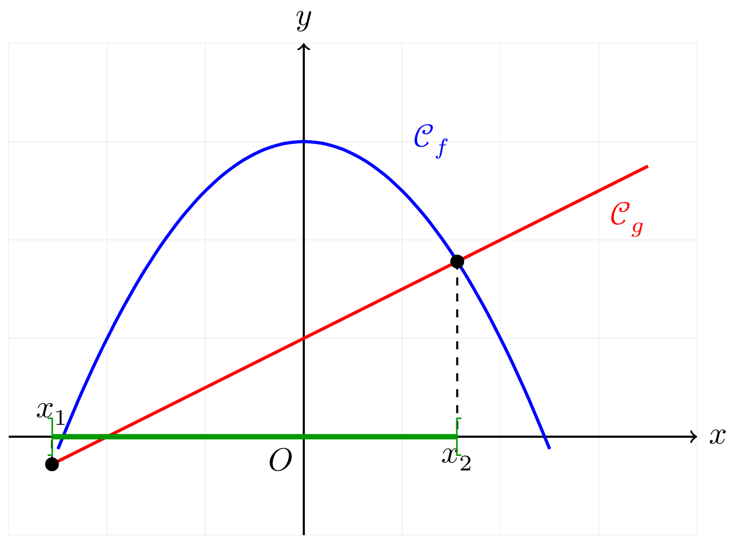

## 4.3 Équations $f(x) = g(x)$

**Méthode 4.3 :**
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

## 4.4 Inéquations $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) > g(x)$)

**Méthode 4.4 :**

- Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de $f$ situés **au-dessous** de celle de $g$.
- Les solutions de $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de $f$ situés **au-dessus** de celle de $g$.




**Intersection** $f(x) = g(x)$ :
Solutions : $\{x_1 ; x_2\}$

**Position relative** $f(x) \geqslant g(x)$ :
($C_f$ au-dessus de $C_g$)
Solutions : $S = [x_1 ; x_2]$