深蓝学院
shenlanxueyuan.com

多传感器融合定位

第7讲 基于滤波的融合方法

主讲人 任 乾

北京理工大学本硕
自动驾驶从业者

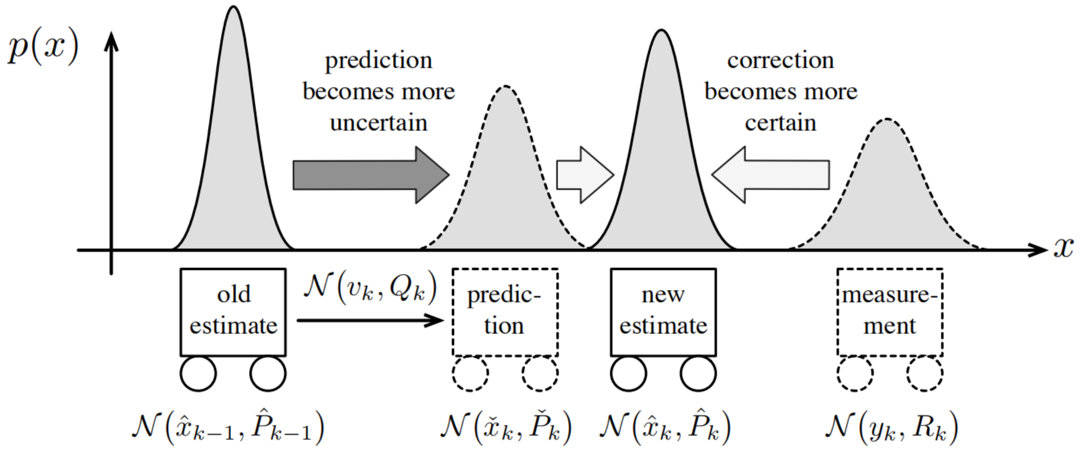
目录

目录

滤波器作用

滤波器的本质：结合预测与观测，得到最“精确”的后验值。

实际中，预测与观测均从传感器而来，因此滤波器的作用便是结合各传感器得到一个最好的融合结果。



1) 实际中预测往往从IMU、编码器等传感器递推而来；

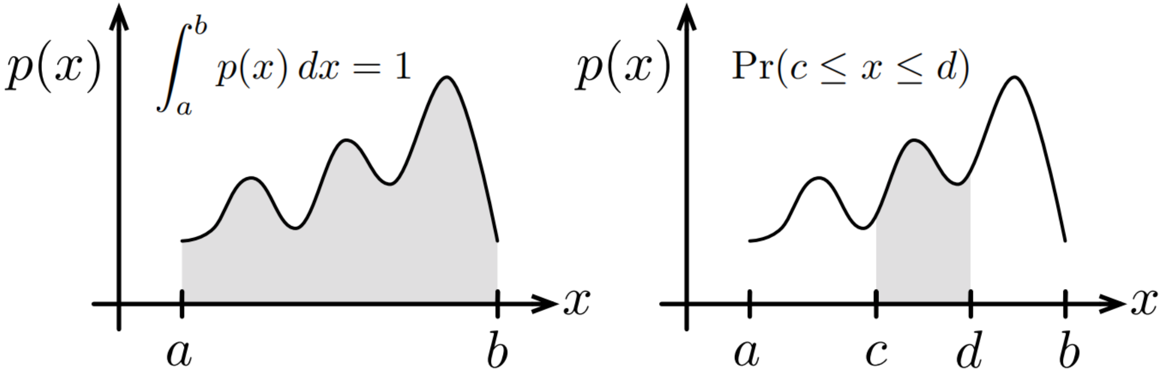
2) 观测往往从GPS、雷达、相机等传感器而来；

3) 后验为融合后的结果，即定位模块的输出。

目录

概率基础知识

1. 概率、概率密度



上图中，$p(x)$为x在区间[a,b]上的**概率密度**，它表示的是随机变量在区间的分布情况。
Pr 代表的是x在区间[c,d]上的**概率**，它是概率密度的积分，

$$\Pr(c \leq x \leq d) = \int_c^d p(x)dx$$

我们平时所说“高斯分布”、“非高斯分布”均是指它的概率密度。

概率基础知识

2. 联合概率密度

$x \in [a,b]$ 和 $y \in [r,s]$ 的联合概率密度函数可以表示为 $p(x,y)$ ，其积分表示x和y同时处在某个区间的概率，满足下式：

$$\int_a^b \int_r^s p(x,y)dydx = 1$$

特别地，当x和y统计独立的时候，有

$$p(x,y) = p(x)p(y)$$

3. 条件概率密度

x关于y的条件概率密度函数可以表示为

$$p(x \mid y)$$

其含义是，在 $y \in [r,s]$ 的前提下，$x \in [a,b]$ 的概率分布，并且满足下式：

$$p(x) = \int_r^s p(x \mid y)p(y)dy$$

特别地，当x和y统计独立的时候，有

$$p(x \mid y) = p(x)$$

4. 贝叶斯公式

联合概率密度分解成条件概率密度和边缘概率密度的乘积，即

$$p(x, y) = p(x \mid y)p(y) = p(y \mid x)p(x)$$

重新整理，即可得贝叶斯公式：

$$p(x \mid y) = \frac{p(y|x)p(x)}{p(y)}$$

5. 贝叶斯推断

贝叶斯推断可以理解为贝叶斯公式的运用，它是指，如果已知**先验**概率密度函数 $p(x)$ ，以及**传感器模型** $p(y \mid x)$，那么就可以根据贝叶斯公式**推断**出后验概率密度。

$$p(x \mid y) = \frac{p(y|x)p(x)}{\int p(y|x)p(x)\mathrm{d}x}$$

实际中，贝叶斯推断有时也称为贝叶斯估计。

6. 高斯概率密度函数

一维情况下，高斯概率密度函数表示为:

$$p\left(x \mid \mu, \sigma^{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma^{2}}} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^{2}}{\sigma^{2}}\right)$$

其中 μ 为均值, σ^2 为方差。

多维情况下，高斯概率密度函数表示为

$$p(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})=\frac{1}{\sqrt{(2 \pi)^{N} \operatorname{det} \boldsymbol{\Sigma}}} \exp \left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

其中均值为 $\boldsymbol{\mu}$ ，方差为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 。

一般把高斯分布写成 $\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$。

7. 联合高斯概率密度函数

若有高斯分布

$$p(\boldsymbol{x})=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_{xx}\right)$$
$$p(\boldsymbol{y})=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_{yy}\right)$$

则它们的联合概率密度函数可以表示为

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\mathcal{N}\left(\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y\end{array}\right],\left[\begin{array}{ll}\boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy}\end{array}\right]\right)$$

由于联合概率密度满足下式

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=p(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) p(\boldsymbol{y})$$

该式在高斯分布的前提下可以重新分解。

由于高斯分布中指数项包含方差的求逆，而此处联合概率的方差是一个高维矩阵，对它求逆的简洁办法是运用舒尔补。

舒尔补的主要目的是把矩阵分解成上三角矩阵、对角阵、下三角矩阵乘积的形式，方便运算，即

$$\left[\begin{array}{ll}\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{array}\right] =\left[\begin{array}{cc}\mathbf{I} & \mathbf{B D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\Delta \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} & \mathbf{I}\end{array}\right]$$

其中 $\Delta \mathbf{D}=\mathbf{A}-\mathbf{B D}^{-1} \mathbf{C}$ 称为矩阵D关于原矩阵的舒尔补。

此时有

$$\left[\begin{array}{ll}\mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{array}\right]^{-1}= \left[\begin{array}{cc}\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} & \mathbf{I}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\Delta \mathbf{D}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1}\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc}\mathbf{I} & -\mathbf{B D}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{array}\right]$$

7. 联合高斯概率密度函数

利用舒尔补，联合分布的方差矩阵可以写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

它的逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}\right)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

7. 联合高斯概率密度函数

联合分布 $p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 仍为高斯分布，

$$p(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_x\\ \boldsymbol{\mu}_y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy}\end{bmatrix}\right)$$

它的指数部分的二次项包含如下内容

$$\begin{aligned}&\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_x\\ \boldsymbol{\mu}_y\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy}\end{bmatrix}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_x\\ \boldsymbol{\mu}_y\end{bmatrix}\right)\\
=&\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_x\\ \boldsymbol{\mu}_y\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}\right)^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & -\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_x\\ \boldsymbol{\mu}_y\end{bmatrix}\right)\\
=&\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x-\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y\right)\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x-\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y\right)\right)\\
&+\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y\right)\end{aligned}$$

最后得到两个二次项的和，由于同底数幂相乘后，底数不变，指数相加，且 $p(\boldsymbol{y})=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_y,\boldsymbol{\Sigma}_{yy}\right)$

因此有 $p(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{y})=\mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_x+\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y\right),\boldsymbol{\Sigma}_{xx}-\boldsymbol{\Sigma}_{xy}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx}\right)$

8. 高斯随机变量的线性分布

在上面的例子中，若已知$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$之间有如下关系

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$$

其中$\boldsymbol{G}$是一个常量矩阵，$\boldsymbol{n}=\mathcal{N}(\mathbf{0},\boldsymbol{R})$ 为零均值白噪声，在实际中指的是观测噪声。则$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$的均值和方差之间必然存在联系，其联系可通过以下推导获得。

均值

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_y&=E[\boldsymbol{y}]\\&=E[\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}]\\&=\boldsymbol{G}E[\boldsymbol{x}]+E[\boldsymbol{n}]\\&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_x\end{aligned}$$

方差

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{yy}&=\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{n})\\&=E\left[\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_y\right)\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_y\right)^{\mathrm{T}}\right]+\boldsymbol{R}\\&=\boldsymbol{G}E\left[\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right)\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right)^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}\\&=\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}\end{aligned}$$

方差的交叉项

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{xy}&=E\left[\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right)\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}_y\right)^{\mathrm{T}}\right]\\&=E\left[\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right)\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_x+\boldsymbol{n}\right)^{\mathrm{T}}\right]\\&=E\left[\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right)\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{\mu}_x\right)^{\mathrm{T}}+\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\right]\\&=\boldsymbol{\Sigma}_{xx}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}+E\left[\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_x\right)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\right]\\&=\boldsymbol{\Sigma}_{xx}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

同理可得 $\boldsymbol{\Sigma}_{yx}=\boldsymbol{\Sigma}_{xy}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Sigma}_{xx}$

目录

滤波器基本原理

1. 状态估计模型

实际状态估计任务中，待估计的后验概率密度可以表示为：

$$p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right)$$

其中

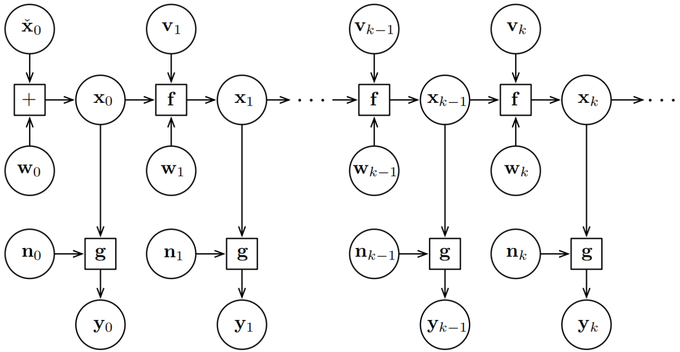
$\check{\boldsymbol{x}}_0$ 表示的是状态初始值

$\boldsymbol{v}_{1:k}$ 表示从1到k时刻的输入

$\boldsymbol{y}_{0:k}$ 表示从0到k时刻的观测

因此，滤波问题可以直观表示为，根据所有历史数据(输入、观测、初始状态)得出最终的融合结果。

历史数据之间的关系，可以用下面的图模型表示，



图模型中体现了马尔可夫性，即当前状态只跟前一时刻状态相关，和其他历史时刻状态无关。

该性质的数学表达：

运动方程： $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_k\right)$

观测方程： $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{n}_k\right)$

滤波器基本原理

2. 贝叶斯滤波

根据贝叶斯公式，k时刻后验概率密度可以表示为

$$\begin{aligned}p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) &= \frac{p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k, \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)}{p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)} \\ &= \eta p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k, \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)\end{aligned}$$

根据观测方程，$\boldsymbol{y}_k$ 只和 $\boldsymbol{x}_k$ 相关，因此上式可以简写为

$$p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) = \eta p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k\right) p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)$$

利用条件分布的性质，可得

$$\begin{aligned}&p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \\ &= \int p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}\end{aligned}$$

再利用马尔可夫性，可得

$$\begin{aligned}&p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \\ &= \int p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k\right) p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}\end{aligned}$$

2. 贝叶斯滤波

经过以上化简，最终后验概率可以写为

$$\underbrace{p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right)}_{\text{estimate}}$$

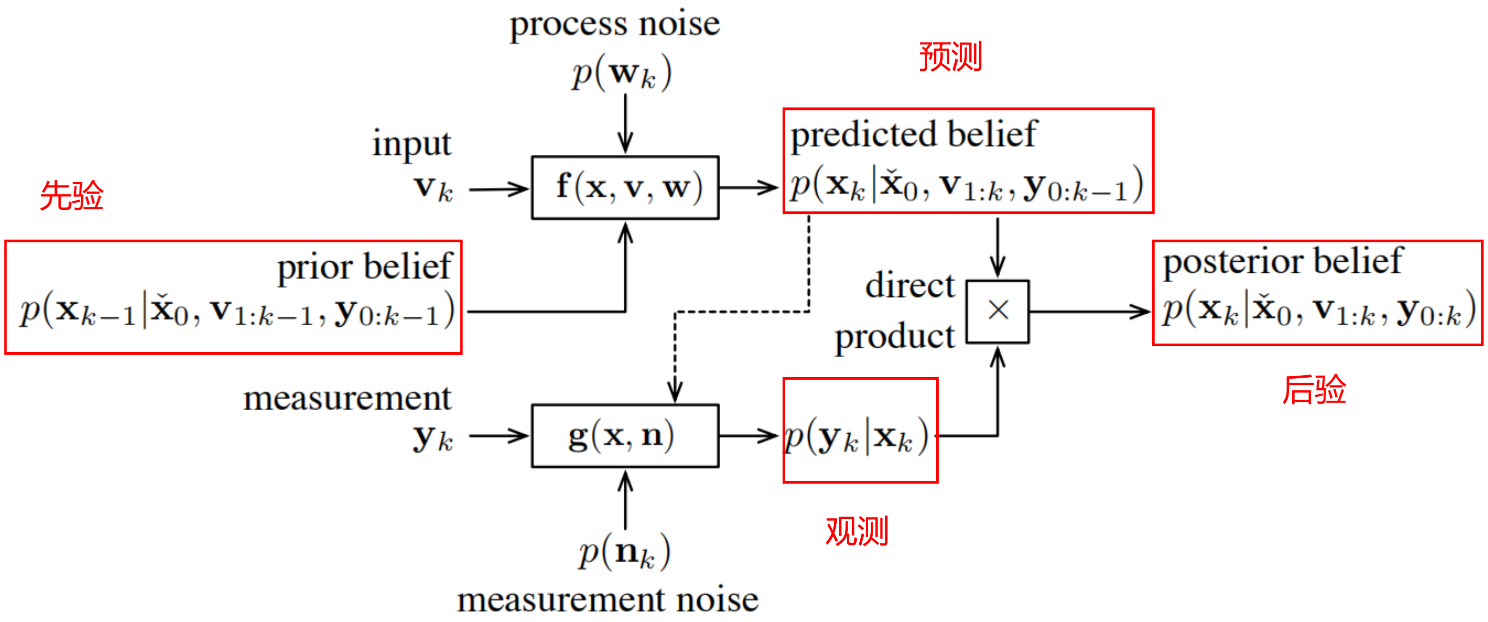
$$= \eta \boxed{\underbrace{p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k\right)}_{\boldsymbol{g}(\cdot)}} \int \boxed{\underbrace{p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k\right)}_{\boldsymbol{f}(\cdot)}} \boxed{\underbrace{p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k-1}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right)}_{\text{last estimate}}} \mathrm{d}\boldsymbol{x}_{k-1}$$

观测　　预测　　先验

滤波器基本原理

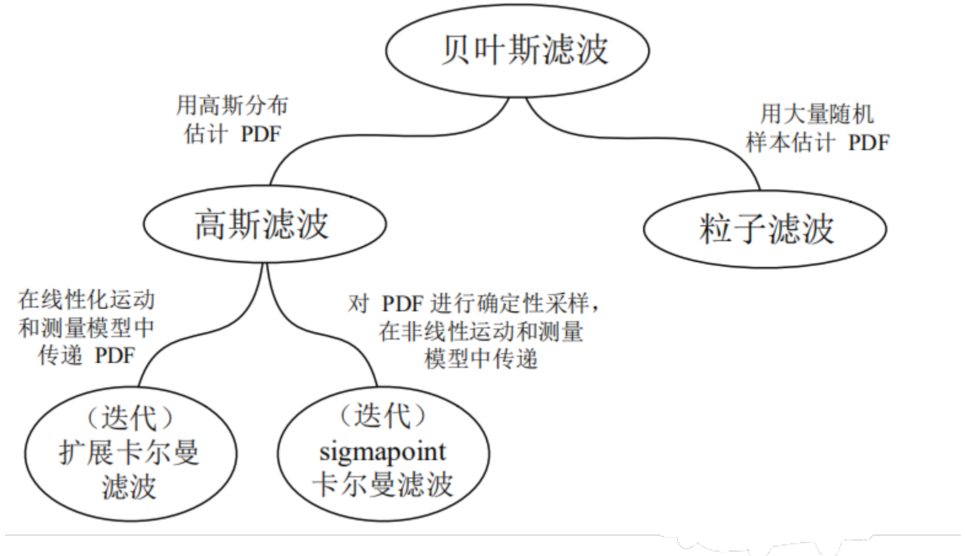
2. 贝叶斯滤波

根据以上结果，可以画出贝叶斯滤波的信息流图如下



滤波器基本原理

2. 贝叶斯滤波



1）在高斯假设前提下，用贝叶斯滤波的原始形式推导比较复杂，可以利用高斯的特征得到简化形式，即广义高斯滤波。后面KF、EKF、IEKF的推导均采用这种形式。

2) 实际中，UKF 和 PF 多应用再扫地机器人等2D小场景，与本课程目标场景不符，因此不做讲解。

滤波器基本原理

3. 卡尔曼滤波(KF)推导

在线性高斯假设下，上式可以重新写为下面的形式(为了和后面符号对应)

运动方程： $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k\right)+\boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{w}_k$

观测方程： $\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x}_k\right)+\boldsymbol{C}_k \boldsymbol{n}_k$

把上一时刻的后验状态写为

$$p\left(\boldsymbol{x}_{k-1} \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1: k-1}, \boldsymbol{y}_{0: k-1}\right)=\mathcal{N}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\right)$$

则当前时刻的预测值为

$$\check{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{F}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k\right)$$

根据高斯分布的线性变化，它的方差为(可仿照第2节8)中的推导过程自行推导)

$$\check{\boldsymbol{P}}_k=\boldsymbol{F}_{k-1} \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1} \boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

其中$\boldsymbol{Q}_k$为当前输入噪声的方差。

滤波器基本原理

3. 卡尔曼滤波(KF)推导

若把k时刻状态和观测的联合高斯分布写为

$$p\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k-1}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{x,k} \\ \boldsymbol{\mu}_{y,k} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx,k} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx,k} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy,k} \end{bmatrix}\right)$$

根据第2节7)中的推导结果，k时刻的后验概率可以写为

$$\begin{aligned} & p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \check{\boldsymbol{x}}_0, \boldsymbol{v}_{1:k}, \boldsymbol{y}_{0:k}\right) \\ & \quad = \mathcal{N}(\underbrace{\boldsymbol{\mu}_{x,k} + \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k}\boldsymbol{\Sigma}_{yy,k}^{-1}\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{\mu}_{y,k}\right)}_{\hat{\boldsymbol{x}}_k}, \underbrace{\boldsymbol{\Sigma}_{xx,k} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k}\boldsymbol{\Sigma}_{yy,k}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{yx,k}}_{\hat{P}_k}) \end{aligned}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$和$\hat{\boldsymbol{P}}_k$分别为后验均值和方差。若定义

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{\Sigma}_{xy,k}\boldsymbol{\Sigma}_{yy,k}^{-1}$$

则有

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{P}}_k &= \check{\boldsymbol{P}}_k - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{\Sigma}_{xy,k}^{\mathrm{T}} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k &= \check{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{\mu}_{y,k}\right) \end{aligned}$$

3. 卡尔曼滤波(KF)推导

把第2节8)中的推导得出的线性变换后的均值、方差及交叉项带入上面的式子，可以得到：

$$\boldsymbol{K}_k=\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_k\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k=\left(\mathbf{1}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{G}_k\right)\check{\boldsymbol{P}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\check{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{G}\left(\check{\boldsymbol{x}}_k\right)\right)$$

上面方程与之前所述预测方程(如下)，就构成了卡尔曼经典五个方程。

$$\check{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{F}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\boldsymbol{v}_k\right)$$

$$\check{\boldsymbol{P}}_k=\boldsymbol{F}_{k-1}\hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

需要说明的是，若不把第2节8)中的结果带入，而保留上页的原始形式，则对应的五个方程被称为广义高斯滤波。

4. 扩展卡尔曼滤波(EKF)推导

当运动方程或观测方程为非线性的时候，无法再利用之前所述的线性变化关系进行推导，常用的解决方法是进行线性化，把非线性方程一阶泰勒展开成线性。即

运动方程: $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_k\right) \approx \check{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{F}_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)+\boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{w}_k$

观测方程: $\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{n}_k\right) \approx \check{\boldsymbol{y}}_k+\boldsymbol{G}_k\left(\boldsymbol{x}_k-\check{\boldsymbol{x}}_k\right)+\boldsymbol{C}_k \boldsymbol{n}_k$

其中

$$\check{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k, \mathbf{0}\right) \qquad \check{\boldsymbol{y}}_k=\boldsymbol{g}\left(\check{\boldsymbol{x}}_k, \mathbf{0}\right)$$

$$\boldsymbol{F}_{k-1}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_k\right)}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}}\right|_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k, \mathbf{0}} \qquad \boldsymbol{G}_k=\left.\frac{\partial \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{n}_k\right)}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right|_{\check{\boldsymbol{x}}_k, \mathbf{0}}$$

$$\boldsymbol{B}_{k-1}=\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_k\right)}{\partial \boldsymbol{w}_k}\right|_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k, \mathbf{0}} \qquad \boldsymbol{C}_k=\left.\frac{\partial \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{n}_k\right)}{\partial \boldsymbol{n}_k}\right|_{\check{\boldsymbol{x}}_k, \mathbf{0}}$$

4. 扩展卡尔曼滤波(EKF)推导

根据该线性化展开结果，可以得到**预测状态**的统计学特征为

$$E\left[\boldsymbol{x}_k\right] \approx \check{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{F}_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right)+\underbrace{E\left[\boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{w}_k\right]}_{0}$$

$$E\left[\left(\boldsymbol{x}_k-E\left[\boldsymbol{x}_k\right]\right)\left(\boldsymbol{x}_k-E\left[\boldsymbol{x}_k\right]\right)^{\mathrm{T}}\right] \approx \underbrace{E\left[\boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{w}_k \boldsymbol{w}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}\right]}_{\boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}}$$

即 $p\left(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{v}_k\right) \approx \mathcal{N}\left(\check{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{F}_{k-1}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right), \boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}\right)$

同理，可得到**观测**的统计学特征为

$$E\left[\boldsymbol{y}_k\right] \approx \check{\boldsymbol{y}}_k+\boldsymbol{G}_k\left(\boldsymbol{x}_k-\check{\boldsymbol{x}}_k\right)+\underbrace{E\left[\boldsymbol{C}_k \boldsymbol{n}_k\right]}_{0}$$

$$E\left[\left(\boldsymbol{y}_k-E\left[\boldsymbol{y}_k\right]\right)\left(\boldsymbol{y}_k-E\left[\boldsymbol{y}_k\right]\right)^{\mathrm{T}}\right] \approx \underbrace{E\left[\boldsymbol{C}_k \boldsymbol{n}_k \boldsymbol{n}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\right]}_{\boldsymbol{C}_k \boldsymbol{R}_k \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}}$$

即 $p\left(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k\right) \approx \mathcal{N}\left(\check{\boldsymbol{y}}_k+\boldsymbol{G}_k\left(\boldsymbol{x}_k-\check{\boldsymbol{x}}_k\right), \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{R}_k \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\right)$

4. 扩展卡尔曼滤波(EKF)推导

把均值和方差的具体形式，带入广义高斯滤波的公式，最终得到EKF下得经典五个公式。

$$\check{\boldsymbol{P}}_k=\boldsymbol{F}_{k-1}\hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}_{k-1}^{\mathrm{T}}$$

$$\check{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\boldsymbol{v}_k,\mathbf{0}\right)$$

$$\boldsymbol{K}_k=\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_k\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k=\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{G}_k\right)\check{\boldsymbol{P}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\check{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{g}\left(\check{\boldsymbol{x}}_k,\mathbf{0}\right)\right)$$

5. 迭代扩展卡尔曼滤波(IEKF)推导

由于非线性模型中做了线性化近似，当非线性程度越强时，误差就会较大。但是，由于线性化的工作点离真值越近，线性化的误差就越小，因此解决该问题的一个方法是，通过迭代逐渐找到准确的线性化点，从而提高精度。

在EKF的推导中，其他保持不变，仅改变观测的线性化工作点，则有

$$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{n}_k\right) \approx \boldsymbol{y}_{\mathrm{op}, k}+\boldsymbol{G}_k\left(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}\right)+\boldsymbol{C}_k \boldsymbol{n}_k$$

其中

$$\boldsymbol{y}_{\mathrm{op}, k}=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, k}, \mathbf{0}\right)$$

$$\boldsymbol{G}_k=\left.\frac{\partial \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{n}_k\right)}{\partial \boldsymbol{x}_k}\right|_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, \boldsymbol{k}}, \mathbf{0}}$$

$$\boldsymbol{C}_k=\left.\frac{\partial \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{n}_k\right)}{\partial \boldsymbol{n}_k}\right|_{\boldsymbol{x}_{\mathrm{op}, \boldsymbol{k}}, \mathbf{0}}$$

滤波器基本原理

5. 迭代扩展卡尔曼滤波(IEKF)推导

按照与之前同样的方式进行推导，可得到滤波的校正过程为

$$\boldsymbol{K}_k = \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{G}_k \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{R}_k \boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} \right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \check{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{y}_{\mathrm{op},k} - \boldsymbol{G}_k \left(\check{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{x}_{\mathrm{op},k} \right) \right)$$

可见唯一的区别是后验均值 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 更新的公式与之前有所不同。

滤波过程中，反复执行这2个公式，以上次的后验均值作为本次的线性化工作点，即可达到减小非线性误差的目的。

需要注意的是，在这种滤波模式下， 后验方差应放在最后一步进行。

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k = \left(\mathbf{1} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{G}_k \right) \check{\boldsymbol{P}}_k$$

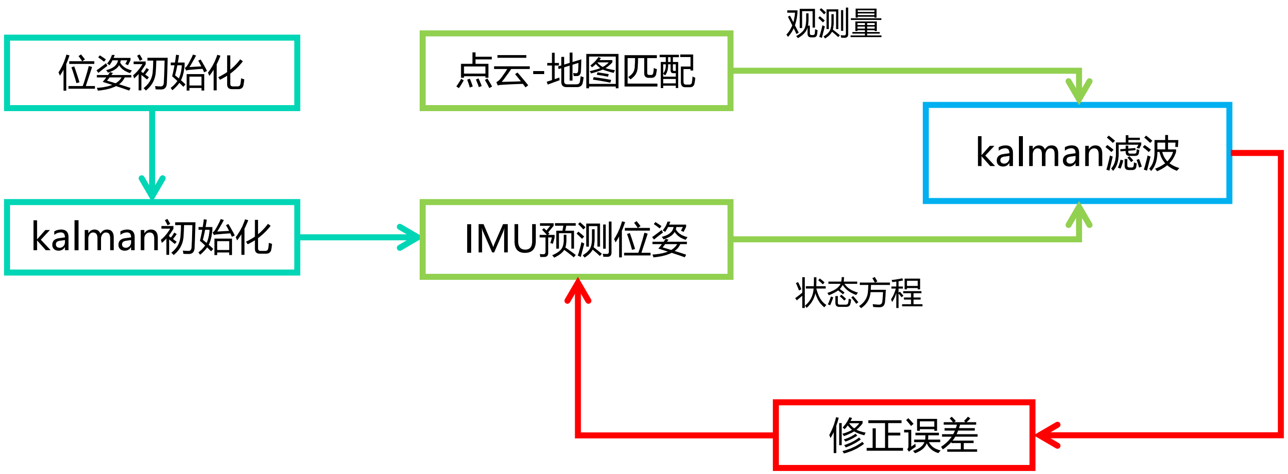
目录

基于滤波器的融合

通过以上推导，滤波问题可以简单理解为“预测 + 观测 = 融合结果”。

结合实际点云地图中定位的例子，预测由IMU给出，观测即为激光雷达点云和地图匹配得到的姿态和位置。

融合流程用框图可以表示如下：



基于滤波器的融合

1. 状态方程

状态方程由误差方程得来，第6讲已经完成误差方程的推导：

$$\delta\dot{\boldsymbol{p}} = \delta\boldsymbol{v}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}} = -\boldsymbol{R}_t[\boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}]_\times\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{R}_t(\boldsymbol{n}_a - \delta\boldsymbol{b}_a)$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\left[\boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t}\right]_\times\delta\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{n}_\omega - \delta\boldsymbol{b}_\omega$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_a = \boldsymbol{n}_{b_a} \qquad \delta\dot{\boldsymbol{b}}_a = 0$$

或

$$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_\omega = \boldsymbol{n}_{b_\omega} \qquad \delta\dot{\boldsymbol{b}}_\omega = 0$$

令 $\delta\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\delta\boldsymbol{p}\\ \delta\boldsymbol{v}\\ \delta\boldsymbol{\theta}\\ \delta\boldsymbol{b}_a\\ \delta\boldsymbol{b}_\omega\end{bmatrix}$， $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{n}_a\\ \boldsymbol{n}_\omega\\ \boldsymbol{n}_{b_a}\\ \boldsymbol{n}_{b_\omega}\end{bmatrix}$

则误差方程可以写成状态方程的通用形式：

$$\delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}_t\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_t\boldsymbol{w}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_t = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I}_3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\boldsymbol{R}_t\left[\bar{\boldsymbol{a}}_t\right]_\times & -\boldsymbol{R}_t & 0\\ 0 & 0 & -\left[\bar{\boldsymbol{\omega}}_t\right]_\times & 0 & -\boldsymbol{I}_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}\bar{\boldsymbol{a}}_t &= \boldsymbol{a}_t - \boldsymbol{b}_{a_t}\\ \bar{\boldsymbol{\omega}}_t &= \boldsymbol{\omega}_t - \boldsymbol{b}_{\omega_t}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{B}_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ \boldsymbol{R}_t & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix}$$

注：当选择 $\delta\dot{\boldsymbol{b}}_a = 0$，$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_\omega = 0$ 时，矩阵形式不一样，请各位自行推导。

基于滤波器的融合

2. 观测方程

在滤波器中，观测方程一般写为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}_t \delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}_t \boldsymbol{n}$$

此例中观测量有位置、失准角，则

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \delta \bar{\boldsymbol{p}} \\ \delta \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}$$

因此有

$$\boldsymbol{G}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_3 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_3 \end{bmatrix}$$

而此处$\boldsymbol{n}$ 为观测噪声，

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} n_{\delta \bar{p}_x} & n_{\delta \bar{p}_y} & n_{\delta \bar{p}_z} & n_{\delta \bar{\theta}_x} & n_{\delta \bar{\theta}_y} & n_{\delta \bar{\theta}_z} \end{bmatrix}^T$$

观测量中，$\delta \boldsymbol{p}$ 的计算过程为：

$$\delta \bar{\boldsymbol{p}} = \check{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{p}$$

其中 $\check{\boldsymbol{p}}$ 为 IMU 解算的位置，即预测值。$\boldsymbol{p}$ 为雷达与地图匹配得到的位置，即观测值。

$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}$ 的计算过程稍微复杂，需要先计算误差矩阵，

$$\delta \bar{\boldsymbol{R}}_t = {\boldsymbol{R}_t}^T \check{\boldsymbol{R}}_t$$

其中 $\check{\boldsymbol{R}}_t$为 IMU 解算的旋转矩阵，即预测值。$\boldsymbol{R}_t$为雷达与地图匹配得到的旋转矩阵，即观测值。

由于预测值与观测值之间的关系为

$$\check{\boldsymbol{R}}_t \approx \boldsymbol{R}_t (\boldsymbol{I} + [\delta \bar{\boldsymbol{\theta}}]_\times)$$

因此

$$\delta \bar{\boldsymbol{\theta}} = (\delta \bar{\boldsymbol{R}}_t - \boldsymbol{I})^\vee$$

基于滤波器的融合

3. 构建滤波器

构建滤波器，即把融合系统的状态方程和观测方程应用到 Kalman 滤波的五个公式中。

前面推导的方程是连续时间的，要应用于离散时间，需要按照采样时间对其进行离散化。

状态方程离散化，可以写为

$$\delta \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{F}_{k-1} \delta \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{w}_k$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{k-1} = \boldsymbol{I}_{15} + \boldsymbol{F}_t T$$

$$\boldsymbol{B}_{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{R}_{k-1} T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_3 T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I}_3 \sqrt{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{I}_3 \sqrt{T} \end{bmatrix}$$

其中，T 为 Kalman 的滤波周期。

注：关于 $\boldsymbol{B}_{k-1}$ 的离散化形式，不同资料有差异，但对实际调试影响不大。

对于观测方程，不需要乘以滤波周期，可以直接写出

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{G}_k \delta \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{n}_k$$

将以上各变量，带入kalman滤波的五个方程，即可构建完整的滤波器更新流程。

$$\delta \check{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{F}_{k-1} \delta \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{w}_k$$

$$\check{\boldsymbol{P}}_k = \boldsymbol{F}_{k-1} \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1} \boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_{k-1} \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{B}_{k-1}^T$$

$$\boldsymbol{K}_k = \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{G}_k \check{\boldsymbol{P}}_k \boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{C}_k \boldsymbol{R}_k \boldsymbol{C}_k^T \right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{G}_k \right) \check{\boldsymbol{P}}_k$$

$$\delta \hat{\boldsymbol{x}}_k = \delta \check{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{G}_k \delta \check{\boldsymbol{x}}_k \right)$$

基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

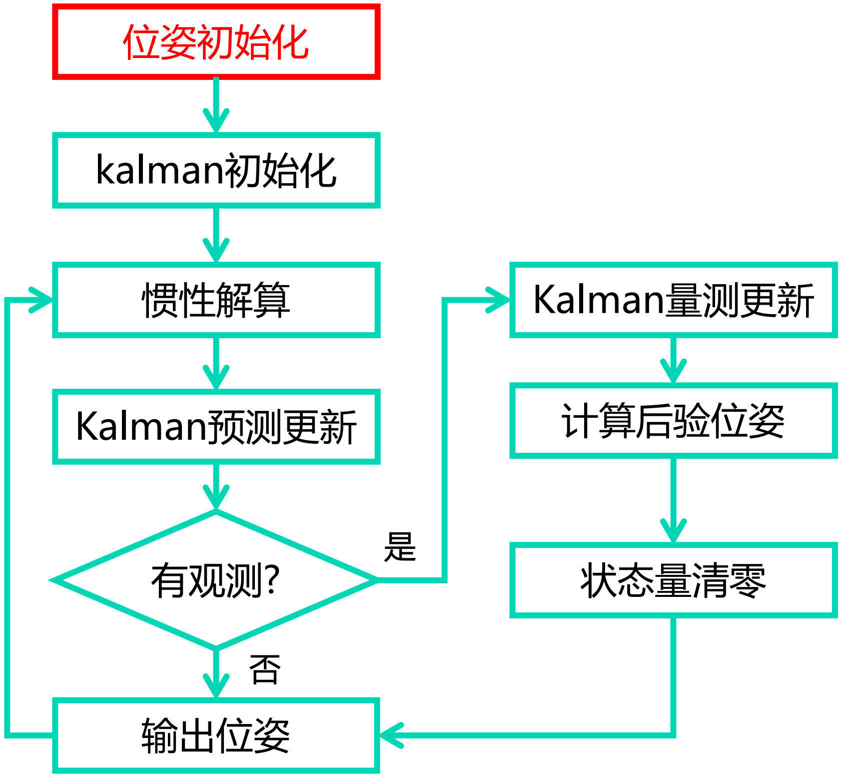
1）位姿初始化

在点云地图中实现初始定位，并给以下变量赋值，

$\hat{\boldsymbol{p}}_0$ ：初始时刻位置

$\hat{\boldsymbol{v}}_0$ ：初始时刻速度(可以从组合导航获得)

$\hat{\boldsymbol{R}}_0$ ：初始时刻姿态(也可用四元数，后面不再强调)



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

2）Kalman 初始化

a. 状态量 $\delta\hat{\boldsymbol{x}}_0 = \mathbf{0}$

b. 方差

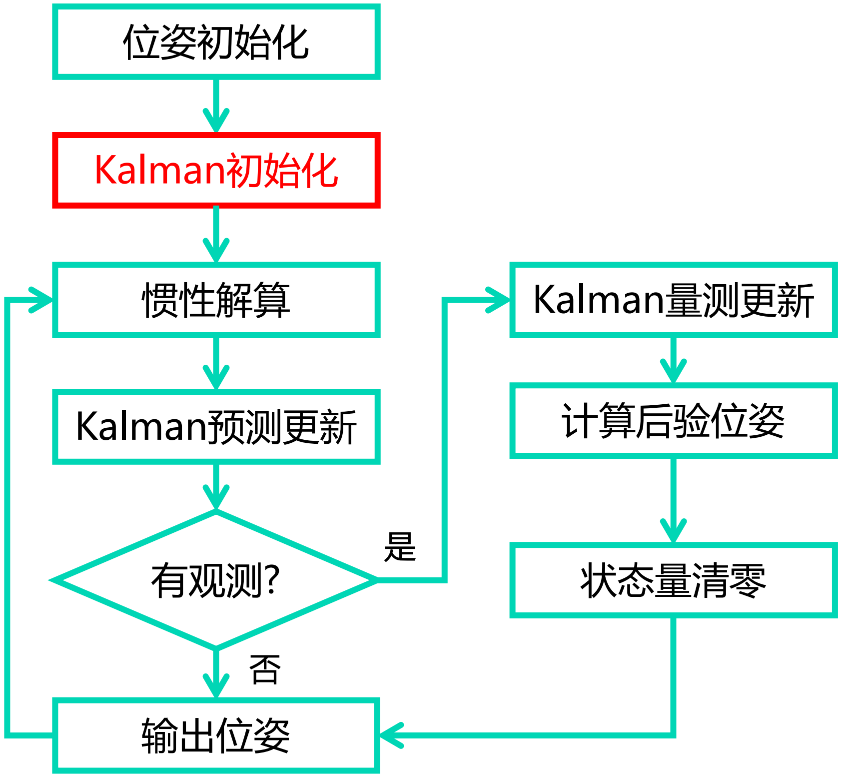
$$\hat{\boldsymbol{P}}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{\delta p} & & & & \\ & \boldsymbol{P}_{\delta v} & & & \\ & & \boldsymbol{P}_{\delta \theta} & & \\ & & & \boldsymbol{P}_{\delta b_a} & \\ & & & & \boldsymbol{P}_{\delta b_\omega} \end{bmatrix}$$

初始方差理论上可设置为各变量噪声的平方，实际中一般故意设置大一些，这样可加快收敛速度。

c. 过程噪声与观测噪声

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_a & & & \\ & \boldsymbol{Q}_\omega & & \\ & & \boldsymbol{Q}_{b_a} & \\ & & & \boldsymbol{Q}_{b_\omega} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{\delta p} & \\ & \boldsymbol{R}_{\delta \theta} \end{bmatrix}$$

过程噪声与观测噪声一般在 kalman 迭代过程中保持不变。



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

3）惯性解算

按照之前讲解的惯性解算方法，进行位姿更新，该位姿属于先验位姿。

a. 姿态解算

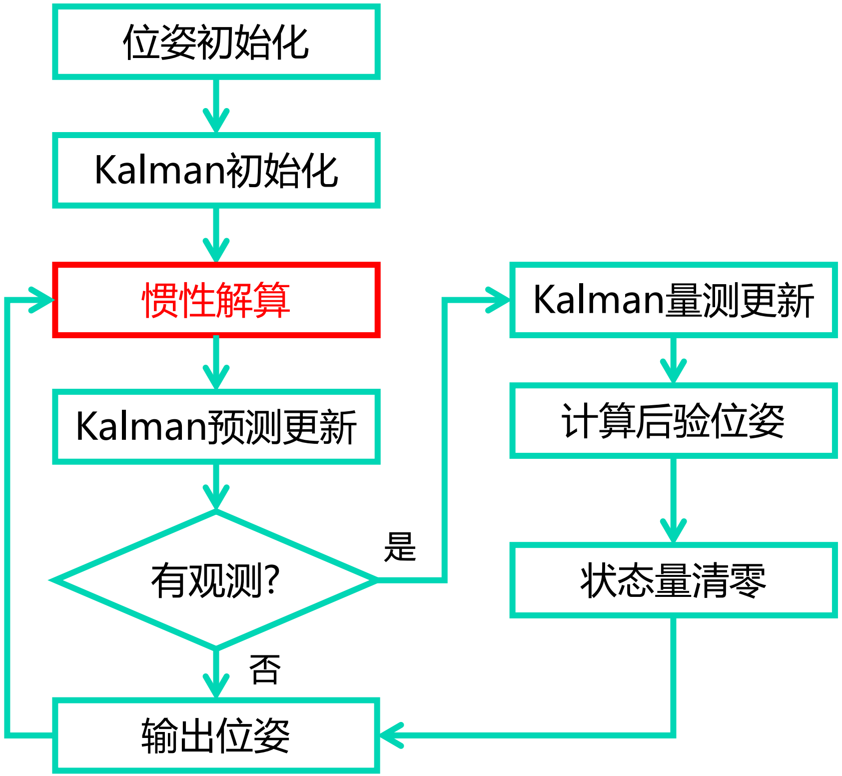
$$\check{\boldsymbol{R}}_k = \hat{\boldsymbol{R}}_{k-1}\left(I + \frac{\sin\phi}{\phi}(\boldsymbol{\phi}\times) + \frac{1-\cos\phi}{\phi^2}(\boldsymbol{\phi}\times)^2\right)$$

其中

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{\bar{\boldsymbol{\omega}}_{k-1}+\bar{\boldsymbol{\omega}}_k}{2}(t_k - t_{k-1})$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_k = \boldsymbol{\omega}_k - \boldsymbol{b}_{\omega_k}$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_{k-1} = \boldsymbol{\omega}_{k-1} - \boldsymbol{b}_{\omega_{k-1}}$$



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

3）惯性解算

按照之前讲解的惯性解算方法，进行位姿更新，该位姿属于先验位姿。

b. 速度解算

$$\check{\boldsymbol{v}}_k = \hat{\boldsymbol{v}}_{k-1} + \left(\frac{\check{\boldsymbol{R}}_k \bar{\boldsymbol{a}}_k + \hat{\boldsymbol{R}}_{k-1} \bar{\boldsymbol{a}}_{k-1}}{2} - \boldsymbol{g} \right) (t_k - t_{k-1})$$

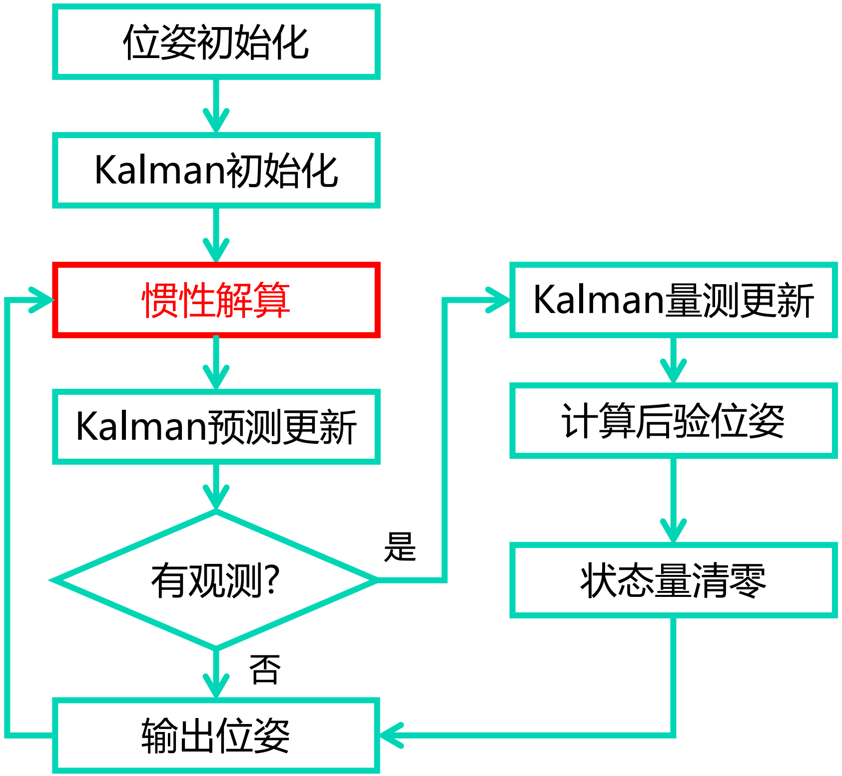
其中

$$\bar{\boldsymbol{a}}_k = \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{b}_{a_k}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}_{k-1} = \boldsymbol{a}_{k-1} - \boldsymbol{b}_{a_{k-1}}$$

c. 位置解算

$$\hat{\boldsymbol{p}}_k = \check{\boldsymbol{p}}_{k-1} + \frac{\check{\boldsymbol{v}}_k + \hat{\boldsymbol{v}}_{k-1}}{2} (t_k - t_{k-1})$$



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

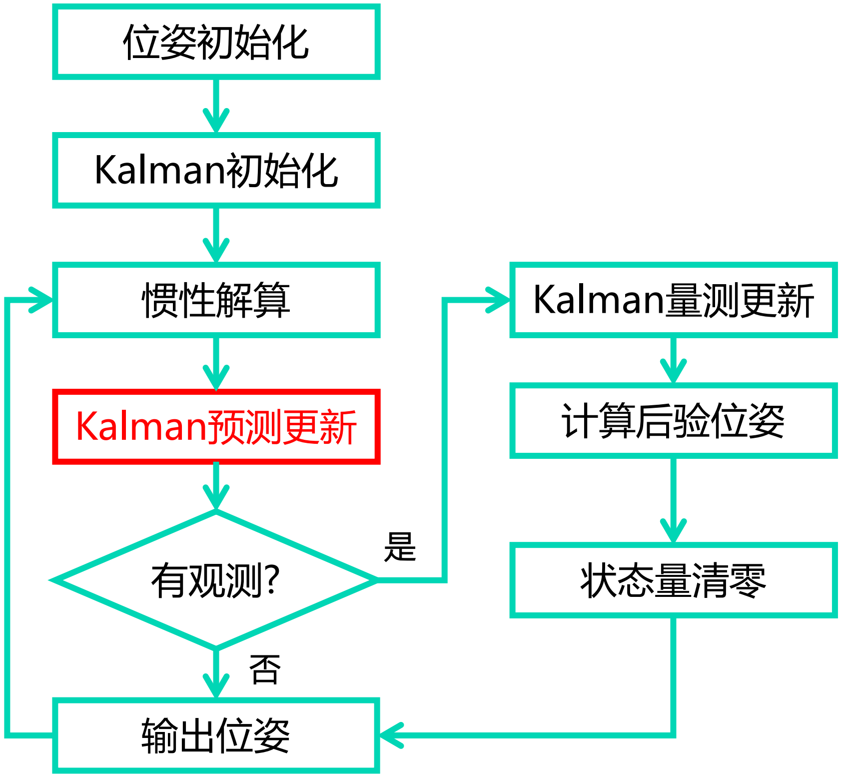
4）Kalman 预测更新

执行kalman五个步骤中的前两步，即

$$\delta\check{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{F}_{k-1}\delta\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{w}_k$$

$$\check{\boldsymbol{P}}_k = \boldsymbol{F}_{k-1}\hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}_{k-1}^{T}$$

当然，这需要先根据公式计算 $\boldsymbol{F}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{B}_{k-1}$。



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

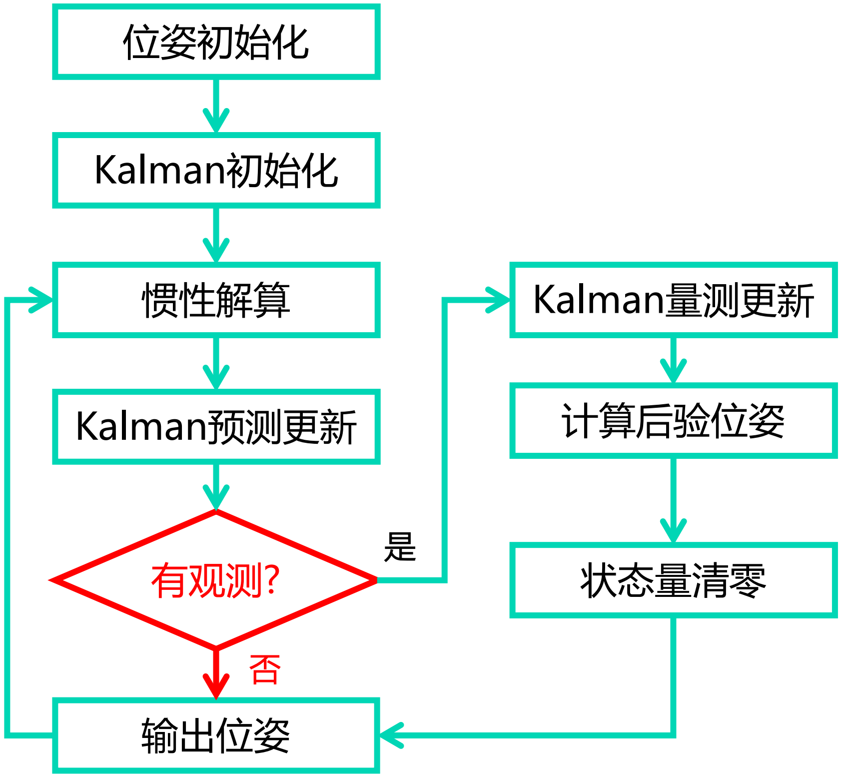
5）无观测时后验更新

无观测时，不需要执行kalman剩下的三个步骤，后验等于先验，即

$$\delta\hat{\boldsymbol{x}}_k = \delta\check{\boldsymbol{x}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k = \check{\boldsymbol{P}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \check{\boldsymbol{x}}_k$$



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

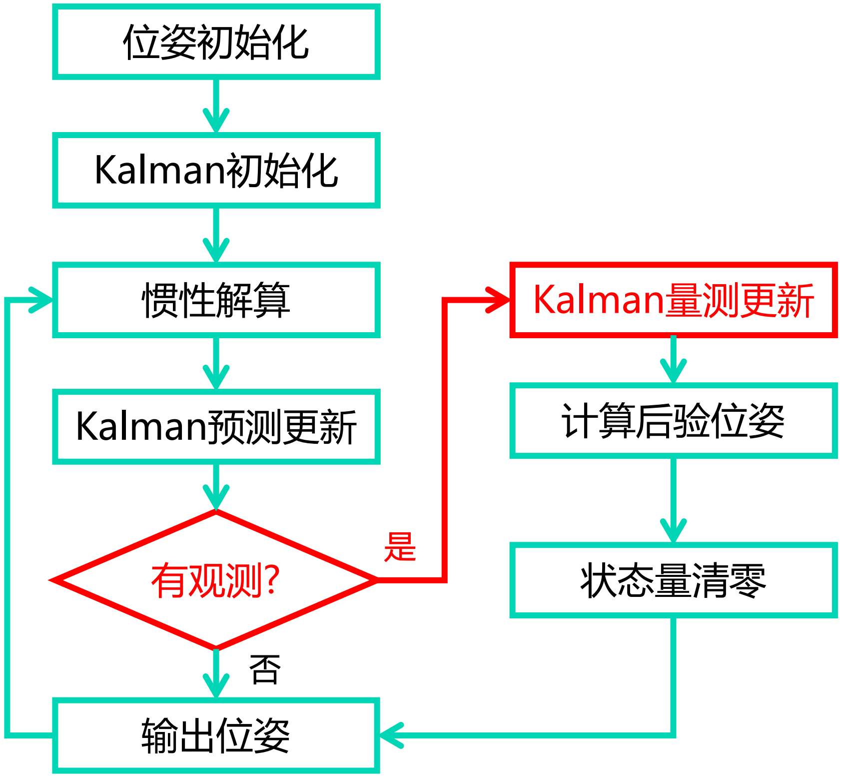
6）有观测时的量测更新

执行kalman滤波后面的三个步骤，得到后验状态量。

$$\boldsymbol{K}_k=\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_k\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{C}_k^{T}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{G}_k\right)\check{\boldsymbol{P}}_k$$

$$\delta\hat{\boldsymbol{x}}_k=\delta\check{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{G}_k\delta\check{\boldsymbol{x}}_k\right)$$



基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

7）有观测时计算后验位姿

根据后验状态量，更新后验位姿。

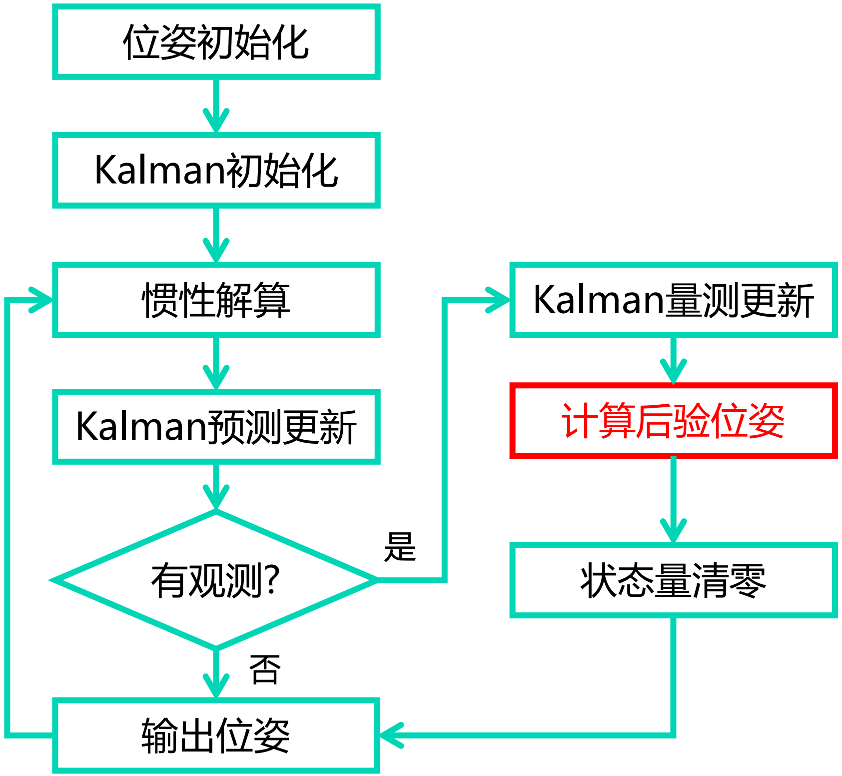
$$\hat{\boldsymbol{p}}_k = \check{\boldsymbol{p}}_k - \delta\hat{\boldsymbol{p}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_k = \check{\boldsymbol{v}}_k - \delta\hat{\boldsymbol{v}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{R}}_k = \check{\boldsymbol{R}}_k(\boldsymbol{I} - [\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_k]_\times)$$

$$\hat{\boldsymbol{b}}_{a_k} = \check{\boldsymbol{b}}_{a_k} - \delta\hat{\boldsymbol{b}}_{a_k}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}}_{\omega_k} = \check{\boldsymbol{b}}_{\omega_k} - \delta\hat{\boldsymbol{b}}_{\omega_k}$$



基于滤波器的融合

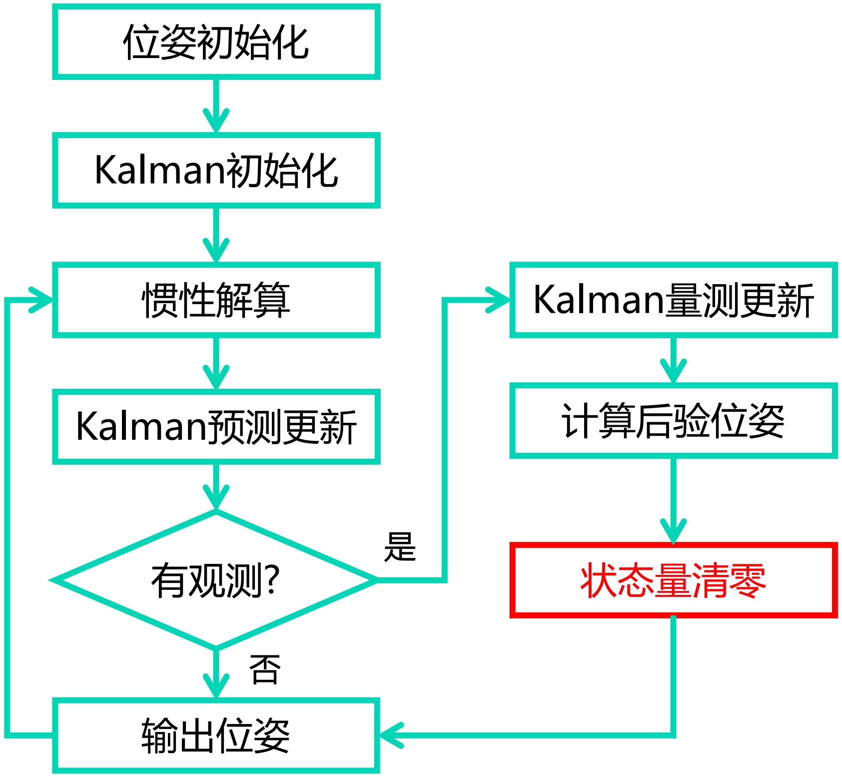
4. Kalman 滤波实际使用流程

8）有观测时状态量清零

状态量已经用来补偿，因此需要清零。

$$\delta \hat{\boldsymbol{x}}_k = \mathbf{0}$$

后验方差保持不变。



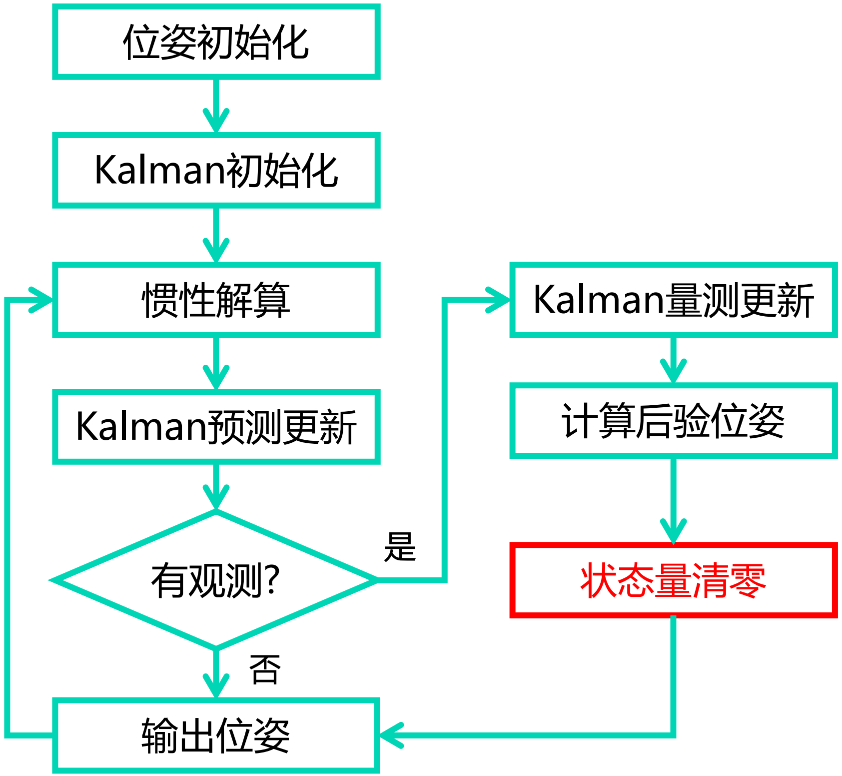
基于滤波器的融合

4. Kalman 滤波实际使用流程

9）输出位姿

把后验位姿输出给其他模块使用，

即输出 $\hat{\boldsymbol{p}}_k$ ，$\hat{\boldsymbol{v}}_k$ ，$\hat{\boldsymbol{R}}_k$ (或 $\hat{\boldsymbol{q}}_k$)。



作业

在提供的工程框架中，补全代码，实现基于地图的融合定位，并与不加滤波时的定位结果做比较。
(注：由于kitti数据有部分问题，虽然课程提供了修复后的数据，但是仍会对结果有影响，因此在某些路段滤波效果会较差，可以忽略这部分路段。)

评价标准：

1)及格：补全代码，且滤波功能正常。

2)良好：补全代码，功能正常，且经过调试参数，滤波后性能比滤波前好。(这个没有定量标准，各位把详细的误差对比结果提供在作业中，供助教有足够依据评阅)

3)优秀：在前面的模型推导中，考虑了器件误差中的随机游走，请给出不考虑随机游走模型(即 $\delta\dot{\boldsymbol{b}}_a=0$ ，$\delta\dot{\boldsymbol{b}}_\omega=0$)时的推导过程，并在工程框架中实现。对比这两种方法的性能差异(最好给出原因分析)。另外，kalman滤波的性能对噪声的设置较为敏感，请在提供结果的同时，给出不同噪声设置情况下的结果对比(至少5组参数)。

作业

附加题(不参与考核)：

在滤波模型中，除了基于误差状态(error state)的模型以外，还有基于名义状态(nominal state)的滤波模型，此时参与 kalman 滤波更新的不是前面讲的 $\delta\boldsymbol{x}$，而是$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}^T & \boldsymbol{v}^T & \boldsymbol{q}^T & \boldsymbol{b}_a^T & \boldsymbol{b}_\omega^T\end{bmatrix}^T$，对应的观测量变为$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{p}^T & \boldsymbol{v}^T & \boldsymbol{q}^T\end{bmatrix}^T$，此时 kalman 更新过程为

$$\check{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{F}_{k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+\boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{w}_k$$

$$\check{\boldsymbol{P}}_k=\boldsymbol{F}_{k-1}\hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{k-1}\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{B}_{k-1}^T$$

$$\boldsymbol{K}_k=\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{G}_k\check{\boldsymbol{P}}_k\boldsymbol{G}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{C}_k^T\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k=\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{G}_k\right)\check{\boldsymbol{P}}_k$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\check{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k-\boldsymbol{G}_k\check{\boldsymbol{x}}_k\right)$$

它对应的状态方程、观测方程等模型，本课程没有展开讲，请各位参考下方资料，理解其模型推导，并在课程提供的工程代码中实现。对比两种方法在精度或其他方面是否有差异，并分析原因。

参考资料：Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter

感谢聆听!

Thanks for Listening