

# Traces écrites Sec07

## CHAPITRE 6 – Généralités sur les fonctions

26 janvier 2026

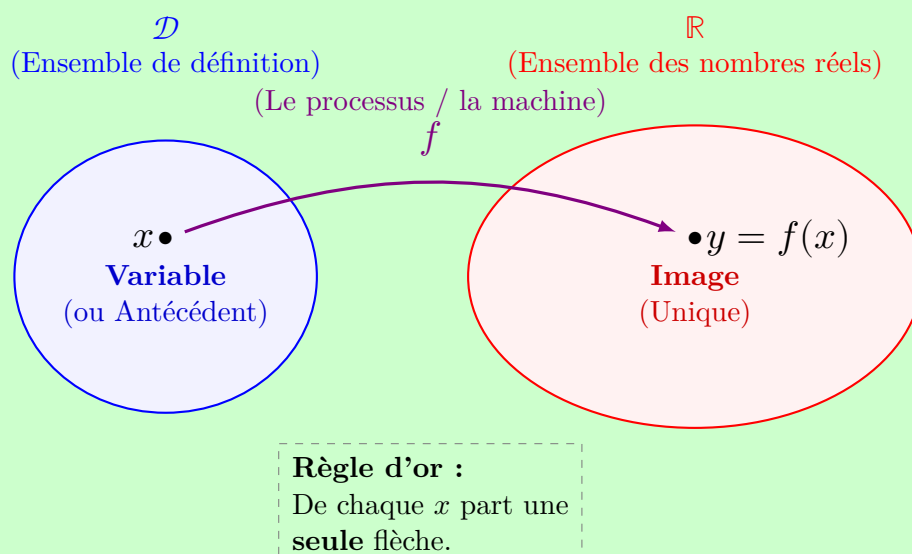
### 1 Notion de fonction et vocabulaire

#### 1.1 Définition

##### Définition 1.1 :

Une **fonction**  $f$  est un processus (une “machine”) qui, à tout nombre réel  $x$  d’un ensemble de départ  $\mathcal{D}$ , associe un **unique** nombre réel noté  $f(x)$ .

- L’ensemble  $\mathcal{D}$  est appelé **ensemble de définition** de la fonction  $f$ .
- Le nombre  $x$  est la **variable**.
- Le nombre  $f(x)$  est l’**image** de  $x$  par  $f$ .
- Si  $y = f(x)$ , on dit que  $x$  est un **antécédent** de  $y$  par  $f$ .



##### Remarque 1 :

Attention aux confusions fréquentes :

- Un nombre  $x$  a une **unique** image.
- Un nombre  $y$  peut avoir **aucun**, **un** ou **plusieurs** antécédents.

##### Exemple 1 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 1$ .

- **Calcul de l'image de 3 :**  
 $f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$ .  
 L'image de 3 par  $f$  est 8.

- **Recherche des antécédents de 15 :**

On cherche  $x$  tel que  $f(x) = 15$ .

$$x^2 - 1 = 15 \iff x^2 = 16$$

$$x = 4 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

Le nombre 15 a deux antécédents :  $-4$  et  $4$ .

27 janvier 2026

## 2 Tableau de signes

### 2.1 Lien entre Graphique et Algèbre

Avant de dresser des tableaux, il est essentiel de comprendre le lien entre la courbe représentative d'une fonction et son signe.

#### Propriété 2.1 :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.

- Dire que  $f(x) > 0$  (positif) signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située **au-dessus** de l'axe des abscisses.
- Dire que  $f(x) < 0$  (négatif) signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  est située **en-dessous** de l'axe des abscisses.
- Dire que  $f(x) = 0$  signifie que la courbe  $\mathcal{C}_f$  **coupe** l'axe des abscisses.

### 2.2 Signe d'une fonction affine $ax + b$

C'est la "brique élémentaire" pour construire n'importe quel tableau de signes en classe de Seconde. Une fonction affine est définie par  $f(x) = ax + b$  avec  $a \neq 0$ . Elle est représentée par une droite. Le nombre  $a$  est le **coefficient directeur**.

#### 2.2.1 Cas 1 : $a > 0$ (Fonction croissante)

Si  $a > 0$ , la fonction est croissante. Elle part des négatifs pour aller vers les positifs. Elle s'annule en  $x = -\frac{b}{a}$ .

Représentation graphique :

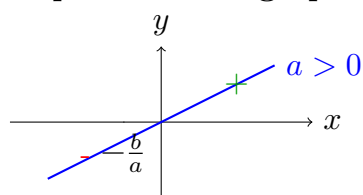


Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	$-$	$0$	$+$

#### 2.2.2 Cas 2 : $a < 0$ (Fonction décroissante)

Si  $a < 0$ , la fonction est décroissante. Elle part des positifs pour aller vers les négatifs.

Représentation graphique :

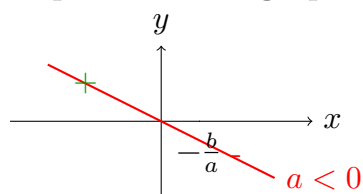


Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax + b$	+	0	-

**Méthode 2.2 :**

**Moyen mnémotechnique (Règle du signe de  $a$ ) :**

Dans le tableau de signes d'une fonction affine  $ax + b$ , on met toujours le **signe de  $a$  à droite** du zéro.

## 3 Tableau de signes

### 3.1 Le Tableau de Signes – Produit

Pour étudier le signe d'une expression plus complexe, comme un produit de facteurs  $(ax + b)(cx + d)$ , on utilise la règle des signes (« moins par moins donne plus », etc.) résumée dans un tableau général.

**Méthode 3.1 :**

**Protocole de résolution :** Pour résoudre une inéquation du type  $(2x - 4)(3 - x) \geq 0$  :

1. **Racines :** Trouver les valeurs qui annulent chaque facteur.

- $2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2$
- $3 - x = 0 \iff -x = -3 \iff x = 3$

2. **Tableau :** Construire un tableau avec une ligne pour  $x$  et une ligne pour chaque facteur.

3. **Ordre :** Placer les valeurs de  $x$  trouvées sur la première ligne **dans l'ordre croissant**.

4. **Signes :** Remplir les signes de chaque facteur (règle du signe de  $a$ ).

5. **Bilan :** Faire le produit des signes pour la dernière ligne.

6. **Conclusion :** Lire l'ensemble des solutions  $S$  correspondant à l'inégalité demandée.

**Exemple 2 :**

**Exemple résolu :** Étudier le signe de  $P(x) = (2x - 4)(3 - x)$ .

- Facteur 1 :  $2x - 4$ . Ici  $a = 2$  (positif). Donc + à droite du 0. S'annule en 2.
- Facteur 2 :  $3 - x$ . Ici  $a = -1$  (négatif). Donc - à droite du 0. S'annule en 3.

Tableau de signes :

$x$	$-\infty$	2	3	$+\infty$
Signe de $2x - 4$	-	0	+	+
Signe de $3 - x$	+	-	0	-
Signe de $P(x)$	-	0	-	-

Si on cherchait à résoudre  $(2x - 4)(3 - x) \geq 0$ , la solution serait  $S = [2; 3]$ .

## 3.2 Le Tableau de Signes – Quotient

La méthode est identique, à une exception près : **la valeur interdite**.

### Définition 3.2 :

Un quotient  $\frac{A(x)}{B(x)}$  n'existe pas si son dénominateur  $B(x)$  est nul. Dans le tableau de signes, on indique cette **valeur interdite** par une **double barre ||** sur la ligne de résultat.

### Exemple 3 :

**Exemple résolu :** Résoudre  $\frac{x+1}{2x-6} \leq 0$ .

1. **Valeur interdite (Dénominateur) :**  $2x - 6 = 0 \iff 2x = 6 \iff x = 3$ .

2. **Numérateur :**  $x + 1 = 0 \iff x = -1$ .

3. **Tableau :**

- $x + 1 : a = 1(> 0)$ , s'annule en  $-1$ .
- $2x - 6 : a = 2(> 0)$ , s'annule en  $3$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$
$x + 1$	$-$	$0$	$+$	$+$
$2x - 6$	$-$	$ $	$-$	$+$
Quotient $Q(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$

**Conclusion :** On cherche où le quotient est négatif ou nul ( $\leq 0$ ). On regarde la ligne “Bilan”. C’est le cas entre  $-1$  et  $3$ . \* En  $-1$ , c’est égal à  $0$  (autorisé par  $\leq$ ), on ferme le crochet. \* En  $3$ , c’est une valeur interdite (double barre), on ouvre **toujours** le crochet.

$$S = [-1; 3[$$

2 février 2026

## 4 Variations de fonctions

### Définition 4.1 :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . Soient  $a$  et  $b$  deux réels de  $I$ .

- **Croissante** :  $f$  est croissante sur  $I$  si elle conserve l'ordre.

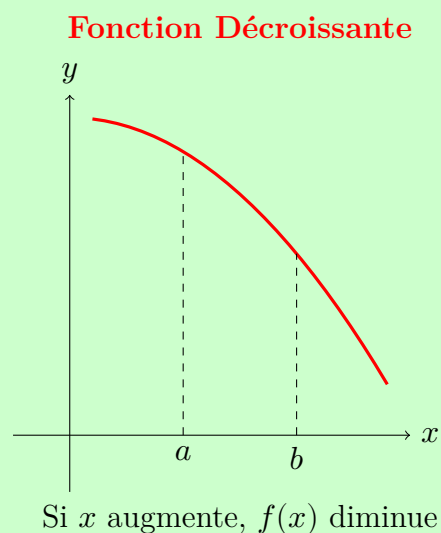
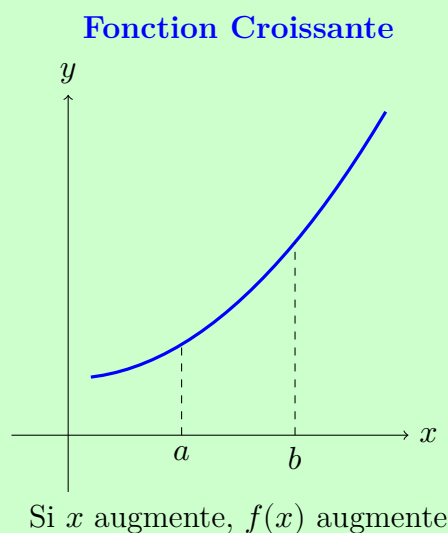
$$\text{Si } a \leq b \text{ alors } f(a) \leq f(b)$$

(La courbe “monte” quand on la parcourt de la gauche vers la droite).

- **Décroissante** :  $f$  est décroissante sur  $I$  si elle inverse l'ordre.

$$\text{Si } a \leq b \text{ alors } f(a) \geq f(b)$$

(La courbe “descend”).



### 4.1 Étudier le sens de variation – La méthode de la différence

Pour savoir comment une fonction  $f$  évolue sur un intervalle  $I$ , on ne peut pas se contenter de regarder sa courbe (ce n'est pas une preuve). Il faut comparer les images de deux nombres quelconques.

#### Définition 4.2 :

##### Rappel des définitions :

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels de l'intervalle  $I$  tels que  $a < b$ .

- Si  $f(a) \leq f(b)$  (l'ordre est conservé), la fonction est **croissante**.
- Si  $f(a) \geq f(b)$  (l'ordre est inversé), la fonction est **décroissante**.

Pour comparer  $f(a)$  et  $f(b)$  sans connaître leurs valeurs, la méthode la plus sûre est d'étudier le **signe de leur différence**.

**Propriété 4.3 :**

**Critère de la différence :** On calcule  $f(b) - f(a)$ .

1. Si  $f(b) - f(a) > 0$ , cela signifie que  $f(b) > f(a)$ .  
 $\Rightarrow$  La fonction a “monté”, elle est **croissante**.
2. Si  $f(b) - f(a) < 0$ , cela signifie que  $f(b) < f(a)$ .  
 $\Rightarrow$  La fonction a “descendu”, elle est **décroissante**.

**La Méthode pas à pas :**

Pour étudier les variations d’une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  :

**Méthode 4.4 :**

1. **Initialisation :** On choisit deux nombres quelconques  $a$  et  $b$  dans l’intervalle  $I$  et on pose l’hypothèse de départ :  $a < b$ .
2. **Calcul :** On écrit la différence  $f(b) - f(a)$ .
3. **Transformation :** On développe, réduit et surtout **factorise** l’expression obtenue pour faire apparaître le terme  $(b - a)$ .
4. **Étude du signe :**
  - On sait que  $(b - a) > 0$  (car on a choisi  $a < b$ ).
  - On étudie le signe du reste de l’expression en utilisant le fait que  $a$  et  $b$  sont dans  $I$ .
5. **Conclusion :** On applique la règle des signes pour trouver si le résultat est positif ou négatif, et on conclut sur les variations.

**Exemple 4 :****Exemple d’application détaillé**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x^2 + 3$ . Démontrons que  $f$  est **strictement croissante** sur l’intervalle  $[0; +\infty[$ .

**Étape 1 : Initialisation**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels de l’intervalle  $[0; +\infty[$  tels que  $0 \leq a < b$ .

**Étape 2 : Calcul de la différence**

$$f(b) - f(a) = (2b^2 + 3) - (2a^2 + 3)$$

$$f(b) - f(a) = 2b^2 + 3 - 2a^2 - 3$$

$$f(b) - f(a) = 2b^2 - 2a^2$$

**Étape 3 : Factorisation**

On met 2 en facteur :

$$f(b) - f(a) = 2(b^2 - a^2)$$

On reconnaît l’identité remarquable  $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$  :

$$f(b) - f(a) = 2(b - a)(b + a)$$

**Étape 4 : Étude du signe**

On regarde le signe de chaque morceau du produit :

- 2 est positif.
- $(b - a)$  est strictement positif (car on a supposé  $a < b$ ).
- $(b + a)$  est strictement positif (car  $a$  et  $b$  sont dans  $[0; +\infty[$  et ne sont pas tous les deux nuls).

### Étape 5 : Conclusion

Le produit de nombres positifs est positif.

Donc :  $f(b) - f(a) > 0$ .

Cela revient à dire que  $f(b) > f(a)$ .

L'ordre est conservé ( $a < b \implies f(a) < f(b)$ ).

**La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .**

## 4.2 Tableau de variations

On résume les variations d'une fonction dans un tableau. Les flèches indiquent la croissance ou la décroissance.

$x$	-6	-2	3	10
$f$	-2	5	-3	4

*Lecture du tableau :*

- La fonction est définie sur  $[-6; 10]$ .
- La fonction est croissante sur  $[-6; -2]$  et sur  $[3; 10]$ .
- La fonction est décroissante sur  $[-2; 3]$ .
- Le **maximum** est 5 (atteint en  $x = -2$ ).
- Le **minimum** est -3 (atteint en  $x = 3$ ).



3 février 2026

## 5 Résolution graphique d'équations et inéquations

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe.

### 5.1 Équations $f(x) = k$

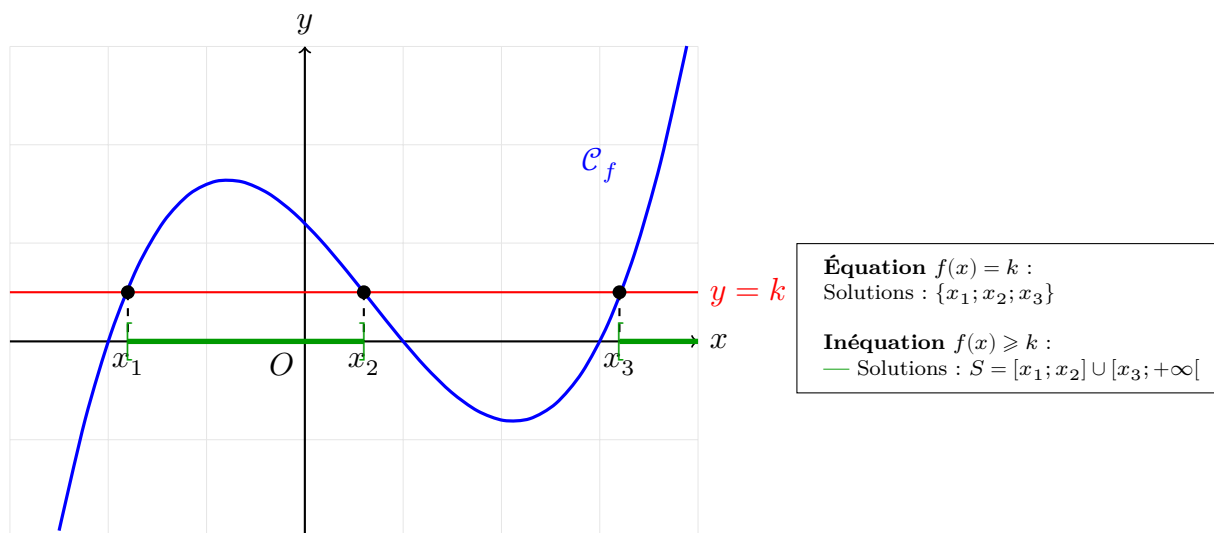
#### Méthode 5.1 :

Les solutions de l'équation  $f(x) = k$  sont les **abscisses** des points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}_f$  avec la droite horizontale d'équation  $y = k$ .

### 5.2 Inéquations $f(x) < k$ (ou $f(x) > k$ )

#### Méthode 5.2 :

- Les solutions de  $f(x) < k$  sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessous** de la droite  $y = k$ .
- Les solutions de  $f(x) > k$  sont les abscisses des points de la courbe situés **au-dessus** de la droite  $y = k$ .



### 5.3 Équations $f(x) = g(x)$

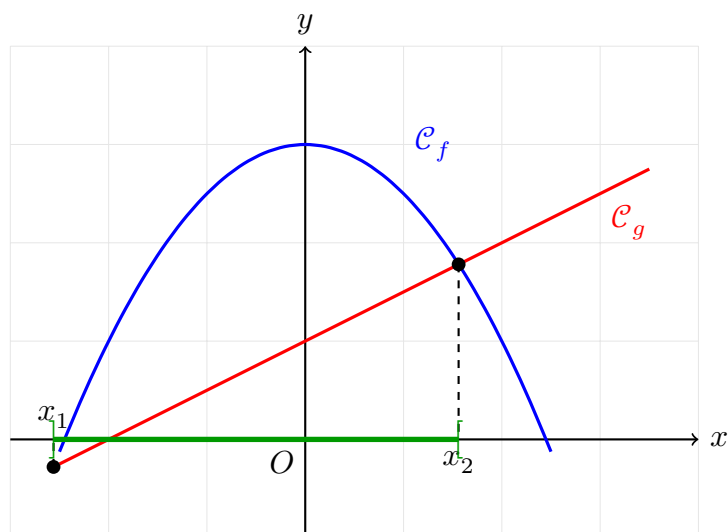
#### Méthode 5.3 :

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .

### 5.4 Inéquations $f(x) < g(x)$ (ou $f(x) > g(x)$ )

**Méthode 5.4 :**

- Les solutions de  $f(x) < g(x)$  sont les abscisses des points de la courbe représentative de  $f$  situés **au-dessous** de celle de  $g$ .
- Les solutions de  $f(x) > k$  sont les abscisses des points de la courbe représentative de  $f$  situés **au-dessus** de celle de  $g$ .



**Intersection**  $f(x) = g(x)$  :  
Solutions :  $\{x_1; x_2\}$

**Position relative**  $f(x) \geq g(x)$  :  
( $C_f$  au-dessus de  $C_g$ )  
— Solutions :  $S = [x_1; x_2]$