从零手写VIO-第六期

第六章作业分享

主讲人 st

第六章作业

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

基础题

1. 证明式(15)中，取 $\mathbf{y} = \mathbf{u}_4$ 是该问题的最优解。提示：设 $\mathbf{y}\prime = \mathbf{u}_4 + \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{v}$ 正交于 $\mathbf{u}_4$，证明

$$\mathbf{y}\prime^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}\prime \geq \mathbf{y}^\top \mathbf{D}^\top \mathbf{D} \mathbf{y}$$

   该方法基于奇异值构造矩阵零空间的理论。

2. 请依据本节课公式，完成特征点三角化代码，并通过仿真测试

提升题

1. 请对测量值加上不同噪声 (增大测量噪声方差)，观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。
2. 固定噪声方差参数，将观测图像帧扩成多帧 (如 3，4，5 帧等)，观察最小奇异值和第二小奇异值之间的比例变化，并绘制比例值的变化曲线。

第一题（几何意义上）

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

寻求最小二乘解：

$$\min_{y}\|Dy\|_2^2, \quad s.t.\|y\|=1$$

如果D是对称方阵，可以做特征值分解：

$$D=Q\Lambda Q^T=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1{}^T \\ q_2{}^T \\ \vdots \\ q_n{}^T \end{bmatrix}$$

$$D=\lambda_1 \underline{q_1 q_1^T}+\lambda_2 \underline{q_2 q_2^T}+\dots\lambda_n \underline{q_n q_n^T}$$

投影矩阵

Dy 的本质是*y*在特征向量*q*上投影的线性组合，所以*y*与q_n共线（对应特征值最小）时有最小模长。

第一题（几何意义上）

但是，D不是方阵，我们可以使用SVD分解：

$$D = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix}$$

$$D^T D = V\Sigma^T \Sigma V^T, DD^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

$$D = \sqrt{\lambda_1}\underline{u_1 v_1^T} + \sqrt{\lambda_2}\underline{u_2 v_2^T} + \dots \sqrt{\lambda_n}\underline{u_n v_n^T}$$

数值等于与特征向量v点乘，
方向等于特征向量u

*Dy*本质是特征向量*u*的线性组合，我们只考虑模长，看成特征向量v的组合不会影响结果
所以等效为*y*在特征向量*v*上的投影的线性组合，所以*y*与v_n共线时有最小模长。

第一题（瑞利定理）

深蓝学院 shenlanxueyuan.com

瑞利定理：

$$\lambda_{\min} \le \frac{x^T A x}{x^T x} \le \lambda_{\max}$$

其中λ是A的特征值。

$$\|Dy\|^2 = y^T D^T D y \qquad \lambda_{\min} \le \frac{y^T D^T D y}{y^T y} \le \lambda_{\max}$$

$y^T y = 1,\ \lambda_{\min} = \sigma_4^2,\ \lambda_{\max} = \sigma_1^2$

$$\sigma_4^2 \le y^T D^T D y \le \sigma_1^2$$

当 $y = u_4,\ D^T D u_4 = \sigma_4^2 u_4,\quad u_4^T D^T D u_4 = \sigma_4^2$

第二题

```
/* your code begin */
Eigen::MatrixXd D((end_frame_id - start_frame_id) * 2, 4);
for (int i = start_frame_id; i < end_frame_id; ++i) {
    double u = camera_pose[i].uv(0);
    double v = camera_pose[i].uv(1);
    int row = (i - start_frame_id) * 2;

    Eigen::Matrix<double, 4, 4> P_inv = Eigen::Matrix<double, 4, 4>::Identity();
    Eigen::Matrix<double, 4, 4> P;

    P_inv.block<3, 3>(0, 0) = camera_pose[i].Rwc;
    P_inv.block<3, 1>(0, 3) = camera_pose[i].twc;
    P = P_inv.inverse();

    D.row(row) = u * P.row(2) - P.row(0);
    D.row(row + 1) = v * P.row(2) - P.row(1);
}
Eigen::Matrix<double, 4, 4> DtD = D.transpose() * D;
Eigen::JacobiSVD<Eigen::MatrixXd> svd(DtD, Eigen::ComputeThinU | Eigen::ComputeThinV);
P_est = (svd.matrixV().col(3) / svd.matrixV()(3, 3)).segment<3>(0);
/* your code end */
```

$$\forall k, \lambda_k x_k = P_k y$$

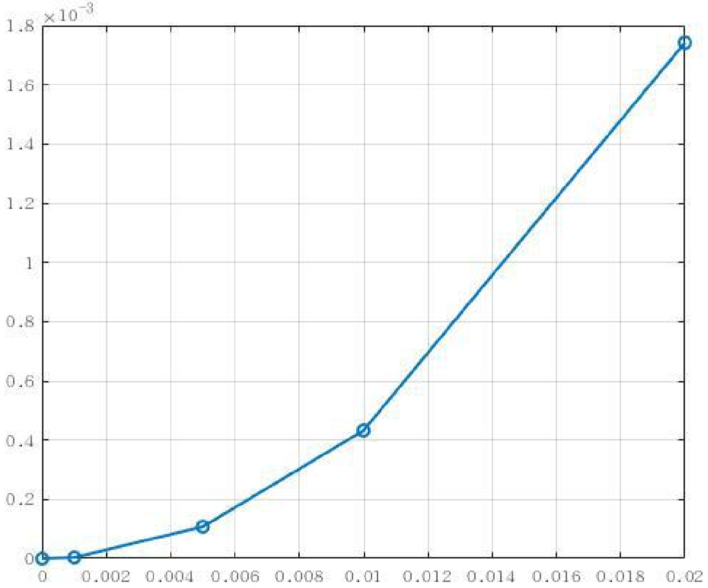
注意：P_k是*world*到*camera*，代码中的camera_pose是*camera*到*world*。

最后构建：$Dy = 0$

上式如果有非零向量解，*y*在尺度上变化也能满足，所以*D*的零空间是一条直线，对应会有一个特征值为零。

由于噪声的影响，会导致D矩阵满秩，我们可以以最小特征值与第二小特征值的比值来度量三角化的结果。

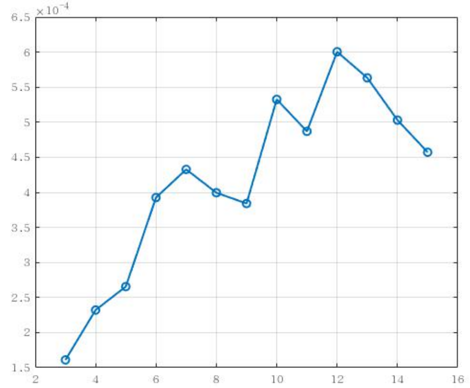
第三题



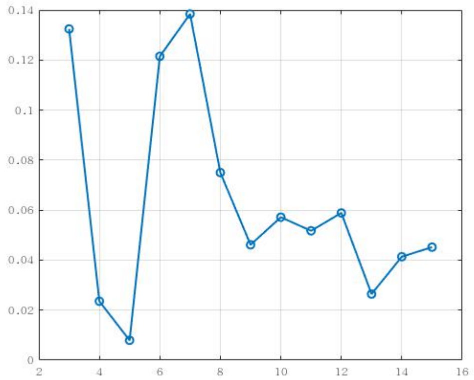
最小奇异值与第二小奇异值比例值越小，说明三角化结果越稳定。如左图所示，随着噪声变大，结果也越不稳定。

第四题

比例：



误差：



开始时随着帧数变多，观测的结果越多，矛盾也越多，所以结果反而变差，但是这不能反映误差也在变大。

最终随着帧数增加，比例值与误差也都趋于稳定。（测试100帧以上，变化不明显）