深蓝学院
shenlanxueyuan.com

从零手写VIO-第六期
第六次作业 思路讲解

主讲人 吴少腾

第六次作业

作业

基础题

1. 证明式(15)中，取 $\mathbf{y} = \mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解。提示：设 $\mathbf{y}\prime = \mathbf{u}_4 + \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 正交于 $\mathbf{u}_4$，证明

$$\mathbf{y}\prime^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D}\mathbf{y}\prime \geq \mathbf{y}^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D}\mathbf{y}$$

该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

2. 请依据本节课公式，完成特征点三角化代码，并通过仿真测试

提升题

1. 请对测量值加上不同噪声（增大测量噪声方差），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。
2. 固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧（如 3，4，5 帧等），观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。

基础作业-1

- 证明$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u}_4$是式（14）的最优解

在大于两帧观测的三角化过程中，$\boldsymbol{D}$一般是行数大于列数，$\boldsymbol{Dy} = \boldsymbol{0}$是超定方程

$$\min_{\boldsymbol{y}} \|\boldsymbol{Dy}\|_2^2 = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{Dy}$$

$$s.t. \|\boldsymbol{y}\| = 1$$

两种方法

① 对$\boldsymbol{D}$作奇异值分解

② 拉格朗日乘子法

基础作业-1

① 对$\boldsymbol{D}$作奇异值分解

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}_{\mathrm{n\times n}}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{n\times 4}}(\boldsymbol{V}_{4\times 4})^{\mathrm{T}}$$

$$\therefore \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U\Sigma V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{V}\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \sigma_3^2 & \\ & & & \sigma_4^2\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

由奇异值分解的性质，$\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2,\sigma_4^2$是$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$的特征值，$\boldsymbol{V}_{4\times 4}=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\}$是对应的单位**正交**特征向量，且是$\mathbb{R}^4$的一组正交基

$$\therefore \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{v}_i$$

不建议$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{v}_4+\alpha$

I. 不满足$\|\boldsymbol{y}\|=1$

II. 为什么选择$\boldsymbol{v}_4$

基础作业-1

$$\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{v}_i \quad \because \|\boldsymbol{y}\|=1 \qquad \therefore \|\boldsymbol{y}\|=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\left(\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{v}_i\right)^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{4}k_i^2=1$$

正交性质

$$\therefore \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}=\left(\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{v}_i\right)^{T}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\Sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{4}k_i\boldsymbol{v}_i=\sum_{i=1}^{4}k_i^2\sigma_i^2\|\boldsymbol{v}_i\|_2^2=\sum_{i=1}^{4}k_i^2\sigma_i^2$$

$$\therefore \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+k_3^2\sigma_3^2+(1-k_1^2-k_2^2-k_3^2)\sigma_4^2$$

$$=k_1^2\underbrace{(\sigma_1^2-\sigma_4^2)}_{\text{大于0}}+k_2^2\underbrace{(\sigma_2^2-\sigma_4^2)}_{\text{大于0}}+k_3^2\underbrace{(\sigma_3^2-\sigma_4^2)}_{\text{大于0}}+\sigma_4^2\geq\sigma_4^2$$

当且仅当$k_1=k_2=k_3=0$时，上式取等号，此时$\boldsymbol{y}=k_4\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{v}_4$

基础作业-1

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

② 拉格朗日乘子法

$$\min_{\boldsymbol{y}} \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}\|_2^2 = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} \qquad s.t. \|\boldsymbol{y}\| = 1$$

令$L(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} - \lambda(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - 1)$

对$\boldsymbol{y}$求导并令导数为0，得$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y}$
可知取最优解时，λ为$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$的特征值，$\boldsymbol{y}$为对应的特征向量.

$$L(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} - \lambda\left(\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - 1\right) = \lambda\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} - \lambda\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} + \lambda = \lambda$$

可知在λ取最小特征值时，原问题得到最小值，此时$\boldsymbol{y}$为对应的单位特征向量

基础作业-2

- 完善三角化代码

$$\mathbf{P}_k = [\mathbf{R}_k, \mathbf{t}_k] \in \mathbb{R}^{3\times4}$$

```
MatrixXd Projection = MatrixXd::Zero(3, 4);
Projection.block(0, 0, 3, 3) = camera_pose[i].Rwc.transpose();
Projection.col(3) = -camera_pose[i].Rwc.transpose() * camera_pose[i].twc;
```

$$\begin{bmatrix} u_1\mathbf{P}_{1,3}^\top - \mathbf{P}_{1,1}^\top \\ v_1\mathbf{P}_{1,3}^\top - \mathbf{P}_{1,2}^\top \\ \vdots \\ u_n\mathbf{P}_{n,3}^\top - \mathbf{P}_{n,1}^\top \\ v_n\mathbf{P}_{n,3}^\top - \mathbf{P}_{n,2}^\top \end{bmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{D}\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

① 根据左式拼接D矩阵

② 作奇异值分解(Eigen中的函数)

提升作业

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 不同噪声和观测帧数下的实验结果

① 噪声添加在观测值上
② 设置随机数种子，否则每一次噪声都一样

```
std::default_random_engine uv_generator;
std::normal_distribution<double> noise_pdf(0., noise_pixel / 1000.); // 2pixel / focal
uv_generator.seed((unsigned int)time(NULL));
```

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening