Traces écrites Sec12
CHAPITRE 6 – Généralités sur les fonctions

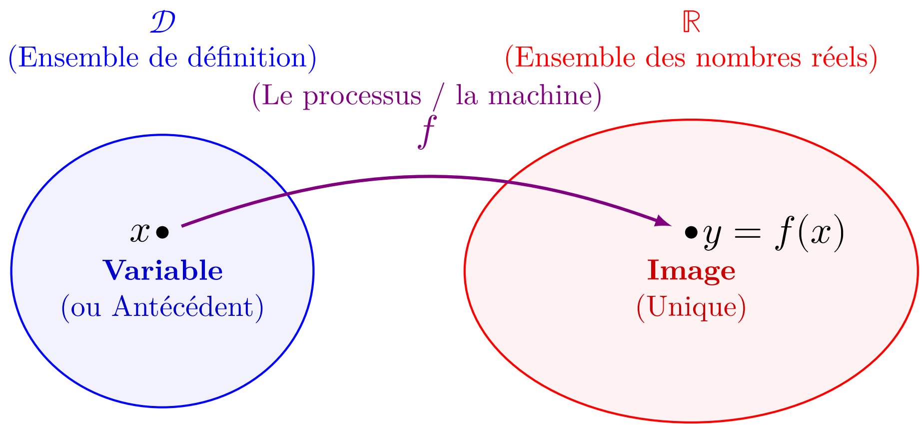
28 janvier 2026

1 Notion de fonction et vocabulaire

Définition 1.1 :
Une **fonction** f est un processus (une “machine”) qui, à tout nombre réel x d'un ensemble de départ $\mathcal{D}$, associe un **unique** nombre réel noté $f(x)$.

Vocabulaire 1.2 :

- L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé **ensemble de définition** de la fonction f.
- Le nombre x est la **variable**.
- Le nombre $f(x)$ est l'**image** de x par f.
- Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y par f.



Règle d'or :
De chaque x part une **seule** flèche.

Remarque 1 :
Attention aux confusions fréquentes :

- Un nombre x a une **unique** image.
- Un nombre y peut avoir **aucun**, **un** ou **plusieurs** antécédents.

Exemple 1 :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.

- **Calcul de l'image de 3 :**
  $f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$.
  L'image de 3 par f est 8.

- **Recherche des antécédents de 15 :**
  On cherche x tel que $f(x) = 15$.

$$x^2 - 1 = 15 \iff x^2 = 16$$
$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

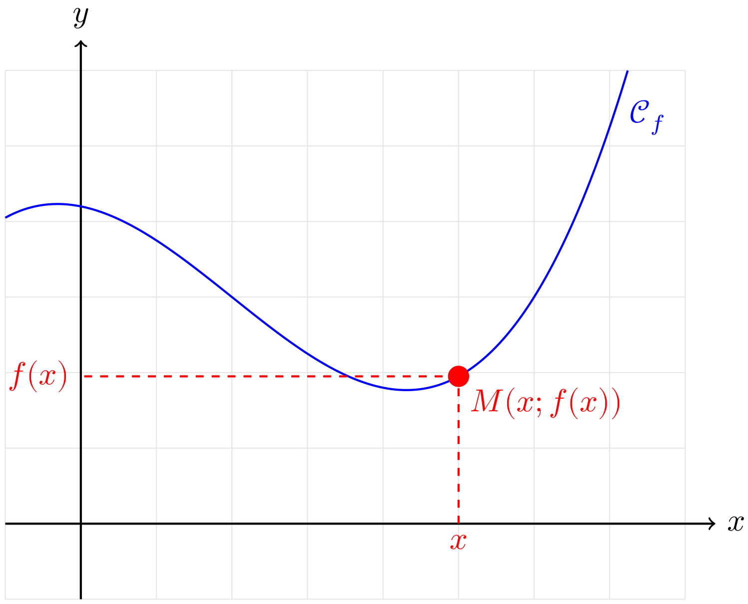
Le nombre 15 a deux antécédents : -4 et 4.

2 Représentation graphique

2.1 Courbe représentative

Définition 2.1 :
Dans un repère $(O; I, J)$ du plan, la **courbe représentative** de la fonction f, notée $\mathcal{C}_f$, est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ tels que :

1. $x \in \mathcal{D}$ (l'abscisse est dans l'ensemble de définition).
2. $y = f(x)$ (l'ordonnée est l'image de l'abscisse).

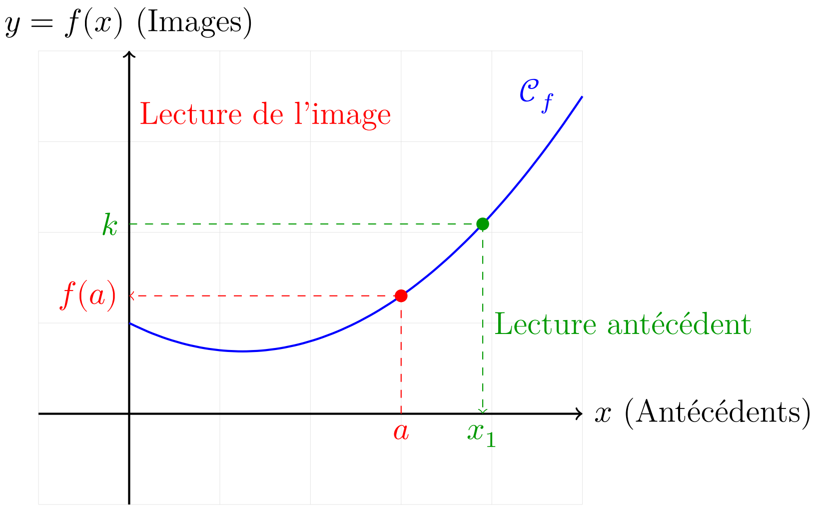


Méthode 2.2 :
Savoir si un point appartient à la courbe
Le point $A(x_A; y_A)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $y_A = f(x_A)$.

2.2 Lecture graphique (Images et Antécédents)

Pour lire graphiquement, il est essentiel de connaître l'orientation des axes :

- L'axe des **abscisses** (horizontal) correspond aux **antécédents** (x).
- L'axe des **ordonnées** (vertical) correspond aux **images** ($f(x)$).



- Pour trouver l'image de a : On part de a sur l'axe des abscisses, on monte vers la courbe, puis on lit la valeur sur l'axe des ordonnées.
- Pour trouver les antécédents de k : On trace la droite horizontale $y = k$, on repère les points d'intersection avec la courbe, et on lit leurs abscisses.

29 janvier 2026

3 Tableau de signes

3.1 Lien entre Graphique et Algèbre

Avant de dresser des tableaux, il est essentiel de comprendre le lien entre la courbe représentative d'une fonction et son signe.

Propriété 3.1 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que $f(x) > 0$ (positif) signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **au-dessus** de l'axe des abscisses.
- Dire que $f(x) < 0$ (négatif) signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située **en-dessous** de l'axe des abscisses.
- Dire que $f(x) = 0$ signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ **coupe** l'axe des abscisses.

3.2 Signe d'une fonction affine $ax + b$

C'est la "brique élémentaire" pour construire n'importe quel tableau de signes en classe de Seconde. Une fonction affine est définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$. Elle est représentée par une droite. Le nombre a est le **coefficient directeur**.

3.2.1 Cas 1 : $a > 0$ (Fonction croissante)

Si $a > 0$, la fonction est croissante. Elle part des négatifs pour aller vers les positifs. Elle s'annule en $x = -\frac{b}{a}$.
Représentation graphique :

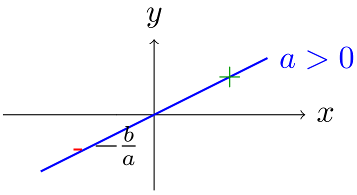


Tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

3.2.2 Cas 2 : $a < 0$ (Fonction décroissante)

Si $a < 0$, la fonction est décroissante. Elle part des positifs pour aller vers les négatifs.
Représentation graphique :

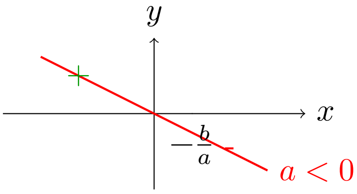


Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $ax+b$		$+$	0	$-$	

Méthode 3.2 :
Moyen mnémotechnique (Règle du signe de a) :
Dans le tableau de signes d'une fonction affine $ax+b$, on met toujours le **signe de a à droite** du zéro.

3.3 Le Tableau de Signes – Produit

Pour étudier le signe d'une expression plus complexe, comme un produit de facteurs $(ax+b)(cx+d)$, on utilise la règle des signes (« moins par moins donne plus », etc.) résumée dans un tableau général.

Méthode 3.3 :
Protocole de résolution : Pour résoudre une inéquation du type $(2x-4)(3-x) \geqslant 0$:

1. **Racines :** Trouver les valeurs qui annulent chaque facteur.
   - $2x-4=0 \iff 2x=4 \iff x=2$
   - $3-x=0 \iff -x=-3 \iff x=3$
2. **Tableau :** Construire un tableau avec une ligne pour x et une ligne pour chaque facteur.
3. **Ordre :** Placer les valeurs de x trouvées sur la première ligne **dans l'ordre croissant**.
4. **Signes :** Remplir les signes de chaque facteur (règle du signe de a).
5. **Bilan :** Faire le produit des signes pour la dernière ligne.
6. **Conclusion :** Lire l'ensemble des solutions S correspondant à l'inégalité demandée.

Exemple 2 :
Exemple résolu : Étudier le signe de $P(x)=(2x-4)(3-x)$.

- Facteur 1 : $2x-4$. Ici $a=2$ (positif). Donc $+$ à droite du 0. S'annule en 2.
- Facteur 2 : $3-x$. Ici $a=-1$ (négatif). Donc $-$ à droite du 0. S'annule en 3.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $2x-4$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Signe de $3-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Si on cherchait à résoudre $(2x-4)(3-x) \geqslant 0$, la solution serait $S=[2;3]$.

3.4 Le Tableau de Signes – Quotient

La méthode est identique, à une exception près : **la valeur interdite**.

Définition 3.4 :
Un quotient $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ n'existe pas si son dénominateur $B(x)$ est nul. Dans le tableau de signes, on indique cette **valeur interdite** par une **double barre** $||$ sur la ligne de résultat.

Exemple 3 :
Exemple résolu : Résoudre $\dfrac{x+1}{2x-6} \leqslant 0$.

1. **Valeur interdite (Dénominateur) :** $2x-6=0 \iff 2x=6 \iff x=3$.
2. **Numérateur :** $x+1=0 \iff x=-1$.
3. **Tableau :**
   - $x+1$: $a=1(>0)$, s'annule en -1.
   - $2x-6$: $a=2(>0)$, s'annule en 3.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2x-6$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Quotient $Q(x)$		$+$	0	$-$	$\vert\vert$	$+$	

Conclusion : On cherche où le quotient est négatif ou nul ($\leqslant 0$). On regarde la ligne "Bilan". C'est le cas entre -1 et 3. * En -1, c'est égal à 0 (autorisé par $\leqslant$), on ferme le crochet. * En 3, c'est une valeur interdite (double barre), on ouvre **toujours** le crochet.

$$S = [-1; 3[$$

2 février 2026

4 Variations de fonctions

Définition 4.1 :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I.

- **Croissante :** f est croissante sur I si elle conserve l'ordre.

$$Si \quad a \leqslant b \quad \text{alors} \quad f(a) \leqslant f(b)$$

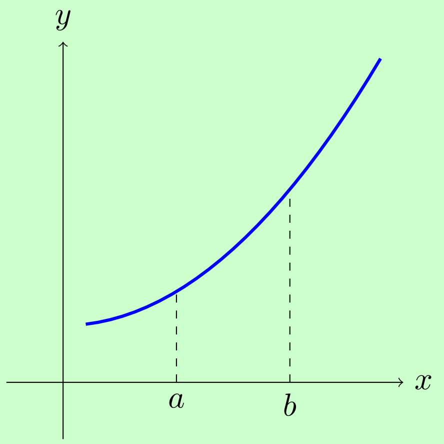
  (La courbe "monte" quand on la parcourt de la gauche vers la droite).

- **Décroissante :** f est décroissante sur I si elle inverse l'ordre.

$$Si \quad a \leqslant b \quad \text{alors} \quad f(a) \geqslant f(b)$$

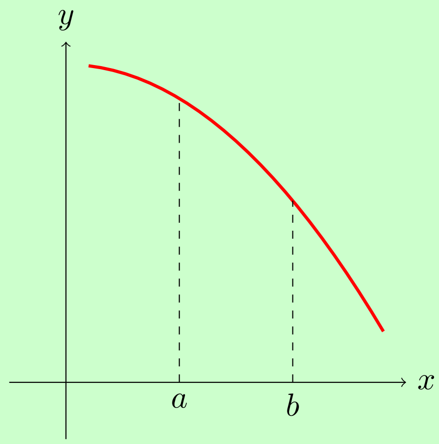
  (La courbe "descend").

Fonction Croissante



Si x augmente, $f(x)$ augmente

Fonction Décroissante



Si x augmente, $f(x)$ diminue

4.1 Étudier le sens de variation – La méthode de la différence

Pour savoir comment une fonction f évolue sur un intervalle I, on ne peut pas se contenter de regarder sa courbe (ce n'est pas une preuve). Il faut comparer les images de deux nombres quelconques.

Définition 4.2 :
Rappel des définitions :
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que $a < b$.

- Si $f(a) \leqslant f(b)$ (l'ordre est conservé), la fonction est **croissante**.
- Si $f(a) \geqslant f(b)$ (l'ordre est inversé), la fonction est **décroissante**.

Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$ sans connaître leurs valeurs, la méthode la plus sûre est d'étudier le **signe de leur différence**.

Propriété 4.3 :
Critère de la différence : On calcule $f(b) - f(a)$.

1. Si $f(b) - f(a) > 0$, cela signifie que $f(b) > f(a)$.
   $\Longrightarrow$ La fonction a "monté", elle est **croissante**.

2. Si $f(b) - f(a) < 0$, cela signifie que $f(b) < f(a)$.
   $\Longrightarrow$ La fonction a "descendu", elle est **décroissante**.

La Méthode pas à pas :
Pour étudier les variations d'une fonction f sur un intervalle I :

Méthode 4.4 :

1. **Initialisation :** On choisit deux nombres quelconques a et b dans l'intervalle I et on pose l'hypothèse de départ : $a < b$.

2. **Calcul :** On écrit la différence $f(b) - f(a)$.

3. **Transformation :** On développe, réduit et surtout **factorise** l'expression obtenue pour faire apparaître le terme $(b - a)$.

4. **Étude du signe :**

   - On sait que $(b - a) > 0$ (car on a choisi $a < b$).
   - On étudie le signe du reste de l'expression en utilisant le fait que a et b sont dans I.

5. **Conclusion :** On applique la règle des signes pour trouver si le résultat est positif ou négatif, et on conclut sur les variations.

Exemple 4 :
Exemple d'application détaillé
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3$. Démontrons que f est **strictement croissante** sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
Étape 1 : Initialisation
Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle $[0; +\infty[$ tels que $0 \leqslant a < b$.
Étape 2 : Calcul de la différence

$$f(b) - f(a) = (2b^2 + 3) - (2a^2 + 3)$$

$$f(b) - f(a) = 2b^2 + 3 - 2a^2 - 3$$

$$f(b) - f(a) = 2b^2 - 2a^2$$

Étape 3 : Factorisation
On met 2 en facteur :

$$f(b) - f(a) = 2(b^2 - a^2)$$

On reconnaît l'identité remarquable $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$:

$$f(b) - f(a) = 2(b - a)(b + a)$$

Étape 4 : Étude du signe
On regarde le signe de chaque morceau du produit :

- 2 est positif.
- $(b - a)$ est strictement positif (car on a supposé $a < b$).
- $(b + a)$ est strictement positif (car a et b sont dans $[0; +\infty[$ et ne sont pas tous les deux nuls).

Étape 5 : Conclusion
Le produit de nombres positifs est positif.
Donc : $f(b) - f(a) > 0$.
Cela revient à dire que $f(b) > f(a)$.
L'ordre est conservé ($a < b \implies f(a) < f(b)$).
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

4.2 Tableau de variations

On résume les variations d'une fonction dans un tableau. Les flèches indiquent la croissance ou la décroissance.

x	-6		-2		3		10
f	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	4

Lecture du tableau :

- La fonction est définie sur $[-6; 10]$.
- La fonction est croissante sur $[-6; -2]$ et sur $[3; 10]$.
- La fonction est décroissante sur $[-2; 3]$.
- Le **maximum** est 5 (atteint en $x = -2$).
- Le **minimum** est -3 (atteint en $x = 3$).

5 février

5 Résolution graphique d'équations et inéquations

Soit f une fonction définie sur un intervalle et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.

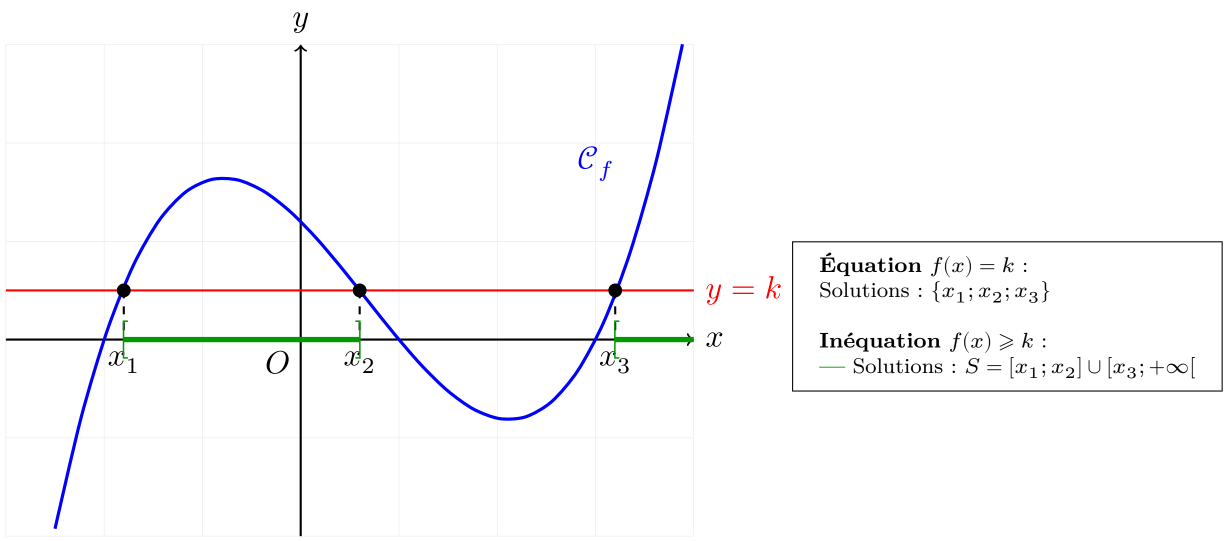
5.1 Équations $f(x) = k$

Méthode 5.1 :
Les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les **abscisses** des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

5.2 Inéquations $f(x) < k$ (ou $f(x) > k$)

Méthode 5.2 :

- Les solutions de $f(x) < k$ sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessous** de la droite $y = k$.
- Les solutions de $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessus** de la droite $y = k$.



5.3 Équations $f(x) = g(x)$

Méthode 5.3 :
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

5.4 Inéquations $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) > g(x)$)

Méthode 5.4 :

- Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés **au-dessous** de celle de g.
- Les solutions de $f(x) > k$ sont les abscisses des points de la courbe représentative de f situés **au-dessus** de celle de g.