




普通高等教育“十五”国家级规划教材

惯性导航

秦永元 编著

 科学出版社
www.sciencep.com

高等院校计算机科学与技术
“十五”规划教材

人工神经网络原理 及仿真实例

人工智能

9.2 姿态更新计算的四元数算法

设由运载体的机体轴确定的坐标系为 b , 惯导系统所采用的导航坐标系为 n , 则由 b 系到 n 系的坐标变换矩阵 C_b^n 称为运载体的姿态矩阵。姿态更新是指根据惯性器件的输出实时计算出 C_b^n 矩阵。由于 n 系和 b 系均为直角坐标系, 各轴之间始终保持直角, 所以可将坐标系理解成刚体, 当只研究两个坐标系间的角位置关系

时,可对一个坐标系作平移,使其原点与另一个坐标系的原点重合。因此,两坐标系间的空间角位置关系可理解成刚体的定点转动。从这一基本思想出发,可获得姿态更新的四元数算法及旋转矢量算法。本节详细介绍四元数更新算法。

9.2.1 四元数

1. 四元数定义

顾名思义,四元数是由四个元构成的数:

$$Q(q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (9.2.1)$$

其中, q_0, q_1, q_2, q_3 是实数, i, j, k 既是互相正交的单位向量, 又是虚单位 $\sqrt{-1}$, 具体规定体现在如下四元数乘法关系中:

$$\left. \begin{aligned} i \otimes i &= -1, & j \otimes j &= -1, & k \otimes k &= -1 \\ i \otimes j &= k, & j \otimes k &= i, & k \otimes i &= j \\ j \otimes i &= -k, & k \otimes j &= -i, & i \otimes k &= -j \end{aligned} \right\} \quad (9.2.2)$$

式中, \otimes 表示四元数乘法。

上述关系可叙述为: 相同单位向量作四元数乘时呈虚单位特性; 相异单位向量作四元数乘时呈单位向量叉乘特性。所以四元数既可看作四维空间中的一个向量, 又可看作一个超复数。

2. 四元数的表达方式

(1) 矢量式

$$Q = q_0 + q \quad (9.2.3)$$

其中, q_0 称四元数 Q 的标量部分, q 称四元数 Q 的矢量部分。对照式(9.2.1), 可看出 q 是三维空间中的一个向量。

(2) 复数式

$$Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \quad (9.2.4)$$

可视为一个超复数, Q 的共轭复数记为

$$Q^* = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k \quad (9.2.5)$$

Q^* 称为 Q 的共轭四元数。

(3) 三角式

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.2.6)$$

式中, θ 为实数, u 为单位向量。

(4) 指数式

$$Q = e^{u \frac{\theta}{2}} \quad (9.2.7)$$

θ 和 u 同上。

(5) 矩阵式

$$Q = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (9.2.8)$$

3. 四元数的大小——范数

四元数的大小用四元数的范数来表示：

$$\|Q\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (9.2.9)$$

若 $\|Q\| = 1$, 则 Q 称为规范化四元数。

4. 四元数的运算——加减乘除

1) 加法和减法

设

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \\ P &= p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k \end{aligned}$$

则

$$Q \pm P = (q_0 \pm p_0) + (q_1 \pm p_1)i + (q_2 \pm p_2)j + (q_3 \pm p_3)k \quad (9.2.10)$$

2) 乘法

$$aQ = aq_0 + aq_1 i + aq_2 j + aq_3 k \quad (9.2.11)$$

其中, a 为标量。

$$\begin{aligned} P \otimes Q &= (p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k) \otimes (q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k) \\ &= (p_0 q_0 - p_1 q_1 - p_2 q_2 - p_3 q_3) + (p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_2 q_3 - p_3 q_2)i \\ &\quad + (p_0 q_2 + p_2 q_0 + p_3 q_1 - p_1 q_3)j + (p_0 q_3 + p_3 q_0 + p_1 q_2 - p_2 q_1)k \\ &= r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

上式写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = M(P)Q \quad (9.2.13)$$

或

$$\begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = M'(Q)P \quad (9.2.14)$$

其中, $M(P)$ 的构成形式为: 第一列是四元数 P 本身, 第一行是 P 的共轭四元数 P^* 的转置, 划去第一行和第一列余下的部分。

$$V_P = \begin{bmatrix} p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \quad (9.2.15)$$

称为 $M(P)$ 的核, 是由四元数 P 的元构成的反对称矩阵。同理 $M'(Q)$ 的核为

$$V'_Q = \begin{bmatrix} q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (9.2.16)$$

可见 $M'(Q)$ 与 $M(Q)$ 构成相似, 但核不同。

由式(9.2.13)和式(9.2.14), 得四元数乘法的矩阵表示形式:

$$P \otimes Q = M(P)Q \quad (9.2.17a)$$

$$P \otimes Q = M'(Q)P \quad (9.2.17b)$$

由于 $M(P)$ 和 $M'(P)$ 的核不同, 所以

$$P \otimes Q = M(P)Q \neq M'(P)Q = Q \otimes P$$

上式说明四元数乘法不满足交换律。

四元数乘法满足分配律和结合律:

$$P \otimes (Q + R) = P \otimes Q + P \otimes R \quad (9.2.18)$$

$$P \otimes Q \otimes R = (P \otimes Q) \otimes R = P \otimes (Q \otimes R) \quad (9.2.19)$$

关于结合律的证明如下。

证明: 设

$$P = \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} M(P)M'(R) &= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ r_1 & r_0 & r_3 & -r_2 \\ r_2 & -r_3 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & -r_1 & r_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_0r_0 - p_1r_1 - p_2r_2 - p_3r_3 & -p_0r_1 - p_1r_0 + p_2r_3 - p_3r_2 \\ p_0r_1 + p_1r_0 + p_2r_3 - p_3r_2 & p_0r_0 - p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 \\ p_0r_2 - p_1r_3 + p_2r_0 + p_3r_1 & -p_0r_3 - p_1r_2 - p_2r_1 + p_3r_0 \\ p_0r_3 + p_1r_2 - p_2r_1 + p_3r_0 & p_0r_2 - p_1r_3 - p_2r_0 - p_3r_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M'(R)M(P) = \begin{bmatrix} -p_0r_2 - p_1r_3 - p_2r_0 + p_3r_1 & -p_0r_3 + p_1r_2 - p_2r_1 - p_3r_0 \\ p_0r_3 - p_1r_2 - p_2r_1 - p_3r_0 & -p_0r_2 - p_1r_3 + p_2r_0 - p_3r_1 \\ p_0r_0 + p_1r_1 - p_2r_2 + p_3r_3 & p_0r_1 - p_1r_0 - p_2r_3 - p_3r_2 \\ -p_0r_1 + p_1r_0 - p_2r_3 - p_3r_2 & p_0r_0 + p_1r_1 + p_2r_2 - p_3r_3 \end{bmatrix} = M$$

$$M'(R)M(P) = \begin{bmatrix} r_0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ r_1 & r_0 & r_3 & -r_2 \\ r_2 & -r_3 & r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 & -r_1 & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} = M$$

所以

$$M(P)M'(R) = M'(R)M(P) \quad (9.2.20)$$

由于

$$P \otimes (Q \otimes R) = P \otimes [M'(R)Q] = M(P)M'(R)Q$$

$$(P \otimes Q) \otimes R = [M(P)Q] \otimes R = M'(R)M(P)Q$$

根据式(9.2.20),得:

$$P \otimes Q \otimes R = (P \otimes Q) \otimes R = P \otimes (Q \otimes R)$$

此外还有:

$$(P \otimes Q)^* = Q^* \otimes P^* \quad (9.2.21)$$

读者可自行证明。

3) 除法——求逆。

如果 $P \otimes R = 1$, 则称 R 为 P 的逆, 记为 $R = P^{-1}$, 或称 P 为 R 的逆, 记为 $P = R^{-1}$ 。

根据范数定义和式(9.2.12)

$$P \otimes P^* = (p_0 + p_1i + p_2j + p_3k) \otimes (p_0 - p_1i - p_2j - p_3k)$$

$$= p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$$

$$= \|P\|$$

所以, $P \otimes \frac{P^*}{\|P\|} = 1$, 根据上述关于逆的定义, $\frac{P^*}{\|P\|}$ 即为 P 的逆, 即

$$P^{-1} = \frac{P^*}{\|P\|} \quad (9.2.22)$$

9.2.2 四元数与姿态阵间的关系

设有参考坐标系 R , 坐标轴为 x_0, y_0, z_0 , 坐标轴方向的单位向量为 i_0, j_0, k_0 。刚体相对 R 系作定点转动, 定点为 O 。取坐标系 b 与刚体固联, b 系的坐标轴为 x, y, z , 坐标轴方向的单位向量为 i, j, k 。假设初始时刻 b 系与 R 系重合。为了便于分析刚体的空间角位置, 在刚体上取一点 A , 转动点 O 至该点引位置向量 OA , 如图 9.2.1 所示。则该位置向量的空间位置实际上描述了刚体的空间角位置。

设刚体以 $\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$ 相对 R 系旋转, 初始时刻位置向量处于 $OA = r$, 经过时间 t 后位置向量处于 $OA' = r'$ 。根据欧拉定理, 仅考虑刚体在 0 时刻和 t 时刻的角位置时, 刚体从 A 位置转到 A' 位置的转动可等效成绕瞬轴 u (单位向量) 转过 θ 角一次完成。这样, 位置向量做圆锥运动, A 和 A' 位于同一圆上, r 和 r' 位于同一圆锥面上。

下面分析 r' 与 r 的关系。在圆上取一点 B , 使 $\angle AO'B = 90^\circ$, 由图得

$$OO' = (r \cdot u)u$$

$$O'A = r - OO' = r - (r \cdot u)u$$

$$O'B = u \times O'A$$

$$= u \times r - (r \cdot u)u \times u = u \times r$$

$$O'A' = O'A \cos \theta + O'B \sin \theta$$

$$= r \cos \theta - (r \cdot u)u \cos \theta + u \times r \sin \theta$$

所以

$$r' = OO' + O'A' = r \cos \theta + (1 - \cos \theta) \times (r \cdot u)u + u \times r \sin \theta$$

由三重矢积计算公式:

$$\begin{aligned} u \times (u \times r) &= u(u \cdot r) - (u \cdot u)r \\ &= (r \cdot u)u - r \end{aligned}$$

即

$$(r \cdot u)u = r + u \times (u \times r)$$

所以

$$\begin{aligned} r' &= r \cos \theta + (1 - \cos \theta)[r + u \times (u \times r)] + u \times r \sin \theta \\ &= r + u \times r \sin \theta + (1 - \cos \theta)u \times (u \times r) \end{aligned}$$

将上式向 R 系内投影:

$$\begin{aligned} r'^R &= r^R + (u \times r)^R \sin \theta \\ &\quad + (1 - \cos \theta)[u \times (u \times r)]^R \end{aligned}$$

记

$$r'^R = \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix}, \quad r^R = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}, \quad u^R = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

又根据叉乘关系表达式:

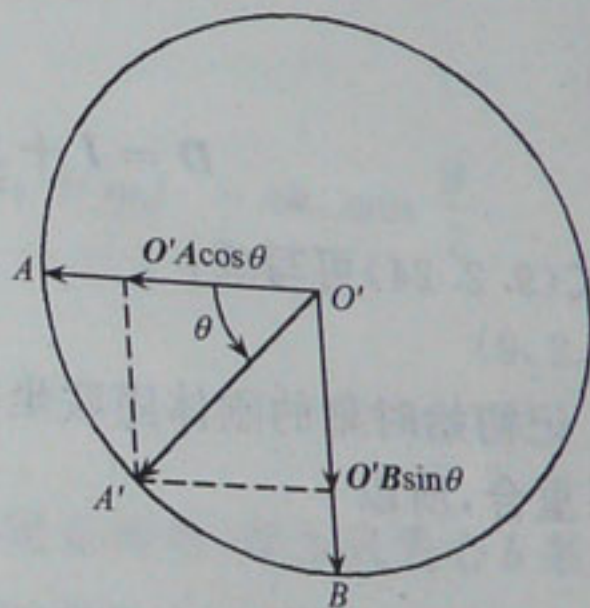
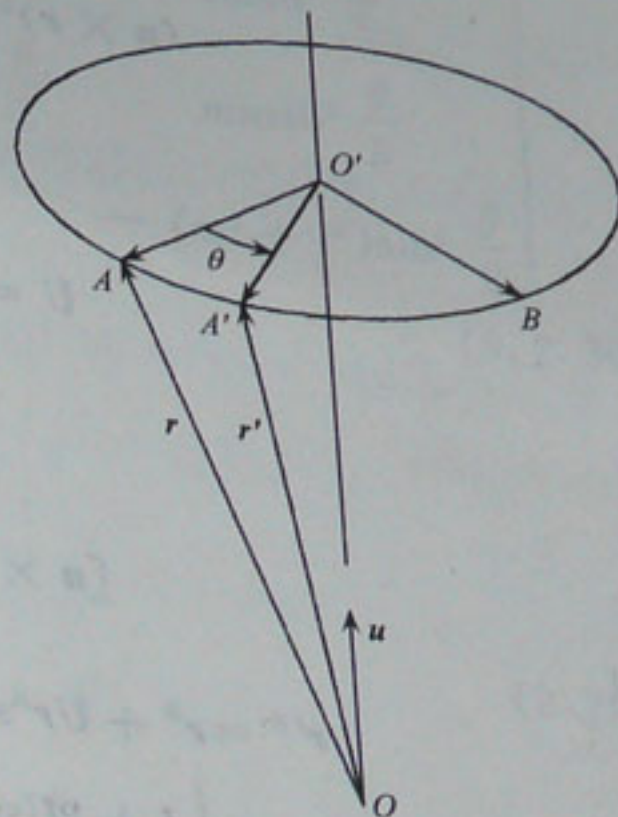


图 9.2.1 刚体的等效旋转

记

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{r})^R = \begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.23)$$

所以

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{r})^R &= \mathbf{U} \mathbf{r}^R \\ [\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{r})]^R &= \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \mathbf{r}^R \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'^R &= \mathbf{r}^R + \mathbf{U} \mathbf{r}^R \sin \theta + (1 - \cos \theta) \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \mathbf{r}^R \\ &= \left(\mathbf{I} + 2\mathbf{U} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) \mathbf{r}^R \end{aligned} \quad (9.2.24)$$

则式(9.2.24)可写成:

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} + 2\mathbf{U} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \quad (9.2.25)$$

$$\mathbf{r}'^R = \mathbf{D} \mathbf{r}^R \quad (9.2.26)$$

记初始时刻的刚体固联坐标系为 b_0 , 由于初始时刻刚体固联坐标系与参考坐标系重合, 所以

$$\mathbf{r}^R = \mathbf{r}^{b_0} \quad (9.2.27)$$

而在转动过程中, 位置向量和 b 系都同刚体固联, 所以位置向量和 b 系的相对角位置始终不变, 即有

$$\mathbf{r}^{b_0} = \mathbf{r}'^b \quad (9.2.28)$$

将式(9.2.28)代入式(9.2.27), 得

$$\mathbf{r}^R = \mathbf{r}'^b \quad (9.2.29)$$

将式(9.2.29)代入式(9.2.26), 得

$$\mathbf{r}'^R = \mathbf{D} \mathbf{r}'^b$$

该式说明 \mathbf{D} 即为 b 系至 R 系的坐标变换矩阵, 根据式(9.2.25)和式(9.2.23)

$$\mathbf{C}_b^R = \mathbf{D} = \mathbf{I} + 2\mathbf{U} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \quad (9.2.30a)$$

即

$$\mathbf{C}_b^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 0 & -n \sin \frac{\theta}{2} & m \sin \frac{\theta}{2} \\ n \sin \frac{\theta}{2} & 0 & -l \sin \frac{\theta}{2} \\ -m \sin \frac{\theta}{2} & l \sin \frac{\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ 2 \begin{bmatrix} -(m^2 + n^2)\sin^2 \frac{\theta}{2} & l m \sin^2 \frac{\theta}{2} & l n \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ l m \sin^2 \frac{\theta}{2} & -(l^2 + n^2)\sin^2 \frac{\theta}{2} & m n \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ l n \sin^2 \frac{\theta}{2} & m n \sin^2 \frac{\theta}{2} & -(m^2 + l^2)\sin^2 \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (9.2.30b)$$

令

$$\begin{cases} q_0 = \cos \frac{\theta}{2} \\ q_1 = l \sin \frac{\theta}{2} \\ q_2 = m \sin \frac{\theta}{2} \\ q_3 = n \sin \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (9.2.31)$$

并以 q_0, q_1, q_2, q_3 构造四元数:

$$\begin{aligned} Q &= q_0 + q_1 i_0 + q_2 j_0 + q_3 k_0 = \cos \frac{\theta}{2} + (l i_0 + m j_0 + n k_0) \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \cos \frac{\theta}{2} + u^R \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (9.2.32)$$

则可得如下结论:

(1) 四元数 $Q = \cos \frac{\theta}{2} + u^R \sin \frac{\theta}{2}$ 描述了刚体的定点转动, 即当只关心 b 系相对 R 系的角位置时, 可认为 b 系是由 R 系经过无中间过程的一次性等效旋转形成的, Q 包含了这种等效旋转的全部信息: u^R 为旋转瞬轴和旋转方向, θ 为转过的角度。

(2) 四元数可确定出 b 系至 R 系的坐标变换矩阵。将式(9.2.31)代入式(9.2.30), 得

$$C_b^R = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (9.2.33)$$

由于 $\|Q\| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + (l^2 + m^2 + n^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$, 所以可进一步推得如下结论:

(1) 描述刚体旋转的四元数是规范化四元数。

(2) 式(9.2.33)可写成:

$$C_b^R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (9.2.34)$$

(3) 如果将向量 r^R 和 r^b 看作零标量的四元数, 则 r^R 和 r^b 间的变换关系可采用四元数乘法表示:

$$r^R = Q \otimes r^b \otimes Q^* \quad (9.2.35)$$

该式称为坐标变换的四元数乘表示法, 其中, Q 为 R 系至 b 系的旋转四元数。证明如下:

$$\begin{aligned} Q \otimes r^b \otimes Q^* &= M(Q)M'(Q^*) \begin{bmatrix} 0 \\ r^b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r_x^b \\ r_y^b \\ r_z^b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & q_1^2 + q_0^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ \times & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_2^2 - q_3^2 + q_0^2 - q_1^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ \times & 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_3^2 - q_2^2 - q_1^2 + q_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r_x^b \\ r_y^b \\ r_z^b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对比式(9.2.34), 知上式矩阵中右下角的 3×3 方块即为 C_b^R , 所以式(9.2.35)可写成:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & & & \\ \times & & C_b^R & \\ \times & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ r^b \end{bmatrix}$$

即

$$r^R = C_b^R r^b \quad (9.2.36)$$

该式称为坐标变换的矩阵表示法。所以式(9.2.35)与式(9.2.36)所示坐标变换的四元数乘表示法和矩阵表示法是等价的。

如果参考坐标系 R 是导航坐标系 n , 刚体固联坐标系 b 为机体坐标系, 则坐标变换阵 C_b^R 就是姿态矩阵 C_b^n , 而由姿态矩阵可计算出航向角和姿态角。

设运载体的航向角为 Ψ (习惯上以北偏东为正), 俯仰角为 θ , 横滚角为 γ , 取地理坐标系 g 为导航坐标系, 并规定 x_g, y_g, z_g 的指向依次为东、北、天, 则机体坐标系 b 与导航坐标系 n (即地理坐标系 g) 的关系如图 1.2.3 所示。

由该图可得三次基本旋转对应的坐标变换阵为

$$C_n^1 = C_g^1 = \begin{bmatrix} \cos \Psi & -\sin \Psi & 0 \\ \sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.2.37)$$

$R \Leftrightarrow n$ 地理坐标系
参考坐标系

$$C_1^b = C_2^b C_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\theta\sin\gamma & -\cos\theta\sin\gamma \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\gamma & -\sin\theta\cos\gamma & \cos\theta\cos\gamma \end{bmatrix} \quad (9.2.38)$$

$$C_n^b = C_1^b \cdot C_n^1$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\Psi + \sin\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\cos\gamma\sin\Psi + \sin\gamma\cos\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\cos\theta \\ \sin\Psi\cos\theta & \cos\Psi\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\gamma\cos\Psi - \cos\gamma\sin\Psi\sin\theta & -\sin\gamma\sin\Psi - \cos\gamma\cos\Psi\sin\theta & \cos\gamma\cos\theta \end{bmatrix} \quad (9.2.39)$$

记 $C_b^n = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$, 由于 n 系至 b 系的旋转过程中坐标系始终保持直角坐标系, 所以 C_b^n 为正交矩阵

$$C_n^b = (C_b^n)^T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (9.2.40)$$

比较式(9.2.39)和式(9.2.40), 得

$$\begin{cases} \theta = \arcsin(T_{32}) \\ \gamma_{\pm} = \arctan\left(-\frac{T_{31}}{T_{33}}\right) \\ \Psi_{\pm} = \arctan\left(\frac{T_{12}}{T_{22}}\right) \end{cases} \quad (9.2.41)$$

航向角和横滚角的真值按表 9.2.1 和表 9.2.2 确定。

表 9.2.1 航向角 Ψ 真值表

T_{22}	T_{12}	Ψ
$\rightarrow 0$	+	90°
$\rightarrow 0$	-	-90°
+	+	Ψ_{\pm}
+	-	Ψ_{\pm}
-	+	$\Psi_{\pm} + 180^\circ$
-	-	$\Psi_{\pm} - 180^\circ$

表 9.2.2 横滚角 γ 真值表

γ_{\pm}	T_{33}	γ
+	+	γ_{\pm}
-		γ_{\pm}
+	-	$\gamma_{\pm} - 180^\circ$
-	-	$\gamma_{\pm} + 180^\circ$

上述分析说明: 如果表征 n 系至 b 系的旋转四元数 Q 已确定, 则按式(9.2.33)或式(9.2.34)可计算出姿态阵 C_b^n , 再按式(9.2.41)和表 9.2.1 及表 9.2.2 可确定出运载体的航向角、俯仰角和横滚角, 因此, 四元数 Q 包含了所有的姿态信息, 捷联惯导中的姿态更新实质上是如何计算四元数 Q 。

为使式(9.2.30a)在9.6节的速度算法推导中便于应用,此处给出该式用等效旋转矢量叉乘的反对称矩阵表示形式。

将 t_k 和 t_{k+1} 时刻的机体坐标系记为 $b(k)$ 和 $b(k+1)$, 当取 $b(k)$ 为参考坐标系时, 根据式(9.2.30a)

$$C_{b(k+1)}^{b(k)} = I + \sin\Phi U + (1 - \cos\Phi)U \cdot U$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -n & m \\ n & 0 & -l \\ -m & l & 0 \end{bmatrix}$$

即为由等效旋转单位矢量

$$\frac{\Phi}{\Phi} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

构造的叉乘反对称矩阵, 式中, $\Phi = |\Phi|$ 。记

$$U = \left(\frac{\Phi}{\Phi} \times \right)$$

则

$$C_{b(k+1)}^{b(k)} = I + \frac{\sin\Phi}{\Phi}(\Phi \times) + \frac{1 - \cos\Phi}{\Phi^2}(\Phi \times)(\Phi \times) \quad (9.2.42)$$

9.2.3 四元数微分方程

根据式(9.2.32), 表征 n 系至 b 系的旋转四元数为

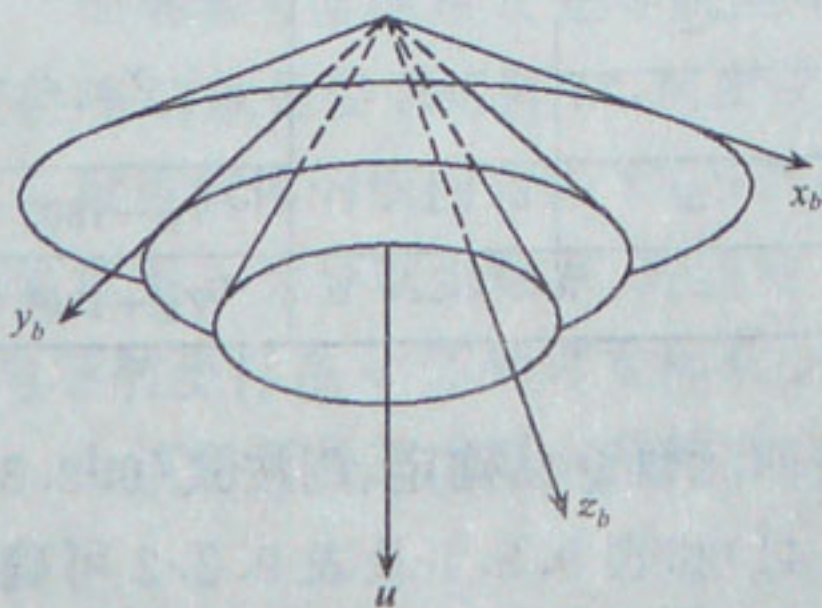
$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u}^R \sin \frac{\theta}{2}$$

上式两边求导

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \mathbf{u}^R \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \frac{d\mathbf{u}^R}{dt}$$

其中

$$\frac{d\mathbf{u}^R}{dt} = \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_R = C_b^R \left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_b + \boldsymbol{\omega}_{Rb}^R \times \mathbf{u}^R$$



由于刚体绕 \mathbf{u} 旋转, 与刚体固联的 b 坐标系各轴在旋转过程中分别位于三个不同的圆锥面上, 圆锥顶点即为坐标原点, \mathbf{u} 位于圆锥的对称轴上, 即 \mathbf{u} 在 b 坐标系的三个轴上的投影不变, 如图 9.2.2 所示。所以 \mathbf{u} 在 b 坐标系内观察时始终未变, 即有

图 9.2.2 b 坐标系绕 \mathbf{u} 旋转时形成的三个圆锥面

$$\left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_b = \mathbf{0}$$

又由于

$$\omega_{Rb}^R = \dot{\theta} u^R$$

所以

$$\frac{du^R}{dt} = \dot{\theta} u^R \times u^R = 0$$

因此

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} + u^R \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad (9.2.43)$$

又由于

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}}{2} u^R \otimes Q &= \frac{\dot{\theta}}{2} u^R \otimes \left(\cos \frac{\theta}{2} + u^R \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{\dot{\theta}}{2} \cos \frac{\theta}{2} u^R + u^R \otimes u^R \frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

而 $u^R \otimes u^R$ 是相同单位向量间的四元数相乘, 根据四元数乘法规则, $u^R \otimes u^R = -1$, 所以

$$\frac{\dot{\theta}}{2} u^R \otimes Q = \frac{\dot{\theta}}{2} u^R \cos \frac{\theta}{2} - \frac{\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (9.2.44)$$

比较式(9.2.43)和式(9.2.44), 得

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\dot{\theta}}{2} u^R \otimes Q \quad (9.2.45)$$

而

$$\omega_{Rb}^R = \dot{\theta} u^R$$

所以式(9.2.45)可写成

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \omega_{Rb}^R \otimes Q \quad (9.2.46)$$

在捷联惯导系统中, 角速度信息是捷联陀螺提供的, 而捷联陀螺是在机体坐标系内测量的, 所以式(9.2.46)中的 ω_{Rb}^R 还需换算成 ω_{Rb}^b 。根据式(9.2.35)

$$\omega_{Rb}^R = Q \otimes \omega_{Rb}^b \otimes Q^*$$

上述关系代入式(9.2.46), 并注意到 Q 是表征刚体旋转的规范化四元数, 应用四元数乘法结合律, 得

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} Q \otimes \omega_{Rb}^b \otimes Q^* \otimes Q = \frac{1}{2} Q \otimes \omega_{Rb}^b \quad (9.2.47)$$

记

$$\omega_{Rb}^b = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

则式(9.2.47)可以写成矩阵形式

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} M'(\omega_{Rb}^b) Q \quad (9.2.48)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (9.2.49)$$

其中, ω_{nb}^b 的获取按下式进行

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \quad (9.2.50)$$

式中, ω_{ib}^b 是捷联陀螺的输出(对机械转子陀螺必须经过动、静态误差的补偿); C_n^b 由姿态更新的最新值确定; ω_{en}^n 和 ω_{ie}^n 分别是位置速率和地球自转速率, 对于导航坐标系取地理坐标系的情况

$$\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{V_N}{R_M} \\ \omega_{ie} \cos L + \frac{V_E}{R_N} \\ \omega_{ie} \sin L + \frac{V_E}{R_N} \tan L \end{bmatrix}$$

式中, V_N 、 V_E 、 L 为导航计算所得的最新值。

9.2.4 四元数微分方程的毕卡求解法

捷联陀螺的输出一般情况下是采样时间间隔内的角增量, 为了避免噪声的微分放大, 应直接用角增量来确定四元数, 而不应该将角增量换算成角速度。毕卡算法就是由角增量计算四元数的常用算法。

1. 定时采样增量法

此算法中, 角增量对应的采样时间间隔是相同的。式(9.2.48)是关于 Q 的齐次线性方程, 解为

$$Q(t_{k+1}) = e^{\frac{1}{2} \int_{t_k}^{t_{k+1}} M'(\omega_{nb}^b) dt} \cdot Q(t_k) \quad (9.2.51)$$

令

$$\begin{aligned} \Delta \Theta &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} M'(\omega_{nb}^b) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} dt \\ &\approx \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中, $\Delta\theta_x, \Delta\theta_y, \Delta\theta_z$ 为 x, y, z 陀螺在 $[t_k, t_{k+1}]$ 采样时间间隔内的角增量(已经过位置速率及地球自转速率的补偿)。
对式(9.2.51)作泰勒级数展开

$$Q(t_{k+1}) = e^{\frac{1}{2}\Delta\Theta} \cdot Q(t_k) = \left[I + \frac{\frac{1}{2}\Delta\Theta}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\Delta\Theta\right)^2}{2!} + \dots \right] Q(t_k)$$

由于

$$\begin{aligned} \Delta\Theta^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_x & -\Delta\theta_y & -\Delta\theta_z \\ \Delta\theta_x & 0 & \Delta\theta_z & -\Delta\theta_y \\ \Delta\theta_y & -\Delta\theta_z & 0 & \Delta\theta_x \\ \Delta\theta_z & \Delta\theta_y & -\Delta\theta_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\Delta\theta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta^2 \end{bmatrix} = -\Delta\theta^2 I \end{aligned}$$

其中, $\Delta\theta^2 = \Delta\theta_x^2 + \Delta\theta_y^2 + \Delta\theta_z^2$, 所以

$$\Delta\Theta^3 = \Delta\Theta^2 \cdot \Delta\Theta = -\Delta\theta^2 \Delta\Theta$$

$$\Delta\Theta^4 = \Delta\Theta^2 \cdot \Delta\Theta^2 = \Delta\theta^4 I$$

$$\Delta\Theta^5 = \Delta\Theta^4 \cdot \Delta\Theta = \Delta\theta^4 \Delta\Theta$$

$$\Delta\Theta^6 = \Delta\Theta^4 \cdot \Delta\Theta^2 = -\Delta\theta^6 I$$

.....

$$\begin{aligned} Q(t_{k+1}) &= \left\{ I + I \left[\frac{\frac{\Delta\Theta}{2}}{1!} + \frac{-\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2}{2!} + \frac{-\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2 \frac{\Delta\Theta}{2}}{3!} + \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^4}{4!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^4 \frac{\Delta\Theta}{2}}{5!} + \frac{-\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^6}{6!} + \dots \right] \right\} Q(t_k) \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} Q(t_{k+1}) &= \left\{ I \left[1 - \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^6}{6!} + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta\Theta}{2} \left[\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{1!} - \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)^5}{5!} - \dots \right] \frac{1}{\frac{\Delta\theta}{2}} \right\} Q(t_k) \end{aligned}$$

$$= \left[I \cos \frac{\Delta\theta}{2} + \Delta\Theta \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} \right] Q(t_k)$$

(9.2.52)

在实际解算过程中, $\cos \frac{\Delta\theta}{2}$ 和 $\sin \frac{\Delta\theta}{2}$ 必须按级数展开的有限项计算。对式 (9.2.52) 取有限项, 得四元数的各阶近似算法。

一阶近似算法:

$$Q(t_{k+1}) = \left(I + \frac{\Delta\Theta}{2} \right) Q(t_k) \quad (9.2.53)$$

二阶近似算法:

$$Q(t_{k+1}) = \left[I \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} \right) + \frac{\Delta\Theta}{2} \right] Q(t_k) \quad (9.2.54)$$

三阶近似算法:

$$Q(t_{k+1}) = \left[I \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} \right) \Delta\Theta \right] Q(t_k) \quad (9.2.55)$$

四阶近似算法:

$$Q(t_{k+1}) = \left[I \left(1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} \right) \Delta\Theta \right] Q(t_k) \quad (9.2.56)$$

.....

2. 定量采样增量法

在定量采样增量法姿态更新计算中, 只有当陀螺输出的角增量达到某一固定的增量值 $\Delta\theta_0$ 时才作四元数更新。设 x, y, z 陀螺的输出角增量达到 $\Delta\theta_0$ 的时间分别为 $t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3}$, 且假设 $t_{k+1} < t_{k+2} < t_{k+3}$, 则根据式 (9.2.52)

$$Q(t_{k+1}) = \left[I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta\Theta_x \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \right] Q(t_k)$$

$$Q(t_{k+2}) = \left[I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta\Theta_y \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \right] Q(t_{k+1})$$

$$Q(t_{k+3}) = \left[I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta\Theta_z \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \right] Q(t_{k+2})$$

式中

$$\Delta\Theta_x = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_0 & 0 & 0 \\ \Delta\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta\theta_0 \\ 0 & 0 & -\Delta\theta_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.57)$$

$$\Delta\Theta_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\Delta\theta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\theta_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.58)$$

记

$$\Delta \Theta_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\Delta\theta_0 \\ 0 & 0 & \Delta\theta_0 & 0 \\ 0 & -\Delta\theta_0 & 0 & 0 \\ \Delta\theta_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2.59)$$

$$U_x = I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta \Theta_x \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \quad (9.2.60)$$

$$U_y = I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta \Theta_y \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \quad (9.2.61)$$

$$U_z = I \cos \frac{\Delta\theta_0}{2} + \Delta \Theta_z \frac{\sin \frac{\Delta\theta_0}{2}}{\Delta\theta_0} \quad (9.2.62)$$

由于 $\Delta\theta_0$ 是固定值, 所以 $\Delta \Theta_x, \Delta \Theta_y, \Delta \Theta_z$ 是固定阵, U_x, U_y, U_z 也是固定阵。因此定量采样增量法可归纳如下:

- (1) 按式(9.2.60)、式(9.2.61)、式(9.2.62)预先计算 U_x, U_y, U_z , 并存储。
- (2) 记下角增量达到 $\Delta\theta_0$ 的陀螺 j 及时间 t_{k+1} , 则更新四元数为

$$Q(t_{k+1}) = U_j Q(t_k) \quad (j = x, y, z, \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

显然在定量采样增量法四元数更新中, 时间更新的间隔是不相等的, 且是随机的。该法适用于角运动比较缓慢的运载体, 如运输机、轰炸机、舰船等。

9.2.5 四元数的初值确定和规范化处理

四元数的初值 $Q(0)$ 由捷联惯导的初始对准确定。设初始对准确定的姿态阵为 $C_b^n = [T_{ij}]$, 根据式(9.2.34)及描述刚体旋转的四元数为规范化四元数的结论, 有如下方程式成立

$$\begin{cases} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = T_{11} \\ q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = T_{22} \\ q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = T_{33} \\ q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) = T_{12} \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) = T_{13} \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) = T_{21} \\ 2(q_2q_3 - q_0q_1) = T_{23} \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) = T_{31} \\ 2(q_2q_3 + q_1q_0) = T_{32} \end{cases}$$

从上述方程可解得

$$\begin{cases} |q_1| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} - T_{22} - T_{33}} \\ |q_2| = \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} + T_{22} - T_{33}} \\ |q_3| = \frac{1}{2} \sqrt{1 - T_{11} - T_{22} + T_{33}} \\ |q_0| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + T_{11} + T_{22} + T_{33}} \end{cases} \quad (9.2.63)$$

$$\begin{cases} 4q_1q_0 = T_{32} - T_{23} \\ 4q_2q_0 = T_{13} - T_{31} \\ 4q_3q_0 = T_{21} - T_{12} \end{cases}$$

所以 q_0, q_1, q_2, q_3 的符号可按式确定:

$$\begin{cases} \text{sign}(q_1) = \text{sign}(q_0) [\text{sign}(T_{32} - T_{23})] \\ \text{sign}(q_2) = \text{sign}(q_0) [\text{sign}(T_{13} - T_{31})] \\ \text{sign}(q_3) = \text{sign}(q_0) [\text{sign}(T_{21} - T_{12})] \end{cases} \quad (9.2.64)$$

上式中, $\text{sign}(q_0)$ 可任选, 原因分析如下。

设表征从角位置 A_0 至角位置 A_1 的旋转四元数为

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + u \sin \frac{\theta}{2}$$

设

$$Q_1 = -Q$$

则 Q_1 四个元的符号与 Q 四个元的符号相反,

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\cos \frac{\theta}{2} - u \sin \frac{\theta}{2} = \cos \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) - u \sin \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \cos \frac{2\pi - \theta}{2} - u \sin \frac{2\pi - \theta}{2} \end{aligned}$$

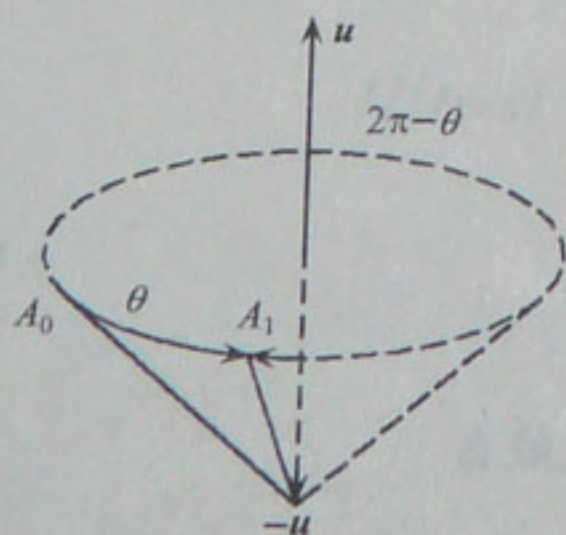


图 9.2.3 仅考虑初始和终了角位置时的等效旋转

上式说明: Q_1 表征的旋转是刚体绕 $-u$ 旋转 $2\pi - \theta$ 角度, 如图 9.2.3 所示, 从图中可看出, 刚体从角位置 A_0 旋转至角位置 A_1 。由于四元数只表征从初始位置至终了位置的一次性等效旋转, 而并不反映从初始位置至终了位置的中间过程, 所以由 Q_1 和 Q 表征的旋转关系是相同的。由式(9.2.64)知, 当 q_0 取反号时, q_1, q_2, q_3 也跟着取反号, 相当于四元数取反号, 而 Q 和 $-Q$ 表征了相同的等效旋转, 所以 q_0 的符号可任取。

表征旋转的四元数应该是规范化四元数, 即 $\|Q\| = 1$, 但是由于计算误差等因素, 计算过程中四元数会逐渐失去规范化特性, 因此若干次更新后, 必须对四元数做规范化处理:

$$q_i = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{\hat{q}_0^2 + \hat{q}_1^2 + \hat{q}_2^2 + \hat{q}_3^2}}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (9.2.65)$$

其中, $\hat{q}_0, \hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3$ 是四元数更新所得的值。

9.3 姿态更新计算的等效旋转矢量算法

采用毕卡法求解四元数微分方程时使用了陀螺的角增量输出,角增量虽然微小,但不能视作无穷小,而刚体做有限转动时,刚体的空间角位置与旋转次序有关,即存在旋转的不可交换性误差。等效旋转矢量法在利用角增量计算等效旋转矢量时,对这种不可交换误差作了适当补偿,在姿态更新周期内包含的角增量子样数越多,补偿就越精确。就算法本质上来看,姿态更新计算的四元数皮卡算法实质上就是单子样旋转矢量算法。因此多子样旋转矢量算法比四元数皮卡算法的精度高。并且旋转矢量算法可获得锥运动环境下的优化算法,因此特别适用于在高动态环境下工作。

9.3.1 旋转矢量与姿态四元数间的关系

设 t_k 时刻的机体坐标系为 $b(k)$, 导航坐标系为 $n(k)$, t_{k+1} 时刻的机体坐标系为 $b(k+1)$, 导航坐标系为 $n(k+1)$ 。记 $b(k)$ 至 $b(k+1)$ 的旋转四元数为 $q(h)$, $n(k)$ 至 $b(k)$ 的旋转四元数为 $Q(t_k)$, $n(k+1)$ 至 $b(k+1)$ 的旋转四元数为 $Q(t_{k+1})$, $n(k)$ 至 $n(k+1)$ 的旋转四元数为 $p(h)$, 其中 $h = t_{k+1} - t_k$ 。则

$$r^{n(k+1)} = C_{b(k+1)}^{n(k+1)} r^{b(k+1)} \quad (9.3.1a)$$

亦即

$$r^{n(k+1)} = C_{n(k)}^{n(k+1)} C_{b(k)}^{n(k)} C_{b(k+1)}^{b(k)} r^{b(k+1)} \quad (9.3.1b)$$

根据式(9.2.35)和式(9.2.36)所示向量坐标变换的四元数乘表示法和变换矩阵表示法间的等价关系,式(9.3.1a)等价于如下四元数乘表达式:

$$r^{n(k+1)} = Q(t_{k+1}) \otimes r^{b(k+1)} \otimes Q^*(t_{k+1}) \quad (9.3.1c)$$

式(9.3.1b)等价于如下四元数乘表达式:

$$r^{n(k+1)} = p^*(h) \otimes \{Q(t_k) \otimes [q(h) \otimes r^{b(k+1)} \otimes q^*(h)] \otimes Q^*(t_k)\} \otimes p(h)$$

根据四元数乘法结合律,上式可写成

$$r^{n(k+1)} = [p^*(h) \otimes Q(t_k) \otimes q(h)] \otimes r^{b(k+1)} \otimes [p^*(h) \otimes Q(t_k) \otimes q(h)]^* \quad (9.3.1d)$$

比较式(9.3.1c)和式(9.3.1d),得

$$Q(t_{k+1}) = p^*(h) \otimes Q(t_k) \otimes q(h) \quad (9.3.2)$$

在姿态更新周期 $h = t_{k+1} - t_k$ 内,导航坐标系的变化十分缓慢, $p(h) \approx 1 + \mathbf{0}$, 所以式(9.3.2)可写成:

(TP-3126.0102)



普通高等教育“十五”国家级规划教材

惯性导航

科学出版社 工科出版分社

电话: 010-64033891

E-mail: gk@mail.sciencep.com

ISBN 978-7-03-016428-5



9 787030 164285 >

定价: 38.00 元