基于 CartPole-v0 环境的强化学习算法实现

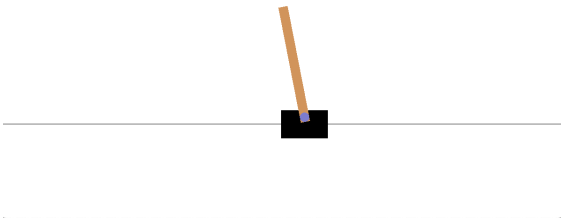
叶林发 1500060602
付博铭 1500060606
沈国鹏 1500060614

January 20, 2019

1 实验环境描述

1.1 CartPole-v0

Cart Pole 在 OpenAI 的 gym 模拟器里面是相对比较简单的一个游戏。游戏里面有一个小车，上有一根杆子。小车需要左右移动来保持杆子竖直。如果杆子倾斜的角度大于 15°，那么游戏结束。小车也不能移动出一个范围（中间到两边各 4.8 个单位长度）。小车的状态变量有车的位置、杆子的角度、车速、角度变化率 4 个维度，以及左移、右移两个动作。左移或者右移小车的 action 之后，env 都会返回一个 +1 的 reward。到达 200 个 reward 之后，游戏也会结束。



2 算法

2.1 Q-Learning 算法摘要

Q-Learning 是一种简单而有效的强化学习算法，它不需要对环境进行建模，即使是对带有随机因素的状态转移概率矩阵或者收益函数也不需要进行特别的改动。对于任何有限马尔可夫决策过程（Finite MDP），给定一个部分随机的策略和无限的探索时间，Q-Learning 都能找到一个可以最大化所有步骤期望收益的策略。

Q-Learning 的核心是 Q-Table。Q-Table 行和列分别表示 state 和 action 的值，$Q(s,a)$ 衡量对状态 s 采取动作 a 的价值，然后我们可以根据 Q 值来选取某一状态下能获得最大收益的动作。在训练过程中，我们使用 Bellman Equation 去更新 Q-Table：$Q(s,a) = r + \gamma \max_a Q(s',a')$。考虑到学习率和收益折扣因素，实际应用中 Q-Table 更新的基本公式为：

$$Q^{new}(s_t,a_t)=(1-\alpha)\underbrace{Q(s_t,a_t)}_{\text{old value}}+\underbrace{\alpha}_{\text{learning rate}}(\underbrace{r_t}_{\text{reward}}+\underbrace{\gamma}_{\text{discount factor}}\cdot\overbrace{\max_a Q(s_{t+1},a)}^{\text{estimate of optimal future value}})$$

一般 Q-Learning 方法的算法如下：

Algorithm 1 Q-Learning 算法

Initialize: 随机初始化 Q-Table
Start
for episode $= 1\cdots M$ **do**
初始化环境，得到初始状态 s_1
for t $= 1\cdots T$ **do**
以 ϵ 的概率随机选择行动 a_t，否则根据 Q-Table 选择当前状态下最优行动 $a_t=\max_a Q(s_t,a)$
执行行动 a_t，得到新一轮的状态 s_{t+1} 和回报 r_{t+1}
更新 Q-Table：$Q^{new}(s_t,a_t)=(1-\alpha)Q(s_t,a_t)+\alpha(r_t+\gamma\cdot\max_a Q(s_{t+1},a))$
end for
end for

2.2 Gradient Policy 算法摘要

策略梯度法与上述两种方法有很大不同，后两种方法优化的重点落在了值函数上，不论是 Q-Learning 还是 DQN，只要能够得到精确的值函数，就可以使用 Bellman 公式求出最优策略，即

$$a^*=\arg\max_a Q(s,a), a^*=\pi^*(s)$$

策略梯度法则使用另一种思路：强化学习的目标是最大化长期期望收益，即

$$\pi^*=\arg\max_\pi E_{\tau\sim\pi(\tau)}(r(\tau))$$

其中 τ 表示用策略进行交互得到的一条轨迹，$r(\tau)$ 表示这条轨迹的总体回报。该目标实际上也是一个函数，假如这个函数性质良好，其实可以考虑用梯度上升方法对其进行优化。具体而言：如果我们可以讲值函数表示为策略参数的某个函数，就可以求出值函数关于策略参数的梯度，并使参数沿着梯度上升的方向更新，从而提升策略。

用 $J(\theta)$ 表示上述目标函数，则有

$$J(\theta)=E_{\tau\sim\pi(\tau)}(r(\tau))=\int_{\tau\sim\pi_\theta(\tau)}\pi_\theta(\tau)r(\tau)d\tau$$

对上式求导，由于策略函数通常是定义良好的函数，所以求导和积分运算可以互换，这样可以得到

$$\begin{aligned}\nabla_\theta J(\theta)&=\int_{\tau\sim\pi_\theta(\tau)}\nabla_\theta\pi_\theta(\tau)r(\tau)d\tau &(1)\\&=\int_{\tau\sim\pi_\theta(\tau)}\pi_\theta(\tau)\nabla_\theta\log\pi_\theta(\tau)r(\tau)d\tau &(2)\\&=E_{\tau\sim\pi(\tau)}(\nabla_\theta\log\pi_\theta(\tau)r(\tau)) &(3)\end{aligned}$$

再配合一些技巧，可以将上式拆解。最后，我们再使用蒙特卡洛法，将公式中的期望用蒙特卡洛近似方法进行替代，可以得到求解梯度的最终式

$$\nabla_\theta J(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\sum_{t=0}^{T}\nabla_\theta \log \pi_\theta(a_{i,t}|s_{i,t})\sum_{t=0}^{T} r(s_{i,t},a_{i,t})]$$

完成了对梯度的求解，接下来便是参数更新。总结起来，Policy Gradient 方法分为两步：

1. 计算 $\nabla_\theta J(\theta)$

2. $\theta = \theta + \alpha\nabla_\theta J(\theta)$

2.3 DQN 算法摘要

Q-Learning 用表格来存储每一个状态 state、每一个行为 action 所拥有的 Q 值，对于状态、动作空间都为低维离散空间的问题，Q-Learning 不失为一种好方法。但对于连续的状态空间，或是过大的离散状态空间，用表格来存储会占用大量内存，而且每次在这么大的表格中搜索也十分困难。一种解决方法就是价值函数近似（Value Function Approximation），即学习 $f(s,a,w)$ 使得 $Q(s,a) \approx f(s,a,w)$。

机器学习中，神经网络可以很好地近似函数。因此，我们可以将状态和动作当作输入，经过神经网络计算后得到动作的 Q 值。这样我们就避免了用表格记录 Q 值，而是直接用神经网络生成 Q 值。这种方法将 Q-Learning 和 Neural Network 的优势结合起来，这便是 DQN（Deep Q Network）方法。

神经网络训练是一个有监督问题，所以我们需要大量的有标签数据。对此，我们可以考虑利用 Q-Learning 的思想为 Q 网络提供有标签数据。Q-Learning 的更新公式为 $Q(S,A) = (1-\alpha)Q(S,A)+\alpha(R+\gamma \max_a Q(S',a))$，我们的优化目标是让 Q 值趋近目标 Q 值 $R+\gamma \max_a Q(S',a)$，所以目标 Q 值便可作为标签。自然的，Q 网络的损失函数可以定义为 $E_s[(R+\gamma \max_{a'} Q(s',a',w)-Q(s,a,w))^2]$。这样，DQN 的算法框架基本成型。

Q-Learning 方法是一种在线学习方法，每一次模型利用交互生成的数据进行学习，学习后的样本就被直接丢弃。但如果 DQN 也采用这样的在线学习方法，就可能遇到两个问题：

1. 交互得到的序列存在一定的相关性：对机器学习模型来说，训练样本独立同分布是一个基本假设。而交互序列中状态、动作存在一定的相关性，这样会导致学习得到的值函数模型存在很大的波动。

2. 交互数据的使用效率：采用梯度下降法进行参数更新时，模型训练往往需要多轮迭代才能收敛，如果每次计算的样本在更新完一次梯度后就被丢弃，那么我们就需要花费更多时间与环境交互并收集样本。

为了解决这两个问题，DQN 提出者 Minh V 等人 [2] 采用了 Replay Buffer 这个数据结构，其交互流程如下：

可以看出，Replay Buffer 保存了交互的样本信息，一般来说每个样本都会保存当前状态 s、行动 a 和长期累积回报。一般可以将 Replay Buffer 的大小设置得比较大，这一较长时间的样本都可以被保存起来。训练值函数时，我们就可以从中取出一定数量的样本，根据样本记录的信息进行训练。

总体而言，Replay Buffer 包括收集样本和采样两个过程。收集样本时按照时间先后顺序存入结构中，如果 Replay Buffer 已经存满，新的样本就会按时间顺序覆盖旧样本。另外，Replay Buffer 每次会从缓存中随机均匀采一批样本进行学习。这样每次训练的样本通常来自多次交互序列，避免了交互序列的相关性问题。同时一份样本也可以被多次训练，提高了样本的利用率。

Mnih 等人论文中提出的伪代码如下：

3 实验结果分析

3.1 Q-Learning

由于普通的 Q-Learning 算法是一种表格形式的 Agent，所以我们有必要对状态空间进行离散化。为此，我们用”bins=numpy.linspace(statemin,statemax,num)” 和”numpy.digitize(x,bins)” 函数对状态中的各个特征值进行离散化处理，分成 $0,1,2,...,num-1$ 共 num 种离散的特征，故而对应的总状态个数为 num^4 种状态。注意到离散化状态的形式，我们用 num 进制离散状态进行整合，得到一个整数，而这个

Algorithm 2 DQN 算法

Initialize: 初始化容量为 N 的 Replay Buffer: D；价值函数模型 Q 和参数 θ

Start

for episode $= 1 \cdots M$ **do**

初始化环境，得到初始状态 s_1

for t $= 1 \cdots T$ **do**

以 ϵ 的概率随机选择一个行动 a_t，否则根据模型选择当前最优行动 $a_t = \max_a Q^*(s_t, a; \theta)$

执行行动 a_t，得到新一轮的状态 s_{t+1} 和回报 r_{t+1}

将 $\{s_t, a_t, r_{t+1}, s_{t+1}\}$ 存储到 D 中

从 D 中采一批样本

计算

$$y_j = \begin{cases} r_{j+1} & \text{for terminal } s_{j+1} \\ r_{j+1} + \gamma \max\limits_{a'} Q(s_{j+1}, a'; \theta) & \text{for non-terminal } s_{j+1} \end{cases}$$

根据目标函数 $(y_j - Q(s_j, a_j; \theta))^2$ 进行梯度下降求解，完成参数更新

end for

end for

整数由于进制的性质，与状态是一一对应的，并且是从 0 开始连续增加的正整数，故而建立 Q-table 其索引与整合后的状态值一一对应。代码种重要的 Q-Learning 更新过程如下：

$$Q\_table[state, action] += alpha*(reward+gamma*np.max(Q\_table[next\_state])-Q\_table[state, action])$$

此外，上述的 action 选择中用的是 $\epsilon - greedy$：

$$action = \begin{cases} = argmax_a\ Q(s,a) & p = 1 - \epsilon + \epsilon/|A| \\ \neq argmax_a\ Q(s,a) & p = \epsilon/|A| \end{cases}$$

运行代码，对于 num=10，num=20，我们得出以下关于 episode 和 reward 的折现图。可以看出，刚开始随着时间的运行，Q-Learning 能很好地想着最优策略的方向学习，使得相应的 reward 不断增加，但是到达一定训练后，策略提升的速度开始放缓，此外不断地震荡；同时，对比 num 不同的两种情况，我们可以看出状态空间的精确度提高，的确对策略的提升有正面的影响。

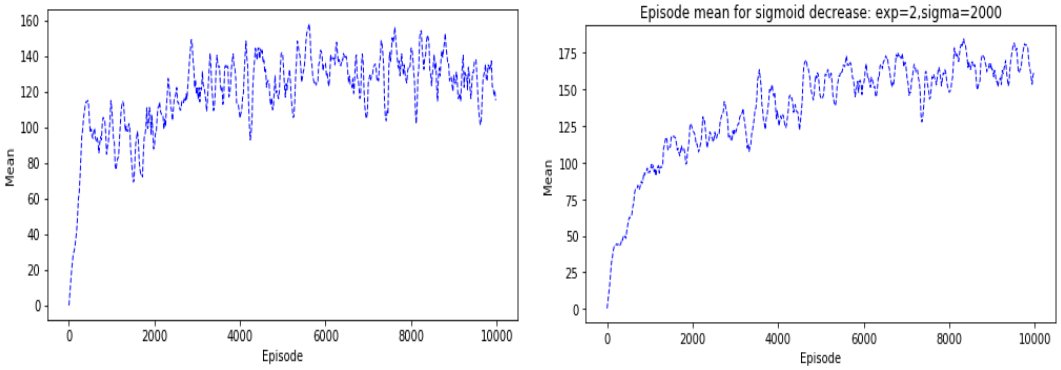


Figure 1: Q-Learning for num=10,num=20

依照 Singh[3] 提出的渐近行为探索策略，我们对上述的 $\epsilon - greedy$ 策略添加 sigmoid 类渐近机制，

如下所示：

$$action = \begin{cases} = argmax_a\ Q(s,a) & p = 1 - \epsilon_t + \epsilon_t/|A|, \\ \neq argmax_a\ Q(s,a) & p = \epsilon_t/|A| \end{cases}$$

其中 $\epsilon_t = \epsilon * Sigmoid(t = episode, \sigma, c) = \frac{1}{1+\exp^{c*(t-\sigma)}}$。我们取 $\sigma = 2000$,$c = 2$, 对 num=10 和 num=20 有以下结果：显然，添加 sigmoid 等函数使得 ϵ-greedy 的随机性随着训练减小，有利于最终学习算法的

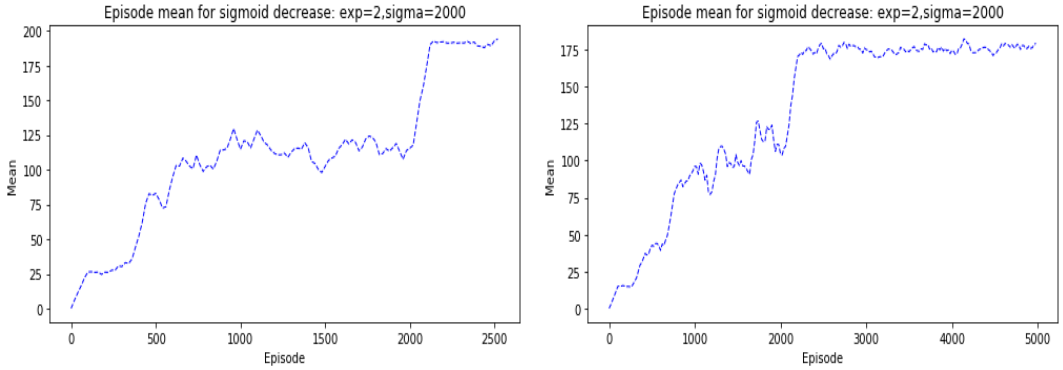


Figure 2: Q-Learning for num=10,num=20 with sigmoid decrease

收敛和稳定。

由于 CartPole-v0 环境中对失败状态的 reward 为-1，对学习的惩罚激励影响较小，所以我们对最后失败状态的 reward 调整为 $reward = -10$，最终对 num=10 下，sigmoid 衰减的学习结果如下：可以看

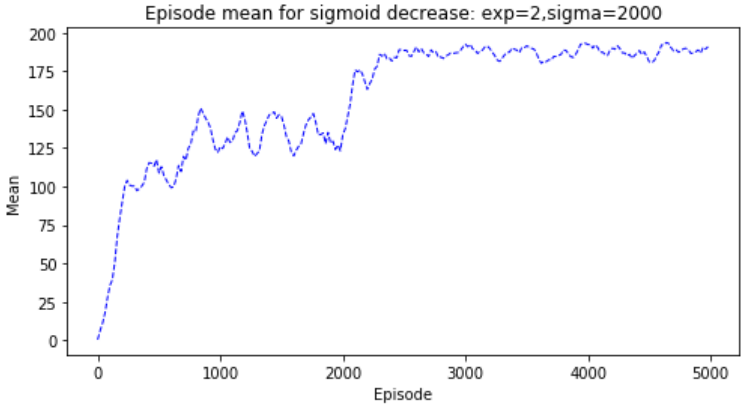


Figure 3: Q-Learning for num=10 with sigmoid decrease

出，适当增大失败惩罚有利于学习的高效性，使得学习到更好的结果。

3.2 Policy-Gradient

我们参考了Morvanzhou的代码框架，调参、改进并修正了源代码的一些错误，最终完成了自己的代码并且得到了更好的效果，以下开始分析：

首先，我们定义了一个具有三个全连接层和一个 softmax 输出层的神经网络取逼近策略。Hornik[1] 证明了对于单隐层的三层神经网络，只要中间隐层个数充分大，激活函数为单调连续增加的，那么其在 $\mathcal{R}^{input \times output}$ 上的连续可微函数空间是稠密的，即可以充分近似其上的连续可微连续函数。故而，我们前三个全连接层以 Relu 为激活函数，对于多隐层的神经网络避免的梯度消失情况，减少了变量依赖，提

高了运算效率；其次以 softmax 层为输出，得到了输入为状态，输出为动作值概率的函数。

其次，由 Policy Gradient 算法，我们的更新需要涉及到策略（神经网络）的梯度，同时后面还有一个价值函数对步长和方向进行修正。但是在代码中，我们给出的先是交叉熵损失函数

$$ng\_log\_prob = tf.nn.softmax\_cross\_entropy\_with\_logits\_v2(logits = fc3, labels = actions)$$

换言之，我们认为实际运行中的动作是理想的，那么实际动作就成为了一个概率（但是是确定的），类似极大似然估计，我们的目标就成为更新参数，使得概率最大（等价于交叉熵最小）；此外，再通过添加一个价值函数对更新的步长和方向进行修正，从似然函数的角度，步长为正，越大，那么更新的方向朝着使得交叉熵最小，未来期望回报增大的方向，对于步长为负，越小的情况，有相反的效果。

此外，由于单纯用蒙特卡洛模拟代价是较大的，为此，我们先通过当前的轨迹回报序列，计算出该场景下的每个时刻的值函数（注意是该时刻的，即知识单纯地对未来的时刻汇报做指数相加），此外，为了基于以上的值函数训练，我们将它们通过减去均值，除以方差的“正则化”处理，其关于实际的值函数是无偏的，同时又降低了方差，使得其能够代替实际的值函数，运用到上述损失函数中。实验中发现这种方法的确会带来好的效果，但是不敢保证在更复杂空间的可行性。

实验结果如下所示：

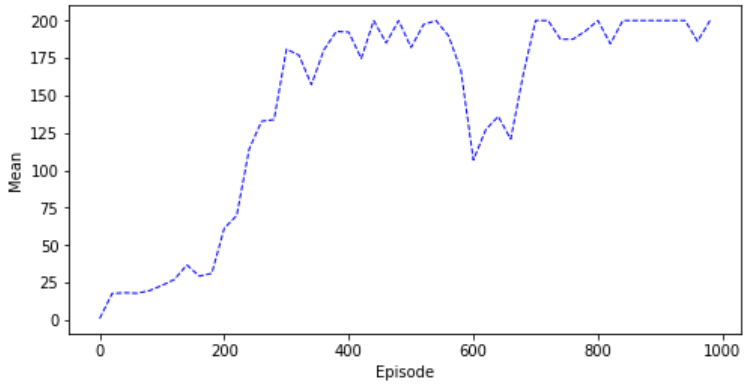


Figure 4: Q-Learning for num=10 with sigmoid decrease

通过此和之前值函数的方法进行比较，可以看出，基于策略梯度的算法在收敛上明显快于值函数方法，此外其可以在连续的状态空间上进行处理。但是通过运行结果发现，其经常在稳定一段时间后出现一小段的波动，可能是由于步长的选择，表示策略的函数过于复杂导致的。从这个角度讲，单纯的策略梯度方法鲁棒性有所欠缺。在基于策略梯度使得梯度单调提升的方向上，目前有 TRPO,GAE,PPO 等优秀算法，这是值的仔细探究的。

3.3 Deep-Q-Network

我们参考Flood Sung的代码框架，调参、改进并修正了原代码的一些错误，取得了不错的结果。DQN 与 Q-Learning 都基于 Q-Table 框架，算法原理多有类似，下面就一些 DQN 算法的独特之处进行分析。

在 cartpole 问题中，状态空间是连续的，而 DQN 能处理连续的状态，所以不必像 Q-Learning 一样对状态空间进行离散化。我们构造了一个 DNN 网络来作为价值函数 $Q(s, a)$ 的近似：将 4 维的状态作为输入，中间 2 层为 20 节点的隐藏层，输出层维度为 2，即与动作空间维度相同。

每个 episode 的每一步，actor 以一定概率随机生成动作，其他情况下按照网络的近似给出最优动作。收到环境给出收益后，将状态、动作、收益、下一步状态记录下来，提供给网络训练。经过调参和测试，

我们得到图 5 所示结果：

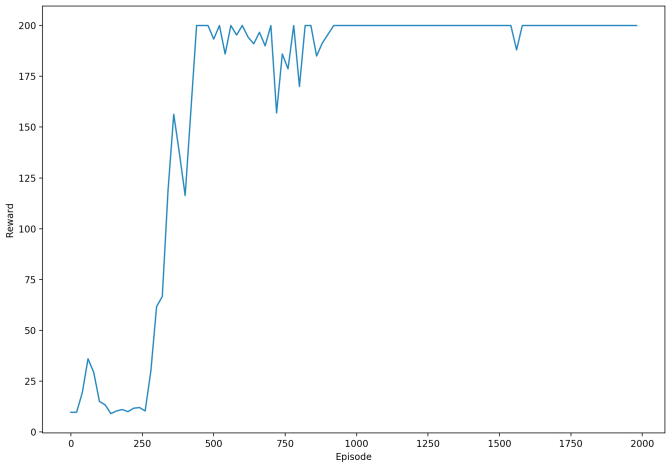


Figure 5: DQN

References

[1] Kurt Hornik. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. *Neural networks*, 4(2):251–257, 1991.

[2] Volodymyr Mnih, Koray Kavukcuoglu, David Silver, Alex Graves, Ioannis Antonoglou, Daan Wierstra, and Martin Riedmiller. Playing atari with deep reinforcement learning. *arXiv preprint arXiv:1312.5602*, 2013.

[3] Satinder P Singh and Richard S Sutton. Reinforcement learning with replacing eligibility traces. *Machine learning*, 22(1-3):123–158, 1996.