深蓝学院
shenlanxueyuan.com

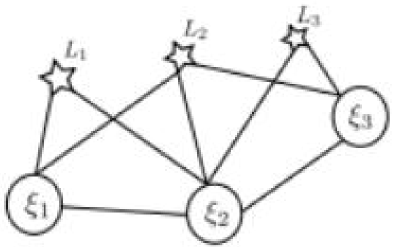
手写VIO第四次作业思路讲解

主讲人 尤海荣

作业1

作业

1. 某时刻，SLAM 系统中相机和路标点的观测关系如下图所示，其中 ξ 表示相机姿态，L 表示观测到的路标点。当路标点 L 表示在世界坐标系下时，第 k 个路标被第 i 时刻的相机观测到，重投影误差为 $\mathbf{r}(\xi_i, L_k)$。另外，相邻相机之间存在运动约束，如 IMU 或者轮速计等约束。

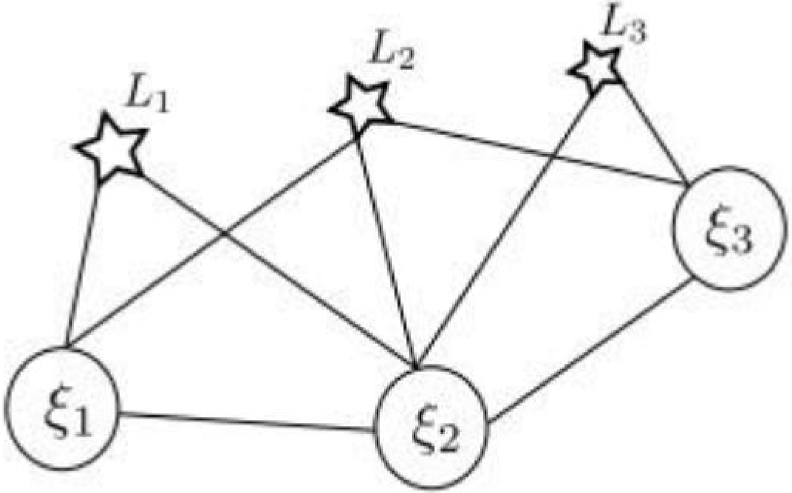


1. 请绘制上述系统的信息矩阵 Λ.
2. 请绘制相机 ξ_1 被 marg 以后的信息矩阵 Λ'.

1.1 绘制信息矩阵Λ

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

通过邻接矩阵的概念，可以快速画出非对角线元素，而对角线元素上的数量就是每行（或者每列）非对角线元素数量之和。

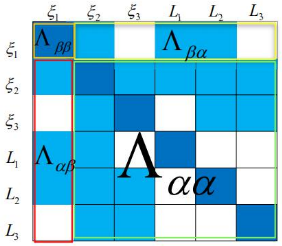


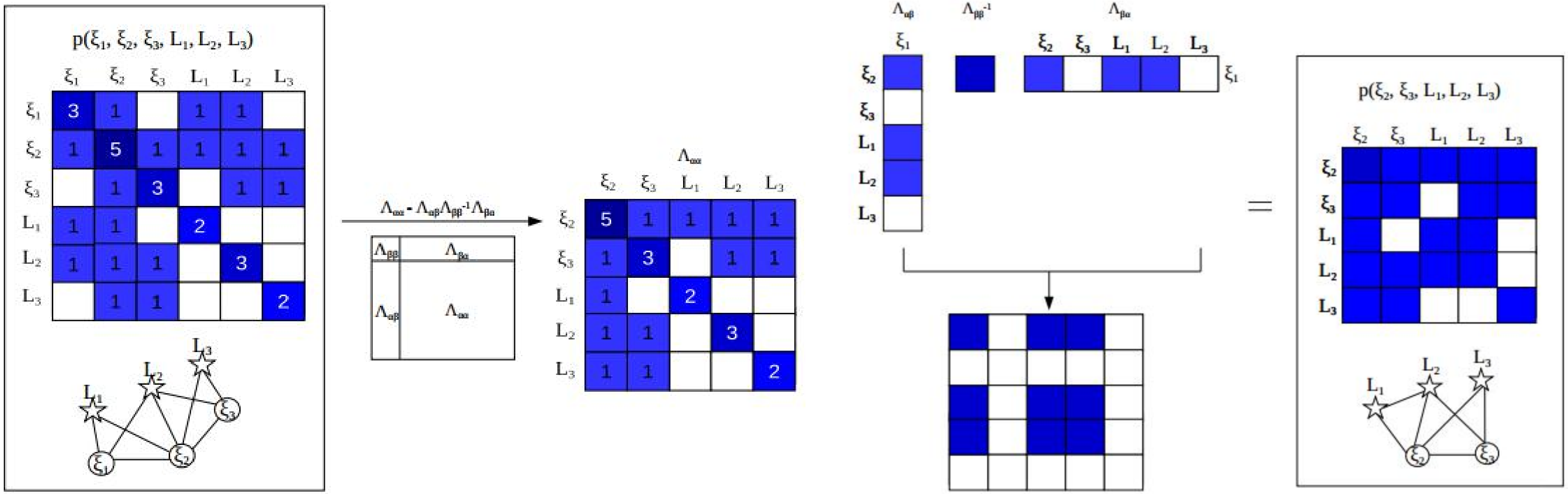
Λ

	ξ_1	ξ_2	ξ_3	L_1	L_2	L_3
ξ_1	3	1		1	1	
ξ_2	1	5	1	1	1	1
ξ_3		1	3		1	1
L_1	1	1		2		
L_2	1	1	1		3	
L_3		1	1			2

1.2 绘制相机ξ1被marg以后的信息矩阵Λ'

$$A^{-1} = \Lambda_{aa} - \Lambda_{ab}\Lambda_{bb}^{-1}\Lambda_{ba}$$





作业2 阅读《Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables》. 证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系。

负的信息矩阵和协方差的逆矩阵相等。

（1）Hessian 和协方差矩阵的关系：

附件中的文档给出了这一结论： 高斯随机变量的 Hessian 和协方差矩阵是相等的。

高斯随机向量 θ 均值为 θ^*，协方差矩阵为 $\sum_\theta$，因此其**联合概率密度函数（PDF）**由下式给出：

$$p(\boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-\frac{N_\theta}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_\theta|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star)^T \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star)\right] \tag{A.1}$$

目标函数可以定义为 PDF 的负对数：

$$J(\boldsymbol{\theta}) \equiv -\ln p(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N_\theta}{2} \ln 2\pi + \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Sigma}_\theta| + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star)^T \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^\star) \tag{A.2}$$

通过对 θ_l 和 $\theta_{l'}$ 进行偏微分，可以得到 Hessian 矩阵的（l, l'）分量：

$$\mathcal{H}^{(l,l')}(\boldsymbol{\theta}^\star) = \left.\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_l \partial\theta_{l'}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^\star} = (\boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1})^{(l,l')} \tag{A.3}$$

因此，Hessian 矩阵等于协方差矩阵的逆：

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^\star) = \boldsymbol{\Sigma}_\theta^{-1} \tag{A.4}$$

作业2 阅读《Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables》. 证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系。

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

（2）信息矩阵和 Hessian 矩阵的关系

文章《Fisher Information and the Hessian of Log Likelihood》中给出了这一结论：信息矩阵与对数似然（LogLikelihood）函数的负的 Hessian 矩阵相等。

证明如下：

Fisher Information：

$$I_{i,j}(\theta) = \mathbb{E}_X\left[(D_i \log p_\theta(X))\,(D_j \log p_\theta(X))\right] \quad (1)$$

对数似然函数的 Hessian 矩阵：

$$I_{i,j}(\theta) = -\mathbb{E}_X\left[D_{i,j} \log p_\theta(X)\right]$$

其中，D_i 是一阶偏导数，D_{ij} 是二阶偏导数。

因为对数似然函数的 Hessian 矩阵满足以下关系式：

$$H[\log p_\theta(x)] = (D_{i,j} \log p_\theta(x))_{i,j=1}^{d}. \quad (3)$$

p（θ）是一个分布，二阶导运算符和积分可以互换位置：

$$\int_X D_{i,j} p_\theta(X)\,dx = D_{i,j}\int_X p_\theta(X)\,dx = D_{i,j}1 = 0 \quad (4)$$

作业2 阅读《Relationship between the Hessian and Covariance Matrix for Gaussian Random Variables》. 证明信息矩阵和协方差的逆之间的关系。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

又因为：

$$D_i \log p_\theta(x) = \frac{D_i p_\theta(x)}{p_\theta(x)}. \quad (5)$$

所以有：

$$D_{i,j} \log p_\theta(x) = D_i\left(\frac{D_j p_\theta(x)}{p_\theta(x)}\right) = \frac{D_{i,j} p_\theta(x)}{p_\theta(x)} - \frac{D_i p_\theta(x)}{p_\theta(x)}\frac{D_j p_\theta(x)}{p_\theta(x)}. \quad (6)$$

因为：

$$\mathbb{E}_X\left[\frac{D_{i,j} p_\theta(x)}{p_\theta(x)}\right] = \int_X D_{i,j} p_\theta(x)\, dx = 0. \quad (7)$$

对（6）式两边同时取期望，得：

$$\mathbb{E}_X\left[(D_i \log p_\theta(X))(D_j \log p_\theta(X))\right] = -\mathbb{E}_X\left[D_{i,j} \log p_\theta(X)\right]$$

即信息矩阵与对数似然（LogLikelihood）函数的负的 Hessian 矩阵相等。

证毕。

综上，得出结论：负的信息矩阵和协方差的逆矩阵相等！！！

作业3

❸ 请补充作业代码中单目 Bundle Adjustment 信息矩阵的计算，并输出正确的结果。正确的结果为：奇异值最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为 7.

代码补充：

```
H.block(i*6, i*6, 6, 6) += jacobian_Ti.transpose()*jacobian_Ti;
H.block(i*6,poseNums*6+j*3,6,3) += jacobian_Ti.transpose() * jacobian_Pj;
H.block(poseNums*6+j*3,i*6,3,6) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Ti;
H.block(poseNums*6+j*3,poseNums*6 +j*3,3,3) += jacobian_Pj.transpose() * jacobian_Pj;
```

作业3

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

```
youhairong@youhairong-Legion-Y7000P-2019-PG0:~/文档/course4/nullspace_test/build
$ ./NullSpaceTest
    147.51
   129.146
    108.42
   86.8786
   66.7165
   53.3602
   50.0706
   49.9072
   46.1212
    41.646
   37.4764
   36.9655
   32.5123
   29.4255
   28.6926
```

中间部分太长，这里就省略掉了。

```
 0.00520788
 0.00502341
  0.0048434
 0.00451083
  0.0042627
 0.00386223
 0.00351651
 0.00302963
 0.00253459
 0.00230246
 0.00172459
0.000422374
1.25708e-16
8.63763e-17
5.18689e-17
4.38809e-17
2.98776e-17
1.45304e-17
1.59456e-18
```

结论：最后 7 维接近于 0，表明零空间的维度为 7。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢各位聆听！

Thanks for Listening